导数概念

引例

导数的定义

导数的几何意义

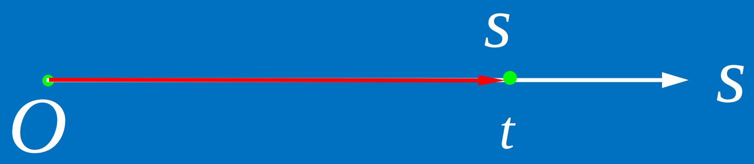
函数可导性与连续性的关系

引例

变速直线运动的速度

质点 M 沿直线 L 作变速运动.

规定了原点、正方向和单位长度，使直线成为数轴.



质点的运动： $s = f(t)$

该函数称为位置函数.

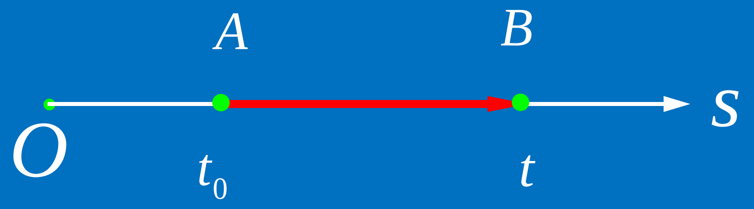
简单情形 该质点所经过的路程与所花的时间成正比，

$$\frac{\text{经过的路程}}{\text{所花的时间}}$$

是常值，此值可表示该质点的速度，
该质点作**匀速运动**.

比如 $f(t)=t^2$，$t_0=1$：　$t=2, 3$；　$t=3, 4$

$t_0 \Rightarrow t$ 时，A（位置 $f(t_0)$）$\Rightarrow B$（位置 $f(t)$）



$$\frac{\text{经过的路程}}{\text{所花的时间}} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

令 $t \to t_0$，若极限存在，设为 v，即

$$v = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

v 称为质点在时刻 t_0 的瞬时速度(速度).

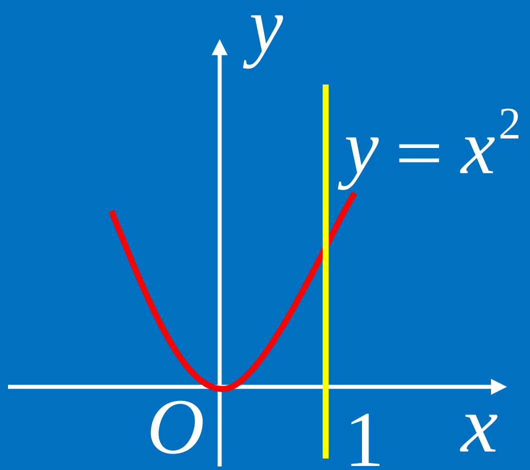
切线问题

圆的切线:与圆只有一个交点的直线

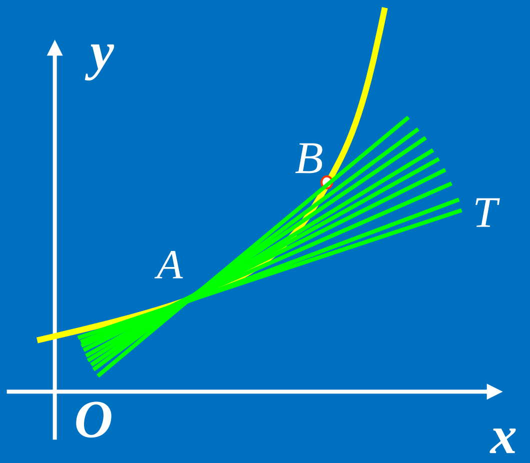
对一般曲线，这样定义切线就不一定合适.

例如，直线 $x=1$ 与抛物线 $y=x^2$ 只有一个交点，

但此直线不符合切线的原意.



定义 设点 A 是曲线 C 上一点， B 为另一点，作割线 AB，当点 B 沿曲线 C 移动而趋向于点 A 时，如果割线 AB 绕点 A 旋转而趋于一极限位置，即直线 AT，则称直线 AT 为曲线 $y=f(x)$ 在点 A 处的**切线**.



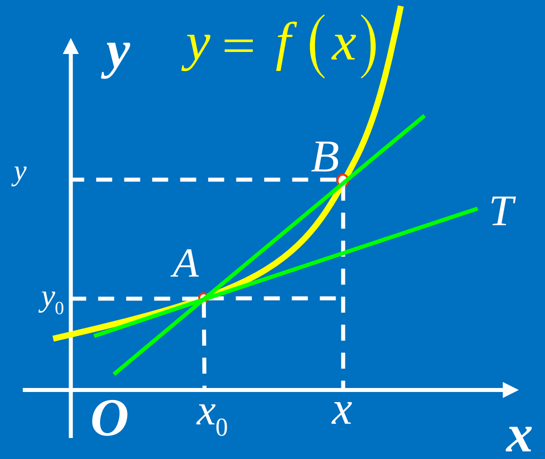
切线问题：曲线 C 为函数 $y=f(x)$ 的图形的情形

点 $A(x_0, y_0)$， $B(x, y)$，割线 AB 的斜率：

$$\tan\beta=\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

若当 $x\to x_0$ 时，极限存在，设为 k，

$$k=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$



k 是割线斜率的极限，也就是切线的斜率. 这里 $k=\tan\alpha$.

$$\boxed{v=\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}}$$

$$\boxed{k=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

导数的定义

函数在一点处的导数

定义 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx（$x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内）时，因变量 y 相应地取得增量

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

若 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**可导**，

(differentiable)

并称该极限为 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**导数**，记为 $f'(x_0)$，即

(derivative)

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

也可记作 $y'|_{x=x_0}$，$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ 或 $\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$.

注　(1) 函数在点 x_0 处可导

具有导数　　导数存在

(2) 导数的定义式可取不同形式，常见：

$$f'(x_0)=\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \text{ 或 } f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

(3) 导数概念：函数变化率

——各种具有不同意义的变量的变化“快慢”问题

(4) 如果 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 不存在，

就说函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处不可导.

不可导： $\Delta x \to 0$， $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to \infty$，

可说成“函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数为无穷大”.

导函数的定义

定义 若函数 $y=f(x)$ 在开区间 I 内的每一点处都可导，则称 $f(x)$ **在开区间 I 内可导**，这时，对于任一 $x\in I$，都对应着 $f(x)$ 的一个确定的导数值，这样就构成了一个新的函数，这个函数称为原来函数 $y=f(x)$ 的**导函数（导数）**，记为 $f'(x)$、y'、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.

在点 x_0 处的导数的定义式中将 x_0 换成 x，

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

注　（1） x 可以取开区间 I 内的任何数值，

但在极限过程中， x 是常量， Δx 或 h 是变量.

(2) $f'(x_0)$ 就是导函数 $f'(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的函数值，

即 $f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}$.

求导数举例

例 求常数函数 $f(x)=C$ 的导数.

解

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}=0$$

即

$$(C)'=0.$$

例 求幂函数 $f(x)=x^{\mu}\ (\mu\in\mathbf{R})$ 的导数.

当 $x\to 0$ 时，

$$(1+x)^{\mu}-1\sim\mu x$$

解 幂函数的定义域与常数 μ 有关，

设 x 在幂函数 x^{μ} 的定义域内且 $x\neq 0$，则

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^{\mu}-x^{\mu}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}x^{\mu}\cdot\frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\mu}-1}{\Delta x}=x^{\mu}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mu\dfrac{\Delta x}{x}}{\Delta x}=\mu x^{\mu-1}$$

即

$$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$$

注 利用本式可很方便地求出常见幂函数的导数

$$x' = 1；\ \left(x^2\right)' = 2x；\ \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}；\ \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

例 求指数函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$ 的导数.

解 $$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}a^x\cdot\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x\ln a}-1}{\Delta x}$$

$$=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\ln a}{\Delta x}=a^x\ln a$$

当 $x\to 0$ 时,

$e^x-1\sim x$

即 $$(a^x)'=a^x\ln a.$$

若 $a=e$，则 $(e^x)'=e^x$.

例　求对数函数 $f(x)=\log_a x\ (a>0, a\neq 1)$ 的导数.

解　$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

当 $x\to 0$ 时，

$\ln(1+x)\sim x$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\ln a\cdot\Delta x}=\frac{1}{\ln a}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x}=\frac{1}{x\ln a}$$

即　$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$.　若 $a=\mathrm{e}$，则 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

例 求正弦函数 $f(x)=\sin x$ 的导数.

解 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\cdot\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}=\cos x$$

即 $(\sin x)'=\cos x$.

$(\cos x)'=-\sin x$.

例　求函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处的导数.

解　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$,

当 $\Delta x<0$ 时，$\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=-1$，故 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=-1$;

当 $\Delta x>0$ 时，$\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=1$，故 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=1$.

所以，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$ 不存在，

$f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导.

单侧导数

定义 若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则称其为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的**左导数**，记作 $f_-'(x_0)$，即

$$f_-'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则称其为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的**右导数**，记作 $f_+'(x_0)$，即

$$f_+'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

注 (1) 左导数与右导数统称为**单侧导数**.

(2)

定理 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是左导数 $f'_-(x_0)$ 和右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等.

(3)

如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导，且 $f'_+(a)$ 及 $f'_-(b)$ 都存在，那么就称 $f(x)$ **在闭区间 $[a,b]$ 内可导**.

导数的几何意义

平面曲线 $C: y = f(x)$，

点 $A(x_0, y_0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 上一点，

且函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处可导.

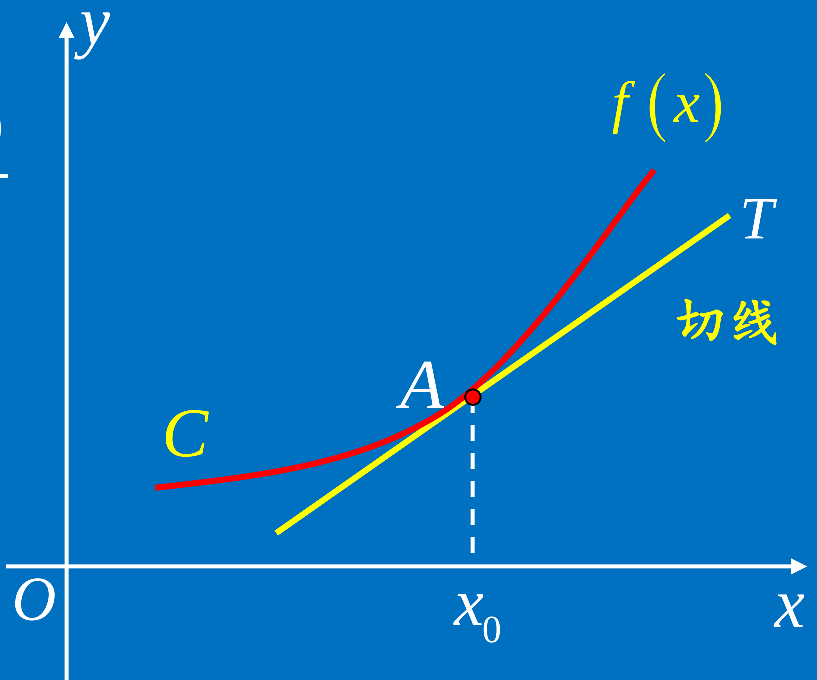
$y = f(x)$ 在点 A 处的切线斜率：

$$k = \tan\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= f'(x_0)$$

切线方程：

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

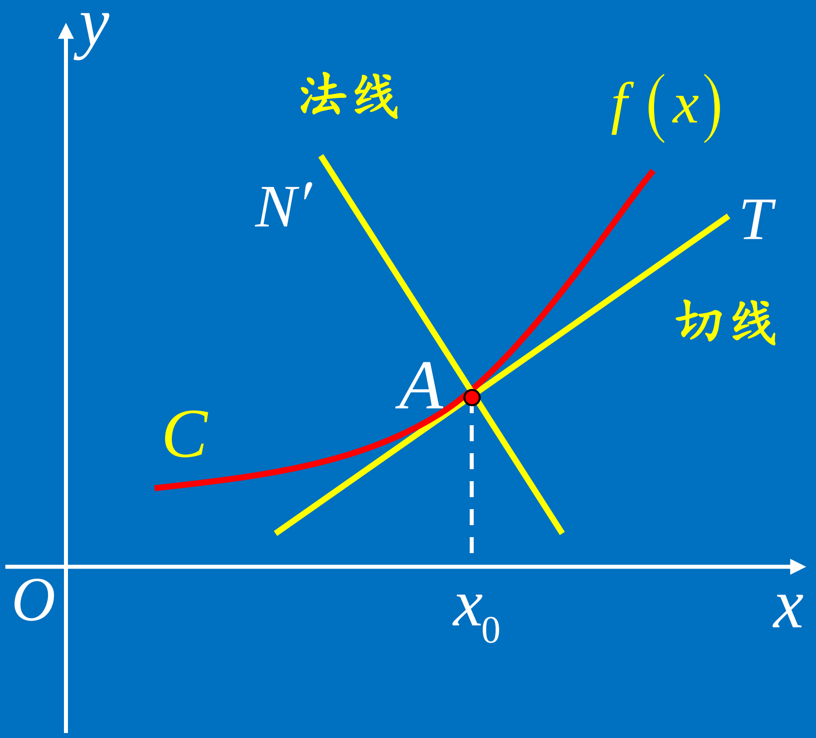


过切点 A 且与切线垂直的直线叫做曲线

$y=f(x)$ 在点 A 处的**法线**.

如果 $f'(x_0)\neq 0$，法线方程：

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$



注 如果 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**导数为无穷大**，这时 $y=f(x)$ 的割线以垂直于 x 轴的直线 $x=x_0$ 为极限位置，即 $y=f(x)$ 在点 A 处具有垂直于 x 轴的**切线** $x=x_0$，其**法线方程**为 $y=y_0$.

例 求曲线 $y=\sin x$ 在点 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 处的切线方程和法线方程.

解 $y=\sin x$ 在点 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 处的切线的斜率:

$$y'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=(\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\cos x\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$y=\sin x$ 在点 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 处的切线方程:

$$y-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

法线方程：

$$y-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

函数可导性
与连续性的关系

若 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$$

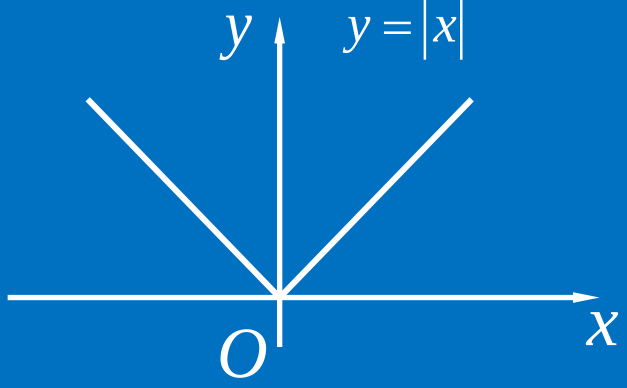
$$=f'(x_0)\cdot 0=0$$

即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，故 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

若 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

注　$y=f(x)$ 在点 x_0 处连续，但 $f(x)$ 在点 x_0 处不一定可导.

函数 $y=\sqrt{x^2}=|x|$ 在 $x=0$ 处连续，但函数 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导，而且曲线 $y=|x|$ 在原点没有切线.

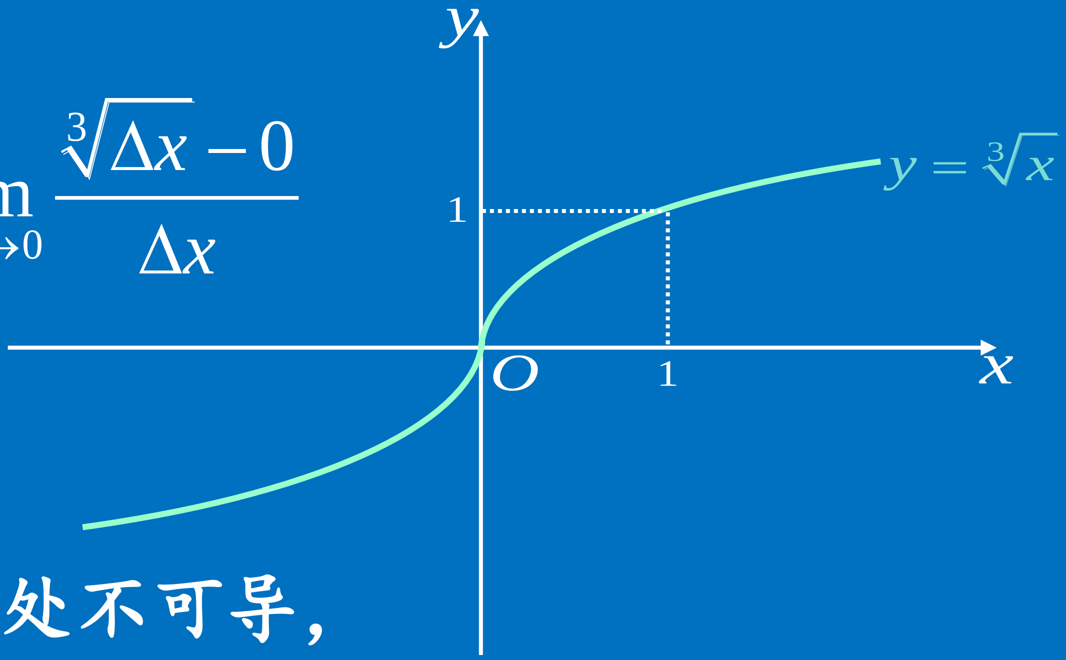


函数 $y=\sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 处连续，

但函数 $y=\sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 处不可导：因为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x}-0}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x^{\frac{2}{3}}}=+\infty$$



所以函数 $y=\sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 处不可导，

但是曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 在原点有切线 $x=0$．

小结

引例

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

导数的定义

函数在一点处的导数

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

导函数的定义

求导数举例

$$(C)' = 0$$

$$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(a^{x})' = a^{x}\ln a \quad (\mathrm{e}^{x})' = \mathrm{e}^{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

单侧导数

导数的几何意义

$f'(x_0)=k$　　切线方程　法线方程

函数可导性与连续性的关系

可导$\Rightarrow$连续，但反之未必成立.