

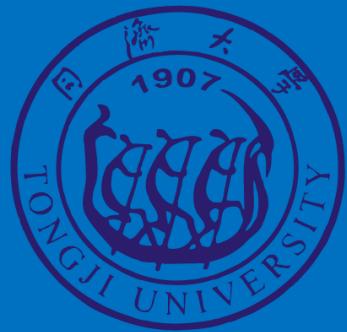


无穷小与无穷大

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}} + e^{\frac{1}{x-3}} \right)$$



无穷小与无穷大



无穷小

定义 如果  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的极限为零,

则称  $f(x)$  为当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的无穷小.

(infinitesimal)

特别地, 以零为极限的  $\{x_n\}$  也称为  $n \rightarrow \infty$  时的无穷小.

比如, 因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ , 所以  $\frac{1}{x}$  是  $x \rightarrow \infty$  时的无穷小.

注：1. 除了常数 0 是无穷小，其他任何常数，  
即便是这个数的绝对值很小很小，都不是无穷小.

2. 无穷小是以零为极限的函数.

定理 在自变量  $x$  的同一变化过程中，函数

$f(x)$  有极限  $A$  的充分必要条件是

$$f(x) = A + \alpha(x), \text{ 其中 } \alpha(x) \text{ 是无穷小.}$$

比如，由  $\lim_{x \rightarrow 3} x = 3$  可得  $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 0$ .



大 穷 无

如果函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时,

其绝对值  $|f(x)|$  无限增大, 则称函数  $f(x)$  为

当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时的无穷大.

定义 设函数  $f(x)$  在  $x_0$  的某一去心邻域内有  
定义(或  $|x|$  大于某一正数时有定义).  $\forall M > 0$  ,  
 $\exists \delta > 0$  (或  $X > 0$  ), 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  (或  $|x| > X$  ) 时,  
恒有  $|f(x)| > M$  , 则称函数  $f(x)$  为  
 $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$  ) 时的无穷大.  
(infinity)

注

1. 我们也说“函数的极限为无穷大”，并记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \text{ 等等}$$

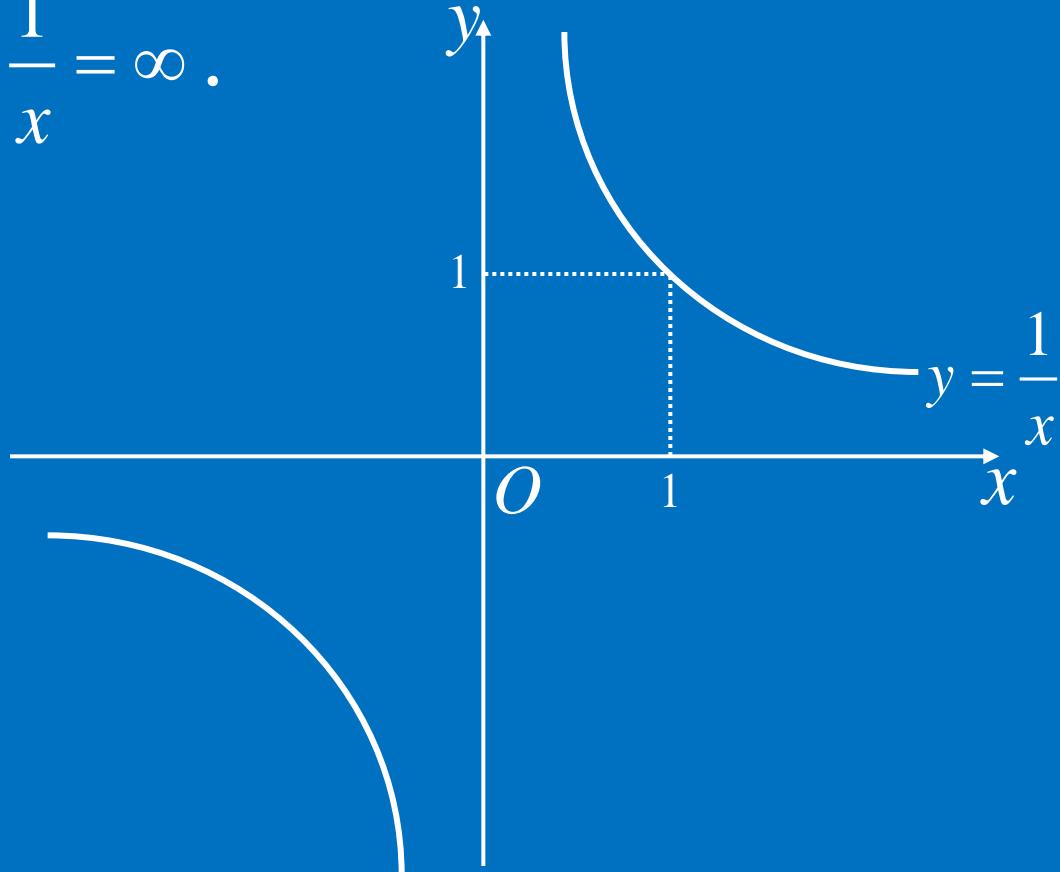
如果  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$  或  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ ，则

直线  $x = x_0$  是函数  $y = f(x)$  的图形的铅直渐近线。  
(vertical asymptote)

2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$  ,

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$  , 等等

例 证明  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$  .



例 证明  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ .

证明  $\forall M > 0$ ，要使  $\left| \frac{1}{x} \right| > M$ ，只要  $|x| < \frac{1}{M}$ ，

取  $\delta = \frac{1}{M}$ ，则当  $0 < |x - 0| < \delta$  时，

有  $\left| \frac{1}{x} \right| > M$ ，即  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ .

---

$\forall M > 0$ ， $\exists \delta > 0$ ，当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时，恒有  $|f(x)| > M$ .

定理 在自变量  $x$  的同一变化过程中，

如果  $f(x)$  是无穷大，则  $\frac{1}{f(x)}$  是无穷小；

如果  $f(x)$  是无穷小，且  $f(x) \neq 0$ ，则  $\frac{1}{f(x)}$  是无穷大.

比如，由  $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 0$  可得  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x - 3} = \infty$ .