

本节内容

# B树

## 插入和删除

王道考研/CSKAOYAN.COM

### B树的插入

5阶B树——结点关键字个数  $\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$   
即：  $2 \leq n \leq 4$  （注：此处省略失败结点）



B树的插入



5阶B树——结点关键字个数 $\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$   
即：2≤n≤4 （注：此处省略失败结点）



B树的插入



5阶B树——结点关键字个数 $\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$   
即：2≤n≤4 （注：此处省略失败结点）



### B树的插入



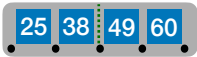
5阶B树——结点关键字个数 $\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$   
即：2≤n≤4 （注：此处省略失败结点）



### B树的插入



5阶B树——结点关键字个数 $\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$   
即：2≤n≤4 （注：此处省略失败结点）



### B树的插入



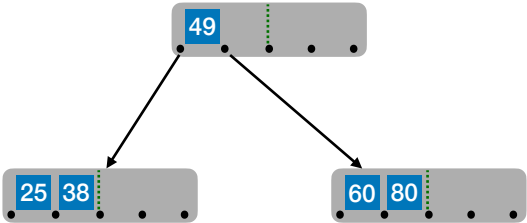
5阶B树——结点关键字个数 $\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$   
即：  $2 \leq n \leq 4$  （注：此处省略失败结点）



### B树的插入



5阶B树——结点关键字个数 $\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$   
即：  $2 \leq n \leq 4$  （注：此处省略失败结点）

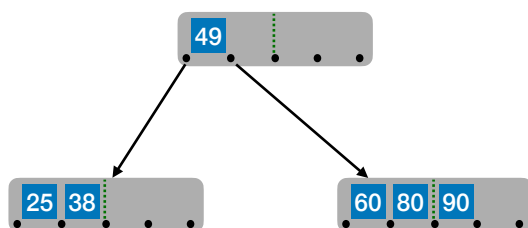


在插入key后，若导致原结点关键字数超过上限，则从中间位置（ $\lceil m/2 \rceil$ ）将其中的关键字分为两部分，左部分包含的关键字放在原结点中，右部分包含的关键字放到新结点中，中间位置（ $\lceil m/2 \rceil$ ）的结点插入原结点的父结点

## B树的插入



5阶B树——结点关键字个数  $\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$   
即：  $2 \leq n \leq 4$  （注：此处省略失败结点）

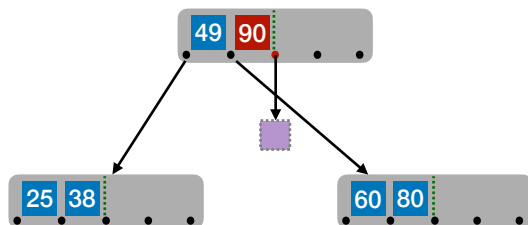


新元素一定是插入到最底层“终端节点”，用“查找”来确定插入位置

## B树的插入



5阶B树——结点关键字个数  $\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$   
即：  $2 \leq n \leq 4$  （注：此处省略失败结点）

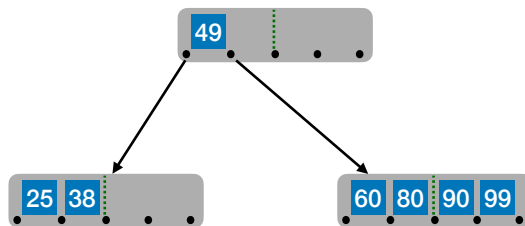


错误示范

注意：B树的失败结点只能出现在最下面一层

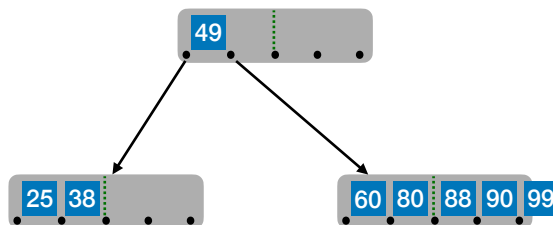
## B树的插入

5阶B树——结点关键字个数  $\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$   
即：  $2 \leq n \leq 4$  （注：此处省略失败结点）



## B树的插入

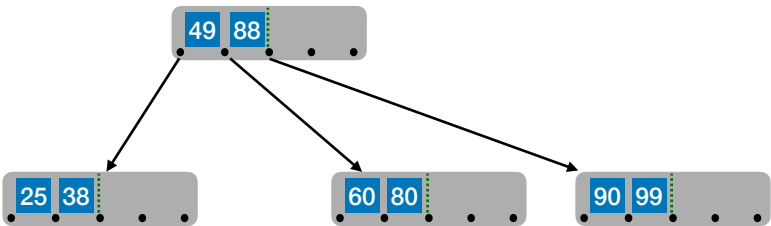
5阶B树——结点关键字个数  $\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$   
即：  $2 \leq n \leq 4$  （注：此处省略失败结点）



在插入key后，若导致原结点关键字数超过上限，则从中间位置（ $\lceil m/2 \rceil$ ）将其中的关键字分为两部分，左部分包含的关键字放在原结点中，右部分包含的关键字放到新结点中，中间位置（ $\lceil m/2 \rceil$ ）的结点插入原结点的父结点

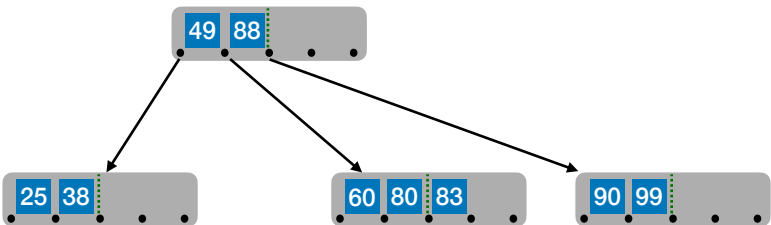
B树的插入

5阶B树——结点关键字个数 $\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$   
即：  $2 \leq n \leq 4$  （注：此处省略失败结点）



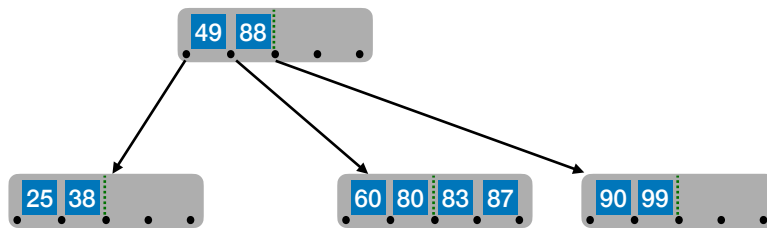
B树的插入

5阶B树——结点关键字个数 $\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$   
即：  $2 \leq n \leq 4$  （注：此处省略失败结点）



## B树的插入

5阶B树——结点关键字个数  $\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$   
即：  $2 \leq n \leq 4$  （注：此处省略失败结点）

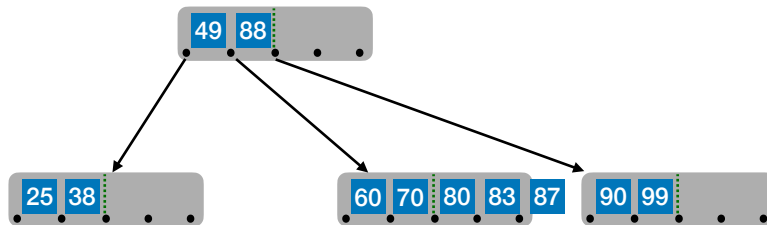


## B树的插入

5阶B树——结点关键字个数  $\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$   
即：  $2 \leq n \leq 4$  （注：此处省略失败结点）



思考：80要放到父节点中，放在哪个位置合适？



在插入key后，若导致原结点关键字数超过上限，则从中间位置（ $\lceil m/2 \rceil$ ）将其中的关键字分为两部分，左部分包含的关键字放在原结点中，右部分包含的关键字放到新结点中，中间位置（ $\lceil m/2 \rceil$ ）的结点插入原结点的父结点

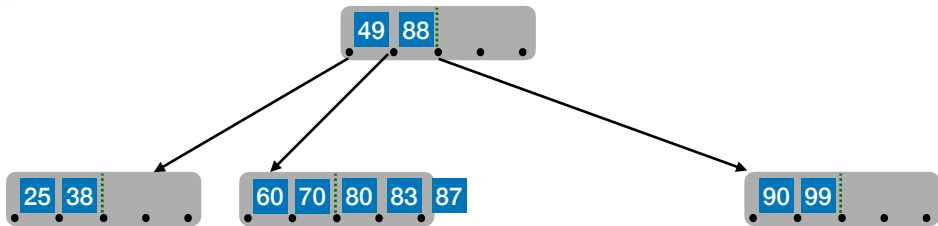


B树的插入



思考：80要放到父节点中，放在哪个位置合适？

5阶B树——结点关键字个数 $\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$   
即：  $2 \leq n \leq 4$  （注：此处省略失败结点）

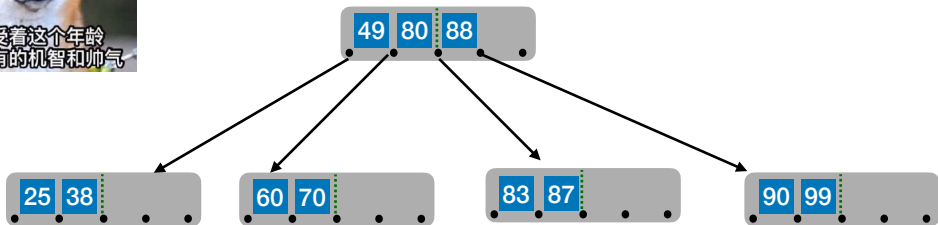


在插入key后，若导致原结点关键字数超过上限，则从中间位置 ( $\lceil m/2 \rceil$ ) 将其中的关键字分为两部分，左部分包含的关键字放在原结点中，右部分包含的关键字放到新结点中，中间位置 ( $\lceil m/2 \rceil$ ) 的结点插入原结点的父结点

B树的插入



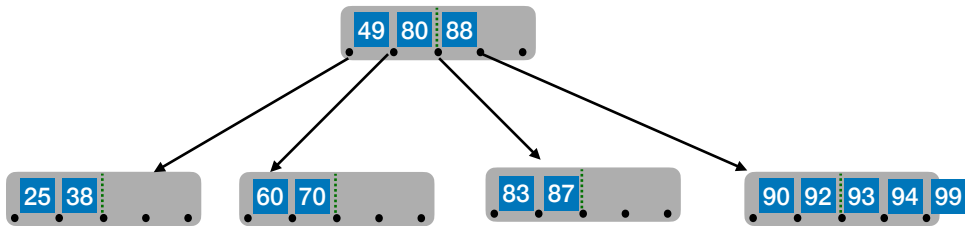
5阶B树——结点关键字个数 $\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$   
即：  $2 \leq n \leq 4$  （注：此处省略失败结点）



在插入key后，若导致原结点关键字数超过上限，则从中间位置 ( $\lceil m/2 \rceil$ ) 将其中的关键字分为两部分，左部分包含的关键字放在原结点中，右部分包含的关键字放到新结点中，中间位置 ( $\lceil m/2 \rceil$ ) 的结点插入原结点的父结点

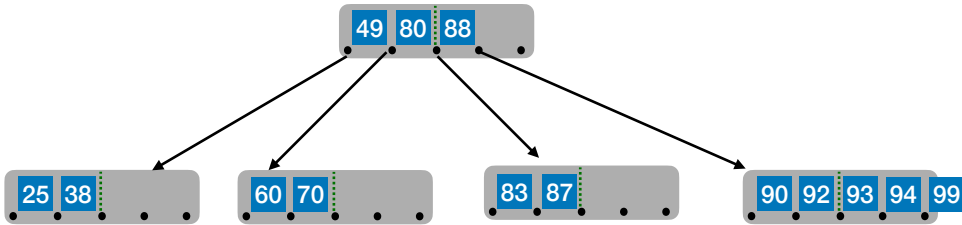
B树的插入

5阶B树——结点关键字个数 $\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$   
即：  $2 \leq n \leq 4$  （注：此处省略失败结点）



B树的插入

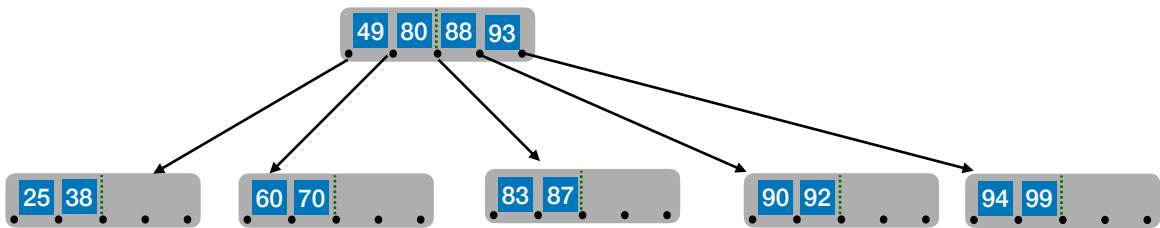
5阶B树——结点关键字个数 $\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$   
即：  $2 \leq n \leq 4$  （注：此处省略失败结点）



在插入key后，若导致原结点关键字数超过上限，则从中间位置（ $\lceil m/2 \rceil$ ）将其中的关键字分为两部分，左部分包含的关键字放在原结点中，右部分包含的关键字放到新结点中，中间位置（ $\lceil m/2 \rceil$ ）的结点插入原结点的父结点

B树的插入

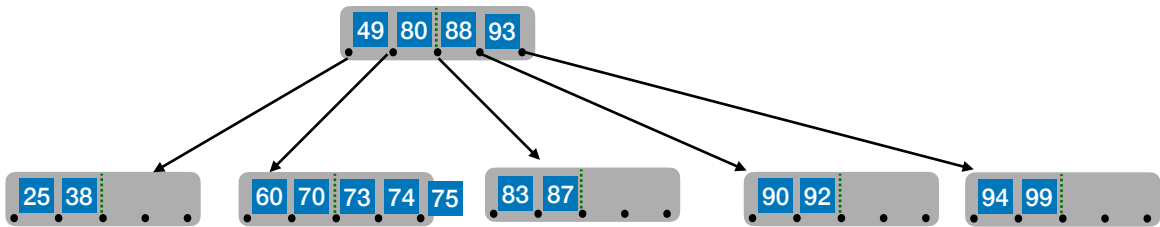
5阶B树——结点关键字个数 $\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$   
即：  $2 \leq n \leq 4$  （注：此处省略失败结点）



在插入key后，若导致原结点关键字数超过上限，则从中间位置（ $\lceil m/2 \rceil$ ）将其中的关键字分为两部分，左部分包含的关键字放在原结点中，右部分包含的关键字放到新结点中，中间位置（ $\lceil m/2 \rceil$ ）的结点插入原结点的父结点

B树的插入

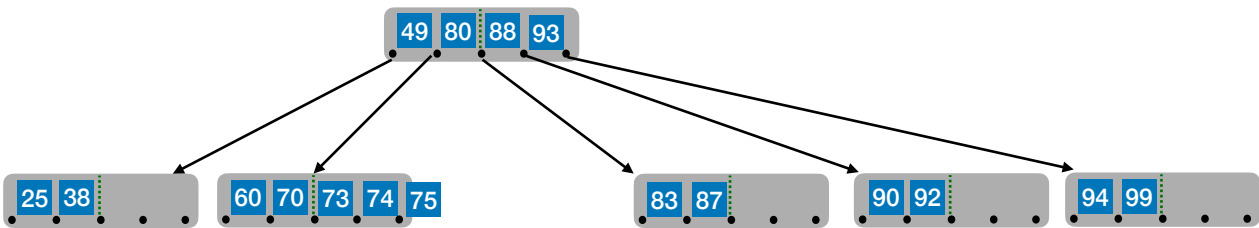
5阶B树——结点关键字个数 $\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$   
即：  $2 \leq n \leq 4$  （注：此处省略失败结点）



在插入key后，若导致原结点关键字数超过上限，则从中间位置（ $\lceil m/2 \rceil$ ）将其中的关键字分为两部分，左部分包含的关键字放在原结点中，右部分包含的关键字放到新结点中，中间位置（ $\lceil m/2 \rceil$ ）的结点插入原结点的父结点

### B树的插入

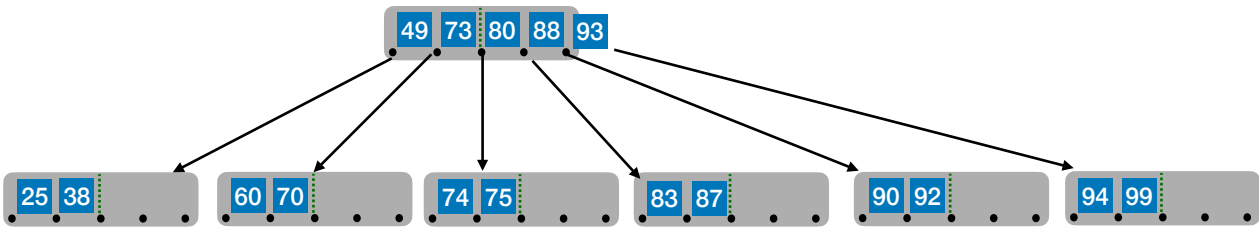
5阶B树——结点关键字个数 $\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$   
即： $2 \leq n \leq 4$ （注：此处省略失败结点）



在插入key后，若导致原结点关键字数超过上限，则从中间位置（ $\lceil m/2 \rceil$ ）将其中的关键字分为两部分，左部分包含的关键字放在原结点中，右部分包含的关键字放到新结点中，中间位置（ $\lceil m/2 \rceil$ ）的结点插入原结点的父结点

### B树的插入

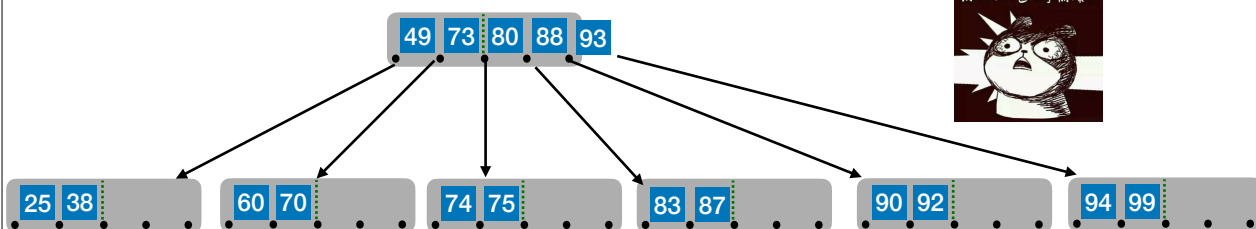
5阶B树——结点关键字个数 $\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$   
即： $2 \leq n \leq 4$ （注：此处省略失败结点）



在插入key后，若导致原结点关键字数超过上限，则从中间位置（ $\lceil m/2 \rceil$ ）将其中的关键字分为两部分，左部分包含的关键字放在原结点中，右部分包含的关键字放到新结点中，中间位置（ $\lceil m/2 \rceil$ ）的结点插入原结点的父结点

## B树的插入

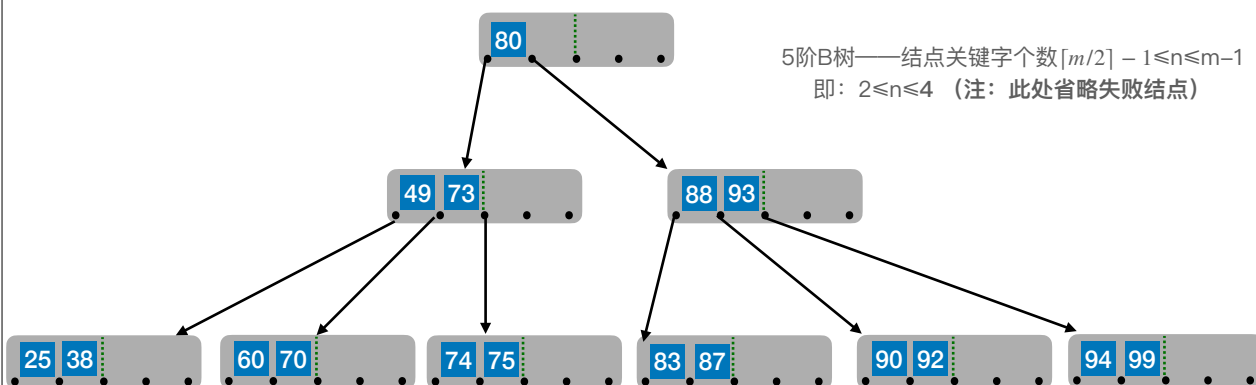
5阶B树——结点关键字个数  $\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$   
即：  $2 \leq n \leq 4$  （注：此处省略失败结点）



在插入key后，若导致原结点关键字数超过上限，则从中间位置 ( $\lceil m/2 \rceil$ ) 将其中的关键字分为两部分，左部分包含的关键字放在原结点中，右部分包含的关键字放到新结点中，中间位置 ( $\lceil m/2 \rceil$ ) 的结点插入原结点的父结点。若此时导致其父结点的关键字数也超过了上限，则继续进行这种分裂操作，直至这个过程传到根结点为止，进而导致B树高度增1。

## B树的插入

5阶B树——结点关键字个数  $\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$   
即：  $2 \leq n \leq 4$  （注：此处省略失败结点）



在插入key后，若导致原结点关键字数超过上限，则从中间位置 ( $\lceil m/2 \rceil$ ) 将其中的关键字分为两部分，左部分包含的关键字放在原结点中，右部分包含的关键字放到新结点中，中间位置 ( $\lceil m/2 \rceil$ ) 的结点插入原结点的父结点。若此时导致其父结点的关键字数也超过了上限，则继续进行这种分裂操作，直至这个过程传到根结点为止，进而导致B树高度增1。

### B树的插入

核心要求：

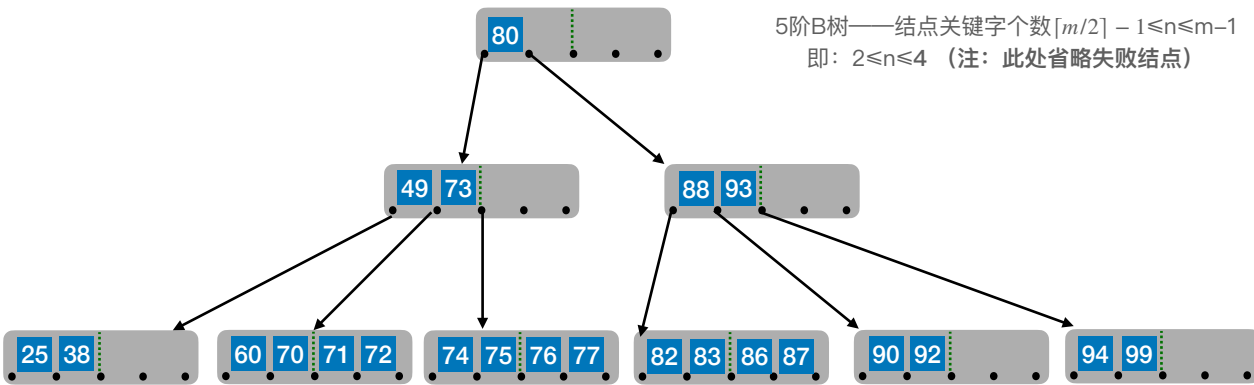
- ①对m阶B树——除根节点外，结点关键字个数 $\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$
- ②子树 $0 < \text{关键字}1 < \text{子树}1 < \text{关键字}2 < \text{子树}2 < \dots$

新元素一定是插入到最底层“终端节点”，用“查找”来确定插入位置

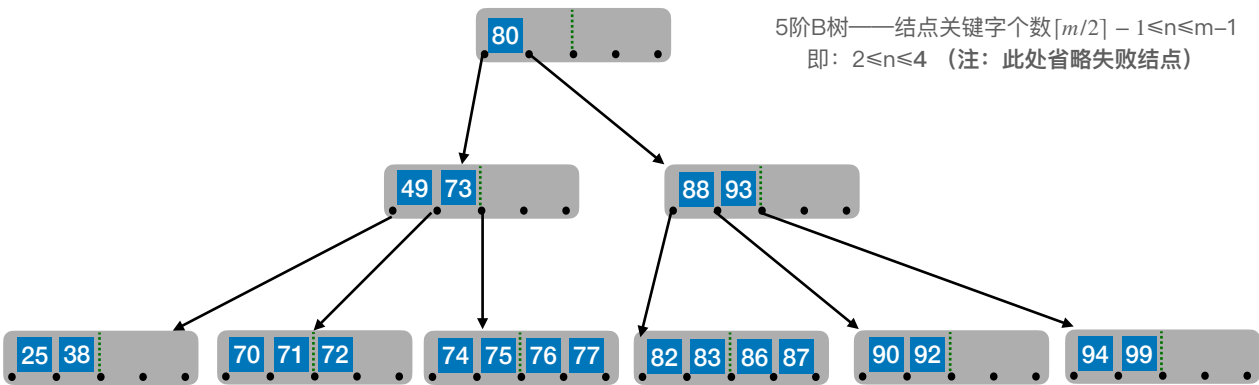
在插入key后，若导致原结点关键字数超过上限，则从中间位置（ $\lceil m/2 \rceil$ ）将其中的关键字分为两部分，左部分包含的关键字放在原结点中，右部分包含的关键字放到新结点中，中间位置（ $\lceil m/2 \rceil$ ）的结点插入原结点的父结点。若此时导致其父结点的关键字数也超过了上限，则继续进行这种分裂操作，直至这个过程传到根结点为止，进而导致B树高度增1。

### B树的删除

5阶B树——结点关键字个数 $\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$   
即： $2 \leq n \leq 4$ （注：此处省略失败结点）

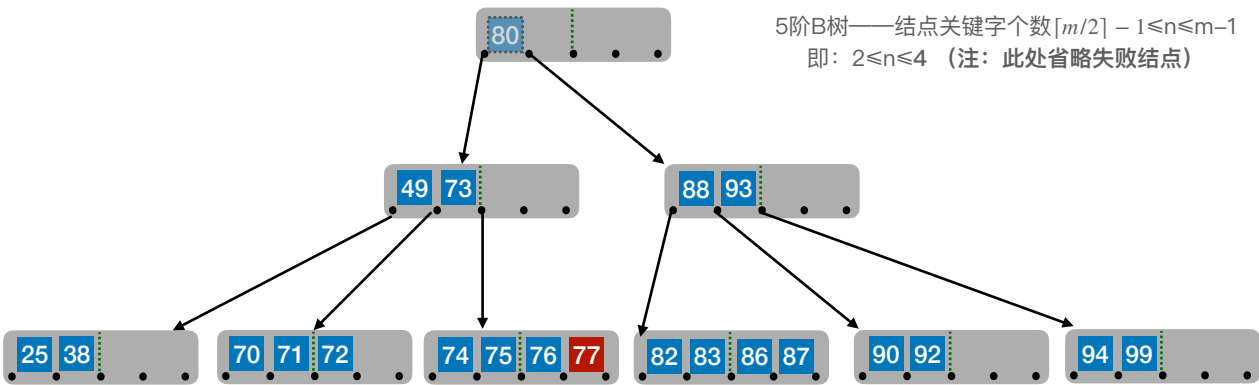


### B树的删除



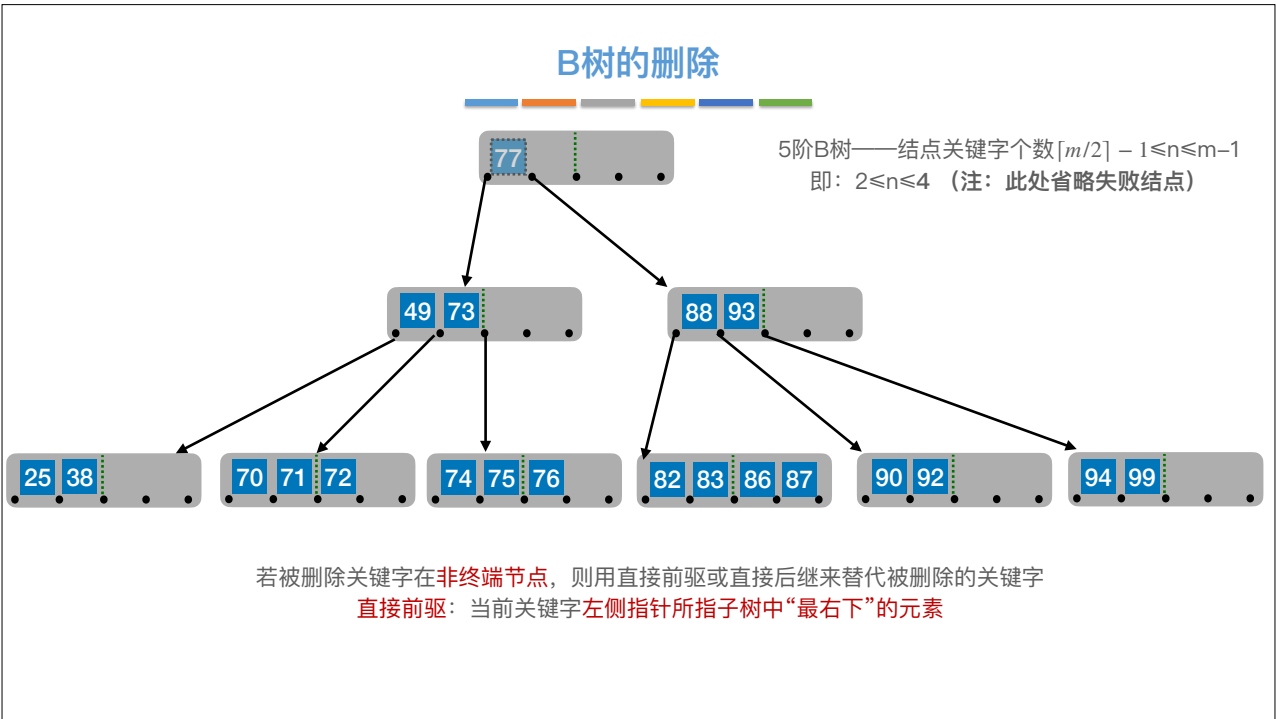
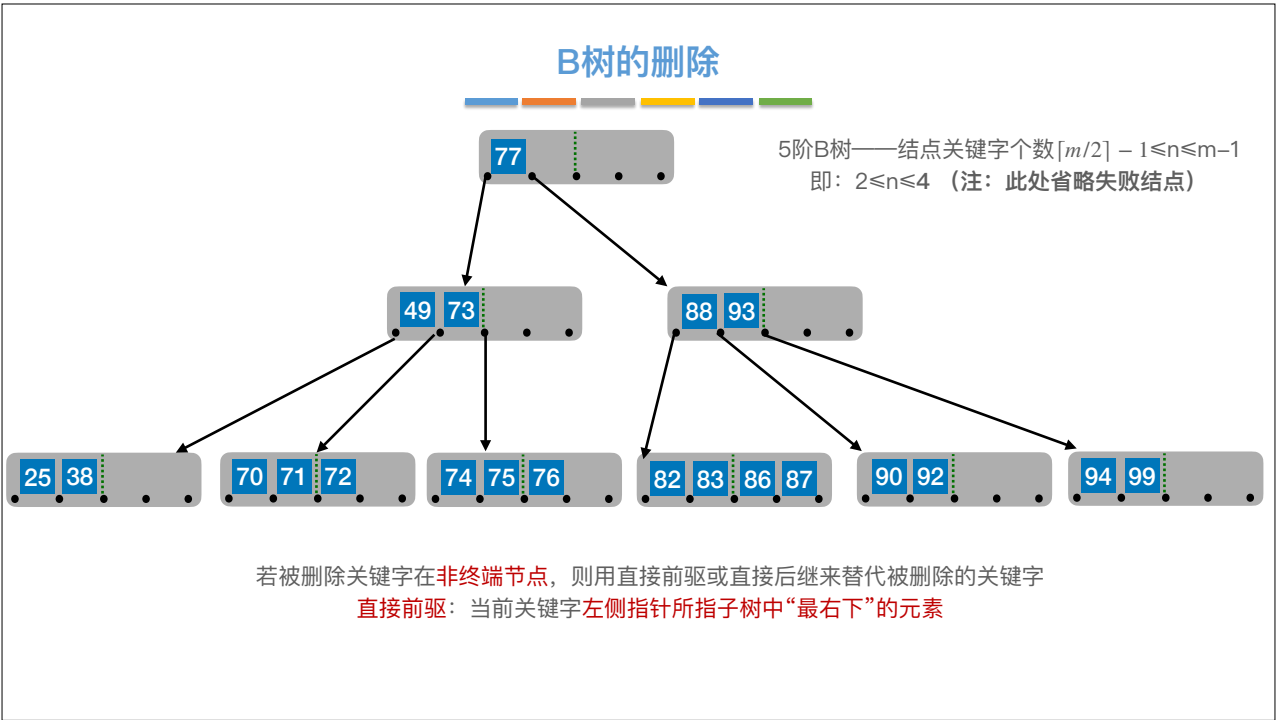
若被删除关键字在**终端节点**，则直接删除该关键字（要注意节点关键字个数是否低于下限  $\lceil m/2 \rceil - 1$ ）

### B树的删除



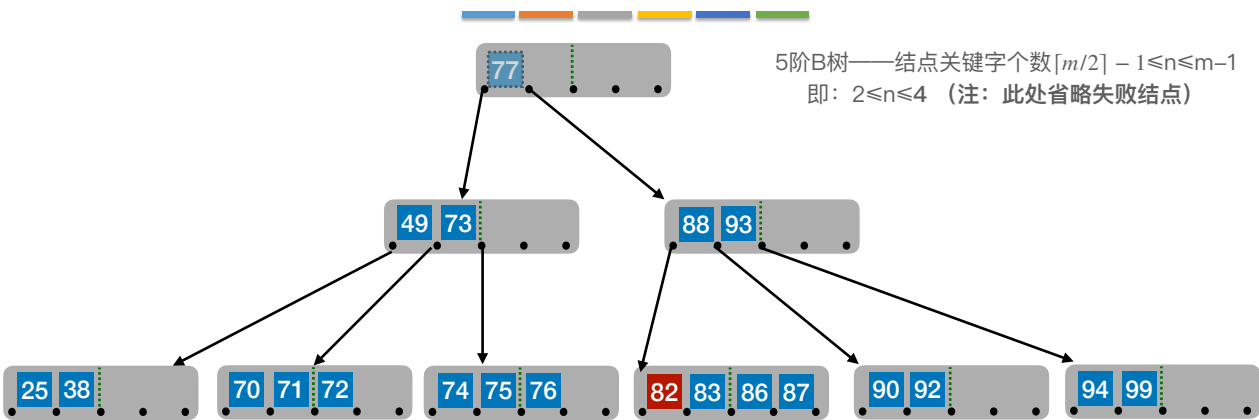
若被删除关键字在**非终端节点**，则用直接前驱或直接后继来替代被删除的关键字

**直接前驱**：当前关键字**左侧**指针所指子树中“最右下”的元素





B树的删除

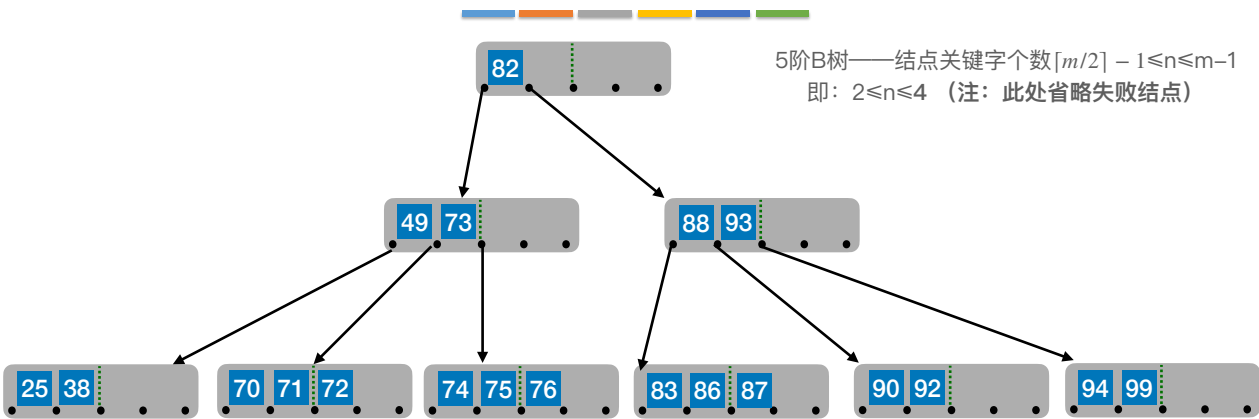


若被删除关键字在**非终端节点**，则用直接前驱或直接后继来替代被删除的关键字

直接前驱：当前关键字**左侧**指针所指子树中“**最右下**”的元素

直接后继：当前关键字**右侧**指针所指子树中“**最左下**”的元素

B树的删除



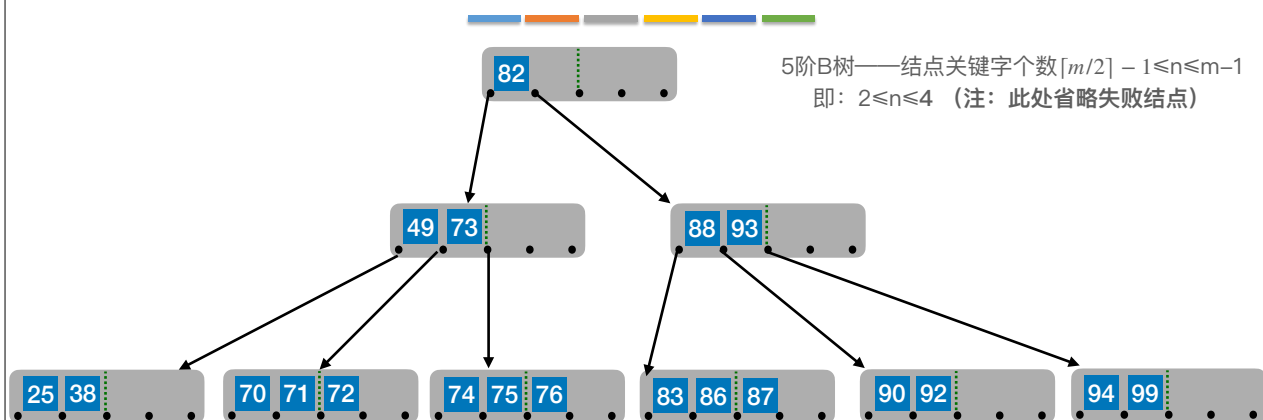
若被删除关键字在**非终端节点**，则用直接前驱或直接后继来替代被删除的关键字

直接前驱：当前关键字**左侧**指针所指子树中“**最右下**”的元素

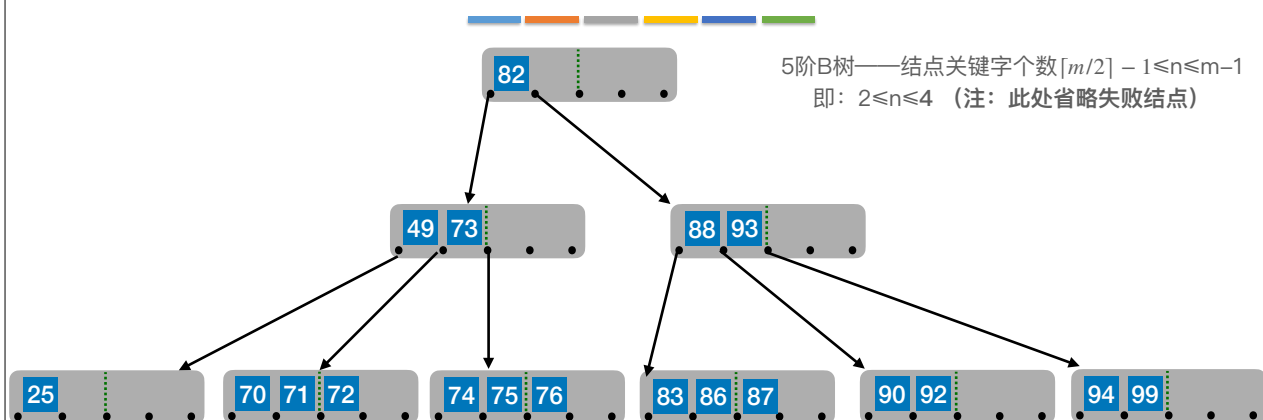
直接后继：当前关键字**右侧**指针所指子树中“**最左下**”的元素

对非终端结点关键字的删除，必然可以转化为对终端结点的删除操作

## B树的删除

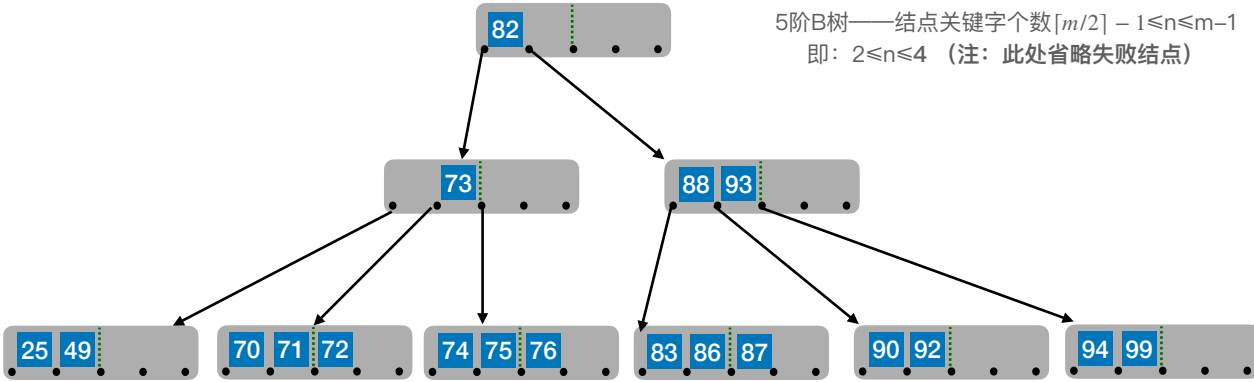


## B树的删除



兄弟够借。若被删除关键字所在结点删除前的关键字个数低于下限，且与此结点右（或左）兄弟结点的关键字个数还很宽裕，则需要调整该结点、右（或左）兄弟结点及其双亲结点（父子换位法）

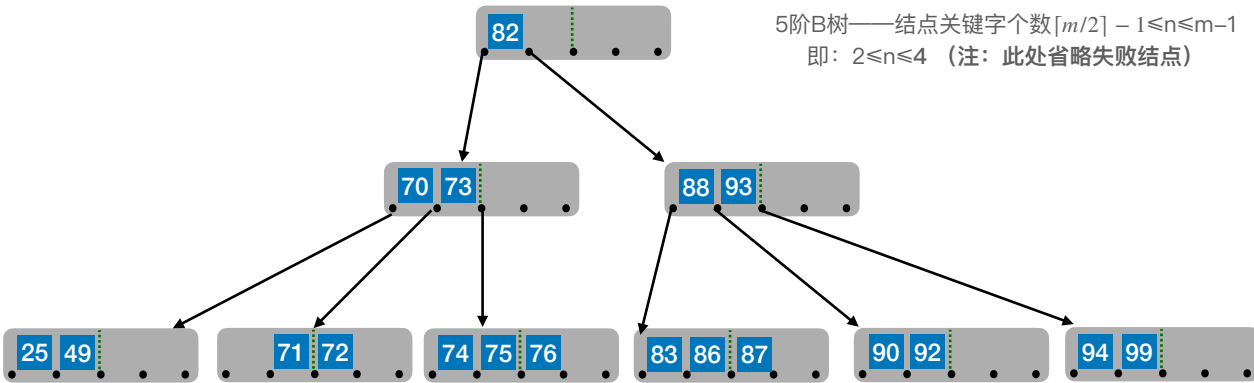
B树的删除



兄弟够借。若被删除关键字所在结点删除前的关键字个数低于下限，且与此结点右（或左）兄弟结点的关键字个数还很宽裕，则需要调整该结点、右（或左）兄弟结点及其双亲结点（父子换位法）

在？借点钱？

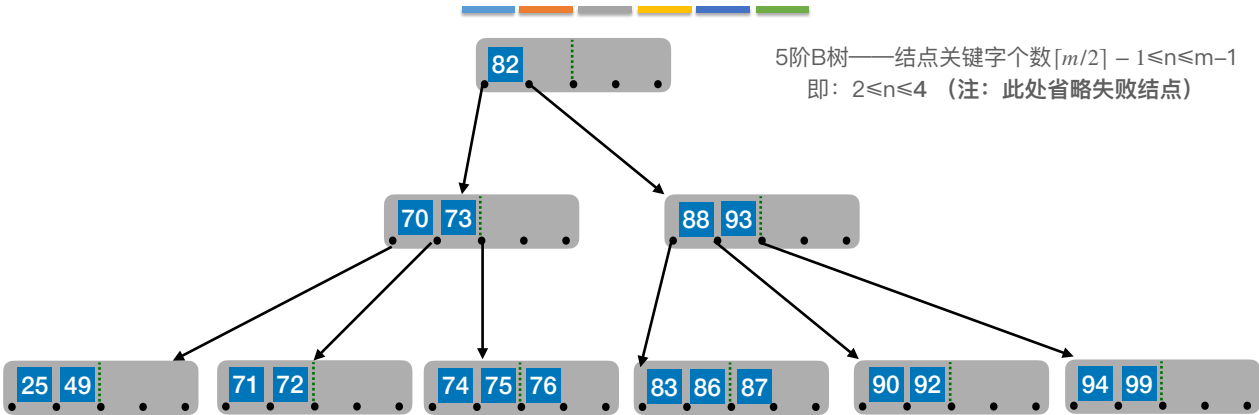
B树的删除



兄弟够借。若被删除关键字所在结点删除前的关键字个数低于下限，且与此结点右（或左）兄弟结点的关键字个数还很宽裕，则需要调整该结点、右（或左）兄弟结点及其双亲结点（父子换位法）

在？借点钱？

B树的删除



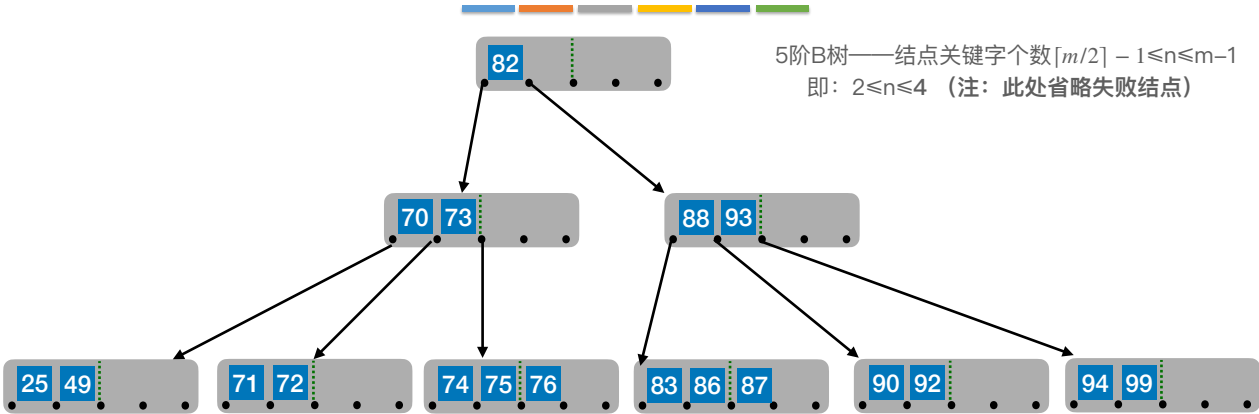
5阶B树——结点关键字个数 $\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$   
即：  $2 \leq n \leq 4$  （注：此处省略失败结点）



兄弟够借。若被删除关键字所在结点删除前的关键字个数低于下限，且与此结点右（或左）兄弟结点的关键字个数还很宽裕，则需要调整该结点、右（或左）兄弟结点及其双亲结点（父子换位法）

说白了，当**右兄弟很宽裕**时，用当前结点的**后继**、**后继的后继**来填补空缺

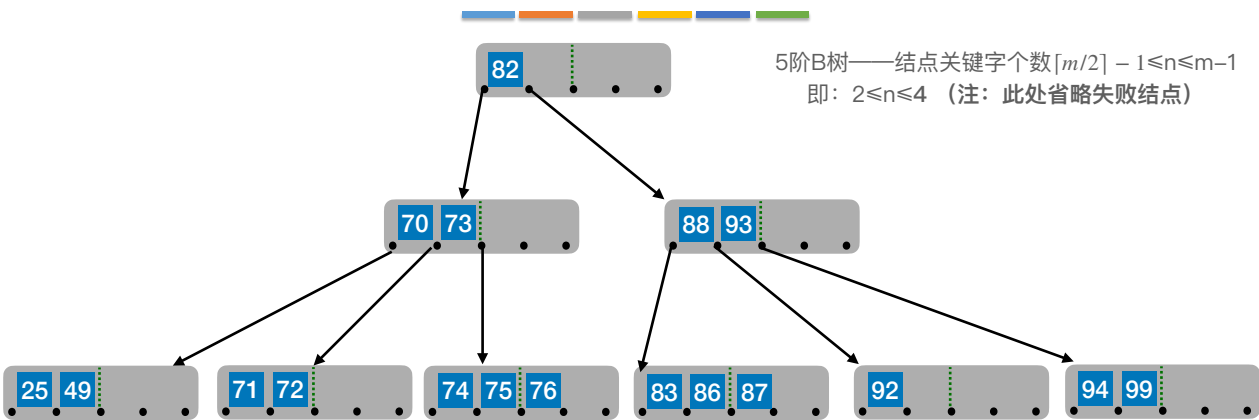
B树的删除



5阶B树——结点关键字个数 $\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$   
即：  $2 \leq n \leq 4$  （注：此处省略失败结点）

兄弟够借。若被删除关键字所在结点删除前的关键字个数低于下限，且与此结点右（或左）兄弟结点的关键字个数还很宽裕，则需要调整该结点、右（或左）兄弟结点及其双亲结点（父子换位法）

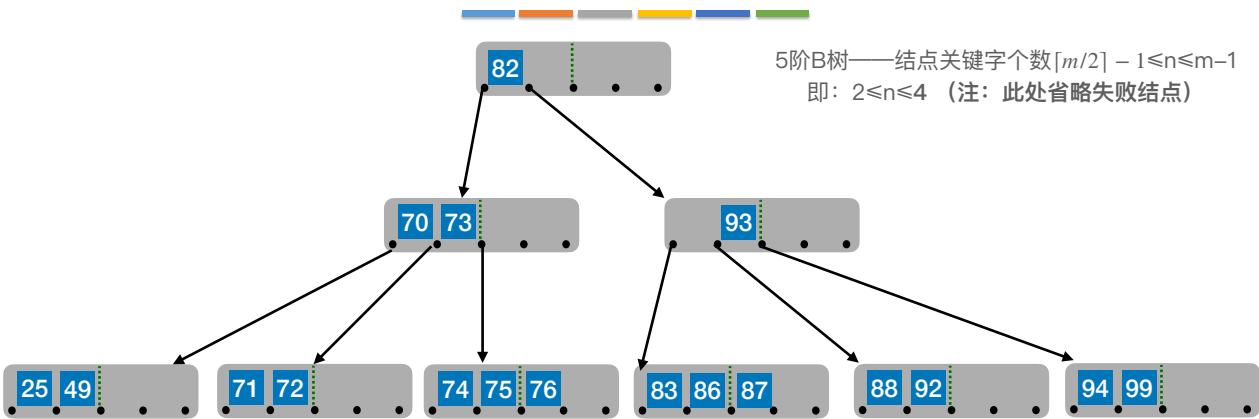
B树的删除



兄弟够借。若被删除关键字所在结点删除前的关键字个数低于下限，且与此结点右（或左）兄弟结点的关键字个数还很宽裕，则需要调整该结点、右（或左）兄弟结点及其双亲结点（父子换位法）

当左兄弟很宽裕时，用当前结点的前驱、前驱的前驱来填补空缺

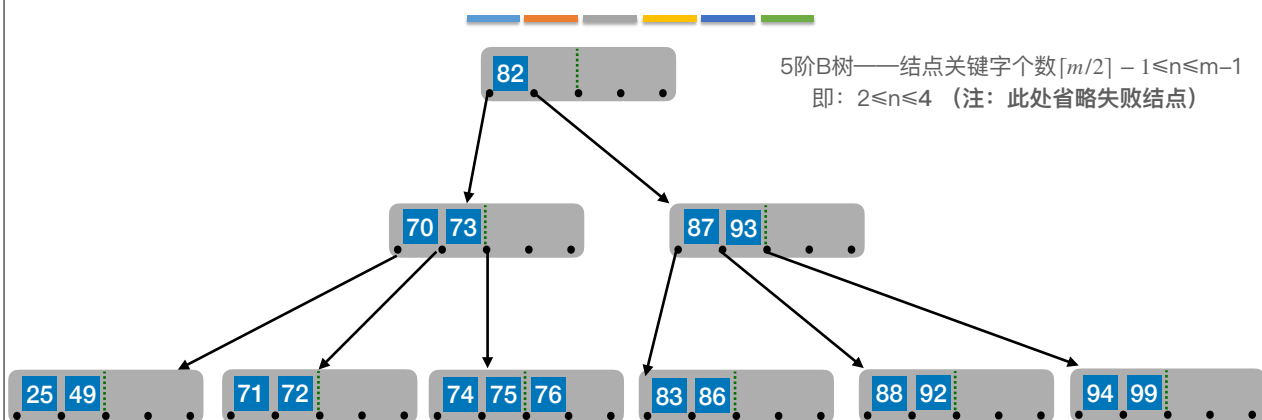
B树的删除



兄弟够借。若被删除关键字所在结点删除前的关键字个数低于下限，且与此结点右（或左）兄弟结点的关键字个数还很宽裕，则需要调整该结点、右（或左）兄弟结点及其双亲结点（父子换位法）

当左兄弟很宽裕时，用当前结点的前驱、前驱的前驱来填补空缺

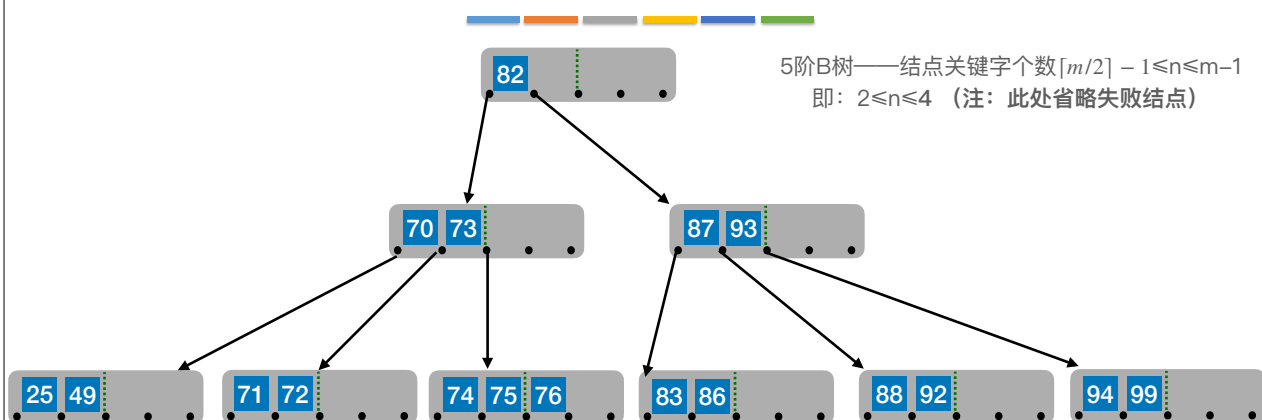
## B树的删除



兄弟够借。若被删除关键字所在结点删除前的关键字个数低于下限，且与此结点右（或左）兄弟结点的关键字个数还很宽裕，则需要调整该结点、右（或左）兄弟结点及其双亲结点（父子换位法）

当左兄弟很宽裕时，用当前结点的前驱、前驱的前驱来填补空缺

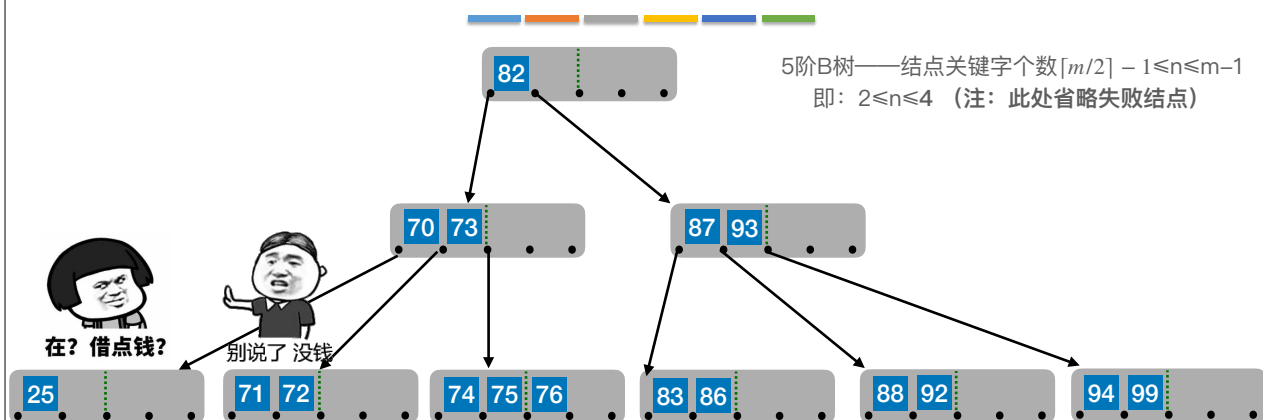
## B树的删除



兄弟够借。若被删除关键字所在结点删除前的关键字个数低于下限，且与此结点右（或左）兄弟结点的关键字个数还很宽裕，则需要调整该结点、右（或左）兄弟结点及其双亲结点（父子换位法）

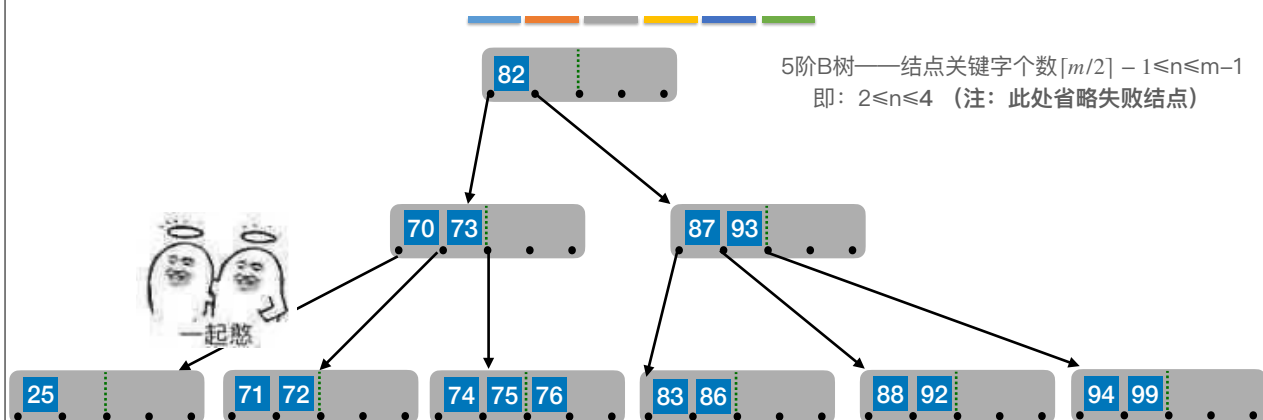
本质：要永远保证 子树0<关键字1<子树1<关键字2<子树2<....

## B树的删除



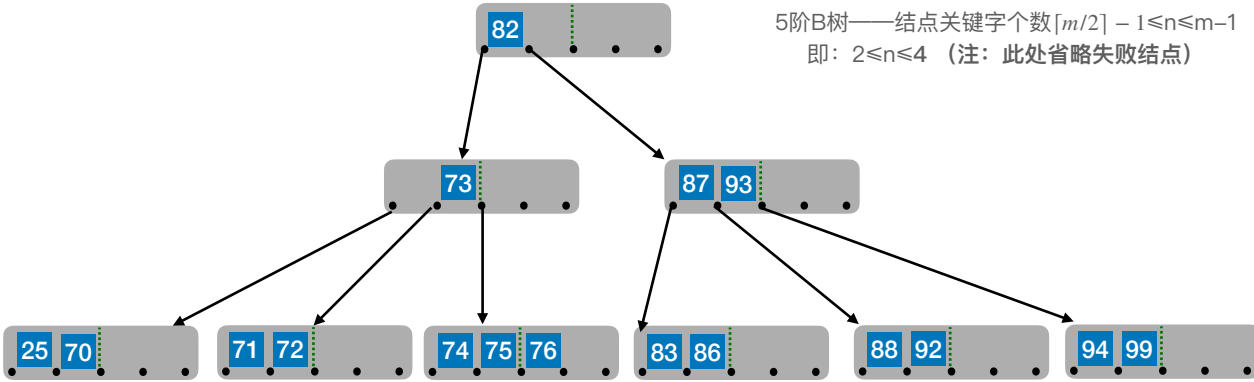
兄弟不够借。若被删除关键字所在结点删除前的关键字个数低于下限，且此时与该结点相邻的左、右兄弟结点的关键字个数均  $= \lceil m/2 \rceil - 1$ ，则将关键字删除后与左（或右）兄弟结点及双亲结点中的关键字进行合并

## B树的删除



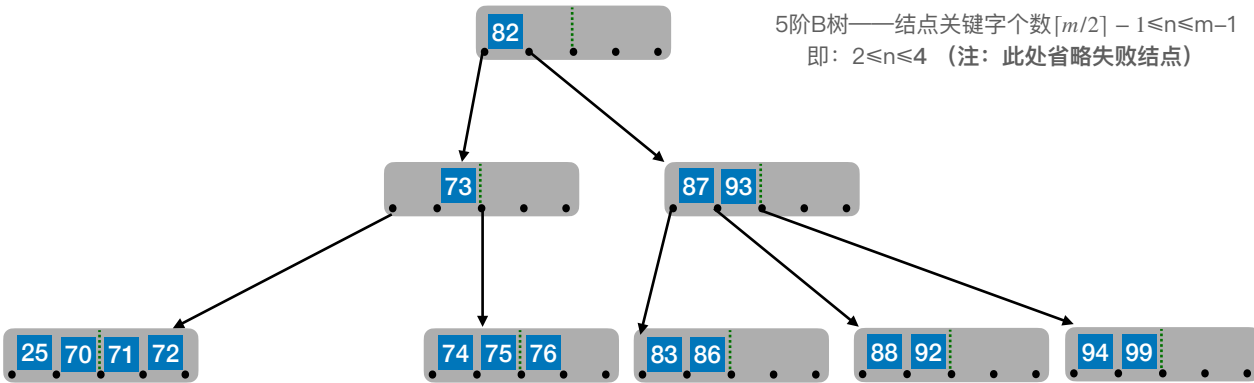
兄弟不够借。若被删除关键字所在结点删除前的关键字个数低于下限，且此时与该结点相邻的左、右兄弟结点的关键字个数均  $= \lceil m/2 \rceil - 1$ ，则将关键字删除后与左（或右）兄弟结点及双亲结点中的关键字进行合并

B树的删除



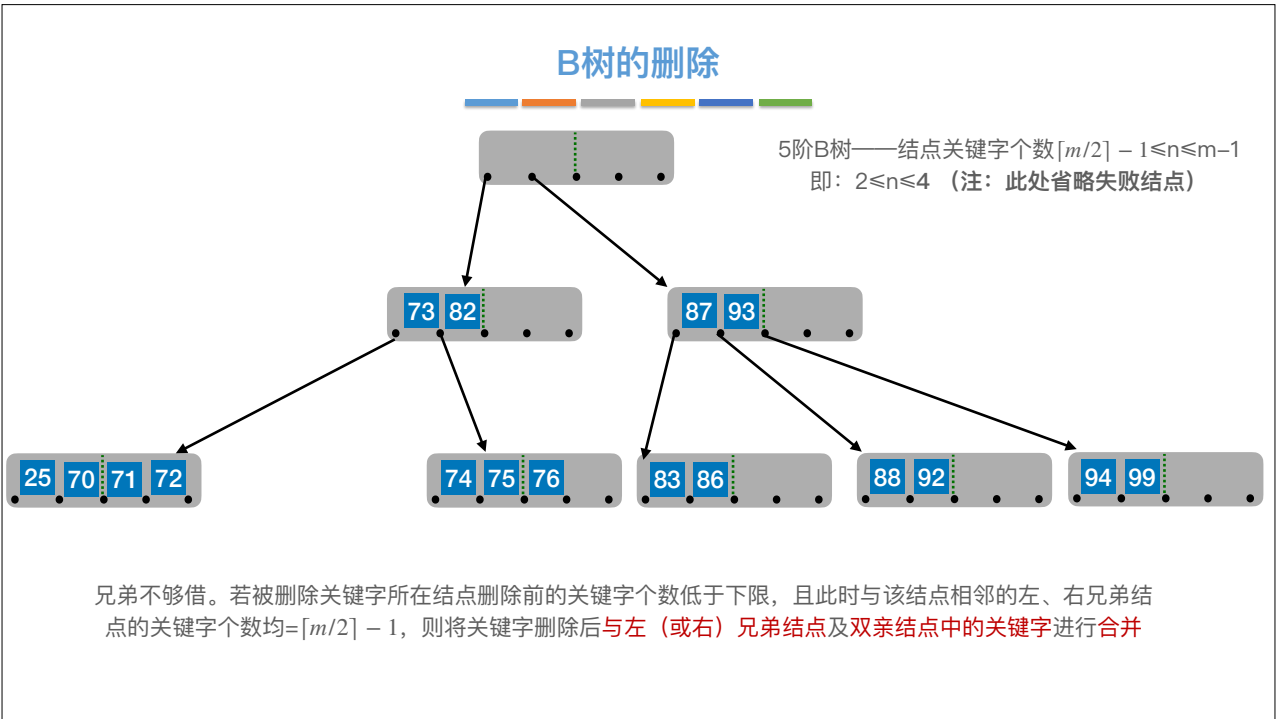
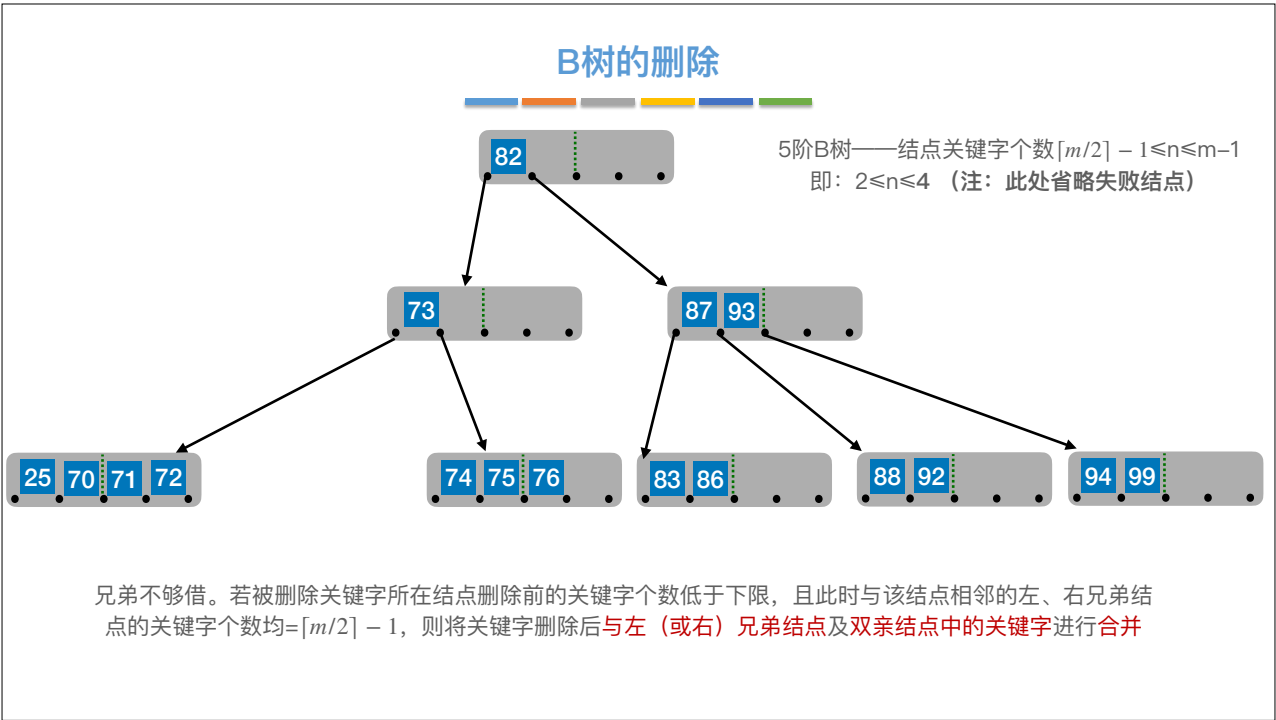
兄弟不够借。若被删除关键字所在结点删除前的关键字个数低于下限，且此时与该结点相邻的左、右兄弟结点的关键字个数均 $=\lceil m/2 \rceil - 1$ ，则将关键字删除后与左（或右）兄弟结点及双亲结点中的关键字进行合并

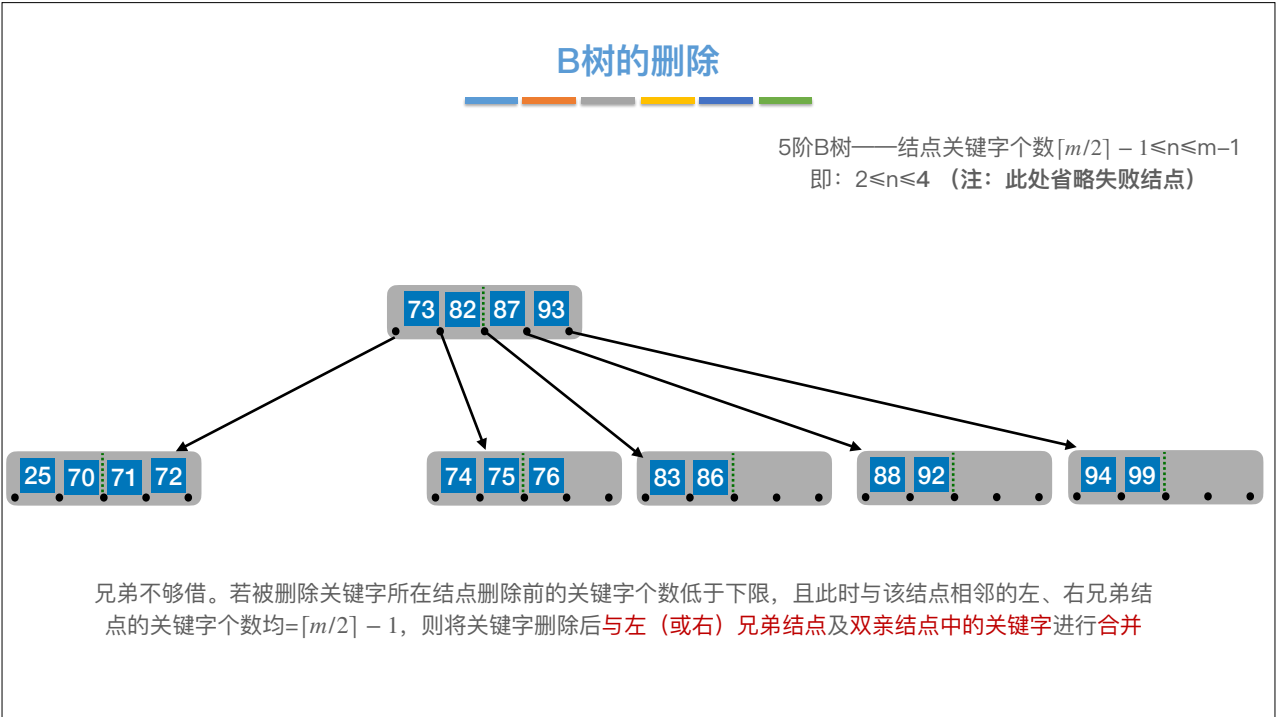
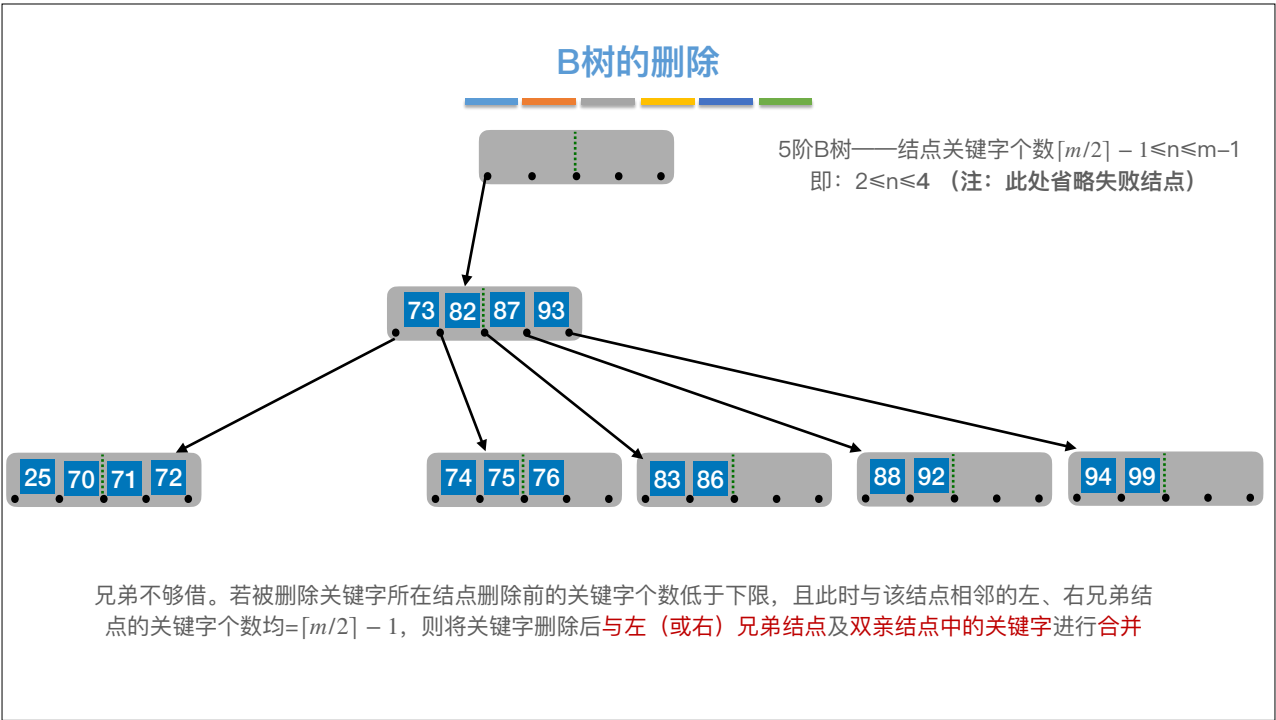
B树的删除



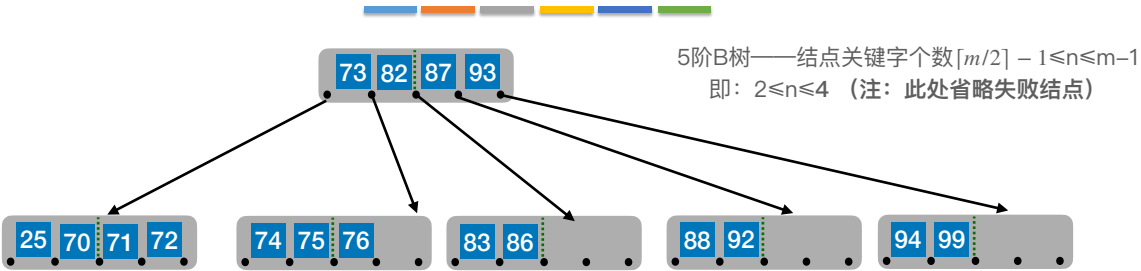
兄弟不够借。若被删除关键字所在结点删除前的关键字个数低于下限，且此时与该结点相邻的左、右兄弟结点的关键字个数均 $=\lceil m/2 \rceil - 1$ ，则将关键字删除后与左（或右）兄弟结点及双亲结点中的关键字进行合并







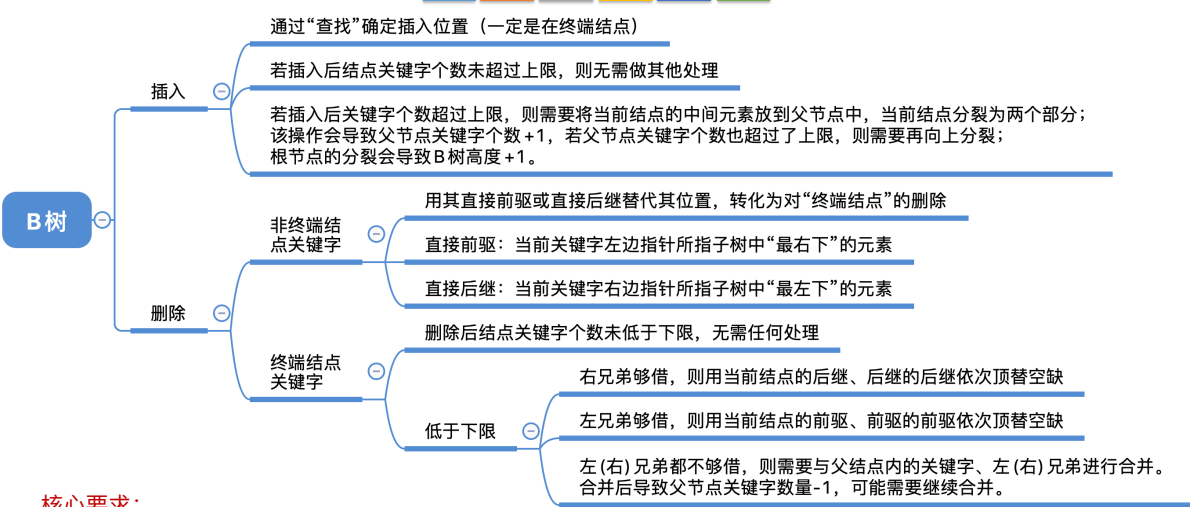
B树的删除



兄弟不够借。若被删除关键字所在结点删除前的关键字个数低于下限，且此时与该结点相邻的左、右兄弟结点的关键字个数均 $= \lceil m/2 \rceil - 1$ ，则将关键字删除后与左（或右）兄弟结点及双亲结点中的关键字进行合并

在合并过程中，双亲结点中的关键字个数会减1。若其双亲结点是根结点且关键字个数减少至0（根结点关键字个数为1时，有2棵子树），则直接将根结点删除，合并后的新结点成为根；若双亲结点不是根结点，且关键字个数减少到 $\lceil m/2 \rceil - 2$ ，则又要与它自己的兄弟结点进行调整或合并操作，并重复上述步骤，直至符合B树的要求为止。

知识回顾与重要考点



核心要求：

- ①对m阶B树——除根节点外，结点关键字个数 $\lceil m/2 \rceil - 1 \leq n \leq m-1$
- ②子树0<关键字1<子树1<关键字2<子树2<....