泰勒公式

比如： $f(x)=3-4x+7x^3$， $f(1)=6$.

$\Delta y \approx \mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x$ 或 $f(x)-f(x_0) \approx f'(x_0)(x-x_0)$

$f(x) \approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=P_1(x)$

$P_1(x_0)=f(x_0)$，$P_1'(x_0)=f'(x_0)$

不足之处：$f(x)-P_1(x)=o(x-x_0)$.

问题：假设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有 n 阶导数，试找出一个关于 $x-x_0$ 的 n 次多项式：

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n$$

来近似表达函数 $f(x)$，

要求 $f(x)-P_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$.

$$\boxed{P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n}$$

假设 $P_n(x_0)=f(x_0)$， $P_n'(x_0)=f'(x_0)$，

$$P_n''(x_0)=f''(x_0),\cdots,P_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0).$$

由 $P_n(x_0)=a_0$ 得 $a_0=f(x_0)$；

$$P_n'(x)=1\cdot a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1}$$

故 $P_n'(x_0)=a_1$ 得 $a_1=f'(x_0)$；

$$\boxed{P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n}$$

$$P_n''(x)=1\cdot 2a_2+2\cdot 3a_3(x-x_0)+\cdots+(n-1)na_n(x-x_0)^{n-2}$$

故 $P_n''(x_0)=2!a_2$，

即 $a_2=\dfrac{1}{2!}f''(x_0)$，$\cdots$，$a_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$.

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

泰勒中值定理 1 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有 n 阶导数，那么存在 x_0 的一个邻域，对于该邻域内的任一 x，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$.

称多项式

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

为 $f(x)$ 在 x_0 处或按 $x - x_0$ 的幂展开的 n 次泰勒多项式.

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\underline{R_n(x)}$$

称为 $f(x)$ 在 x_0 处或按 $x-x_0$ 的幂展开的带有佩亚诺（Peano）余项的 n 阶泰勒公式. 上面余项的表达式称为佩亚诺余项.

泰勒中值定理 2 如果函数 $f(x)$ 在某 $U(x_0)$ 内具有直到 $(n+1)$ 阶的导数，那么对任一 $x \in U(x_0)$，有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),$$

其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

这里ξ是x_0与x之间的某个值.

称

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$

$$\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

为 $f(x)$ 在 x_0 处或按 $x-x_0$ 的幂展开的

带有拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式.

称

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

为拉格朗日余项.

当 $n=0$ 时，泰勒公式为

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$$

其中 ξ 在 x_0 与 x 之间.

若存在 $M>0$，使 $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M$， $x \in U\left(x_0\right)$，则

$$\left|R_n(x)\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left(x-x_0\right)^{n+1}\right| \leq \frac{M}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1}.$$

带有佩亚诺余项的麦克劳林（Maclaurin）公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

带有拉格朗日余项的麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}，其中\ 0<\theta<1$$

例 写出函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 的带有拉格朗日余项的 n 阶麦克劳林公式.

解 因为 $f^{(k)}(x)=\mathrm{e}^x$，$k=1,2,\cdots,n+1$, 所以

$$f^{(k)}(0)=\mathrm{e}^0=1，k=1,2,\cdots,n. \text{ 又 } f^{(n+1)}(\theta x)=\mathrm{e}^{\theta x},$$

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}，\text{其中 } 0<\theta<1.$$

$$\boxed{\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}}$$

注 $\mathrm{e}^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$， $\left|R_n(x)\right| \le \underline{\frac{\mathrm{e}^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1}}$

$$\mathrm{e} \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad \left|R_n\right| < \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

误差不超过10^{-6}：由$\left|R_n\right| < \frac{3}{(n+1)!} \le 10^{-6}$可得

$$\mathrm{e} \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{10!} \approx 2.718282.$$

例 证明：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m}(x)$$

其中

$$R_{2m}(x) = \frac{\sin\left[\theta x + (2m+1)\frac{\pi}{2}\right]}{(2m+1)!}x^{2m+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

证明 令 $f(x)=\sin x$，因为 $f^{(k)}(x)=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$，

所以 $f^{(k)}(0)=\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$，

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+R_{2m}(x),$$

其中 $R_{2m}(x)=\dfrac{\sin\left[\theta x+(2m+1)\frac{\pi}{2}\right]}{(2m+1)!}x^{2m+1}\ (0<\theta<1)$.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

$$+ \frac{\cos\left(\theta x + \frac{2m+2}{2}\pi\right)}{(2m+2)!} x^{2m+2}, \quad (0 < \theta < 1).$$

例 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{x^3}$.

解 $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)$， $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + o\left(x^2\right)$，

$$\sin x - x\cos x = x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right) - x + \frac{x^3}{2!} - o\left(x^3\right) = \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$