极限运算法则

极限的四则运算法则

复合函数的极限运算法则

极限的
四则运算法则

“ $\lim$ ”下面没有标明自变量的变化过程的，我们约定结论对 $x \to x_0$、 $x \to \infty$、 $x \to x_0^+$ 等所有变化过程都成立.

定理　有限个无穷小的和是无穷小.

有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

注　这里函数的有界性只要求在无穷小的自变量变化范围内成立.

例 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$，又当 $x \neq 0$ 时，$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \leq 1$，因此函数 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 是 $x \to 0$ 时的无穷小，即 $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

推论 常数与无穷小的乘积是无穷小.

有限个无穷小的乘积是无穷小.

注 无穷小的和、差—$\alpha-\beta=\alpha+(-1)\cdot\beta$、积仍是无穷小.

定理 如果$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，那么

（1）$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；

（2）$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$；

（3）若又有$B\neq 0$，则$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

注　1. 此定理就是极限的四则运算法则，也即函数的和、差、积、商（$B \neq 0$）的极限等于函数极限的和、差、积、商.

2. **推论**　若 c 为常数，则 $\lim[cf(x)] = c\lim f(x) = cA$,

若 n 为正整数，则 $\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n = A^n$.

3. **定理** 设有数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$，如果$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B,$

那么

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = A \pm B;$

（2） $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = A \cdot B;$

（3）当 $y_n \neq 0 (n = 1, 2, \cdots),$ $B \neq 0$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{A}{B}.$

例 求 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)$.

解 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)=\lim\limits_{x\to 2}x^2-\lim\limits_{x\to 2}3x+\lim\limits_{x\to 2}5$

$$=(\lim_{x\to 2}x)^2-3\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}5=2^2-3\cdot 2+5=3.$$

设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，则有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=a_0(\lim_{x\to x_0}x)^n+a_1(\lim_{x\to x_0}x)^{n-1}+\cdots+a_n$$

$$=a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+\cdots+a_n=f(x_0).$$

例 求 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-9}{5x^2-7x-2}$.

解 $$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-9}{5x^2-7x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-9)}{\lim\limits_{x\to 3}(5x^2-7x-2)}$$

$$=\frac{2\cdot 3^2-9}{5\cdot 3^2-7\cdot 3-2}=\frac{9}{22}.$$

设 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中 $P(x)$、$Q(x)$ 为多项式，

则当 $Q(x_0)\neq 0$，则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=f(x_0).$$

当 $Q(x_0)=0$ 时，则商的极限的运算法则不能应用.

例 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$.

解 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x+3}=\dfrac{1}{2}.$

$$\lim_{x\to 1}\left(x^2+2x-3\right)=0,\quad \lim_{x\to 1}\left(x^2-1\right)=0.$$

例 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x+5}{3x^2-2x-1}$.

解 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x+5}=\dfrac{3\cdot1^2-2\cdot1-1}{2\cdot1+5}=0$,

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x+5}{3x^2-2x-1}=\infty$.

比如求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+5}{3x^2-2x-1}$

$\lim\limits_{x\to1}\left(3x^2-2x-1\right)=0$, $\lim\limits_{x\to1}\left(2x+5\right)=7\neq0.$

复合函数的
极限运算法则

定理（复合函数的极限运算法则）

设函数 $y=f[g(x)]$ 由函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成，$f[g(x)]$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，且存在 $\delta_0>0$，当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时，有 $g(x)\neq u_0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)]=\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$.

注　1．此定理的条件是保证 $\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)]$ 的极限存在；

2．在一定条件，此定理对自变量的其他变化情形也成立，如若 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=u_0, \lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，则

$$\lim_{x\to\infty} f[g(x)]=\lim_{u\to u_0} f(u)=A;$$

3．此定理是在求极限时进行变量代换的依据.

例　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+5}{3x^2-2x-1}$.

解　令 $u=\dfrac{1}{x}$，且当 $x\to\infty$ 时，有 $u\to 0$，则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+5}{3x^2-2x-1}=\lim_{u\to 0}\frac{2\cdot\frac{1}{u}+5}{3\left(\frac{1}{u}\right)^2-2\cdot\frac{1}{u}-1}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{2u+5u^2}{3-2u-u^2}=0.$$

例 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}$.

解 令 $u=\dfrac{1}{x}$，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}=\lim_{u\to 0}\frac{2\left(\dfrac{1}{u}\right)^3+3\left(\dfrac{1}{u}\right)^2+5}{7\left(\dfrac{1}{u}\right)^3+4\left(\dfrac{1}{u}\right)^2-1}.$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{2+3u+5u^3}{7+4u-u^3}=\frac{2}{7}.$$

结论 当 $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$, m 和 n 为非负整数时，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, & n = m \\ 0, & n > m \\ \infty, & n < m \end{cases}$$