



无穷小与无穷大

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}} + e^{\frac{1}{x-3}} \right)$$



无穷小与无穷大



无穷小

定义 如果 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的极限为零,
则称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的**无穷小**.
(infinitesimal)

特别地, 以零为极限的 $\{x_n\}$ 也称为 $n \rightarrow \infty$ 时的**无穷小**.

比如, 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, 所以 $\frac{1}{x}$ 是 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小.

注：1. 除了常数 0 是无穷小，其他任何常数，
即便是这个数的绝对值很小很小，都不是无穷小。

2. 无穷小是以零为极限的函数。

定理 在自变量 x 的同一变化过程中，函数 $f(x)$ 有极限 A 的充分必要条件是

$f(x) = A + \alpha(x)$ ，其中 $\alpha(x)$ 是无穷小.

比如，由 $\lim_{x \rightarrow 3} x = 3$ 可得 $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 0$.



无穷大

如果函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时,
其绝对值 $|f(x)|$ 无限增大, 则称函数 $f(x)$ 为
当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的**无穷大**.

定义 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义(或 $|x|$ 大于某一正数时有定义). $\forall M > 0$, $\exists \delta > 0$ (或 $X > 0$), 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ (或 $|x| > X$) 时, 恒有 $|f(x)| > M$, 则称函数 $f(x)$ 为 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的**无穷大**.
(infinity)

注

1. 我们也说“函数的极限为无穷大”，并记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \text{ 等等}$$

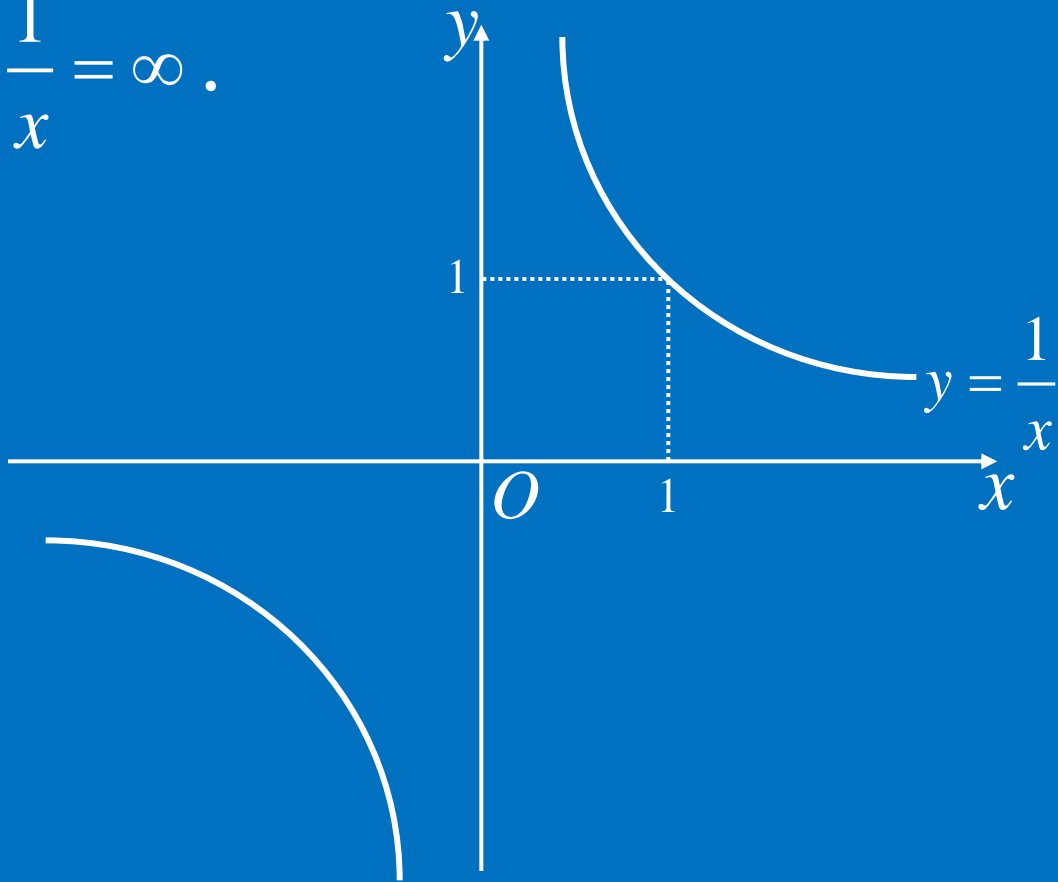
如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ ，则

直线 $x = x_0$ 是函数 $y = f(x)$ 的图形的铅直渐近线.
(vertical asymptote)

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty, \quad \text{等等}$$

例 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$.



例 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$.

证明 $\forall M > 0$, 要使 $\left| \frac{1}{x} \right| > M$, 只要 $|x| < \frac{1}{M}$,

取 $\delta = \frac{1}{M}$, 则当 $0 < |x - 0| < \delta$ 时,

有 $\left| \frac{1}{x} \right| > M$, 即 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$.

$\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x)| > M$.

定理 在自变量 x 的同一变化过程中,

如果 $f(x)$ 是无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷小;

如果 $f(x)$ 是无穷小, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷大.

比如, 由 $\lim_{x \rightarrow 3} (x-3) = 0$ 可得 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} = \infty$.