函数的连续性
与间断点

函数的连续性

函数的间断点

函数的连续性

定义　设变量 u 从它的一个初值 u_1 变到终值 u_2，终值与初值的差 u_2-u_1 就叫做变量 u 的**增量**，记作 Δu，即 $\Delta u = u_2 - u_1$.

注　1. 增量 Δu 可以是正的，也可以是负的.

2. 记号 Δu 是一个整体不可分割的记号，决不能当作某个量 Δ 与变量 u 的乘积.

当自变量 x 在这邻域内从 x_0 变化到 $x_0+\Delta x$ 时，

函数值 $f(x)$ 相应地从 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0+\Delta x)$，

函数值 y 的对应增量为 $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$，

若 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$，或 $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left[f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \right] = 0$

则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 **连续**.

定义 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 **连续**.

(continuous)

设 $x = x_0 + \Delta x$，又由于

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0)$$

即 $$f(x) = f(x_0) + \Delta y$$

因此 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ 就等价于 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

定义 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 **连续**.

$f(x)$在点x_0连续

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当$|x - x_0| < \delta$时，

有$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0$， $\exists \delta > 0$， 当 $0 \le x - x_0 < \delta$ 时，

有 $\left| f(x) - f(x_0) \right| < \varepsilon$， 即 $f\left(x_0^+\right) = f(x_0)$，

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

$\forall \varepsilon > 0$， $\exists \delta > 0$， 当 $-\delta < x - x_0 \le 0$ 时，

有 $\left| f(x) - f(x_0) \right| < \varepsilon$， 即 $f\left(x_0^-\right) = f(x_0)$，

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f\left(x_0^-\right) = f\left(x_0^+\right) = f(x_0)$$

在区间上每一点都连续的函数，叫做在该区间上的连续函数，或者说函数在该区间上连续.
(continuous function)

如果区间包含端点，那么函数在右端点连续是指左连续，在左端点连续是指右连续.

例 设函数 $f(x)=P_n(x)$ 为 n 次多项式，

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\left(a_0\neq 0\right),$$

其在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

例 设$F(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中$P(x)$、$Q(x)$为多项式，若$Q(x_0)\neq 0$，就有$\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=F(x_0)$，即其在定义域内的每一点处都连续.

例 设 $y=\sin x$，其在 $(-\infty,+\infty)$ 内是连续的：

$\forall \varepsilon>0$，要使 $\left|\sin(x+\Delta x)-\sin x\right|$

$$=\left|2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\le 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\le 2\left|\frac{\Delta x}{2}\right|=\left|\Delta x\right|<\varepsilon,$$

只要 $\left|\Delta x\right|<\varepsilon$，取 $\delta=\varepsilon$，则当 $\left|\Delta x\right|<\delta$ 时，恒有

$\left|\sin(x+\Delta x)-\sin x\right|<\varepsilon$，即 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

同理可证：$y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

函数的间断点

假设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，

如果函数 $f(x)$ 有下列三种情形之一：

（1）在 $x=x_0$ 处没有定义；

（2）虽然在 $x=x_0$ 处有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在；

（3）虽然在 $x=x_0$ 处有定义，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，

但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$；

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 为不连续；

点 x_0 称为 $f(x)$ 的不连续点，或间断点.

函数的间断点可分为以下类型：

假设 $x = x_0$ 为函数 $f(x)$ 的间断点，

（1）若 $f(x_0^+)$、$f(x_0^-)$ 存在，

则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点.

如果 $f(x_0^+) = f(x_0^-)$，

则称 $x = x_0$ 为函数 $f(x)$ 的可去间断点.

如果 $f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$，

则称 $x = x_0$ 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

（2）不是第一类间断点的任何间断点，

称为**第二类间断点**.

例　函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

在 $x=0$ 处无定义，但 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，

因此 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点，

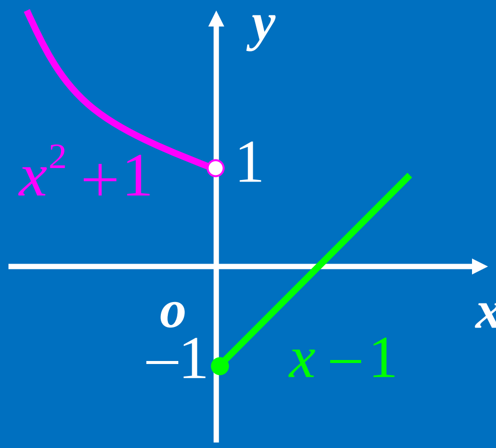
为可去间断点.

例　函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x<0 \\ x-1 & x\geq 0 \end{cases}$

由 $f\left(0^+\right)=-1\neq f\left(0^-\right)=1$ 知

$x=0$ 为函数 $f\left(x\right)$ 的第一类间断点，

为跳跃间断点.

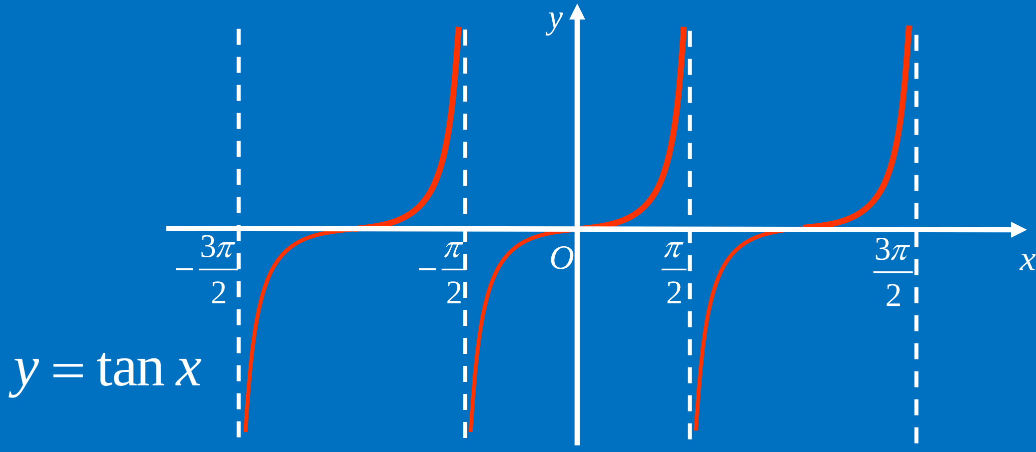


例　函数 $f(x)=\tan x$

在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处无定义，又 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty$，则 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 为

函数 $\tan x$ 的第二类间断点，

称为**无穷间断点**.



例　函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处无定义，故 $x=0$ 为函数 $\sin\dfrac{1}{x}$ 的第二类间断点，称为**振荡间断点**.