函数的极限

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ 即 } \lim_{n\to\infty} f(n) = a$$

$\Leftrightarrow$ 当 $\underline{n\to\infty}$ 时，$\underline{f(n)\text{ 无限接近于确定的数 } a}$

$\Leftrightarrow \forall \underline{\varepsilon} > 0$，$\exists \underline{N} > 0$，当 $\underline{n > N}$ 时，有 $\underline{|f(n) - a| < \varepsilon}$

两种情形：

1. $x \to x_0$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形

2. $x \to \infty$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形

自变量趋于有限值时函数的极限

自变量趋于无穷大时函数的极限

函数极限的性质

自变量趋于有限值时函数的极限

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义.

如果在 $x \to x_0$ 的过程中,

$$\Leftrightarrow \quad 0 < |x - x_0| < \delta$$

对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于确定的数值 A,

$$\Leftrightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的**极限**.

定义 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，如果存在常数 A， $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，

那么常数 A 称为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**极限**，

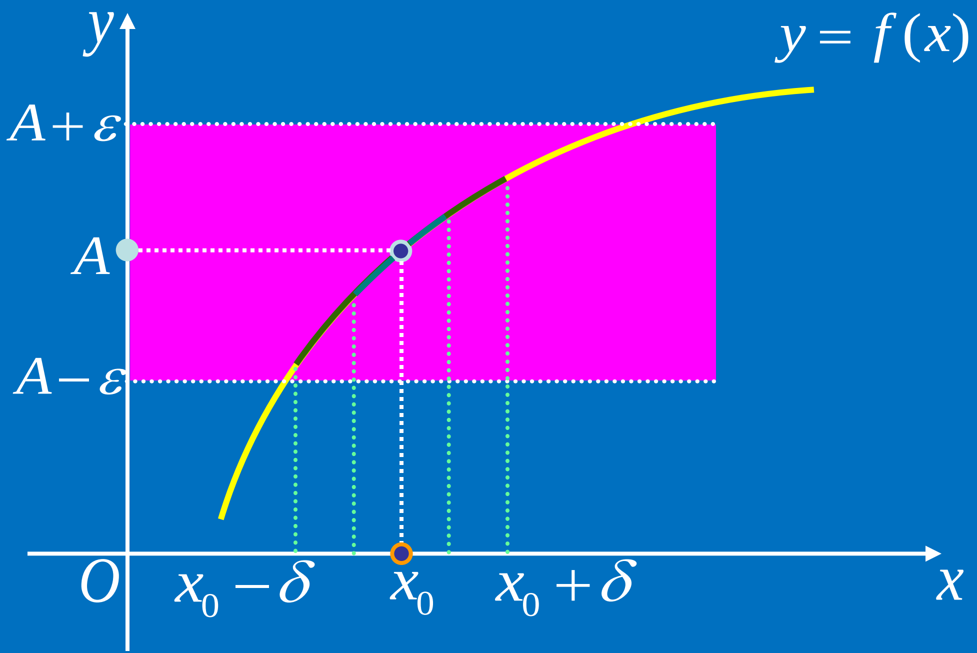
记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$（当 $x\to x_0$）.

注　1. 几何解释　$\forall \varepsilon > 0$，作平行于 x 轴两直线，

当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)(x \neq x_0)$ 时，

$f(x)$ 的函数值均在

这两直线之间.



2. $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 有没有极限

与 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处是否有定义无关；

例 证明 $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$，此处 c 为常数.

证明 $\forall \varepsilon > 0$，$\left| f(x) - A \right| = |c - c| = 0 < \varepsilon$，

所以可任取一正数 δ，则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，

有 $\left| f(x) - A \right| = |c - c| = 0 < \varepsilon$，因此 $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$.

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，

有 $\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$.

例 证明 $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

证明 $\forall \varepsilon > 0$，要使 $|f(x) - A| = |x - x_0| < \varepsilon$，

只要 $|x - x_0| < \varepsilon$，取 $\delta = \varepsilon$，

则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| = |x - x_0| < \varepsilon$，

因此 $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

例 证明 $\lim\limits_{x\to 1}(4x-1)=3.$

证明 $\forall\varepsilon>0$，

要使 $|f(x)-A|=|4x-1-3|=4|x-1|<\varepsilon$，

只要 $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{4}$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4}$，则当 $0<|x-1|<\delta$ 时，

有 $|f(x)-A|=|4x-1-3|<\varepsilon$，因此 $\lim\limits_{x\to 1}(4x-1)=3.$

例　证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

证明　这里，函数在 $x=1$ 是没有定义的，但是函数当 $x\to 1$ 时的极限存在与否与它并无关系.

因此 $\forall\varepsilon>0$，要使

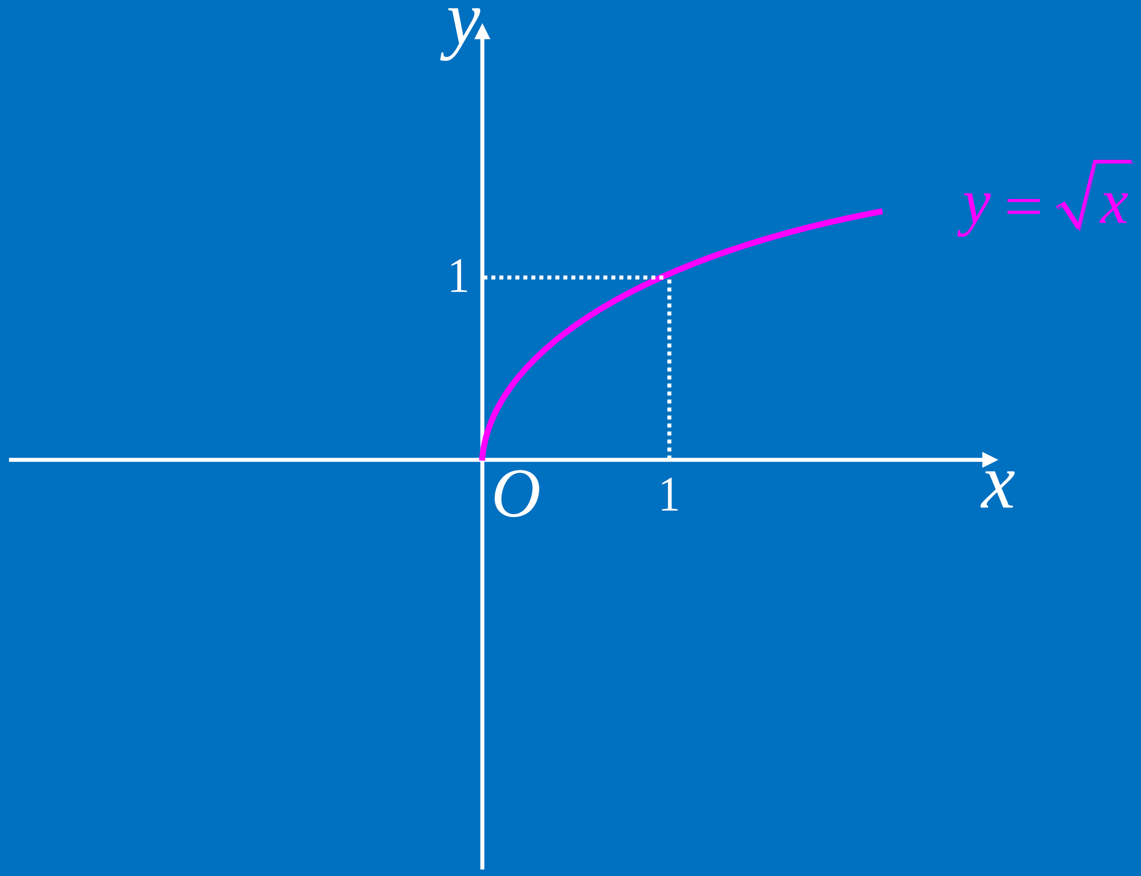
$$\left|f(x)-A\right|=\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|=\left|x+1-2\right|=\left|x-1\right|<\varepsilon,$$

只要 $|x-1|<\varepsilon$，取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-1|<\delta$ 时，

有 $\left|f(x)-A\right|=\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$，因此 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 中 “ $x \to x_0$ ” 的实质含义：

x 既从 x_0 的左侧也从 x_0 的右侧趋于 x_0 .



y
$y = \sqrt{x}$
1
O
1
x

（1） $x \to x_0^+$ 时， $f(x)$ 趋于 A，

则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的**右极限**，
(right-hand limit)

记作： $f(x_0^+) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$.

$\forall \varepsilon > 0$， $\exists \delta > 0$， 当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时，

恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

（2）$x \to x_0^-$ 时，$f(x)$ 趋于 A，

则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的左极限；
(left-hand limit)

记作：$f(x_0^-) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$.

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $-\delta < x - x_0 < 0$ 时，

恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

右极限和左极限统称为**单侧极限**.

定理 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0^+) = f(x_0^-) = A$

推论 如果 $f(x_0^+)$、$f(x_0^-)$ 中有一个不存在，

或两个虽存在但不相等，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在.

例 证明函数 $f(x)=\begin{cases} 4x-1, & x<1, \\ 0, & x=1, \\ \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x>1. \end{cases}$

当 $x\to1$ 时极限不存在.

证明

$$f(1^-)=\lim_{x\to1^-}(4x-1)=\lim_{x\to1}(4x-1)=3.$$

因为 $f(1^-)=3$，$f(1^+)=2$，

所以 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 不存在.

自变量趋于无穷大时函数的极限

定义 设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义，

如果在 $x \to \infty$ 过程中，

对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于确定的数值 A，

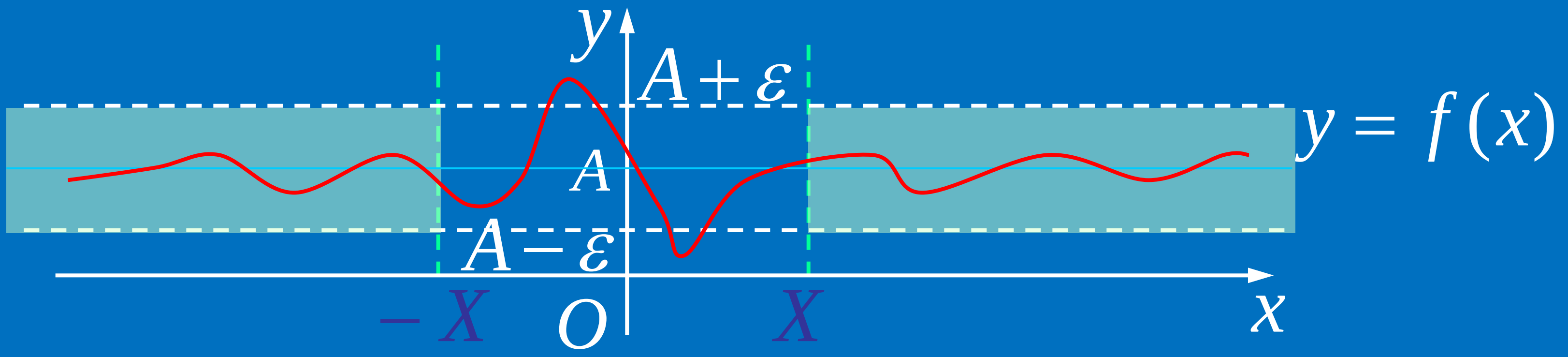
则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的**极限**.

定义 设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义，如果存在常数 A，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists X > 0$，当 $|x| > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，那么常数 A 称为函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的**极限**，

记作 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$，或 $f(x) \to A$（当 $x \to \infty$）.

几何解释 $\forall \varepsilon > 0$，作两直线，

当 $|x| > X$ 时，$y = f(x)$ 的图形位于这两直线之间.



直线 $y = A$ 为函数 $y = f(x)$ 的图形的**水平渐近线**.

(horizontal asymptote)

$x \to +\infty$，有 $f(x) \to A$，就有 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$，

即：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists X > 0$，

当 $x > X$ 时，恒有 $\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$.

$x \to -\infty$，有 $f(x) \to A$，就有 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$，

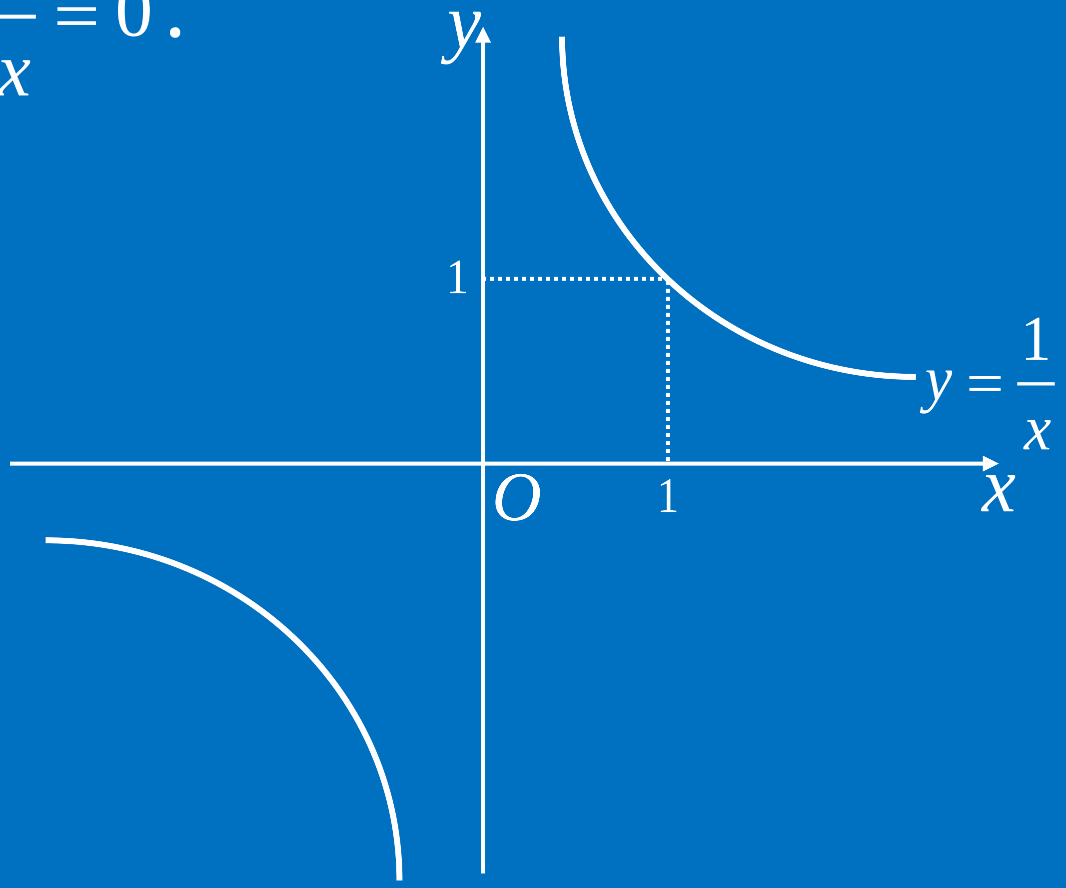
即：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists X > 0$，

当 $x < -X$ 时，恒有 $\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$.

定理 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = A \text{ 且 } \lim_{x \to -\infty} f(x) = A$$

例 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.



例 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

证明 $\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|f(x)-A\right|=\left|\dfrac{1}{x}-0\right|=\dfrac{1}{|x|}<\varepsilon$，

只要 $|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$，取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon}$，则当 $|x|>X$ 时，

有 $\left|f(x)-A\right|=\left|\dfrac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

函数极限的性质

以“$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$”这种形式为代表

给出关于函数极限性质的一些定理,

并就其中的一个给出证明.

定理 1（函数极限的唯一性）

如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，那么这极限唯一.

定理 2（函数极限的局部有界性）

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，那么存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$，

使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\le M$.

定理 3（函数极限的局部保号性） 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，且 $A > 0$（或 $A < 0$），那么存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $f(x) > 0$（或 $f(x) < 0$）.

证明　设 $A > 0$. 因为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，即 $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$，可取 $\varepsilon = \dfrac{A}{2} > 0$，则 $f(x) > A - \dfrac{A}{2} = \dfrac{A}{2} > 0$；同理可证 $A < 0$ 的情形.

推论 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$（$A\neq 0$），

那么存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，

有 $|f(x)|>\dfrac{|A|}{2}$.

推论 如果存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，

$f(x) \ge 0$（或 $f(x) \le 0$），且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，

那么 $A \ge 0$（或 $A \le 0$）.

定理4(函数极限与数列极限的关系)

若极限$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在，$\{x_n\}$为函数$f(x)$的定义域内任一收敛于$x_0$的数列，且满足$x_n \neq x_0 \left(n \in \mathbf{N}_+\right)$，那么相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$必收敛，且$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.