本节内容

B树

插入和删除

B树的插入

5阶B树——结点关键字个数$[m/2]-1 \leqslant n \leqslant m-1$

即：$2 \leqslant n \leqslant 4$ **（注：此处省略失败结点）**

B树的插入

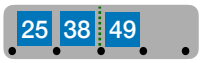
5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leqslant n \leqslant m-1$
即：$2 \leqslant n \leqslant 4$ **（注：此处省略失败结点）**

B树的插入

5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leqslant n \leqslant m-1$
即：$2 \leqslant n \leqslant 4$ **（注：此处省略失败结点）**

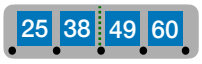
B树的插入

5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leqslant n \leqslant m-1$
即：$2 \leqslant n \leqslant 4$ **（注：此处省略失败结点）**



B树的插入

5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leqslant n \leqslant m-1$
即：$2 \leqslant n \leqslant 4$ **（注：此处省略失败结点）**

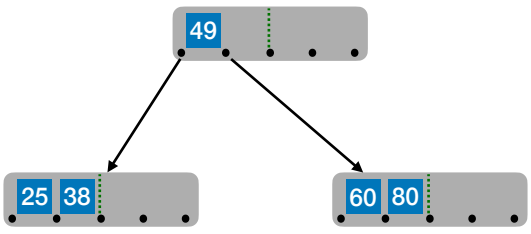


B树的插入

5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leqslant n \leqslant m-1$
即：$2 \leqslant n \leqslant 4$ **（注：此处省略失败结点）**

B树的插入

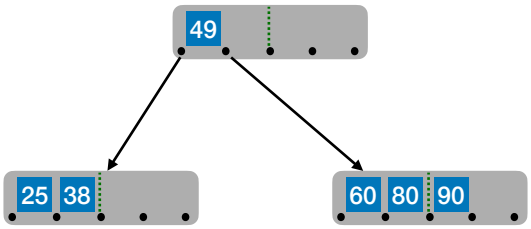
5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leqslant n \leqslant m-1$
即：$2 \leqslant n \leqslant 4$ **（注：此处省略失败结点）**



在插入key后，若导致原结点关键字数超过上限，则从中间位置（$\lceil m/2 \rceil$）将其中的关键字分为两部分，左部分包含的关键字放在原结点中，右部分包含的关键字放到新结点中，中间位置（$\lceil m/2 \rceil$）的结点插入原结点的父结点

B树的插入

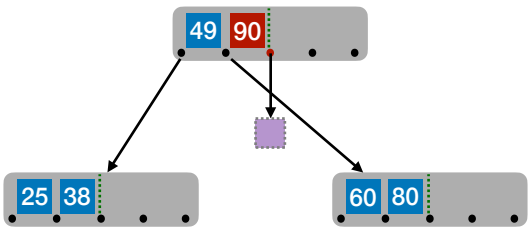
5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$
即：$2 \leq n \leq 4$ （注：此处省略失败结点）



新元素一定是插入到最底层“终端节点”，用“查找”来确定插入位置

B树的插入

5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$
即：$2 \leq n \leq 4$ （注：此处省略失败结点）

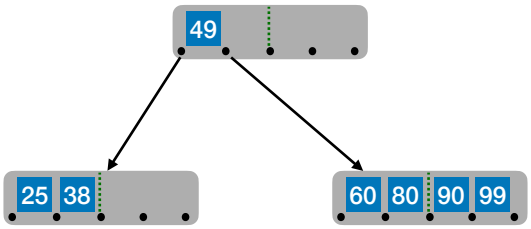


错误示范

注意：B树的失败结点只能出现在最下面一层

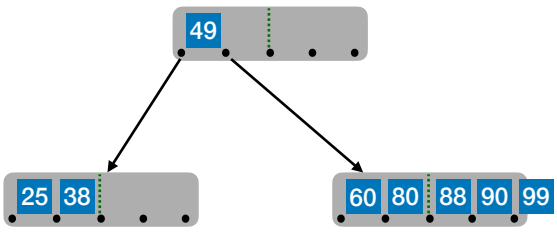
B树的插入

5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$
即：$2 \leq n \leq 4$ **（注：此处省略失败结点）**



B树的插入

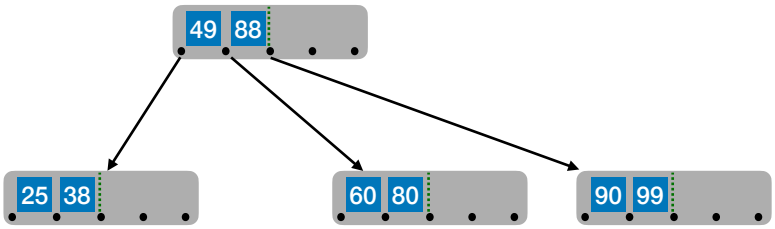
5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$
即：$2 \leq n \leq 4$ **（注：此处省略失败结点）**



在插入key后，若导致原结点关键字数超过上限，则从中间位置（$\lceil m/2 \rceil$）将其中的关键字分为两部分，左部分包含的关键字放在原结点中，右部分包含的关键字放到新结点中，中间位置（$\lceil m/2 \rceil$）的结点插入原结点的父结点

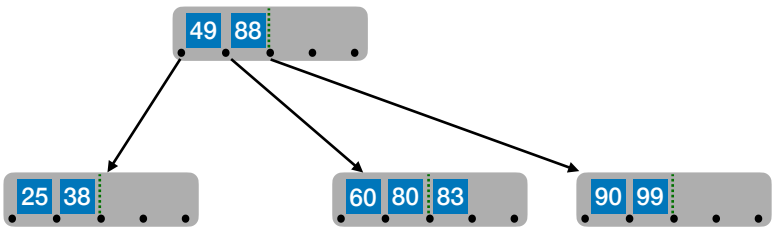
B树的插入

5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$
即：$2 \leq n \leq 4$ **（注：此处省略失败结点）**



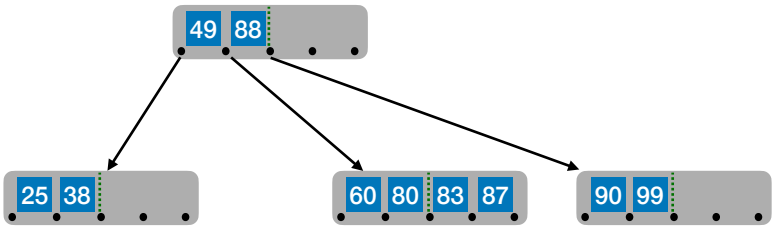
B树的插入

5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$
即：$2 \leq n \leq 4$ **（注：此处省略失败结点）**



B树的插入

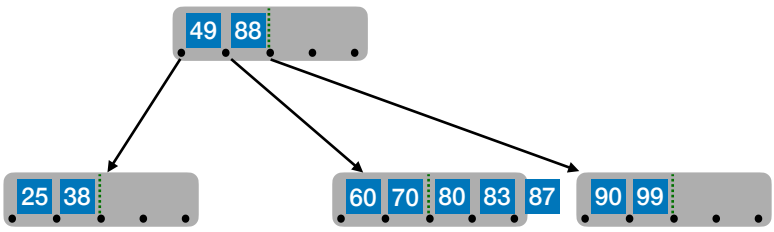
5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$
即：$2 \leq n \leq 4$ **（注：此处省略失败结点）**



B树的插入

思考：80要放到父节点中，放在哪个位置合适?

5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$
即：$2 \leq n \leq 4$ **（注：此处省略失败结点）**

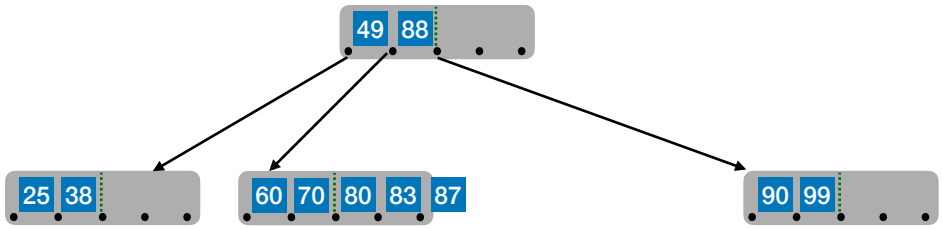


在插入key后，若导致原结点关键字数超过上限，则从中间位置（$\lceil m/2 \rceil$）将其中的关键字分为两部分，左部分包含的关键字放在原结点中，右部分包含的关键字放到新结点中，中间位置（$\lceil m/2 \rceil$）的结点插入原结点的父结点

B树的插入

思考：80要放到父节点中，放在哪个位置合适?

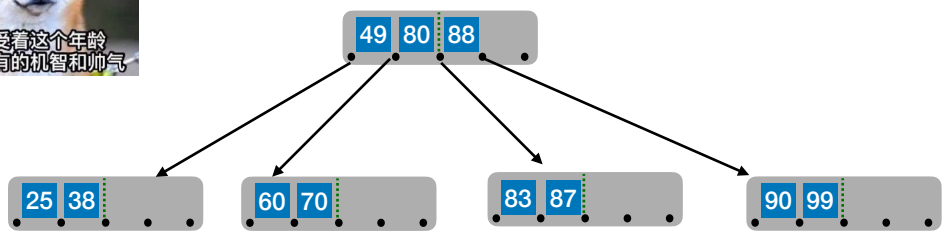
5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$
即：$2 \leq n \leq 4$ **（注：此处省略失败结点）**



在插入key后，若导致原结点关键字数超过上限，则从中间位置（$\lceil m/2 \rceil$）将其中的关键字分为两部分，左部分包含的关键字放在原结点中，右部分包含的关键字放到新结点中，中间位置（$\lceil m/2 \rceil$）的结点插入原结点的父结点

B树的插入

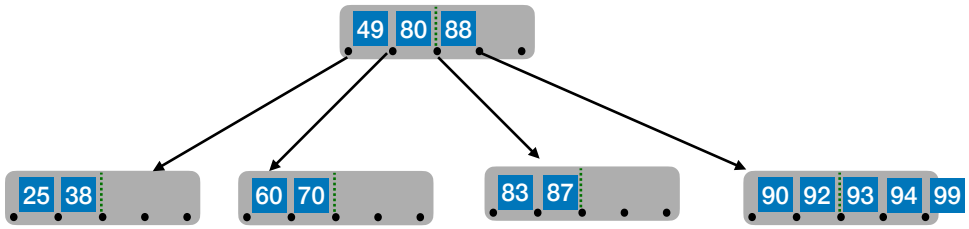
5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$
即：$2 \leq n \leq 4$ **（注：此处省略失败结点）**



在插入key后，若导致原结点关键字数超过上限，则从中间位置（$\lceil m/2 \rceil$）将其中的关键字分为两部分，左部分包含的关键字放在原结点中，右部分包含的关键字放到新结点中，中间位置（$\lceil m/2 \rceil$）的结点插入原结点的父结点

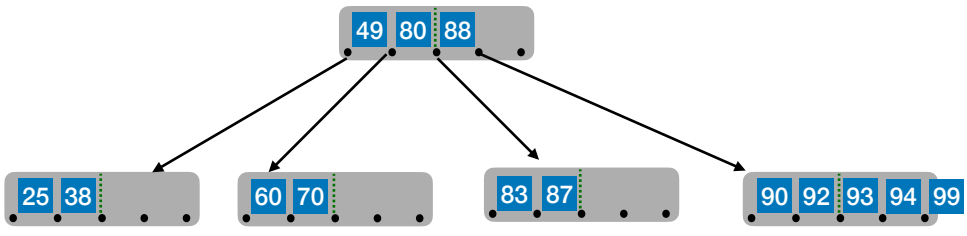
B树的插入

5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$
即：$2 \leq n \leq 4$ **（注：此处省略失败结点）**



B树的插入

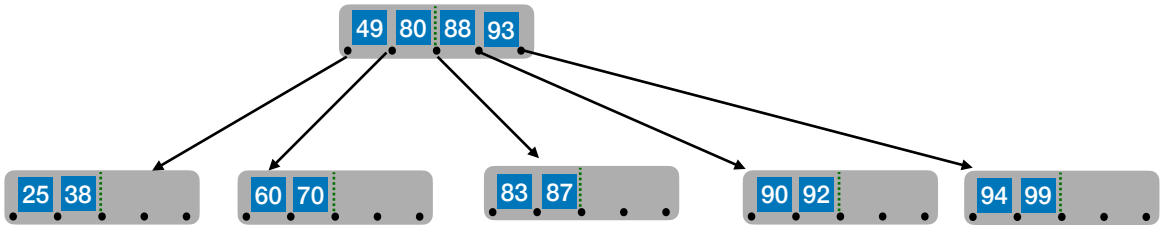
5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$
即：$2 \leq n \leq 4$ **（注：此处省略失败结点）**



在插入key后，若导致原结点关键字数超过上限，则从中间位置（$\lceil m/2 \rceil$）将其中的关键字分为两部分，左部分包含的关键字放在原结点中，右部分包含的关键字放到新结点中，中间位置（$\lceil m/2 \rceil$）的结点插入原结点的父结点

B树的插入

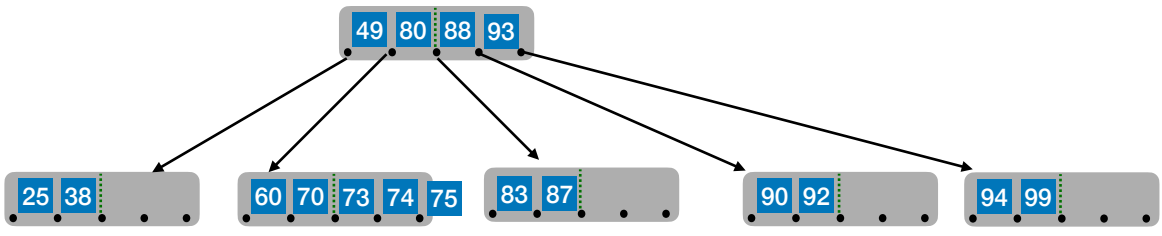
5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$
即：$2 \leq n \leq 4$ **（注：此处省略失败结点）**



在插入key后，若导致原结点关键字数超过上限，则从中间位置（$\lceil m/2 \rceil$）将其中的关键字分为两部分，左部分包含的关键字放在原结点中，右部分包含的关键字放到新结点中，中间位置（$\lceil m/2 \rceil$）的结点插入原结点的父结点

B树的插入

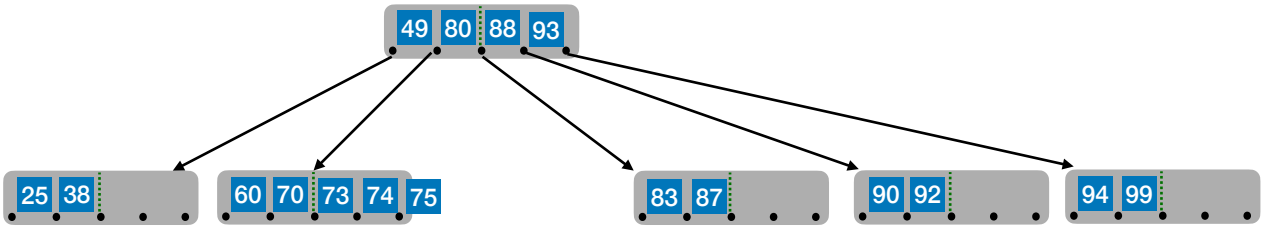
5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$
即：$2 \leq n \leq 4$ **（注：此处省略失败结点）**



在插入key后，若导致原结点关键字数超过上限，则从中间位置（$\lceil m/2 \rceil$）将其中的关键字分为两部分，左部分包含的关键字放在原结点中，右部分包含的关键字放到新结点中，中间位置（$\lceil m/2 \rceil$）的结点插入原结点的父结点

B树的插入

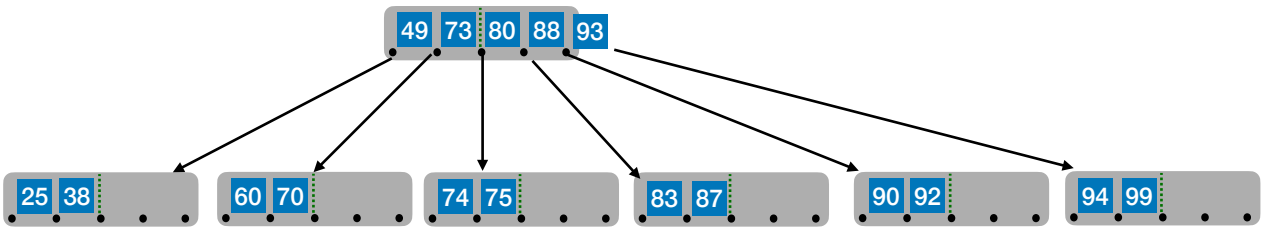
5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$
即：$2 \leq n \leq 4$ **（注：此处省略失败结点）**



在插入key后，若导致原结点关键字数超过上限，则从中间位置（$\lceil m/2 \rceil$）将其中的关键字分为两部分，左部分包含的关键字放在原结点中，右部分包含的关键字放到新结点中，中间位置（$\lceil m/2 \rceil$）的结点插入原结点的父结点

B树的插入

5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$
即：$2 \leq n \leq 4$ **（注：此处省略失败结点）**



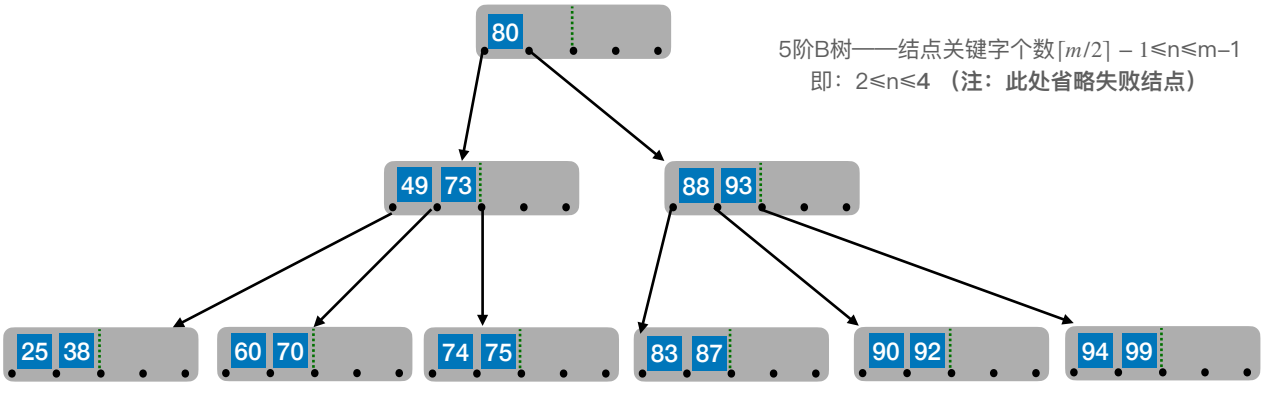
在插入key后，若导致原结点关键字数超过上限，则从中间位置（$\lceil m/2 \rceil$）将其中的关键字分为两部分，左部分包含的关键字放在原结点中，右部分包含的关键字放到新结点中，中间位置（$\lceil m/2 \rceil$）的结点插入原结点的父结点

B树的插入

5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$
即：$2 \leq n \leq 4$ **（注：此处省略失败结点）**

在插入key后，若导致原结点关键字数超过上限，则从中间位置（$\lceil m/2 \rceil$）将其中的关键字分为两部分，左部分包含的关键字放在原结点中，右部分包含的关键字放到新结点中，中间位置（$\lceil m/2 \rceil$）的结点插入原结点的父结点。若此时导致其父结点的关键字个数也超过了上限，则继续进行这种分裂操作，直至这个过程传到根结点为止，进而导致B树高度增1。

B树的插入



5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$
即：$2 \leq n \leq 4$ **（注：此处省略失败结点）**

在插入key后，若导致原结点关键字数超过上限，则从中间位置（$\lceil m/2 \rceil$）将其中的关键字分为两部分，左部分包含的关键字放在原结点中，右部分包含的关键字放到新结点中，中间位置（$\lceil m/2 \rceil$）的结点插入原结点的父结点。若此时导致其父结点的关键字个数也超过了上限，则继续进行这种分裂操作，直至这个过程传到根结点为止，进而导致B树高度增1。

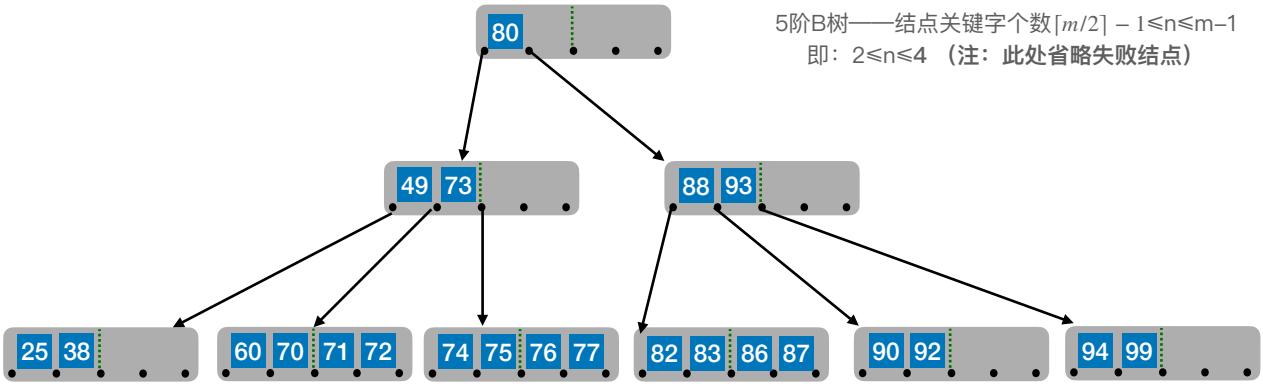
B树的插入

核心要求：
①对m阶B树——除根节点外，结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leqslant n \leqslant m-1$
②子树0<关键字1<子树1<关键字2<子树2<….

新元素一定是插入到最底层“终端节点”，用“查找”来确定插入位置

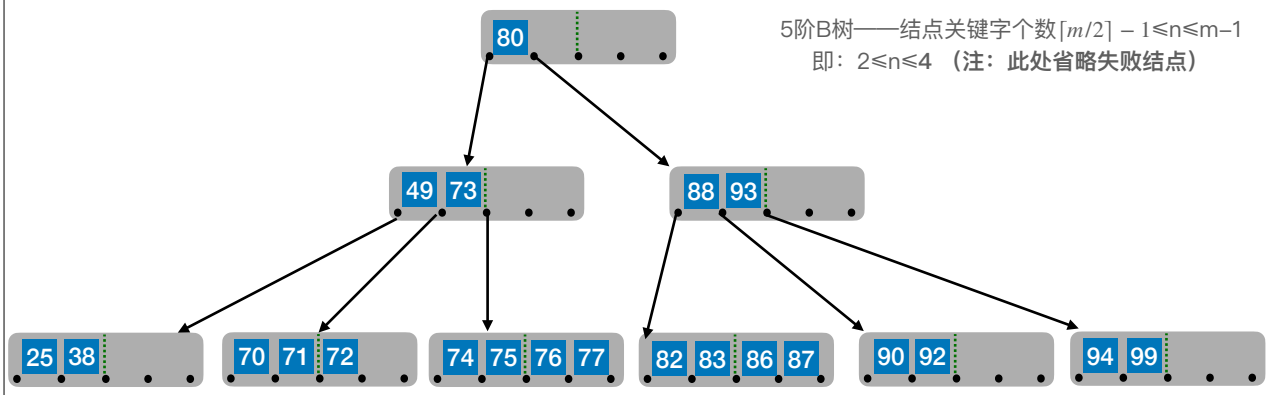
在插入key后，若导致原结点关键字数超过上限，则从中间位置（$\lceil m/2 \rceil$）将其中的关键字分为两部分，左部分包含的关键字放在原结点中，右部分包含的关键字放到新结点中，中间位置（$\lceil m/2 \rceil$）的结点插入原结点的父结点。若此时导致其父结点的关键字个数也超过了上限，则继续进行这种分裂操作，直至这个过程传到根结点为止，进而导致B树高度增1。

B树的删除



5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leqslant n \leqslant m-1$
即：$2 \leqslant n \leqslant 4$ **（注：此处省略失败结点）**

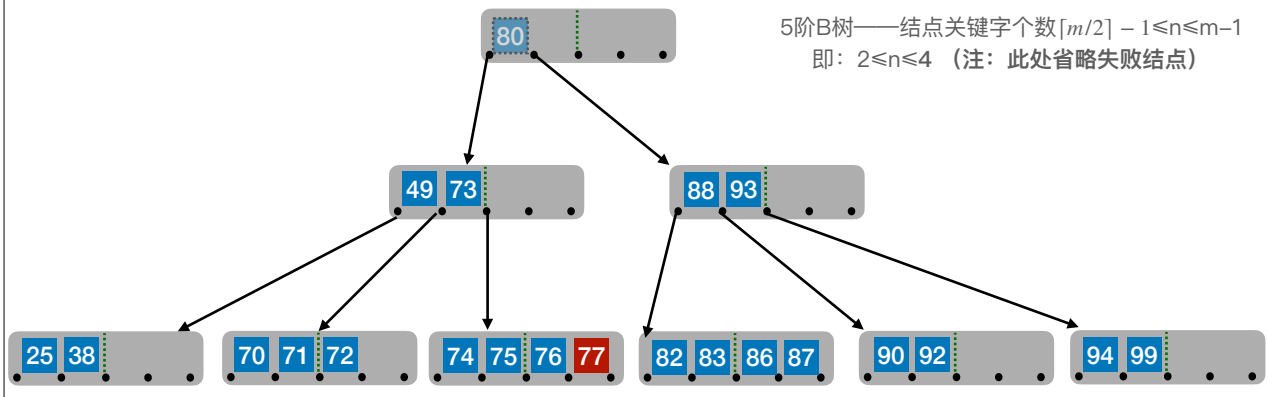
B树的删除



5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leqslant n \leqslant m-1$
即：$2 \leqslant n \leqslant 4$ （注：此处省略失败结点）

若被删除关键字在终端节点，则直接删除该关键字（要注意节点关键字个数是否低于下限 $\lceil m/2 \rceil - 1$）

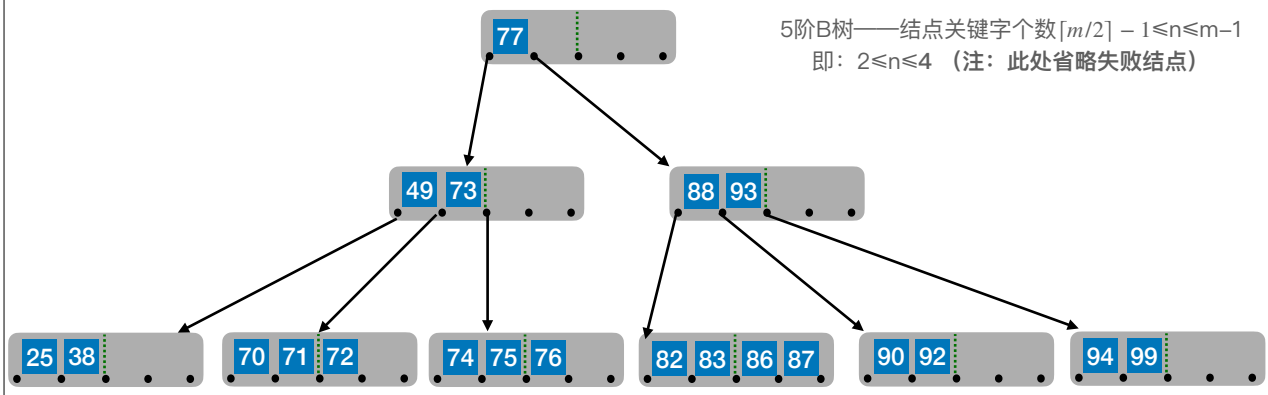
B树的删除



5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leqslant n \leqslant m-1$
即：$2 \leqslant n \leqslant 4$ （注：此处省略失败结点）

若被删除关键字在非终端节点，则用直接前驱或直接后继来替代被删除的关键字
直接前驱：当前关键字左侧指针所指子树中“最右下”的元素

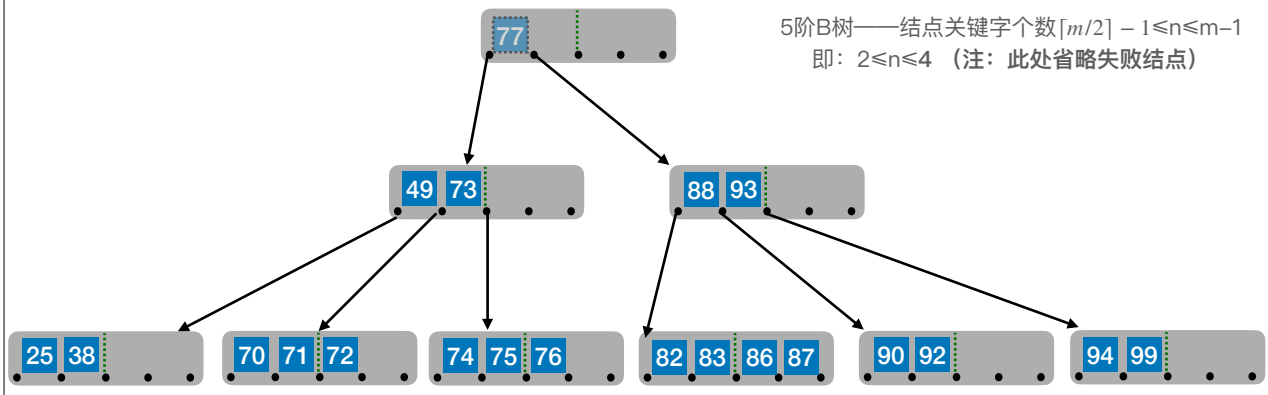
B树的删除



5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$
即：$2 \leq n \leq 4$ （注：此处省略失败结点）

若被删除关键字在非终端节点，则用直接前驱或直接后继来替代被删除的关键字
直接前驱：当前关键字左侧指针所指子树中“最右下”的元素

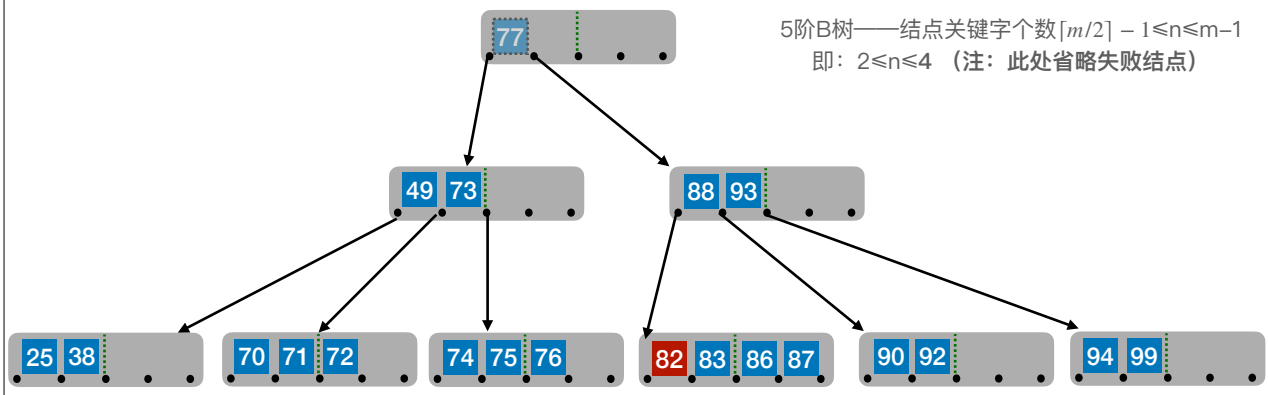
B树的删除



5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$
即：$2 \leq n \leq 4$ （注：此处省略失败结点）

若被删除关键字在非终端节点，则用直接前驱或直接后继来替代被删除的关键字
直接前驱：当前关键字左侧指针所指子树中“最右下”的元素

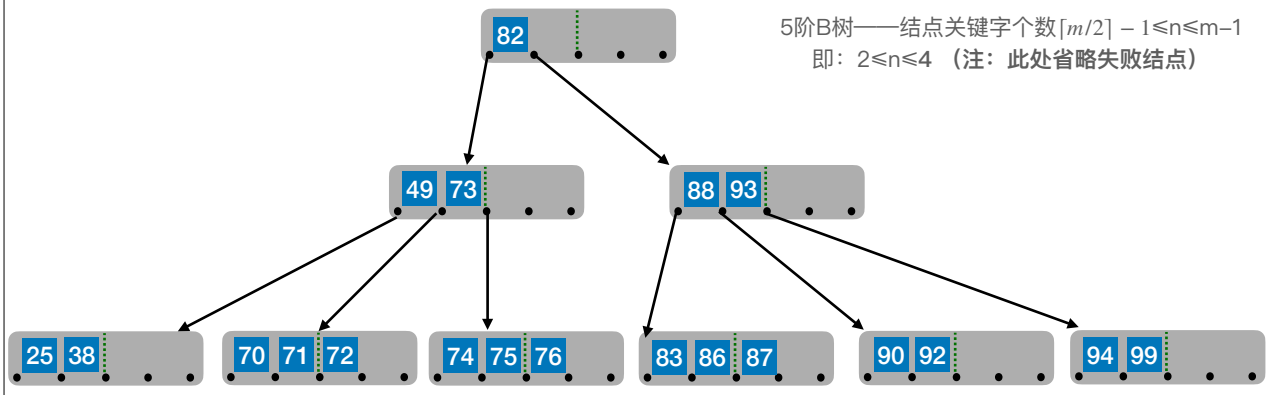
B树的删除



5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$
即：$2 \leq n \leq 4$ （注：此处省略失败结点）

若被删除关键字在非终端节点，则用直接前驱或直接后继来替代被删除的关键字
直接前驱：当前关键字左侧指针所指子树中“最右下”的元素
直接后继：当前关键字右侧指针所指子树中“最左下”的元素

B树的删除

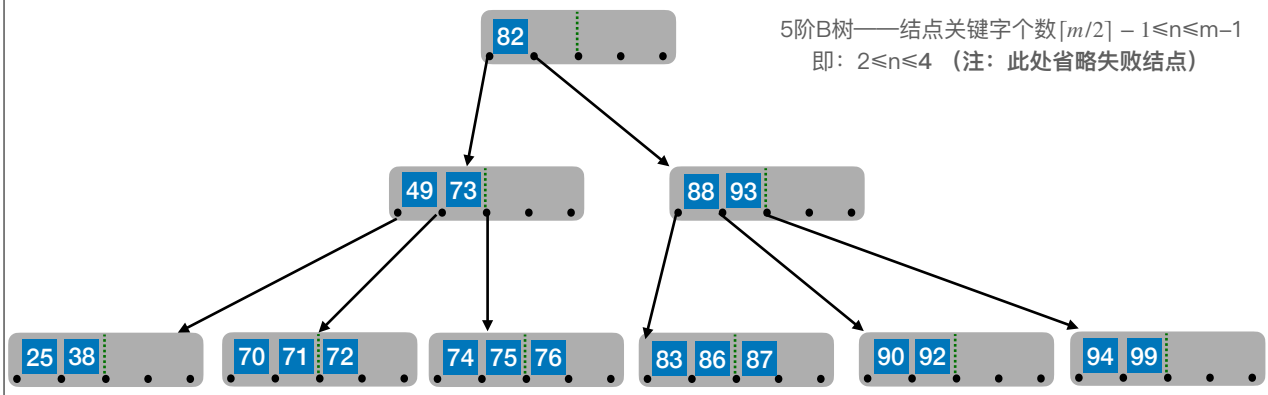


5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$
即：$2 \leq n \leq 4$ （注：此处省略失败结点）

若被删除关键字在非终端节点，则用直接前驱或直接后继来替代被删除的关键字
直接前驱：当前关键字左侧指针所指子树中“最右下”的元素
直接后继：当前关键字右侧指针所指子树中“最左下”的元素

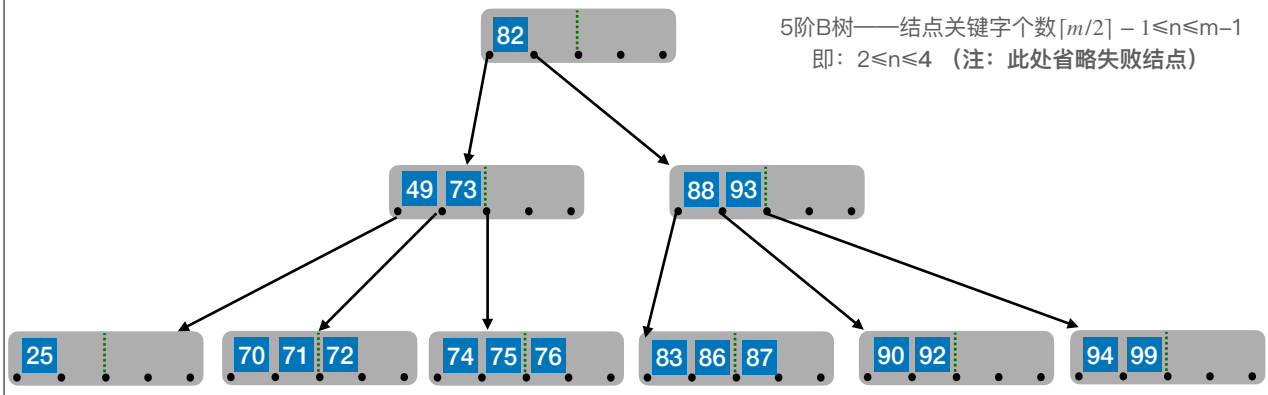
对非终端结点关键字的删除，必然可以转化为对终端结点的删除操作

B树的删除



5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$
即：$2 \leq n \leq 4$ **（注：此处省略失败结点）**

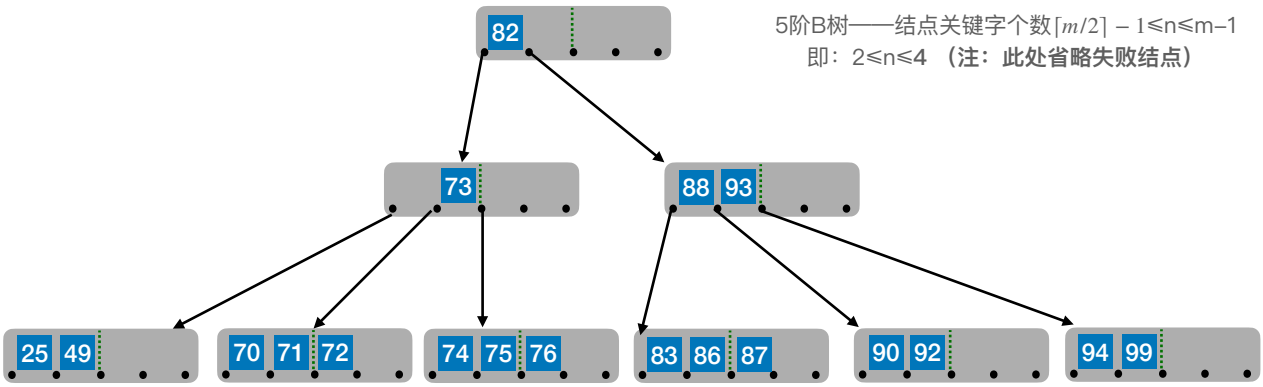
B树的删除



5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$
即：$2 \leq n \leq 4$ **（注：此处省略失败结点）**

兄弟够借。若被删除关键字所在结点删除前的关键字个数低于下限，且与此结点右（或左）兄弟结点的关键字个数还很宽裕，则需要调整该结点、右（或左）兄弟结点及其双亲结点（父子换位法）

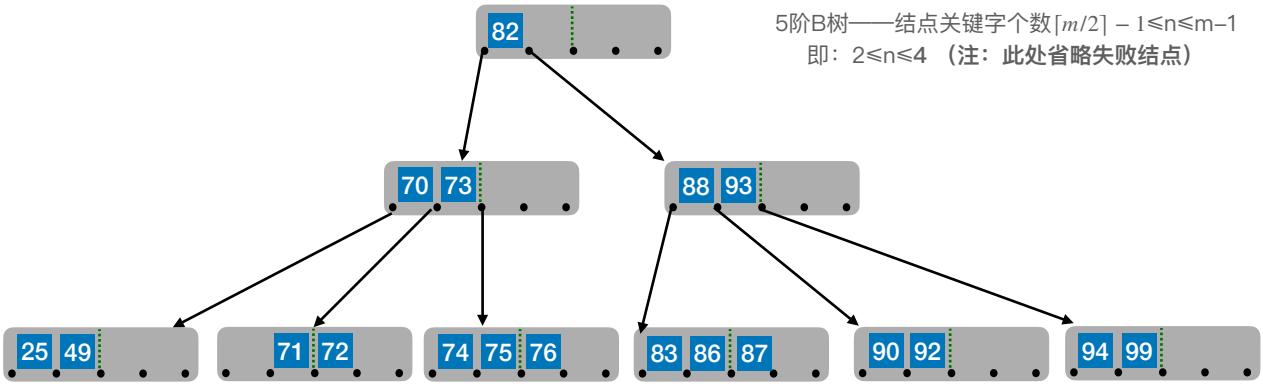
B树的删除



5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$
即：$2 \leq n \leq 4$ **（注：此处省略失败结点）**

兄弟够借。若被删除关键字所在结点删除前的关键字个数低于下限，且与此结点右（或左）兄弟结点的关键字个数还很宽裕，则需要调整该结点、右（或左）兄弟结点及其双亲结点（父子换位法）

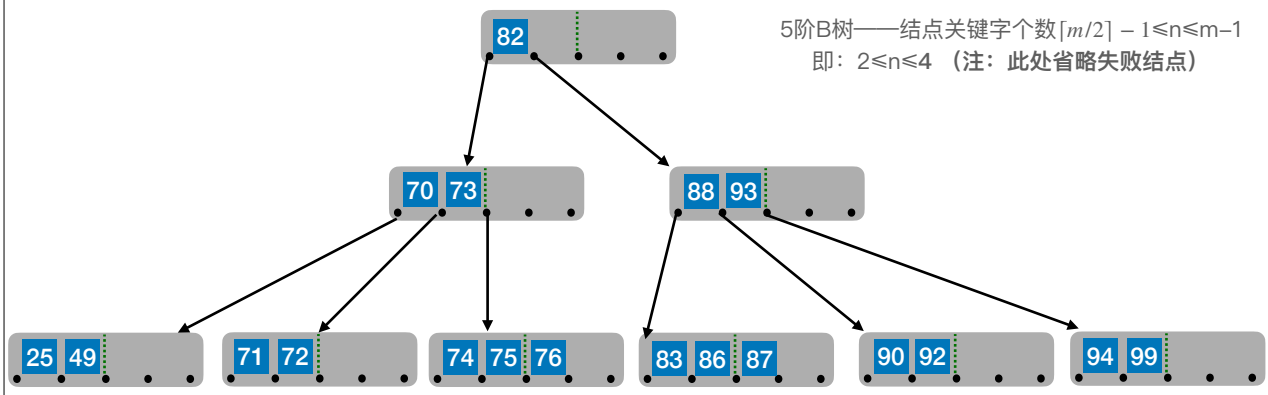
B树的删除



5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$
即：$2 \leq n \leq 4$ **（注：此处省略失败结点）**

兄弟够借。若被删除关键字所在结点删除前的关键字个数低于下限，且与此结点右（或左）兄弟结点的关键字个数还很宽裕，则需要调整该结点、右（或左）兄弟结点及其双亲结点（父子换位法）

B树的删除



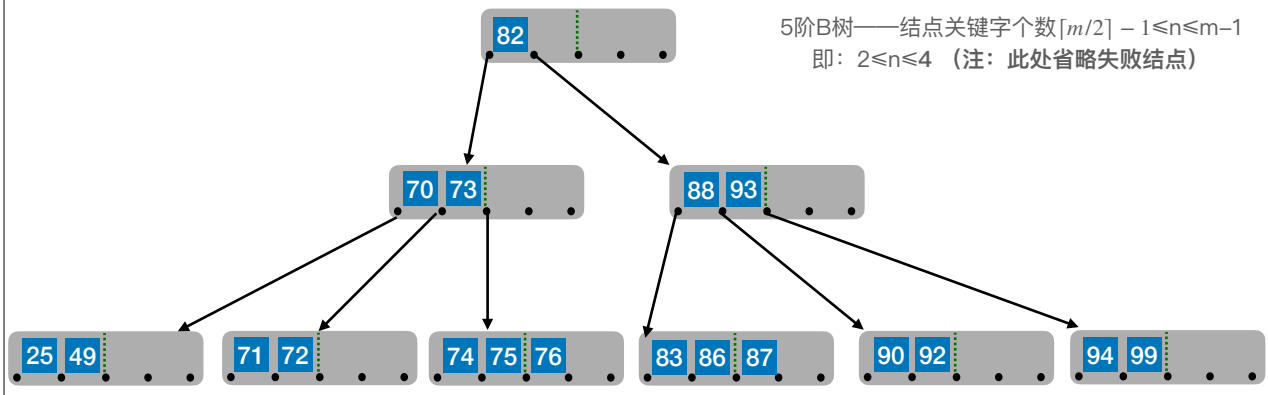
5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$
即：$2 \leq n \leq 4$ （注：此处省略失败结点）

在？借点钱？

兄弟够借。若被删除关键字所在结点删除前的关键字个数低于下限，且与此结点右（或左）兄弟结点的关键字个数还很宽裕，则需要调整该结点、右（或左）兄弟结点及其双亲结点（父子换位法）

说白了，当右兄弟很宽裕时，用当前结点的后继、后继的后继 来填补空缺

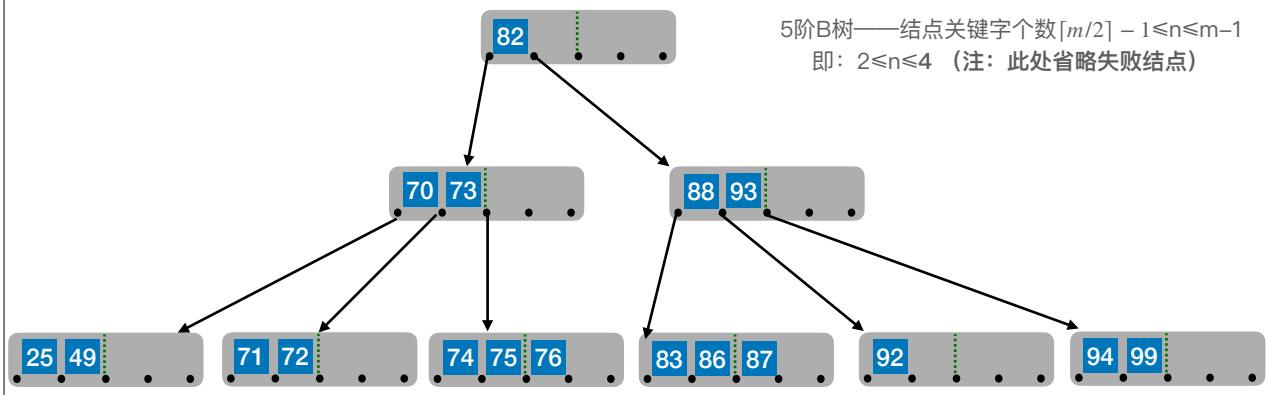
B树的删除



5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$
即：$2 \leq n \leq 4$ （注：此处省略失败结点）

兄弟够借。若被删除关键字所在结点删除前的关键字个数低于下限，且与此结点右（或左）兄弟结点的关键字个数还很宽裕，则需要调整该结点、右（或左）兄弟结点及其双亲结点（父子换位法）

B树的删除

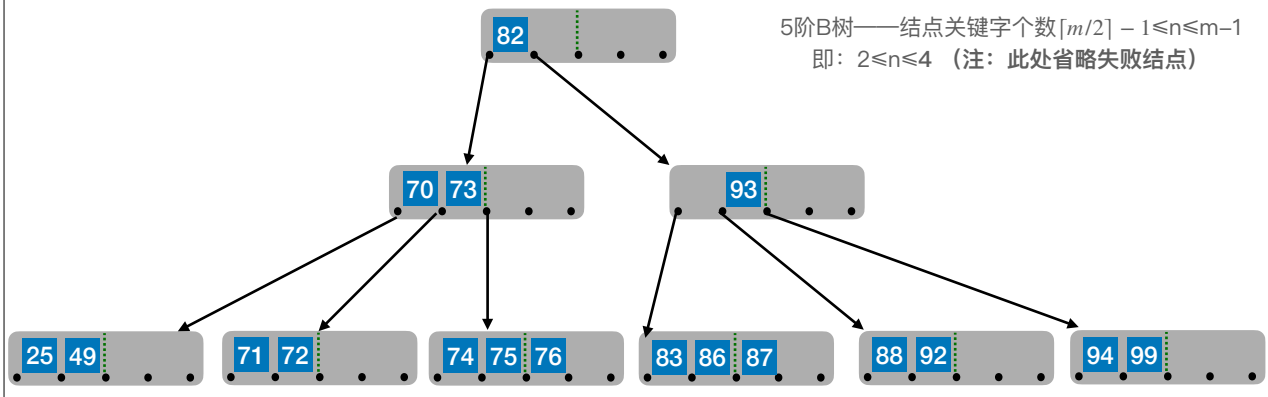


5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$
即：$2 \leq n \leq 4$ （注：此处省略失败结点）

兄弟够借。若被删除关键字所在结点删除前的关键字个数低于下限，且与此结点右（或左）兄弟结点的关键字个数还很宽裕，则需要调整该结点、右（或左）兄弟结点及其双亲结点（父子换位法）

当左兄弟很宽裕时，用当前结点的前驱、前驱的前驱 来填补空缺

B树的删除

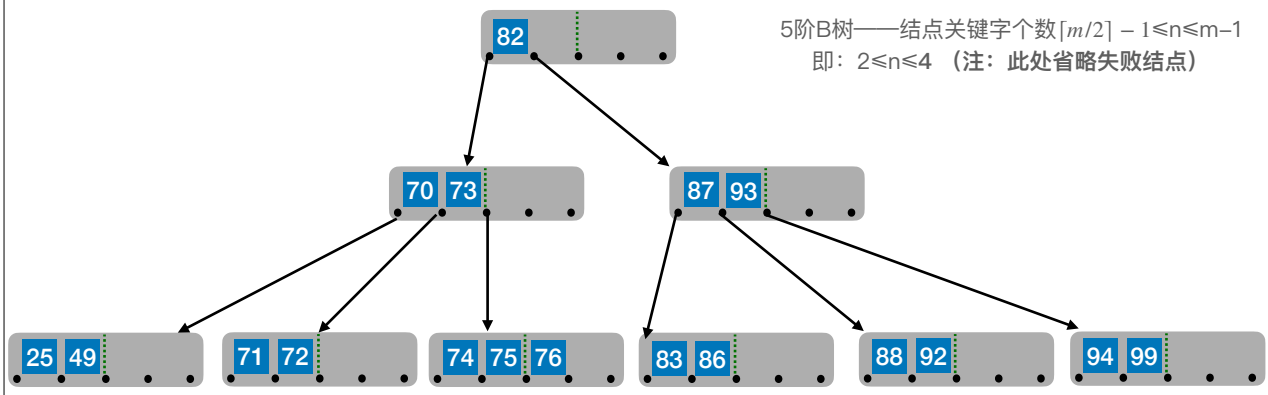


5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$
即：$2 \leq n \leq 4$ （注：此处省略失败结点）

兄弟够借。若被删除关键字所在结点删除前的关键字个数低于下限，且与此结点右（或左）兄弟结点的关键字个数还很宽裕，则需要调整该结点、右（或左）兄弟结点及其双亲结点（父子换位法）

当左兄弟很宽裕时，用当前结点的前驱、前驱的前驱 来填补空缺

B树的删除

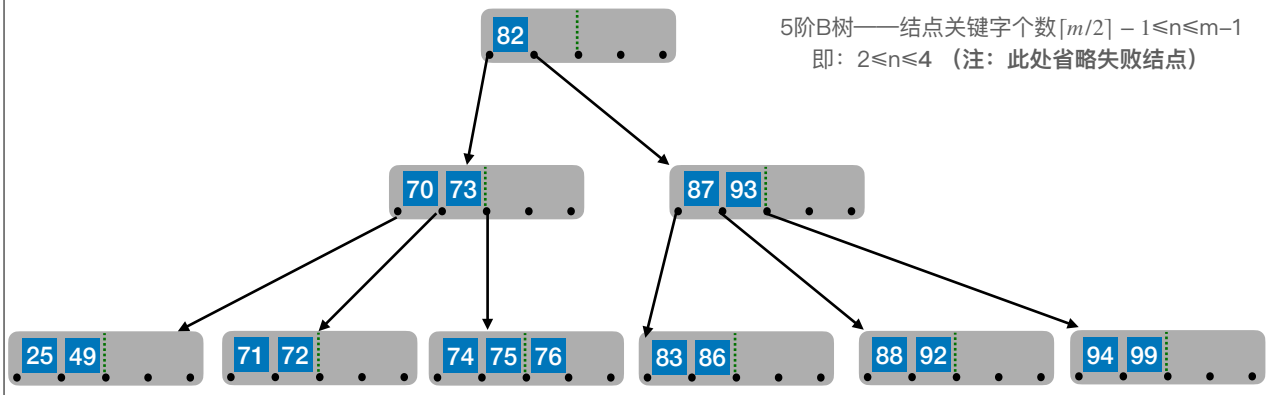


5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$
即：$2 \leq n \leq 4$ （注：此处省略失败结点）

兄弟够借。若被删除关键字所在结点删除前的关键字个数低于下限，且与此结点右（或左）兄弟结点的关键字个数还很宽裕，则需要调整该结点、右（或左）兄弟结点及其双亲结点（父子换位法）

当左兄弟很宽裕时，用当前结点的前驱、前驱的前驱 来填补空缺

B树的删除

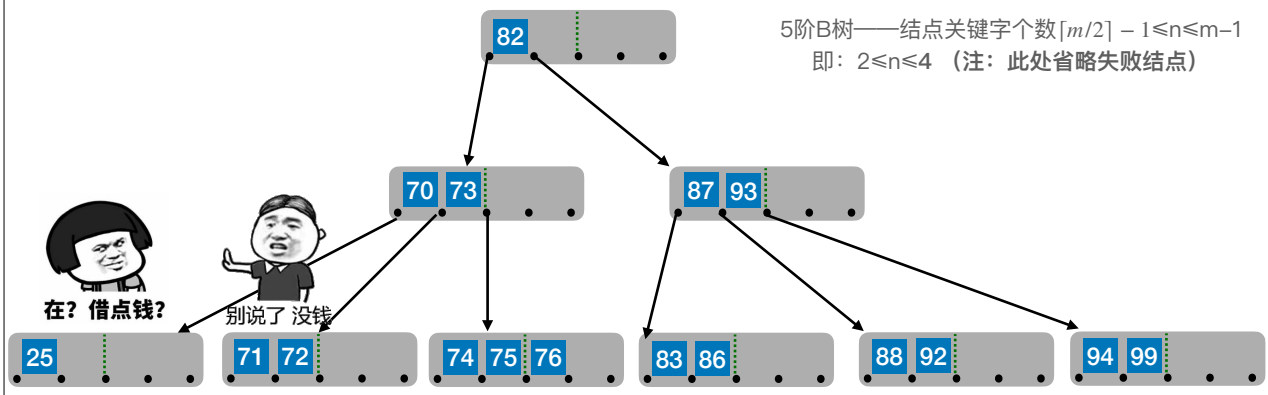


5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$
即：$2 \leq n \leq 4$ （注：此处省略失败结点）

兄弟够借。若被删除关键字所在结点删除前的关键字个数低于下限，且与此结点右（或左）兄弟结点的关键字个数还很宽裕，则需要调整该结点、右（或左）兄弟结点及其双亲结点（父子换位法）

本质：要永远保证 子树0<关键字1<子树1<关键字2<子树2<….

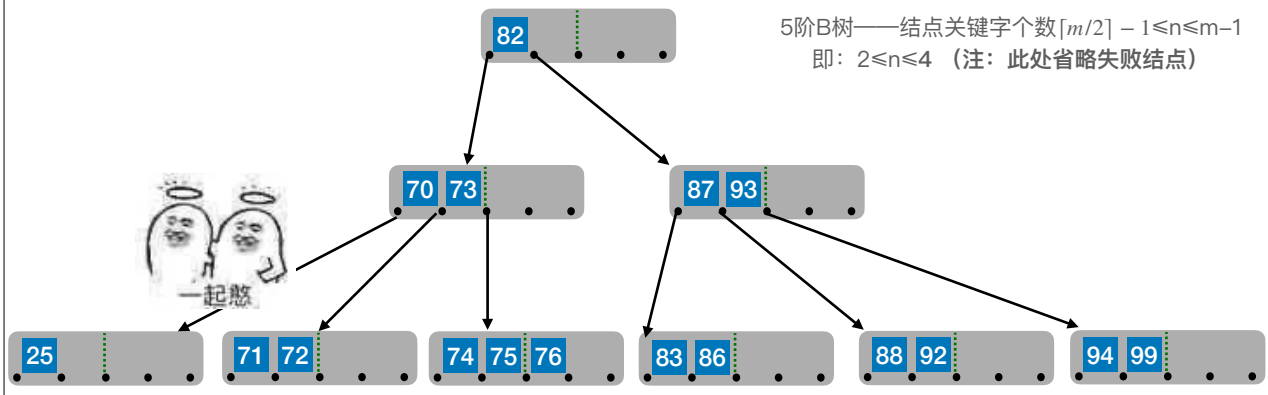
B树的删除



5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$
即：$2 \leq n \leq 4$ （注：此处省略失败结点）

兄弟不够借。若被删除关键字所在结点删除前的关键字个数低于下限，且此时与该结点相邻的左、右兄弟结点的关键字个数均=$\lceil m/2 \rceil - 1$，则将关键字删除后与左（或右）兄弟结点及双亲结点中的关键字进行合并

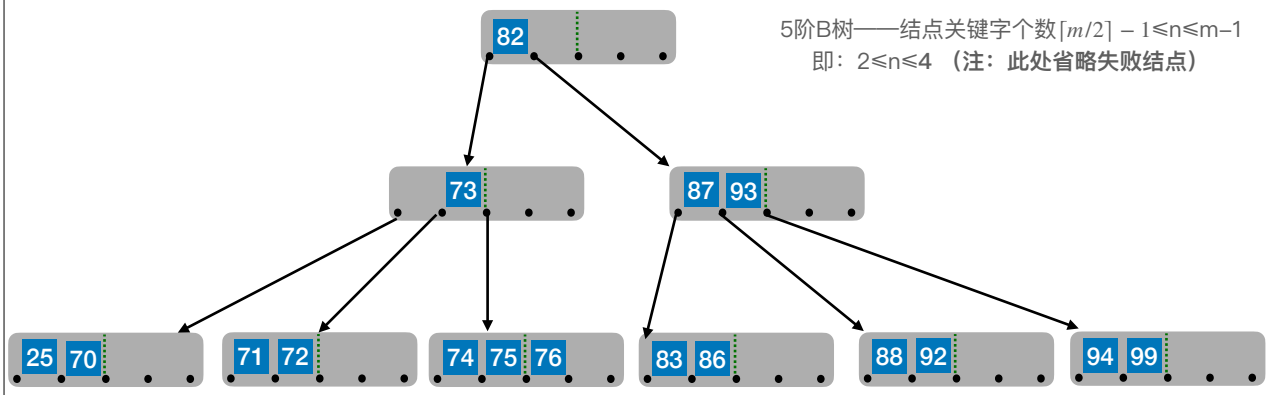
B树的删除



5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$
即：$2 \leq n \leq 4$ （注：此处省略失败结点）

兄弟不够借。若被删除关键字所在结点删除前的关键字个数低于下限，且此时与该结点相邻的左、右兄弟结点的关键字个数均=$\lceil m/2 \rceil - 1$，则将关键字删除后与左（或右）兄弟结点及双亲结点中的关键字进行合并

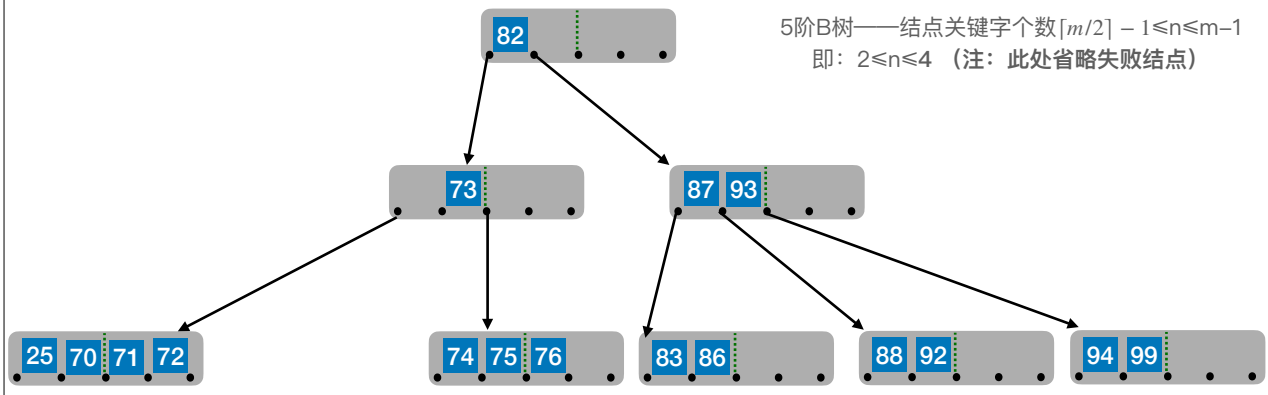
B树的删除



5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leqslant n \leqslant m-1$
即：$2 \leqslant n \leqslant 4$ （注：此处省略失败结点）

兄弟不够借。若被删除关键字所在结点删除前的关键字个数低于下限，且此时与该结点相邻的左、右兄弟结点的关键字个数均=$\lceil m/2 \rceil - 1$，则将关键字删除后与左（或右）兄弟结点及双亲结点中的关键字进行合并

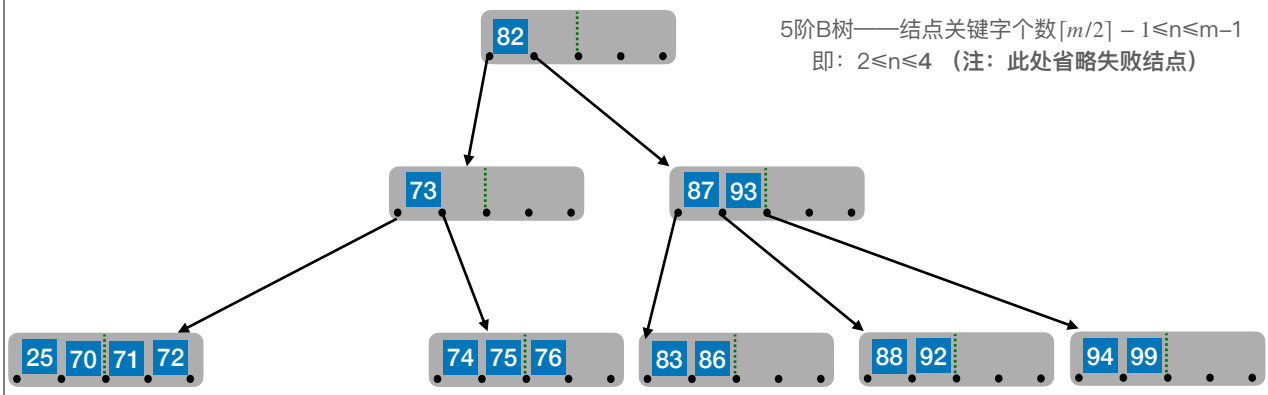
B树的删除



5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leqslant n \leqslant m-1$
即：$2 \leqslant n \leqslant 4$ （注：此处省略失败结点）

兄弟不够借。若被删除关键字所在结点删除前的关键字个数低于下限，且此时与该结点相邻的左、右兄弟结点的关键字个数均=$\lceil m/2 \rceil - 1$，则将关键字删除后与左（或右）兄弟结点及双亲结点中的关键字进行合并

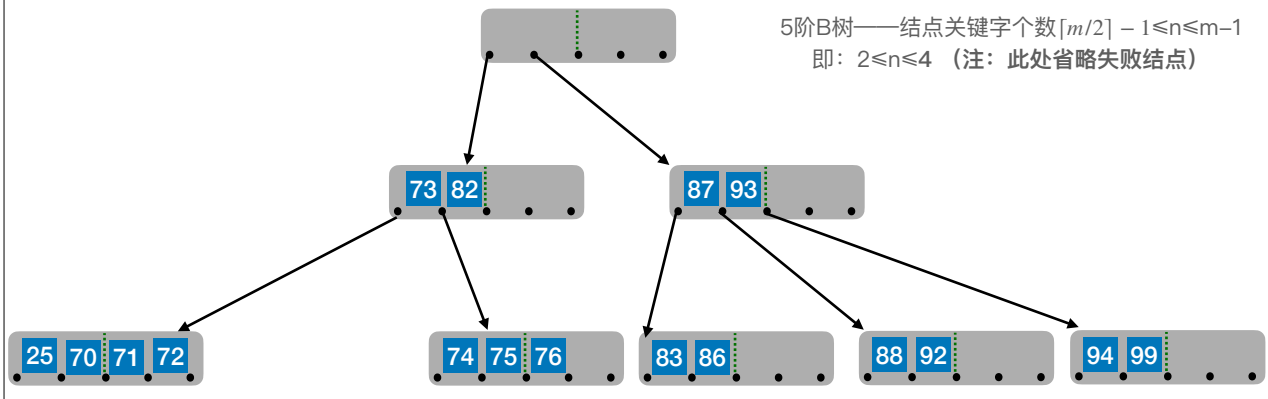
B树的删除



5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leqslant n \leqslant m-1$
即：$2 \leqslant n \leqslant 4$ （注：此处省略失败结点）

兄弟不够借。若被删除关键字所在结点删除前的关键字个数低于下限，且此时与该结点相邻的左、右兄弟结点的关键字个数均=$\lceil m/2 \rceil - 1$，则将关键字删除后与左（或右）兄弟结点及双亲结点中的关键字进行合并

B树的删除

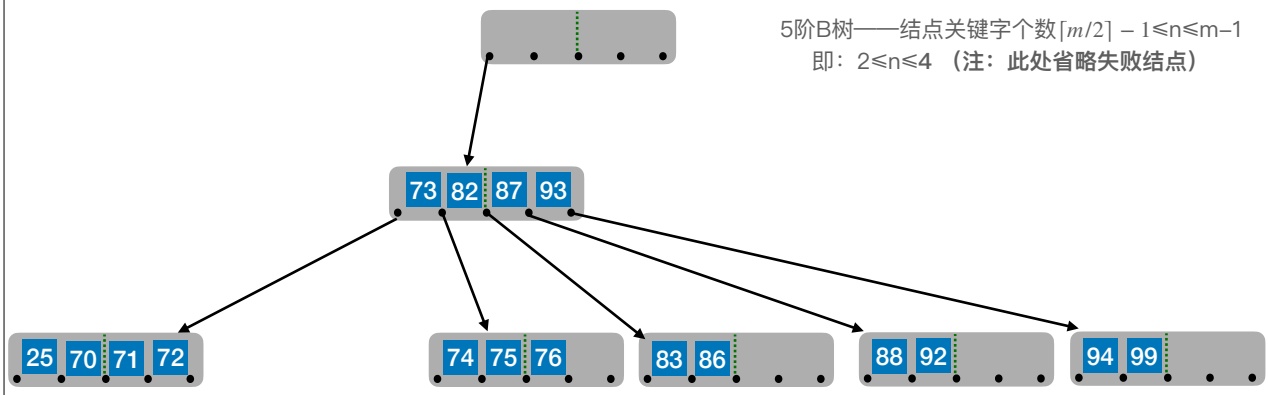


5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leqslant n \leqslant m-1$
即：$2 \leqslant n \leqslant 4$ （注：此处省略失败结点）

兄弟不够借。若被删除关键字所在结点删除前的关键字个数低于下限，且此时与该结点相邻的左、右兄弟结点的关键字个数均=$\lceil m/2 \rceil - 1$，则将关键字删除后与左（或右）兄弟结点及双亲结点中的关键字进行合并

B树的删除

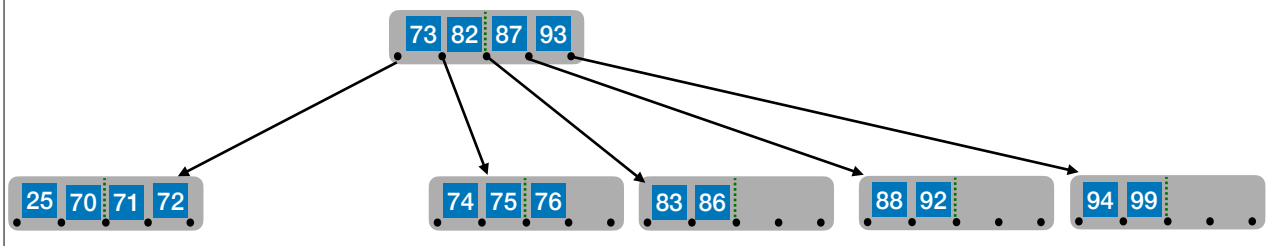
5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leqslant n \leqslant m-1$
即：$2 \leqslant n \leqslant 4$ （注：此处省略失败结点）



兄弟不够借。若被删除关键字所在结点删除前的关键字个数低于下限，且此时与该结点相邻的左、右兄弟结点的关键字个数均=$\lceil m/2 \rceil - 1$，则将关键字删除后与左（或右）兄弟结点及双亲结点中的关键字进行合并

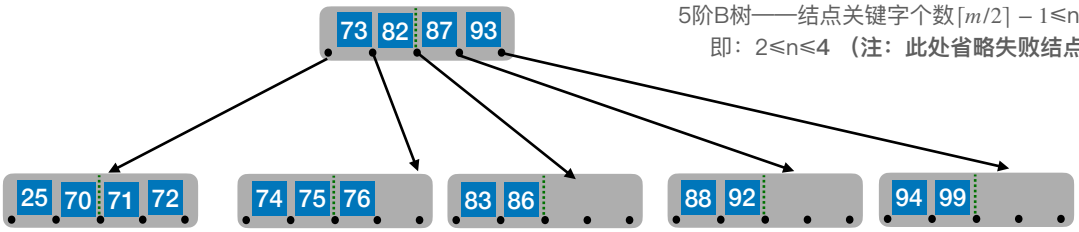
B树的删除

5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leqslant n \leqslant m-1$
即：$2 \leqslant n \leqslant 4$ （注：此处省略失败结点）



兄弟不够借。若被删除关键字所在结点删除前的关键字个数低于下限，且此时与该结点相邻的左、右兄弟结点的关键字个数均=$\lceil m/2 \rceil - 1$，则将关键字删除后与左（或右）兄弟结点及双亲结点中的关键字进行合并

B树的删除

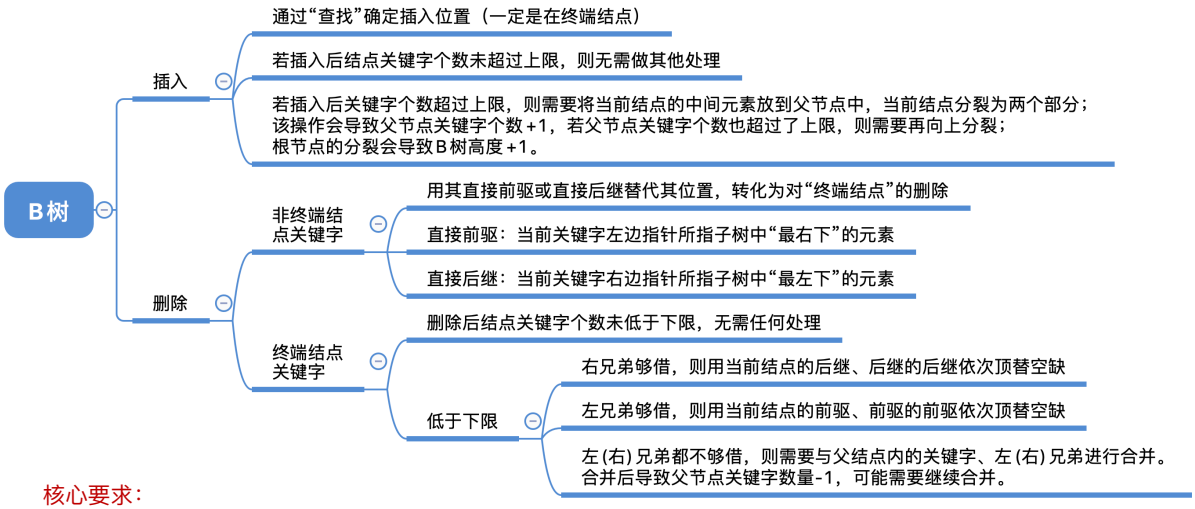


5阶B树——结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leqslant n \leqslant m-1$
即：$2 \leqslant n \leqslant 4$ （注：此处省略失败结点）

兄弟不够借。若被删除关键字所在结点删除前的关键字个数低于下限，且此时与该结点相邻的左、右兄弟结点的关键字个数均=$\lceil m/2 \rceil - 1$，则将关键字删除后与左（或右）兄弟结点及双亲结点中的关键字进行合并

在合并过程中，双亲结点中的关键字个数会减1。若其双亲结点是根结点且关键字个数减少至0（根结点关键字个数为1时，有2棵子树），则直接将根结点删除，合并后的新结点成为根；若双亲结点不是根结点，且关键字个数减少到 $\lceil m/2 \rceil - 2$，则又要与它自己的兄弟结点进行调整或合并操作，并重复上述步骤，直至符合B树的要求为止。

知识回顾与重要考点



核心要求：
①对m阶B树——除根节点外，结点关键字个数$\lceil m/2 \rceil - 1 \leqslant n \leqslant m-1$
②子树0<关键字1<子树1<关键字2<子树2<....