高阶导数

例如， $v(t)=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ 或 $v=s'$

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) \text{ 或 } a=(s')'$$

定义 一般地，函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍然是 x 的函数. 我们把 $y'=f'(x)$ 的导数叫做函数 $y=f(x)$ 的**二阶导数**，记作 y'' 或 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$，即

$$y''=(y')' \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$$

把 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的一阶导数．可以定义三阶导数、四阶导数、……、n 阶导数，分别记作 y'''、$y^{(4)}$、…、$y^{(n)}$，

(n- th derivative)

或 $\dfrac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}$、$\dfrac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4}$、…、$\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$．

二阶及二阶以上的导数均称为**高阶导数**.

函数 $y=f\left(x\right)$ 具有 n 阶导数，也称为

函数 $f\left(x\right)$ 为 **n 阶可导**.

例 求 $y=3x+\ln x$ 的二阶导数.

解 $y'=\left(3x+\ln x\right)'=3+\dfrac{1}{x}$,

$$y''=\left(y'\right)'=\left(3+\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}.$$

n 阶导数的求法：

直接法

间接法

公式法

1. 直接法：—— 数学归纳法

例　求 e^x 的 n 阶导数.

解　令 $y=\mathrm{e}^x$，　$y'=\left(\mathrm{e}^x\right)'=\mathrm{e}^x$，　$y''=\mathrm{e}^x$，　$y'''=\mathrm{e}^x$，

假设 $y^{(k)}=\mathrm{e}^x$ 成立，而且 $y^{(k+1)}=\left(y^{(k)}\right)'=\left(\mathrm{e}^x\right)'=\mathrm{e}^x$，

因此，$\left(\mathrm{e}^x\right)^{(n)}=\mathrm{e}^x$.

例　求 $\cos x$ 的 n 阶导数.

解　令 $y=\cos x$，

$$y'=(\cos x)'=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''=\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)'=-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+\frac{2\pi}{2}\right),$$

$$y''' = \left(\cos\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)\right)' = -\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right) = \cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right),$$

假设 $y^{(k)} = \cos\left(x+\dfrac{k\pi}{2}\right)$成立，而且

$$y^{(k+1)} = \left(\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)\right)' = -\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right) = \cos\left(x+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)$$

因此，$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

例　求 $y = x^{\mu}$ 的 n 阶导数.

解　$y' = \mu x^{\mu-1}$，　$y'' = \mu(\mu-1)x^{\mu-2}$，

$$y''' = \mu(\mu-1)(\mu-2)x^{\mu-3},$$

$$y^{(n)} = \left(x^{\mu}\right)^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n},$$

$$\left(x^{n}\right)^{(n)} = n!,\ \left(x^{n}\right)^{(n+1)} = 0.$$

例 求 $y=\dfrac{1}{x+a}$ 的 n 阶导数.

解 $y'=\dfrac{-1}{(x+a)^2}$, $y''=\dfrac{(-1)^2 1\times 2}{(x+a)^3}$,

$y'''=\dfrac{(-1)^3 1\times 2\times 3}{(x+a)^4}$, $y^{(n)}=\left(\dfrac{1}{x+a}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$.

$$\left[\ln\left(x+b\right)\right]^{(n)}=\left(\frac{1}{x+b}\right)^{(n-1)}$$

$$\left[\ln\left(x+b\right)\right]'=\frac{1}{x+b}$$

$$=\frac{\left(-1\right)^{n-1}\left(n-1\right)!}{\left(x+b\right)^{n}}$$

结论 如果函数$u=u(x)$和$v=v(x)$都在点x具有n阶导数，那么它们的和、差也在点x具有n阶导数，且

$$(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$$

2. 间接法：

例 求 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+5x+6}$ 的 n 阶导数.

解 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+5x+6}=\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}$，

$$\left(\frac{1}{x^2+5x+6}\right)^{(n)}=\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x+3)^{n+1}}.$$

3. 公式法：

莱布尼茨（Leibniz）公式：

若 $f(x)$、$g(x)$ 具有 n 阶导数，则

$$\left[f(x)\cdot g(x)\right]^{(n)}$$

$$= f^{(n)}g + \mathrm{C}_n^1 f^{(n-1)}g' + \cdots + \mathrm{C}_n^k f^{(n-k)}g^{(k)} + \cdots + fg^{(n)}$$

其中 $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.

例　求 $y=x^2\mathrm{e}^{2x}$ 的 20 阶导数.

解　由 $\left(x^2\right)'=2x$，$\left(x^2\right)''=2$，

$\left(x^2\right)^{(n)}=0(n\geq 3)$，　　又 $\left(\mathrm{e}^{2x}\right)^{(n)}=2^n\mathrm{e}^{2x}$，

$$\left(x^2\mathrm{e}^{2x}\right)^{(20)}=2^{20}\mathrm{e}^{2x}\cdot x^2+20\cdot 2^{19}\mathrm{e}^{2x}\cdot 2x+\frac{20\times 19}{2}\cdot 2^{18}\mathrm{e}^{2x}\cdot 2$$

$$=2^{20}\mathrm{e}^{2x}\left(x^2+20x+95\right).$$