

本节内容

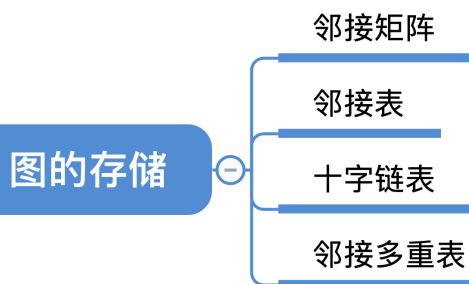
图的存储

邻接矩阵法

王道考研/CSKAOYAN.COM

1

知识总览



王道考研/CSKAOYAN.COM

2

无向图

	A	B	C	D	E	F
A	0	1	1	1	0	0
B	1	0	0	0	1	1
C	1	0	0	0	1	0
D	1	0	0	0	0	1
E	0	1	1	0	0	0
F	0	1	0	1	0	0

有向图

	A	B	C	D	E	F
A	0	1	0	0	0	0
B	0	0	0	0	0	0
C	1	0	0	0	0	0
D	1	0	0	0	0	0
E	0	1	1	0	0	0
F	0	1	0	1	0	0

#define MaxVertexNum 100

typedef struct{

char Vex[MaxVertexNum];

int Edge[MaxVertexNum][MaxVertexNum];

int vexnum, arcnum;

} MGraph;

顶点中可以存更复杂的信息

可以用 bool 型或枚举型变量表示边

//顶点数目的最大值

//顶点表

//邻接矩阵，边表

//图的当前顶点数和边数/弧数

王道考研/CSKAOYAN.COM

3

无向图

	A	B	C	D	E	F
A	0	1	1	1	0	0
B	1	0	0	0	1	1
C	1	0	0	0	1	0
D	1	0	0	0	0	1
E	0	1	1	0	0	0
F	0	1	0	1	0	0

有向图

	A	B	C	D	E	F
A	0	1	0	0	0	0
B	0	0	0	0	0	0
C	1	0	0	0	0	0
D	1	0	0	0	0	0
E	0	1	1	0	0	0
F	0	1	0	1	0	0

结点数 n 的图 $G=(V, E)$ 的邻接矩阵 A 是 $n \times n$ 的。将 G 的顶点编号为 v_1, v_2, \dots, v_n ，则

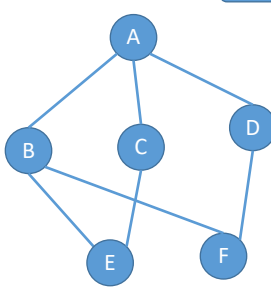
$$A[i][j] = \begin{cases} 1, & \text{若}(v_i, v_j) \text{或} \langle v_i, v_j \rangle \text{是} E(G) \text{中的边} \\ 0, & \text{若}(v_i, v_j) \text{或} \langle v_i, v_j \rangle \text{不是} E(G) \text{中的边} \end{cases}$$

王道考研/CSKAOYAN.COM

4

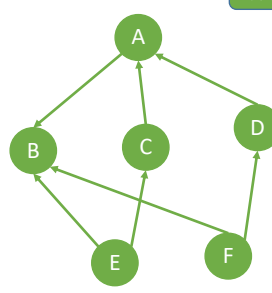
图的存储——邻接矩阵法

无向图



	A	B	C	D	E	F
A	0	1	1	1	0	0
B	1	0	0	0	1	1
C	1	0	0	0	1	0
D	1	0	0	0	0	1
E	0	1	1	0	0	0
F	0	1	0	1	0	0

有向图



	A	B	C	D	E	F
A	0	1	0	0	0	0
B	0	0	0	0	0	0
C	1	0	0	0	0	0
D	1	0	0	0	0	0
E	0	1	1	0	0	0
F	0	1	0	1	0	0

第i个结点的度 = 第i行（或第i列）的非零元素个数

第i个结点的出度 = 第i行的非零元素个数
 第i个结点的入度 = 第i列的非零元素个数
 第i个结点的度 = 第i行、第i列的非零元素个数之和

思考：如何求顶点的度、入度、出度？
如何找到与一个顶点相连的边/弧？

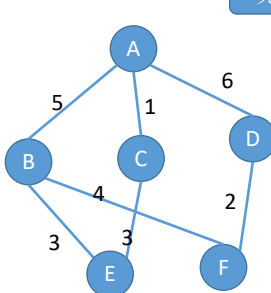
邻接矩阵法求顶点的度/出度/入度的时间复杂度为 $O(|V|)$

王道考研/CSKAOYAN.COM

5

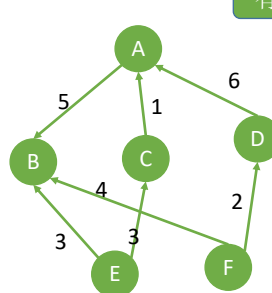
邻接矩阵法存储带权图（网）

无向网



	A	B	C	D	E	F
A	∞	5	1	6	∞	∞
B	5	∞	∞	∞	3	4
C	1	∞	∞	∞	3	∞
D	6	∞	∞	∞	∞	2
E	∞	3	3	∞	∞	∞
F	∞	4	∞	2	∞	∞

有向网



	A	B	C	D	E	F
A	∞	5	∞	∞	∞	∞
B	∞	∞	∞	∞	∞	∞
C	1	∞	∞	∞	∞	∞
D	6	∞	∞	∞	∞	∞
E	∞	3	3	∞	∞	∞
F	∞	4	∞	2	∞	∞

可用int的上限值表示“无穷”

```

#define MaxVertexNum 100
#define INFINITY 最大的int值
typedef char VertexType;
typedef int EdgeType;
typedef struct{
    VertexType Vex[MaxVertexNum];
    EdgeType Edge[MaxVertexNum][MaxVertexNum];
    int vexnum, arcnum;
}MGraph;
                    
```

//顶点数目的最大值
 //宏定义常量“无穷”
 //顶点的数据类型
 //带权图中边上权值的数据类型

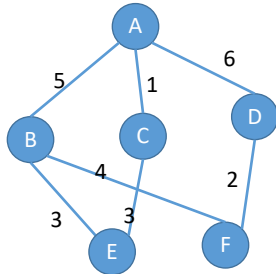
//顶点
 //边的权
 //图的当前顶点数和弧数

王道考研/CSKAOYAN.COM

6

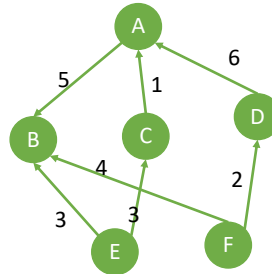
邻接矩阵法存储带权图（网）

无向网



	A	B	C	D	E	F
A	0	5	1	6	∞	∞
B	5	0	∞	∞	3	4
C	1	∞	0	∞	3	∞
D	6	∞	∞	0	∞	2
E	∞	3	3	∞	0	∞
F	∞	4	∞	2	∞	0

有向网



	A	B	C	D	E	F
A	0	5	∞	∞	∞	∞
B	∞	0	∞	∞	∞	∞
C	1	∞	0	∞	∞	∞
D	6	∞	∞	0	∞	∞
E	∞	3	3	∞	0	∞
F	∞	4	∞	2	∞	0

可用int的上限值表示“无穷”

```
#define MaxVertexNum 100
#define INFINITY 最大的int值
typedef char VertexType;
typedef int EdgeType;
typedef struct{
    VertexType Vex[MaxVertexNum];
    EdgeType Edge[MaxVertexNum][MaxVertexNum];
    int vexnum, arcnum;
}MGraph;
```

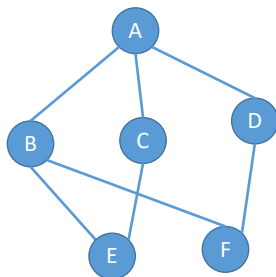
```
//顶点数目的最大值
//宏定义常量"无穷"
//顶点的数据类型
//带权图中边上权值的数据类型
//顶点
//边的权
//图的当前顶点数和弧数
```

王道考研/CSKAOYAN.COM

7

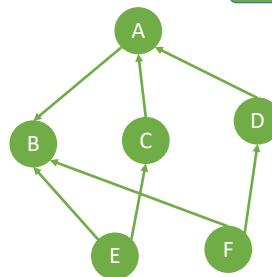
邻接矩阵法的性能分析

无向图



	A	B	C	D	E	F
A	0	1	1	1	0	0
B	1	0	0	0	1	1
C	1	0	0	0	1	0
D	1	0	0	0	0	1
E	0	1	1	0	0	0
F	0	1	0	1	0	0

有向图



	A	B	C	D	E	F
A	0	1	0	0	0	0
B	0	0	0	0	0	0
C	1	0	0	0	0	0
D	1	0	0	0	0	0
E	0	1	1	0	0	0
F	0	1	0	1	0	0

空间复杂度: $O(|V|^2)$ ——只和顶点数相关, 和实际的边数无关

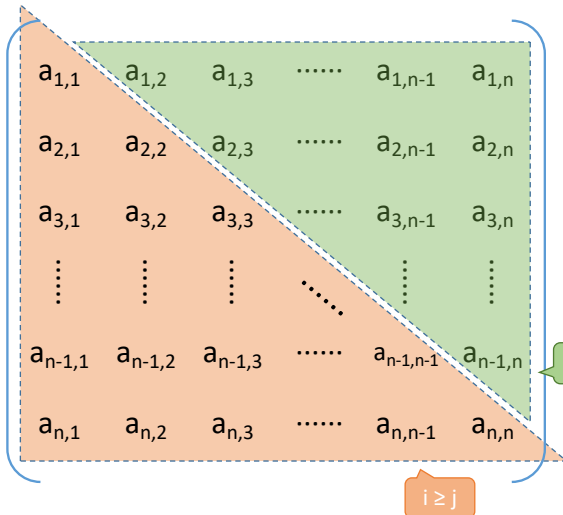
适用于存储稠密图

无向图的邻接矩阵是对称矩阵, 可以压缩存储 (只存储上三角区/下三角区)

王道考研/CSKAOYAN.COM

8

回顾：对称矩阵的压缩存储



策略：只存储主对角线+下三角区

按行优先原则将各元素存入一维数组中。

B[0] B[1] B[2] B[3] B[$\frac{n(n+1)}{2}-1$]

a _{1,1}	a _{2,1}	a _{2,2}	a _{3,1}	a _{n,n-1}	a _{n,n}
------------------	------------------	------------------	------------------	-------	--------------------	------------------

矩阵下标 → 一维数组下标

a_{i,j} → B[k]

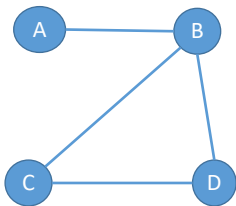
a_{i,j} = a_{j,i} (对称矩阵性质)

$$k = \begin{cases} \frac{i(i-1)}{2} + j - 1, & i \geq j \text{ (下三角区 and 主对角线元素)} \\ \frac{j(j-1)}{2} + i - 1, & i < j \text{ (上三角区元素 } a_{ij} = a_{ji} \text{)} \end{cases}$$

王道考研/CSKAOYAN.COM

9

邻接矩阵法的性质



	A	B	C	D
A	0	1	0	0
B	1	0	1	1
C	0	1	0	1
D	0	1	1	0

设图G的邻接矩阵为A (矩阵元素为0/1)，则Aⁿ的元素Aⁿ[i][j]等于由顶点i到顶点j的长度为n的路径的数目

0	1	0	0
1	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0

*

0	1	0	0
1	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0

$$A^2[1][4] = a_{1,1} a_{1,4} + a_{1,2} a_{2,4} + a_{1,3} a_{3,4} + a_{1,4} a_{4,4} = 1$$

$$A^2[2][2] = a_{2,1} a_{1,2} + a_{2,2} a_{2,2} + a_{2,3} a_{3,2} + a_{2,4} a_{4,2} = 3$$

$$A^2[3][3] = a_{3,1} a_{1,3} + a_{3,2} a_{2,3} + a_{3,3} a_{3,3} + a_{3,4} a_{4,3} = 1$$

$$A^2[1][2] = a_{1,1} a_{1,2} + a_{1,2} a_{2,2} + a_{1,3} a_{3,2} + a_{1,4} a_{4,2} = 1$$

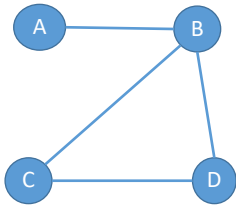
$$A^2 =$$

1	0	1	1
0	3	1	1
1	1	2	1
1	1	1	2

王道考研/CSKAOYAN.COM

10

邻接矩阵法的性质



	A	B	C	D
A	0	1	0	0
B	1	0	1	1
C	0	1	0	1
D	0	1	1	0

设图 G 的邻接矩阵为 A （矩阵元素为0/1），则 A^n 的元素 $A^n[i][j]$ 等于由顶点 i 到顶点 j 的长度为 n 的路径的数目

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

王道考研/CSKAOYAN.COM

11

知识回顾与重要考点

邻接矩阵法要点回顾：

- 如何计算指定顶点的度、入度、出度（分无向图、有向图来考虑）？时间复杂度如何？
- 如何找到与顶点相邻的边（入边、出边）？时间复杂度如何？
- 如何存储带权图？
- 空间复杂度—— $O(|V|^2)$ ，适合存储稠密图
- 无向图的邻接矩阵为对称矩阵，如何压缩存储？
- 设图 G 的邻接矩阵为 A （矩阵元素为0/1），则 A^n 的元素 $A^n[i][j]$ 等于由顶点 i 到顶点 j 的长度为 n 的路径的数目

王道考研/CSKAOYAN.COM

12