2022年研究生入学考试

高等数学(微积分)基础班习题课

2021年2月

第三部分 一元函数的积分学

51、已知$\int f'(x^3)dx = x^3 + C$（C为任意常数），则$f(x) = \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$

52、$\mathrm{I}=\int\sqrt{\frac{3-2x}{3+2x}}dx=\frac{3}{2}\arcsin\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}\sqrt{9-4x^2}+C$

53、$I=\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx=$

54、$\mathrm{I}=\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}dx=\quad 2x\sqrt{1+e^x}-4\sqrt{1+e^x}-2\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C$

55、$I=\int \frac{dx}{x^2(1-x^4)}=$ $-\frac{1}{x}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{2}\arctan x+C$

V研客™ 在线教育 www.vyanke.com

56、$I=\int\frac{\sin x dx}{\sin x+\cos x}=$ $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\ln\left|1+\sin 2x\right|+C$

57、$I=\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+1}}=$ $\frac{1}{2}\ln(\sqrt{x^4+1}-1)-\ln|x|+C$

58、设$f(x)=x^2-x\int_0^2 f(x)dx+2\int_0^1 f(x)dx+$,则$f(x)=$ $x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$

59、设$f(x)$有一阶导数且满足$\int_0^1 f(tx)dt = f(x) + x\sin x$，则$f(x) =$

$-x\sin x + \cos x + C$

60、$I=\int_0^1(\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{(1-x^2)^3}dx=$

$$\frac{\pi}{16}$$

61、设$f(x)$为连续函数，a,b为常数，$a^2+b^2\neq 0$,

$$\int_0^{2\pi} f(a\cos x+b\sin x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sqrt{a^2+b^2}\sin x)dx,\text{则}A=\quad 2$$

62、$f(x)=\begin{cases} xe^{-x^2}, x\geq 0 \\ \dfrac{1}{1+\cos x}, x<0 \end{cases}$，则$\int_1^4 f(x-2)dx=$--- $\tan\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}e^{-4}+\dfrac{1}{2}$

63、设$f(x)$是定义于$x\geq 1$的正值连续函数，则 2

$F(x)=\int_1^x\left[\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)-\left(\frac{2}{t}+\ln t\right)\right]f(t)dt(x\geq 1)$的极小值点是

64、定积分$I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=$ $\frac{1}{4}\pi^2$

65、设$f(x)=\max\{1,x^2\}$，则$\int_1^x f(t)dt=$

$$\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}, & x<-1\\ x-1, & -1\le x<1\\ \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}, & x\ge 1\end{cases}$$

66、在曲线$y=x^2(0\le x\le 1)$上取一点$(t,t^2)(0<t<1)$，设A_1是曲线曲线$y=x^2$，直线$y=t^2$和$x=0$围成的面积；A_2是曲线$y=x^2$，直线$y=t^2$和$x=0$围成的面积，则t取---时，A_1+A_2取最小值. $\dfrac{1}{2}$

67、$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-1}} =$ $\frac{1}{4}\pi$

V研客™ 在线教育 www.vyanke.com

68、$I=\int_1^{+\infty}\left[\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)}-1\right]dx=1$，则 $a=$ ——，$b=$ ——— $a=b=2(e-1)$

69、$\int_{0}^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^{2}}dx=$ 　　　　　　$\ln 2$

176、设$F(x)$是$f(x)$在(a,b)内的一个原函数，则$f(x)+F(x)$在(a,b)内

(A) 可导. (B)连续. (C) 存在原函数. (D) 是初等函数.

答案：C

177、设$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$，$F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt$，则$F(x)$

答案：B

(A) 在$(-1,1)$为无界函数．

(B) 在$(-1,1)$为连续有界函数．

(C) 在$(-1,1)$有间断点$x=0$．

(D) 在$(-1,1)$不可积．

178、设 $f(x)$ 一阶可导，$f(x)>0$，$f'(x)>0$，则当 $\Delta x>0$ 时

答案：A

(A) $\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt > f(x)\Delta x > 0$.　(B) $\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt < f(x)\Delta x < 0$.

(C) $f(x)\Delta x > \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt > 0$.　(D) $f(x)\Delta x < \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt < 0$.

179、考察下列叙述

(1)设$f^2(x)$在$x=x_0$连续，则$f(x)$在$x=x_0$连续.

(2)设$f(x)$在$x=x_0$连续，则$|f(x)|$在$x=x_0$连续.

(3)设$|f(x)|$在$[a,b]$可积，则$f(x)$在$[a,b]$可积.

(4)设$f(x)$在$[a,b]$有界，只有有限个间断点，则$|f(x)|$在$[a,b]$可积.

答案：C

(A) 只有(1),(2)正确.　　(B) 只有(2),(3)正确.

(C) 只有(2),(4)正确.　　(D) 只有(3),(4)正确.

180、下列函数在指定区间上不存在定积分的是

(A) $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}, x\in[-1,1]$.

(B) $f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, x>0\\ 0, x=0\\ -1, x<0\end{cases}, x\in[a,b]$.

(C) $f(x)=\begin{cases}\tan x, x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})\\ 0, x=\pm\dfrac{\pi}{2}\end{cases}, x\in[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$.

(D) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}, x\in[-1,1]$.

答案：C

181、 下列命题中有一个正确的是

(A)设$f(x)$在$[a,b]$上可积，$f(x)\geq 0$,且不恒等于零，则$\int_a^b f(x)dx>0$.

(B)设$f(x)$在$[a,b]$可积，$g(x)$在$[a,b]$不可积，则$f(x)+g(x)$在$[a,b]$不可积.

(C)设$f^2(x)$在$[a,b]$可积，则$f(x)$在$[a,b]$可积.

(D)设$x_0\in(a,b)$，$f(x)$在$[a,b]/\{x_0\}$连续且有界，$x=x_0$是$f(x)$的间断点，则

$F(x)=\int_a^x f(t)dt$在$x=x_0$不可导.

答案：B

182、 设 $f(x)$在$[a,b]$连续，则下列结论中正确的个数为

(1)设$f(x)$在$[a,b]$的任意子区间$[\alpha,\beta]$上$\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$,则$f(x)\equiv 0$.

(2)$f(x)\geq 0(x\in[a,b])$,又$\int_a^b f(x)dx=0$,则$f(x)\equiv 0$.

答案：C

(3)$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$,则$\int_a^b f(x)dx\geq\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

183、下列结论不正确的是

答案：C

(A) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} dx < 1$.

(B) $\int_0^{2\pi} \cos x \ln(2+\cos x) dx > 0$.

(C) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx < 0$.

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx > 1$.

184、设$I=\int_1^2\frac{dx}{(1+x)\sqrt[3]{x}}$,$J=\int_1^2\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt[3]{x}}$,$K=\int_1^2\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{x}}$,则大小关系是

(A) $I<J<K$.　　(B) $J<K<I$.

(C) $K<J<I$.　　(D) $I<K<J$.

答案：C

185、设常数$\alpha>0, I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^{\alpha}}dx, I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^{\alpha}}dx$,则

(A) $I_1>I_2$.　　(B) $I_2>I_1$.　　答案：A

(C) $I_1=I_2$.　　(D) I_1与I_2谁大谁小与α有关.

186、下列用牛顿–莱布尼兹公式计算定积分的做法中，错误的做法有

$$(1)\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}\,dx=\int_0^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}}x\cos x\,dx=\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}}x\Big|_0^{\pi}=0.$$

答案：D

$$(2)\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=\ln|x|\Big|_{-1}^{1}=0.$$

$$(3)\int_0^{\pi}\frac{\sec^2 x}{2+\tan^2 x}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\Big|_0^{\pi}=0.$$

$$(4)\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)dx=\arctan\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}.$$

(A) 1 个. (B) 2 个. (C) 3 个. (D) 4 个.

187、$I=\int_0^{\pi} x\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}dx=$

(A) π.　(B) $\dfrac{\pi}{2}$.　(C) $\dfrac{\pi}{3}$.　(D) $\dfrac{\pi}{4}$.

答案：B

188、$I=\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x(1-x)}}dx=$

答案：B

(A) π.　(B) $\frac{\pi}{2}$.　(C) $\frac{\pi}{4}$.　(D) $\frac{\pi}{8}$.

189、$I=\int_0^1 x^4\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}dx=$

答案：B

(A) $\dfrac{3}{8}+\dfrac{8}{15}\pi$. (B) $\dfrac{3}{16}\pi+\dfrac{8}{15}$. (C) $\dfrac{3}{16}+\dfrac{8}{15}\pi$. (D) $\dfrac{3}{16}\pi+\dfrac{8}{5}\pi$.

190、设n,m为非负整数，$I_{n,m}=\int_0^1 x^n \ln^m x dx$,是

答案：B

(A) 定积分且值为$\dfrac{(-1)^n n!}{(n+1)^m}$. (B) 定积分且值为$\dfrac{(-1)^m m!}{(n+1)^{m+1}}$.

(C) 反常积分且发散. (D) 反常积分且值为$\dfrac{(-1)^m m!}{(n+1)^{m+1}}$.

191、设$\sin x\ln|x|$是$f(x)$的一个原函数，则不定积分$\int xf'(x)dx=$

答案：B

(A) $x\cos x\ln|x|+x\dfrac{\sin x}{|x|}-\sin x\ln|x|+C$.

(B) $x\cos x\ln|x|+\sin x-\sin x\ln|x|+C$.

(C) $\cos x\ln|x|-\dfrac{\sin x}{|x|}-\sin x\ln|x|+C$.

(D) 以上均不正确.

192、$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{2x}^{\ln x}\ln(1+t)dt =$

答案：A

(A) $\dfrac{1}{x}\ln(1+\ln x)-2\ln(1+2x)$. (B) $\dfrac{1}{x}\ln(1+\ln x)-\ln(1+2x)$.

(C) $\ln(1+\ln x)-\ln(1+2x)$. (D) $\ln(1+\ln x)-2\ln(1+2x)$.

193、设$F(x)=\int_0^x\left(\int_0^{u^2}\ln(1+t^2)dt\right)du$，则曲线$y=F(x)$

答案：B

(A) 在$(-\infty,0)$是凹的，在$(0,+\infty)$是凸的.

(B) 在$(-\infty,0)$是凸的，在$(0,+\infty)$是凹的.

(C) 在$(-\infty,+\infty)$是凹的. (D) 在$(-\infty,+\infty)$是凸的.

194、设$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1+x}, x>0\\ 0, x=0\\ \sqrt{1-x}, x<0\end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则

答案：B

(A) $F(x)$在$x=0$点不连续.

(B) $F(x)$在$x=0$点不可导.

(C) $F(x)$在$x=0$点可导，$F'(0)=f(0)$.

(D) $F(x)$在$x=0$点可导，但$F'(0)\neq f(0)$.

195、 下列叙述错误的是

(A)设$f(x)$在$[-a,a]$连续为奇函数，则$f(x)$在$[-a,a]$的全体原函数为偶函数.

(B)设$f(x)$在$[-a,a]$连续为偶函数，则$f(x)$在$[-a,a]$的全体原函数为奇函数.

(C)设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续, 以T为周期的奇函数，则$\int_0^x f(t)dt$也是以T为周期的函数.

答案：B

(D)设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续,以T为周期，又$\int_0^{+\infty} f(x)dx$收敛，则$\int_0^x f(t)dt$也是以T为周期的函数.

196 设$f(x)$为以T为周期的非零连续函数，$\Phi(x)=\int_a^x[f(t)-f(-t)]dt$，$a$是常数，则

(A)设$\Phi(x)$是以T为周期的偶函数.

(B)设$\Phi(x)$是以T为周期的奇函数.

(C)设$\Phi(x)$是偶函数,但不一定以T为周期.

(D)设$\Phi(x)$是奇函数,但不一定以T为周期.

答案：A

197、函数 $F(x)=\int_{x}^{x+\pi}\ln(1+\cos^{2}t)\cos 2t\,dt$ 答案：A

(A) 为正数.(B) 为负数.(C) 为正数.(D) 不是常数.

198 设$f(x)$为连续函数，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x\cos x)\cos x dx = A$，则$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x\cos x)x\sin x dx =$

(A) 0.　(B) A.　(C) $-A$.　(D) $2A$.　答案：B

199、设$f(x)=\begin{cases}x^2, x\geq 0\\ \cos x, x<0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$, 则在区间(-1,1)内

(A) $f(x)$与$g(x)$都存在原函数.

(B) $f(x)$与$g(x)$都不存在原函数.

(C) $f(x)$存在原函数, $g(x)$不存在原函数.

(D) $f(x)$不存在原函数, $g(x)$存在原函数.

答案：D

200、数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+4}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+16}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+4n^2}}\right)=$

(A) $\dfrac{1}{2}\ln(\sqrt{5}-2)$.

(B) $\dfrac{1}{2}\ln(\sqrt{6}-2)$.

(C) $\dfrac{1}{2}\ln(\sqrt{5}+2)$.

(D) $\dfrac{1}{2}\ln(\sqrt{6}+2)$.

答案：C

201、数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\int_0^{n\pi}|\sin x|dx}{(n+1)\pi}=$ 答案：C

(A) 0. (B) 不存在. (C) $\dfrac{2}{\pi}$. (D) $\dfrac{1}{\pi}$.

202、下列反常积分发散的是 答案：A

(A) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sin x}dx$. (B) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

(C) $\int_{0}^{+\infty}e^{-x^2}dx$. (D) $\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}dx$.

203、下列反常积分收敛的是　　　　**答案：C**

(A) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$.　　(B) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x(x-1)}}dx$.

(C) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$.　　(D) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x^2-1)}dx$.

204、设有下列命题

(1)设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续是奇函数，则$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=0$. 答案：A

(2)设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续，又 $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx$存在，则$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$收敛.

(3)$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$，$\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$均发散，则$\int_{a}^{+\infty}[f(x)+g(x)]dx$可能发散，也可能收敛.

(4)若$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$与$\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$均发散，则不能确定$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$是否收敛.

则以上命题正确的个数是

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

205 曲线$y=\cos x\,(x\in[0,\frac{\pi}{2}])$与$x$轴，$y$轴所围面积被曲线$y=a\sin x$等分，则$a=$

(A) $\frac{2}{5}$.　(B) $\frac{3}{5}$.　(C) $\frac{3}{4}$.　(D) $\frac{1}{2}$.

答案：C

206 由曲线$y=1-(x-1)^2$及直线$y=0$围成图形绕y轴旋转而成立体的体积V为

(A) $\int_0^1 \pi(1+\sqrt{1+y})^2 dy$.　　(B) $\int_0^1 \pi(1-\sqrt{1-y})^2 dy$.

(C) $\int_0^1 \pi[(1+\sqrt{1-y})-(1-\sqrt{1-y})]^2 dy$. **答案：D**

(D) $\int_0^1 \pi[(1+\sqrt{1-y})^2-(1-\sqrt{1-y})^2] dy$.