极限存在准则

两个重要极限

准则 I　夹逼准则

重要极限　$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

准则 II　单调有界数列收敛准则

重要极限　$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$$

夹逼准则

准则 I 设数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足：

(1) 存在某个正整数n_0，当$n > n_0$时，有

$$y_n \le x_n \le z_n;$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$,

则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

准则Ⅰ所表达的直观意义：若 $n \to \infty$ 时，数列 $\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 的极限都为常数 a，而数列 $\{x_n\}$ 就夹在它们之间，那么当 $n \to \infty$ 时数列 $\{x_n\}$ 的极限也为常数 a.

例 证明数列极限

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$$

解 由于

$$\frac{n^2}{n^2+n\pi}\le n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)\le\frac{n^2}{n^2+\pi}$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+n\pi}=1,\quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+\pi}=1,$

由准则 I 可得 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)=1.$

准则 I′ 如果

（1） 存在点 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$（或正整数 X），当 $x \in \mathring{U}(x_0)$（或 $|x| > X$）时，有 $g(x) \le f(x) \le h(x)$；

（2） $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$， $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$

（或 $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = A$， $\lim\limits_{x \to \infty} h(x) = A$），

则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

（或 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ 存在且 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$）.

上面两个准则称为**夹逼准则**.

重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$：　　$\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1$，　$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

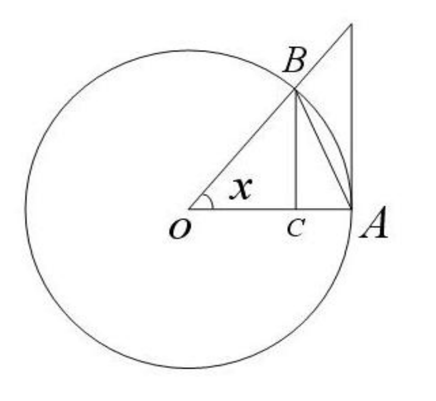
ΔAOB 的面积 < 扇形 AOB 的面积 < ΔAOD 的面积，

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin x<\frac{1}{2}x\cdot 1^2<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan x\text{，}\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\text{，}$$

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\text{，}\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\text{，}$$

即

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1\text{，}\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\text{，}$$



由于$\cos x$，$\dfrac{\sin x}{x}$，1均为偶函数，因此上式在$x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$时也成立．即

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad x \in \mathring{U}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$\lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$，　$\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$，利用准则I′则有

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

结论：

$$|\sin x| \le |x|$$

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0$$

例 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$.

证明 因为 $\cos x = 1 - 2\sin^2\dfrac{x}{2}$，又当 $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$ 时，

$$0 < 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}\text{，且}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2} = 0,$$

有 $\lim\limits_{x\to 0}2\sin^2\dfrac{x}{2} = 0$，得 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$.

$\cos x = 1 - 2\sin^2\dfrac{x}{2}$，因此要证明 $\lim\limits_{x\to 0}2\sin^2\dfrac{x}{2} = 0$.

例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\times 1=1.$$

例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}.$$

例 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$.

解 令 $u = \arcsin x$，当 $x \to 0$ 时，有 $u \to 0$，于是

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{u \to 0} \frac{u}{\sin u} = 1.$$

同样，$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan x}{x} = 1$.

单调有界数列
收敛准则

定义　如果数列$\{x_n\}$满足$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le \cdots$，则称该数列是**单调增加**的；如果数列$\{x_n\}$满足$x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge \cdots$，则称该数列是**单调减少**的.

单调增加或单调减少的数列统称**单调数列**.

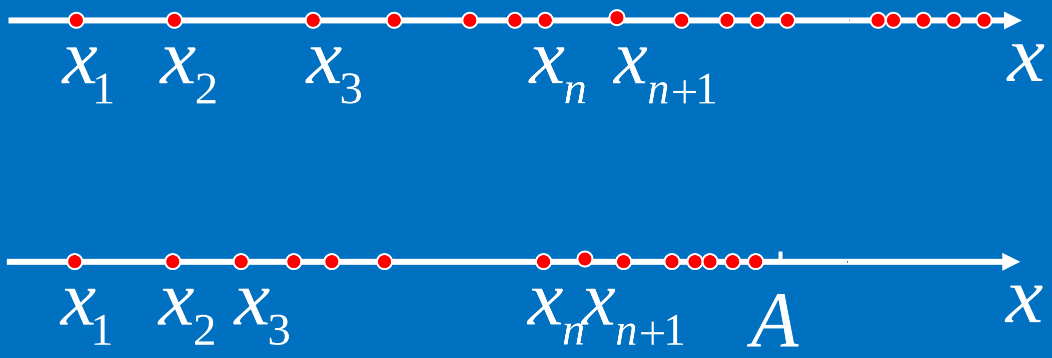
(monotone sequence)

准则 II　单调有界数列必有极限.

注　1. 准则 II 的条件可以减弱为：若数列 $\{x_n\}$ 单调增加且存在上界，则该数列必有极限；若数列 $\{x_n\}$ 单调减少且存在下界，则该数列也必有极限.

2. 收敛数列必有界，但有界数列却未必收敛，而准则 II 告诉我们：如果数列不仅有界，且是单调的，则该数列必收敛.

3．准则 II 的几何解释：以单调增加的数列$\{x_n\}$为例，



重要极限 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

用准则 II 证明 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$，因为我们可以证明

数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 单调增加且有上界，所以存在极限，

我们可以证明 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$.

例 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

解 令$t=\dfrac{1}{x}$，则当 $x\to 0$ 时，$t\to\infty$. 于是

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=\mathrm{e}.$$

例 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$.

解 令 $t=-x$，则当 $x\to\infty$ 时，$t\to\infty$. 于是

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

例 求 $\lim\limits_{x \to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

解 令 $t=2x$，则当 $x \to 0$ 时，$t \to 0$. 于是

$$\lim_{x \to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to 0}(1+t)^{\frac{2}{t}}$$

$$= \lim_{t \to 0}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^2 = \mathrm{e}^2.$$