函数的微分

微分的定义

微分的几何意义

基本初等函数的微分公式与微分运算法则

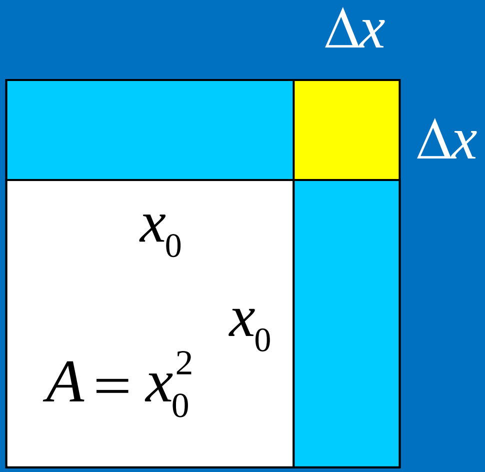
微分的定义

问题：一块正方形金属薄片因受温度变化的影响，其边长由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$，问此薄片的面积改变了多少？

$$\Delta A=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2$$

$$=\underline{2x_0\Delta x}+\underline{(\Delta x)^2}$$

$$\approx 2x_0\Delta x$$



一般地，如果函数 $y=f(x)$ 满足一定条件，

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数，

$$\Delta y - A\Delta x = o(\Delta x)$$

当 $A\neq 0$，且 $|\Delta x|$ 很小时，$\Delta y \approx A\Delta x$

定义　设函数 $y=f(x)$ 在某区间内有定义，x_0 及 $x_0+\Delta x$ 在这区间内，如果函数的增量

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

可表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数，那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 是**可微**的，而 $A\Delta x$ 叫做函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 相应于自变量增量 Δx 的**微分**，记作 $\mathrm{d}y$，即

(differential)

$$\mathrm{d}y = A\Delta x$$

问题：在什么条件下，函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 是可微的？

定理 函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，且当函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微时，其微分一定是

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x$$

结论 (1) $y = f(x)$ 在任意点 x 的微分称为**函数的微分**，记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$，即 $\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x$；

(2) 把自变量的增量 Δx 称为**自变量的微分**，记作 $\mathrm{d}x$，即 $\mathrm{d}x = \Delta x$.

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x \quad 即 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$$

导数又称为“**微商**”.

例 求函数 $y=x^3$ 在 $x=2,\ \Delta x=0.02$ 时的增量与微分.

解 函数增量：

$$\Delta y=(x+\Delta x)^3-x^3,$$

又 $x=2,\quad \Delta x=0.02$

故 $$\Delta y=2.02^3-2^3=0.242408$$

函数微分：$\mathrm{d}y=y'(x)\mathrm{d}x=3x^2\mathrm{d}x,$

又 $x=2,\quad \mathrm{d}x=\Delta x=0.02$

故 $$\mathrm{d}y=3\times 2^2\times 0.02=0.24$$

微分的几何意义

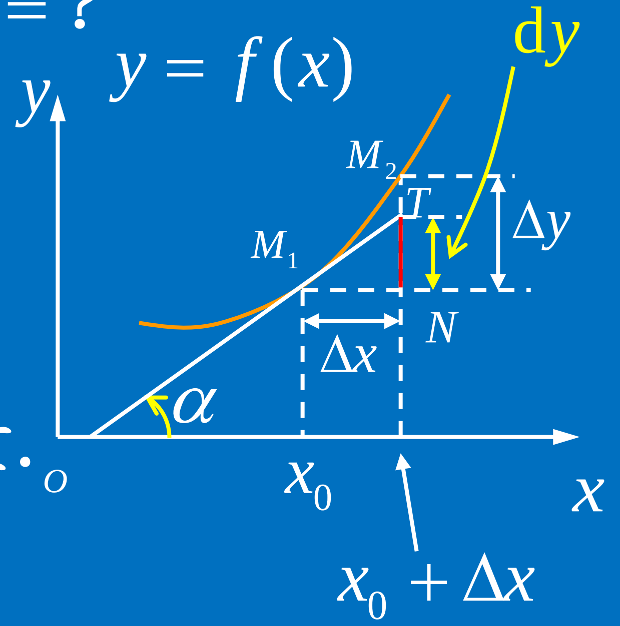
$y = f(x)$：$M_1N = \Delta x$, $NM_2 = \Delta y$, $\mathrm{d}y = ?$

$\underline{NT} = M_1N \cdot \tan\alpha = \Delta x \cdot f'(x_0) = \underline{\mathrm{d}y}$

当 Δy 是曲线上点的纵坐标增量时，

$\mathrm{d}y$ 就是曲线的切线上点的纵坐标增量.

当 $\Delta x \to 0$ 时， $\underline{\Delta y} - \underline{\mathrm{d}y} = o(\Delta x)$.



在点 M_1 的附近，我们可以用切线段来近似代替曲线段.

基本初等函数的微分公式与微分运算法则

由 $$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$$

求函数的微分 $\mathrm{d}y$：求出导数 $f'(x)$，再乘 $\mathrm{d}x$.

基本初等函数的微分公式

导数公式	微分公式
$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$	$\mathrm{d}x^{\mu} = \mu x^{\mu-1}\mathrm{d}x$
$(a^{x})' = a^{x}\ln a$	$\mathrm{d}a^{x} = a^{x}\ln a\,\mathrm{d}x$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$	$\mathrm{d}\log_a x = \dfrac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad d(\sin x) = \cos x dx$$

$$(\cos x)' = -\sin x \qquad d(\cos x) = -\sin x dx$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad d(\tan x) = \sec^2 x dx$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x \qquad d(\cot x) = -\csc^2 x dx$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x \qquad d(\sec x) = \sec x \tan x dx.$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x \qquad d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \mathrm{d}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \mathrm{d}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad \mathrm{d}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \qquad \mathrm{d}\operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

函数和差积商的微分运算法则

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\mathrm{d}\frac{u}{v} = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}$$

复合函数的微分法则：设 $y=f(u)$ 及 $u=g(x)$ 都可导，

则 $y=f\left[g(x)\right]$ 的微分为

$$dy = f'(u)g'(x)dx$$

另外， $g'(x)dx = du$ ，

所以 $$dy = f'(u)du$$

无论 u 是自变量还是中间变量，微分形式 $dy=f'(u)du$

保持不变，这一性质称为**微分形式的不变性**.

例 设 $y=\ln(x^2-x+2)$，求 $\mathrm{d}y$.

解 （1）$y'=\dfrac{2x-1}{x^2-x+2}$，　$\mathrm{d}y=\dfrac{2x-1}{x^2-x+2}\mathrm{d}x$

（2）$y=\ln u$，$u=x^2-x+2$

$$\mathrm{d}y=(\ln u)'\,\mathrm{d}u=\frac{1}{x^2-x+2}\mathrm{d}(x^2-x+2)$$

$$=\frac{2x-1}{x^2-x+2}\mathrm{d}x$$