函 数

函数的概念

函数的特性

初等函数

函数概念

定义　设数集 $D \subset R$，如果对 D 中每个数 x，变量 y 按照一定法则在 R 中有唯一确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的**函数**(function)，记为

$$y = f(x), \quad x \in D$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，D 称为**定义域**，记作 D_f，即 $D_f = D$.

函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的**值域**，记作 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

注　1. 函数的记号 f 也可以改用其他字母表示，比如 F、G、φ 等，这时函数就可记为 $y = F(x)$、$y = G(x)$、$y = \varphi(x)$ 等.

有时还可以直接利用因变量的记号来表示函数，即将函数记作 $y = y(x)$.

2. 构成函数的要素：定义域 D_f，对应法则 f.

3. 函数的定义域通常有两种情况：

一种在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际背景确定的.

比如：圆面积公式 $A=\pi r^2$ 的定义域为 $D=(0,+\infty)$；

自由落体运动中物体下落距离公式 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 的定义域为 $D=[0,T]$.

另一种是抽象地用算式表达的函数，这时我们约定：函数的定义域就是使表达式有意义的一切实数所组成的集合，这种定义域称作是函数的**自然定义域**.

此时，函数可以只用“$y = f(x)$”来表达.

比如，函数 $y=\ln(4-x)$ 的定义域是 $(-\infty,4)$，

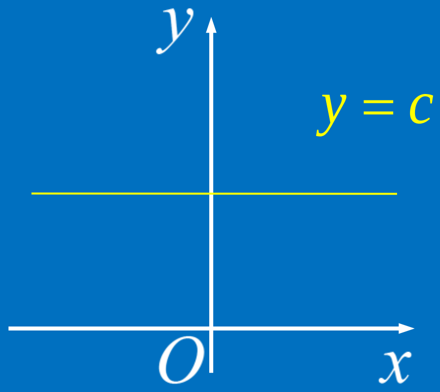
函数 $y=\sqrt{4-x}$ 的定义域是 $(-\infty,4]$.

4. 在坐标平面上的点集 $C=\{(x,y)\,|\,y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**图形**.

(graph)

例　函数 $y=C$，其中 C 为某确定的常数.

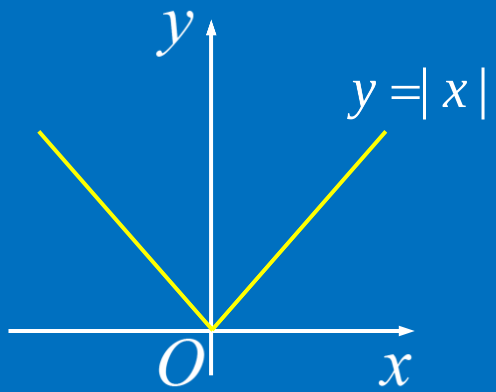
它的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $R_f=\{C\}$，它的图形是一条平行于 x 轴的直线，这函数称为**常数函数**.



例　绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geq 0\end{cases}$

定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,

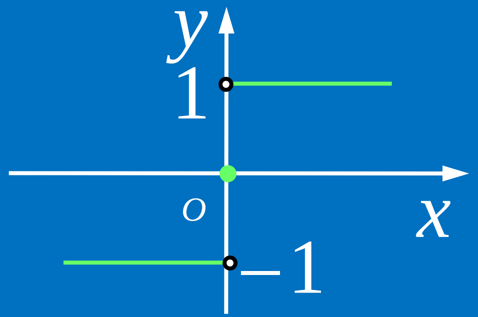
值域 $R_f=[0,+\infty)$



例　符号函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

定义域为 $D = (-\infty, +\infty)$，

值域 $R_f = \{-1, 0, 1\}$

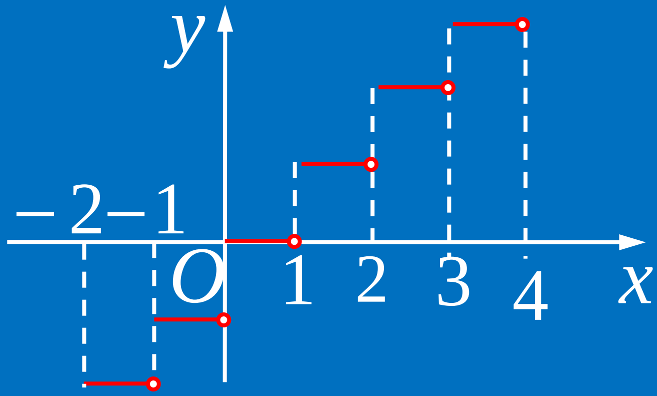


$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$$

例 设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作 $[x]$.

比如，$[3.5]=3$，$[0.5]=0$，$[-3.5]=-4$.

取整函数 $y=[x]$ 的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为整数集 $\mathbf{Z}$.



这种自变量在不同变化范围中，对应法则用不同的式子来表示的函数称为**分段函数**.

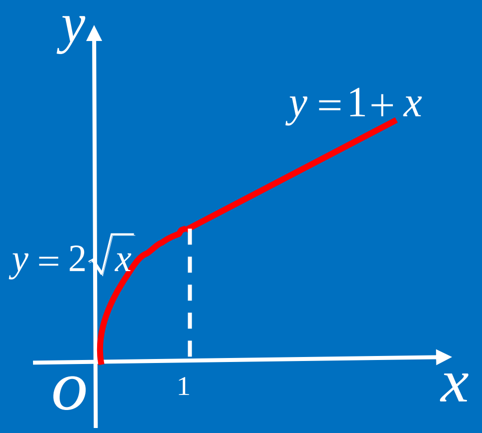
例　分段函数 $y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\le x\le 1,\\ 1+x, & x>1\end{cases}$

定义域为 $D=[0,+\infty)$，

比如，$\frac{1}{2}\in[0,1]$，则 $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$；

$1\in[0,1]$，则 $f(1)=2\sqrt{1}=2$；

$3\in(1,+\infty)$，则 $f(3)=1+3=4$．



函数的特性

函数的有界性

函数的单调性

函数的奇偶性

函数的周期性

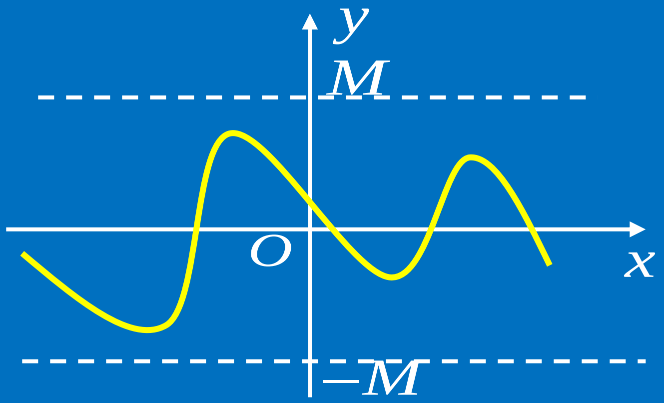
1. 函数的有界性

定义　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X \subset D$.
如果存在数 K_1，使得对任一 $x \in X$，都有 $f(x) \le K_1$,
则称函数 $f(x)$ 在 X 上有**上界**，而 K_1 称为函数 $f(x)$
在 X 上的一个上界.
如果存在数 K_2，使得对任一 $x \in X$，都有 $f(x) \ge K_2$，
则称函数 $f(x)$ 在 X 上有**下界**，而 K_2 称为函数 $f(x)$
在 X 上的一个下界.

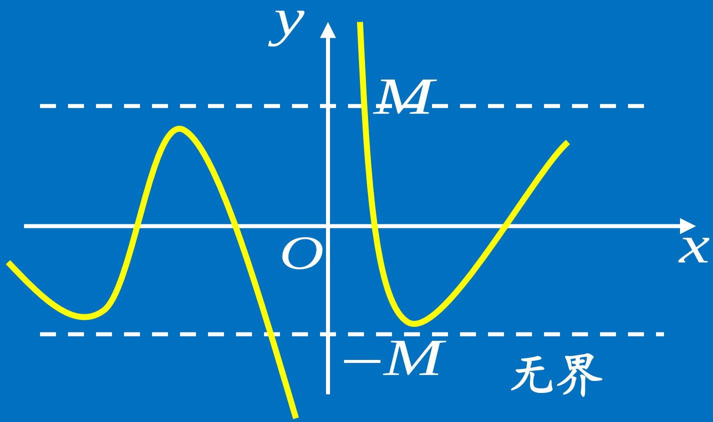
如果存在正数 M，使得对任一 $x \in X$，都有 $|f(x)| \le M$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**；

(bounded)

如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**.



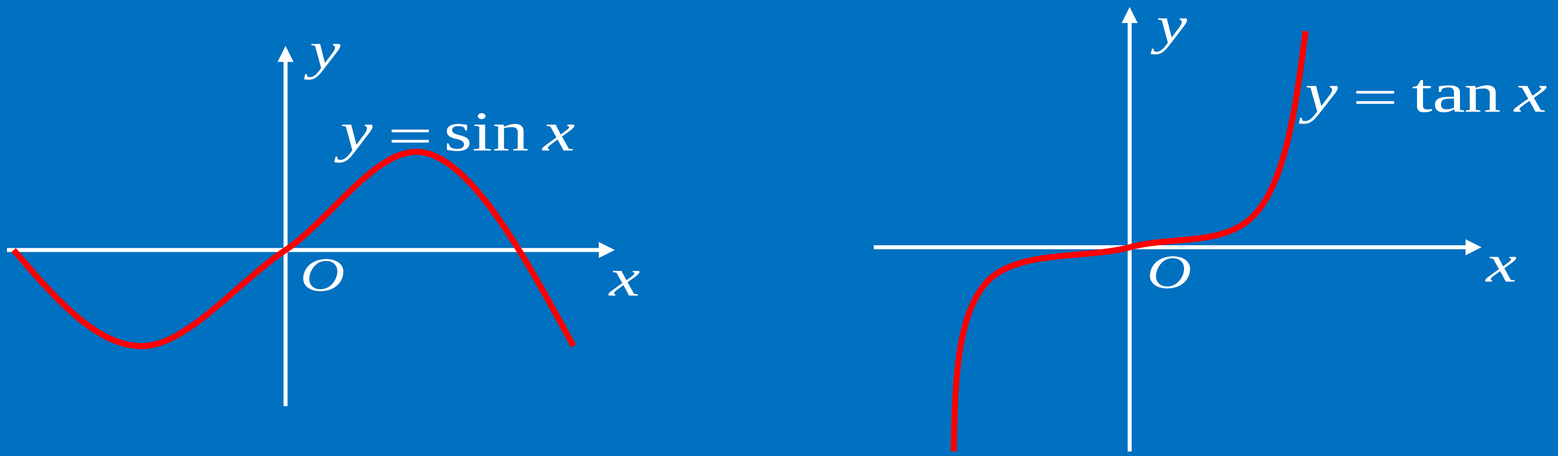
有界



无界

例 函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的.

函数 $y=\tan x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内是无界的.



2．函数的单调性

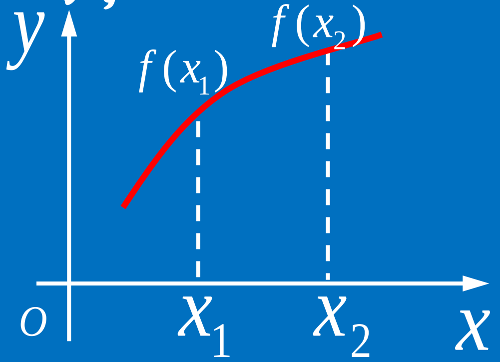
定义 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$，

如果对于区间 I 内的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，

恒有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

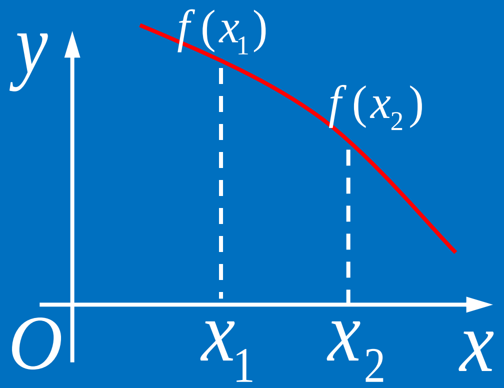
则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是单调增加的；



如果对于区间 I 内的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，

恒有 $$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是**单调减少**的.



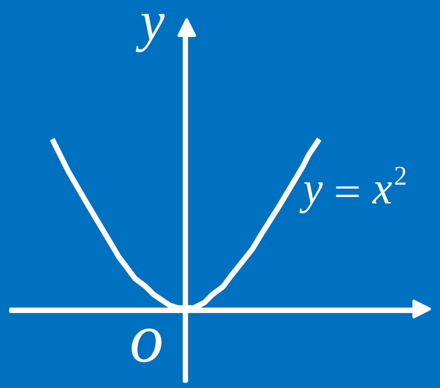
单调增加或单调减少的函数统称为**单调函数**.

(monotonic function)

比如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上单调减少，

在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的，但在 $(-\infty,+\infty)$ 内

函数 $f(x)=x^2$ 不是单调函数.



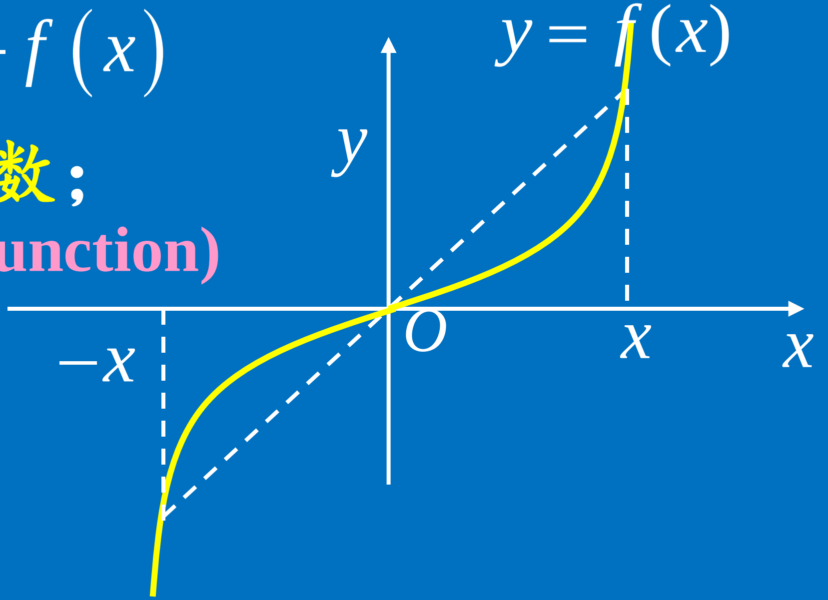
3. 函数的奇偶性

定义 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任一 $x\in D$，

$$f(-x)=-f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数**；

(odd function)

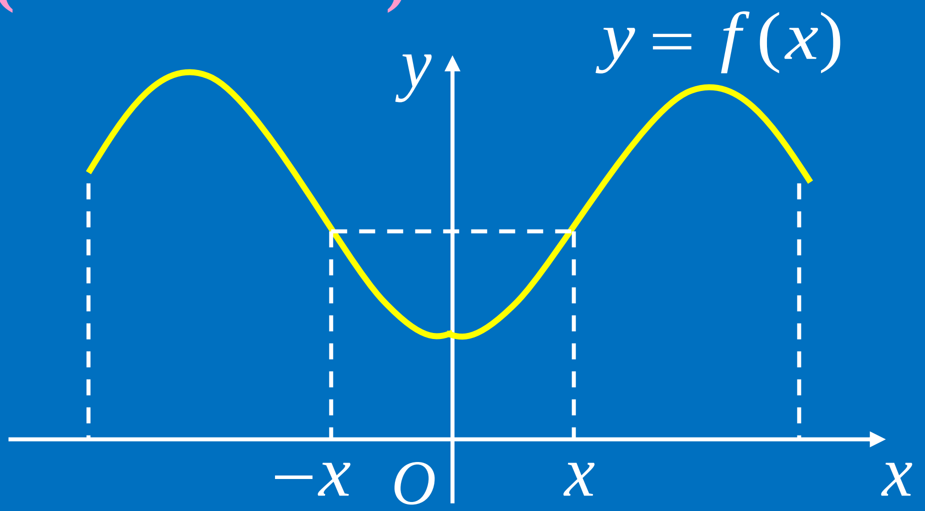


如果对于任一 $x \in D$，

$$f(-x)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

(even function)



比如，$f\left(x\right)=\sin x$ 是奇函数， $f\left(x\right)=\cos x$ 是偶函数，

而 $f\left(x\right)=\sin x+\cos x$ 既非奇函数，又非偶函数.

4. 函数的周期性

定义 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 T，使得对于任一 $x \in D$ 有 $x \pm T \in D$，

且 $$f(x+T) = f(x)$$ 恒成立，

则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为函数 $f(x)$ 的**周期**.

(periodic function)

注　1. 通常我们说的周期函数的周期是指最小正周期.
比如，函数 $\sin x$，$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，
函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

2. 并非所有函数都有最小正周期.

例 狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbf{Q},\\ 0 & x\in\mathbf{Q}^C,\end{cases}$$

对于任意正有理数r，$D(x+r)=D(x)$

当$x\in\mathbf{Q}$时，$r+x\in\mathbf{Q}$，则$D(r+x)=1=D(x)$；

当$x\in\mathbf{Q}^c$时，$r+x\in\mathbf{Q}^c$，则$D(r+x)=0=D(x)$；

因此$D(x+r)=D(x)$，但是没有最小正周期.

初等函数

幂函数： $y = x^{\alpha}$ （$\alpha \in \mathbf{R}$ 是常数）

(power function)

指数函数： $y = a^{x} (a > 0, a \neq 1)$

(exponential function)

对数函数：$y = \log_a x \, (a > 0, a \neq 1)$

(logarithmic function)

特别地， 当 $a = e$ 时， 记作 $y = \ln x$

三角函数：$y=\sin x, y=\cos x$
(trigonometric function)

$$y=\tan x, y=\cot x,$$

$$y=\sec x=\frac{1}{\cos x}, y=\csc x=\frac{1}{\sin x}$$

反三角函数：　$y=\arcsin x, y=\arccos x$
(inverse trigonometric function)

$y=\arctan x, y=\operatorname{arc}\cot x$，等等

以上五类函数统称为基本初等函数.

定义 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成的并可用一个式子表示的函数，称为**初等函数**.

(elementary function)

例如， $y=\sin^2 x$, $y=\arcsin x^2+\ln 2x$, $y=\sqrt{x^2+1}+x$,

均是初等函数.