2022年研究生入学考试

高等数学(微积分)基础班习题课

2021年2月

第一部分 函数、极限与连续

1、设 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$，$g(x)=e^{2x-1}-e^{-x}$，则 $f[g(x)]=$

$$f[g(x)]=\begin{cases}-1, & g(x)<0\\ 0, & g(x)=0\\ 1, & g(x)>0\end{cases}=\begin{cases}-1, & x<\frac{1}{3}\\ 0, & x=\frac{1}{3}\\ 1, & x>\frac{1}{3}\end{cases}$$

2、设 $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$，则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=$ -2

3、$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{x^2}-1)(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}{[\ln(1-x)+\ln(1+x)]\sin\dfrac{x}{1+x}}=\qquad -1$

4、$I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x\cos\sqrt{\frac{x+1}{x^2}}}=\qquad e^2$

5、$I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)=\qquad \dfrac{1}{3}$

6、$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x^2-2(1-\cos x)\sin x}{x^4}=$ 0

7、$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\sqrt{\cos x})(1-\sqrt[3]{\cos x})\cdots(1-\sqrt[n]{\cos x})}{(1-\cos x)^{n-1}}= \quad \dfrac{1}{n!}$

8、$I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x^2}+x^3\right)^{\frac{1}{x^2}}=\quad e$

9、$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{x^2}^{x}\frac{\sin xt}{t}dt}{x^2}=$ $\qquad$ 1

10、$I=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(2^{\frac{1}{x}}-2^{\frac{1}{x+1}}\right)=$ $\ln 2$

11、设$a>0$,则$\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^2+x\right)^{x^{\alpha}} = \ 1$

12、数列极限$I=\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\dfrac{2}{n}-\arctan\dfrac{2}{n+1}\right)=$ 2

13、$I=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}-\sqrt{e}\right]=-\dfrac{\sqrt{e}}{4}$

14、设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)}{x}=3$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=$ 2

15、设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+xf(x)}{x^2}=0$,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=$ $\dfrac{1}{2}$

16、设函数$f(x)$在$x=1$连续，且$f(1)=1$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(2+f(x^{\frac{1}{x}}))=$

$\ln 3$

17、设a,b为常数，且$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^6}-ax^2-b)=0$,则$a=$ $,b=$ $-1,0$

18、设a,b,p为非零常数，则$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a+be^{\frac{1}{x}}}{a-be^{\frac{1}{x}}}\cdot\dfrac{\sin px}{|x|}=\quad -p$

19、设$x_0=0$，$x_n=\dfrac{1+2x_{n-1}}{1+x_{n-1}}(n=1,2,3,\cdots)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

20、设$f(x)$连续，当$x \to a$时，$f(x)$是$x-a$的n阶无穷小，则当$x \to a$时$\int_a^x f(t)dt$是$x-a$的　　　阶无穷小．　　$n+1$

V研客 在线教育

21、已知当$x \to 0$时$F(x)=\int_0^{x-\sin x}\ln(1+t)dt$是$x^n$的同阶无穷小，则$n=$ 6

23、设 $f(x)=\begin{cases}6, & x\le 0\\ \dfrac{e^{ax^3}-1}{x-\arcsin x}, & x>0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}\dfrac{3\sin(x-1)}{x-1}, & x<1\\ e^{bx}+1, & x\ge 1\end{cases}$，

若 $f(x)+g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，则 $a=$ ＿＿，$b=$ ＿＿． $-1, \ln 2$

24、设$f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-b)}$有无穷间断点$x=e$,可去间断点$x=1$,

则$(a,b)=$ $(1,e)$

25、设$f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$,则$f(x)$的连续区间是 $(-\infty,+\infty)$

121、设有下列命题

(1)数列 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 有界.

(2)数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+l} = a$, 其中 l 为某个确定的正整数.

(3)数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = a$.

(4) 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \exists \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1$.

答案：C

则以上命题中正确的个数是

(A)1.　(B)2.　(C) 3.　(D) 4.

122、设 $1 < a \le e^{\frac{1}{e}}, x_1 = a, x_2 = a^{x_1}, \cdots, x_n = a^{x_{n-1}}, \cdots$，则

(A) 数列 $\{x_n\}$ 单调增，但是没有极限.

答案：B

(B) 数列 $\{x_n\}$ 单调增，且有极限.

(C) 数列 $\{x_n\}$ 单调减，但是没有极限.

(D) 数列 $\{x_n\}$ 单调减，且有极限.

123、有下列命题：设$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a} g(x)$不∃，$\lim\limits_{x\to a} h(x)$不∃.

(1) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)]$不∃. (2) $\lim\limits_{x\to a}[g(x)+h(x)]$不∃.

(3) $\lim\limits_{x\to a}[h(x)g(x)]$不∃. (4) $\lim\limits_{x\to a}[g(x)+f(x)]$不∃.

则以上命题中正确的个数是

(A)0. (B)1. (C) 2. (D) 3.

答案：B

124、设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(x-1)}{(x-1)(x-2)}, & x\in(1,2)\cup(2,+\infty)\\ 0, & x=2\end{cases}$ 则 $f(x)$

答案：B

(A) 在区间(1,2)有界.　　(B) 在区间(2,+∞)有界.

(C) 在区间(1,+∞)有界.　　(D) 在区间(1,2)和 (2,+∞)都无界.

125、 下列命题中正确的是

(A) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \ge \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \Rightarrow \exists\delta > 0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时$f(x)\ge g(x)$.

(B) 若$\exists\delta > 0$使得当$0<|x-x_0|<\delta$时$f(x)>g(x)$且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A_0$，

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B_0$均$\exists$，则$A_0>B_0$.

答案：D

(C) 若$\exists\delta > 0$使得当$0<|x-x_0|<\delta$时$f(x)>g(x)\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ge \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

(D) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \Rightarrow \exists\delta > 0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时$f(x)>g(x)$.

126、$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})=$ 答案：A

(A)1. (B) $\frac{3}{4}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{1}{4}$.

127、当 $n\to\infty$ 时，$e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 与 An^{-p} 为等价无穷小，则

答案：B

(A) $A=\dfrac{e}{3},p=1.$　　(B) $A=\dfrac{e}{2},p=1.$

(C) $A=\dfrac{e}{3},p=2.$　　(D) $A=\dfrac{e}{2},p=2.$

128、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=$

(A)3.　(B)2.　(C) $\dfrac{2}{3}$.　(D) $\dfrac{1}{2}$.　答案：D

129、$f(x)=\frac{\sin \pi x}{x-1}e^{\frac{1}{(x-1)^3}}$，则当$x\to 1$时有　　答案：D

(A) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\pi$.　　(B) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$.

(C) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\infty$.　(D) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$不存在，且$\lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq\infty$.

130、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(xe^{x})-e^{-\frac{x^2e^{2x}}{2}}}{x^4}=$

答案：D

(A)0.　(B) $-\dfrac{1}{6}$.　(C) $-\dfrac{1}{8}$.　(D) $-\dfrac{1}{12}$.

131、若$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos2x-\sqrt{\cos2x}}{x^k}=a\neq0$，则 答案：D

(A) $k=2,a=1$.　　(B) $k=-2,a=-1$.

(C) $k=2,a=-2$.　　(D) $k=2,a=-1$.

132、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{(1-\cos x)\sin^2 x}=$

答案：C

(A) 1.　　(B) $\dfrac{1}{2}$.　　(C) $\dfrac{1}{3}$.　　(D) 0.

133、$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}}{e^x}=$ 答案：D

(A)0. (B) $e^{-\frac{1}{4}}$. (C) $e^{-\frac{1}{3}}$. (D) $e^{-\frac{1}{2}}$.

134、已知$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax^2+bx+1-e^{x^2-2x}}{x^2}=2$,则 答案：A

(A) $a=5,b=-2$. (B) $a=-2,b=5$.

(C) $a=2,b=0$. (D) $a=3,b=-3$.

135、设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x-(\sin x)f(x)}{x^3}=0$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6-f(x)}{x^2}=$

(A) 0. (B) 35. (C) 36. (D) ∞. 答案：B

136、下列各题计算过程中正确无误的是

答案：D

(A) 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\ln n)'}{(n)'}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

(B) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\pi x}{3x^2-2x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\pi\cos\pi x}{6x-2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-\pi^2\sin\pi x}{6}=0$.

(C) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$ 不存在.

(D) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}=\infty$.

137、当 $n\to\infty$ 时，数列 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n-e$ 是 $\dfrac{1}{n}$ 的

答案：D

(A)高阶无穷小　　(B) 低阶无穷小

(C)等价无穷小　　(D) 同阶但非等价无穷小

138、 当 $x \to 0$ 时下列无穷小中阶数最高的是

(A) $(1+x)^{x^2}-1$. (B) $e^{x^4-2x}-1$. 答案：C

(C) $\int_0^{x^2}\sin t^2 dt$. (D) $\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}$.

139、当$x\to a$时 $f(x)$与$g(x)$分别是$x-a$的n阶与m阶无穷小，则下列命题

(1) $f(x)g(x)$是$x-a$的$n+m$阶无穷小.

(2)若$n>m$,则$\dfrac{f(x)}{g(x)}$是$x-a$的n-m阶无穷小.

答案：C

(3)若$n\le m$,则$f(x)+g(x)$是$x-a$的n阶无穷小.

(4)若$f(x)$连续,则$\int_a^x f(x)dx$是$x-a$的$n+1$阶无穷小. 中，正确的个数是

(A) 1.　　(B)2.　　(C)3.　　(D) 4.

140、 设 $f(x)=\int_0^x te^{\sin t}dt$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$为无穷小 x 的阶为

(A) 一阶.　　(B) 二阶.　　(C). 三阶　　(D). 四阶

答案：B

141、以下函数$f[g(x)]$以$x=0$为第二类间断点的是

$$(A)\ f(u)=\ln(1+u^2),\ g(x)=\begin{cases}\sin^2 x+(x+1)^2, & x\le 0\\ x^2+1, & x>0\end{cases}.$$

$$(B)\ f(u)=\begin{cases}1-u, & u\le 0\\ u^2+1, & u>0\end{cases},\ g(x)=2\cos x-1.$$

答案：D

$$(C)\ f(u)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1-u^2)}{u}\sin\dfrac{1}{u}, & u<0\\ 1-\cos\sqrt{u}, & u\ge 0\end{cases},\ g(x)=\begin{cases}x, & x<0\\ x+\dfrac{\pi^2}{4}, & x\ge 0\end{cases}.$$

$$(D)\ f(u)=e^{u^2}+1,\ g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<0\\ 0, & x=0\\ \sin\dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}.$$

142、设$f(x)=\dfrac{1}{\arctan\dfrac{x-1}{x}}$,则

答案：C

(A) $x=0$与$x=1$都是$f(x)$的第一类间断点..

(B) $x=0$与$x=1$都是$f(x)$的第二类间断点..

(C) $x=0$是$f(x)$的第一类间断点，$x=1$是$f(x)$的第二类间断点 .

(D) $x=0$是$f(x)$的第二类间断点，$x=1$是$f(x)$的第一类间断点 .

143 设$f(x)$在点x_0的某邻域内有定义，且$f(x)$在x_0间断，则在x_0处必定间断的函数是

答案：B

(A) $f(x)\sin x$.　　(B) $f(x)+\sin x$.

(C) $f^2(x)$.　　(D) $|f(x)|$.

144、“$f(x)$在x_0点连续”是$|f(x)|$在x_0点连续的

答案：A

(A) 充分条件，但不是必要条件.

(B) 必要条件，但不是充分条件.

(C) 充分必要条件

(D) 既非充分也非必要条件

145 设$f(x)$在$[a,+\infty)$连续，则“$\exists x_n\in[a,+\infty)$，有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$且$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=+\infty$”是$f(x)$在$[a,+\infty)$无界的

(A) 充分非必要条件.

(B) 必要非充分条件.答案：C

(C) 充要条件

(D) 既非充分也非必要条件