隐函数及由
参数方程所确定
的函数的导数

例如，$y=\sin x+1$，$y=x^3+e^{2x}$，

特点　等式左端是因变量的符号，

而右端是含有自变量的式子，

当自变量取定义域内任一值时，由该式能确定

对应的函数值. 用这种方式表达的函数叫做**显函数**.

隐函数的导数

由参数方程所确定的函数的导数

隐函数的导数

例如，方程$\sin x - y^3 + 2 = 0$，它表示一函数，因为当变量x在$(-\infty, +\infty)$内取值时，变量y有确定的值与它对应. 例如，当$x = 0$时，$y = \sqrt[3]{2}$；当$x = \dfrac{\pi}{2}$时，$y = \sqrt[3]{3}$，等等. 这样的函数称为**隐函数**.

定义 如果变量 x 和 y 满足一个方程 $F(x,y)=0$，在一定条件下，当 x 取某区间的任一值时，相应地总有满足此方程的唯一的 y 值存在，那么就说方程 $F(x,y)=0$ 在该区间内确定了一个**隐函数**.

把一个隐函数化成显函数，叫做**隐函数的显化**，

例如，方程 $\sin x-y^3+2=0$ 可解出 $y=\sqrt[3]{\sin x+2}$.

方程 $1+xe^y-y=0$.

例 求由方程$\sin x - y^3 + 2 = 0$所确定的隐函数的导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 （1） $y = \sqrt[3]{\sin x + 2}$，所以$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\cos x}{3\sqrt[3]{(\sin x + 2)^2}}$.

（2）由方程$\sin x - y^3 + 2 = 0$确定y是x的函数,

设为$y = f(x)$, 得$\sin x - f^3(x) + 2 \equiv 0$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sin x - f^3(x) + 2\right] = \frac{\mathrm{d}0}{\mathrm{d}x}$$ 得 $\cos x - 3f^2(x)f'(x) = 0$

即 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x) = \frac{\cos x}{3f^2(x)} = \frac{\cos x}{3y^2}.$$

求隐函数导数的方法：

一般地，方程 $F(x,y)=0$ 确定 $y=y(x)$，得 $F\left[x,y\left(x\right)\right]\equiv 0$；

在 $\underline{F\left[x,y\left(x\right)\right]\equiv 0}$ 两边对 x 求导即得隐函数的导数.

$$\Downarrow$$

$$F\left[x,y(x)\right]=0$$

例　求由方程$1+xe^{y}-y=0$所确定的隐函数的导数$\dfrac{dy}{dx}$.

解
$$1+xe^{y(x)}-y(x)=0$$

$$\frac{d}{dx}\left[1+xe^{y(x)}-y(x)\right]=\frac{d0}{dx}$$

得
$$e^{y(x)}+xe^{y(x)}\cdot y'(x)-y'(x)=0$$

故
$$y'=\frac{e^{y}}{1-xe^{y}}\quad\left(1-xe^{y}\neq 0\right).$$

若要求$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$呢？

$$\boxed{y' = \frac{\mathrm{e}^y}{1-x\mathrm{e}^y}}$$

$$\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{e}^{y(x)}}{1-x\mathrm{e}^{y(x)}}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{e}^{y(x)}y'(x)\cdot\left(1-x\mathrm{e}^{y(x)}\right)-\mathrm{e}^{y(x)}\cdot\left[-\mathrm{e}^{y(x)}-x\mathrm{e}^{y(x)}y'(x)\right]}{\left(1-x\mathrm{e}^{y(x)}\right)^2}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{2y}\left(2-x\mathrm{e}^y\right)}{\left(1-x\mathrm{e}^y\right)^3}\quad\left(1-x\mathrm{e}^y\neq 0\right).$$

对数求导法

例 求 $y=\sqrt[4]{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ 的导数.

解 假设 $x>4$,

$$\ln y(x)=\frac{1}{4}\left[\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)-\ln(x-4)\right]$$

$$\frac{y'(x)}{y(x)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)$$

所以

$$y' = \frac{y}{4}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt[4]{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4}\right)$$

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4}\right)$$

当 $x<1$ 时，$y=\sqrt[4]{\dfrac{(1-x)(2-x)}{(3-x)(4-x)}}$；

当 $2<x<3$ 时，$y=\sqrt[4]{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(3-x)(4-x)}}$；

用同样的方法可得相同结果.

对数求导法就是先在 $y=f(x)$ 的两边取对数，

然后求出 y 的导数.

例 求 $y = x^{\sin x}\left(x > 0\right)$ 的导数.

解 $\ln y(x) = \sin x \cdot \ln x$

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

故 $y' = y(\cos x \ln x + \dfrac{\sin x}{x}) = x^{\sin x}(\cos x \ln x + \dfrac{\sin x}{x}).$

另一方法：

$$y = \mathrm{e}^{\ln x^{\sin x}} = \mathrm{e}^{\sin x \ln x}$$

$$y' = \mathrm{e}^{\sin x \ln x}(\sin x \ln x)' = \mathrm{e}^{\sin x \ln x}(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x})$$

故 $$y' = x^{\sin x}(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}).$$

由参数方程所确定的函数的导数

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases} (0 \le t \le 2\pi),$$

$$t \Leftrightarrow (x, y)$$

例如：当 $t = 0$ 时， $x = a$， $y = 0$

消去 t ，可得

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}\ (0 \le t \le \pi) \text{ 或 } y = -\sqrt{a^2 - x^2}\ (\pi < t \le 2\pi)$$

这就是联系因变量 y 与自变量 x 的式子.

也是参数方程所确定的函数的显式表示.

定义 一般地，若参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

确定 y 与 x 的函数关系，则称此函数关系所表达的函数为**由参数方程所确定的函数**.

注　有时由参数方程所确定的函数，未必很容易写出其函数的显示表示，比如

摆线方程
$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}.$$

求导方法：

设参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，这里假设$x=\varphi(t)$有单调连续的反函数$t=\varphi^{-1}(x)$，且此反函数能与函数$y=\psi(t)$构成复合函数，那么由此参数方程所确定的函数可以看做是由$y=\psi(t)$、$t=\varphi^{-1}(x)$复合而成的函数，

函数$\varphi'(t)$与$\psi'(t)$存在，且$\varphi'(t)\neq 0$.

求导方法：

$$\boxed{\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases},\ t=\varphi^{-1}(x)}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

即 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$ 或 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}.$$

这就是由参数方程所确定的函数的导数公式.

例 计算由摆线的参数方程 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的导数.

解 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\left[a\left(1 - \cos t\right)\right]'}{\left[a\left(t - \sin t\right)\right]'} = \frac{a \sin t}{a\left(1 - \cos t\right)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

$$\left(t \neq 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\right)$$

若要求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$呢？

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{\sin t}{1-\cos t}}$$

$$\boxed{x=a(t-\sin t)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right]=\frac{d}{dx}\left[\frac{\sin t}{1-\cos t}\right]$$

$$=\frac{\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\sin t}{1-\cos t}\right]}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\dfrac{\cos t-1}{(1-\cos t)^2}}{a(1-\cos t)}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}$$

$$(t\neq 2k\pi, k\in \mathbf{Z})$$

注 设 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，这里再有函数 $\varphi''(t)$ 与 $\psi''(t)$ 存在：

(1) 一般情况下，$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} \neq \dfrac{\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}}{\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}}$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} \neq \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]$

（2）方法：$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\dfrac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}}{\varphi'(t)}$$

公式：$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}$$

问题：如何求由$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$所确定的函数的$\dfrac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}$？