连续函数的运算与初等函数的连续性

连续函数的四则运算的连续性

反函数和复合函数的连续性

初等函数的连续性

连续函数的
四则运算的连续性

定理 若函数 $f(x), g(x)$ 在点 x_0 处连续，则

$$f(x)\pm g(x),\quad f(x)\cdot g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}\ (g(x_0)\neq 0)$$

在点 x_0 处也连续.

比如：因为 $\sin x$， $\cos x$ 都在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，

则 $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}, \cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ 也在它们的定义域内连续.

反函数和复合函数的连续性

定理 若函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加（或单调减少）且连续，则它的反函数 $x=\varphi(y)$ 也在对应的区间 $I_y=\{y \mid y=f(x),\ x\in I_x\}$ 上单调增加（或单调减少）且连续.

比如： $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加且连续，

所以它的反函数 $y=\arcsin x$ 在 $[-1,1]$ 上单调增加且连续；同理可得 $y=\arccos x$ 在 $[-1,1]$ 上单调减少且连续.

由于 $y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加且连续，

故 $y=\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加且连续.

同理可得 $y=\operatorname{arc}\cot x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调减少且连续.

定理　设函数 $y=f(g(x))$ 由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 复合而成，$\mathring{U}(x_0)\subset D_{f\circ g}$，若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 连续，则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=\lim_{u\to u_0} f(u)=f(u_0).$$

注　1. 在定理的条件下，如果作代换 $u=g(x)$，那么求 $\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)]$ 就化为求 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)$，这里 $u_0=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

2. 上式又可写成 $\lim\limits_{x\to x_0} f\left[g(x)\right]=f\left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right)$；

这表示，在定理的条件下，求复合函数 $y=f\left(g(x)\right)$ 的极限时，函数符号 f 与极限号 $\lim\limits_{x\to x_0}$ 可交换次序.

比如：求 $\lim\limits_{x\to 3}\sin\dfrac{x-3}{x^2-9}$. $y=\sin\dfrac{x-3}{x^2-9}$ 可看作 $y=\sin u$ 与 $u=\dfrac{x-3}{x^2-9}$ 复合而成，因为 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{1}{6}$，而函数 $y=\sin u$ 在点 $u=\dfrac{1}{6}$ 处连续，因此

$$\lim_{x\to 3}\sin\frac{x-3}{x^2-9}=\sin\left(\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}\right)=\sin\frac{1}{6}.$$

定理 设函数 $y=f\left(g\left(x\right)\right)$ 由函数 $u=g\left(x\right)$ 与函数 $y=f\left(u\right)$ 复合而成，$U\left(x_0\right)\subset D_{f\circ g}$，若函数 $u=g\left(x\right)$ 在点 x_0 连续，且 $g\left(x_0\right)=u_0$，而函数 $y=f\left(u\right)$ 在 $u=u_0$ 连续，则复合函数 $f[g(x)]$ 在点 x_0 也连续.

证明　只要在前面的定理中令$u_0 = g(x_0)$，

即得$\lim\limits_{x \to x_0} f[g(x)] = \lim\limits_{u \to u_0} f(u) = f(u_0) = f[g(x_0)]$.

则复合函数$f[g(x)]$在点x_0也连续.

比如：函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 的连续性.

函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 可看作 $y=\sin u$ 与 $u=\frac{1}{x}$ 复合而成，$\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 及 $(0,+\infty)$ 内连续，又 $f(u)=\sin u$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，因此，函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 及 $(0,+\infty)$ 内连续.

初等函数的连续性

定理　基本初等函数在其定义域内是连续的.

定理　一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

注　1. **定义区间**就是指：包含在定义域内的区间.

2. 若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，则有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，因此，若 $f(x)$ 是初等函数，且 x_0 是定义区间内的点，此时若求 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$，则需求出函数值 $f(x_0)$.

比如：$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-0^2}=1$.

例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$=\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln e=1.$$

例　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

解　令 $e^x-1=y$，则 $x=\ln(1+y)$，

易见当 $x\to 0$ 时，$y\to 0$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=1.$$

例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}\ (\alpha\in\mathbf{R})$.

解 令 $y=(1+x)^{\alpha}-1$，则 $\ln(1+y)=\ln(1+x)^{\alpha}$，

因此 $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{\ln(1+x)^{\alpha}}\cdot\frac{\ln(1+x)^{\alpha}}{x}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}=\alpha.$$

由上面的例子可得三个常用的等价无穷小关系式：

当 $x \to 0$ 时，$\ln(1+x) \sim x$，$\mathrm{e}^x - 1 \sim x$，$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$.

问：当 $x \to 0$ 时，$\log_a(1+x)$ ，$a^x - 1$ 的等价无穷小？

对于形如$u(x)^{v(x)}$ $(u(x)>0, u(x)\neq 1)$的幂指函数，

如果$\lim u(x)=a>0$，$\lim v(x)=b$，

则$\lim u(x)^{v(x)}=a^b$.

例　求 $\lim\limits_{x\to 0}(x+2e^x)^{\frac{1}{x-1}}$.

解 $$\lim_{x\to 0}(x+2e^x)^{\frac{1}{x-1}}=[\lim_{x\to 0}(x+2e^x)]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x-1}}=2^{-1}=\frac{1}{2}.$$