

2022年研究生入学考试

高等数学(微积分)基础班习题课

2021年2月

第五部分 多元函数的微分学

 V研客™
 在线教育
 www.yyanke.com

85、设 $u = u(\sqrt{x^2 + y^2})$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$) 有二阶连续的偏导数，且满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + u = x^2 + y^2,$$
 则 $u(\sqrt{x^2 + y^2}) =$

$$C_1 \cos \sqrt{x^2 + y^2} + C_2 \sin \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2 - 2$$

86、 设 $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{e^{xy} + xy\sqrt{x^2 + y^2}}$, 则 $f'_x(1, 0) = 2$

87、设 $z = e^x + y^2 + f(x+y)$, 且当 $y=0$ 时, $z = x^3$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$

$$e^x + 3(x+y)^2 - e^{x+y}$$

88、设 $z = (x - 2y)^{y-2x}$, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = -2$

89、设 $f(x, y) = \ln|x + y| - \sin(xy)$, 则 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ 在点 $(1, \pi)$ 处的值为 $\frac{\pi(2 + \pi)}{(1 + \pi)^2}$

90、设 $f(u, v)$ 是二元可微函数, $z = f(x^y, y^{2x})$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$

$$yx^{y-1}f_1' + 2\ln y \cdot y^{2x}f_2'$$

91、设 $z = e^{xy} + f(x+y, xy)$, $f(u, v)$ 有二阶连续偏导数, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$

$$e^{xy} + xye^{xy} + f_{11}'' + (x+y)f_{12}'' + xyf_{22}'' + f_2'$$

92、已知函数 $z = f(x, y)$ 在点 $(1, 2)$ 处可微, 且 $f(1, 2) = 1, f'_x(1, 2) = 2, f'_y(1, 2) = 3$, 设函数 $\varphi(x) = f(x, 2f(x, 2x))$, 则 $\varphi'(1) = 50$

93、设函数 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $4\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 1$ ，又

(ID: djky66)

$$g(x, y) = f(x^2 + y^2, xy), \text{ 则 } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = x^2 - y^2$$

94、设 $z = \int_0^1 |xy - t| f(t) dt, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, 其中 $f(x)$ 为连续函数, 则

$$z''_{xx} + z''_{yy} = 2(x^2 + y^2) f(xy)$$

95、设 $f(x), g(x)$ 可微, $u(x, y) = f(2x + 5y) + g(2x - 5y)$, 且满足
 $u(x, 0) = \sin 2x, u'_y(x, 0) = 0$, 则 $f(x) = \frac{1}{2} \sin x + C$

96、设 $z = f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y$, $f(x, 0) = x$, $f(0, y) = y^2$, 则 $f(x, y) =$

$$\frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + x + y^2$$

97、设连续函数 $z = f(x, y)$ 满足 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x, y) - 2x + y - 2}{\sqrt{x^2 + (y - 1)^2}} = 0$, 则 $dz|_{(0,1)} =$

$$2dx - dy$$

98、设 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续, 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - a - bx - cy}{\ln(1 + x^2 + y^2)} = 1$, 其中

a, b, c 为常数, 则 $df(x, y)|_{(0,0)} = \quad bdx + cdy$

99、设 $(ax^2y^2 - 2xy^2)dx + (2x^3y + bx^2y + 1)dy$ 是一个函数 $f(x, y)$ 的全微分，
则 $a = \underline{\quad\quad}, b = \underline{\quad\quad}, f(x, y) = \underline{\quad\quad} \quad 3, -2, x^3y^2 - x^2y^2 + y + C$

100、设 $f(x, y, z) = e^x + y^2z$, 其中 $z = z(x, y)$ 是由方程 $x + y + z + xyz = 0$ 所确定的隐函数, 则 $f'_x(0, 1, -1) =$ 1

101、若函数 $z(x, y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 确定, 则 $dz|_{(0,0)} =$
 $-\frac{1}{3}(dx + 2dy)$

(ID: djky66)



V研客™

微信号: djky66

102、设函数 $f(u, v)$ 可微, $z = z(x, y)$ 由方程 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$ 确定, 则 $dz|_{(0,1)} =$ $-dx + 2dy$



103、设 $f(x)$ 为连续函数，且 $x^2 + y^2 + z^2 = \int_x^y f(x+y-t)dt$ 确定的二元函数 $z = z(x, y)$ ，则 $z\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}[f(y) - f(x)] - (x + y)$

104、三元函数 $f(x, y) = x^2(2 + y^2) + y \ln y$ 的极小值为 $-\frac{1}{e}$

(ID: djky66)

105、设方程式 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z - 10 = 0$ 确定某隐函数 $z = z(x, y)$
 > 0 , 则 $z = z(x, y)$ 的极值点是 $(1, 1)$, 相应的极值是 大, 6

226、设二元函数 $f(x, y) = \frac{\sin(x^2 y + y^4)}{x^2 + y^2}$, 则 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) =$,

(A) 1. (B) 0. (C) $+\infty$. (D) 不存在, 也不为 ∞ . **答案: B**

227、设 k 为常数，则极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2 \sin ky}{x^2 + y^4} =$ ， 答案： A

- (A) 等于 0. (B) 等于 $\frac{1}{2}$.
(C) 不存在 . (D) 存在与否与 k 有关.

228、极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^4 + y^2} =$,

答案：A

(A) 不存在. (B) 等于 2. (C) 等于 $\frac{1}{2}$. (D) 等于 0.

229、

极限

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \ln(x^2 + y^2) = ,$$

答案： C

(A) 不存在. (B) 等于 1. (C) 等于 0. (D) 等于 2.

230、 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处

答案：C

- (A) 连续、偏导数存在. (B) 连续、偏导数不存在.
(C) 不连续、偏导数存在. (D) 不连续、偏导数不存在.

231、 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处

答案：C

(A) 不连续.

(B) 连续但偏导数不存在.

(C) 连续且偏导数存在但不可微.

(D) 可微.

232、

$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处

答案： B

(A) 两个偏导数都不存在.

(B) 两个偏导数都存在但不可微.

(C) 偏导数连续.

(D) 可微但偏导数不连续.

233、

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处

答案: D

- (A) 不连续.
- (B) 连续, 但偏导数 $f'_x(0, 0)$ 和 $f'_y(0, 0)$ 不存在.
- (C) 连续且偏导数 $f'_x(0, 0)$ 和 $f'_y(0, 0)$ 都存在, 但不可微.
- (D) 全微分存在但一阶偏导函数 f'_x 和 f'_y 不连续.

234、

$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处

答案: D

- (A) 连续, 但偏导数 $f'_x(0, 0)$ 和 $f'_y(0, 0)$ 不存在.
- (B) 连续且偏导数 $f'_x(0, 0)$ 和 $f'_y(0, 0)$ 都存在, 但不可微.
- (C) 可微但 f'_x 和 f'_y 不连续.
- (D) 可微且 f'_x 和 f'_y 连续.

235、

设 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) + 2x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1$, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处

- (A) 不连续. (B) 连续但两个偏导数不存在. 答案: B
(C) 两个偏导数存在但不可微. (D) 可微.

236、

设 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 连续, $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - 1}{x^2 + y^2} = 2$, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处

(A) 不存在偏导数.

(B) 存在偏导数但不可微. **答案: D**

(C) 可微且 $\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} \neq 0, \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} \neq 0$. (D) 可微且 $\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = 0$.

237、函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点可微的充分条件是

(A) $\lim_{x \rightarrow 0} f'_x(x, 0) = f'_x(0, 0)$ 且 $\lim_{y \rightarrow 0} f'_x(0, y) = f'_y(0, 0)$.

(B) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} [f(x, y) - f(0, 0)] = 0$.

(C) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x}$ 和 $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y}$ 都存在.

(D) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f'_x(x, y) = f'_x(0, 0)$ 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f'_y(x, y) = f'_y(0, 0)$.

答案: D

238、函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续，那么下列命题正确的是

(A) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在，则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微。

答案：B

(B) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在，则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微。

(C) 若 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微，则 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在。

(D) 若 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微，则 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在。

239、二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续是函数 $z = f(x, y)$ 在该点处两个偏导数 $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ 都存在的 **答案：D**

- (A) 必要但非充分条件. (B) 充分但非必要条件.
(C) 充要条件. (D) 既非充分也非必要条件.

设函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处两个偏导数 $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ 都存在, 则

(A) $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

(B) $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ 存在.

(C) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0, y) = f(x_0, y_0).$

(D) $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微.

答案: C

241、函数 $f(x, y)$ 的两个偏导数在点 (x_0, y_0) 处连续是函数 $z = f(x, y)$ 在该点处可微的

答案：A

(A) 充分但非必要条件.

(B) 必要但非充分条件.

(C) 充分必要条件.

(D) 既不充分也不必要条件.

242、设 $f(x, y)$ 可微，且对任意 x, y 都有 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0$, 则

使不等式 $f(x_1, y_1) < f(x_2, y_2)$ 成立的一个充分条件是 **答案：D**

(A) $x_1 > x_2, y_1 < y_2$.

(B) $x_1 > x_2, y_1 > y_2$.

(C) $x_1 < x_2, y_1 < y_2$.

(D) $x_1 < x_2, y_1 > y_2$.

243、

设可微函数 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial x} > 1, \frac{\partial f}{\partial y} < -1, f(0, 0) = 0$, 则下列正确的是

(A) $f(1, 1) > 1$.

(B) $f(-1, 1) > -2$.

答案: D

(C) $f(-1, -1) < 1$.

(D) $f(1, -1) > 2$.

已知方程 $f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$ 确定了函数 $z = z(x, y)$, $f(u, v)$ 可微, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$

- (A) z . (B) $-z$. (C) y . (D) $-y$.

答案: A

245、已知 $\frac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$ 为某函数的全微分，则 a 等于

(A) 2.

(B) 1.

(C) 0.

(D) -1.

答案：A

246、已知 $df(x, y) = (2y^2 + 2xy + 3x^2)dx + (4xy + x^2)dy$, 则 $f(x, y) =$

(A) $2xy^2 + x^2y$.

(B) $2xy^2 + x^2y + x^3$ 答案: C

(C) $2xy^2 + x^2y + x^3 + C$.

(D) $3xy^2 + x^2y + x^3 + C$.

247、

设 $z = f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 连续, 且 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y)}{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}} = -2$, 则

答案: C

- (A) $f'_x(0, 0)$ 不存在. (B) $f'_x(0, 0)$ 存在但不为零.
- (C) $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点取极大值. (D) $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点取极小值.

248、下列命题正确的是

答案：D

- (A) 若 (x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 的极值点, 则 (x_0, y_0) 必为 $f(x, y)$ 的驻点.
- (B) 若 (x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 的驻点, 则 (x_0, y_0) 必为 $f(x, y)$ 的极值点.
- (C) 若 (x_0, y_0) 为有界闭区域 D 上连续的函数 $f(x, y)$ 在 D 内部唯一的极值点, 且 $f(x, y)$ 在该点取极大值, 则 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 取得它在 D 上的最大值.
- (D) 若 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得极小值, 则 $f(x, y)$ 在 $x = x_0$ 处取极小值, $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处取极小值.

设 $F(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $F(x_0, y_0) = 0, F'_x(x_0, y_0) = 0, F'_y(x_0, y_0) > 0$. 若一元函数 $y = y(x)$ 是由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的在点 (x_0, y_0) 附近的隐函数, 则 x_0 是函数 $y = y(x)$ 极小值点的一个充分条件是

(A) $F''_{xx}(x_0, y_0) > 0.$

(B) $F''_{xx}(x_0, y_0) < 0.$ **答案: B**

(C) $F''_{yy}(x_0, y_0) > 0.$

(D) $F''_{yy}(x_0, y_0) < 0.$

250、函数 $f(x, y) = kx^2 + y^3 - 3y$ 在点 $(0, 1)$ 处

- (A) 取极大值. (B) 取极小值.
(C) 不取得极值. (D) 是否取得极值与 k 的取值有关.

答案：D

251、函数 $f(x, y) = 1 + x + y$ 在区域 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上的最大值与最小值之积为

- (A) -1. (B) 1. (C) $1 + \sqrt{2}$. (D) $1 - \sqrt{2}$. 答案: A

函数 $f(x, y) = e^{-xy}$ 在区域 $D = \{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最大值是

- (A) e^2 . (B) e . (C) $e^{\frac{1}{3}}$. (D) $e^{\frac{1}{2}}$.

答案：C

设 $f(x, y) = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$, 区域 $D = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 4, -1 \leq y \leq 1\}$,

则下面结论正确的是

答案: B

- (A) 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极大值点且是 $f(x, y)$ 在区域 D 的最大值点.
- (B) 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极大值点但不是 $f(x, y)$ 在区域 D 的最大值点.
- (C) 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值点.
- (D) 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的驻点, 但不是极值点.

254、

已知函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 某邻域内连续, 且

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) + 4x^2 - y^2}{x^4 + x^2y^2 + y^4} = 1, \text{ 则}$$

答案: A

- (A) 点 $(0, 0)$ 不是 $f(x, y)$ 的极值点.
- (B) 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极大值点.
- (C) 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值点.
- (D) 所给条件不足以判断点 $(0, 0)$ 是否为 $f(x, y)$ 的极值点.

设有三个正数 x, y, z 满足 $x + y + z = 1$, 其中 $a > 0$ 为常数, 又 $xyz \leq b$, 则 b 的最小取值为

(A) $\frac{a^3}{21}$.

(B) $\frac{a^3}{18}$.

(C) $\frac{a^3}{9}$.

(D) $\frac{a^3}{27}$.

答案: D