函数图形的描绘

一般步骤：

（1）确定 $y = f(x)$ 的定义域以及讨论函数的特性；

（2）求出 $f'(x)$ 和 $f''(x)$；

然后求出 $f'(x)=0$ 的点和 $f''(x)=0$ 的点；

由这些点、 $f(x)$ 的间断点及 $f'(x)$、 $f''(x)$

不存在的点把定义域分成几个部分区间，

确定在所分区间上 $f'(x)$、 $f''(x)$ 的符号，

由此确定图形的**升降**、**凹凸**、**极值点**和**拐点**；

一般步骤：

(3) 确定水平、铅直渐近线以及其他变化趋势；

(4) 算出 $f'(x)=0$ 的点、 $f''(x)=0$ 的点及 $f'(x)$、 $f''(x)$ 不存在的点所对应的函数值，定出图形上相应的点；

有时还需补充一些点，然后结合前面得到的结果，

联结这些点画出 $y=f(x)$ 的图形.

例 画出函数 $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图形.

解（1） $y=f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

由于 $f(-x)=f(x)$，故 $f(x)$ 是偶函数,

因此我们先讨论在 $[0,+\infty)$ 上该函数的图形;

$$\boxed{y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}$$

（2） $f'(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$，

$$f''(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

$f'(x)=0$ 的点为 $x=0$； $f''(x)=0$ 的点为 $x=1$

x	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$y=f(x)$	极大值	$\searrow$	拐点	$\searrow$

拐点为 $\left(1,\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\mathrm{e}}}\right)$

(3) 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=0$，

$$\boxed{y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}$$

得 $y=0$ 是水平渐近线；

(4) 由 $f(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$， $f(1)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\mathrm{e}}}$，得

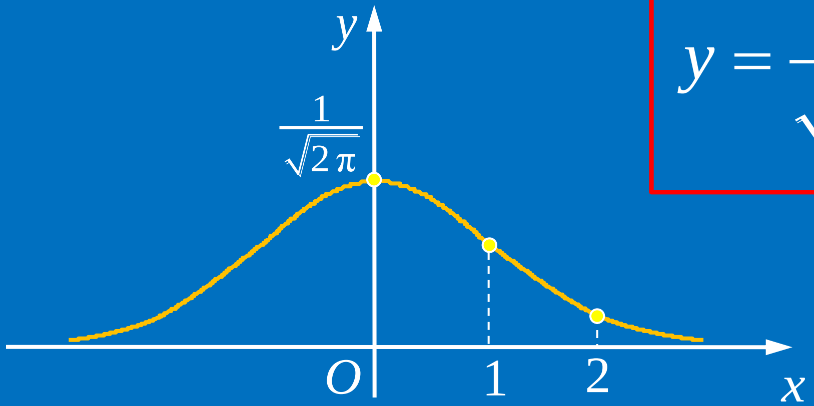
$\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$，$\left(1,\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\mathrm{e}}}\right)$，由 $f(2)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\mathrm{e}^2}}$ 得 $\left(2,\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\mathrm{e}^2}}\right)$.

先画出在 $[0,+\infty)$ 上的图形，再画出在 $(-\infty,0)$ 上的图形.

x	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$y=f(x)$	极大值	$\searrow$	拐点	$\searrow$

$$\left(0,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right),\ \left(1,\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right),\ \left(2,\frac{1}{\sqrt{2\pi e^2}}\right)$$

$y=0$ 是水平渐近线



$$\boxed{y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

例　画出函数 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 的图形.

解　(1)　$y=f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

(2) $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^{2}}$， $f''(x)=\dfrac{-3+2\ln x}{x^{3}}$ $\boxed{y=\dfrac{\ln x}{x}}$

$f'(x)=0$ 的点为 $x=\mathrm{e}$； $f''(x)=0$ 的点为 $x=\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$

x	$(0,\mathrm{e})$	e	$\left(\mathrm{e},\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right)$	$\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$	$\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}},+\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	−	−	−
$f''(x)$	−	−	−	0	+
$y=f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	拐点	$\searrow$

拐点为 $\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}},\dfrac{3}{2\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}}\right)$

（3）由 $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$，得 $x = 0$ 是铅直渐近线；$\boxed{y = \dfrac{\ln x}{x}}$

由 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$，得 $y = 0$ 是水平渐近线；

（4）由 $f(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$， $f(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}) = \dfrac{3}{2\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}}$，得 $\left(\mathrm{e}, \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$，$\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}, \dfrac{3}{2\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}}\right)$，

由 $f(1) = 0$ 得 $(1, 0)$.

x	$(0,\mathrm{e})$	e	$\left(\mathrm{e},\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right)$	$\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$	$\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}},+\infty\right)$
$y=f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	拐点	$\searrow$

$(1,0)$，$\left(\mathrm{e},\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$，$\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}},\frac{3}{2\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}}\right)$

$$\boxed{y=\frac{\ln x}{x}}$$

$x=0$ 是铅直渐近线

$y=0$ 是水平渐近线