

王道考研——数据结构

WWW.CSKAOYAN.COM

第六章 图

1

本节内容

图

定义
基本术语

王道考研/CSKAOYAN.COM

2

知识总览

图

基本概念

几种特殊的图

王道考研/CSKAOYAN.COM

3

G: Graph
V: Vertex
E: Edge

图的定义

图 G 由顶点集 V 和边集 E 组成，记为 $G = (V, E)$ ，其中 $V(G)$ 表示图 G 中顶点的有限非空集； $E(G)$ 表示图 G 中顶点之间的关系（边）集合。若 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ，则用 $|V|$ 表示图 G 中顶点的个数，也称图 G 的阶， $E = \{(u, v) \mid u \in V, v \in V\}$ ，用 $|E|$ 表示图 G 中边的条数。

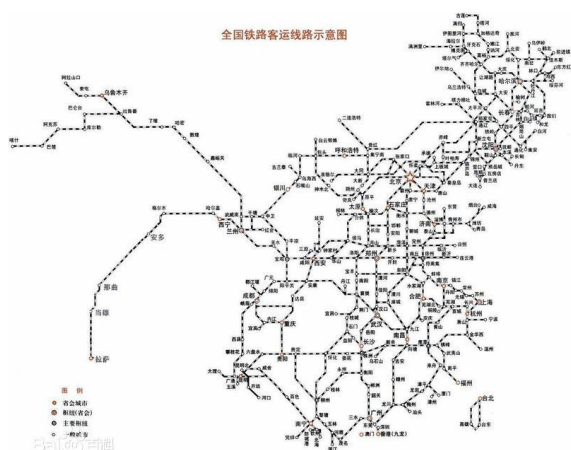
注意：线性表可以是空表，树可以是空树，但图不可以是空，即 V 一定是非空集

$E = \emptyset$

王道考研/CSKAOYAN.COM

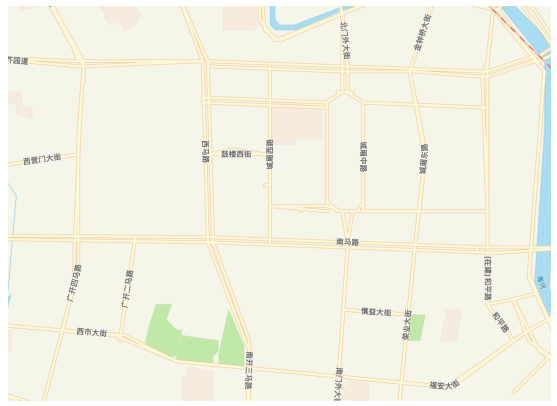
4

图逻辑结构的应用



全国铁路客运线路示意图

V: 车站 E: 铁路



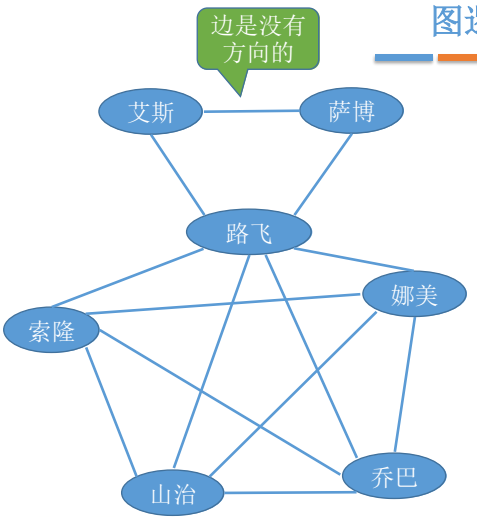
V: 路口 E: 道路

王道考研/CSKAOYAN.COM

5

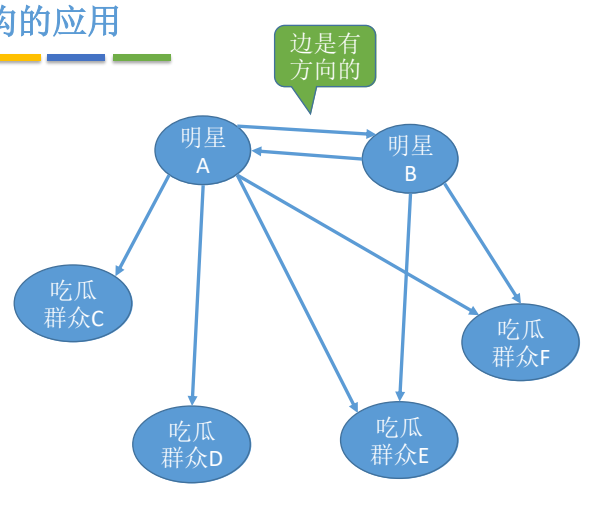
图逻辑结构的应用

边是没有方向的



微信好友关系

边是有方向的

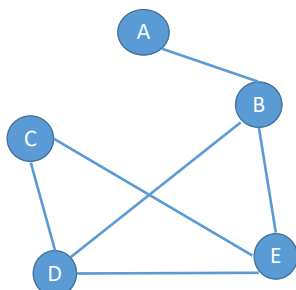


微博粉丝关系

王道考研/CSKAOYAN.COM

6

无向图、有向图



若 E 是**无向边**(简称**边**)的有限集合时,则图 G 为**无向图**。边是顶点的无序对,记为 (v, w) 或 (w, v) ,因为 $(v, w) = (w, v)$,其中 v, w 是顶点。可以说顶点 w 和顶点 v 互为邻接点。边 (v, w) 依附于顶点 w 和 v ,或者说边 (v, w) 和顶点 v, w 相关联。

$$G_2 = (V_2, E_2)$$

$$V_2 = \{A, B, C, D, E\}$$

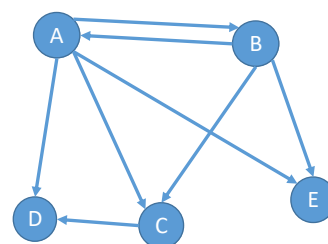
$$E_2 = \{(A, B), (B, D), (B, E), (C, D), (C, E), (D, E)\}$$

若 E 是**有向边**(也称**弧**)的有限集合时,则图 G 为**有向图**。弧是顶点的有序对,记为 $\langle v, w \rangle$,其中 v, w 是顶点, v 称为**弧尾**, w 称为**弧头**, $\langle v, w \rangle$ 称为从顶点 v 到顶点 w 的弧,也称 v 邻接到 w ,或 w 邻接自 v 。 $\langle v, w \rangle \neq \langle w, v \rangle$

$$G_1 = (V_1, E_1)$$

$$V_1 = \{A, B, C, D, E\}$$

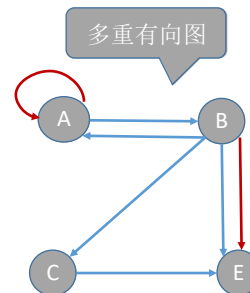
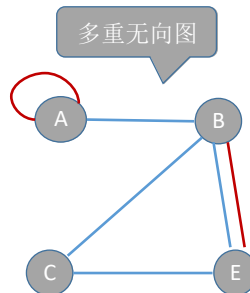
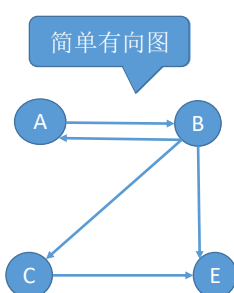
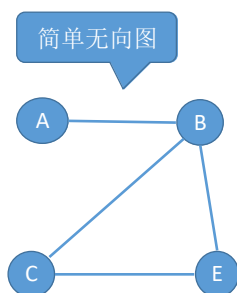
$$E_1 = \{\langle A, B \rangle, \langle A, C \rangle, \langle A, D \rangle, \langle A, E \rangle, \langle B, A \rangle, \langle B, C \rangle, \langle B, E \rangle, \langle C, D \rangle\}$$



王道考研/CSKAOYAN.COM

7

简单图、多重图



简单图——① 不存在重复边;
② 不存在顶点到自身的边

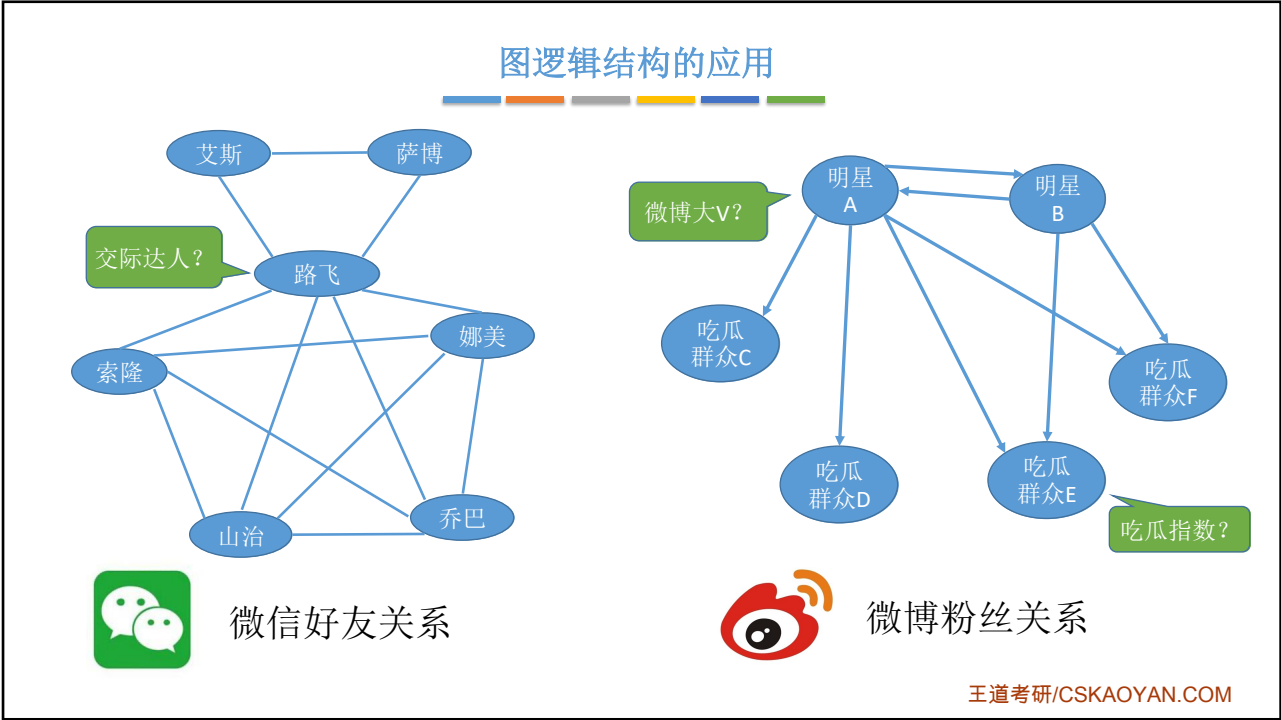
数据结构课程只探讨“简单图”



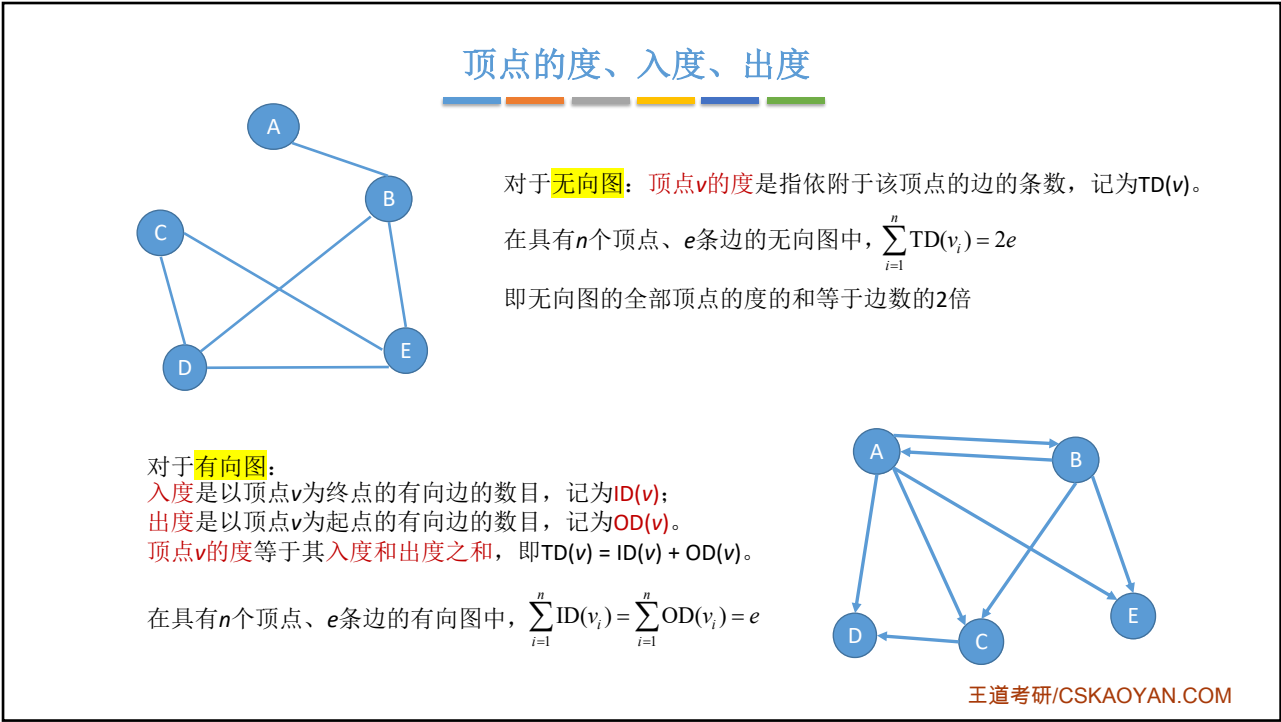
多重图——图 G 中某两个结点之间的边数多于一条,又允许顶点通过同一条边和自己关联,则 G 为多重图

王道考研/CSKAOYAN.COM

8



9

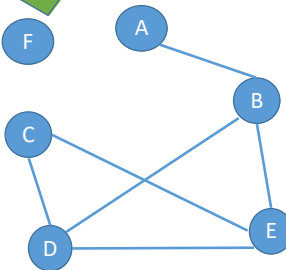
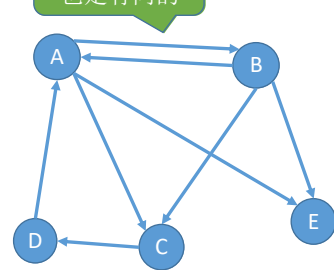


10

顶点之间有可能不存在路径

顶点-顶点的关系描述

有向图的路径也是有向的

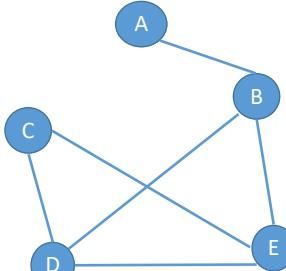
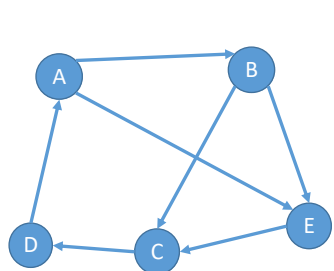



- **路径**——顶点 v_p 到顶点 v_q 之间的一条路径是指顶点序列, $v_p, v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_m}, v_q$
- **回路**——第一个顶点和最后一个顶点相同的路径称为回路或环
- **简单路径**——在路径序列中, 顶点不重复出现的路径称为简单路径。
- **简单回路**——除第一个顶点和最后一个顶点外, 其余顶点不重复出现的回路称为简单回路。
- **路径长度**——路径上边的数目
- **点到点的距离**——从顶点 u 出发到顶点 v 的最短路径若存在, 则此路径的长度称为从 u 到 v 的距离。若从 u 到 v 根本不存在路径, 则记该距离为无穷(∞)。
- **无向图中**, 若从顶点 v 到顶点 w 有路径存在, 则称 v 和 w 是**连通的**
- **有向图中**, 若从顶点 v 到顶点 w 和从顶点 w 到顶点 v 之间都有路径, 则称这两个顶点是**强连通的**

王道考研/CSKAOYAN.COM

11

连通图、强连通图

若图 G 中任意两个顶点都是连通的, 则称图 G 为**连通图**, 否则称为**非连通图**。

常见考点:
 对于 n 个顶点的无向图 G ,
 若 G 是**连通图**, 则最少有 $n-1$ 条边
 若 G 是**非连通图**, 则最多可能有 C_{n-1}^2 条边

若图中任何一对顶点都是强连通的, 则称此图为**强连通图**。

常见考点:
 对于 n 个顶点的有向图 G ,
 若 G 是**强连通图**, 则最少有 n 条边 (形成回路)

王道考研/CSKAOYAN.COM

12

研究图的局部——子图

无向图G

子图

生成子图

并非任意挑几个点、几条边都能构成子图

王道考研/CSKAOYAN.COM

设有两个图 $G = (V, E)$ 和 $G' = (V', E')$, 若 V' 是 V 的子集, 且 E' 是 E 的子集, 则称 G' 是 G 的**子图**。

若有满足 $V(G') = V(G)$ 的子图 G' , 则称其为 G 的**生成子图**

13

研究图的局部——子图

有向图G

子图

生成子图

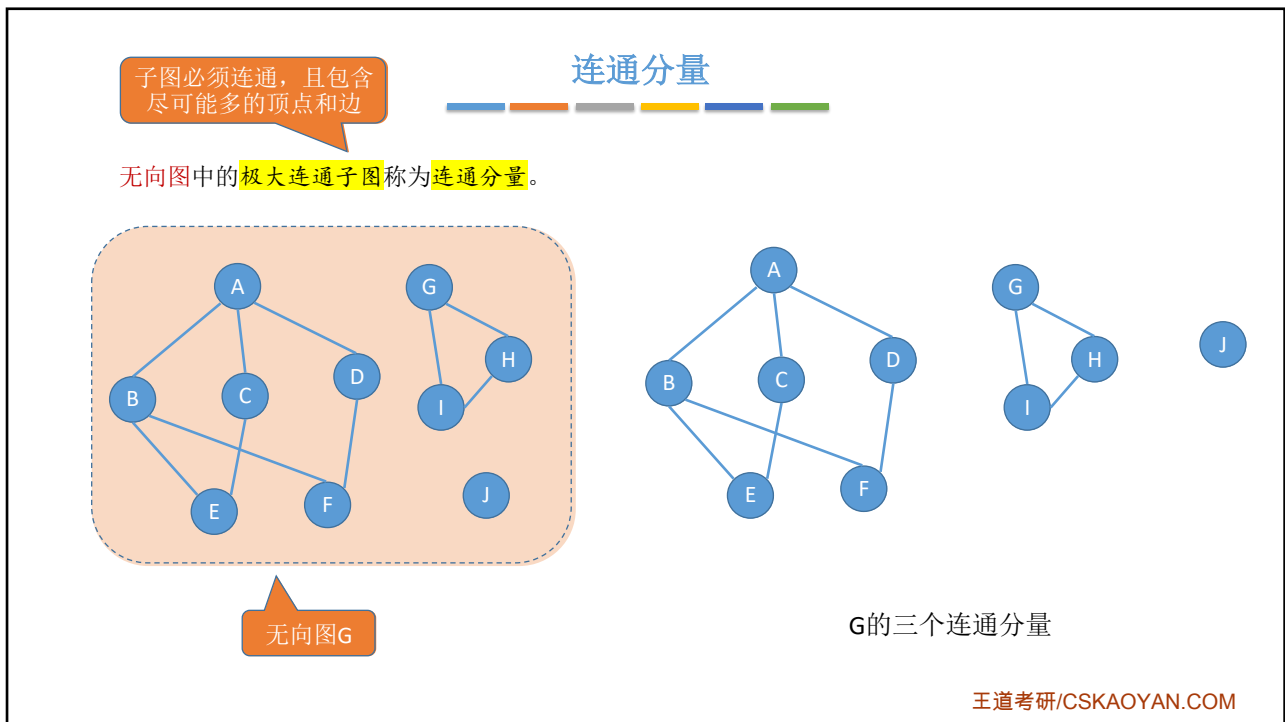
并非任意挑几个点、几条边都能构成子图

王道考研/CSKAOYAN.COM

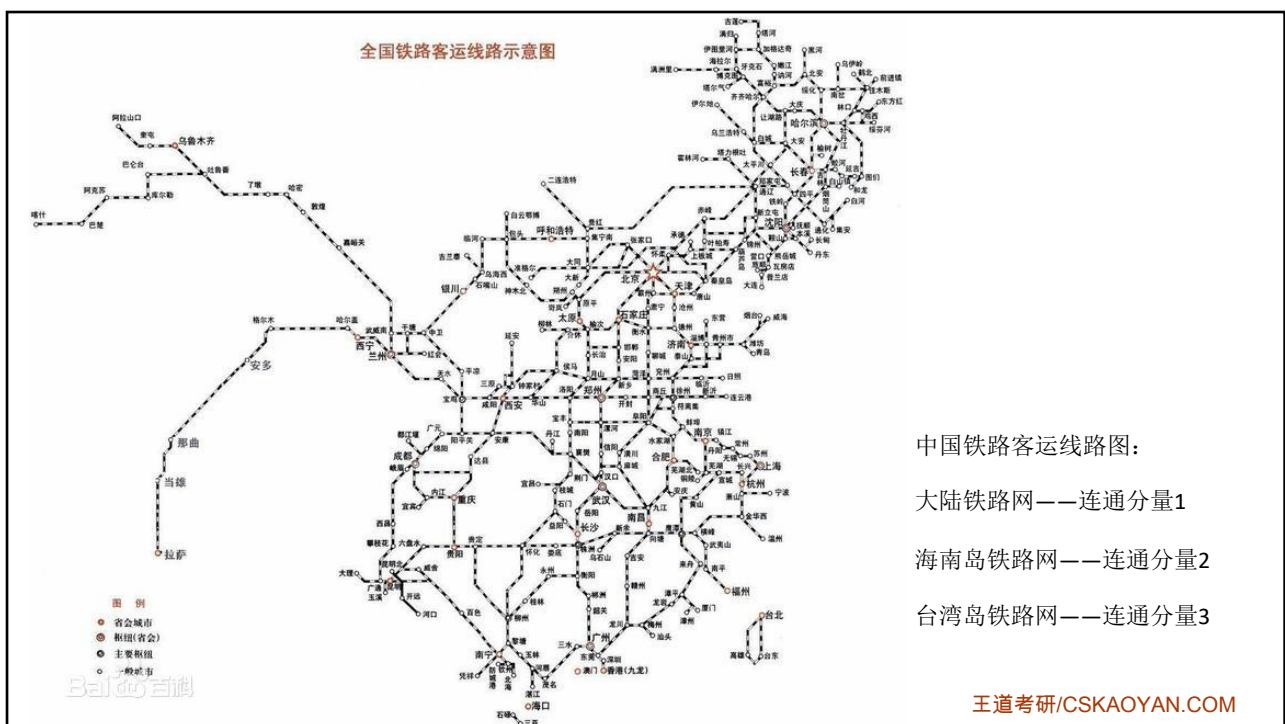
设有两个图 $G = (V, E)$ 和 $G' = (V', E')$, 若 V' 是 V 的子集, 且 E' 是 E 的子集, 则称 G' 是 G 的**子图**。

若有满足 $V(G') = V(G)$ 的子图 G' , 则称其为 G 的**生成子图**

14



15



16

强连通分量

子图必须强连通, 同时保留尽可能多的边

有向图中的极大强连通子图称为有向图的强连通分量

有向图G

G的三个强连通分量

王道考研/CSKAOYAN.COM

17

生成树

边尽可能的少, 但要保持连通

连通图的生成树是包含图中全部顶点的一个极小连通子图。

若图中顶点数为 n , 则它的生成树含有 $n-1$ 条边。对生成树而言, 若砍去它的一条边, 则会变成非连通图, 若加上一条边则会形成一个回路。

无向图G

G的生成树1

G的生成树2

.....

王道考研/CSKAOYAN.COM

18

生成森林

在非连通图中，连通分量的生成树构成了非连通图的生成森林。

非连通无向图G

G的连通分量 → G的生成森林

王道考研/CSKAOYAN.COM

19

生成森林

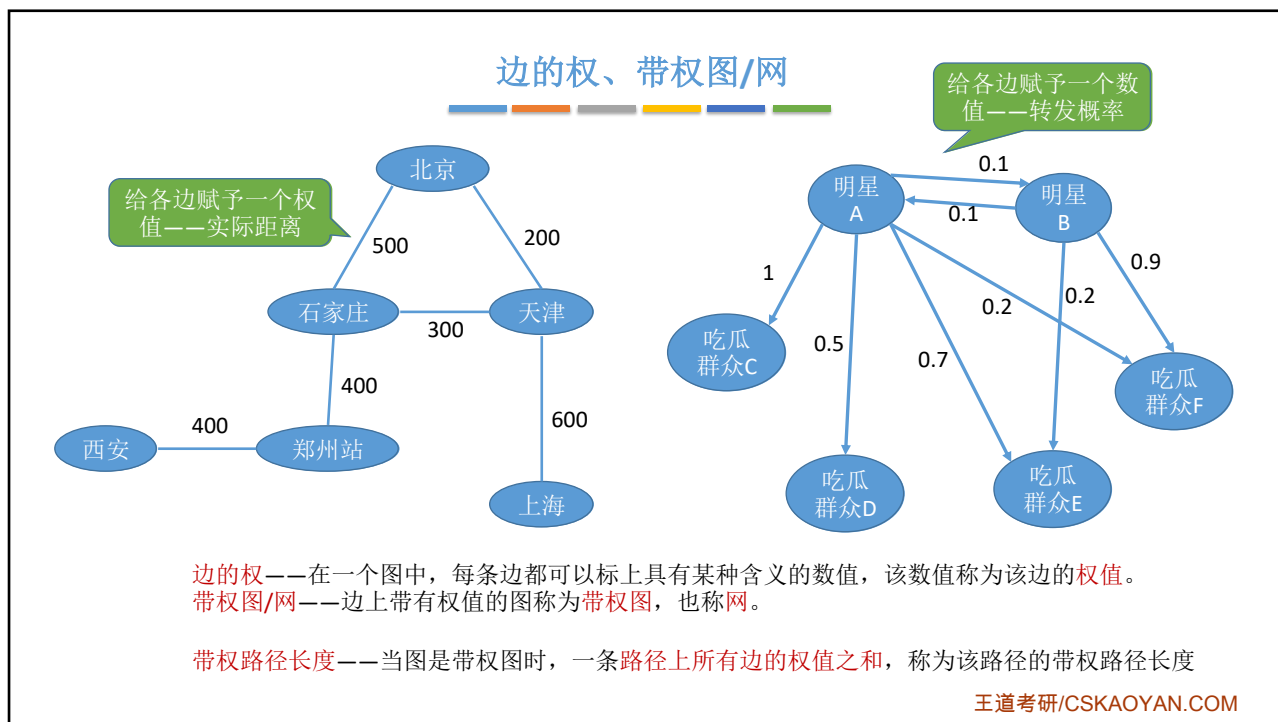
在非连通图中，连通分量的生成树构成了非连通图的生成森林。

非连通无向图G

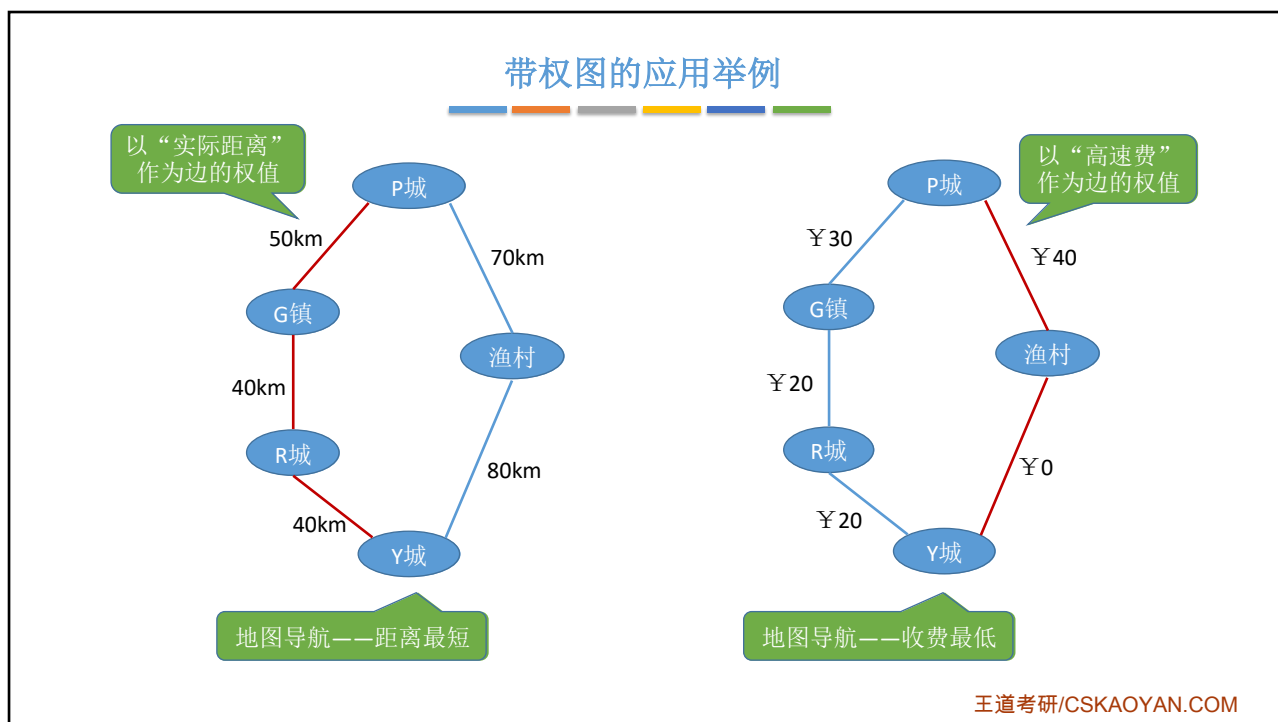
G的连通分量 → G的生成森林

王道考研/CSKAOYAN.COM

20

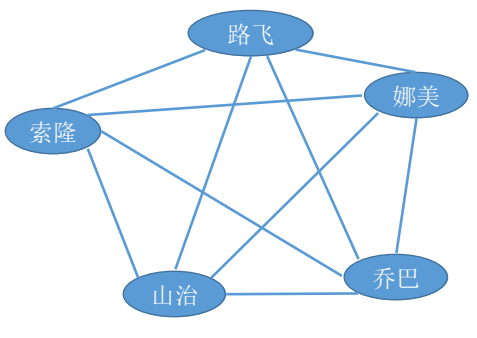


21



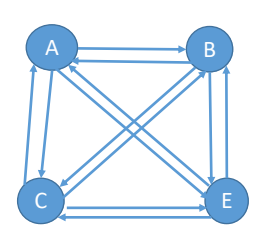
22

几种特殊形态的图



无向完全图——无向图中任意两个顶点之间都存在边

若无向图的顶点数 $|V|=n$, 则
 $|E| \in [0, C_n^2] = [0, n(n-1)/2]$



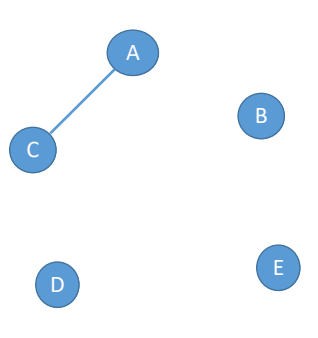
有向完全图——有向图中任意两个顶点之间都存在方向相反的两条弧

若有向图的顶点数 $|V|=n$, 则
 $|E| \in [0, 2C_n^2] = [0, n(n-1)]$

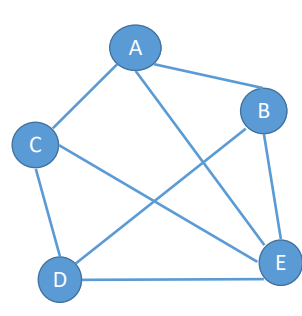
王道考研/CSKAOYAN.COM

23

几种特殊形态的图



边数很少的图称为**稀疏图**



反之称为**稠密图**

没有绝对的界限, 一般来说 $|E| < |V|\log|V|$ 时, 可以将 G 视为稀疏图

王道考研/CSKAOYAN.COM

24

几种特殊形态的图

树

森林

有向树

树——不存在回路，且连通的无向图

有向树——一个顶点的入度为0、其余顶点的入度均为1的有向图，称为有向树。

n 个顶点的树，必有 $n-1$ 条边。

常见考点： n 个顶点的图，若 $|E| > n-1$ ，则一定有回路

王道考研/CSKAOYAN.COM

25

知识回顾与重要考点

定义： $G=(V, E)$ ，顶点集 V ，边集 E

- 无向图（无向边/边）、有向图（有向边/弧）
- 顶点的度、出度、入度（无向图？有向图？）
- 边的权、带权图/网
- 点到的关系
 - 路径、回路、简单路径、简单回路
 - 路径长度
 - 点到点的距离（最短路径）
 - 无向图顶点的连通性、连通图
 - 有向图顶点的强连通性、强连通图
- 图的局部
 - 子图
 - 连通分量——极大连通子图
 - 强连通分量——极大强连通子图
 - 连通无向图的生成树——包含全部顶点的极小连通子图
 - 非连通无向图的生成森林——各连通分量的生成树
- 几种特殊形态的图
 - 完全图
 - 稠密图、稀疏图
 - 树、森林、有向树

常见考点：

对于 n 个顶点的无向图 G ，

- 所有顶点的度之和 $=2|E|$
- 若 G 是连通图，则最少有 $n-1$ 条边（树），若 $|E| > n-1$ ，则一定有回路
- 若 G 是非连通图，则最多可能有 C_{n-1}^2 条边
- 无向完全图共有 C_n^2 条边

对于 n 个顶点的有向图 G ，

- 所有顶点的出度之和=入度之和 $=|E|$
- 所有顶点的度之和 $=2|E|$
- 若 G 是强连通图，则最少有 n 条边（形成回路）
- 有向完全图共有 $2C_n^2$ 条边

王道考研/CSKAOYAN.COM

26