本节内容

算法

效率的度量

1

知识总览

- 算法效率的度量
  - 时间复杂度
  - 空间复杂度

2

如何评估算法时间开销？

让算法先运行，事后统计运行时间？

存在什么问题？
- 和机器性能有关，如：超级计算机 v.s. 单片机
- 和编程语言有关，越高级的语言执行效率越低
- 和编译程序产生的机器指令质量有关
- 有些算法是不能事后再统计的，如：导弹控制算法

能否排除与算法本身无关的外界因素

能否事先估计？

算法时间复杂度

事前预估算法时间开销 $T(n)$ 与问题规模 n 的关系（T 表示 “time”）

3

算法的时间复杂度

用算法表白——“爱你n遍”

4

算法的时间复杂度

```
//算法1— 逐步递增型爱你
void loveYou(int n) {    //n 为问题规模
① int i=1;      //爱你的程度
② while(i<=n){
③     i++;      //每次+1
④     printf("I Love You %d\n", i);
  }
⑤ printf("I Love You More Than %d\n", n);
}
```

```
int main(){
  loveYou(3000);
}
```

```
I Love You 2994
I Love You 2995
I Love You 2996
I Love You 2997
I Love You 2998
I Love You 2999
I Love You 3000
I Love You 3001
I Love You More Than 3000
```

语句频度：

① ——1次

② ——3001次

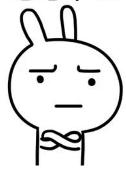
③④ ——3000次

⑤ ——1次

T(3000) = 1 + 3001 + 2*3000 + 1

时间开销与问题规模 n 的关系：

$T(n)=3n+3$



思考中……

问题1：是否可以忽略表达式某些部分？

问题2：如果有好几千行代码，按这种方法需要一行一行数？

王道考研/CSKAOYAN.COM

5

算法的时间复杂度

全称：渐进时间复杂度

思考中……

问题1：是否可以忽略表达式某些部分？

当问题规模 n 足够大时…

时间开销与问题规模 n 的关系：

$T_1(n)=3n+3$

$T_2(n)=n^2+3n+1000$

$T_3(n)=n^3 + n^2 +9999999$

简化

$T_1(n) = O(n)$

$T_2(n) = O(n^2)$

$T_3(n) = O(n^3)$

大O表示“同阶”，同等数量级。即：当 n→∞时，二者之比为常数

若 n=3000，则

3n = 9000	V.S.	$T_1(n)$= 9003
n^2 = 9,000,000	V.S.	$T_2(n)$= 9,010,000
n^3 = 27,000,000,000	V.S.	$T_3(n)$= 27,018,999,999

结论1：可以只考虑阶数高的部分

当 n=3000 时，9999n = 29,997,000 远小于 n^3 = 27,018,999,999

当 n=1000000时，9999n = 9,999,000,000 远小于 n^2 = 1,000,000,000,000

结论2：问题规模足够大时，常数项系数也可以忽略

王道考研/CSKAOYAN.COM

6

算法的时间复杂度

思考中……

问题1：是否可以忽略表达式某些部分？

当问题规模 n 足够大时…

时间开销与问题规模 n 的关系：

$T_1(n)=3n+3$

$T_2(n)=n^2+3n+1000$

$T_3(n)=n^3 + n^2 +9999999$

简化

$T_1(n) = O(n)$
$T_2(n) = O(n^2)$
$T_3(n) = O(n^3)$

a）加法规则
$T(n) = T_1(n) + T_2(n) = O(f(n)) + O(g(n)) = O(\max(f(n), g(n)))$ 多项相加，只保留最高阶的项，且系数变为1

b）乘法规则
$T(n) = T_1(n) \times T_2(n) = O(f(n)) \times O(g(n)) = O(f(n) \times g(n))$ 多项相乘，都保留

Eg：$T_3(n)= n^3 + n^2 \log_2 n$
$= O(n^3) + O(n^2 \log_2 n)$
= ？ ？ ？

王道考研/CSKAOYAN.COM

7

算法的时间复杂度

$O(1) < O(\log_2 n) < O(n) < O(n\log_2 n) < O(n^2) < O(n^3) < O(2^n) < O(n!) < O(n^n)$

问题：两个算法的时间复杂度分别如下，哪个的阶数更高（时间复杂度更高）？
$T_1(n) = O(n)$
$T_2(n) = O(\log_2 n)$

Eg：$T_3(n)= n^3 + n^2 \log_2 n$
$= O(n^3) + O(n^2 \log_2 n)$
$= O(n^2 n) + O(n^2 \log_2 n)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 n}{n} \xRightarrow{洛必达} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\ln 2} = 0$$

当 n→∞ 时，n 比 $\log_2 n$ 变大的速度快很多

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} \xRightarrow{洛必达} \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2^n \ln 2} \xRightarrow{洛必达} \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2^n \ln^2 2} = 0$$

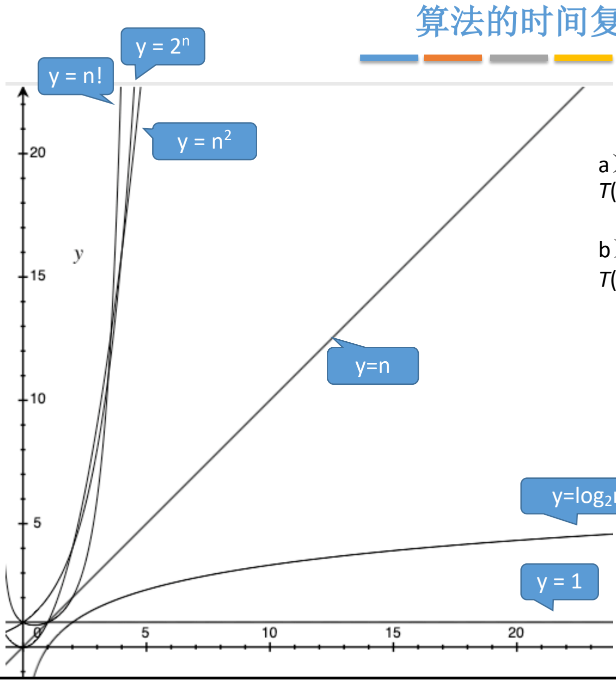
当 n→∞ 时，2^n 比 n^2 变大的速度快很多

别紧张 放轻松

王道考研/CSKAOYAN.COM

8

算法的时间复杂度



只保留更高阶的项

a）加法规则

$T(n) = T_1(n) + T_2(n) = O(f(n)) + O(g(n)) = O(\max(f(n), g(n)))$

b）乘法规则

$T(n) = T_1(n) \times T_2(n) = O(f(n)) \times O(g(n)) = O(f(n) \times g(n))$

常对幂指阶

王道考研/CSKAOYAN.COM

9

算法的时间复杂度

```
//算法1— 逐步递增型爱你
void loveYou(int n) {    //n 为问题规模
① int i=1;     //爱你的程度
② while(i<=n){
③     i++;     //每次+1
④     printf("I Love You %d\n", i);
  }
⑤ printf("I Love You More Than %d\n", n);
}
```

```
int main(){
  loveYou(3000);
}
```

```
I Love You 2994
I Love You 2995
I Love You 2996
I Love You 2997
I Love You 2998
I Love You 2999
I Love You 3000
I Love You 3001
I Love You More Than 3000
```

语句频度：

①　　——1次

②　　——3001次

③④　——3000次

⑤　　——1次

T(3000) = 1 + 3001 + 2*3000 + 1

时间开销与问题规模 n 的关系：

T(n) = 3n+3 = O(n)

问题1：是否可以忽略表达式某些部分？

只考虑阶数，用大O记法表示

问题2：如果有好几千行代码，按这种方法需要一行一行数？

王道考研/CSKAOYAN.COM

10

算法的时间复杂度

```
//算法1— 逐步递增型爱你
void loveYou(int n) {    //n 为问题规模
①  int i=1;     //爱你的程度
②  while(i<=n){
③      i++;     //每次+1
④      printf("I Love You %d\n", i);
   }
⑤  printf("I Love You More Than %d\n", n);
}
```

此处插入1000行顺序执行的代码

结论1：顺序执行的代码只会影响常数项，可以忽略

结论2：只需挑循环中的<u>一个基本操作</u>分析它的执行次数与 n 的关系即可

语句频度：

① ——1次

② ——3001次

③④ ——3000次

⑤ ——1次

T(3000) = 1 + 3001 + 2*3000 + 1

时间开销与问题规模 n 的关系：

$T(n) = 3n+3 = O(n)$

T(3000) = 1000 + 1 + 3001 + 2*3000 + 1

时间开销与问题规模 n 的关系：

$T(n) = 3n+1003 = O(n)$

王道考研/CSKAOYAN.COM

11

算法的时间复杂度

```
//算法2— 嵌套循环型爱你
void loveYou(int n) {    //n 为问题规模
    int i=1;     //爱你的程度
    while(i<=n){
        i++;     //每次+1
        printf("I Love You %d\n", i);
        for (int j=1; j<=n; j++){
            printf("I am Iron Man\n");
        }
    }
    printf("I Love You More Than %d\n", n);
}
```

外层循环执行n次

嵌套两层循环

内层循环共执行n^2次

结论1：顺序执行的代码只会影响常数项，可以忽略

结论2：只需挑循环中的<u>一个基本操作</u>分析它的执行次数与 n 的关系即可

结论3：如果有多层嵌套循环，只需关注最深层循环循环了几次

时间开销与问题规模 n 的关系：

$T(n) = O(n) + O(n^2) = O(n^2)$

王道考研/CSKAOYAN.COM

12

算法的时间复杂度

```
//算法1— 逐步递增型爱你
void loveYou(int n) {    //n 为问题规模
①  int i=1;     //爱你的程度
②  while(i<=n){
③      i++;     //每次+1
④      printf("I Love You %d\n", i);
   }
⑤  printf("I Love You More Than %d\n", n);
}
```

```
int main(){
  loveYou(3000);
}
```

I Love You 2994
I Love You 2995
I Love You 2996
I Love You 2997
I Love You 2998
I Love You 2999
I Love You 3000
I Love You 3001
I Love You More Than 3000

语句频度：
① ——1次
② ——3001次
③④ ——3000次
⑤ ——1次

T(3000) = 1 + 3001 + 2*3000 + 1
时间开销与问题规模 n 的关系：

$T(n) = 3n+3 = O(n)$

问题1：是否可以忽略表达式某些部分？

只考虑阶数，用大O记法表示

问题2：如果有好几千行代码，按这种方法需要一行一行数？

只需考虑最深层循环的循环次数与 n 的关系

王道考研/CSKAOYAN.COM

13

小练习1

```
//算法3— 指数递增型爱你
void loveYou(int n) {    //n 为问题规模
    int i=1;     //爱你的程度
    while(i<=n){
        i=i*2;   //每次翻倍
        printf("I Love You %d\n", i);
    }
    printf("I Love You More Than %d\n", n);
}
```

I Love You 32
I Love You 64
I Love You 128
I Love You 256
I Love You 512
I Love You 1024
I Love You 2048
I Love You 4096
I Love You More Than 3000

计算上述算法的时间复杂度 T(n)：
设最深层循环的语句频度（总共循环的次数）为 x，则
由循环条件可知，循环结束时刚好满足 $2^x > n$
$x = \log_2 n + 1$

$T(n) = O(x) = O(\log_2 n)$

王道考研/CSKAOYAN.COM

14

小练习2

```
//算法4— 搜索数字型爱你
void loveYou(int flag[], int n) {    //n 为问题规模
    printf("I Am Iron Man\n");
    for(int i=0; i<n; i++){ //从第一个元素开始查找
        if(flag[i]==n){ //找到元素n
            printf("I Love You %d\n", n);
            break;  //找到后立即跳出循环
        }
    }
}
```

```
//flag 数组中乱序存放了 1~n 这些数
int flag[n]={1...n};
loveYou(flag, n);
```

很多算法执行时间与输入的数据有关

计算上述算法的时间复杂度 T(n)

最好情况：元素n在第一个位置 ——最好时间复杂度 T(n)=O(1)
最坏情况：元素n在最后一个位置 ——最坏时间复杂度 T(n)=O(n)
平均情况：假设元素n在任意一个位置的概率相同为 $\frac{1}{n}$ ——平均时间复杂度 T(n)=O(n)

循环次数 $x = (1+2+3+...+n)\,\frac{1}{n} = \left(\frac{n(1+n)}{2}\right)\frac{1}{n} = \frac{1+n}{2}$ T(n)=O(x)=O(n)

王道考研/CSKAOYAN.COM

15

算法的时间复杂度

最坏时间复杂度：最坏情况下算法的时间复杂度

平均时间复杂度：所有输入示例等概率出现的情况下，算法的期望运行时间

最好时间复杂度：最好情况下算法的时间复杂度

王道考研/CSKAOYAN.COM

16

知识回顾与重要考点

- **时间复杂度**
  - 如何计算
    - ①找到一个基本操作（最深层循环）
    - ②分析该基本操作的执行次数 x 与问题规模 n 的关系 x=f(n)
    - ③ x 的数量级 O(x) 就是算法时间复杂度 T(n)
  - 常用技巧
    - 加法规则：$O(f(n)) + O(g(n)) = O(\max(f(n), g(n)))$
    - 乘法规则：$O(f(n))\times O(g(n)) = O(f(n)\times g(n))$
    - “常对幂指阶”
      $O(1) < O(\log_2 n) < O(n) < O(n\log_2 n) < O(n^2) < O(n^3) < O(2^n) < O(n!) < O(n^n)$
  - 三种复杂度
    - 最坏时间复杂度：考虑输入数据“最坏”的情况
    - 平均时间复杂度：考虑所有输入数据都等概率出现的情况
    - 最好时间复杂度：考虑输入数据“最好”的情况

小故事：算法的性能问题只有在 n 很大时才会暴露出来。

17