微分中值定理

罗尔（Rolle）定理

拉格朗日（Lagrange）中值定理

柯西（Cauchy）中值定理

罗尔定理

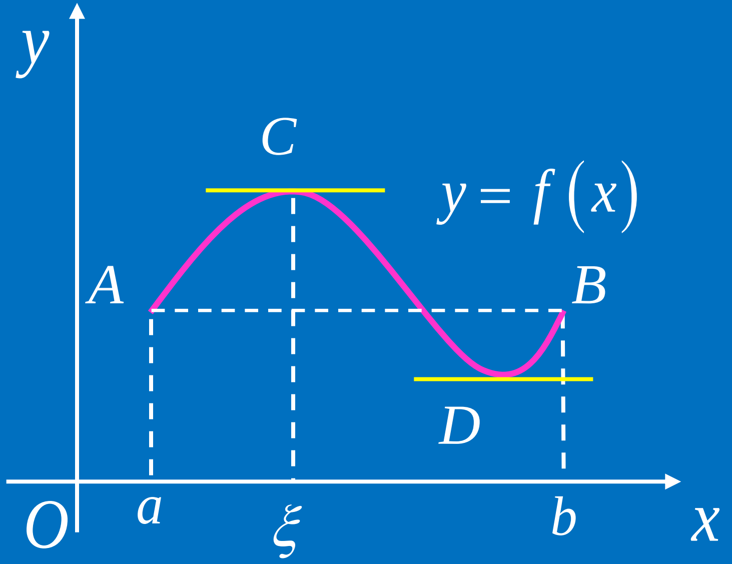
设 AB： $y = f(x)(x \in [a,b])$.

除端点外处处有不垂直于 x 轴的切线，且 $f(a) = f(b)$.

则曲线有水平切线.

如果记 C 点的横坐标为 ξ，

那么 $f'(\xi) = 0$.



定理（费马引理） 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，并且在 x_0 处可导，如果对任意 $x \in U(x_0)$，有

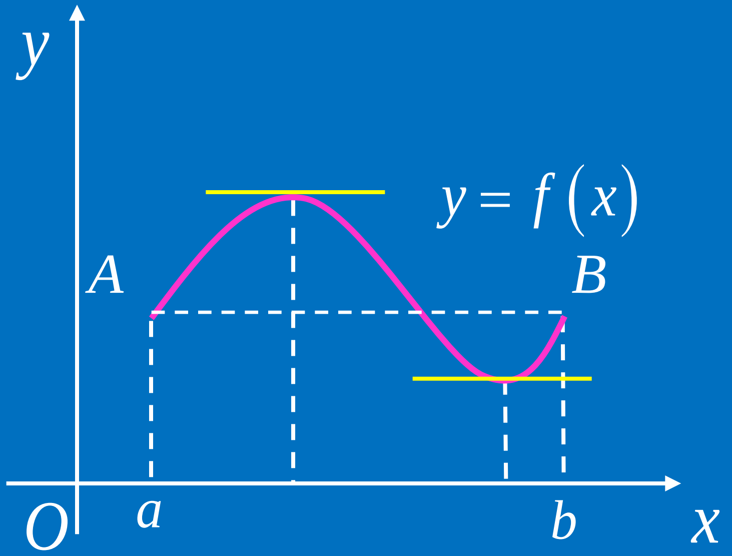
$$f(x) \le f(x_0) \quad （或\ f(x) \ge f(x_0)）$$

那么 $f'(x_0) = 0$.

注 (1) 导数等于零的点称为函数的**驻点**（或称为**稳定点**，**临界点**）；

(stationary point)

(2) 若函数在 x_0 处可导，且 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在某 $U(x_0)$ 上的最大值（或最小值），则 $f'(x_0)=0$.

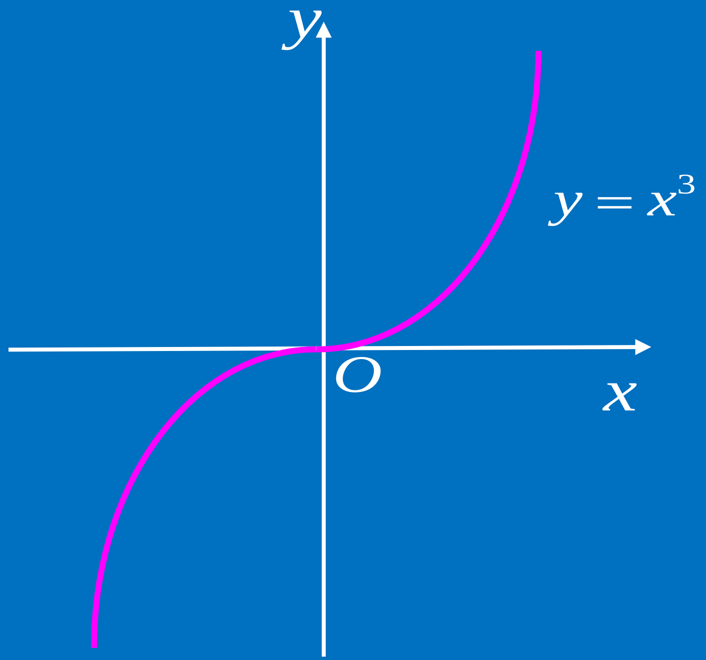


(3) 此定理的逆未必成立.

比如 $y=x^3$， $y'(0)=3x^2\big|_{x=0}=0$，

但 $y(0)=0$ 不是此函数在 $U(0)$

上的最大值或最小值.



定理 设 $f(x)$ 在 x_0 可导, $\forall x\in U(x_0)$, 有 $f(x)\le f(x_0)\,(\ge)$

那么 $f'(x_0)=0$.

证明 先设 $x\in U(x_0)$ 时, $f(x)\le f(x_0)$

$$f(x)-f(x_0)\le 0$$

当 $x>x_0$ 时 $$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$$

当 $x<x_0$ 时 $$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\boxed{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

定理 设 $f(x)$ 在 x_0 可导，$\forall x \in U(x_0)$，有 $f(x) \le f(x_0)\ (\ge)$

那么 $f'(x_0) = 0$.

证明

$$\underline{f'_+(x_0)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0$$

$$\underline{f'_-(x_0)} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0$$

所以，$f'(x_0) = 0$. 当 $f(x) \ge f(x_0)$ 时，可类似证明.

罗尔定理 如果函数 $y=f(x)$ 满足

（1） 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

（2） 在开区间 (a,b) 内可导；

（3） 在区间端点处的函数值相等，即 $f(a)=f(b)$，

那么在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$，使得

$$f'(\xi)=0$$

证　$f(x)$在$[a,b]$上连续$\Longrightarrow$必取得最大值M和最小值m.

情况 1： $M=m$. 在$[a,b]$上：$f(x)=M$.

于是$f'(x)=0$. $\forall\xi\in(a,b)$, 有$f'(\xi)=0$.

情况 2： $M>m$. 由于$f(a)=f(b)$，不妨设$M\neq f(a)$,

于是存在$\xi\in(a,b)$，使$f(\xi)=M$.

故对$\forall x\in[a,b]$，有$f(\xi)\geq f(x)$, 可知$f'(\xi)=0$.

注　如果不满足定理的条件，

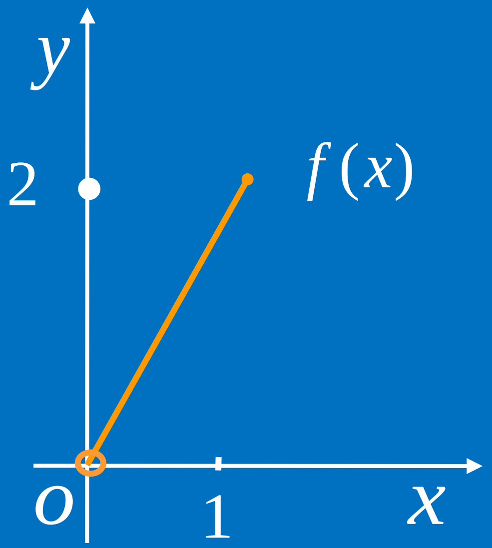
则定理的结论可能成立，也可能不成立.

例 $f(x)=\begin{cases}2, & x=0\\ 2x, & 0<x\le 1\end{cases}$:

在$[0,1]$上不连续，

虽满足定理另外两个条件，

但没有水平切线.

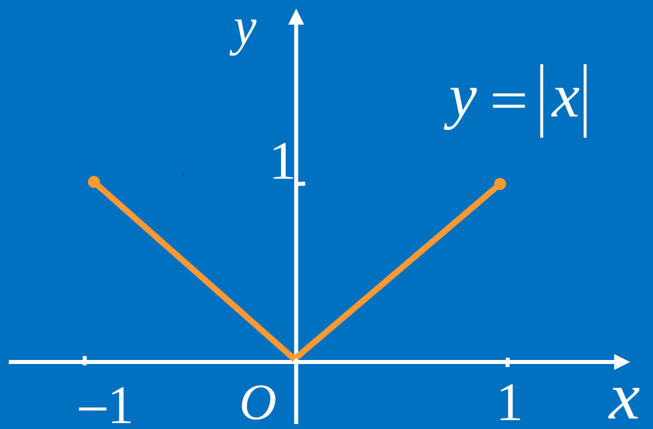


例 $f(x)=|x|,\quad x\in[-1,1]$：

在 $x=0$ 不可导，

虽满足定理另外两个条件，

但没有水平切线.

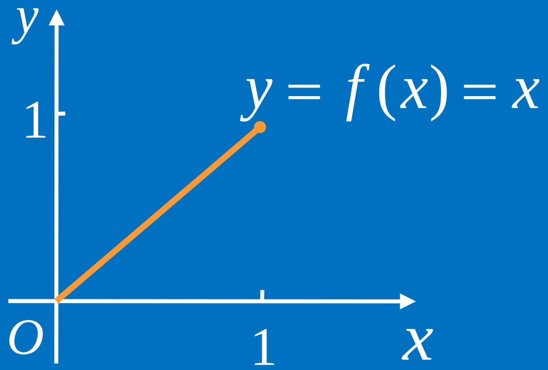


例 $f(x)=x,\quad x\in[0,1]$：

在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，

但 $f(0)=0\neq f(1)=1$，

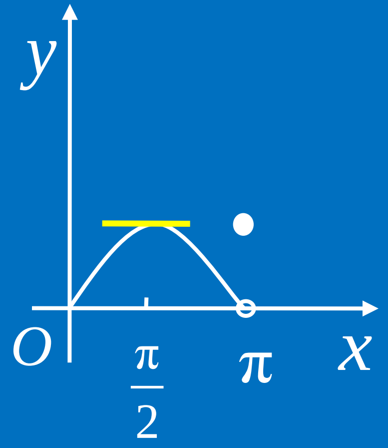
也没有水平切线.



例 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in[0,\pi) \\ 1, & x=\pi\end{cases}$：

在 $[0,\pi]$ 上不连续， $f(0)\neq f(\pi)$，

但 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}\in(0,\pi)$ 有水平切线.



例 验证罗尔定理对 $f(x)=2x^3+5x^2+3x-4$ 在 $[-1,0]$ 上的正确性.

证明 $f(x)$ 在 $[-1,0]$ 上连续，在 $(-1,0)$ 内可导，

$f(-1)=f(0)=-4$.

$$f'(\xi)=0\text{，即 } 6\xi^2+10\xi+3=0\text{，}$$

$\xi_1=\dfrac{-5+\sqrt{7}}{6}$，$\xi_2=\dfrac{-5-\sqrt{7}}{6}$. 取 $\xi=\xi_1\in(-1,0)$ 即可.

拉格朗日中值定理

拉格朗日中值定理 若函数 $f(x)$ 满足

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

（2）在开区间 (a,b) 内可导，

则在 (a,b) 内至少存在一点 $\xi(a<\xi<b)$，使得

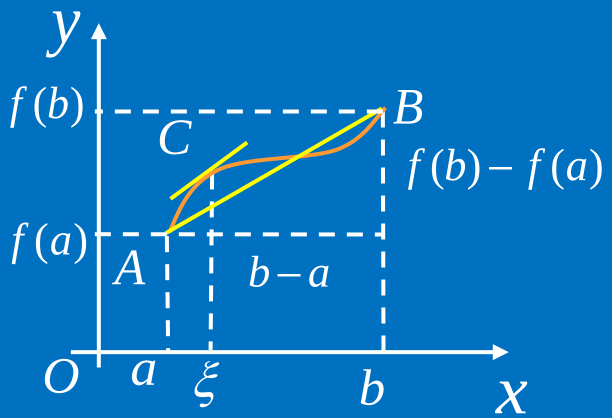
$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

注　（1）如果 $f(a)=f(b)$，

则此定理的结论正是罗尔定理的结论.

罗尔定理是拉格朗日中值定理的特殊情形.

（2） $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$



几何意义 连续曲线弧 AB：

其除端点外处处有不垂直于 x 轴的切线，那么在此曲线弧上至少有一点 C，在 C 处的切线与弦 AB 平行.

（3）只有满足此定理的两个条件，定理的结论才成立.

例　验证拉格朗日中值定理对 $f(x)=\ln x$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上的正确性.

证明　$f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上连续，在 $(1,\mathrm{e})$ 内可导.

$f(\mathrm{e})-f(1)=f'(\xi)(\mathrm{e}-1)$，即 $1-0=\dfrac{1}{\xi}(\mathrm{e}-1)$，

取 $\xi=\mathrm{e}-1\in(1,\mathrm{e})$ 即可.

定理 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，在 I 内可导且 $f'(x)=0$，则 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数.

若函数 $f(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

(2) 在开区间 (a,b) 内可导，

则在 (a,b) 内至少存在一点 $\xi(a<\xi<b)$，使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

定理 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，在 I 内可导且 $f'(x)=0$，则 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数.

证明 $\forall x_1, x_2 \in I$，不妨设 $x_1 < x_2$，

则必有 $\xi \in (x_1, x_2)$，使 $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$，

因为 $f'(\xi)=0$，所以 $f(x_2) = f(x_1)$.

此等式对区间 I 上的任何 x_1, x_2 都成立.

所以 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数.

例 证明：当 $x>1$ 时，$\mathrm{e}^x > \mathrm{e}x$.

证明 设 $f(x)=\mathrm{e}^x$,

$f(x)$ 在 $[1,x]$ 上连续，在 $(1,x)$ 内可导，

则至少存在 $\xi\in(1,x)$ ，使 $f(x)-f(1)=f'(\xi)(x-1)$,

即 $$\mathrm{e}^x-\mathrm{e}=\mathrm{e}^{\xi}(x-1)>\mathrm{e}(x-1)$$

因此当 $x>1$ 时，$\mathrm{e}^x > \mathrm{e}x$.

柯西中值定理

若连续曲线弧 AB 上除了端点外处处有不垂直于 x 轴的切线，那么在此弧上至少有一点 C，曲线在 C 处的切线与弦 AB 平行.

如果 AB 由参数方程 $\begin{cases} x = F(t) \\ y = f(t) \end{cases}$ $(a \le t \le b)$ 表示：

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{f'(t)}{F'(t)}, \qquad k_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

柯西中值定理 若 $f(x)$、$F(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a,b) 内可导;

(3) 对任一 $x\in(a,b)$, $F'(x)\neq 0$,

则在 (a,b) 内至少有一点 ξ, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{\boxed{F(b)-F(a)}}=\frac{f'(\xi)}{\boxed{F'(\xi)}}$$

注 (1) 如果 $F(x)=x$,

则定理的结论正是拉格朗日中值定理的结论.

拉格朗日中值定理是柯西中值定理的特殊情形.

(2) 只有满足此定理的三个条件, 定理的结论才成立.

例　验证柯西中值定理对 $f(x)=x^2+1$ 及 $F(x)=2x$ 在 $[0,2]$ 上的正确性.

证明　$f(x)$ 和 $F(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，

当 $x\in(0,2)$ 时，$F'(x)=2\neq 0$.

$$\frac{f(2)-f(0)}{F(2)-F(0)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}，即 \frac{5-1}{4-0}=\frac{2\xi}{2},$$

取 $\xi=1\in(0,2)$ 即可.