曲率

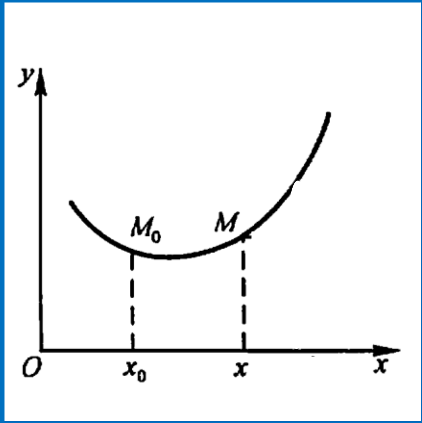
弧微分

曲率及其计算公式

曲率圆与曲率半径

弧微分

定义　设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有连续导数，在曲线 $y=f(x)$ 上取固定点 $M_0(x_0, f(x_0))$ 作为度量弧长的基点，并规定依 x 增大的方向作为曲线的正向．对曲线上任意一点 $M(x, f(x))$，规定**有向弧段 M_0M 的值 s**（简称为**弧 s**）为：s 的绝对值等于这弧段的长度；



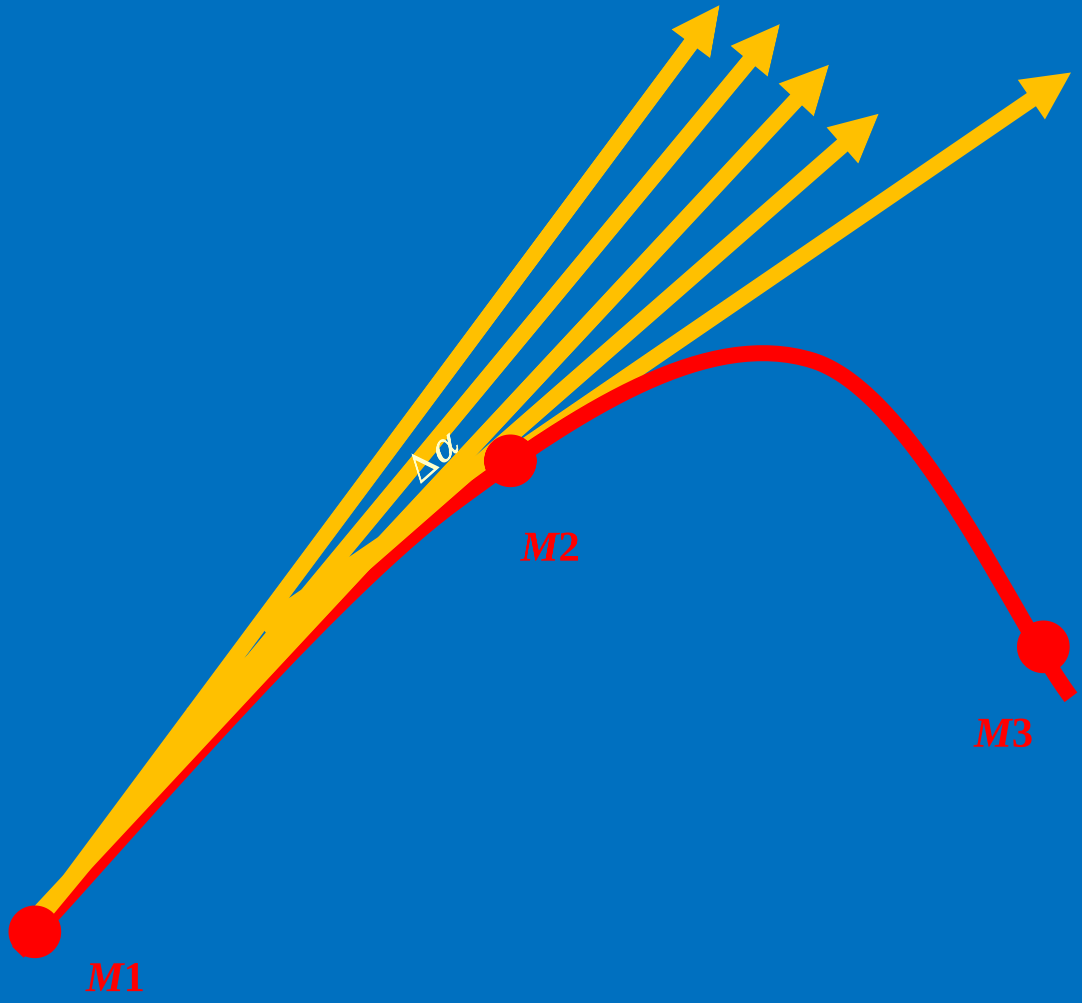
当有向弧段 M_0M 的方向与曲线的正向一致时，$s>0$，相反时，$s<0$．

注　（1）$s = s(x)$；

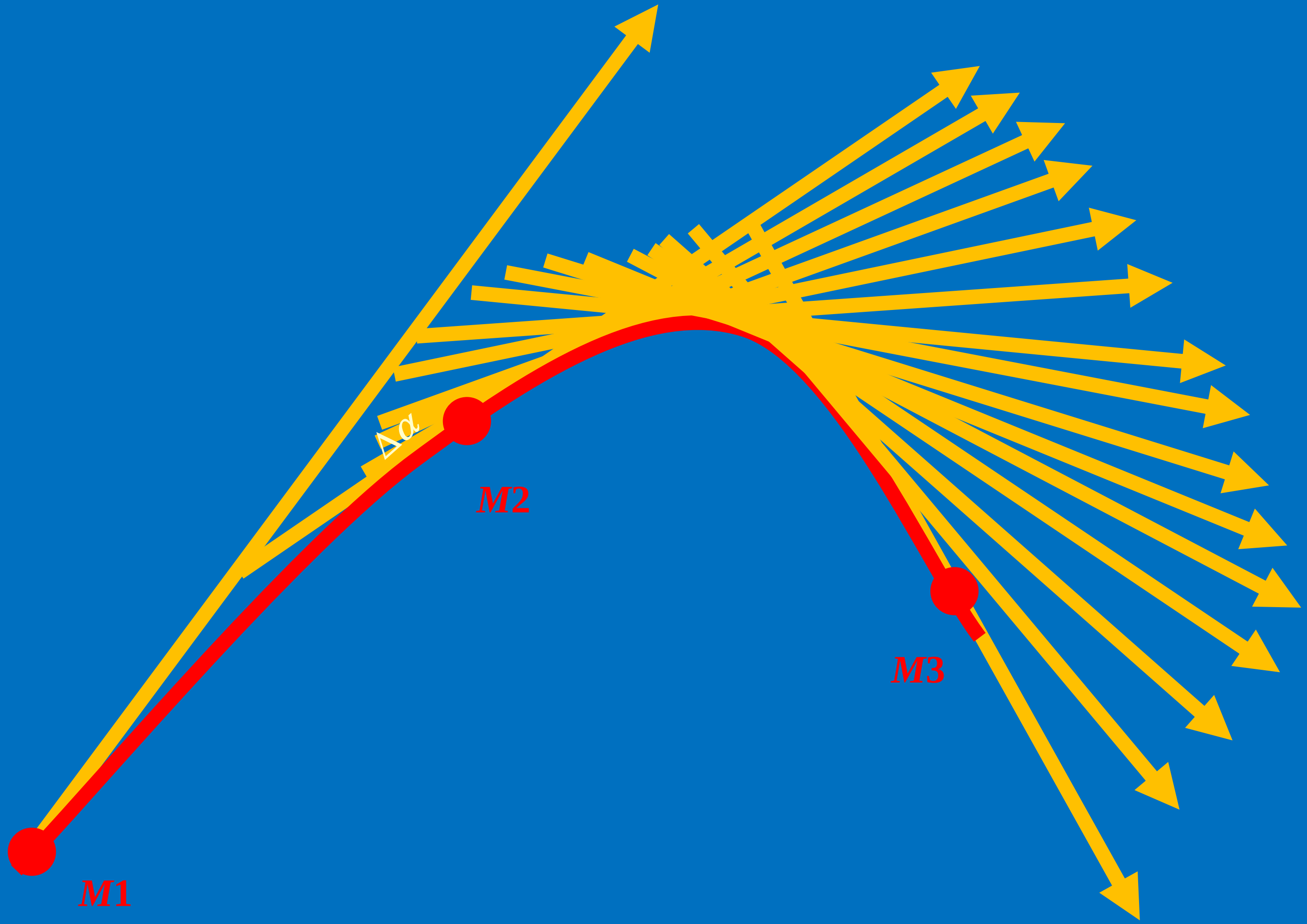
（2）s 是单调增加函数.

弧微分公式：$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$

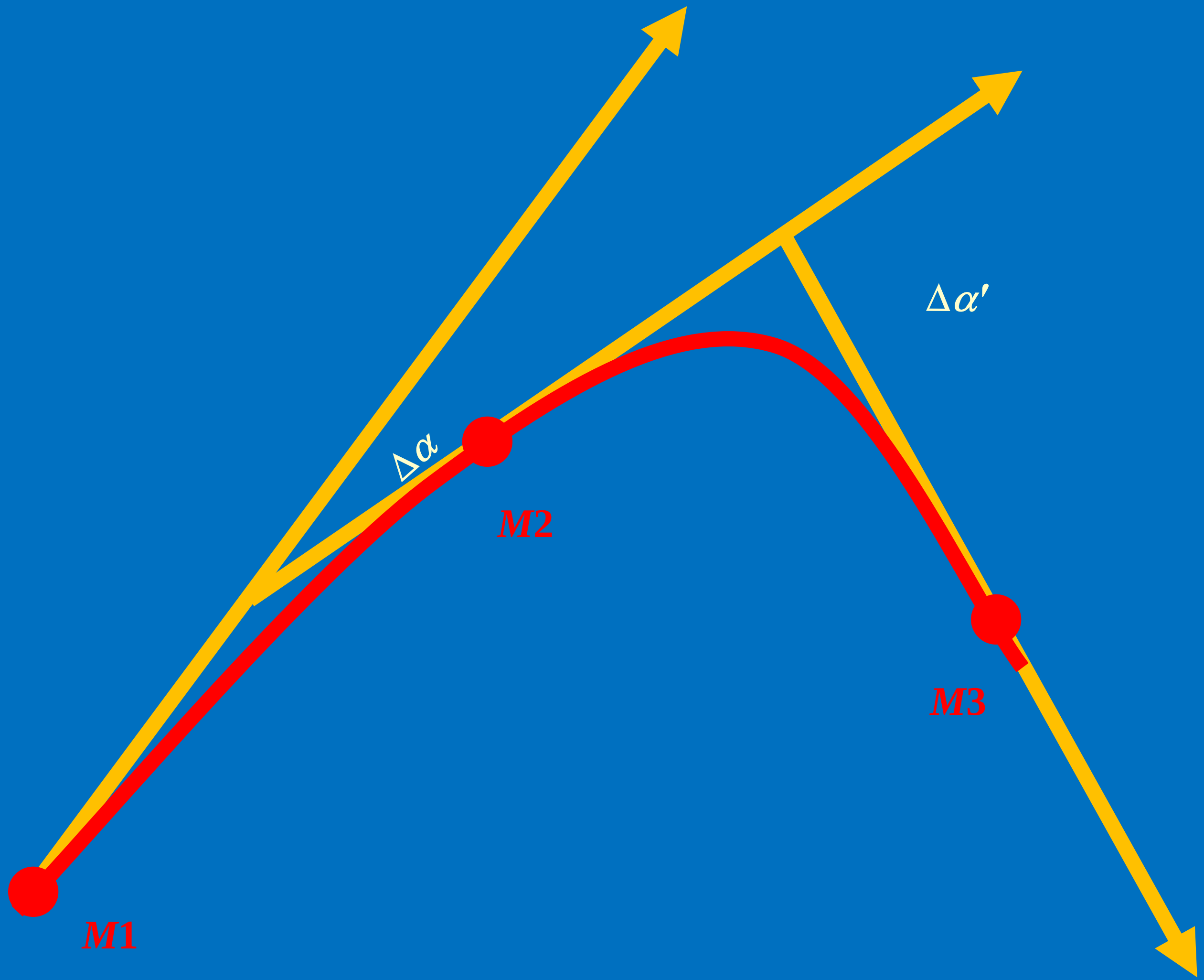
曲率及其计算公式



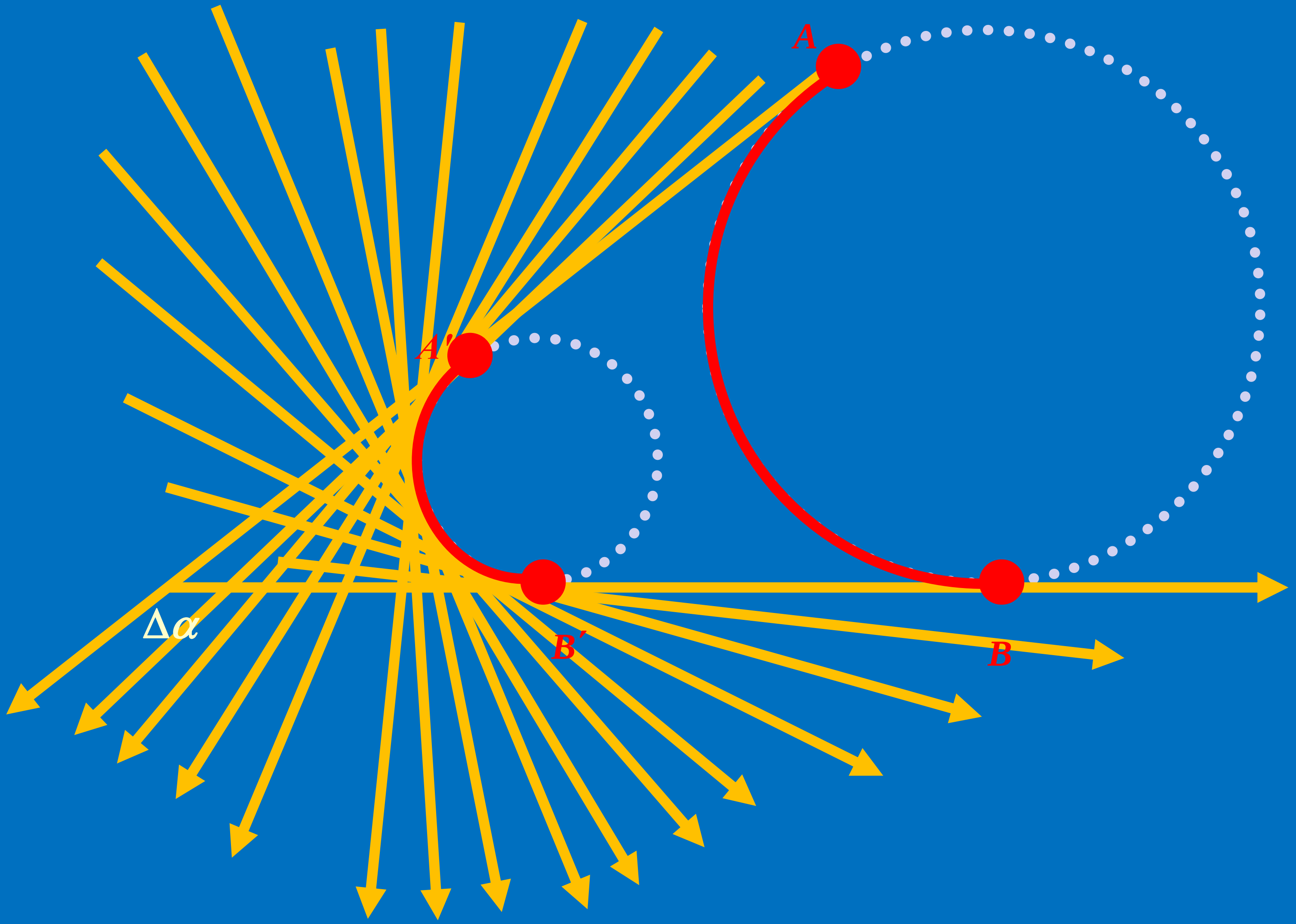
Δα
M2
M3
M1



Δα
M2
M3
M1



$\Delta\alpha'$
$\Delta\alpha$
M2
M3
M1


A
A′
B′
B
Δα

弯曲程度既与切线转过的角度$\Delta\alpha$有关（成正比），

也与经过的弧段的长度有关（成反比）.

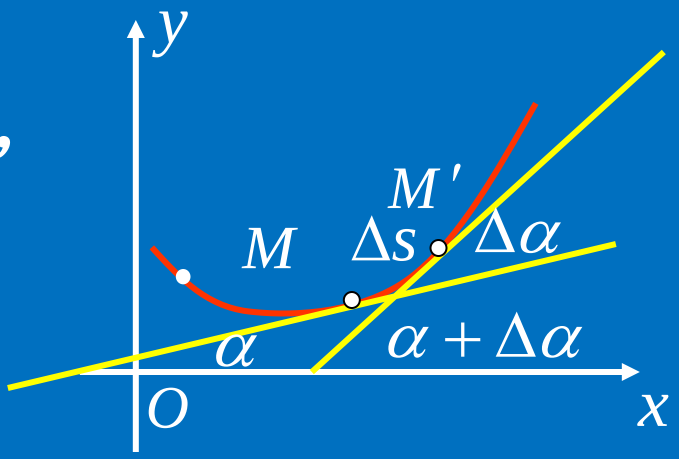
定义　设曲线 C 是光滑的，在曲线 C 上选定一点 M_0 作为度量弧 s 的基点. 设曲线上点 M 对应于弧 s，

在点 M 处切线的倾角为 α，

曲线上另一点 M' 对应于弧 $s+\Delta s$，

在点 M' 处切线的倾角为 $\alpha+\Delta\alpha$，

则弧段 MM' 的长度为 $|\Delta s|$，



当动点从 M 移动到 M' 时切线转过的角度为 $|\Delta\alpha|$.

把 $\dfrac{|\Delta\alpha|}{|\Delta s|}$，即单位弧段上切线转过的角度的大小，

称为弧段 MM' 的**平均曲率**，并记做 $\overline{K}$，即 $\overline{K}=\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$；

如果当 $\Delta s\to 0$ 时，平均曲率 $\overline{K}$ 的极限存在，

则称此极限为曲线 C 在点 M 处的**曲率**，记为 K，即

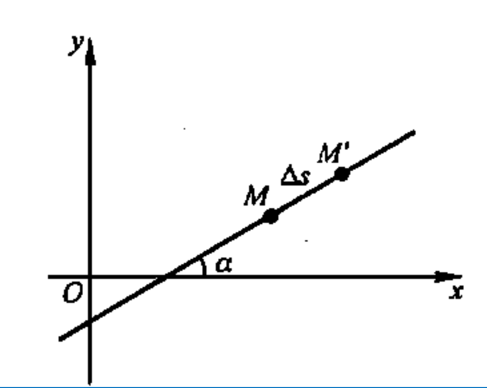
(curvature)

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|.$$

注　直线：$\Delta\alpha = 0$，因此

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right| = 0$$

“直线不弯曲”

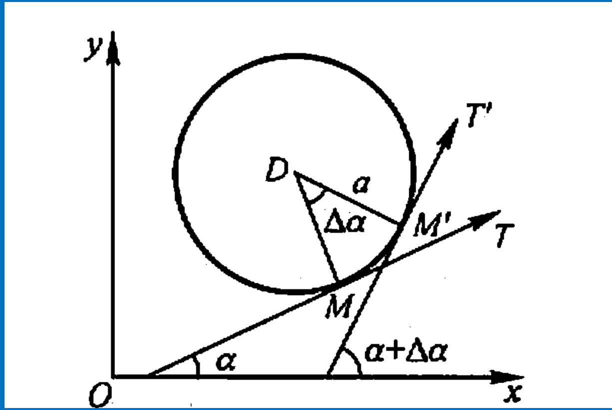


圆：设圆的半径为 a，

在圆周上任意两点 M 、M' 处的 $\Delta\alpha$

等于 $\angle MDM'$，且 $\angle MDM' = \dfrac{\Delta s}{a}$，

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{\frac{\Delta s}{a}}{\Delta s} = \frac{1}{a}\text{，即 } K = \frac{1}{a}$$



“圆的弯曲程度处处一样，且弯曲程度与半径成反比”

公式： 设 $y=f(x)$， $f(x)$ 具有二阶导数，

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x}\right|$$

$\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}$： $y'=\tan\alpha$,

$$y''=\sec^2\alpha\cdot\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\left(1+\tan^2\alpha\right)\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\left(1+y'^2\right)\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x},$$

$$\mathrm{d}\alpha=\frac{y''}{1+y'^2}\mathrm{d}x$$

曲率 $K=\left|\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|=\dfrac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

注 当曲线方程由参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 给出，

则有 $K=\dfrac{\left|\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)\right|}{\left[\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\right]^{\frac{3}{2}}}$.

例 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上哪一点处的曲率最大.

解 $y'=2ax+b$ ， $y''=2a$ ，得 $K=\dfrac{|2a|}{\left[1+(2ax+b)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$ ，

当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，K 取得最大值 $|2a|$，而 $\left(-\dfrac{b}{2a},-\dfrac{b^2}{4a}+c\right)$

为抛物线的顶点，因此抛物线在顶点处曲率最大.

曲率圆与曲率半径

定义　设曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x,y)$ 处的曲率为 K（$K\neq 0$），在点 M 处的曲线的法线上，在凹的一侧取一点 D，使 $|DM|=\dfrac{1}{K}=\rho$. 以 D 为圆心，ρ 为半径作圆，称这个圆为曲线在点 M 处的**曲率圆**，

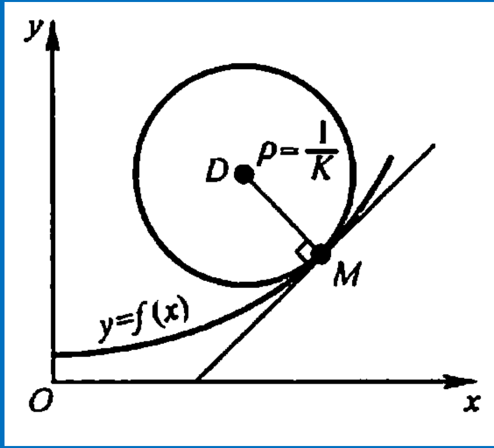
(circle of curvature)

圆心 D：曲线在点 M 处的**曲率中心**，

(center of curvature)

半径 ρ：曲线在点 M 处的**曲率半径**.

(radius of curvature)



注　(1) 曲率圆与曲线在点 M 处有相同的切线与曲率，且在点 M 邻近有相同的凹向.

常用曲率圆在点 M 邻近的一段圆弧来近似代替曲线弧.

(2) 当 $K \neq 0$ 时，$\rho = \dfrac{1}{K}$，$K = \dfrac{1}{\rho}$.