



第六章 图

1

本节内容

图

定义
基本术语

王道考研/CSKAOYAN.COM

2

知识总览



王道考研/CSKAOYAN.COM

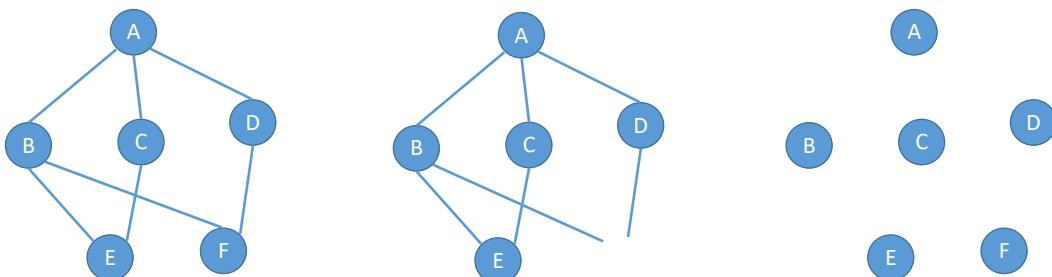
3

G: Graph
 V: Vertex
 E: Edge

图的定义

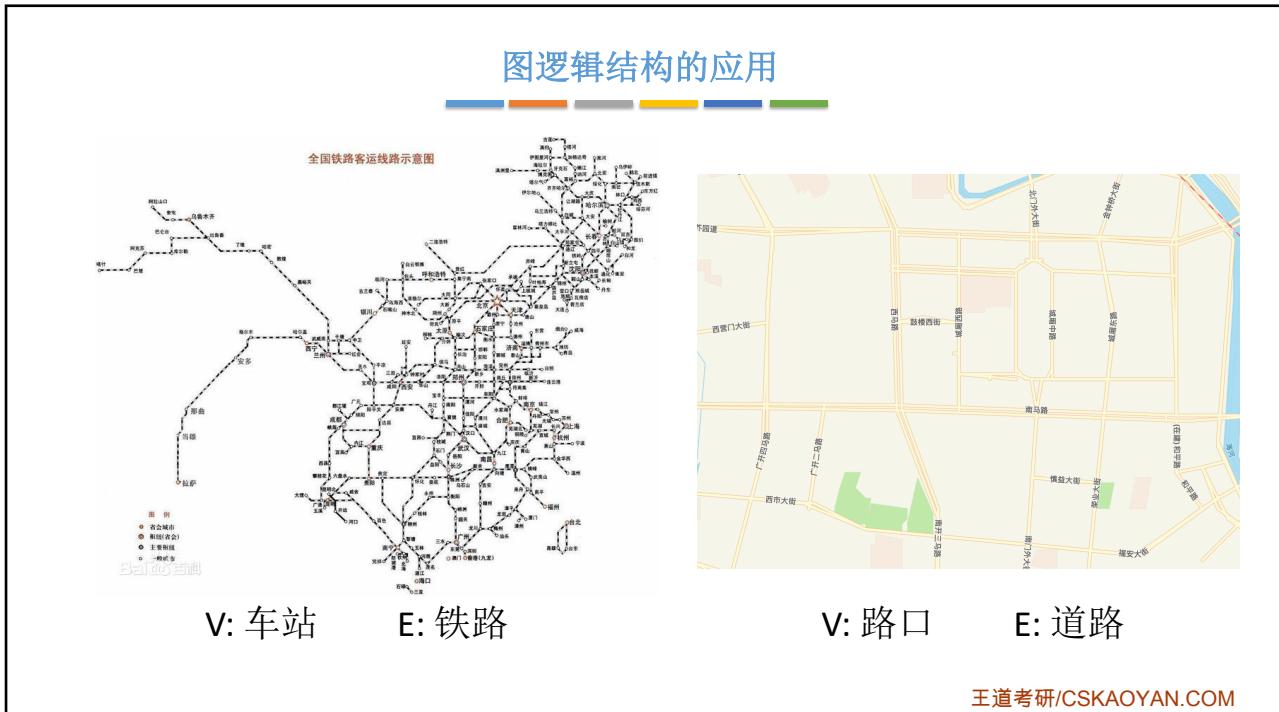
图 G 由顶点集 V 和边集 E 组成, 记为 $G = (V, E)$, 其中 $V(G)$ 表示图 G 中顶点的有限非空集; $E(G)$ 表示图 G 中顶点之间的关系 (边) 集合。若 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 则用 $|V|$ 表示图 G 中顶点的个数, 也称图 G 的阶, $E = \{(u, v) \mid u \in V, v \in V\}$, 用 $|E|$ 表示图 G 中边的条数。

注意: 线性表可以是空表, 树可以是空树, 但图不可以是空, 即 V 一定是非空集

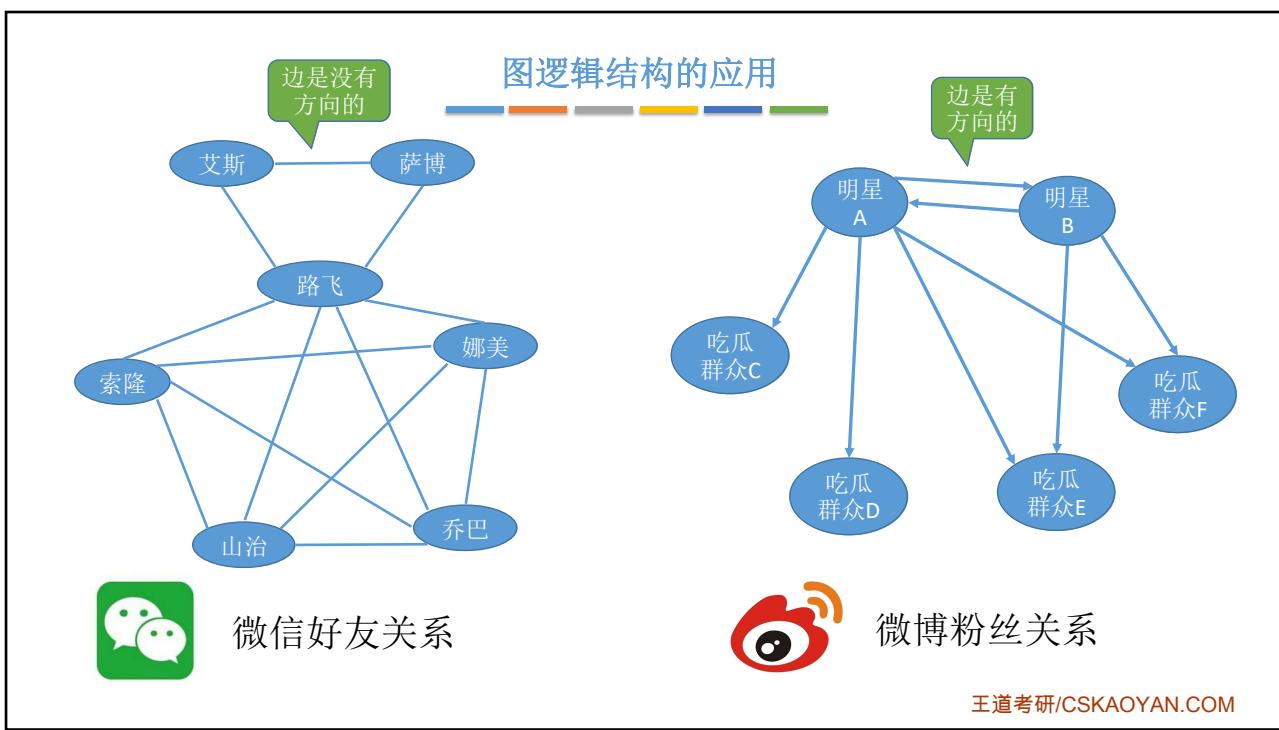


王道考研/CSKAOYAN.COM

4



5



6

无向图、有向图

若 E 是无向边（简称边）的有限集合时，则图 G 为无向图。边是顶点的无序对，记为 (v, w) 或 (w, v) ，因为 $(v, w) = (w, v)$ ，其中 v, w 是顶点。可以说顶点 w 和顶点 v 互为邻接点。边 (v, w) 依附于顶点 w 和 v ，或者说边 (v, w) 和顶点 v, w 相关联。

$G_2 = (V_2, E_2)$
 $V_2 = \{A, B, C, D, E\}$
 $E_2 = \{(A, B), (B, D), (B, E), (C, D), (C, E), (D, E)\}$

若 E 是有向边（也称弧）的有限集合时，则图 G 为有向图。弧是顶点的有序对，记为 $<v, w>$ ，其中 v, w 是顶点， v 称为弧尾， w 称为弧头， $<v, w>$ 称为从顶点 v 到顶点 w 的弧，也称 v 邻接到 w ，或 w 邻接自 v 。 $<v, w> \neq <w, v>$

$G_1 = (V_1, E_1)$
 $V_1 = \{A, B, C, D, E\}$
 $E_1 = \{<A, B>, <A, C>, <A, D>, <A, E>, <B, A>, <B, C>, <B, E>, <C, D>\}$

王道考研/CSKAOYAN.COM

7

简单图、多重图

简单无向图

简单有向图

多重无向图

多重有向图

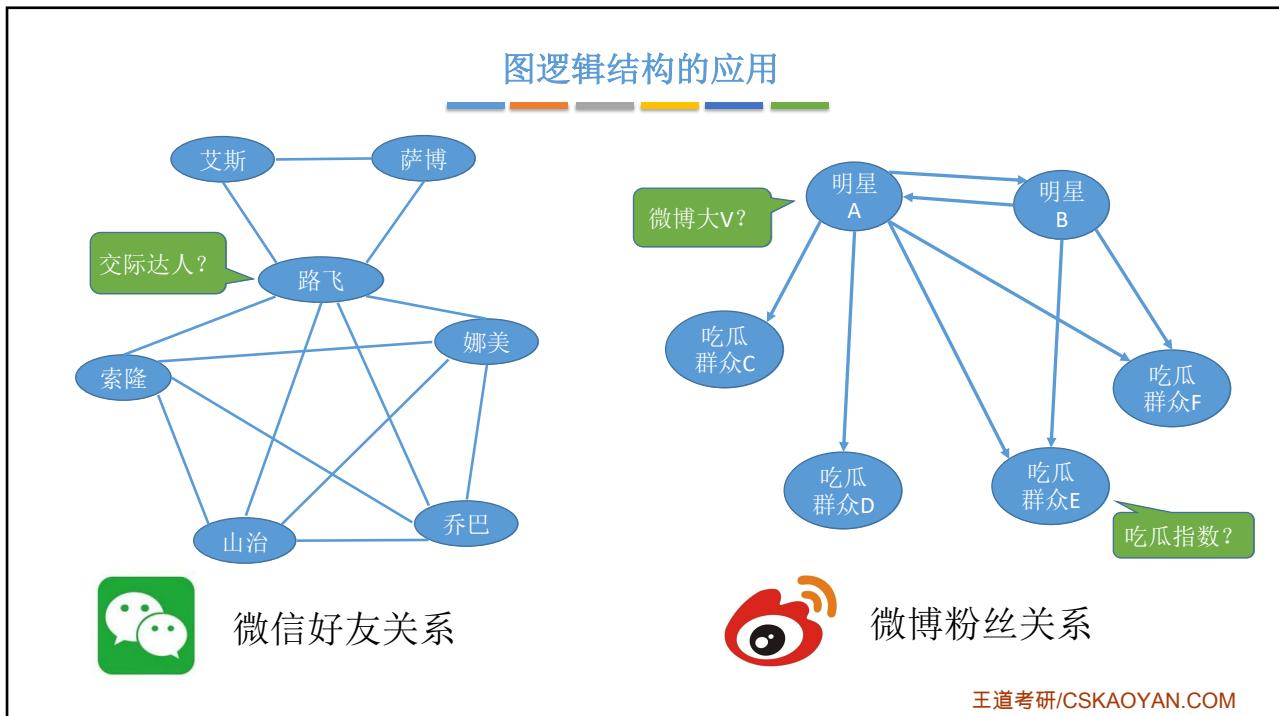
简单图——①不存在重复边；
②不存在顶点到自身的边

多重图——图 G 中某两个结点之间的边数多于一条，又允许顶点通过同一条边和自己关联，则 G 为多重图

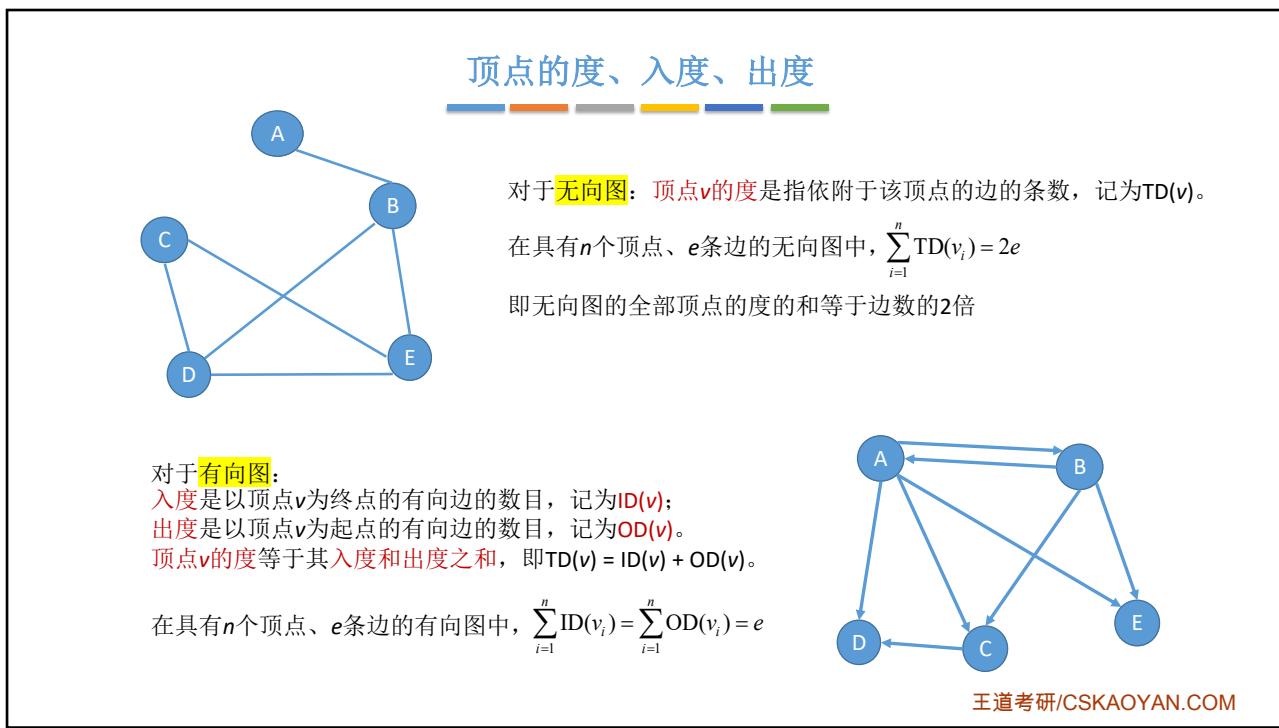
数据结构课程只探讨“简单图”

王道考研/CSKAOYAN.COM

8



9



10

顶点-顶点的关系描述

顶点之间有可能不存在路径

有向图的路径也是有向的

- **路径**——顶点 v_p 到顶点 v_q 之间的一条路径是指顶点序列, $v_p, v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_m}, v_q$
- **回路**——第一个顶点和最后一个顶点相同的路径称为回路或环
- **简单路径**——在路径序列中, 顶点不重复出现的路径称为简单路径。
- **简单回路**——除第一个顶点和最后一个顶点外, 其余顶点不重复出现的回路称为简单回路。
- **路径长度**——路径上边的数目
- **点到点的距离**——从顶点 u 出发到顶点 v 的最短路径若存在, 则此路径的长度称为从 u 到 v 的距离。若从 u 到 v 根本不存在路径, 则记该距离为无穷 (∞)。
- **无向图中**, 若从顶点 v 到顶点 w 有路径存在, 则称 v 和 w 是连通的
- **有向图中**, 若从顶点 v 到顶点 w 和从顶点 w 到顶点 v 之间都有路径, 则称这两个顶点是强连通的

王道考研/CSKAOYAN.COM

11

连通图、强连通图

若图 G 中任意两个顶点都是连通的, 则称图 G 为连通图, 否则称为非连通图。

常见考点:
对于 n 个顶点的无向图 G ,
若 G 是连通图, 则最少有 $n-1$ 条边
若 G 是非连通图, 则最多可能有 C_{n-1}^2 条边

若图中任何一对顶点都是强连通的, 则称此图为强连通图。

常见考点:
对于 n 个顶点的有向图 G ,
若 G 是强连通图, 则最少有 n 条边 (形成回路)

王道考研/CSKAOYAN.COM

12

研究图的局部——子图

无向图 G

子图

生成子图

并非任意挑几个点、几条边都能构成子图

若有满足 $V(G') = V(G)$ 的子图 G' , 则称其为 G 的生成子图

王道考研/CSKAOYAN.COM

13

研究图的局部——子图

有向图 G

子图

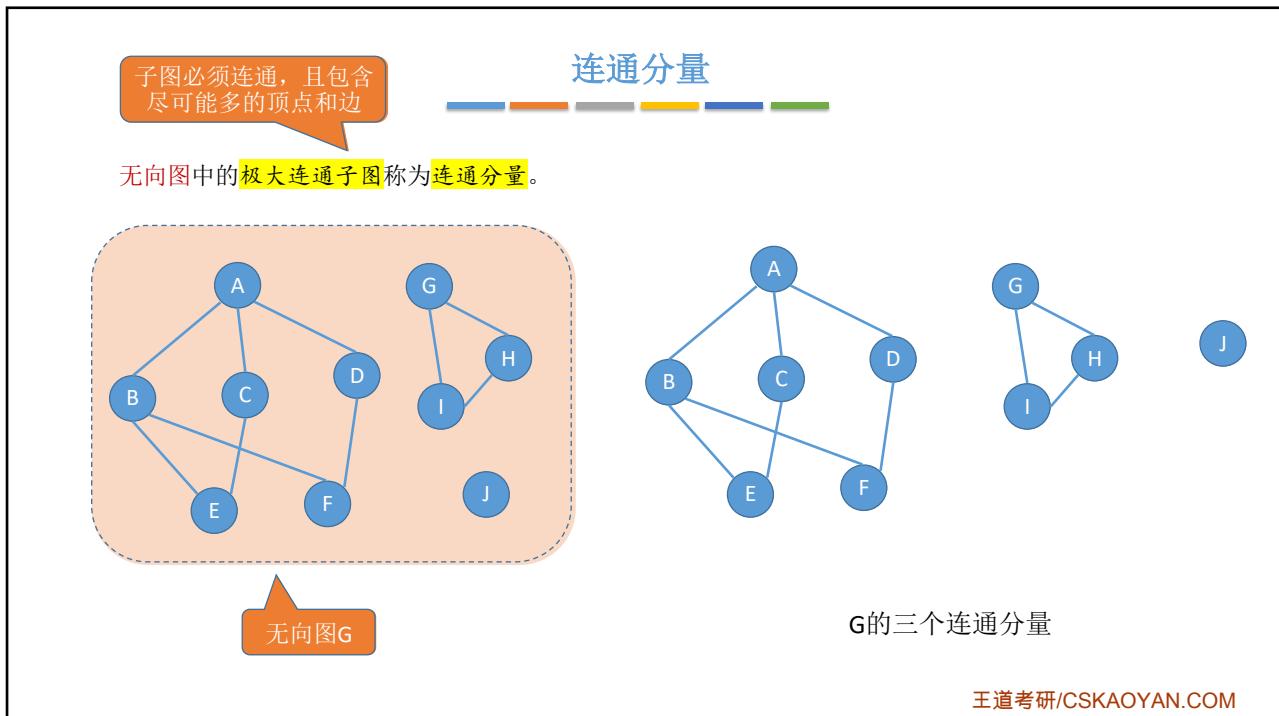
生成子图

并非任意挑几个点、几条边都能构成子图

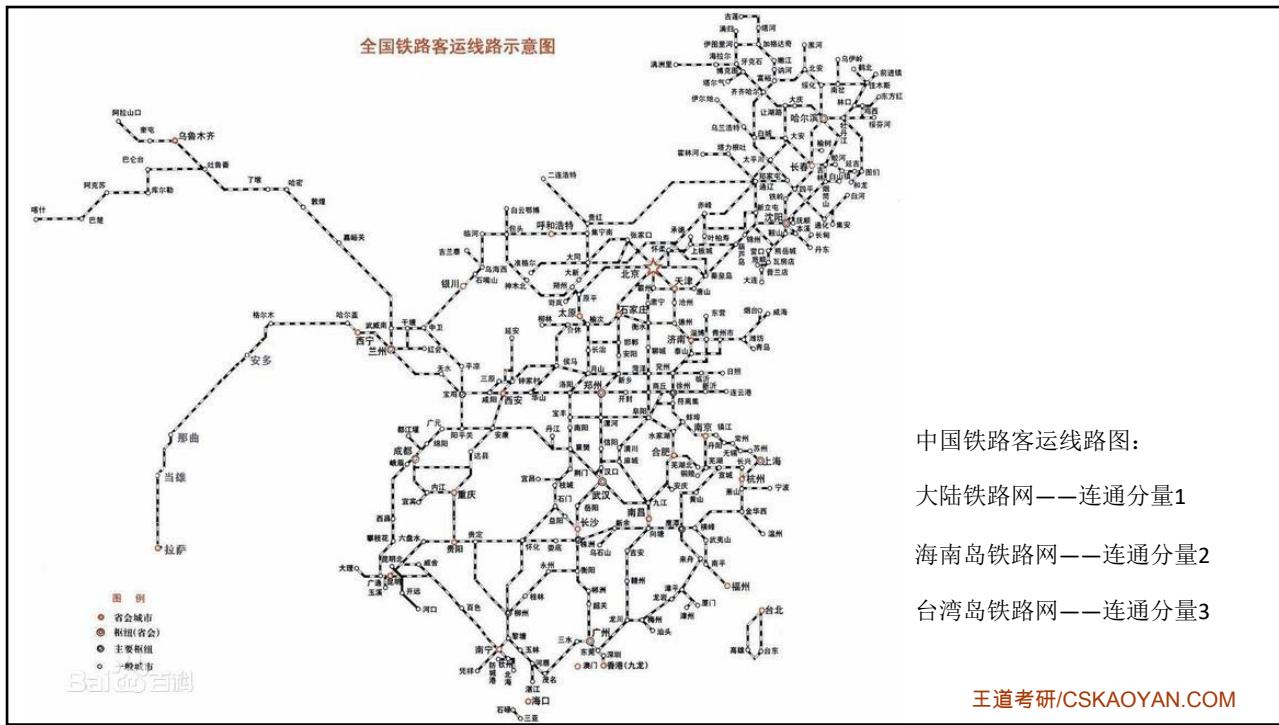
若有满足 $V(G') = V(G)$ 的子图 G' , 则称其为 G 的生成子图

王道考研/CSKAOYAN.COM

14



15



16

强连通分量

子图必须强连通, 同时保留尽可能多的边

有向图中的极大强连通子图称为有向图的**强连通分量**

有向图G

G的三个强连通分量

王道考研/CSKAOYAN.COM

17

生成树

边尽可能的少, 但要保持连通

连通图的**生成树**是包含图中全部顶点的一个极小连通子图。
若图中顶点数为n, 则它的生成树含有 $n-1$ 条边。对生成树而言, 若砍去它的一条边, 则会变成非连通图, 若加上一条边则会形成一个回路。

无向图G

G的生成树1

G的生成树2

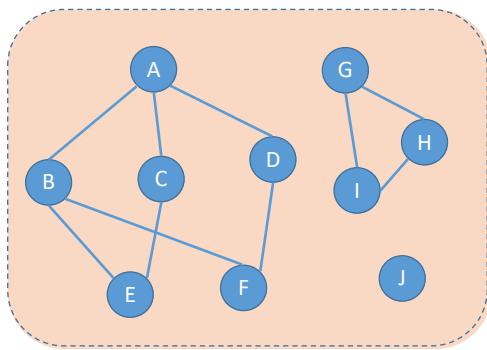
.....

王道考研/CSKAOYAN.COM

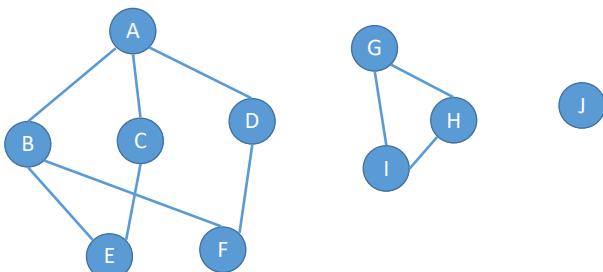
18

生成森林

在非连通图中, 连通分量的生成树构成了非连通图的生成森林。



非连通无向图G



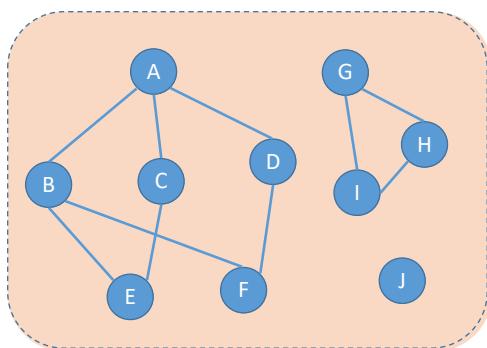
G的连通分量 → G的生成森林

王道考研/CSKAOYAN.COM

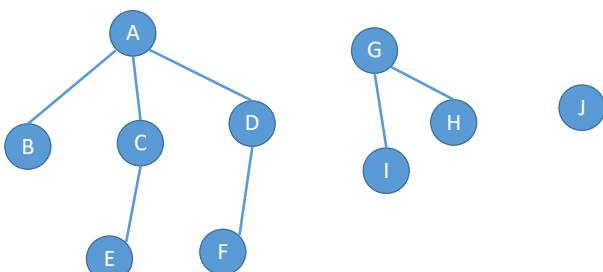
19

生成森林

在非连通图中, 连通分量的生成树构成了非连通图的生成森林。



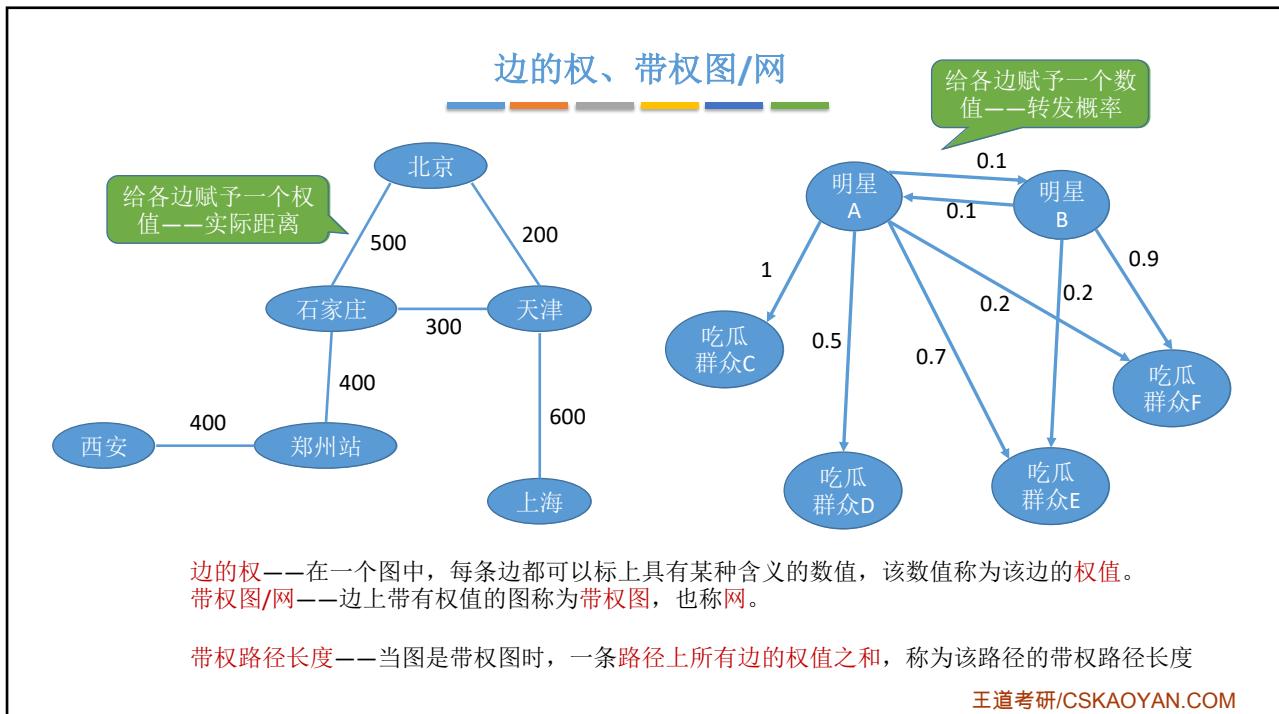
非连通无向图G



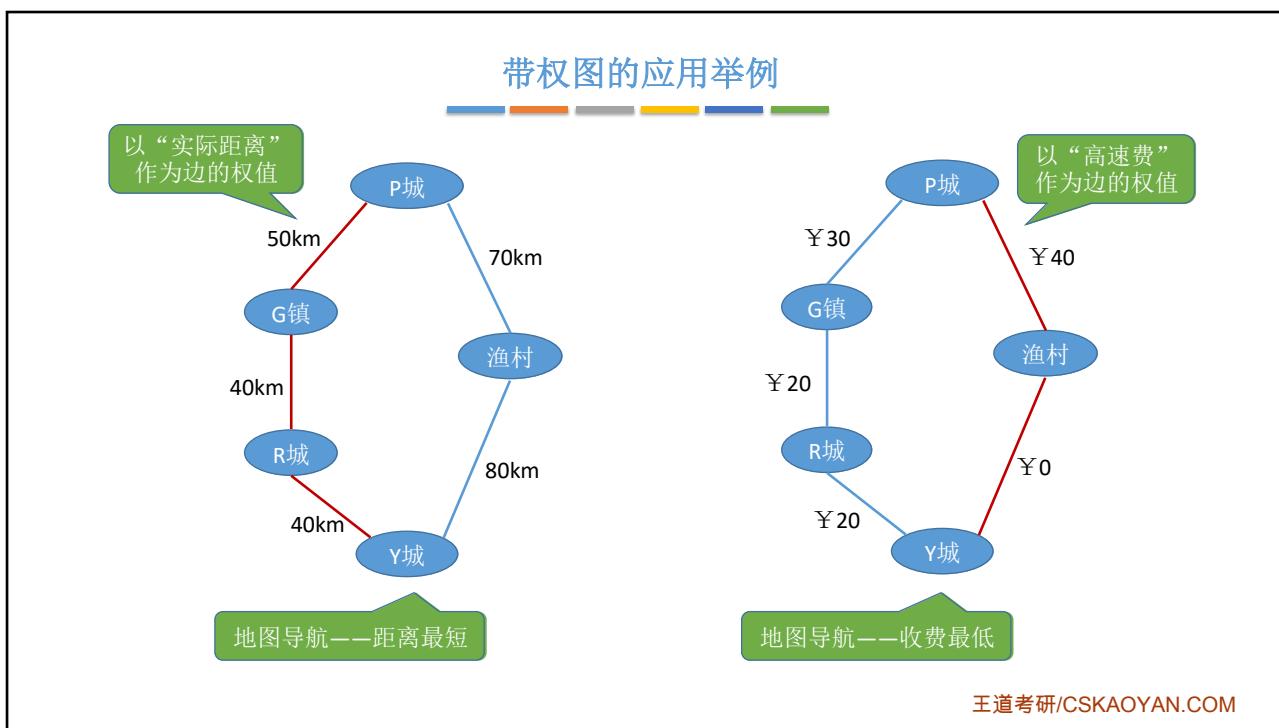
G的连通分量 → G的生成森林

王道考研/CSKAOYAN.COM

20

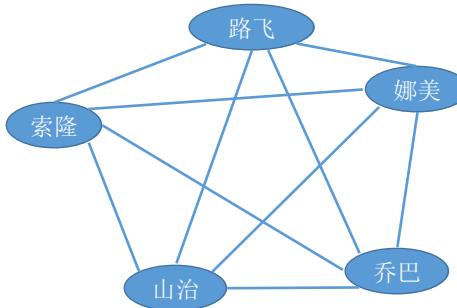


21



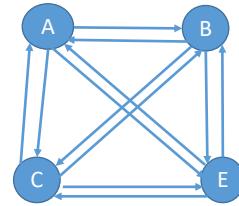
22

几种特殊形态的图



无向完全图——无向图中任意两个顶点之间都存在边

若无向图的顶点数 $|V|=n$ ，则 $|E| \in [0, C_n^2] = [0, n(n-1)/2]$



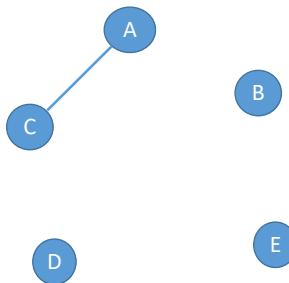
有向完全图——有向图中任意两个顶点之间都存在方向相反的两条弧

若有向图的顶点数 $|V|=n$ ，则 $|E| \in [0, 2C_n^2] = [0, n(n-1)]$

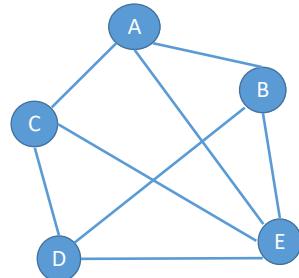
王道考研/CSKAOYAN.COM

23

几种特殊形态的图



边数很少的图称为稀疏图



反之称为稠密图

没有绝对的界限，一般来说 $|E| < |V| \log |V|$ 时，可以将 G 视为稀疏图

王道考研/CSKAOYAN.COM

24

几种特殊形态的图

The diagram shows four examples of graphs within dashed boxes:

- 树 (Tree):** A graph with 5 nodes (A, B, C, D, E) and 4 edges (A-C, A-B, C-D, D-E). It is connected and acyclic.
- 森林 (Forest):** A graph with 5 nodes (A, B, C, D, E) and 3 edges (A-C, A-B, C-D). It consists of two separate connected components.
- 完全图 (Complete Graph):** A graph with 5 nodes (A, B, C, D, E) and 10 edges (A-B, A-C, A-D, A-E, B-C, B-D, B-E, C-D, C-E, D-E).
- 有向树 (Directed Tree):** A graph with 5 nodes (A, B, C, D, E) and 4 edges (A-C, A-B, C-D, B-E). Node A has an in-degree of 0, and all other nodes have an in-degree of 1.

树——不存在回路, 且连通的无向图

有向树——一个顶点的入度为0、其余顶点的入度均为1的有向图, 称为有向树。

n个顶点的树, 必有n-1条边。

常见考点: n个顶点的图, 若 $|E| > n-1$, 则一定有回路

王道考研/CSKAOYAN.COM

25

知识回顾与重要考点

图的基本概念

- 定义: $G=(V, E)$, 顶点集V, 边集E
- 无向图 (无向边/边)、有向图 (有向边/弧)
- 顶点的度、出度、入度 (无向图? 有向图?)
- 边的权、带权图/网
- 路径、回路、简单路径、简单回路
- 点到点的关系
 - 路径长度
 - 点到点的距离 (最短路径)
 - 无向图顶点的连通性、连通图
 - 有向图顶点的强连通性、强连通图
- 子图
- 图的局部
 - 连通分量——极大连通子图
 - 强连通分量——极大强连通子图
 - 连通无向图的生成树——包含全部顶点的极小连通子图
 - 非连通无向图的生成森林——各连通分量的生成树
- 几种特殊形态的图
 - 完全图
 - 稠密图、稀疏图
 - 树、森林、有向树

常见考点:

对于n个顶点的无向图G,

- 所有顶点的度之和= $2|E|$
- 若G是连通图, 则最少有 $n-1$ 条边 (树), 若 $|E| > n-1$, 则一定有回路
- 若G是非连通图, 则最多可能有 C_{n-1}^2 条边
- 无向完全图共有 C_n^2 条边

对于n个顶点的有向图G,

- 所有顶点的出度之和=入度之和= $|E|$
- 所有顶点的度之和= $2|E|$
- 若G是强连通图, 则最少有 n 条边 (形成回路)
- 有向完全图共有 $2C_n^2$ 条边

王道考研/CSKAOYAN.COM

26