函数的单调性
与曲线的凹凸性

函数单调性的判定法

曲线的凹凸性和拐点

函数单调性的判定法

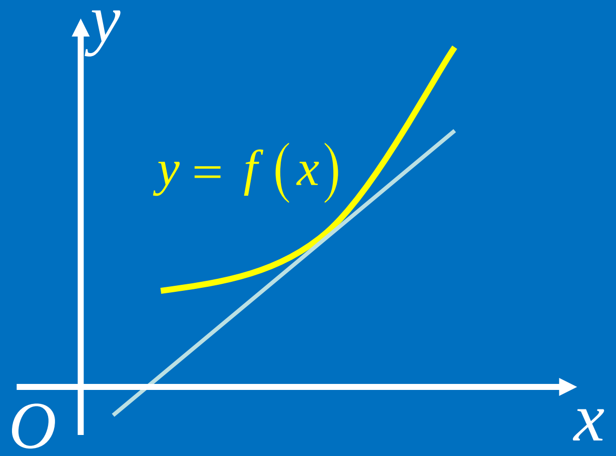
什么是函数在某个区间内单调?

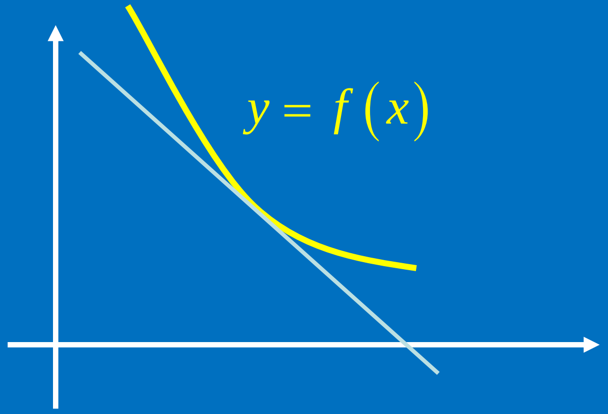
如何判定函数在某个区间内单调?

有没有简单的方法?

如果 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加，那么 $y'=f'(x)\geq 0$；

如果 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少，那么 $y'=f'(x)\leq 0$.





定理　设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，那么

(1) 若在 (a,b) 内，$f'(x)\geq 0$，且等号仅在有限多个点处成立，则函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加；

(2) 若在 (a,b) 内，$f'(x)\leq 0$，且等号仅在有限多个点处成立，则函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

注　1. 导数的符号与函数图形的升降有关；

2. 如果把这个定理中的闭区间换成其它各种区间（包括无穷区间），那么结论也成立.

例 讨论函数 $y=\arctan x-x$ 的单调性.

解 $D=(-\infty,+\infty)$.

$$y'=\frac{1}{1+x^2}-1=-\frac{x^2}{1+x^2}\le 0,$$

且等号仅在 $x=0$ 处成立,

所以函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调减少的.

例 讨论函数 $y = \mathrm{e}^x - x - 2$ 的单调性.

解 $D = (-\infty, +\infty)$.

$$y' = \mathrm{e}^x - 1.$$

在 $(-\infty, 0)$ 内，$y' < 0 \Rightarrow$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调减少；

在 $(0, +\infty)$ 内，$y' > 0 \Rightarrow$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加.

例　讨论函数 $y=\sqrt[5]{x^2}$ 的单调性.

解　$D=(-\infty,+\infty)$.

当 $x\neq 0$ 时，$y'=\dfrac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}$，

当 $x=0$ 时，函数的导数不存在.

在 $(-\infty,0)$ 内，$y'<0 \Rightarrow$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调减少；

在 $(0,+\infty)$ 内，$y'>0 \Rightarrow$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加.

结论 如果函数 $f(x)$ 在定义区间上连续，除去有限个导数不存在的点外导数存在且连续，那么只要用 $f'(x)=0$ 的点和 $f'(x)$ 不存在的点来划分函数 $f(x)$ 的定义区间，就能保证 $f'(x)$ 在各个部分区间内保持固定符号，因而函数在每个部分区间上单调.

例 确定函数 $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$ 的单调区间.

解 $D = (-\infty, +\infty)$. $y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$.

$y' = 0$ 的点为 $x_1 = -1$， $x_2 = 3$：

$$(-\infty, -1]，[-1, 3] \text{ 及 } [3, +\infty).$$

在 $(-\infty, -1)$ 内， $y' > 0 \Rightarrow$ 在 $(-\infty, -1]$ 上单调增加；

在 $(-1, 3)$ 内， $y' < 0 \Rightarrow$ 在 $[-1, 3]$ 上单调减少；

在 $(3, +\infty)$ 内， $y' > 0 \Rightarrow$ 在 $[3, +\infty)$ 上单调增加.

例 证明：当 $x>1$ 时，$2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}$.

证 令 $f(x)=2\sqrt{x}-(3-\frac{1}{x})$，

当 $x>1$ 时，$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}=\frac{\sqrt{x^3}-1}{x^2}>0$

所以当 $x>1$ 时，$f(x)$ 单调增加，由于 $f(1)=0$，

令 $f(x)=2\sqrt{x}-(3-\frac{1}{x})$：当 $x>1$ 时，$f(x)>0=f(1)$

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$

因此，当 $x>1$ 时，$f(x)>f(1)=0$，

$2\sqrt{x}-(3-\dfrac{1}{x})>0$，即 $2\sqrt{x}>3-\dfrac{1}{x}$.

曲线的凹凸性

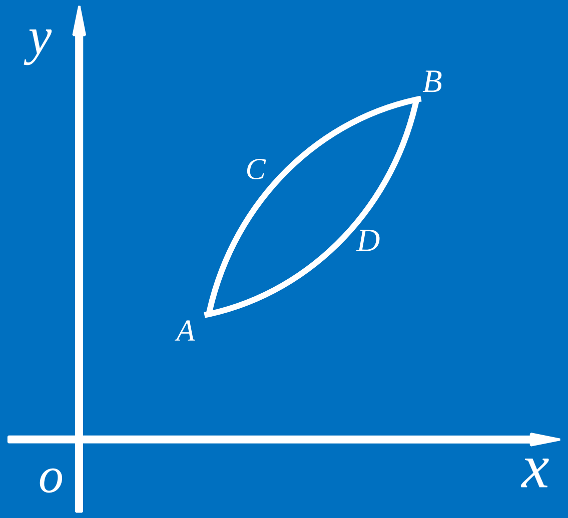
和拐点

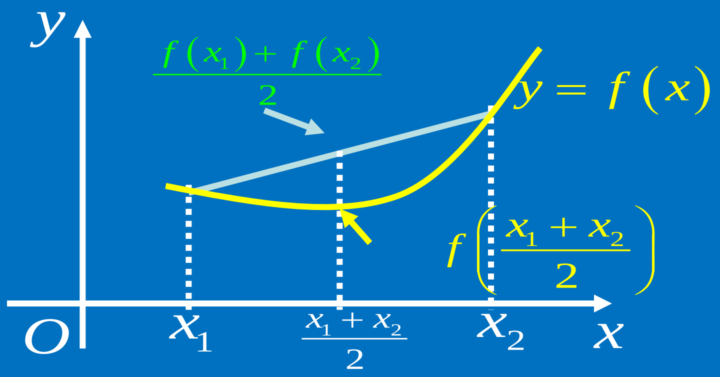
曲线的凹凸性

例如：ACB 和 ADB，

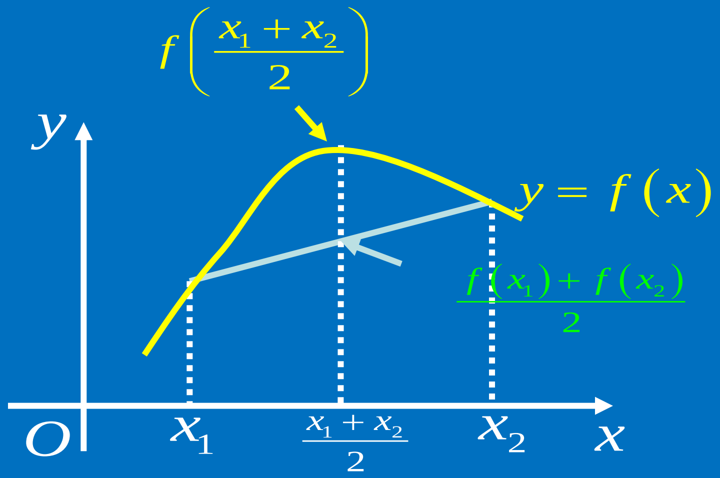
ACB：向上凸，ADB：向上凹，

它们的凹凸性不同.





y
$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$
$y=f(x)$
$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$
O
x_1
$\frac{x_1+x_2}{2}$
x_2
x

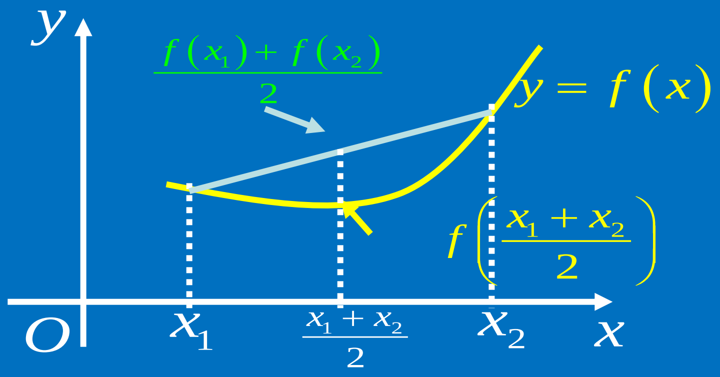


$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$
y
$y=f(x)$
$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$
O
x_1
$\frac{x_1+x_2}{2}$
x_2
x

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，如果对区间 I 上的任意两点 x_1、x_2，恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

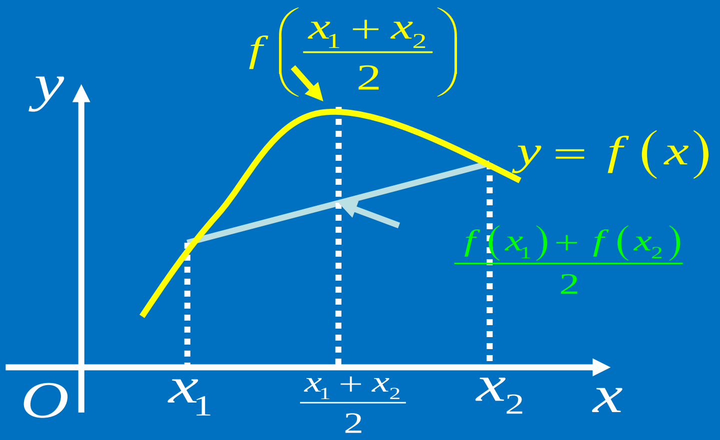
则称 $f(x)$ 在 I 上的图形是（向上）**凹的**（或凹弧）；



凹弧

如果恒有 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) > \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，

则称 $f(x)$ 在 I 上的图形是（向上）凸的（或凸弧）.



凸弧

定理 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有一阶和二阶导数，那么

(1) 若在 (a,b) 内，$f''(x) > 0$，

则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的；

(2) 若在 (a,b) 内，$f''(x) < 0$，

则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凸的；

注 如果把这个定理中的闭区间换成其他区间（包括无穷区间），那么结论也成立.

例 判定曲线 $y=\ln x$ 的凹凸性.

解 $D=(0,+\infty)$.

$$y'=\frac{1}{x},\quad y''=-\frac{1}{x^2}.$$

在 $(0,+\infty)$ 内， $y''<0$, 所以曲线 $y=\ln x$ 是凸的.

例 判定曲线 $y = x^3$ 的凹凸性.

解 $D = (-\infty, +\infty)$.

$$y' = 3x^2, \quad y'' = 6x.$$

当 $x < 0$ 时， $y'' < 0 \Rightarrow$ 在 $(-\infty, 0]$ 上是凸的；

当 $x > 0$ 时， $y'' > 0 \Rightarrow$ 在 $[0, +\infty)$ 上是凹的.

拐点

定义 设 $y=f(x)$ 在区间 I 上连续，x_0 是 I 内的点. 如果曲线 $y=f(x)$ 在经过点 $\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ 时，曲线的凹凸性改变了，那么就称点 $\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ 为这曲线的**拐点**.

例如 $\left(0,0\right)$ 是曲线 $y=x^3$ 的拐点.

判定拐点的步骤：

(1) 求 $f''(x)$；

(2) 求出 $f''(x)=0$ 的点和二阶导数不存在的点；

(3) 对于(2)中求出的点 x_0，

考察 $f''(x)$ 在 x_0 的左、右两侧邻近的符号，

当两侧的符号相反时，点 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点.

当两侧的符号相同时，点 $(x_0, f(x_0))$ 不是拐点.

例 求曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 的拐点.

解 （1） $D=(-\infty,+\infty)$.

当 $x\neq 0$ 时， $y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$， $y''=-\dfrac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$；

（2） y'' 不存在的点为 $x=0$；

（3）当 $x<0$ 时， $y''>0$；当 $x>0$ 时， $y''<0$.

所以点 $(0,0)$ 是这曲线的一个拐点.

例　问曲线 $y = x^4 - 2$ 是否有拐点？

解　（1）$D = (-\infty, +\infty)$.

$$y' = 4x^3, \quad y'' = 12x^2.$$

（2）$y'' = 0$ 的点为 $x = 0$；

（3）但无论 $x < 0$ 或 $x > 0$ 都有 $y'' > 0$，

因此点 $(0, -2)$ 不是这曲线的拐点.

所以曲线 $y = x^4 - 2$ 没有拐点，在 $(-\infty, +\infty)$ 内是凹的.

例 求曲线 $y=3x^4-6x^3+7$ 的拐点及凹、凸的区间.

解 $D=(-\infty,+\infty)$. $y'=12x^3-18x^2$，

$y''=36x^2-36x=36x(x-1)$. $y''=0$ 的点为 $x_1=0$，$x_2=1$：

$$(-\infty,0]、[0,1]、[1,+\infty)$$

在 $(-\infty,0)$ 内，$y''>0 \Rightarrow$ 在 $(-\infty,0]$ 上是凹的，

在 $(0,1)$ 内，$y''<0 \Rightarrow$ 在 $[0,1]$ 上是凸的，

在 $(1,+\infty)$ 内，$y''>0 \Rightarrow$ 在 $[1,+\infty)$ 上是凹的.

所以点 $(0,7)$、$(1,4)$ 是此曲线的拐点.