函数的求导法则

函数的和、差、积、商的求导法则

反函数的求导法则

复合函数的求导法则

函数的和、差、积、商的求导法则

问题：设 $f(x)=2x+3$，$g(x)=3x-4$，

能否简便地求出 $f(x)$、$g(x)$ 以及 $f(x)+g(x)$ 的导数？

$f(x)=2x+3$，$f'(x)=2$，同理，$g'(x)=3.$

$f(x)+g(x)=5x-1$，$[f(x)+g(x)]'=5.$

$[f(x)+g(x)]'$ 恰为 $[f(x)]'+[g(x)]'$！

猜想：$[f(x)+g(x)]'=[f(x)]'+[g(x)]'$？

定理（四则运算求导法则） 如果函数$u=u(x)$和$v=v(x)$都在点x可导，那么它们的和、差、积、商（除分母为 0 的点外）都在点x可导，且

（1）$(u\pm v)'=u'\pm v'$

（2）$(uv)'=u'v+uv'$

（3）$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\left(v(x)\neq 0\right)$$

注（1）定理中的法则（1）可推广到有限个可导函数的情形.

比如 $u=u(x)$、$v=v(x)$、$w=w(x)$ 都可导，则有

$$(u-v+w)'=u'-v'+w'$$

(2) 定理中的法则（2）可推广到有限个可导函数的情形.

比如 $u=u(x)$、$v=v(x)$、$w=w(x)$ 都可导，则有

$$(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'$$

乘法的规则是“轮流”求导！

在一般情况下 $\left[u(x)v(x)\right]'\neq u'(x)v'(x)$；

在一般情况下 $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'\neq\dfrac{u'(x)}{v'(x)}$

(3) $\left[cu\left(x\right)\right]' = cu'\left(x\right)$，其中 c 为常数

例 求函数 $y=2x^3-5x^2+3x-\ln 7$ 的导数.

解 $y'=\left(2x^3-5x^2+3x-\ln 7\right)'$

$=\left(2x^3\right)'-\left(5x^2\right)'+\left(3x\right)'-\left(\ln 7\right)'$

$=2\left(x^3\right)'-5\left(x^2\right)'+3\left(x\right)'-0$

$=6x^2-10x+3$

例 求函数 $y=x\ln x-x$ 的导数.

解 $y'=(x\ln x)'-(x)'=(x)'\ln x+x(\ln x)'-1$

$$=\ln x+x\frac{1}{x}-1=\ln x$$

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

例 求函数 $y=\tan x$ 的导数.

解 $y'=(\tan x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$$=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$$

即 $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$

$$(\sin x)'=\cos x, \quad (\cos x)'=-\sin x$$

类似可证明

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x$$

反函数的求导法则

问题：设 $y=f(x)=2x+3$，

能否简便地求出 $y=f(x)$ 以及 $x=f^{-1}(y)$ 的导数？

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2，\quad x=f^{-1}(y)=\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}，\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{2}.$$

$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ 恰为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的倒数！

猜想：反函数的导数是直接函数导数的倒数？

定理（反函数求导法则）设函数 $x=f(y)$ 在区间 I_y 内单调、可导，且 $f'(y)\neq 0$， 则其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在区间 $I_x=\{x \mid x=f(y), y\in I_y\}$ 内也可导， 且

$$\left[f^{-1}(x)\right]'=\frac{1}{f'(y)} \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}.$$

例　求反正弦函数 $y=\arcsin x$ 的导数.

解　$y=\arcsin x$ 是 $x=\sin y$， $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 的反函数，

而且 $x=\sin y$ 在 $I_y=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调、可导，且

$f'(y)=\cos y>0$，在对应的区间 $(-1,1)$ 内有

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

即　$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

类似可证明

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arc}\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

常数和基本初等函数的导数公式：

（1）$(C)' = 0$

（2）$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$

（3）$(a^x)' = a^x \ln a$，$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

（4）$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$，$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

（5）$(\sin x)' = \cos x$

（6）$(\cos x)' = -\sin x$

（7）$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

（8）$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$

（9）$(\sec x)' = \sec x \tan x$

（10）$(\csc x)' = -\csc x \cot x$

常数和基本初等函数的导数公式：

（11）$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

（12）$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

（13）$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

（14）$(\operatorname{arc}\cot x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

复合函数的求导法则

问题：设 $y=f(u)=2u+3$，$u=g(x)=3x-4$，

能否简便地求出 $f(u)$、$g(x)$ 以及 $f[g(x)]$ 的导数？

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=2$，$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=3$，$y=f[g(x)]=6x-5$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=6$.

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 恰为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}$ 和 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 的乘积！

猜想：复合函数的导数是复合过程中

各层函数的导数的乘积？

定理（复合函数的求导法则） 设$u=g(x)$在点x可导，而$y=f(u)$在点$u=g(x)$可导，那么复合函数$y=f[g(x)]$在点x可导，且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot g'(x)$$

或

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

例 求函数 $y=\mathrm{e}^{x^3}$ 的导数.

解 $y=\mathrm{e}^{x^3}$ 可看作由 $y=\mathrm{e}^u$, $u=x^3$ 复合而成,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^u\cdot 3x^2=3x^2\mathrm{e}^{x^3}$$

$$\left(\mathrm{e}^u\right)'=\mathrm{e}^u,\quad \left(x^3\right)'=3x^2$$

复合函数的求导法则可以推广到多个中间变量的情形.

设 $y=f(u)$，$u=\varphi(v)$，$v=\psi(x)$，则

复合函数 $y=f\left\{\varphi\left[\psi(x)\right]\right\}$ 的导数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}=f'(u)\cdot\varphi'(v)\cdot\psi'(x)$$

例 求函数 $y=\ln\cos e^x$ 的导数.

解 所给函数可看做由 $y=\ln u$， $u=\cos v$， $v=e^x$ 复合而成.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}=\frac{1}{u}\cdot(-\sin v)\cdot e^x$$

$$=-\frac{\sin e^x}{\cos e^x}\cdot e^x=-e^x\tan e^x$$

$$(\ln u)'=\frac{1}{u},\quad(\cos v)'=-\sin v,\quad(e^x)'=e^x$$

例　求函数 $y=\sin(5x)$ 的导数.

解　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\left[\sin(5x)\right]'=\cos(5x)(5x)'=5\cos(5x)$

例　求函数 $y=\ln\arctan\sqrt{x}$ 的导数.

解　$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\left(\ln\arctan\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{\arctan\sqrt{x}}\left(\arctan\sqrt{x}\right)'$$

$$=\frac{1}{\arctan\sqrt{x}}\frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\left(\sqrt{x}\right)'$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x)\arctan\sqrt{x}}$$

小结

函数的和、差、积、商的求导法则

设 $u=u(x)$ 、 $v=v(x)$ 都可导，则

（1） $(u \pm v)'=u' \pm v'$

（2） $(uv)'=u'v+uv'$

（3） $(cu)'=cu'$ ，其中 c 为常数

(4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}\left(v(x)\neq 0\right)$

反函数的求导法则

设函数 $x = f(y)$ 在区间 I_y 内单调、可导，且 $f'(y) \neq 0$，则其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 在区间 $I_x = \{x \mid x = f(y), y \in I_y\}$ 内也可导， 且

$$\left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'(y)} \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}.$$

常数和基本初等函数的导数公式

复合函数的求导法则

设 $y=f(u)$, $u=g(x)$ 可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot g'(x) \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$