函数的极值
与最大值最小值

函数的极值及其求法

最大值最小值问题

函数的极值及其求法

定义 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内有定义，

若对任意 $x \in \mathring{U}(x_0)$，有 $f(x) < f(x_0)$，则称

$f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的一个**极大值**，而称 x_0 为**极大值点**.

(local maximum)

若对任意 $x \in \mathring{U}(x_0)$，有 $f(x) > f(x_0)$，则称

$f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的一个**极小值**，而称 x_0 为**极小值点**.

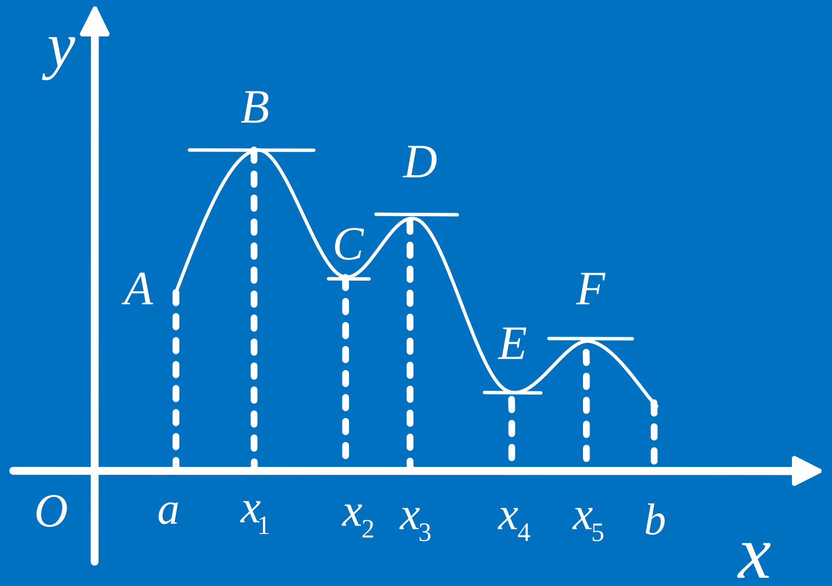
(local minimum)

极大值和极小值统称为**极值**，

极大值点和极小值点统称为**极值点**.

注 函数的极大值或极小值是指在局部范围内，该函数值是最大值或最小值，而不一定是函数在整个考察范围内的最大值或最小值.

一个定义在某区间上的函数可以有许多极大值和极小值，极大值可能小于极小值.



定理 （极值存在的必要条件） 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且在 x_0 处取得极值，则 $f'(x_0)=0$.

注 (1) 可导函数的极值点必定是其驻点.

(2) 驻点是函数的可能极值点.

函数在导数不存在的点处也可能取得极值.

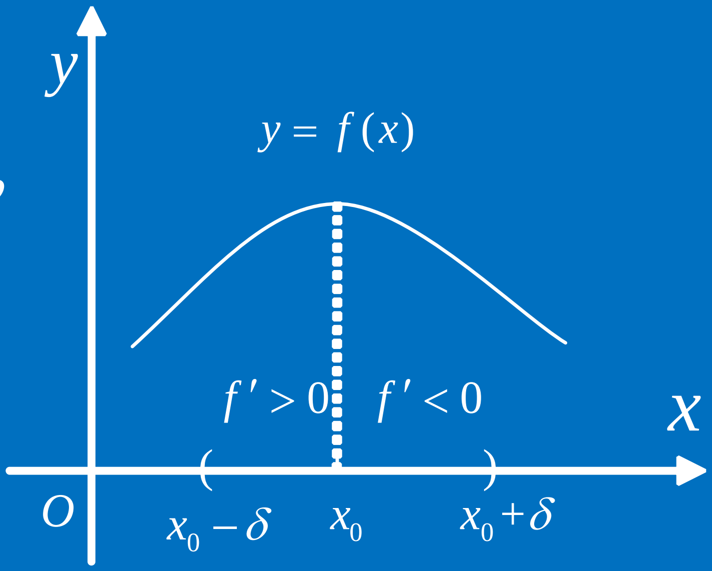
例如， $f(x)=|x|$ 在点 $x=0$ 处不可导，但函数在 $x=0$ 处取得极小值.

所以驻点和不可导点是可能的极值点.

定理（极值存在的第一充分条件）

设函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，且在 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内可导.

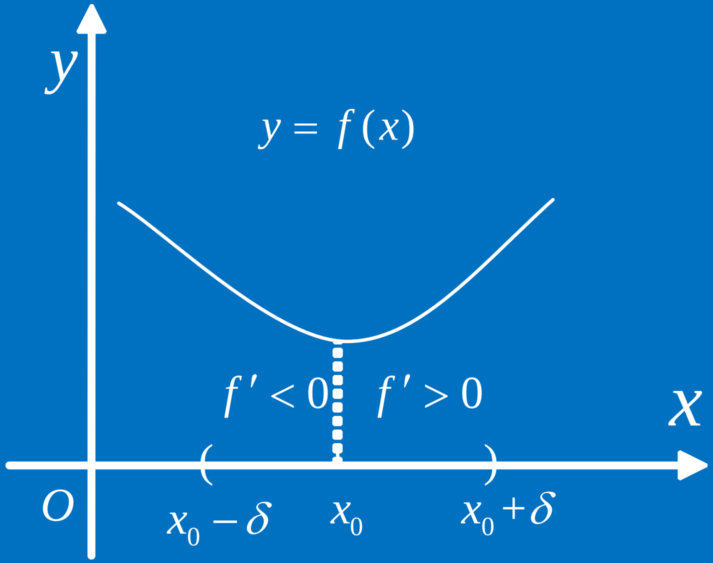
(1) 若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；



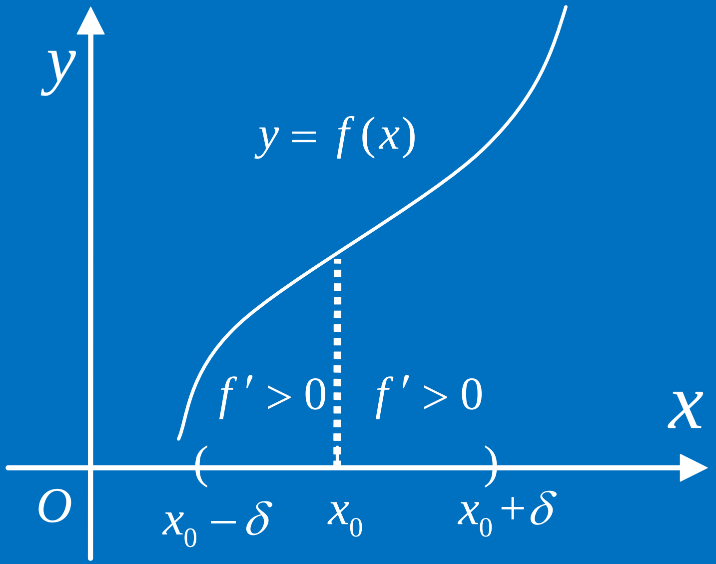
(2) 若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时， $f'(x) < 0$ ，

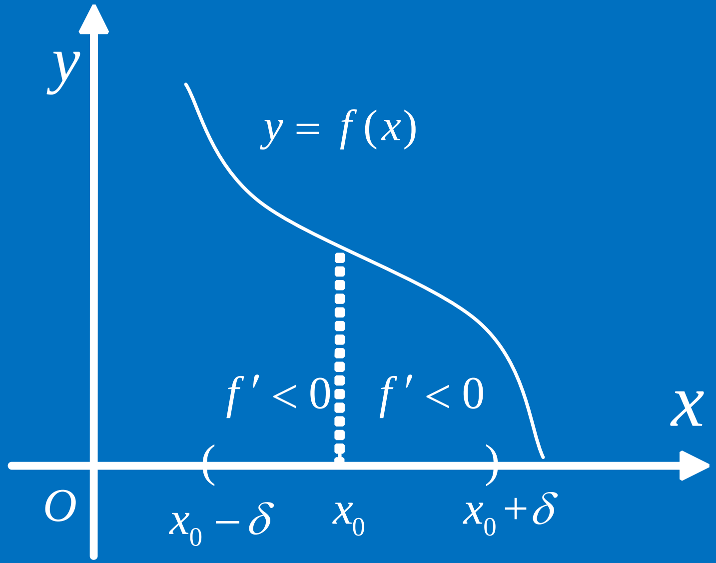
而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时， $f'(x) > 0$ ，则 $f(x)$ 在 x_0 处

取得极小值；



(3) 若 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时， $f'(x)$ 的符号保持不变，则 $f(x)$ 在 x_0 处没有极值.





求函数 $f(x)$ 的极值点和相应极值的步骤

(1) 求出 $f'(x)$，进而求出 $f(x)$ 的全部驻点和不可导点；

(2) 判别（1）中求出的点是否为极值点；若为极值点，确定是极大值点还是极小值点；

(3) 求出各极值点处的函数值，得到函数 $f(x)$ 的全部极值.

例 求函数 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值.

解 （1） $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续可导，$f'(x)=6x(x^2-1)^2$

由 $f'(x)=0$，得 $x_1=-1, x_2=0, x_3=1$.

（2）

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$

$\Rightarrow x_1=-1$， $x_3=1$ 不是极值点， $x_2=0$ 为极小值点；

（3）极小值为 $f(0)=0$.

例 求函数 $f(x)=1-(x-2)^{2/3}$ 的极值.

解 （1） $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，除 $x=2$ 外处处可导，且

$$f'(x)=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x-2}}$$

（2）

x	$(-\infty,2)$	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$

$\Rightarrow x=2$ 为极大值点；

（3）极大值为 $f(2)=1$.

定理 （极值存在的第二充分条件） 设函数在 x_0 处具有二阶导数且 $f'(x_0)=0$， $f''(x_0)\neq 0$，那么

（1） 当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得**极大值**；

（2） 当 $f''(x_0)>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得**极小值**.

注 此定理不能判定不可导点，而且对满足 $f'(x_0)=0$， $f''(x_0)=0$ 的点也不能判定其是否为极值点.

例如，函数 $f(x)=x^3,\ p(x)=x^4,\ q(x)=-x^4$，它们在 $x=0$ 处的一阶导数和二阶导数均为零，显然 $f(x)=x^3$ 在 $x=0$ 处不取得极值，

$p(x)=x^4$ 在 $x=0$ 处取得极小值，

$q(x)=-x^4$ 在 $x=0$ 处取得极大值.

最大值最小值问题

在一定条件下，怎样使“产品最多”、“用料最省”、“成本最低”、“效率最高”等问题，

这类问题在数学上可归结为求某一函数（目标函数）的最大值或最小值问题.

假设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内除有限个点外可导，且至多有有限个驻点.

（1）函数在 $[a,b]$ 上的最大值及最小值存在；

（2）如果函数的最大值或最小值在 (a,b) 内的某一点 x_0 处取得，则 $f(x_0)$ 也一定是 $f(x)$ 的极大值或极小值，从而 x_0 一定是 $f(x)$ 的驻点或不可导点；

（3） $f(x)$ 的最大值或最小值也有可能在区间端点取到.

求 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最大值最小值的方法

（1）求出 $f(x)$ 在 (a,b) 内的所有驻点或不可导点；

（2）计算 $f(x)$ 在上述驻点、不可导点处的函数值以及 $f(a)$、$f(b)$；

（3）比较上述函数值的大小，最大的就是最大值，最小的就是最小值.

例　求函数 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+14$ 在 $[-3,4]$ 上的最大值及最小值.

解　（1）$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$，

由 $f'(x)=0$，得 $x_1=-2$，$x_2=1$；

（2）$f(-3)=23$，$f(-2)=34$，$f(1)=7$，$f(4)=142$；

（3）最大值为 $f(4)=142$，最小值为 $f(1)=7$.

若要求此函数 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+14$ 在 $(0,+\infty)$ 内的最小值呢？

结论 若函数 $f(x)$ 在一个区间（有限或无限，开或闭）内可导且只有唯一的驻点 x_0，并且这个驻点是极值点，则当 $f(x_0)$ 是极大值时，$f(x_0)$ 就是 $f(x)$ 在该区间上的最大值；当 $f(x_0)$ 是极小值时，$f(x_0)$ 就是 $f(x)$ 在该区间上的最小值.

例 求函数 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+14$ 在 $(0,+\infty)$ 内的最小值.

解 （1） $f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$，

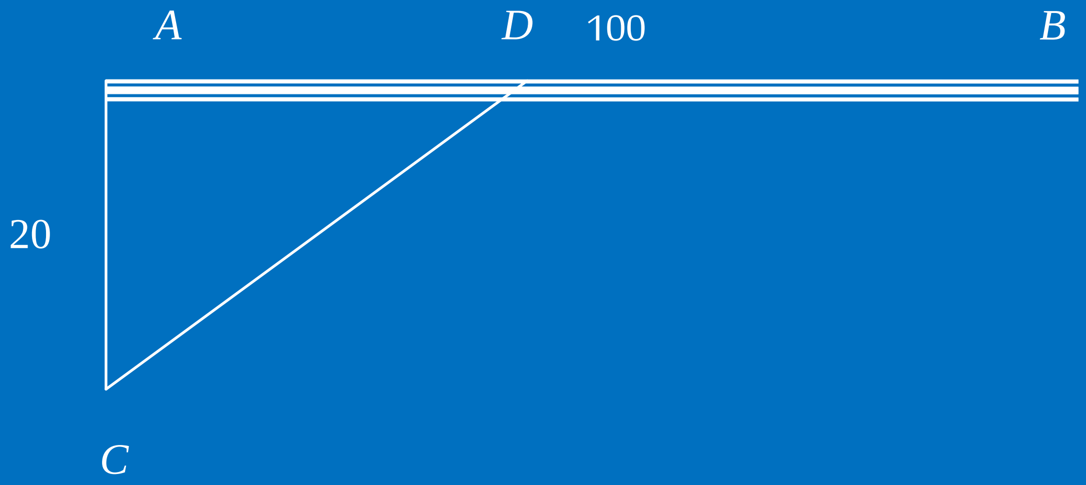
由 $f'(x)=0$，得 $x=1$；

（2） $f''(x)=12x+6$， $f''(1)=18>0$，

所以 $x=1$ 为极小值点；

（3）最小值为 $f(1)=7$.

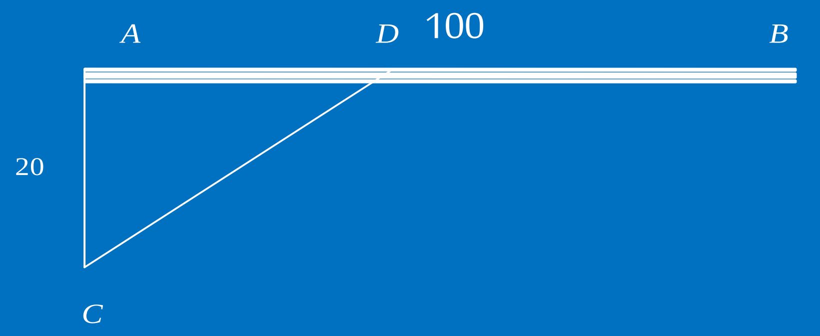
例 铁路线上 AB 段的距离为 100 km，工厂 C 距 A 处 20 km，AC 垂直于 AB，为了运输需要，要在 AB 线上选一点 D 向工厂修筑一条公路．已知铁路与公路每千米货运的费用之比为 3:5．为使货物从 B 到 C 的运费最省，求 D 的位置．



解　设 $AD = x$ km,

则 $BD = 100 - x$,

$CD = \sqrt{20^2 + x^2} = \sqrt{400 + x^2}$;



设铁路每千米运费为 a ,

铁路与公路每千米费用之比3:5

则公路每千米运费为 $\frac{5}{3}a$,

故总运费为 $y = \sqrt{400 + x^2} \cdot \frac{5}{3}a + (100 - x)a$, $0 \le x \le 100$;

$$\boxed{y=\sqrt{400+x^2}\cdot\frac{5}{3}a+(100-x)a\text{，}\quad 0\le x\le 100\text{；}}$$

（1） $y'=\frac{5}{3}a\frac{2x}{2\sqrt{400+x^2}}-a=\left(\frac{5}{3}\frac{x}{\sqrt{400+x^2}}-1\right)a$，

由 $y'=0$ 得 $x=15$ **km.**

（2） $y(0)=\frac{400}{3}a$， $y(15)=\frac{380}{3}a$，$y(100)=\frac{50\sqrt{104}}{3}a$；

（3） $y(15)=\frac{380}{3}a$ 为最小，即当 D 距 A 15 **km** 处，

总运费为最省.

结论 对实际问题，根据问题的性质可以断定可导函数 $f(x)$ 确有最大值或最小值，而且一定在定义区间内取得，这时如果函数 $f(x)$ 在定义区间内只有一个驻点 x_0，那么就可以断定 $f(x_0)$ 是最大值或最小值.

解　$y=\sqrt{400+x^2}\cdot\frac{5}{3}a+(100-x)a$，　$0\le x\le 100$；

（1）$y'=\frac{5}{3}a\frac{2x}{2\sqrt{400+x^2}}-a=\left(\frac{5}{3}\frac{x}{\sqrt{400+x^2}}-1\right)a$，

由 $y'=0$ 得 $x=15$ km.

（2）由于运费的最小值一定存在，而且必在 $(0,100)$ 内取得，而且 y 在 $(0,100)$ 内只有一个驻点 $x=15$ km，所以当 D 距 A 15 km 处，总运费为最省.