

助力乡村学校音体美课堂行动”官方合作图书
/ 研客及全国各大考研培训学校指定用书

金榜时代TM
GLIST 明德·弘毅·品质 01

金榜时代考研数学系列

考研数学 复习全书·基础篇

(数学一、二、三通用)

2022

主编 ◎ 李永乐 王式安 武忠祥

编委 ◎ 王式安 刘喜波 李正元 李永乐 宋浩 武忠祥 胡金德 姜晓千 铁军 章纪民 蔡燧林

专为大二大三提前复习、在职考研和基础薄弱者编写

主编建议 | 本书与《660题》配套使用 ● 基础打不牢，越学越煎熬

配套视频 | 微信扫右侧二维码 获取本书完整知识点讲解视频 为你打通考研数学底层逻辑



中国农业出版社



金榜时代考研数学名师团队



线代王·李永乐 @清华李永乐考研数学辅导团队

微信公众号: 永乐讲线代
B站: 李永乐考研团队

- 原清华大学应用数学系教授
- 北京高教学会数学研究会副理事长
- 广受学生信赖的“线代王”
- 全国硕士研究生入学考试北京地区数学阅卷组组长
- 百万畅销书《线性代数辅导讲义》《考研数学复习全书》主编

李老师作为全国著名的考研数学线性代数辅导专家,对考研数学出题形式、考试重点了如指掌,解题思路极其灵活,辅导针对性极强,效果优良,成绩显著,受到广大学员的交口称赞。其主编的《线性代数辅导讲义》《数学复习全书》《数学基础过关660题》等已被历届考生公认为复习首选辅导书。



前命题组组长·王式安 @清华李永乐考研数学辅导团队 B站: 李永乐考研团队

- 原北京理工大学研究生院院长、应用数学系主任、教授
- 享受国务院特殊津贴的数学专家
- 美国哥伦比亚、南佛罗里达、纽约等大学的客座教授
- 1987-2001年间担任全国硕士研究生入学考试数学命题组组长
- 百万畅销书《概率论与数理统计辅导讲义》《考研数学复习全书》主编

王老师凭借多年参加考研数学命题工作的深厚经验,对考研数学的命题思路和命题方向了如指掌。其主编的《概率论与数理统计辅导讲义》《数学复习全书》《数学基础过关660题》等已被历届考生公认为复习首选辅导书。



考研数学阅卷人·宋浩 @宋浩老师 B站: 宋浩老师官方

- 山东大学数学学院本科研究生、中国科学院博士、副教授、考研数学阅卷人
- 英国Queen Mary University of London访问学者

宋老师上课风趣幽默、由浅入深,能把复杂抽象的数学讲的诙谐有趣,上传至B站的数学视频《线性代数》、《微积分》、《概率论与数理统计》、《高等数学》帮助了全国无数的大学生,总播放量近2000万次。



高数王者·姜晓千 @晓千老师 微信公众号: 晓千老师

- 中国人民大学金融数学博士
- 全国各大省市考研辅导机构全程主讲
- 新浪、搜狐、腾讯、网易、中国教育在线等各大门户网站特邀访谈嘉宾

姜老师对考研数学历年真题有着极其深入的研究,深受考研学子喜爱。



武忠祥 @清华李永乐考研数学辅导团队

- 原西安交通大学数学系教授、美国爱荷华大学(2019美国综合性大学TOP100)访问学者
- 百万畅销书《高等数学辅导讲义》《考研数学复习全书》主编
- 高教社《工科数学分析基础》《高等数学基础》等教材主编

2022考研数学基础摸底测评班 (VIP小班300人)

2次摸底测验 + 6次名师直播讲评 + 8次名师直播答疑
(纸质版正规考试试卷包邮寄送)

原价399元 图书专享价 **99元**

群号: 805830256

进QQ群领取优惠券



“助力乡村学校音体美课堂行动”官方合作图书

V研客及全国考研培训学校指定用书

金榜时代TM
GLIST 明德·弘毅·品质 01

金榜时代考研数学系列

考研数学 (数学一、二、三通用)

复习全书·基础篇

2022

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

主编 ◎ 李永乐 王式安 武忠祥

编委 ◎ 王式安 刘喜波 李正元 李永乐 宋浩 武忠祥 胡金德 姜晓千 铁军 章纪民 蔡燧林

(按姓氏笔画排序)

@考研路上刚刚启程的你

读书之法，在循序而渐进，熟读而精思

中国农业出版社

内容简介

本书是专门为准备参加硕士研究生入学考试提前复习的大二大三学生、在职考研人士及基础薄弱的考生编写。本书以初等数学水平为起点,阐述了考研数学要求的基本知识构架。希望本书能够帮助考生在短时间内厘清考研数学(包括高等数学、线性代数、概率论与数理统计)的基本知识点,掌握硕士研究生入学考试所必需的基本概念、基本理论和基本计算方法,让数学基础薄弱甚至零基础的考生能有一个较大的水平提升和质的突破,实现“基础过关”。

图书在版编目(CIP)数据

考研数学复习全书·基础篇/李永乐,王式安,武忠祥主编. —北京:中国农业出版社,2020.5
ISBN 978-7-109-26836-4

I. ①考… II. ①李… ②王… ③武… III. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2020)第 078470 号

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

书 名	考研数学复习全书·基础篇
主 编	李永乐 王式安 武忠祥
责任编辑	吕睿

出版发行 中国农业出版社有限公司
(北京市朝阳区麦子店街 18 号楼 邮政编码 100125)

网 址 <http://www.ccap.com.cn>

电 话 010-59195108

传 真 010-59194918

印 刷 三河市燕山印刷有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 18.5 字数 450 千字

版次印次 2020 年 6 月第 1 版 2020 年 6 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-109-26836-4

定 价 69.80 元

如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系调换。

版权所有 侵权必究

金榜考研数学系列图书 内容简介及使用说明

考研数学满分 150 分,数学在考研科目中的比重明显;同时又因数学学科本身的特点,考生的数学成绩历年来总是差别很大,因此有“得数学者得考研”之说。既然数学对考研成绩的意义如此重要,那么就有必要探讨一下影响数学成绩的主要因素。

本系列图书作者根据多年的命题经验和阅卷经验总结,发现考研数学命题的灵活性非常大,不仅仅表现在一个知识点与多个知识点的考查难度不同,更多的是表现在考查多个知识点的综合上,这些题目在表达上多一个字或多一句话,难度都会千差万别。正是这些综合型题目拉开了考试成绩的距离,而构成这些难点的主要因素,实际上是最基础的基本概念、定理和公式的综合。同时,从阅卷反映的问题来看,考生答错题目的主要原因也是对基本概念、定理和公式记忆和掌握得不够熟练所致。总结为一句话,那就是:要想数学拿高分,就必须熟练掌握、灵活运用基本概念、定理和公式。

基于此,李永乐、王式安、武忠祥考研数学辅导团队结合多年来考研辅导和研究的经验,精心编写了本系列图书,目的在于帮助考生有计划、有步骤地完成数学复习,从基本概念、定理和公式的记忆,到对其的熟练运用,循序渐进。以下介绍本系列图书的主要特点和使用说明,供同学们复习参考。

书名	本书特点	本书使用说明
《数学复习全书·基础篇》	内容基础·提炼精准·易学易懂	
	本书根据大纲的考试范围将考研所需复习内容提炼出来,形成考研数学的基础内容和复习逻辑,实现大学数学同考研数学之间的顺利过渡,开启考研复习第一篇章。	同学们复习过本校大学教材后,使用本书。如果大学没学过数学或者本校课本是自编教材,与考研大纲差别较大,也可使用本书替代大学教材。
《数学基础过关 660 题》	题目经典·体系完备·逻辑清晰	
	本书主编团队出版近 20 年的经典之作,一直被模仿,从未被超越。年销量达百万余册,是当之无愧的考研数学头号畅销书,拥有无数甘当“自来水”的粉丝读者,口碑爆棚,考研数学不可不入!“660”也早已成为考研数学的年度关键词。 本书重基础,重概念,重理论,一旦你拥有了《数学复习全书》《数学基础过关 660 题》教你的思维方式、知识逻辑、做题方法,你就能基础稳固、思维灵活,对知识、定理、公式的理解提升到新的高度,避免陷入复习中后期“基础不牢,地动山摇”的窘境。	与《数学复习全书·基础篇》搭配使用。在完成基础知识的学习后,有针对性地做一些练习。熟练掌握定理、公式和解题技巧,加强知识点的前后联系,体系化,系统化,分清重难点,让复习周期尽量缩短。 虽说书中都是选择题和填空题,同学们不要轻视,也不要一开始就盲目做题。看到一道题,要能分辨出是哪个知识点,考什么,然后做题过程中看看自己是否掌握了,应用的定理、公式的条件是否熟悉,这样才算真正做一道题。
《数学历年真题全精解析·基础篇》	分类详解·注重基础·突出重点	
	本书精选精析 1987—2005 年真题,帮助考生提前了解大学水平考试与考研选拔考试的差别,不会盲目自信,也不会妄自菲薄,真正跨入考研的门槛。	与《数学复习全书·基础篇》《数学基础过关 660 题》搭配使用。复习完一章,做相应的章节真题。不会做的题目做好笔记,二轮复习继续练习。

书名	本书特点	本书使用说明
《数学复习全书》	系统全面·深入细致·结构科学	
	本书为作者团队扛鼎之作,常年稳居各大平台考研图书畅销榜前列,主编之一的李永乐老师更是获得“2019 当当 20 周年白金作家”奖,考研界仅两位作者获此称号。 本书从基本理论、基础知识、基本方法出发,全面、深入、细致地讲解考研数学大纲要求的所有考点,它不要花拳绣腿的不实用技巧,也不提倡误人子弟的费时背书法,而是扎扎实实地带你深入每一个考点背后,找到它们之间的关联、逻辑,让你从大学知识点零碎、概念不清楚、期末考试过后即忘的“低级”水平,提升到考研必需的高度。	利用《数学复习全书·基础篇》把基本知识“捡”起来之后,再使用本书。本书有知识点的详细讲解和相应练习题,有利于考生建立考研知识体系和框架,打好基础。 此前《数学基础过关 660 题》中若遇到不会做的题,可以放到这里来做。以章或节为单位,学习新内容前要复习前面的内容,按照一定的规律来复习。基础薄弱或中等偏下的考生,务必要利用考研当年上半年的时间,整体地吃透书中的理论知识,摸清例题设置的原理和必要性,特别是对大纲中要求的基本概念、理论、方法要系统理解和掌握。
《数学历年真题全精解析》	真题真练·总结规律·提升技巧	
	本书完整收录 2006—2020 年考研数学的全部试题,将真题按考点分类,还精选了其他卷别的试题作为练习题。力争做到考点全覆盖,题型多样,重点突出,不简单重复。书中的每道题给出的参考答案有常用、典型的方法,也有技巧性强的特殊解法。分析过程逻辑严谨、思路清晰,具有很强的可操作性,通过学习同学们可以独立完成同类题的解答。	边做题、边总结,遇到“卡壳”的知识点、题目,回到《数学复习全书》和之前听过的基础课、强化课中去补,争取把每个真题知识点吃透、搞懂,不留死角。 通过做真题,进一步提高解题能力和技巧,达到实际考试的要求。第一阶段,浏览每年真题,熟悉题型和常考点。第二阶段,进行专项复习。
《高等数学辅导讲义》 《线性代数辅导讲义》 《概率论与数理统计辅导讲义》	经典讲义·专项突破·强化提高	
	三本讲义分别是由作者的教学讲稿改编而成,系统阐述了考研数学的基础知识。书中例题都经过严格筛选、归纳。多年经验的总结,对同学们的重点、难点的把握更准确、更有针对性。认真研读,做到举一反三。	哪科较薄弱,精研哪本。搭配《数学强化通关 330 题》一起使用,先复习讲义上的知识点,做章节例题、练习,再去听相关章节的强化课,做《数学强化通关 330 题》相关习题,更有利于知识的巩固和提高。
《数学强化通关 330 题》	综合训练·突破重点·强化提高	
	强化阶段的练习题,综合训练必备。具有典型性、针对性、技巧性、综合性等特点,可以帮助考生突破重点、难点,熟悉解题思路和方法,增强应试能力。	与《数学基础过关 660 题》互为补充,包含选择题、填空题和解答题。搭配《高等数学辅导讲义》《线性代数辅导讲义》《概率论与数理统计辅导讲义》使用,效果更佳。
《数学决胜冲刺 6 套卷》	冲刺模拟·有的放矢·高效提分	
	通过整套题的训练,对所学知识进行系统地总结和梳理。不同于重点题型的练习,需要全面的知识,要综合应用。必要时复习一下基本概念、公式、定理,准确记忆。	在精研真题之后,用模拟卷练习,找漏洞,保持手感。不要掐时间、估分,遇到不会的题目,回归基础,翻看以前的学习笔记,把每道题吃透。
《数学临阵磨枪》	查漏补缺·问题清零·从容应战	
	本书是常用定理公式、基础知识的清单。最后阶段,大部分考生缺乏信心,感觉没复习完,本来会做的题目,因为紧张、压力,也容易忘记。本书就是帮助考生在考前查漏补缺,确保基础知识不丢分。	搭配《数学决胜冲刺 6 套卷》使用。上考场前,再回忆、翻看本书。

前言 Preface

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

《考研数学复习全书·基础篇》是专门为准备参加硕士研究生入学考试提前复习的大二大三学生、在职考研人士及基础薄弱的考生编写。本书以初等数学水平为起点,阐述了考研数学要求的基本知识构架。希望本书能够帮助考生在短时间内厘清考研数学(包括高等数学、线性代数、概率论与数理统计)的基本知识点,掌握硕士研究生入学考试所必需的基本概念、基本理论和基本计算方法,让数学基础薄弱甚至零基础的考生能有一个较大的水平提升和质的能力突破,实现“基础过关”。

一、突出实用知识

从作者团队多年的考研辅导经验来看,许多考生在开始复习时存在着对基本知识点有所遗忘和没完全掌握的现象,所以本书首要目的就是回顾基础知识,使考生能够更好地完成过渡阶段的学习。另外,本书在每章的开头列出了考试大纲的内容要点,方便考生掌握考点,做到心中有数。

二、结构层次分明

作者团队依据多年的编写经验,整合考试内容,以期给考生呈现简明扼要的知识点、独到的要点和归纳方法,便于考生高效复习,形成完整的知识体系,为以后提高解题能力和数学思维水平奠定基础。

三、概念深入理解

本书的最终目的是提升考生的数学考试能力。只有深入理解基本概念,牢牢记住基本定理和公式,才能找到解题的切入点和突破口。对于重点、难点知识,书中都有相应的例题,包括过去的考题和作者精心编制的习题,以帮助考生掌握基本的题型和计算方法,真正掌握所学内容。

对于参加数学一、二、三的考生来讲,考试大纲要求的内容有些是不同的,但基础核心内容是一致的,在前期的基础复习阶段应该把握住基础核心内容,这样在下一阶段的复习中会轻松很多。本书对于不是数学一、二、三都要求的内容,在书中均有标注说明,引导考生后期复习,在此不过多讲解,减轻其前期复习的负担。

另外,为了更好地帮助同学们进行复习,“李永乐考研数学辅导团队”特在新浪微博上开设答疑专区,同学们在复习考研数学时,如若遇到任何问题,即可在线留言,辅导团队老师将尽心为您解答。

⑥
新浪微博: 清华李永乐考研数学辅导团队



希望本书能对同学们的复习备考带来较大的帮助。对书中的不足和疏漏之处,恳请读者批评指正。

祝同学们复习顺利,心想事成,考研成功!

编者

目录 Contents

第一篇 高等数学

第一章 函数 极限 连续 (3)

第一节 函数 (3)

一、函数的概念及常见函数 (3)

二、函数的性质 (6)

第二节 极限 (8)

一、极限的概念 (8)

二、极限的性质 (10)

三、极限的存在准则 (11)

四、无穷小量 (12)

五、无穷大量 (13)

第三节 函数的连续性 (27)

一、连续性的概念 (27)

二、间断点及其分类 (28)

三、连续性的运算与性质 (29)

四、闭区间上连续函数的性质 (29)

第二章 导数与微分 (31)

一、导数与微分的概念 (31)

二、导数公式及求导法则 (34)

三、高阶导数 (36)

第三章 微分中值定理及导数应用

..... (39)

一、微分中值定理 (39)

二、导数应用 (40)

第四章 不定积分 (48)

一、不定积分的概念与性质 (48)

二、不定积分基本公式 (49)

三、三种主要积分法 (50)

四、三类常见可积函数积分 (54)

第五章 定积分与反常积分 (59)

第一节 定积分 (59)

一、定积分的概念 (59)

二、定积分的性质 (60)

三、积分上限的函数 (60)

四、定积分的计算 (61)

第二节 反常积分 (65)

一、无穷区间上的反常积分 (65)

二、无界函数的反常积分 (66)

第六章 定积分的应用 (68)

一、几何应用 (68)

二、物理应用(数学三不要求) (69)

第七章 微分方程 (72)

一、常微分方程的基本概念 (72)

二、一阶微分方程 (73)

三、可降阶的高阶方程(数学三不要求) (74)

四、高阶线性微分方程 (75)

第八章 多元函数微分学 (82)

第一节 多元函数的基本概念 (82)

一、多元函数的极限 (82)

二、多元函数的连续性 (83)

三、偏导数 (83)

四、全微分 (84)

第二节 多元函数的微分法 (86)

一、复合函数微分法 (86)

二、隐函数微分法 (86)

第三节 多元函数的极值与最值 ... (92)

一、无约束极值 (92)

二、条件极值及拉格朗日乘数法 (92)

三、最大最小值 (93)

第九章 二重积分 (96)

一、二重积分的概念及性质 (96)

二、二重积分的计算 (97)

第十章 无穷级数 (101)

第一节 常数项级数 (101)

一、级数的概念与性质 (101)

二、级数的审敛准则 (103)

第二节 幂级数 (105)

一、幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域 (105)

二、幂级数的性质 (106)

三、函数的幂级数展开 (106)

第三节 傅里叶级数 (111)

一、傅里叶系数与傅里叶级数 ... (111)

二、收敛定理(狄利克雷) (111)

三、周期为 2π 的函数的展开 (112)

四、周期为 $2l$ 的函数的展开 (112)

第十一章 向量代数与空间解析几何 及多元微分学在几何上的应用 (115)

第一节 向量代数 (115)

第二节 空间平面与直线 (116)

第三节 曲面与空间曲线 (118)

第四节 多元微分学在几何上的应用 (120)

第十二章 多元积分学及其应用 (122)

第一节 三重积分 (122)

三重积分 (122)

第二节 曲线积分 (124)

一、对弧长的线积分(第一类线积分) (124)

二、对坐标的线积分(第二类线积分) (125)

第三节 曲面积分 (129)

一、对面积的面积分(第一类面积分) (129)

二、对坐标的面积分(第二类面积分) (130)

第四节 多元积分应用	(133)	第五节 场论初步	(135)
------------------	-------	----------------	-------

第二篇 线性代数

第一章 行列式

一、行列式的概念	(139)
二、行列式的性质	(140)
三、行列式按行(或列)展开公式	(143)
四、克拉默法则	(149)

第二章 矩阵

一、矩阵的概念及运算	(151)
二、伴随矩阵、可逆矩阵	(156)
三、初等变换、初等矩阵	(159)
四、分块矩阵	(162)
五、方阵的行列式	(165)

第三章 向量

一、向量的概念、向量组的概念	(166)
二、线性表出、线性相关	(166)

三、向量组的秩、矩阵的秩	(173)
--------------------	-------

四、正交规范化、正交矩阵	(176)
--------------------	-------

第四章 线性方程组

一、基本概念	(178)
二、齐次线性方程组	(179)
三、非齐次线性方程组	(182)
四、公共解、同解	(186)
五、方程组的应用	(186)

第五章 特征值和特征向量

一、特征值、特征向量	(189)
二、相似矩阵	(193)
三、实对称矩阵	(196)

第六章 二次型

一、二次型及其标准形	(198)
二、正定二次型	(204)

第三篇 概率论与数理统计

第一章 随机事件和概率

第一节 随机事件、事件间的关系与运算	(211)
一、随机试验	(211)

二、随机事件	(211)
--------------	-------

三、事件的关系与运算	(212)
------------------	-------

第二节 概率及概率公式

一、概率公理	(214)
二、事件的独立性	(215)

三、五大概率公式	(216)	第一节 随机变量的数学期望和方差	(246)
第三节 古典概型与伯努利概型	(218)	第二节 矩、协方差和相关系数 ...	(250)
第二章 随机变量及其概率分布	(221)	第五章 大数定律和中心极限定理	(257)
第一节 随机变量及其分布函数	(221)	第六章 数理统计的基本概念	(261)
第二节 常用分布	(225)	第一节 总体、样本、统计量和样本数字特征	(261)
第三节 随机变量函数的分布	(228)	第二节 常用统计抽样分布	(264)
第三章 多维随机变量及其分布	(230)	一、 χ^2 分布	(264)
第一节 二维随机变量及其分布	(230)	二、 t 分布	(265)
一、二维随机变量	(230)	三、 F 分布	(265)
二、二维离散型随机变量	(231)	四、正态总体的抽样分布	(266)
三、二维连续型随机变量	(233)	第七章 参数估计	(270)
第二节 随机变量的独立性	(235)	第一节 点估计	(270)
第三节 二维均匀分布和二维正态分布	(237)	第二节 估计量的求法和区间估计	(273)
第四节 两个随机变量函数 $Z=g(X,Y)$ 的分布	(241)	一、矩估计法	(273)
一、 X,Y 均为离散型随机变量	(241)	二、最大似然估计法	(273)
二、 X,Y 均为连续型随机变量	(241)	三、区间估计	(276)
三、 X 为离散型随机变量, Y 为连续型随机变量	(242)	第八章 假设检验*	(279)
第四章 随机变量的数字特征	(246)	一、假设检验	(279)
		二、显著性检验	(280)
		三、正态总体参数的假设检验 ...	(280)

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)

第一篇



微信公众号:【顶尖考研】
高等数学
(ID: djky66)



高等数学隐藏任务

背景介绍

高等数学的“高等”是相对于初等数学来讲的,通常认为,高等数学是以微积分学为主要内容的一门基础学科。这也是研究生考试中数学三的科目名称叫微积分的重要原因。不同专业对数学素养和能力的要求其实是不同的,所以考研数学分为数学一、数学二、数学三三个不同考查维度的试卷。

由于数学一、二、三对于高等数学的要求不同,本篇综合了数学一、二、三全部的考试内容,将内容细分为十二章。数学一、二、三要求掌握的章节如下:

数学一	全部十二章
数学二	第一章至第九章
数学三	第一章至第十章

当然,还有个别知识点的要求在书中另有说明。

任务规则

书中有些例题没有给出解析,请同学们在复习时自己先试着做一下,题目都不太难。只有动手做了才能掌握。需要参考解析时可以扫下面的二维码获取电子版。

由于时间紧,难免会出现错漏,欢迎大家批评指正。同时我们也会整理出勘误表,以电子版形式发布。



第一章 函数 极限 连续

。 本章考点 。

函数的概念及表示法 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性 复合函数、反函数、分段函数和隐函数 基本初等函数的性质及其图形 初等函数 函数关系的建立 数列极限与函数极限的定义及其性质 函数的左极限和右极限 无穷小量和无穷大量的概念及其关系 无穷小量的性质及无穷小量的比较 极限的四则运算 极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则并会利用它们求极限

两个重要极限：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

函数连续的概念 函数间断点的类型 初等函数的连续性 闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理）

第一节 函数

。 考试内容概要 。

一、函数的概念及常见函数

1. 函数概念

定义 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x \in D$, 变量 x 按照一定的法则总有一个确定的数值 y 和它对应, 则称 y 是 x 的函数, 记为

$$y = f(x), x \in D$$

其中 x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为函数的定义域, 记作 D_f , 即 $D_f = D$.

函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域, 记作 R_f 或 $f(D)$, 即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

【注】 函数有两个基本要素: 定义域、对应规则 (或称依赖关系). 当两个函数的定义域与对应规则完全相同时, 它们就是同一函数.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

【例 1】 函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

称为符号函数.

【例 2】 设 x 为任意实数, 不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分, 记为 $[x]$. 函数 $y = [x]$ 称为取整函数.

【注】 取整函数的基本不等式: $x-1 < [x] \leq x$.

2. 复合函数

定义 设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f , 函数 $u = g(x)$ 的定义域为 D_g , 值域为 R_g , 若 $D_f \cap R_g \neq \emptyset$, 则称函数 $y = f[g(x)]$ 为函数 $y = f(u)$ 与 $u = g(x)$ 的复合函数. 它的定义域为 $\{x | x \in D_g, g(x) \in D_f\}$.

【注】 不是任何两个函数都可以复合, 如 $y = f(u) = \ln u, u = g(x) = \sin x - 1$, 就不能复合, 这是由于 $D_f = (0, +\infty), R_g = [-2, 0], D_f \cap R_g = \emptyset$.

3. 反函数

定义 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 R_y . 若对任意 $y \in R_y$, 有唯一确定的 $x \in D$, 使得 $y = f(x)$, 则记为 $x = f^{-1}(y)$, 称其为函数 $y = f(x)$ 的反函数.

【注】 (1) 不是每个函数都有反函数. 如 $y = x^3$ 有反函数, 而 $y = x^2$ 没有反函数.

(2) 单调函数一定有反函数, 但反之则不然, 如 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 3-x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ 有反函数, 但不单调.

(3) 有时也将 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 写成 $y = f^{-1}(x)$. 在同一直角坐标系中, $y = f(x)$ 和 $x = f^{-1}(y)$ 的图形重合, $y = f(x)$ 和 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

(4) $f^{-1}[f(x)] = x, f[f^{-1}(x)] = x$.

【例 3】 求函数 $y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 的反函数.

【解】 由 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 知

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$

解得 $e^x = y \pm \sqrt{1+y^2}$.

由于 $e^x > 0$, 则

$$\begin{aligned} e^x &= y + \sqrt{1+y^2} \\ x &= \ln(y + \sqrt{1+y^2}) \end{aligned}$$

则函数 $y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 的反函数为 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

4. 初等函数

定义 将幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数统称为基本初等函数.

幂函数 $y = x^\mu$ (μ 为实数)

(1) 幂函数 $y = x^\mu$ 的定义域和值域取决于 μ 的取值, 当 $x > 0$ 时, $y = x^\mu$ 都有定义.

(2) 常见幂函数: $y = x, y = x^2, y = x^3, y = \sqrt{x}, y = \sqrt[3]{x}, y = \frac{1}{x}$.

指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)

(1) 定义域: $(-\infty, +\infty)$, 值域: $(0, +\infty)$.

(2) 单调性: 当 $a > 1$ 时, $y = a^x$ 单调增; 当 $0 < a < 1$ 时, $y = a^x$ 单调减.

(3) 常见指数函数: $y = e^x$, 单调增, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)

(1) 定义域: $(0, +\infty)$, 值域: $(-\infty, +\infty)$.

(2) 单调性: 当 $a > 1$ 时, $y = \log_a x$ 单调增; 当 $0 < a < 1$ 时, $y = \log_a x$ 单调减.

(3) 常见对数函数: $y = \ln x$, 单调增, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.

三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$

(1) 正弦函数 $\sin x$ 与余弦函数 $\cos x$

① 定义域: $(-\infty, +\infty)$, 值域: $[-1, 1]$.

② 奇偶性: $\sin x$ 是奇函数, $\cos x$ 是偶函数.

③ 周期性: $\sin x$ 和 $\cos x$ 都以 2π 为周期.

④ 有界性: $|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$.

(2) 正切函数 $\tan x$ 与余切函数 $\cot x$

① 定义域:

$\tan x$ 的定义域为 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 的一切实数 x ;

$\cot x$ 的定义域为 $x \neq k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 的一切实数 x .

② 奇偶性: $\tan x$ 和 $\cot x$ 都是奇函数.

③ 周期性: $\tan x$ 和 $\cot x$ 都以 π 为周期.

反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x$

(1) 反正弦函数 $\arcsin x$ 与反余弦函数 $\arccos x$

① 定义域: $[-1, 1]$. 值域: $\arcsin x$ 的值域为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \arccos x$ 的值域为 $[0, \pi]$.

② 单调性: $\arcsin x$ 单调增, $\arccos x$ 单调减.

③ 奇偶性: $\arcsin x$ 是奇函数.

④ 有界性: $|\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}, |\arccos x| \leq \pi$.

(2) 反正切函数 $\arctan x$

① 定义域: $(-\infty, +\infty)$, 值域: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

② 单调性: $\arctan x$ 单调增.

③ 奇偶性: $\arctan x$ 是奇函数.

④ 有界性: $|\arctan x| < \frac{\pi}{2}$.

定义 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合所构成并可由一个式子表示的函数, 称为初等函数.

二、函数的性质

1. 单调性

定义 设函数 $y = f(x)$ 在某区间 I 上有定义, 如果对于区间 I 上的任意两点 $x_1 < x_2$ 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$), 则称 $y = f(x)$ 在该区间内单调增加 (或单调减少).

【注】 函数的单调性主要是利用单调性的定义和一阶导数的正负进行判定.

2. 奇偶性

定义 设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称 (即若 $x \in D$, 则 $-x \in D$), 对于任一 $x \in D$, 如果恒有

$$f(-x) = f(x)$$

则称 $f(x)$ 为 D 上的偶函数; 如果恒有

$$f(-x) = -f(x)$$

则称 $f(x)$ 为 D 上的奇函数.

【注】 (1) $\sin x, \tan x, \arcsin x, \arctan x, \ln \frac{1-x}{1+x}, \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \frac{e^x - 1}{e^x + 1}, f(x) - f(-x)$ 都是奇函数; $x^2, |x|, \cos x, f(x) + f(-x)$ 都是偶函数.

(2) 奇函数 $y = f(x)$ 的图形关于原点对称, 且若 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处有定义, 则 $f(0) = 0$; 偶函数的图形关于 y 轴对称.

(3) 两个奇 (偶) 函数之和仍为奇 (偶) 函数, 两个奇 (偶) 函数之积必为偶函数, 奇函数与偶函数之积必为奇函数.

【例 4】 证明 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 是奇函数.

【证】 显然 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 的定义域关于原点对称.

$$\begin{aligned} \text{由于} \quad f(-x) &= \ln(-x + \sqrt{1+x^2}) = \ln \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \quad (\text{有理化}) \\ &= -\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = -f(x) \end{aligned}$$

则 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 是奇函数.

3. 周期性

定义 若存在实数 $T > 0$, 对于任意 x , 恒有 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $y = f(x)$ 为周期函数. 使得上述关系式成立的最小正数 T 称为 $f(x)$ 的最小正周期, 简称为函数 $f(x)$ 的周期.

【注】 (1) $\sin x$ 和 $\cos x$ 以 2π 为周期, $\sin 2x, |\sin x|, \tan x, \cot x$ 以 π 为周期.

(2) 若 $f(x)$ 以 T 为周期, 则 $f(ax+b)$ 以 $\frac{T}{|a|}$ 为周期.

4. 有界性

定义 设 $y = f(x)$ 在集合 X 上有定义. 若存在 $M > 0$, 使得对任意的 $x \in X$, 恒有

$$|f(x)| \leq M$$

则称 $f(x)$ 在 X 上为有界函数. 否则称 $f(x)$ 在 X 上为无界函数. 即:

如果对任意的 $M > 0$, 至少存在一个 $x_0 \in X$, 使得 $|f(x_0)| > M$, 则 $f(x)$ 为 X 上的无界函数.

【注】 (1) 如果没有指明 x 的范围, 而说“ $f(x)$ 为有界函数”, 是指 $f(x)$ 在其定义域上

为有界函数.

(2) 常见的有界函数:

$$|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1, |\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}, |\arctan x| < \frac{\pi}{2}, |\arccos x| \leq \pi$$

【例 5】 证明函数 $f(x) = x \sin x$ 是无界函数.

【证】 由于 $f\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, 所以, 对于任意的 $M > 0$, 只要正整数 n 充分大, 总有

$$\left|f\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right| = 2n\pi + \frac{\pi}{2} > M$$

故函数 $f(x) = x \sin x$ 是无界函数.

。 常考题型与典型例题 。

常考题型

1. 函数有界性、单调性、周期性及奇偶性的判定
2. 复合函数

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

一、函数有界性、单调性、周期性及奇偶性的判定

【例 6】 (1990, 数四)^① 设函数 $f(x) = x \cdot \tan x \cdot e^{\sin x}$, 则 $f(x)$ 是

- (A) 偶函数. (B) 无界函数. (C) 周期函数. (D) 单调函数.

【解】 选(B).

二、复合函数

【例 7】 (2001, 数二) 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$, 则 $f[f(x)]$ 等于

- (A) 0. (B) 1. (C) $\begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 0, & |x| \leq 1 \\ 1, & |x| > 1 \end{cases}$

【解】 当 $|x| \leq 1$ 时, $f(x) = 1$, $|1| \leq 1$, 则 $f[f(x)] = 1$;

当 $|x| > 1$ 时, $f(x) = 0$, $|0| \leq 1$, 则 $f[f(x)] = 1$.

则 $f[f(x)] = 1$, 故应选(B).

【例 8】 (1988, 数一、二) 已知 $f(x) = \sin x$, $f[\varphi(x)] = 1 - x^2$, 则 $\varphi(x) =$ _____ 的定义域为 _____.

【解】 由 $f(x) = \sin x$, $f[\varphi(x)] = 1 - x^2$, 知

$$\sin \varphi(x) = 1 - x^2$$

$$\varphi(x) = \arcsin(1 - x^2)$$

这里 $|1 - x^2| \leq 1$, 由此解得 $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

① 指 1990 年数学四试卷的考题. 后同.

第二节 极限

。 考试内容概要 。

一、极限的概念

1. 数列的极限

定义 如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 总存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 恒有

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

成立, 则称常数 a 为数列 $\{x_n\}$ 当 n 趋于无穷时的极限, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

【注】 (1) ε 是用来刻画 x_n 与 a 的接近程度, N 是用来刻画 $n \rightarrow \infty$ 这个极限过程.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的几何意义是: 对于 a 点的任何 ε 邻域即开区间 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, 一定存在 N , 当 $n > N$ 即第 N 项以后的点 x_n 都落在开区间 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 内, 而只有有限个(最多有 N 个)在这区间之外.

(3) 数列 $\{x_n\}$ 的极限是否存在, 如果存在极限值等于多少与数列的前有限项无关.

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = a$.

【例 1】 (2006, 数三) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【解 1】 当 n 为奇数时, $x_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-1}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-1} = 1$$

当 n 为偶数时, $x_n = \frac{n+1}{n}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n} = 1$.

【解 2】 由于 $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-1} \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n} \leq \frac{n+1}{n}$

由夹逼准则知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n} = 1$.

【例 2】 试证明:

(1) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$, 但反之不成立;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 的充分必要条件是 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$.

【证】 (1) 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 及数列极限定义知,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{当 } n > N \text{ 时, } |x_n - a| < \varepsilon$$

又 $||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|$, 则

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, $||x_n| - |a|| < \varepsilon$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$.

反之不成立, 例如 $x_n = (-1)^n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 1 = |1|$, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ 不存在.

(2) 由(1)可知, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |0| = 0$. 所以, 以下只要证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$ 可知,

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, $||x_n| - 0| < \varepsilon$

即 $|x_n - 0| < \varepsilon$. 故原命题得证.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

2. 函数的极限

自变量趋于无穷大时函数的极限

定义 若对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 总存在 $X > 0$, 当 $x > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

定义 若对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 总存在 $X > 0$, 当 $x < -X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow -\infty$ 时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

定义 若对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 总存在 $X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

【注】这里的 $x \rightarrow \infty$ 是指 $|x| \rightarrow +\infty$; 而数列极限中的 $n \rightarrow \infty$ 是指 $n \rightarrow +\infty$.

定理 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在的充要条件是极限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在并且相等.

【例 3】极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$

(A) 等于 1.

(B) 等于 -1.

(C) 为 ∞ .

(D) 不存在.

【解】选(D).

自变量趋于有限值时函数的极限

定义 若对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

【注】(1) ε 是用来刻画 $f(x)$ 与 A 的接近程度, δ 是用来刻画 $x \rightarrow x_0$ 这个极限过程.

(2) 几何意义: 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 总存在 $\dot{U}(x_0, \delta)$, 当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 夹在两直线 $y = A - \varepsilon$ 和 $y = A + \varepsilon$ 之间.

(3) 这里 $x \rightarrow x_0$, 但 $x \neq x_0$. 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 是否存在, 如果存在极限值等于多少与 $f(x)$

在 $x = x_0$ 处有没有定义, 如果有定义函数值等于多少无关, 只与 $x = x_0$ 的去心邻域 $\dot{U}(x_0, \delta)$

函数值有关. 而要使 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, $f(x)$ 必须在 $x = x_0$ 的某去心邻域 $\dot{U}(x_0, \delta)$ 处处有定义.

定义 若对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的左极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A, \text{ 或 } f(x_0^-) = A, \text{ 或 } f(x_0 - 0) = A$$

定义 若对任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的右极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A, \text{ 或 } f(x_0^+) = A, \text{ 或 } f(x_0 + 0) = A$$

定理 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的充要条件是左极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 及右极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 存在并且相等.

【注】 需要分左、右极限求极限的问题常见有以下三种:

(1) 分段函数在分界点处的极限, 而在该分界点两侧函数表达式不同 (这里也包括带有绝对值的函数, 如 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$);

(2) e^∞ 型极限 (如 $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x$, $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x}$);

$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$ 不存在;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x$ 不存在.

【注】 $e^\infty \neq \infty$, $e^{+\infty} = +\infty$, $e^{-\infty} = 0$.

(3) $\arctan \infty$ 型极限 (如 $\lim_{x \rightarrow 0} \arctan \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$)

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \arctan \frac{1}{x}$ 不存在;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$ 不存在.

【注】 $\arctan \infty \neq \frac{\pi}{2}$, $\arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$, $\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$.

【例 4】 (1992, 数一、二、三) 当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $\frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限

(A) 等于 2.

(B) 等于 0.

(C) 为 ∞ .

(D) 不存在但不为 ∞ .

【解】 本题中出现 e^∞ , 所以要分左、右极限

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{1} e^{\frac{1}{x-1}} = 2 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{1} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$$

所以, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 不存在, 但不是 ∞ , 应选 (D).

二、极限的性质

1. 有界性

(数列) 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

【注】 反之不成立, 反例为 $x_n = (-1)^n$. 显然, 该数列有界但不收敛, 由此可得有界是数列收敛的必要条件而非充分条件, 无界数列一定发散, 但发散数列不一定无界.

(函数) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 x_0 某去心邻域有界 (即局部有界).

【注】 反之不成立, 反例为 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, 该函数在 $x=0$ 的去心邻域有界, 但它在 $x=$

0 处的极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在.

2. 保号性

(数列) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$.

(1) 如果 $A > 0$ (或 $A < 0$), 则存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, $x_n > 0$ (或 $x_n < 0$);

(2) 如果存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, $x_n \geq 0$ (或 $x_n \leq 0$), 则 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).

【注】注意结论(1)中是严格不等号($>$ 或 $<$); 而(2)中是非严格不等号($\geq$ 或 $\leq$).

(函数) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

(1) 如果 $A > 0$ (或 $A < 0$), 则存在 $\delta > 0$, 当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时, $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

(2) 如果存在 $\delta > 0$, 当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时, $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$), 那么 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).

【例 5】(1995, 数三) 设 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} = -1$, 则在点 $x = a$ 处

(A) $f(x)$ 的导数存在, 且 $f'(a) \neq 0$. (B) $f(x)$ 取得极大值.

(C) $f(x)$ 取得极小值. (D) $f(x)$ 的导数不存在.

【解 1】直接法 因为 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} = -1 < 0$, 由极限保号性知, 存在 $\delta > 0$, 当

$x \in \dot{U}(a, \delta)$ 时,

$$\frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2} < 0$$

又因为当 $x \in \dot{U}(a, \delta)$ 时, $(x - a)^2 > 0$, 则 $f(x) - f(a) < 0$, 即

$$f(x) < f(a)$$

由极值的定义得在点 $x = a$ 处 $f(x)$ 取得极大值.

【解 2】排除法 令 $f(x) = -(x - a)^2$, 显然 $f(x)$ 满足题设条件, 但在 $x = a$ 处 $f(x)$ 可导且 $f'(a) = 0$, 取极大值, 则选项(A)(C)(D) 都不正确, 故应选(B).

3. 极限值与无穷小之间的关系

$$\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$$

其中 $\lim \alpha(x) = 0$.

三、极限的存在准则

1. 夹逼准则

若存在 N , 当 $n > N$ 时, $x_n \leq y_n \leq z_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$.

2. 单调有界准则

单调有界数列必有极限. 即单调增(减)有上(下)界的数列必有极限.

【注】(1) 夹逼准则比较多的是用在 n 项和的数列极限, 而单调有界准则比较多的是用在递推关系 $x_{n+1} = f(x_n)$ 所定义的数列极限; (2) 函数极限也有对应的以上两条存在准则.

【例 6】 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \right)$.

【解】 由于

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n^2}{n^2+1}$$

又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$$

由夹逼原理知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \right) = 1$$

【例 7】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x} \right]$.

【解】 由于

$$\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x}$$

上式两端同乘以 x 得

$$1 - x < x \left[\frac{1}{x} \right] \leq 1$$

由夹逼原理知 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1$.

【例 8】 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}$.

【解 1】 由于 n 足够大时有

$$0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n} = \frac{2}{1} \times \frac{2 \times 2 \times \cdots \times 2}{2 \times 3 \times \cdots \times (n-1)} \times \frac{2}{n} < \frac{4}{n}$$

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} = 0$, 由夹逼原理知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$$

【解 2】 令 $x_n = \frac{2^n}{n!}$, 则 $x_{n+1} = x_n \cdot \frac{2}{n+1}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2}{n+1} \leq 1$$

则数列 $\{x_n\}$ 单调减. 又 $x_n = \frac{2^n}{n!} > 0$, 即 $\{x_n\}$ 下有界, 由单调有界准则知数列 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 等式

$$x_{n+1} = x_n \cdot \frac{2}{n+1}$$

两端取极限得

$$a = a \cdot 0$$

则 $a = 0$.

四、无穷小量

1. 无穷小量的概念

若函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的极限为零, 则称 $f(x)$ 为 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷小量.

2. 无穷小的比较

设 $\lim \alpha(x) = 0$, $\lim \beta(x) = 0$, 且 $\beta(x) \neq 0$.

(1) 高阶: 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 记为 $\alpha(x) = o(\beta(x))$;

(2) 低阶: 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$;

(3) 同阶: 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$;

(4) 等价: 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, 记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$;

(5) 无穷小的阶: 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = C \neq 0$, 则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小.

【例 9】(1989, 数四、五) 设 $f(x) = 2^x + 3^x - 2$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时

(A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小量. (B) $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小量.

(C) $f(x)$ 是比 x 较高阶的无穷小量. (D) $f(x)$ 是比 x 较低阶的无穷小量.

【解】 由于
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 3^x - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x} = \ln 2 + \ln 3 = \ln 6$$

而 $\ln 6 \neq 0$, 且 $\ln 6 \neq 1$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小量.

故应选(B).

3. 无穷小的性质

(1) 有限个无穷小的和仍是无穷小.

(2) 有限个无穷小的积仍是无穷小.

(3) 无穷小量与有界量的积仍是无穷小.

【注】 以上前两条中的有限二字不能少.

五、无穷大量

1. 无穷大量的概念

若函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时趋向于无穷, 则称 $f(x)$ 为 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷大量. 即: 若对任意给定的 $M > 0$, 总存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x)| > M$, 则称 $f(x)$ 为 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷大量.

2. 常用的一些无穷大量的比较

(1) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时

$$\ln^a x \ll x^\beta \ll a^x, \text{ 其中 } \alpha > 0, \beta > 0, a > 1$$

【注】 这些结论可以用洛必达法则证明.

(2) 当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$\ln^n n \ll n^\beta \ll a^n \ll n! \ll n^n, \text{ 其中 } \alpha > 0, \beta > 0, a > 1$$

- 【例 10】 (2010, 数三) 设 $f(x) = \ln^{10} x, g(x) = x, h(x) = e^{\frac{1}{10}}$, 则当 x 充分大时, 有
- (A) $g(x) < h(x) < f(x)$. (B) $h(x) < g(x) < f(x)$.
 (C) $f(x) < g(x) < h(x)$. (D) $g(x) < f(x) < h(x)$.

【解】 由于当 $x \rightarrow +\infty$ 时

$$\ln^a x \ll x^\beta \ll a^x, \text{ 其中 } \alpha > 0, \beta > 0, a > 1$$

则当 x 充分大时, 有 $\ln^{10} x \ll x \ll e^{\frac{1}{10}}$.

故应选(C).

3. 无穷大量的性质

- (1) 两个无穷大量的积仍为无穷大量.
 (2) 无穷大量与有界变量之和仍为无穷大量.

4. 无穷大量与无界变量的关系

我们以数列为例说明无穷大量与无界变量的关系. 首先回忆这两个概念:

- (1) 数列 $\{x_n\}$ 是无穷大量: $\forall M > 0, \exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n| > M$.
 (2) 数列 $\{x_n\}$ 是无界变量: $\forall M > 0, \exists N > 0$, 使 $|x_N| > M$.

由以上两个定义不难看出无穷大量必为无界变量, 而无界变量不一定是无穷大量.

【例 11】 数列 $x_n = \begin{cases} n, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ 是无界变量但不是无穷大量.

【解】 由于 $\forall M > 0$, 存在奇数 n , 使得 $x_n = n > M$, 则数列 $\{x_n\}$ 是无界变量.

又因为 $\forall M > 0$, 不论 N 多么大, 总存在偶数 n , 使 $n > N$, 但 $x_n = 0$, 恒有 $|x_n| < M$. 所以 $\{x_n\}$ 不是无穷大量.

【例 12】 (1991, 数五) 设数列的通项为 $x_n = \begin{cases} \frac{n^2 + \sqrt{n}}{n}, & \text{若 } n \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{n}, & \text{若 } n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, x_n 是

- (A) 无穷大量. (B) 无穷小量. (C) 有界变量. (D) 无界变量.

【解】 当 n 为奇数时, $x_n = \frac{n^2 + \sqrt{n}}{n} = n + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = +\infty$$

当 n 为偶数时, $x_n = \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

则 x_n 是无界变量但不是无穷大量, 故应选(D).

5. 无穷大量与无穷小量的关系

在同一极限过程中, 如果 $f(x)$ 是无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷小; 反之, 如果 $f(x)$ 是无穷小,

且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷大.

【例 13】 $f(x) \equiv 0$, 是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小量, 但 $\frac{1}{f(x)}$ 无意义, 所以不是无穷大量.

。 常考题型与典型例题 。

常考题型

1. 极限的概念、性质及存在准则
2. 求极限
3. 无穷小量阶的比较

一、极限的概念、性质及存在准则

【例 14】 (1999, 数二) “对任意给定的 $\epsilon \in (0, 1)$, 总存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq 2\epsilon$ ” 是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的

- (A) 充分条件但非必要条件. (B) 必要条件但非充分条件.
(C) 充分必要条件. (D) 既非必要也非充分条件.

【解】 由数列极限定义知, 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 则对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \epsilon$ 成立. 由于 $\epsilon < 2\epsilon$, 则必有 $|x_n - a| \leq 2\epsilon$.

如果对任意给定的 $\epsilon \in (0, 1)$, 总存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq 2\epsilon$. 由于 ϵ 的任意性, 则对于任意给定的 $\epsilon_1 > 0$, 取 $\epsilon = \frac{\epsilon_1}{3}$, 则当 $n \geq N$ 时, 恒有

$$|x_n - a| \leq 2\epsilon = \frac{2\epsilon_1}{3} < \epsilon_1$$

由数列极限定义知, 数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 故应选(C).

【例 15】 (2015, 数三) 设 $\{x_n\}$ 是数列, 下列命题中不正确的是

- (A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$.
(B) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.
(C) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$.
(D) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

【解】 (D) 选项的命题不正确, 例如 $x_{3n} = x_{3n+1} = 1$, 而 $x_{3n+2} = 0$. 显然 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = 1$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+2} = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不存在.

【例 16】 (1993, 数三) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 变量 $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 是

- (A) 无穷小. (B) 无穷大.
(C) 有界的, 但不是无穷小. (D) 无界的, 但不是无穷大.

【解】 对任意给定的 $M > 0$ 及 $\delta > 0$, 总存在

真题
 年份
 题号
 (ID: djky66)

$$x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, y_n = \frac{1}{2n\pi}$$

使得 $0 < x_n < \delta, 0 < y_n < \delta$, 此时

$$\frac{1}{x_n^2} \sin \frac{1}{x_n} = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2 > M, \frac{1}{y_n^2} \sin \frac{1}{y_n} = 0 < M$$

则当 $x \rightarrow 0$ 时, 变量 $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 是无界的, 但不是无穷大.

二、求极限

常用的求极限方法 (8 种)

方法 1 利用基本极限求极限

1. 常用的基本极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, (a > 0).$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}, & n = m \\ 0, & n < m \\ \infty, & n > m \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ \infty, & |x| > 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

不存在, $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{ax} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ +\infty, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

2. “ 1^∞ ”型极限常用结论

若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \beta(x) = \infty$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x)\beta(x) = A$, 则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [1 + \alpha(x)]^{\beta(x)} = e^A$$

可以归纳为以下三步:

(1) 写标准形式: 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} [1 + \alpha(x)]^{\beta(x)}$;

(2) 求极限: $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x)\beta(x) = A$;

(3) 写结果: 原式 $= e^A$.

【例 17】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n} \sin \frac{1}{n}$.

【解】 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} n \sin \frac{1}{n}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{e}.$$

【注】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = 1$ 是“经典错误”, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$.

【例 18】 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x =$

(A) 1. (B) e. (C) e^{a-b} . (D) e^{b-a} .

【解 1】 直接法 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-a} \right)^x \left(\frac{x}{x+b} \right)^x$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{x} \right)^{-x} \left(1 + \frac{b}{x} \right)^{-x}$
 $= e^a \cdot e^{-b} = e^{a-b}$

故应选(C).

【解 2】 排除法 取 $a = 0$, 则

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+b} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-b}{x+b} \right)^x = e^{-b}$$

则选项(A), (B), (D) 都不正确, 故应选(C).

【例 19】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3} \right)^n$, 其中 $a > 0, b > 0, c > 0$.

【解】 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c} - 3}{3} \right)^n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c} - 3}{3} \right)^n = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{a} - 1) + (\sqrt[n]{b} - 1) + (\sqrt[n]{c} - 1)}{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{3} (\ln a + \ln b + \ln c) = \ln \sqrt[3]{abc}$$

$$\text{原式} = e^{\ln \sqrt[3]{abc}} = \sqrt[3]{abc}.$$

微信公众号: 顶尖考研
 (ID: djky66)

方法 2 利用等价无穷小代换求极限

1. 代换原则

(1) 乘除关系可以换

$$\text{若 } \alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1, \text{ 则 } \lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta}.$$

(2) 加减关系在一定条件下可以换

$$\text{若 } \alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1, \text{ 且 } \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq 1, \text{ 则 } \alpha - \beta \sim \alpha_1 - \beta_1.$$

$$\text{若 } \alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1, \text{ 且 } \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq -1, \text{ 则 } \alpha + \beta \sim \alpha_1 + \beta_1.$$

2. 常用的等价无穷小 当 $x \rightarrow 0$ 时

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1;$$

$$(1+x)^a - 1 \sim ax, \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad a^x - 1 \sim x \ln a,$$

$$x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3, \quad \tan x - x \sim \frac{1}{3}x^3, \quad x - \ln(1+x) \sim \frac{1}{2}x^2,$$

$$\arcsin x - x \sim \frac{1}{6}x^3, \quad x - \arctan x \sim \frac{1}{3}x^3.$$

【例 20】 (2016, 数三) 已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1} = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ _____.

【解】 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1} = 2$ 及 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{3x}-1) = 0$ 知,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \sin 2x &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}f(x)\sin 2x}{3x} \quad (\text{等价无穷小代换}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}f(x) \cdot 2x}{3x} \quad (\text{等价无穷小代换}) \\ &= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2, \end{aligned}$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 6$.

【例 21】 (2015, 数一) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} =$ _____.

【解 1】 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{x^2}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \quad (\text{等价无穷小代换}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

【解 2】 洛必达.

【解 3】 拉格朗日中值定理.

【例 22】 (2009, 数三) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1} =$ _____.

【解 1】 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x}(e^{1-\cos x}-1)}{\frac{1}{3}x^2}$

$$\begin{aligned} &= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{\frac{1}{3}x^2} \quad (\text{等价无穷小代换}) \\ &= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{3}x^2} = \frac{3e}{2}. \end{aligned}$$

【解 2】 等价代换 + 拉格朗日中值定理.

【解 3】 等价代换 + 洛必达法则.

【例 23】 (2006, 数二) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2+\cos x}{3} \right)^x - 1 \right]$.

【解 1】 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} [e^{x \ln(\frac{2+\cos x}{3})} - 1]$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln \left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)}{x^3} \quad (\text{等价无穷小代换})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{\cos x - 1}{3} \right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \quad (\text{等价无穷小代换})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = -\frac{1}{6}.$$

【解 2】 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(1 + \frac{\cos x - 1}{3} \right)^x - 1 \right]$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(\frac{\cos x - 1}{3} \right)}{x^3} \quad (\text{等价无穷小代换})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = -\frac{1}{6}.$$

【注】 当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1+x)^a - 1 \sim ax$. 这个结论推广可得, 若 $\alpha(x) \rightarrow 0, \alpha(x)\beta(x) \rightarrow 0$,
 则 $(1+\alpha(x))^{\beta(x)} - 1 \sim \alpha(x)\beta(x)$
 由此可得 $\left(1 + \frac{\cos x - 1}{3} \right)^x - 1 \sim \frac{x(\cos x - 1)}{3}$.

【例 24】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \sin x}{\arctan x - \tan x}$. 【 $-\frac{1}{2}$ 】

【例 25】 (2009, 数二) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)[x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin^4 x}$. 【 $\frac{1}{4}$ 】

方法 3 利用有理运算法则求极限

有理运算法则 若 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$.

那么: $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$.

$$\lim[f(x)g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x).$$

$$\lim \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} \quad (B \neq 0).$$

【注】 (1) 存在 $\pm$ 不存在 = 不存在; (2) 不存在 $\pm$ 不存在 = 不一定;
 (3) 存在 $\times (\div)$ 不存在 = 不一定; (4) 不存在 $\times (\div)$ 不存在 = 不一定.

常用的结论: (1) $\lim f(x) = A \neq 0 \Rightarrow \lim f(x)g(x) = A \lim g(x)$;

即: 极限非零的因子的极限可先求出来.

$$(2) \lim \frac{f(x)}{g(x)} \text{ 存在, } \lim g(x) = 0 \Rightarrow \lim f(x) = 0;$$

$$(3) \lim \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0, \lim f(x) = 0 \Rightarrow \lim g(x) = 0.$$

【例 26】 (2010, 数三) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - a \right) e^x \right] = 1$, 则 a 等于

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

【解】 $1 = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - a \right) e^x \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 - e^x}{x} \right] + a \lim_{x \rightarrow 0} e^x = -1 + a$

则 $a = 2$.

故应选 (C).

【例 27】 (2018, 数三) 已知实数 a, b 满足 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(ax + b)e^{\frac{1}{x}} - x] = 2$, 求 a, b .

【解】
$$\begin{aligned} 2 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} b e^{\frac{1}{x}} + \lim_{x \rightarrow +\infty} (a x e^{\frac{1}{x}} - x) \\ &= b + \lim_{x \rightarrow +\infty} x (a e^{\frac{1}{x}} - 1) \\ &= b + \lim_{x \rightarrow +\infty} x (e^{\frac{1}{x}} - 1) \quad (a = 1) \\ &= b + \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{1}{x} \quad (\text{等价无穷小代换}) \\ &= b + 1, \end{aligned}$$

故 $a = b = 1$.

【例 28】 (2004, 数三) 若极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b) = 5$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}, b = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解】 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos x - b)}{e^x - a} = 5 \neq 0$$

且 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x (\cos x - b) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - a) = 0$, 即 $a = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} (\cos x - b) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} (\cos x - b) = 1 - b$$

由 $1 - b = 5$ 得, $b = -4$.

【例 29】 (1997, 数二) 求极限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}}$.

【解 1】 原式 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - 1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{\sin x}{x^2}}} \quad (\text{分子分母同除以 } -x)$

$$= 1$$

【解 2】 原式 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1}}{\sqrt{x^2 + \sin x}} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + \sin x}} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + \sin x}} \quad (\text{拆项})$

$$= 2 - 1 + 0 = 1$$

方法 4 利用洛必达法则求极限

洛必达法则

若 (1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0(\infty)$;

(2) $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内可导, 且 $g'(x) \neq 0$;

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或 ∞),

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

【注】(1) 洛必达法则适应类型

洛必达法则可用来求七种类型不定式的极限, 即 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0$, 其中

前两种 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ 直接用洛必达法则, 后五种均可化为前两种.

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty} \leftarrow \begin{cases} 0 \cdot \infty \leftarrow \begin{cases} 1^\infty \\ \infty^0 \\ 0^0 \end{cases} \\ \infty - \infty \end{cases}$$

(2) 使用洛必达法则应该注意的几个问题

① 使用洛必达法则之前, 应该先检验其条件是否满足;

② 使用洛必达法则之后, 如果问题仍然是未定型极限, 且仍符合洛必达法则条件, 可以再次使用洛必达法则;

③ 如果“ $\frac{0}{0}$ ”型或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型极限中的函数含有极限非零的因子, 可以单独求极限, 不必参与洛必达法则运算, 以简化运算;

④ 如果能进行等价无穷小量代换或恒等变形配合洛必达法则使用, 也可以简化运算.

【例 30】求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin \frac{\pi}{2}x}$.

【解】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin \frac{\pi}{2}x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\tan(x-1)}{-\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}x} \quad (\text{洛必达法则})$

$$= \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\cos \frac{\pi}{2}x} \quad (\tan(x-1) \sim x-1)$$

$$= \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{-\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}x} \quad (\text{洛必达法则})$$

$$= -\frac{4}{\pi^2}$$

【例 31】(1988, 数三) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x^2) \tan \frac{\pi}{2}x$.

【 $\frac{4}{\pi}$ 】

【例 32】 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$.

【解】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x}}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}}{1} = 0 \quad (\text{洛必达法则})$$

则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$.

【例 33】 设 $f(x)$ 二阶可导, $f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 2$. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2}$.

【解 1】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - 1}{2x} \quad (\text{洛必达法则})$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x}$$

$$= \frac{f''(0)}{2} \quad (\text{导数定义})$$

$$= 1.$$

【解 2】 函数 $f(x)$ 带有皮亚诺余项的二阶麦克劳林公式为

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + o(x^2)$$

即
则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2} = 1$$

【注】 经典错误: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{f''(0)}{2} = 1$.

方法 5 利用泰勒公式求极限

定理(带皮亚诺余项的泰勒公式) 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处 n 阶可导, 则

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o(x - x_0)^n$$

特别是当 $x_0 = 0$ 时,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

几个常用的泰勒公式

$$(1) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

$$(2) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1}).$$

$$(3) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

$$(4) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

$$(5) (1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

【例 34】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

【 $-\frac{1}{12}$ 】

【解 1】 泰勒公式.

【解 2】 洛必达法则 + 等价代换.

【例 35】 (1994, 数三) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax + bx^2)}{x^2} = 2$, 则

(A) $a = 1, b = -\frac{5}{2}$.

(B) $a = 0, b = -2$.

(C) $a = 0, b = -\frac{5}{2}$.

(D) $a = 1, b = -2$.

【A】

【解 1】 泰勒公式.

【解 2】 乘 x .

【解 3】 代入.

【例 36】 (2000, 数二) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} \right) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6+f(x)}{x^2}$ 为

(A) 0.

(B) 6.

(C) 36.

(D) ∞ .

【解 1】 由泰勒公式 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ 知

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{6x - \frac{(6x)^3}{3!} + o(x^3) + xf(x)}{x^3} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + xf(x)}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{(6x)^3}{3!} + o(x^3)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6+f(x)}{x^2} - 36 \end{aligned}$$

则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6+f(x)}{x^2} = 36$.

$$\begin{aligned} \text{【解 2】 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x - 6x + 6x + xf(x)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x - 6x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6+f(x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6}(6x)^3}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6+f(x)}{x^2} \\ &= -36 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6+f(x)}{x^2} \end{aligned}$$

则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6+f(x)}{x^2} = 36$.

【注】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + xf(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6+f(x)}{x^2} = 0$, 这是一种经典错误.

微信公众号: 顶尖考研
 (ID: djky66)

方法 6 利用夹逼原理求极限

【例 37】(1995, 数三) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} \right)$.

【解】 由于

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2+n+n} + \frac{2}{n^2+n+n} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} &\leq \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} \\ &\leq \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+1} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+1} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{n^2+n+n} + \frac{2}{n^2+n+n} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} = \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+1} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+1} = \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1} \rightarrow \frac{1}{2}$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} \right) = \frac{1}{2}$.

【例 38】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+2^n+3^n}$.

【解 1】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+2^n+3^n} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} = 3$.

【解 2】 由于 $\sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{1+2^n+3^n} \leq \sqrt[n]{3 \cdot 3^n}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n} = 3, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3 \cdot 3^n} = 3$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+2^n+3^n} = 3$.

【例 39】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n}$, 其中 $a_i > 0, (i = 1, 2, \cdots, m)$.

【解】 令 $\max\{a_i\} = a$, 则

$$\sqrt[n]{a^n} \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \leq \sqrt[n]{ma^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n} = a, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{m \cdot a^n} = a$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = a$.

【注】 这是一个常用结论.

【例 40】(2008, 数四) 设 $0 < a < b$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^{-n} + b^{-n})^{\frac{1}{n}} =$

(A) a .

(B) a^{-1} .

(C) b .

(D) b^{-1} .

【解】 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a^{-n} + b^{-n})^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a}\right)^n + \left(\frac{1}{b}\right)^n} = \max\left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right\} = \frac{1}{a}$$

则应选(B).

【例 41】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n}, (x > 0).$

【解】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} = \max\left\{1, x, \frac{x^2}{2}\right\} = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ x, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{x^2}{2}, & x \geq 2 \end{cases}$

方法 7 利用单调有界准则求极限

【例 42】 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right), n = 1, 2, \dots$. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【解】 由题设知 $x_n > 0$, 且

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{x_n}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)^2\right] \geq \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{x_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_n}} = 1$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_n} - x_n\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x_n^2}{x_n} \leq 0$$

或 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{x_n^2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1}\right) = 1$

则数列 $\{x_n\}$ 单调减且下有界, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

等式 $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$ 两端取极限得

$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$$

得 $a^2 = 1$, 则 $a = 1, a = -1$ (舍去), 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.



方法 8 利用定积分定义求极限 (见第五章)

三、无穷小量阶的比较

【例 43】 (2005, 数二) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x) = kx^2$ 与 $\beta(x) = \sqrt{1+x\arcsin x} - \sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小, 则 $k =$ _____.

【解 1】 由题设知 $1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x\arcsin x} - \sqrt{\cos x}}{kx^2}$

$$= \frac{1}{k} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x\arcsin x - \cos x}{x^2(\sqrt{1+x\arcsin x} + \sqrt{\cos x})} \quad (\text{有理化})$$

$$= \frac{1}{2k} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x\arcsin x - \cos x}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2k} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\arcsin x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2k} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4k}$$

则 $k = \frac{3}{4}$.

【解 2】 拉格朗日中值定理.

【解 3】 等价代换.

【例 44】 (2001, 数二) 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x) \ln(1 + x^2)$ 是比 $x \sin x^n$ 高阶的无穷小, 而 $x \sin x^n$ 是比 $(e^{x^2} - 1)$ 高阶的无穷小, 则正整数 n 等于

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

【解】 当 $x \rightarrow 0$ 时

$$(1 - \cos x) \ln(1 + x^2) \sim \frac{1}{2} x^4$$

$$x \sin x^n \sim x^{n+1}$$

$$e^{x^2} - 1 \sim x^2$$

由题设可知 $2 < n + 1 < 4$, 则 $n = 2$, 故选 (B).

【例 45】 (2014, 数二) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 若 $\ln^\alpha(1 + 2x)$, $(1 - \cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小, 则 α 的取值范围是

- (A) $(2, +\infty)$. (B) $(1, 2)$. (C) $(\frac{1}{2}, 1)$. (D) $(0, \frac{1}{2})$.

【解】 当 $x \rightarrow 0$ 时

$$\begin{aligned} \ln^\alpha(1 + 2x) &\sim (2x)^\alpha = 2^\alpha x^\alpha \\ (1 - \cos x)^{\frac{1}{\alpha}} &\sim \left(\frac{1}{2} x^2\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} x^{\frac{2}{\alpha}} \end{aligned}$$

由题设可知 $\alpha > 1$, 且 $\frac{2}{\alpha} > 1$, 则 $1 < \alpha < 2$, 故选 (B).

【例 46】 (2016, 数二) 设 $\alpha_1 = x(\cos \sqrt{x} - 1)$, $\alpha_2 = \sqrt{x} \ln(1 + \sqrt[3]{x})$, $\alpha_3 = \sqrt[3]{x+1} - 1$. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 以上 3 个无穷小量从低阶到高阶的排序是

- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. (B) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1$. (C) $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3$. (D) $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$.

【解】 当 $x \rightarrow 0$ 时

$$\alpha_1 = x(\cos \sqrt{x} - 1) \sim -\frac{1}{2} x^2$$

$$\alpha_2 = \sqrt{x} \ln(1 + \sqrt[3]{x}) \sim x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = x^{\frac{5}{6}}$$

$$\alpha_3 = \sqrt[3]{x+1} - 1 \sim \frac{1}{3} x$$

则以上 3 个无穷小量从低阶到高阶的排序是 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1$, 故选 (B).

【例 47】 (2020, 数三) 已知 a, b 为常数, 若 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e$ 与 $\frac{b}{n^a}$ 在 $n \rightarrow \infty$ 时是等价无穷小, 求 a, b .

$$\begin{aligned} \text{【解 1】 } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e &= e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} - e = e[e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1} - 1] \sim e[n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1] \quad (n \rightarrow \infty) \\ &= ne \left[\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right] \sim ne \left(-\frac{1}{2n^2}\right) = -\frac{e}{2n} \end{aligned}$$

由题设知 $-\frac{e}{2n} \sim \frac{b}{n^a}$, 则 $a = 1, b = -\frac{e}{2}$.

【解 2】 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e = e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} - e$

$$= e^{\xi \left[n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \right]} \quad (\text{拉格朗日中值定理, } \xi \text{ 在 } n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right), 1 \text{ 之间})$$

$$\sim e^{\left[n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \right]} \quad (n \rightarrow \infty)$$

以下同【解 1】.

第三节 函数的连续性

。 考试内容概要 。

一、连续性的概念

定义 设 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义, 若

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$

则称 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续.

定义 设 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续.

【注】 以上两个定义是等价的.

定义 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 则称 $y = f(x)$ 在点 x_0 处左连续;

若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 则称 $y = f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

定理 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处既左连续又右连续.

定义 如果 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内每点都连续, 则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续. 若 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内连续, 在 $x = a$ 处右连续, 在 $x = b$ 处左连续, 则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

【例 1】 (2017, 数一、二、三) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax}, & x > 0 \\ b, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则

(A) $ab = \frac{1}{2}$.

(B) $ab = -\frac{1}{2}$.

(C) $ab = 0$.

(D) $ab = 2$.

【A】

【例 2】 (1994, 数三) 若 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x + e^{2ax} - 1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 则

$a =$ _____.

【-2】

【例3】 (2008, 数三) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & |x| \leq c \\ \frac{2}{|x|}, & |x| > c \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 则 $c =$

【1】

二、间断点及其分类

1. 间断点的定义

定义 若 $f(x)$ 在 x_0 某去心邻域有定义, 但在 x_0 处不连续, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

2. 间断点的分类

左、右极限都存在的间断点称为第一类间断点, 其中左、右极限都存在且相等的间断点称为可去间断点; 左、右极限都存在但不相等的间断点称为跳跃间断点.

左、右极限至少有一个不存在的间断点称为第二类间断点. 其中若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的无穷间断点.

函数 $y = \sin \frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处没定义, 且左、右极限都不存在, 这是由于当 $x \rightarrow 0$ 时, 其函数值在 -1 与 1 之间无穷多次振荡, 则称点 $x = 0$ 为函数 $\sin \frac{1}{x}$ 的振荡间断点.

【例4】 (2008, 数二) 设函数 $f(x) = \frac{\ln |x|}{|x-1|} \sin x$, 则 $f(x)$ 有

- (A) 1 个可去间断点, 1 个跳跃间断点. (B) 1 个可去间断点, 1 个无穷间断点.
(C) 2 个跳跃间断点. (D) 2 个无穷间断点.

【解】 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln |x|}{|x-1|} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln |x| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln |x|}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

则 $x = 0$ 为可去间断点.

由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \sin 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{|x-1|} = \sin 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln[1+(x-1)]}{|x-1|} \\ &= \sin 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{|x-1|} = \begin{cases} \sin 1, & x \rightarrow 1^+ \\ -\sin 1, & x \rightarrow 1^- \end{cases} \end{aligned}$$

则 $x = 1$ 为跳跃间断点.

故应选(A).

【例5】 (2020, 数三) 函数 $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln |1+x|}{(e^x - 1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. **【C】**

三、连续性的运算与性质

定理 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 处连续, 则 $f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)} (g(x_0) \neq 0)$

0) 在点 x_0 处也连续.

定理 设函数 $u = \varphi(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续, 且 $\varphi(x_0) = u_0$, 而函数 $y = f(u)$ 在点 $u = u_0$ 处连续, 则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在 $x = x_0$ 处也连续.

定理 基本初等函数在其定义域内都是连续的.

定理 初等函数在其定义区间内都是连续的.

【注】 所谓定义区间, 是指包含在定义域内的区间.

四、闭区间上连续函数的性质

定理(最值定理) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有最大值与最小值.

定理(有界性定理) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有界.

定理(介值定理) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) \neq f(b)$, 则对于任意介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的数 C , 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = C$.

推论 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可取到介于最小值 m 与最大值 M 之间的任何值.

定理(零点定理) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = 0$.

【注】 零点定理的一个重要应用就是证明方程的根的存在性.

。 常考题型与典型例题 。

常考题型

1. 讨论函数的连续性及其间断点的类型
2. 有关闭区间上连续函数性质的证明题

【例 6】 (1997, 数二) 已知 $f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{1/x^2}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a =$ **【 $e^{-\frac{1}{2}}$ 】**

【例 7】 讨论 $f(x) = \frac{x}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}$ 的连续性并指出间断点类型.

【例 8】 函数 $f(x) = \frac{(x^2 + x)(\ln |x|) \sin \frac{1}{x}}{x^2 - 1}$ 的可去间断点的个数为

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

【解】 $f(x)$ 有三个间断点, $x = 0, x = \pm 1$.

在 $x = 0$ 处, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\lim_{x \rightarrow 0} x \ln |x| \sin \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln |x| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln |x|}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0 \quad (\text{无穷小量})$$

则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, x = 0$ 为可去间断点.

$$\text{在 } x = -1 \text{ 处, } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x \ln |x| \sin \frac{1}{x}}{x-1} = 0$$

则 $x = -1$ 为可去间断点.

$$\begin{aligned} \text{在 } x = 1 \text{ 处, } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln |x| \sin \frac{1}{x}}{x-1} = \sin 1 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} \\ &= \sin 1 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln[1+(x-1)]}{x-1} = \sin 1 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-1} = \sin 1 \end{aligned}$$

则 $x = 1$ 为可去间断点.

【例 9】 (1998, 数三) 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$, 讨论函数的间断点, 其结论为

(A) 不存在间断点.

(B) 存在间断点 $x = 1$.

(C) 存在间断点 $x = 0$.

(D) 存在间断点 $x = -1$.

【解】
$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}} = \begin{cases} 1+x, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \\ 0, & x = -1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{在 } x = -1 \text{ 处, } f(-1-0) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0 \\ f(-1+0) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (1+x) = 0 \\ f(-1-0) &= f(-1+0) = f(-1) = 0 \end{aligned}$$

则 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处连续.

$$\begin{aligned} \text{在 } x = 1 \text{ 处, } f(1-0) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (1+x) = 2 \\ f(1+0) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 \end{aligned}$$

则 $x = 1$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

【例 10】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $a < c < d < b$. 试证对任意的正数 p, q , 至少存在一个 $\xi \in [c, d]$, 使 $pf(c) + qf(d) = (p+q)f(\xi)$.

【证】 由题设可知, $f(x)$ 在 $[c, d]$ 上连续, 则该区间上必有最小值 m 和最大值 M . 则

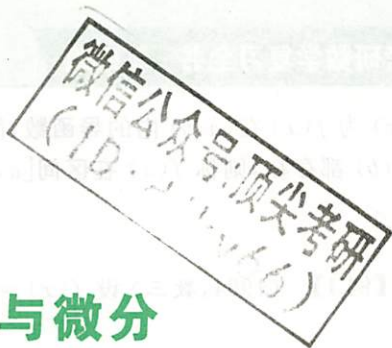
$$m = \frac{pm + qm}{p+q} \leq \frac{pf(c) + qf(d)}{p+q} \leq \frac{pM + qM}{p+q} = M$$

由连续函数介值定理知, 至少存在一个 $\xi \in [c, d]$, 使

$$f(\xi) = \frac{pf(c) + qf(d)}{p+q}$$

故

$$pf(c) + qf(d) = (p+q)f(\xi)$$



第二章 导数与微分

。本章考点。

导数和微分的概念 导数的几何意义和物理意义 函数的可导性与连续性之间的关系 平面曲线的切线和法线 导数和微分的四则运算 基本初等函数的导数 复合函数、反函数、隐函数以及参数方程所确定的函数的导数(数学三不要求参数方程) 高阶导数

。考试内容概要。

一、导数与微分的概念

1. 导数的概念

定义(导数) 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义, 如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 并称此极限值为 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数, 记为 $f'(x_0)$, 或 $y'|_{x=x_0}$, 或 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$. 如果上述极限不存在, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处不可导.

【注】 常用的导数定义的等价形式有:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

定义(左导数) 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 及其某个左邻域内有定义, 若左极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在时, 则称该极限值为 $f(x)$ 在点 x_0 处的左导数, 记为 $f'_-(x_0)$.

定义(右导数) 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 及其某个右邻域内有定义, 若右极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在时, 则称该极限值为 $f(x)$ 在点 x_0 处的右导数, 记为 $f'_+(x_0)$.

定理 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是它在该点处左导数与右导数都存在且相等.

定义(区间上可导及导函数) 如果 $y = f(x)$ 在开区间 (a, b) 内每一点都可导, 则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内可导. 此时对于 (a, b) 内的每一点 x , 都对应一个导数值 $f'(x)$, 常称

$f'(x)$ 为 $f(x)$ 在 (a, b) 内的导函数, 简称为导数. 若 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内可导, 且 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 都存在, 则称 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可导.

【例 1】 (1994, 数三) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x^3, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的

- (A) 左、右导数都存在. (B) 左导数存在但右导数不存在.
(C) 左导数不存在但右导数存在. (D) 左、右导数都不存在.

【解 1】 $f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}}{x - 1} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = 2$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - \frac{2}{3}}{x - 1} = \infty$$

则左导数存在但右导数不存在, 故应选(B).

【解 2】 $f'_-(1) = \left(\frac{2}{3}x^3\right)' \Big|_{x=1} = 2x^2 \Big|_{x=1} = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1, f(1) = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq f(1)$$

即 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处非右连续, 则右导数不存在, 故应选(B).

【注】 一种经典错误是: $f'_+(1) = (x^2)' \Big|_{x=1} = 2x \Big|_{x=1} = 2$. 错误的原因是 $f(1) \neq x^2 \Big|_{x=1}$.

【例 2】 (1990, 数四、五) 设函数 $f(x)$ 对任意 x 均满足等式 $f(1+x) = af(x)$, 且有 $f'(0) = b$, 其中 a, b 为非零常数, 则

- (A) $f(x)$ 在 $x = 1$ 处不可导. (B) $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导, 且 $f'(1) = a$.
(C) $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导, 且 $f'(1) = b$. (D) $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导, 且 $f'(1) = ab$.

【D】

2. 微分的概念

定义(微分) 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义, 如果函数的增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 可以表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), (\Delta x \rightarrow 0)$$

其中 A 为不依赖于 Δx 的常数, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微, 称 $A\Delta x$ 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处相应于自变量增量 Δx 的微分, 记为 $dy = A\Delta x$.

定理 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且有

$$dy = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx$$

在点 x 处, 常记 $dy = f'(x)dx$.

【例 3】 (1988, 数一、二、三) 若函数 $y = f(x)$ 有 $f'(x_0) = \frac{1}{2}$, 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 该函数

在 $x = x_0$ 处的微分 dy 是

(A) 与 Δx 等价的无穷小.

(B) 与 Δx 同阶的无穷小.

(C) 比 Δx 低阶的无穷小.

(D) 比 Δx 高阶的无穷小.

【B】

3. 导数与微分的几何意义

(1) 导数的几何意义

导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率.

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处必有切线, 其切线方程为

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

如果 $f'(x_0) \neq 0$, 则此曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的法线方程为

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

如果 $f'(x_0) = 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为 $y = f(x_0)$, 即曲线在点 $(x_0, f(x_0))$ 处有水平切线.

【注】 若函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处有切线, 反之则不然. 例如曲线 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 在点 $(0, 0)$ 处有切线 $x = 0$ (y 轴), 但函数 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ 在 $x = 0$ 处不可导 ($f'(0) = \infty$).

(2) 微分的几何意义

微分 $dy = f'(x_0)dx$ 在几何上表示曲线 $y = f(x)$ 的切线上的增量.

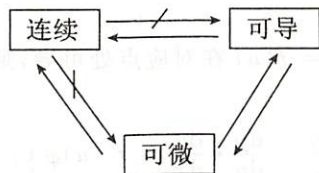
$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y = f(x)$ 上的增量.

$\Delta y \approx dy$.

【例 4】 (2004, 数一) 曲线 $y = \ln x$ 上与直线 $x + y = 1$ 垂直的切线方程为_____.

【 $y = x - 1$ 】

4. 连续、可导、可微之间的关系



【例 5】(2020, 数一) 设函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 则

- (A) 当 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.
 (B) 当 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.
 (C) 当 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$.
 (D) 当 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$.

【C】

二、导数公式及求导法则

1. 基本初等函数的导数公式

- (1) $(C)' = 0$; (2) $(x^a)' = ax^{a-1}$;
 (3) $(a^x)' = a^x \ln a$; (4) $(e^x)' = e^x$;
 (5) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$; (6) $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$;
 (7) $(\sin x)' = \cos x$; (8) $(\cos x)' = -\sin x$;
 (9) $(\tan x)' = \sec^2 x$; (10) $(\cot x)' = -\csc^2 x$;
 (11) $(\sec x)' = \sec x \tan x$; (12) $(\csc x)' = -\csc x \cot x$;
 (13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; (14) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
 (15) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$; (16) $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

2. 求导法则

有理运算法则

设 $u = u(x), v = v(x)$ 在 x 处可导, 则

- (1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$; (2) $(uv)' = u'v + uv'$;
 (3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$.

复合函数求导法

设 $u = \varphi(x)$ 在 x 处可导, $y = f(u)$ 在对应点处可导, 则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在 x 处可导, 且

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \varphi'(x)$$

【例 6】(1995, 数二) 设 $y = \cos(x^2) \sin^2 \frac{1}{x}$, 则 $y' =$ _____.

$$\left[-2x \sin(x^2) \cdot \sin^2 \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \sin \frac{2}{x} \cdot \cos(x^2)\right]$$

【例 7】 设函数 $f(x)$ 可导, 试证

- (1) 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f'(x)$ 是偶函数;
- (2) 若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $f'(x)$ 是奇函数;
- (3) 若 $f(x)$ 是周期函数, 则 $f'(x)$ 也是周期函数.

【例 8】 (2017, 数一) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, 则 $f^{(3)}(0) =$ _____.

【0】

隐函数求导法

设 $y = y(x)$ 是由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的可导函数, 为求得 y' , 可在方程 $F(x, y) = 0$ 两边对 x 求导, 可得到一个含有 y' 的方程, 从中解出 y' 即可.

【注】 y' 也可由多元函数微分法中的隐函数求导公式 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$ 得到.

【例 9】 (1993, 数三) 函数 $y = y(x)$ 由方程 $\sin(x^2 + y^2) + e^x - xy^2 = 0$ 所确定, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____.

$$\left[\frac{y^2 - e^x - 2x\cos(x^2 + y^2)}{2y\cos(x^2 + y^2) - 2xy} \right]$$

反函数的导数

若 $y = f(x)$ 在某区间内可导, 且 $f'(x) \neq 0$, 则其反函数 $x = \varphi(y)$ 在对应区间内也可导, 且

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}; \quad \text{即} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

【例 10】 证明 $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

参数方程求导法

设 $y = y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, (\alpha < t < \beta)$ 确定的函数, 则

- (1) 若 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 都可导, 且 $\varphi'(t) \neq 0$, 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

- (2) 若 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 二阶可导, 且 $\varphi'(t) \neq 0$, 则

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'^3(t)}$$

【例 11】 (2020, 数一) 设 $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1} \\ y = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) \end{cases}$, 则 $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=1} =$ _____.

【 $-\sqrt{2}$ 】

对数求导法

如果 $y = y(x)$ 的表达式由多个因式的乘除、乘幂构成,或是幂指函数的形式,则可先将函数取对数,然后两边对 x 求导.

【例 12】(2005, 数二) 设 $y = (1 + \sin x)^x$, 则 $dy|_{x=\pi} = \underline{\hspace{2cm}}$. 【 $-\pi dx$ 】

【例 13】 设 $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$, 求 y' .

$$\text{【} y' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} \right) \text{】}$$

三、高阶导数

1. 高阶导数的概念

定义(高阶导数) 如果 $y' = f'(x)$ 作为 x 的函数在点 x 可导, 则称 y' 的导数为 $y = f(x)$ 的二阶导数, 记为 y'' , 或 $f''(x)$, 或 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

一般地, 函数 $y = f(x)$ 的 n 阶导数为 $y^{(n)} = [f^{(n-1)}(x)]'$, 也可记为 $f^{(n)}(x)$ 或 $\frac{d^n y}{dx^n}$.
即 n 阶导数就是 $n-1$ 阶导函数的导数,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

【注】 如果函数 $f(x)$ 在点 x 处 n 阶可导, 则在点 x 的某邻域内 $f(x)$ 必定具有一切低于 n 阶的导数.

2. 常用的高阶导数公式

$$(1) (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right); \quad (2) (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right);$$

$$(3) (u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}; \quad (4) (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

【例 14】 设 $y = \sin 3x$, 求 $y^{(n)}$. 【 $3^n \sin\left(3x + n \frac{\pi}{2}\right)$ 】

【例 15】 设 $y = x^2 \cos x$, 求 $y^{(n)}$.

$$\text{【} x^2 \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + 2nx \cos\left(x + \frac{n-1}{2}\pi\right) + n(n-1) \cos\left(x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right) \text{】}$$

常考题型与典型例题

常考题型

1. 导数定义
2. 复合函数、隐函数、参数方程求导
3. 高阶导数
4. 导数应用

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

一、导数定义

【例 16】 (1994, 数三) 已知 $f'(x_0) = -1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x_0 - 2x) - f(x_0 - x)} =$ _____. **【1】**

【例 17】 (2011, 数二、三) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$ _____
(A) $-2f'(0)$. (B) $-f'(0)$. (C) $f'(0)$. (D) 0. **【B】**

【例 18】 (2013, 数一) 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 确定, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right) =$ _____. **【1】**

【例 19】 (2018, 数一、二、三) 下列函数中, 在 $x=0$ 处不可导的是

- (A) $f(x) = |x| \sin |x|$. (B) $f(x) = |x| \sin \sqrt{|x|}$.
(C) $f(x) = \cos |x|$. (D) $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$.

【解】 由导数定义知

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \sqrt{|x|} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}(\sqrt{|x|})^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}|x|}{x}$$

该极限不存在, 则 $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$ 在 $x=0$ 处不可导, 故应选(D).

【例 20】 (1989, 数三) 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是

- (A) $\lim_{h \rightarrow +\infty} h \left[f\left(a + \frac{1}{h}\right) - f(a) \right]$ 存在. (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(a + \frac{1}{n}\right) - f(a) \right]$ 存在.
(C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ 存在. (D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{h}$ 存在. **【D】**

二、复合函数、隐函数、参数方程求导

【例 21】 (1993, 数三) 设 $y = \sin[f(x^2)]$, 其中 f 具有二阶导数, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

$$\{2f'(x^2)\cos[f(x^2)] + 4x^2\{f''(x^2)\cos[f(x^2)] - [f'(x^2)]^2\sin[f(x^2)]\}\}$$

【例 22】(2012, 数二) 设 $y = y(x)$ 是由方程 $x^2 - y + 1 = e^y$ 所确定的隐函数, 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}$. 【1】

【例 23】(2013, 数一) 设 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = t \sin t + \cos t \end{cases}$, (t 为参数), 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \underline{\hspace{2cm}}$. 【 $\sqrt{2}$ 】

三、高阶导数

【例 24】(2007, 数二、三) 设函数 $y = \frac{1}{2x+3}$, 则 $y^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$. 【 $\frac{(-1)^n 2^n n!}{3^{n+1}}$ 】

【例 25】(2015, 数二) 函数 $f(x) = x^2 2^x$ 在 $x = 0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$. 【 $n(n-1)(\ln 2)^{n-2}$ 】

四、导数应用

1. 导数的几何意义

【例 26】(2011, 数三) 曲线 $\tan\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right) = e^y$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$. 【 $y = -2x$ 】

【例 27】(2013, 数二) 曲线 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln \sqrt{1+t^2} \end{cases}$ 上对应于 $t = 1$ 的点处的法线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$. 【 $x + y = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$ 】

【例 28】(1997, 数一) 对数螺线 $\rho = e^\theta$ 在点 $(\rho, \theta) = (e^{\pi/2}, \frac{\pi}{2})$ 处的切线的直角坐标方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$. 【 $x + y = e^{\frac{\pi}{2}}$ 】

2. 相关变化率(数三不要求)

【例 29】(2016, 数二) 已知动点 P 在曲线 $y = x^3$ 上运动, 记坐标原点与点 P 间的距离为 l . 若点 P 的横坐标对时间的变化率为常数 v_0 , 则当点 P 运动到点 $(1,1)$ 时, l 对时间的变化率是 $\underline{\hspace{2cm}}$. 【 $2\sqrt{2}v_0$ 】

第三章 微分中值定理及导数应用

。 本章考点 。

微分中值定理(罗尔(Rolle)定理、拉格朗日(Lagrange)中值定理和泰勒(Taylor)定理、柯西(Cauchy)中值定理) 洛必达(L'Hospital)法则 函数单调性的判别 函数的极值 函数图形的凹凸性(大纲规定:在区间 (a, b) 内,设函数 $f(x)$ 具有二阶导数,当 $f''(x) > 0$ 时, $f(x)$ 的图形是凹的;当 $f''(x) < 0$ 时, $f(x)$ 的图形是凸的)、拐点及渐近线 函数图形的描绘 函数的最大值与最小值

(仅数学一) 曲率的概念 曲率圆与曲率半径

(仅数学三) 导数的经济学应用

。 考试内容概要 。

一、微分中值定理

定理(费马引理) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导,如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极值,那么 $f'(x_0) = 0$.

定理(罗尔定理) 如果 $f(x)$ 满足以下条件:

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,
- (2) 在开区间 (a, b) 内可导,
- (3) $f(a) = f(b)$,

则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ ,使得 $f'(\xi) = 0$.

定理(拉格朗日中值定理) 如果 $f(x)$ 满足以下条件:

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,
- (2) 在开区间 (a, b) 内可导,

则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ ,使得

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

推论 如果在 (a, b) 内恒有 $f'(x) = 0$,则在 (a, b) 内 $f(x)$ 为常数.

定理(柯西中值定理) 如果 $f(x), F(x)$ 满足以下条件:

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续.

(2) 在开区间 (a, b) 内可导,且 $F'(x)$ 在 (a, b) 内每一点处均不为零,则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ ,使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

定理(皮亚诺型余项泰勒公式)

如果 $f(x)$ 在点 x_0 有直至 n 阶的导数, 则有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + o[(x-x_0)^n]$$

常称 $R_n(x) = o(x-x_0)^n$ 为皮亚诺型余项. 若 $x_0 = 0$, 则得麦克劳林公式:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + o(x^n)$$

定理(拉格朗日型余项泰勒公式)

设函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的开区间 (a, b) 内有 $n+1$ 阶的导数, 则当 $x \in (a, b)$ 时有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + R_n(x) \end{aligned}$$

其中 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, 这里 ξ 介于 x_0 与 x 之间, 称为拉格朗日型余项.

几个常用的泰勒公式(拉格朗日型余项)

$$(1) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1};$$

$$(2) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{\cos \theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1};$$

$$(3) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{\cos \theta x}{(2n+2)!}x^{2n+2};$$

$$(4) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}};$$

$$\begin{aligned} (5) (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \\ &\quad \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}. \end{aligned}$$

(以上 θ 满足 $\theta \in (0, 1)$)

二、导数应用

1. 函数的单调性

定理 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导.

(1) 若在 (a, b) 内 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增;

(2) 若在 (a, b) 内 $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减.

2. 函数的极值

定义 设 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义. 如果对于该邻域内任何 x , 恒有 $f(x) \leq f(x_0)$ 或 $f(x) \geq f(x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个极大值点(或极小值点), 称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值(或极小值). 极大(小)值统称为极值; 极大(小)值点统称为极值点. 导数为零的点

称为函数的驻点.

定理(极值的必要条件) 设 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 如果 x_0 为 $f(x)$ 的极值点, 则 $f'(x_0) = 0$.

定理(极值的第一充分条件) 设 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内可导, 且 $f'(x_0) = 0$ (或 $f(x)$ 在 x_0 处连续).

(1) 若 $x < x_0$ 时, $f'(x) > 0$, $x > x_0$ 时, $f'(x) < 0$, 则 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点;

(2) 若 $x < x_0$ 时, $f'(x) < 0$, $x > x_0$ 时, $f'(x) > 0$, 则 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点;

(3) 若 $f'(x)$ 在 x_0 的两侧同号, 则 x_0 不为 $f(x)$ 的极值点.

定理(极值的第二充分条件) 设 $y = f(x)$ 在点 x_0 处二阶可导, 且 $f'(x_0) = 0$.

(1) 若 $f''(x_0) < 0$, 则 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点;

(2) 若 $f''(x_0) > 0$, 则 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点;

(3) 若 $f''(x_0) = 0$, 则此方法不能判定 x_0 是否为极值点.

3. 函数的最大值与最小值

定义 设函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义, $x_0 \in [a, b]$. 若对于任意 $x \in [a, b]$, 恒有 $f(x) \leq f(x_0)$ (或 $f(x) \geq f(x_0)$), 则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的最大值 (或最小值), 称 x_0 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值点 (或最小值点).

函数的最值主要有以下两种问题:

(1) 连续函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的最大最小值

第一步: 求出 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内的驻点和不可导的点 $x_1, x_2, \dots, x_n$;

第二步: 求出 $f(x)$ 在点 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 和区间端点 a, b 处的函数值

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)$$

第三步: 比较以上各点函数值, 其中最大的即为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值, 最小的即为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值.

【注】 当连续函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内仅有唯一极值点, 若在该点 $f(x)$ 取极大值 (或极小值), 则它也是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值 (或最小值).

(2) 最大最小值的应用题

这种问题首先建立目标函数并确定其定义域, 然后按照以上三步求其最大值 (或最小值).

4. 曲线的凹凸性

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 如果对 I 上任意两点 x_1, x_2 恒有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

则称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凹的; 如果恒有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

则称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凸的.

定理 设函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导, 那么

(1) 若在 (a, b) 内有 $f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图形是凹的;

(2) 若在 (a, b) 内有 $f''(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图形是凸的.

定义(拐点) 连续曲线弧上的凹与凸的分界点称为曲线弧的拐点.

定理(拐点的必要条件) 设 $y = f(x)$ 在点 x_0 处二阶可导, 且点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点, 则 $f''(x_0) = 0$.

定理(拐点的第二充分条件) 设 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内二阶可导, 且 $f''(x_0) = 0$ (或 $f(x)$ 在 x_0 处连续).

- (1) 若 $f''(x)$ 在 x_0 的左、右两侧异号, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点;
- (2) 若 $f''(x)$ 在 x_0 的左、右两侧同号, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 不为曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

定理(拐点的第二充分条件) 设 $y = f(x)$ 在点 x_0 处三阶可导, 且 $f''(x_0) = 0$.

- (1) 若 $f'''(x_0) \neq 0$, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点;
- (2) 若 $f'''(x_0) = 0$, 则此方法不能判定 $(x_0, f(x_0))$ 是否为曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

5. 曲线的渐近线

定义 若点 M 沿曲线 $y = f(x)$ 无限远离原点时, 它与某条定直线 L 之间的距离将趋近于零, 则称直线 L 为曲线 $y = f(x)$ 的一条渐近线. 若直线 L 与 x 轴平行, 则称 L 为曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线; 若直线 L 与 x 轴垂直, 则称 L 为曲线 $y = f(x)$ 的垂直渐近线; 若直线 L 既不平行于 x 轴, 也不垂直于 x 轴, 则称直线 L 为曲线 $y = f(x)$ 的斜渐近线.

水平渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ (或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$, 或 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$), 那么 $y = A$ 是曲线 $y = f(x)$ 水平渐近线.

垂直渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$, 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$), 那么 $x = x_0$ 是曲线 $y = f(x)$ 的垂直渐近线.

斜渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$ (或 $x \rightarrow -\infty$, 或 $x \rightarrow +\infty$), 那么 $y = ax + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的斜渐近线.

6. 函数的作图

利用函数的单调性、极值、曲线的凹凸性、拐点及渐近线可以做出函数曲线.

7. 曲线的弧微分与曲率(数三不要求)

定义 设 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内有连续导数, 则有弧微分

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

定义 设 $y = f(x)$ 有二阶导数, 则有曲率

$$K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

称 $\rho = \frac{1}{K}$ 为曲率半径.

定义 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x, y)$ 处的曲率为 $K (K \neq 0)$. 在点 M 处曲线的法线上, 在曲线凹的一侧取一点 D , 使 $|DM| = \frac{1}{K} = \rho$, 以 D 为圆心, ρ 为半径的圆称为曲线在点 M 处的曲率圆, 圆心 D 称为曲线在点 M 处的曲率中心.

8. 导数在经济学中的应用(仅数三要求)

经济学中常见的函数

(1) 需求函数: $x = \varphi(p)$; 其中 x 为某产品的需求量, p 为价格.

需求函数的反函数 $p = \varphi^{-1}(x)$ 称为价格函数.

(2) 供给函数: $x = \psi(p)$; 其中 x 为某产品的供给量, p 为价格.

(3) 成本函数: 成本 $C = C(x)$ 是生产产品的总投入, 它由固定成本 C_1 (常量) 和可变成本 $C_2(x)$ 两部分组成, 其中 x 表示产量, 即

$$C = C(x) = C_1 + C_2(x)$$

称 $\frac{C}{x}$ 为平均成本, 记为 $\bar{C}$ 或 AC ,

$$AC = \bar{C} = \frac{C}{x} = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2(x)}{x}$$

(4) 收益(入)函数: 收益 $R = R(x)$ 是产品售出后所得的收入, 是销售量 x 与销售单价 p 之积, 即收益函数为

$$R = R(x) = px$$

(5) 利润函数: 利润 $L = L(x)$ 是收益扣除成本后的余额, 由总收益减去总成本组成, 即利润函数为

$$L = L(x) = R(x) - C(x) \quad (x \text{ 是销售量})$$

边际函数与边际分析

(1) 边际函数的有关概念 设 $y = f(x)$ 可导, 则在经济学中称 $f'(x)$ 为边际函数, $f'(x_0)$ 称为 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的边际值.

(2) 经济学中常用的边际分析

① 边际成本: 设成本函数为 $C = C(q)$ (q 是产量), 则边际成本函数 MC 为 $MC = C'(q)$;

② 边际收益: 设收益函数为 $R = R(q)$ (q 是产量), 则边际收益函数 MR 为 $MR = R'(q)$;

③ 边际利润: 设利润函数为 $L = L(q)$ (q 是销售量), 则边际利润函数 ML 为 $ML = L'(q)$.

弹性函数与弹性分析

(1) 弹性函数的有关概念 设 $y = f(x)$ 可导, 则称 $\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}$ 为函数 $f(x)$ 当 x 从 x 变到 $x + \Delta x$ 时的相对弹性, 称

$$\eta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y/y}{\Delta x/x} = f'(x) \frac{x}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)} x$$

为函数 $f(x)$ 的弹性函数, 记为 $\frac{Ey}{Ex}$, 即

$$\eta = \frac{Ey}{Ex} = f'(x) \frac{x}{f(x)}$$

它在经济学上解释为函数 $f(x)$ 在 x 处的相对变化率.

(2) 经济学中常用的弹性分析

① 需求的价格弹性: 设需求函数 $Q = \varphi(p)$ (p 为价格), 则需求对价格的弹性为 $\eta_d = \frac{p}{\varphi(p)} \varphi'(p)$. 由于 $\varphi(p)$ 是单调减少函数, 故 $\varphi'(p) < 0$, 从而 $\eta_d < 0$.

经济学中的解释为: 当价格为 p 时, 若提价(或降价)1%, 则需求量将减少(或增加) $|\eta_d|$ %.

需要注意的是,很多试题中规定需求对价格的弹性 $\eta_d > 0$,此时应该有公式

$$\eta_d = -\frac{p}{\varphi(p)}\varphi'(p)$$

② 供给的价格弹性:设供给函数 $Q = \varphi(p)$ (p 为价格),则供给对价格的弹性为 $\eta_s = \frac{p}{\varphi(p)}\varphi'(p)$. 由于供给函数 $\varphi(p)$ 单调增加,故 $\varphi'(p) > 0$,从而 $\eta_s > 0$.

经济学中的解释为:当价格为 p 时,若提价(或降价)1%,则供给量将增加(或减少) $\eta_s\%$.

【例1】 (2014) 设某商品的需求函数为 $Q = 40 - 2p$ (p 为商品的价格),则该商品的边际收益为_____.

【解】 由题设知收益函数为

$$R = pQ = \frac{40 - Q}{2} \cdot Q$$

则边际收益为

$$\frac{dR}{dQ} = 20 - Q$$

【注】 一种典型的错误是填 $40 - 4p$. 边际收益是“当商品的需求量在 Q 的基础上再增加一件所获得的收益”,所以边际收益为 $\frac{dR}{dQ}$. 部分考生错误的将 $\frac{dR}{dp}$ 当作边际收益.

【例2】 (2017) 设生产某产品的平均成本 $\bar{C}(Q) = 1 + e^{-Q}$,其中产量为 Q ,则边际成本为_____.

【解】 成本

$$C(Q) = \bar{C}(Q)Q = Q(1 + e^{-Q})$$

边际成本为

$$\frac{dC}{dQ} = (1 + e^{-Q}) - Qe^{-Q} = 1 + (1 - Q)e^{-Q}$$

【例3】 (2009) 设某产品的需求函数为 $Q = Q(p)$,其对价格 p 的弹性 $\epsilon_p = 0.2$,则当需求量为 10000 件时,价格增加 1 元会使产品收益增加_____元.

【解】 由题设知

$$-\frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp} = \epsilon_p = 0.2$$

收益函数

$$R = Qp$$

收益微分为

$$dR = p dQ + Q dp = Q \left(1 + \frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp} \right) dp = Q(1 - \epsilon_p) dp$$

当 $Q = 10000$, $dp = 1$ 时,产品的收益增加

$$dR = 10000 \times (1 - 0.2) \times 1 = 8000 (\text{元})$$

【注】 一种典型的错误是 $\frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp} = 0.2$,导致错误的结果 12000.

【例 4】 (2010) 设某商品的收益函数为 $R(p)$, 收益弹性为 $1 + p^3$, 其中 p 为价格, 且 $R(1) = 1$, 则 $R(p) =$ _____.

【解】 由题意知 $\frac{p}{R} \cdot \frac{dR}{dp} = 1 + p^3$, 即 $\frac{dR}{R} = \left(\frac{1}{p} + p^2\right) dp$, 两边同时积分, 得

$$\ln R = \ln p + \frac{1}{3}p^3 + C$$

从而有 $R(p) = pe^{\frac{1}{3}p^3 + C}$, 将 $R(1) = 1$ 代入上式解得 $C = -\frac{1}{3}$, 故 $R(p) = pe^{\frac{1}{3}(p^3 - 1)}$.

。 常考题型与典型例题 。

常考题型

1. 求函数的极值和最值, 确定曲线的凹向和拐点
2. 求渐近线
3. 方程的根
4. 不等式的证明
5. 中值定理证明题

一、求函数的极值和最值及确定曲线的凹向和拐点

【例 5】 (2003, 数一、二) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其导函数的图形右图所示, 则 $f(x)$ 有

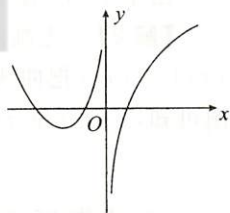


图 1

- (A) 一个极小值点和两个极大值点.
 (B) 两个极小值点和一个极大值点.
 (C) 两个极小值点和两个极大值点.
 (D) 三个极小值点和一个极大值点.

【C】

【例 6】 (1990, 数一) 已知 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某个邻域内连续, 且 $f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 2$, 则在点 $x = 0$ 处 $f(x)$

- (A) 不可导. (B) 可导, 且 $f'(0) \neq 0$.
 (C) 取得极大值. (D) 取得极小值.

【D】

【例 7】 在半径为 R 的球中内接一直圆锥, 试求圆锥的最大体积.

【 $\frac{32}{81}\pi R^3$ 】

【例 8】 (2018, 数二、三) 曲线 $y = x^2 + 2\ln x$ 在其拐点处的切线方程是 _____.

【解】 $y' = 2x + \frac{2}{x}, y'' = 2 - \frac{2}{x^2}$, 令 $y'' = 0$ 得

$$x = 1, x = -1 (\text{舍去})$$

拐点为(1,1),又 $f'(1) = 2 + 2 = 4$,则拐点处的切线方程是为

$$y - 1 = 4(x - 1)$$

即 $y = 4x - 3$.

【例 9】 (2004,数二、三) 设 $f(x) = |x(1-x)|$,则

(A) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点,但(0,0)不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(B) $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点,但(0,0)是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(C) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点,且(0,0)是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(D) $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点,(0,0)也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

【解 1】 在 $x = 0$ 的邻域($|x| < \delta$)内

$$f(x) = \begin{cases} -x(1-x), & x < 0 \\ x(1-x), & x \geq 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -1+2x, & x < 0 \\ 1-2x, & x > 0 \end{cases}$$

由于 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, $f'(x)$ 在 $x = 0$ 的邻域内由负变正,则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取极小值.

$$f''(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ -2, & x > 0 \end{cases}$$

由于 $f''(x)$ 在 $x = 0$ 的两侧变号,则(0,0)是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

【解 2】 先画曲线 $y = x(1-x)$ (开口朝下抛物线),再画 $f(x) = |x(1-x)|$ (把曲线 $y = x(1-x)$ 在 x 轴下方的图形对称的翻上去),由图可知, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点,且(0,0)是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

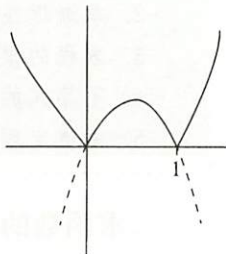


图 2

二、求渐近线

【例 10】 (2014,数一、二) 下列曲线中有渐近线的是

(A) $y = x + \sin x$.

(B) $y = x^2 + \sin x$.

(C) $y = x + \sin \frac{1}{x}$.

(D) $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$.

【C】

【例 11】 (2007,数一、二) 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1+e^x)$ 渐近线的条数为

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

【D】

【例 12】 (2017,数二) 曲线 $y = x\left(1 + \arcsin \frac{2}{x}\right)$ 的斜渐近线方程为_____.

【 $y = x + 2$ 】

三、方程的根

【例 13】 (1992,数五) 求证:方程 $x + p + q\cos x = 0$ 恰有一个实根,其中 p, q 为常数,

且 $0 < q < 1$.

【例 14】 设 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$, 求证: 方程 $na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2x + a_1 = 0$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个实根.

四、不等式的证明

【例 15】 证明: $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, (x > 0)$.

【例 16】 (1991, 数三) 利用导数证明: 当 $x > 1$ 时, $\frac{\ln(1+x)}{\ln x} > \frac{x}{1+x}$.

【例 17】 (2012, 数一、二、三) 证明: $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2} (-1 < x < 1)$.

【证】 令 $f(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x - \frac{x^2}{2} - 1$ ($-1 < x < 1$), 显然 $f(x)$ 是偶函数, 所以是要证 $f(x) \geq 0$ ($0 \leq x < 1$).

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} - \sin x - x \\ &\geq 2x - \sin x - x = x - \sin x \geq 0 \end{aligned}$$

则 $f(x)$ 在 $[0, 1)$ 上单调增, 又 $f(0) = 0$, 则 $f(x) \geq 0$ ($0 \leq x < 1$).

五、中值定理证明题

【例 18】 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上二阶可导, 且 $f(a) = f(b) = f(c)$ ($a < c < b$), 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f''(\xi) = 0$.

【例 19】 (1990, 数一、二) 设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b)$, 证明在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) > 0$.

【例 20】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, $f(a) = f(b) = 0$, 且存在 $c \in (a, b)$ 使 $f(c) < 0$. 试证: $\exists \xi, \eta \in (a, b), f'(\xi) < 0, f''(\eta) > 0$.

【例 21】 (2013, 数三) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, 且 $f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. 证明:

(1) 存在 $a > 0$, 使得 $f(a) = 1$;

(2) 对 (1) 中的 a , 存在 $\xi \in (0, a)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{1}{a}$.

第四章 不定积分

。本章考点。

原函数和不定积分的概念 不定积分的基本性质 基本积分公式 换元积分法

分部积分法

(仅数学一、二) 有理函数、三角函数的有理式和简单无理函数的积分

。考试内容概要。

一、不定积分的概念与性质

1. 原函数

定义 设 $f(x)$ 在某区间 (a, b) 内有定义, 若存在函数 $F(x)$, 使其在该区间内任一点都有 $F'(x) = f(x)$, 则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在该区间内的原函数.

若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在某区间内的原函数, 则 $F(x) + C$ (C 为任意常数) 也为 $f(x)$ 在该区间内的原函数.

若 $F(x), G(x)$ 都是 $f(x)$ 在某区间内的原函数, 则 $F(x) - G(x) = C$ (C 为某个确定常数).

2. 不定积分

定义 $f(x)$ 的原函数的全体称为 $f(x)$ 的不定积分, 记为 $\int f(x) dx$.

如果 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数, 则有

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

其中 C 为任意常数.

3. 不定积分的几何意义

设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数, 则从几何上看, $F(x)$ 表示平面上的一条曲线, 称之为 $f(x)$ 的积分曲线. 因此, 不定积分 $\int f(x) dx = F(x) + C$ 在几何上表示一族积分曲线. 这族积分曲线对应于横坐标 x 处的切线都相互平行.

4. 原函数存在定理

定理 若 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 则 $f(x)$ 在区间 I 上一定存在原函数.

定理 若 $f(x)$ 在区间 I 上有第一类间断点, 则 $f(x)$ 在区间 I 上没有原函数.

【例 1】 下列函数在给定区间上是否有原函数?

$$(1) f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$(2) g(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

$$(3) h(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

【解】 (1) 由于 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有原函数.

(2) 由于 $g(x)$ 在 $x=0$ 处有跳跃间断点(第一类间断点), 则 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上没有原函数.

事实上, 若 $F(x)$ 是 $g(x)$ 的原函数, 则

$$F(x) = \begin{cases} -x + C_1, & x < 0 \\ x + C_2, & x > 0 \end{cases}$$

由 $F(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性知 $C_1 = C_2 = C$,

$$F(x) = \begin{cases} -x + C, & x < 0 \\ x + C, & x \geq 0 \end{cases} = |x| + C$$

但以上 $F(x)$ 在 $x=0$ 处不可导, 则 $g(x)$ 没有原函数.

$$(3) \text{ 易验证 } F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ 是 } h(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ 的原函数,}$$

即 $F'(x) = h(x)$.

【注】 $h(x)$ 在 $x=0$ 处不连续(第二类间断点), 但 $h(x)$ 有原函数 $F(x)$.

5. 不定积分的性质

$$(1) \left(\int f(x) dx \right)' = f(x), d \int f(x) dx = f(x) dx;$$

$$(2) \int f'(x) dx = f(x) + C, \int df(x) = f(x) + C;$$

$$(3) \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx;$$

$$(4) \int kf(x) dx = k \int f(x) dx (k \text{ 为常数}).$$

二、不定积分基本公式

$$(1) \int 0 dx = C;$$

$$(2) \int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1);$$

$$(3) \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C;$$

$$(4) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1);$$

$$\begin{aligned}
 (5) \int e^x dx &= e^x + C; & (6) \int \sin x dx &= -\cos x + C; \\
 (7) \int \cos x dx &= \sin x + C; & (8) \int \sec^2 x dx &= \tan x + C; \\
 (9) \int \csc^2 x dx &= -\cot x + C; & (10) \int \sec x \tan x dx &= \sec x + C; \\
 (11) \int \csc x \cot x dx &= -\csc x + C; & (12) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + C; \\
 (13) \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan x + C; & (14) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} &= \arcsin \frac{x}{a} + C; \\
 (15) \int \frac{dx}{a^2+x^2} &= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C; & (16) \int \frac{dx}{x^2-a^2} &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C; \\
 (17) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} &= \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C; & (18) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} &= \ln |x + \sqrt{x^2-a^2}| + C; \\
 (19) \int \sec x dx &= \ln |\sec x + \tan x| + C; & (20) \int \csc x dx &= -\ln |\csc x + \cot x| + C.
 \end{aligned}$$

【例 2】 求下列不定积分

$$(1) \int \frac{(x+1)^3}{x^2} dx; \quad (2) \int \frac{x^4-x^2}{1+x^2} dx; \quad (3) \int \frac{1-\sin x}{1+\sin x} dx.$$

【解】 (1) $\int \frac{(x+1)^3}{x^2} dx = \int \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2} dx = \int \left(x+3+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2} \right) dx$
 $= \frac{1}{2}x^2 + 3x + 3\ln|x| - \frac{1}{x} + C.$

$$(2) \int \frac{x^4-x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{(x^4-1)-(1+x^2)+2}{1+x^2} dx = \int \left(x^2-1-1+\frac{2}{1+x^2} \right) dx \\
 = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 2\arctan x + C.$$

$$(3) \int \frac{1-\sin x}{1+\sin x} dx = \int \frac{(1-\sin x)^2}{\cos^2 x} dx = \int (\sec^2 x - 2\sec x \cdot \tan x + \tan^2 x) dx \\
 = \tan x - 2\sec x + \tan x - x + C \\
 = 2\tan x - 2\sec x - x + C.$$

三、三种主要积分法

1. 第一换元积分法

定理 设 $\int f(u) du = F(u) + C, u = \varphi(x)$ 存在连续导数, 则

$$\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \int f[\varphi(x)] d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C$$

常见的凑微分形式

$$(1) \int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int f(ax+b) d(ax+b);$$

$$(2) \int x^m f(ax^{m+1}+b) dx = \frac{1}{(m+1)a} \int f(ax^{m+1}+b) d(ax^{m+1}+b) \quad (m \neq -1);$$

$$(3) \int f(\sqrt{x}) \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \int f(\sqrt{x}) d\sqrt{x};$$

$$(4) \int f(e^x) e^x dx = \int f(e^x) d(e^x);$$

$$(5) \int f(\ln x) \frac{1}{x} dx = \int f(\ln x) d(\ln x);$$

$$(6) \int f(\sin x) \cos x dx = \int f(\sin x) d(\sin x);$$

$$(7) \int f(\cos x) \sin x dx = - \int f(\cos x) d(\cos x);$$

$$(8) \int f(\tan x) \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int f(\tan x) d(\tan x);$$

$$(9) \int f(\arcsin x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int f(\arcsin x) d(\arcsin x);$$

$$(10) \int f(\arctan x) \frac{1}{1+x^2} dx = \int f(\arctan x) d(\arctan x) \text{ 等.}$$

【例 3】 求下列不定积分

$$(1) \int \sec^4 x dx;$$

$$(2) \int \frac{(\ln x + 2)^2}{x} dx;$$

$$(3) \int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx;$$

$$(4) \int \frac{2-x}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx.$$

【解】 (1) $\int \sec^4 x dx = \int \sec^2 x \tan x = \int (\tan^2 x + 1) d \tan x$
 $= \frac{1}{3} \tan^3 x + \tan x + C;$

$$(2) \int \frac{(\ln x + 2)^2}{x} dx = \int (\ln x + 2)^2 d(\ln x + 2) = \frac{1}{3} (\ln x + 2)^3 + C;$$

$$(3) \int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx = 2 \int \frac{\arctan \sqrt{x}}{1+x} d\sqrt{x} = 2 \int \frac{\arctan \sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2} d\sqrt{x}$$

$$= 2 \int \arctan \sqrt{x} d \arctan \sqrt{x} = (\arctan \sqrt{x})^2 + C;$$

$$(4) \int \frac{2-x}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx = \int \frac{(1-x)+1}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{(2-2x)}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(3+2x-x^2)}{\sqrt{3+2x-x^2}} + \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{4-(x-1)^2}}$$

$$= \sqrt{3+2x-x^2} + \arcsin \frac{x-1}{2} + C.$$

【例 4】 (1997, 数二) 计算积分 $\int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【 $\arcsin \frac{x-2}{2} + C$ **】**

【例 5】(1993, 数三) $\int \frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

【 $\frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C$ 】

2. 第二换元积分法

定理 设 $x = \varphi(t)$ 是单调的、可导的函数, 并且 $\varphi'(t) \neq 0$. 又

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F(t) + C$$

则

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F(t) + C = F[\varphi^{-1}(x)] + C$$

其中 $\varphi^{-1}(x)$ 是 $x = \varphi(t)$ 的反函数.

常用的三种变量代换

(1) 被积函数含有 $\sqrt{a^2 - x^2}$, 令 $x = a \sin t$ (或 $a \cos t$).

(2) 被积函数含有 $\sqrt{a^2 + x^2}$, 令 $x = a \tan t$.

(3) 被积函数含有 $\sqrt{x^2 - a^2}$, 令 $x = a \sec t$.

【例 6】求下列不定积分, 其中 $a > 0$.

(1) $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx;$

(2) $\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x^2} dx;$

(3) $\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx;$

(4) $\int \sqrt{1 + e^x} dx.$

【解】(1) 令 $x = a \sin t$,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int \frac{a^2 \sin^2 t}{a \cos t} \cdot a \cos t dt = \frac{a^2}{2} \int (1 - \cos 2t) dt$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

(2) 令 $x = a \tan t$,

$$\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x^2} dx = \int \frac{a \sec t}{a^2 \tan^2 t} \cdot a \sec^2 t dt = \int \frac{1}{\sin^2 t \cos t} dt = \int \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t \cos t} dt$$

$$= \int \sec t dt + \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt = \ln |\sec t + \tan t| - \frac{1}{\sin t} + C$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} + C$$

或 $\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x^2} dx = \int \frac{x^2 + a^2}{x^2 \sqrt{x^2 + a^2}} dx$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \int \frac{a^2 dx}{x^3 \sqrt{1 + \left(\frac{a}{x}\right)^2}}$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \frac{1}{2} \int \frac{d[1 + \left(\frac{a}{x}\right)^2]}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{x}\right)^2}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \sqrt{1 + \left(\frac{a}{x}\right)^2} + C \\
 &= \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} + C.
 \end{aligned}$$

(3) 令 $x = a \sec t$,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx &= \int \frac{a \tan t}{a \sec t} \cdot a \sec t \tan t dt = a \int \tan^2 t dt \\
 &= a \int (\sec^2 t - 1) dt = a(\tan t - t) + C \\
 &= \sqrt{x^2 - a^2} - a \arccos \frac{a}{x} + C.
 \end{aligned}$$

(4) 令 $t = \sqrt{1 + e^x}$, 则 $x = \ln(t^2 - 1)$,

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{1 + e^x} dx &= \int \frac{2t^2}{t^2 - 1} dt = 2 \int \left(1 + \frac{1}{t^2 - 1}\right) dt = 2t + \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C \\
 &= 2\sqrt{1 + e^x} + \ln \frac{\sqrt{1 + e^x} - 1}{\sqrt{1 + e^x} + 1} + C.
 \end{aligned}$$



3. 分部积分法

(1) 分部积分公式

$$\int u dv = uv - \int v du$$

(2) 分部积分法所适用的函数类

分部积分法比较适用于两类不同函数相乘. 如下列积分, 这里 $p_n(x)$ 为 x 的 n 次多项式.

$$\begin{aligned}
 &\int p_n(x) e^{ax} dx, \quad \int p_n(x) \sin ax dx, \quad \int p_n(x) \cos ax dx, \quad \int e^{ax} \sin \beta x dx, \\
 &\int e^{ax} \cos \beta x dx, \quad \int p_n(x) \ln x dx, \quad \int p_n(x) \arctan x dx, \quad \int p_n(x) \arcsin x dx
 \end{aligned}$$

(3) 分部积分法中 u, v 的选取

分部积分法在使用时的关键是 u, v 的选取, 换句话说把谁凑到微分号里去.

① $\int p_n(x) e^{ax} dx, \int p_n(x) \sin ax dx, \int p_n(x) \cos ax dx$, 这三种积分都应把多项式以外的函数凑进微分号.

② $\int e^{ax} \sin \beta x dx, \int e^{ax} \cos \beta x dx$, 这两种积分把指数函数或三角函数凑进微分号都可以, 但把指数凑进去更简单, 连续两次将指数函数凑进去分部积分还原便可求解.

③ $\int p_n(x) \ln x dx, \int p_n(x) \arctan x dx, \int p_n(x) \arcsin x dx$, 这三种积分都应把多项式函数凑进微分号.

【例 7】 求下列不定积分

$$(1) \int x e^{2x} dx; \quad (2) \int x^2 \sin x dx; \quad (3) \int x \ln x dx; \quad (4) \int e^x \sin^2 x dx.$$

【例 8】(1990, 数三) 计算 $\int \frac{\ln x}{(1-x)^2} dx$.

$$\begin{aligned} \text{【解】} \quad \int \frac{\ln x}{(1-x)^2} dx &= \frac{\ln x}{1-x} - \int \frac{dx}{x(1-x)} = \frac{\ln x}{1-x} - \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right) dx \\ &= \frac{\ln x}{1-x} + \ln \frac{|1-x|}{x} + C. \end{aligned}$$

【例 9】(1998, 数二) $\int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x} dx =$ _____.

$$\begin{aligned} \text{【解】} \quad \int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x} dx &= - \int \ln \sin x \cot x = - \cot x \cdot \ln \sin x + \int \cot^2 x dx \\ &= - \cot x \cdot \ln \sin x + \int (\csc^2 x - 1) dx \\ &= - \cot x \cdot \ln \sin x - \cot x - x + C. \end{aligned}$$

四、三类常见可积函数积分

有理函数积分 $\int R(x) dx$

(1) 一般方法(部分分式法)

(2) 特殊方法(加项减项拆或凑微分降幂)

【例 10】(1999, 数二) $\int \frac{x+5}{x^2-6x+13} dx =$ _____.

$$\begin{aligned} \text{【解】} \quad \int \frac{x+5}{x^2-6x+13} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2-6x+13)}{x^2-6x+13} + 8 \int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2+2^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2-6x+13) + 4 \arctan \frac{x-3}{2} + C. \end{aligned}$$

【例 11】(1987, 数五) 求不定积分 $\int \frac{x dx}{x^4+2x^2+5}$.

$$\begin{aligned} \text{【解】} \quad \int \frac{x dx}{x^4+2x^2+5} &= \int \frac{x dx}{4+(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{4+(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1}{4} \arctan \frac{x^2+1}{2} + C. \end{aligned}$$

【例 12】(2019, 数二) 求不定积分 $\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)} dx$.

$$\begin{aligned} \text{【解】} \quad \text{令} \quad \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}, \text{ 则} \\ 3x+6 &= A(x-1)(x^2+x+1) + B(x^2+x+1) + (Cx+D)(x-1)^2 \\ \int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)} dx &= \int \frac{-2}{x-1} dx + \int \frac{3}{(x-1)^2} dx + \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx \\ &= -2 \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \ln(x^2+x+1) + C. \end{aligned}$$

三角有理式积分 $\int R(\sin x, \cos x) dx$ (1) 一般方法(万能代换) 令 $\tan \frac{x}{2} = t$.

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt$$

(2) 特殊方法(三角变形, 换元, 分部)

几种常用的换元法

① 若 $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, 则令 $u = \cos x$, 或凑 $d\cos x$.② 若 $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, 则令 $u = \sin x$, 或凑 $d\sin x$.③ 若 $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, 则令 $u = \tan x$, 或凑 $d\tan x$.【例 13】(1996, 数三) 求 $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$.【解 1】 原式 $= \int \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} dx = \tan x - \frac{1}{\cos x} + C$.【解 2】 令 $\tan \frac{x}{2} = t$, 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2dt}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+t} + C \\ &= -\frac{2}{1 + \tan \frac{x}{2}} + C \end{aligned}$$

【例 14】(1994, 数一、二、三) 求 $\int \frac{dx}{\sin(2x) + 2\sin x}$.

【解】 原式 $= \int \frac{dx}{2\sin x(\cos x + 1)} = \int \frac{\sin x dx}{2(1 - \cos^2 x)(1 + \cos x)}$

$\frac{\cos x = u}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \int \frac{du}{(1-u^2)(1+u)} = -\frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{1-u^2} + \frac{1}{(1+u)^2} \right) du$

$= \frac{1}{8} \left(\ln \frac{1-u}{1+u} + \frac{2}{1+u} \right) + C$

$= \frac{1}{8} \ln \frac{1-\cos x}{1+\cos x} + \frac{1}{4(1+\cos x)} + C$.

【例 15】 计算 $\int \frac{dx}{\cos x(1 + \sin x)}$.【例 16】 计算 $\int \frac{dx}{\sin x(\sin x + \cos x)}$.简单无理函数积分 $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ 令 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$, 将其化为有理函数积分进行计算.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

【例 17】 计算 $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx$.

【解 1】 令 $\sqrt{\frac{x+1}{x}} = t$, 则 $x = \frac{1}{t^2-1}$, $dx = -\frac{2t}{(t^2-1)^2} dt$,

$$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx = \int (t^2-1)t \frac{-2t}{(t^2-1)^2} dt = -2 \int \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right) dt$$

$$= -2 \left(t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) + C.$$

【解 2】 分子有理化.

。 常考题型与典型例题 。

常考题型

求不定积分(换元、分部)

【例 18】 计算积分 $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \underline{\hspace{2cm}}$. 【 $-2\arctan \sqrt{1-x} + C$ 】

【例 19】 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \geq 0 \\ \cos x, & x < 0 \end{cases}$, 则 $\int f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

【 $\begin{cases} e^x + C, & x \geq 0 \\ \sin x + 1 + C, & x < 0 \end{cases}$ 】

【例 20】 (2016, 数一、二) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的一个原函数是

(A) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x - 1), & x \geq 1 \end{cases}$ (B) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x + 1) - 1, & x \geq 1 \end{cases}$
 (C) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x + 1) + 1, & x \geq 1 \end{cases}$ (D) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geq 1 \end{cases}$

【D】

【解 1】 求 $F(x)$.

【解 2】 验证 $F'(x) = f(x)$.

【例 21】 计算 $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx (a > 0)$.

【解 1】 令 $x = a \sin t$.

【解 2】 $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = - \int x d \sqrt{a^2-x^2}$.

【例 22】 (2006, 数二) 计算 $I = \int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx$.

【解 1】 $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx = - \int \arcsin e^x d(e^{-x}) = - \frac{\arcsin e^x}{e^x} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$

在 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ 中, 令 $\sqrt{1-e^{2x}} = t$, 则 $dx = \frac{-tdt}{1-t^2}.$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} = - \int \frac{dt}{1-t^2} = - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{1-e^{2x}}}{1-\sqrt{1-e^{2x}}} + C.$$

$$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx = - \frac{\arcsin e^x}{e^x} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{1-e^{2x}}}{1-\sqrt{1-e^{2x}}} + C.$$

【解 2】 令 $\arcsin e^x = t$, 则 $x = \ln \sin t, dx = \frac{\cos t}{\sin t} dt.$

$$\begin{aligned} \int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx &= \int \frac{t}{\sin t} \cdot \frac{\cos t}{\sin t} dt = - \int t d \frac{1}{\sin t} = - \frac{t}{\sin t} + \int \frac{1}{\sin t} dt \\ &= - \frac{t}{\sin t} - \ln |\csc t + \cot t| + C \\ &= - \frac{\arcsin e^x}{e^x} - \ln \left| \frac{1}{e^x} + \frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{e^x} \right| + C \\ &= - \frac{\arcsin e^x}{e^x} - \ln(1 + \sqrt{1-e^{2x}}) + x + C. \end{aligned}$$

【例 23】 (2011, 数三) 求不定积分 $\int \frac{\arcsin \sqrt{x} + \ln x}{\sqrt{x}} dx.$

【解】
$$\begin{aligned} \int \frac{\arcsin \sqrt{x} + \ln x}{\sqrt{x}} dx &= 2 \int (\arcsin \sqrt{x} + \ln x) d\sqrt{x} \\ &= 2\sqrt{x}(\arcsin \sqrt{x} + \ln x) - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} - 2 \int \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &= 2\sqrt{x}(\arcsin \sqrt{x} + \ln x) + \int \frac{d(1-x)}{\sqrt{1-x}} - 4\sqrt{x} \\ &= 2\sqrt{x}(\arcsin \sqrt{x} + \ln x) + 2\sqrt{1-x} - 4\sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

【例 24】 (2009, 数二、三) 计算不定积分 $\int \ln \left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) dx (x > 0).$

【解】 设 $\sqrt{\frac{1+x}{x}} = t$, 则 $x = \frac{1}{t^2-1},$

$$\int \ln \left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) dx = \int \ln(1+t) d \frac{1}{t^2-1} = \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \int \frac{1}{t^2-1} \cdot \frac{1}{t+1} dt$$

而
$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(t^2-1)(t+1)} dt &= \frac{1}{2} \int \frac{(t+1) - (t-1)}{(t^2-1)(t+1)} dt \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + \frac{1}{2(t+1)} + C \end{aligned}$$

$$\int \ln \left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) dx = \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| - \frac{1}{2(t+1)} + C$$

【例 25】 (1994, 数五) 已知 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $\int x^3 f'(x) dx$.

【解】 由于 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 有

$$f(x) = \left(\frac{\sin x}{x} \right)' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

因此

$$\begin{aligned} \int x^3 f'(x) dx &= \int x^3 df(x) = x^3 f(x) - 3 \int x^2 f(x) dx \\ &= x^3 f(x) - 3 \int x^2 d\left(\frac{\sin x}{x}\right) \\ &= x^3 f(x) - 3 \left[x^2 \frac{\sin x}{x} - 2 \int \sin x dx \right] \\ &= x^3 \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} - 3x \sin x - 6 \cos x + C \\ &= x^2 \cos x - 4x \sin x - 6 \cos x + C \end{aligned}$$

【例 26】 (2002, 数三、四) 设 $f(\sin^2 x) = \frac{x}{\sin x}$, 求 $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x) dx$.

【解】 令 $u = \sin^2 x$, 则有 $\sin x = \sqrt{u}$, $x = \arcsin \sqrt{u}$, $f(x) = \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x) dx &= \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx = - \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} d(1-x) \\ &= -2 \int \arcsin \sqrt{x} d\sqrt{1-x} \\ &= -2 \sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} + 2 \int \sqrt{1-x} \frac{1}{\sqrt{1-x}} d\sqrt{x} \\ &= -2 \sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} + 2 \sqrt{x} + C \end{aligned}$$

黑发不知勤学早, 白首方悔读书迟。

——唐·颜真卿



第五章 定积分与反常积分

。 本章考点 。

定积分的概念和基本性质 定积分中值定理 函数的平均值 积分上限的函数及其导数 牛顿—莱布尼茨(Newton—Leibniz)公式 反常(广义)积分

第一节 定积分

。 考试内容概要 。

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

一、定积分的概念

1. 定积分的定义

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义且有界.

(1) 分割 在 $[a, b]$ 中任意插入 $n-1$ 个分点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, 将区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ 表示第 i 个小区间的长度.

(2) 求和 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i , 作和式 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$, 记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$.

(3) 取极限 若极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 存在, 且此极限值既不依赖于区间 $[a, b]$ 的分法, 也不依赖于点 ξ_i 的取法, 则称 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积, 并称此极限为 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分, 记为 $\int_a^b f(x) dx$, 即

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

【注】 (1) 定积分表示一个数值, 仅与积分区间 $[a, b]$ 和被积函数 $f(x)$ 有关, 与积分变量 x 无关, 因此有

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$$

(2) 若积分 $\int_a^b f(x) dx$ 存在, 则 $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$, 且极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 与 ξ_i 的取法和区间 $[a, b]$ 的分法无关.

因此, 如果积分 $\int_0^1 f(x) dx$ 存在, 就可将 $[0, 1]$ 区间 n 等分, 此时 $\Delta x_i = \frac{1}{n}$, 取 $\xi_i = \frac{i}{n}$, 由定积分的定义得

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)$$

上式在用定积分定义求极限时是一种常见形式.

2. 定积分存在的充分条件

定理 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 必定存在.

定理 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 且只有有限个间断点, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 必定存在.

定理 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上只有有限个第一类间断点, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 必定存在.

3. 定积分的几何意义

(1) 设 $\int_a^b f(x) dx$ 存在, 若在 $[a, b]$ 上 $f(x) \geq 0$, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 的值等于以曲线 $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形的面积.

(2) 若在 $[a, b]$ 上 $f(x) \leq 0$, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 的值等于以曲线 $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形面积的负值.

(3) 若在 $[a, b]$ 上 $f(x)$ 的值有正也有负, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 的值等于 x 轴上方的面积减去 x 轴下方的面积所得之差.

二、定积分的性质

1. 不等式性质

(1) 若在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) \leq g(x)$, 则 $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

(2) 若 M 及 m 分别是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值和最小值, 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

(3) $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

2. 中值定理

(1) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a) \quad (a < \xi < b)$$

常称 $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ 为函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的平均值.

(2) 若 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $g(x)$ 不变号, 则

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx \quad (a \leq \xi \leq b)$$

三、积分上限的函数

变上限的积分 $\int_a^x f(t) dt$ 是其上限 x 的函数, 常称之为积分上限函数.

定理 如果 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $\frac{d\Phi(x)}{dx} = f(x)$.

由原函数的概念可知, 如果 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ 为 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的一个原函数. 由此可知, 连续函数必有原函数.

【注】 如果 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的连续函数, $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 为可导函数, 则

$$\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t) dt \right)' = f[\varphi_2(x)] \cdot \varphi_2'(x) - f[\varphi_1(x)] \cdot \varphi_1'(x)$$

变上限积分 $\int_a^x f(t) dt$ 表示一个函数, 因此, 我们经常会遇到与函数相关的问题: 如求极限, 判定连续性, 求导数, 求微分, 判定单调性, 曲线的凹凸性等.

定理 设函数 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上连续, 则

如果 $f(x)$ 为奇函数, 那么 $\int_0^x f(t) dt$ 必为偶函数;

如果 $f(x)$ 为偶函数, 那么 $\int_0^x f(t) dt$ 必为奇函数.

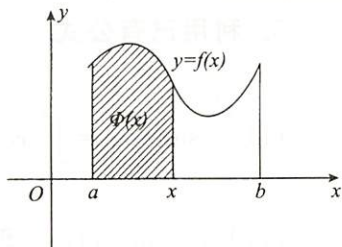


图 1

四、定积分的计算

定积分的计算主要有以下五种方法:

1. 牛顿—莱布尼茨公式

设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数, 则有

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

2. 换元积分法

设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 函数 $x = \varphi(t)$ 满足以下条件:

(1) $\varphi(a) = a, \varphi(\beta) = b$;

(2) $\varphi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ (或 $[\beta, \alpha]$) 上有连续导数, 且 $R_\varphi \subseteq I$, 则

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

3. 分部积分法

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

4. 利用奇偶性和周期性

(1) 设 $f(x)$ 为 $[-a, a]$ 上的连续函数 ($a > 0$), 则

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 0, & f(x) \text{ 为奇函数时} \\ 2 \int_0^a f(x) dx, & f(x) \text{ 为偶函数时} \end{cases}$$

(2) 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数, 则对任给数 a , 总有

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

5. 利用已有公式

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3}, & n \text{ 为大于 1 的奇数} \end{cases}$$

$$(2) \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx \quad (\text{其中 } f(x) \text{ 连续}).$$

。 常考题型与典型例题 。

常考题型

1. 定积分的概念、性质及几何意义
2. 定积分的计算
3. 变上限定积分

一、定积分的概念、性质及几何意义

【例 1】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) = \underline{\hspace{2cm}}. \quad [\ln 2]$

【例 2】 (2012, 数二) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2} \right) = \underline{\hspace{2cm}}. \quad \left[\frac{\pi}{4} \right]$

【例 3】 (2016, 数二、三) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{1}{n} + 2 \sin \frac{2}{n} + \cdots + n \sin \frac{n}{n} \right) = \underline{\hspace{2cm}}. \quad [\sin 1 - \cos 1]$

【例 4】 (2017, 数一、二、三) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) = \underline{\hspace{2cm}}. \quad \left[\frac{1}{4} \right]$

【例 5】 (2007, 数一、二、三) 如图 2, 连续函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-3, -2]$, $[2, 3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周, 在区间 $[-2, 0]$, $[0, 2]$ 的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周. 设 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则下列结论正确的是

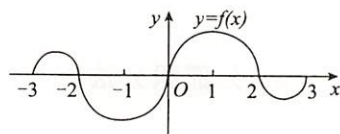


图 2

- (A) $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2).$ (B) $F(3) = \frac{5}{4}F(2).$
 (C) $F(-3) = \frac{3}{4}F(2).$ (D) $F(-3) = -\frac{5}{4}F(-2).$ 【C】

【例 6】 (1997, 数一、二) 设在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) > 0, f'(x) < 0, f''(x) > 0$. 令 $S_1 = \int_a^b f(x) dx, S_2 = f(b)(b-a), S_3 = \frac{1}{2}[f(a) + f(b)](b-a)$, 则

(A) $S_1 < S_2 < S_3$.

(B) $S_2 < S_1 < S_3$.

(C) $S_3 < S_1 < S_2$.

(D) $S_2 < S_3 < S_1$.

【B】

【例 7】(2011, 数一、二、三) 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cot x dx$, $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx$, 则 I, J, K 的大小关系为

(A) $I < J < K$.

(B) $I < K < J$.

(C) $J < I < K$.

(D) $K < J < I$. 【B】

【例 8】(2017, 数二) 设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f(1) = f(-1) = 1$, $f(0) = -1$, 且 $f''(x) > 0$, 则

(A) $\int_{-1}^1 f(x) dx > 0$.

(B) $\int_{-1}^1 f(x) dx < 0$.

(C) $\int_{-1}^0 f(x) dx > \int_0^1 f(x) dx$.

(D) $\int_{-1}^0 f(x) dx < \int_0^1 f(x) dx$.

【B】

【例 9】(1991, 数一、二) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $(0, 1)$ 内可导, 且 $3 \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx = f(0)$, 证明在 $(0, 1)$ 内存在一点 c , 使 $f'(c) = 0$.

二、定积分的计算

【例 10】(2001, 数二) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + \sin^2 x) \cos^2 x dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

【 $\frac{\pi}{8}$ 】

【例 11】(2017, 数三) $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^3 x + \sqrt{\pi^2 - x^2}) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

【 $\frac{\pi^3}{2}$ 】

【例 12】(2000, 数一) $\int_0^1 \sqrt{2x - x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

【 $\frac{\pi}{4}$ 】

【例 13】 $\int_0^{\pi} x \sin^2 x dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

【 $\frac{\pi^2}{4}$ 】

【例 14】(2005, 数二) 计算 $\int_0^1 \frac{x dx}{(2 - x^2) \sqrt{1 - x^2}}.$

【 $\frac{\pi}{4}$ 】

【例 15】(2010, 数一) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

【 -4π 】

【例 16】计算 $\int_0^1 x \arcsin x dx.$

【 $\frac{\pi}{8}$ 】

【解 1】分部 + 几何意义.

【解 2】令 $x = \sin t$.

【例 17】 (1995, 数三) 设 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t} dt$, 计算 $\int_0^\pi f(x) dx$.

【2】

三、变上限定积分

【例 18】 设 $f(x)$ 连续, 试求下列函数的导数.

(1) $\int_{e^x}^{x^2} f(t) dt$;

(2) $\int_0^x (x-t)f(t) dt$;

(3) $\int_0^x \cos(x-t)^2 dt$;

(4) $\int_1^2 f(x+t) dt$.

【例 19】 (2015, 数二、三) 设函数 $f(x)$ 连续, $\varphi(x) = \int_0^{x^2} xf(t) dt$. 若 $\varphi(1) = 1, \varphi'(1) = 5$, 则 $f(1) =$ _____.

【2】

【例 20】 (1998, 数一) 设 $f(x)$ 连续, 则 $\frac{d}{dx} \int_0^x tf(x^2 - t^2) dt =$

(A) $xf(x^2)$.

(B) $-xf(x^2)$.

(C) $2xf(x^2)$.

(D) $-2xf(x^2)$. 【A】

【例 21】 (1993, 数三) 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$, 设 $F(x) = \int_1^x f(t) dt (0 \leq x \leq 2)$, 则 $F(x)$ 为

(A) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & 0 \leq x < 1 \\ x-1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}, & 0 \leq x < 1 \\ x-1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ 【D】

【解 1】 求 $F(x)$.

【解 2】 验证 $F'(x) = f(x)$.

【例 22】 (1988, 数二) 设 $x \geq -1$, 求 $\int_{-1}^x (1 - |t|) dt$.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(1+x)^2, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}(1-x)^2, & x > 0 \end{cases}$$

【例 23】 (2013, 数二) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x < \pi \\ 2, & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则

(A) $x = \pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点. (B) $x = \pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点.

(C) $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处连续但不可导. (D) $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处可导. 【C】

【例 24】 (1998, 数二) 确定常数 a, b, c 的值, 使 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt} = c \quad (c \neq 0)$.

$$[a = 1, b = 0, c = \frac{1}{2}]$$

【例 25】 (2017, 数二、三) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt}{\sqrt{x^3}}$. 【 $\frac{2}{3}$ 】

【解 1】 令 $x - t = u$.

【解 2】 积分中值定理.

【例 26】 (2010, 数三) 设可导函数 $y = y(x)$ 由方程 $\int_0^{x+y} e^{-t^2} dt = \int_0^x x \sin t^2 dt$ 确定, 则

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}. \quad \text{【-1】}$$

第二节 反常积分

(ID: djky66)

。 考试内容概要 。

一、无穷区间上的反常积分

定义 (1) 设 $f(x)$ 为 $[a, +\infty)$ 上的连续函数, 如果极限 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$ 存在, 则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a, +\infty)$ 上的反常积分, 记作 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, 即

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$$

这时也称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛. 如果上述极限不存在, 则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散.

(2) 设 $f(x)$ 为 $(-\infty, b]$ 上的连续函数, 则可类似的定义函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty, b]$ 上的反常积分

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx$$

(3) 设 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数, 如果反常积分

$$\int_{-\infty}^0 f(x) dx \text{ 和 } \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

都收敛, 则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

如果 $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$ 与 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 至少有一个发散, 则称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 发散.

常用结论: $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \begin{cases} p > 1, & \text{收敛} \\ p \leq 1, & \text{发散} \end{cases}, (a > 0).$

二、无界函数的反常积分

如果函数 $f(x)$ 在点 a 的任一邻域内都无界, 那么点 a 称为函数 $f(x)$ 的瑕点(也称为无界点). 无界函数的反常积分也称为瑕积分.

定义 (1) 设函数 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上连续, 点 a 为函数 $f(x)$ 的瑕点. 如果极限

$$\lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

存在, 则称此极限为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的反常积分, 记作 $\int_a^b f(x) dx$, 即

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

这时也称反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛. 如果上述极限不存在, 则称反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 发散.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 上连续, 点 b 为函数 $f(x)$ 的瑕点. 则可类似的定义函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的反常积分

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上除点 $c (a < c < b)$ 外连续, 点 c 为函数 $f(x)$ 的瑕点. 如果反常积分

$$\int_a^c f(x) dx \text{ 和 } \int_c^b f(x) dx$$

都收敛, 则称反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛, 且

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

如果 $\int_a^c f(x) dx$ 与 $\int_c^b f(x) dx$ 至少有一个发散, 则称 $\int_a^b f(x) dx$ 发散.

常用结论: $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx \begin{cases} p < 1, & \text{收敛} \\ p \geq 1, & \text{发散} \end{cases}$

$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p} dx \begin{cases} p < 1, & \text{收敛} \\ p \geq 1, & \text{发散} \end{cases}$

常考题型与典型例题

常考题型

1. 反常积分的敛散性
2. 反常积分的计算

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

一、反常积分的敛散性

【例 1】(2015, 数二) 下列反常积分中收敛的是

- (A) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$. (B) $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$. (C) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$. (D) $\int_2^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx$. 【D】

【例 2】(2013, 数二) 设函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1 < x < e \\ \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x}, & x \geq e \end{cases}$$

若反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则

- (A) $\alpha < -2$. (B) $\alpha > 2$. (C) $-2 < \alpha < 0$. (D) $0 < \alpha < 2$. 【D】

【例 3】(2016, 数二) 反常积分 $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$ 的敛散性为

- (A) 收敛, 收敛. (B) 收敛, 发散. (C) 发散, 收敛. (D) 发散, 发散. 【B】

【例 4】(2016, 数一) 反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a (1+x)^b} dx$ 收敛, 则

- (A) $a < 1, b > 1$. (B) $a > 1, b > 1$.
(C) $a < 1, a+b > 1$. (D) $a > 1, a+b > 1$. 【C】

二、反常积分的计算

【例 5】(2000, 数二) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}} = \underline{\hspace{2cm}}$. 【 $\frac{\pi}{3}$ 】

【例 6】(2000, 数四) 计算 $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{2-x}}$. 【 $\frac{\pi}{4e}$ 】

【例 7】(2013, 数一、三) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$. 【 $\ln 2$ 】

第六章

定积分的应用

。本章考点。

(仅数学一、二) 平面图形的面积 平面曲线的弧长 旋转体的体积及侧面积 平行截面面积为已知的立体体积 功 引力 压力 质心 形心等

(仅数学三) 平面图形的面积 旋转体的体积 简单经济应用

。考试内容概要。

用定积分可表示一些几何量与物理量(平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、变力做功、压力和函数平均值等),定积分的这些应用有个共同思想,即建立“微元”,然后微元积分就得到所求量.

一、几何应用

1. 平面图形的面积

(1) 若平面域 D 由曲线 $y = f(x), y = g(x) (f(x) \geq g(x)), x = a, x = b (a < b)$ 所围成, 则平面域 D 的面积为

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

(2) 若平面域 D 由曲线 $\rho = \rho(\theta), \theta = \alpha, \theta = \beta (\alpha < \beta)$ 所围成, 则其面积为

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\theta) d\theta$$

2. 旋转体体积

若区域 D 由曲线 $y = f(x) (f(x) \geq 0)$ 和直线 $x = a, x = b (0 \leq a < b)$ 及 x 轴所围成, 则

(1) 区域 D 绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体体积为

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

(2) 区域 D 绕 y 轴旋转一周所得到的旋转体体积为

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

3. 曲线弧长(数三不要求)

(1) $C: y = y(x), a \leq x \leq b$.

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

(2) $C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \alpha \leq t \leq \beta$.

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

(3) $C: \rho = \rho(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta$.

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta$$

4. 旋转体侧面积(数三不要求)

曲线 $y = f(x) (f(x) \geq 0)$ 和直线 $x = a, x = b (0 \leq a < b)$ 及 x 轴所围成区域绕 x 轴旋转所得旋转体的侧面积为

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

二、物理应用(数学三不要求)

1. 压力; 2. 变力做功; 3. 引力.

常考题型与典型例题

常考题型

平面域面积和旋转体体积的计算

【例 1】(2014, 数三) 设 D 是由曲线 $xy + 1 = 0$ 与直线 $y + x = 0$ 及 $y = 2$ 围成的有界区域, 则 D 的面积为_____.

【 $\frac{3}{2} - \ln 2$ 】

【例 2】(2013, 数二) 设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r = \cos 3\theta \left(-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}\right)$, 则 L 所围平面图形的面积是_____.

【 $\frac{\pi}{12}$ 】

【例 3】(2015, 数二、三) 设 $A > 0$, D 是由曲线段 $y = A \sin x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ 及直线 $y = 0, x = \frac{\pi}{2}$ 所围成的平面区域, V_1, V_2 分别表示 D 绕 x 轴与 y 轴旋转所成旋转体的体积. 若 $V_1 = V_2$, 求 A 的值.

【 $A = \frac{8}{\pi}$ 】

【例 4】 (2012, 数二) 过点 $(0, 1)$ 作曲线 $L: y = \ln x$ 的切线, 切点为 A , 又 L 与 x 轴交于 B 点, 区域 D 由 L 与直线 AB 围成. 求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

【解 1】 设切点为 (x_0, y_0) , 则切线方程为 $y - y_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0)$.

【解 2】 设过点 $(0, 1)$ 的切线方程为 $y - 1 = kx$. **【 $S = 2, V = \frac{2\pi}{3}(e^2 - 1)$ 】**

【例 5】 (2011, 数一、二) 曲线 $y = \int_0^x \tan t dt$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$) 的弧长 $s =$ _____.

【 $\ln(1 + \sqrt{2})$ 】

【例 6】 (2011, 数二) 一容器的内侧是由图中曲线绕 y 轴旋转一周而成的曲面, 该曲线由 $x^2 + y^2 = 2y$ ($y \geq \frac{1}{2}$) 与 $x^2 + y^2 = 1$ ($y \leq \frac{1}{2}$) 连接而成.

(1) 求容器的容积;

(2) 若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出, 至少需要做多少功?

(长度单位: m, 重力加速度为 $g \text{ m/s}^2$, 水的密度为 10^3 kg/m^3)

【解】 (1) 由对称性, 所求的容积为

$$V = 2\pi \int_{-1}^{\frac{1}{2}} x^2 dy = 2\pi \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (1 - y^2) dy = \frac{9\pi}{4}$$

即该容器的容积为 $\frac{9\pi}{4} \text{ m}^3$.

(2) 所求的功为

$$\begin{aligned} W &= 10^3 \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \pi(1 - y^2)(2 - y)g dy + 10^3 \int_{\frac{1}{2}}^2 \pi[2y - y^2](2 - y)g dy \\ &= 10^3 \pi g \left[\int_{-1}^{\frac{1}{2}} (2 - y - 2y^2 + y^3) dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 (4y - 4y^2 + y^3) dy \right] = \frac{27 \times 10^3}{8} \pi g \end{aligned}$$

即所求的功为 $\frac{27 \times 10^3}{8} \pi g \text{ J}$.

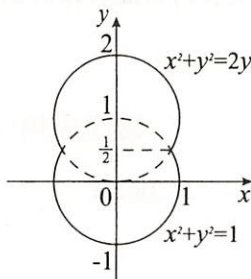


图 1

【例 7】 (2002, 数二) 某闸门的形状与大小如图所示, 其中 y 轴为对称轴, 闸门的上部为矩形 $ABCD$, 其中 $DC = 2 \text{ m}$, 下部由二次抛物线与线段 AB 所围成, 当水面与闸门的上端相平时, 欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为 $5:4$, 闸门矩形部分的高 h 应为多少 m (米)?

【解】 如图建立坐标系, 则抛物线的方程为 $y = x^2$.

闸门矩形部分承受的水压力

$$P_1 = 2 \int_1^{h+1} \rho g (h+1 - y) dy = 2\rho g \left[(h+1)y - \frac{y^2}{2} \right] \Big|_1^{h+1}$$

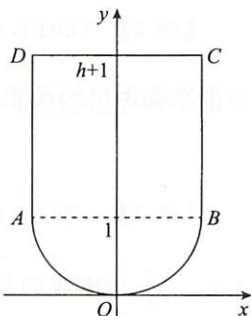


图 2

$$= \rho g h^2$$

其中 ρ 为水的密度, g 为重力加速度.

闸门下部承受的水压力

$$\begin{aligned} P_2 &= 2 \int_0^1 \rho g (h+1-y) \sqrt{y} dy = 2\rho g \left[\frac{2}{3}(h+1)y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} \right] \Big|_0^1 \\ &= 4\rho g \left(\frac{1}{3}h + \frac{2}{15} \right) \end{aligned}$$

由题意知 $\frac{P_1}{P_2} = \frac{5}{4}$, 即

$$\frac{h^2}{4\left(\frac{1}{3}h + \frac{2}{15}\right)} = \frac{5}{4}$$

解之得 $h = 2, h = -\frac{1}{3}$ (舍去), 故 $h = 2$, 即闸门矩形部分的高应为 2m.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

重要的不是知识的数量，而是知识的质量，有些人知道很多很多，但却不知道最有用的东西。

——托尔斯泰



第七章 微分方程

。本章考点。

常微分方程的基本概念 变量可分离的微分方程 齐次微分方程 一阶线性微分方程 线性微分方程解的性质及解的结构定理 二阶常系数齐次线性微分方程 简单的二阶常系数非齐次线性微分方程 微分方程的简单应用

(仅数学一) 伯努利(Bernoulli) 方程 全微分方程 可用简单的变量代换求解的某些微分方程 欧拉(Euler) 方程

(仅数学一、二) 可降阶的高阶微分方程 高于二阶的某些常系数齐次线性微分方程

(仅数学三) 差分与差分方程 差分方程的通解与特解 一阶常系数线性差分方程的求解 微分方程求解简单的经济应用问题

。考试内容概要。

一、常微分方程的基本概念

1. 微分方程

含有未知函数的导数或微分的方程称为微分方程,简称方程.

2. 微分方程的阶

微分方程中所出现的未知函数最高阶导数的阶数,称为微分方程的阶.

3. 微分方程的解

满足微分方程的函数,称为该方程的解.

4. 微分方程的通解

如果微分方程的解中含有任意常数,且任意常数的个数与微分方程的阶数相同,则称之为微分方程的通解.

5. 微分方程的特解

微分方程的不含任意常数的解,称之为特解.

6. 初始条件

确定特解的一组常数称为初始条件.

7. 积分曲线

方程的一个解在平面上对应一条曲线,称为该微分方程的积分曲线.

二、一阶微分方程

1. 可分离变量的方程

能表示为 $g(y)dy = f(x)dx$ 的方程,称为可分离变量的方程.

求解的方法是两端积分

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

【例 1】 (2006, 数一、二) 微分方程 $y' = \frac{y(1-x)}{x}$ 的通解是_____. **【 $y = Cxe^{-x}$ 】**

2. 齐次微分方程

能化为 $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 的微分方程称为齐次微分方程.

求解齐次微分方程的一般方法为:令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y' = u + xu'$, 从而将原方程化为 $xu' = \varphi(u) - u$, 此方程为可分离变量的方程.

【例 2】 (1993, 数一、二) 求微分方程 $x^2y' + xy = y^2$ 满足初始条件 $y(1) = 1$ 的特解.

【解】 原方程为齐次方程 $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x}$, 令 $u = \frac{y}{x}$, 则

$$xu' + u = u^2 - u, xu' = u^2 - 2u$$

分离变量得

$$\frac{du}{u^2 - 2u} = \frac{1}{x}dx$$

积分得

$$\frac{1}{2}(\ln|u-2| - \ln|u|) = \ln|x| + C_1, \frac{u-2}{u} = Cx^2$$

即

$$\frac{y-2x}{y} = Cx^2$$

由 $y(1) = 1$, 得 $C = -1$, 即得所求的特解为

$$\frac{y-2x}{y} = -x^2, \text{ 即 } y = \frac{2x}{1+x^2}$$

3. 一阶线性微分方程

形如 $y' + p(x)y = Q(x)$ 的方程称为一阶线性微分方程.

求解一阶线性微分方程的一般方法为常数变易法, 或直接利用以下通解公式

$$y = e^{-\int p(x) dx} \left[\int Q(x) e^{\int p(x) dx} dx + C \right]$$

【例 3】 (2008, 数二、四) 微分方程 $(y + x^2 e^{-x}) dx - x dy = 0$ 的通解是_____.

【 $y = x(C - e^{-x})$ 】

4. 伯努利方程 (仅数学一要求)

形如 $y' + p(x)y = Q(x)y^n$ 的方程 ($n \neq 0, 1$), 称为伯努利方程.

求解伯努利方程的一般方法: 令 $u = y^{1-n}$, 将原方程化为一阶线性微分方程.

5. 全微分方程 (仅数学一要求)

如果方程 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ 的左端是某个函数 $u(x, y)$ 的全微分

$$du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

则称该方程为全微分方程. 此方程的通解为

$$u(x, y) = C$$

求 $u(x, y)$ 有以下三种方法

(1) 偏积分; (2) 凑微分; (3) 线积分.

当 $P(x, y), Q(x, y)$ 在单连通域 G 内具有一阶连续偏导数时, 方程

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

是全微分方程的充要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

【注】 如果给定的一阶微分方程不属于上述五种标准形式, 首先考虑将 x, y 对调, 即认定 x 为 y 的函数, 再判定新方程的类型; 或者利用简单的变量代换将其化为上述五种类型之一而求解.

三、可降阶的高阶方程 (数学三不要求)

1. $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

2. $y'' = f(x, y')$ 型的方程

只需令 $y' = p, y'' = p'$, 可将原方程化为一阶微分方程.

【例 4】 (2000, 数一) 微分方程 $xy'' + 3y' = 0$ 的通解为_____.

【 $y = C_1 + \frac{C_2}{x^2}$ 】

3. $y'' = f(y, y')$ 型的方程

只需令 $y' = p, y'' = p \frac{dp}{dy}$, 可将原方程化为一阶微分方程.

【例 5】 (2002, 数一、二) 微分方程 $yy'' + y'^2 = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = \frac{1}{2}$

的特解是_____.

【 $y = \sqrt{x+1}$ 】

四、高阶线性微分方程

1. 线性微分方程的解的结构

这里只讨论二阶线性微分方程, 其结论可以推广到更高阶的方程. 二阶线性微分方程的一般形式为

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

这里的 $p(x), q(x), f(x)$ 均为连续函数. 当方程右端的 $f(x) \equiv 0$ 时, 称为二阶线性齐次方程, 否则称为二阶线性非齐次方程.

$$\text{齐次方程} \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$$

$$\text{非齐次方程} \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (2)$$

定理 如果 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是齐次方程 (1) 的两个线性无关的特解, 那么

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

就是方程 (1) 的通解.

【注】 方程 (1) 的两个解线性无关的充要条件是它们之比不为常数.

定理 如果 y^* 是非齐次方程 (2) 的一个特解, $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是齐次方程 (1) 的两个线性无关的特解, 则

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y^*(x)$$

是非齐次微分方程 (2) 的通解.

定理 如果 $y_1^*(x), y_2^*(x)$ 是非齐次方程 (2) 的两个特解, 则 $y(x) = y_2^*(x) - y_1^*(x)$ 是齐次微分方程 (1) 的解.

定理 如果 $y_1^*(x), y_2^*(x)$ 分别是方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$$

的特解, 则 $y_1^*(x) + y_2^*(x)$ 是方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

的一个特解.

2. 常系数齐次线性微分方程

二阶常系数线性齐次微分方程的一般形式为

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (3)$$

其特征方程为 $r^2 + pr + q = 0$, 设 r_1, r_2 为该方程的两个根.

(1) 若 $r_1 \neq r_2$ 为两个不相等的实特征根, 则方程 (3) 的通解为

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

(2) 若 $r_1 = r_2$ 为二重实特征根, 则方程 (3) 的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$$

(3) 若 $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$ 为一对共轭复根, 则方程 (3) 的通解为

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

【例 6】(2013, 数三) 微分方程 $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$ 的通解为_____.

$$【y = e^{\frac{1}{2}x}(C_1 + C_2x)】$$

【例 7】(1996, 数三) 微分方程 $y'' + 2y' + 5y = 0$ 的通解为 $y =$ _____.

$$【y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)】$$

【例 8】(2010, 数二) 三阶常系数线性齐次微分方程 $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$ 的通解为 $y =$ _____.

$$【y = C_1 e^{2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x】$$

3. 常系数非齐次线性微分方程

二阶常系数线性非齐次微分方程的一般形式为

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (4)$$

(1) 若 $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$, 其中 $P_m(x)$ 为 x 的 m 次多项式, 则方程 (4) 的特解可设为

$$y^* = x^k Q_m(x) e^{\lambda x}$$

其中 $Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 同次的多项式, k 是特征方程含根 λ 的重复次数.

(2) 若 $f(x) = e^{\alpha x} [P_l^{(1)}(x) \cos \beta x + P_n^{(2)}(x) \sin \beta x]$, 其中 $P_l^{(1)}(x), P_n^{(2)}(x)$ 分别为 x 的 l 次, n 次多项式, 则方程 (4) 的特解可设为

$$y^* = x^k e^{\alpha x} [R_m^{(1)}(x) \cos \beta x + R_m^{(2)}(x) \sin \beta x]$$

其中 $R_m^{(1)}(x), R_m^{(2)}(x)$ 是两个 m 次多项式, $m = \max\{l, n\}$.

当 $\alpha + i\beta$ 不是方程 (3) 的特征根时, 取 $k = 0$;

当 $\alpha + i\beta$ 是方程 (3) 的单特征根时, 取 $k = 1$.

【例 9】(1995, 数三) 微分方程 $y'' + y = -2x$ 的通解为 $y =$ _____.

$$【y = -2x + C_1 \cos x + C_2 \sin x】$$

【例 10】(2007, 数一、二) 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x}$ 的通解为 $y =$ _____.

$$【y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x - 2e^{2x}】$$

4. 欧拉方程(仅数学一要求)

形如 $x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$

(其中 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为常数) 的方程称为欧拉方程.

令 $x = e^t$ 或 $t = \ln x$, 可将上述欧拉方程化为线性常系数方程, 一般地有

$$x^k y^{(k)} = D(D-1)\cdots(D-k+1)y$$

其中 D 代表对 t 求导数的运算.

【例 11】(2004, 数一) 欧拉方程 $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 2y = 0 (x > 0)$ 的通解为 $y =$ _____.

$$【y = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2}】$$

5. 差分方程(仅数三要求)

一阶常系数线性齐次差分方程

$$y_{t+1} + ay_t = 0 \quad ①$$

通解为 $y_t = C \cdot (-a)^t$, C 为任意常数.

一阶常系数线性非齐次差分方程

$$y_{t+1} + ay_t = f(t) \quad ②$$

通解为 $y_t = y_c(t) + y_t^*$, 其中 y_t^* 是非齐次差分方程 ② 的特解.

$$(1) f(t) = P_m(t),$$

若 $a \neq -1$, 令 $y_t^* = Q_m(t)$;若 $a = -1$, 令 $y_t^* = tQ_m(t)$.

$$(2) f(t) = d^t \cdot P_m(t), (d \neq 0)$$

若 $a + d \neq 0$, 令 $y_t^* = d^t \cdot Q_m(t)$;若 $a + d = 0$, 令 $y_t^* = td^t \cdot Q_m(t)$.**【例 12】** (1997, 数三) 差分方程 $y_{t+1} - y_t = t2^t$ 的通解为_____.**【解】** 齐次方程通解为

$$y_c(t) = C \cdot 1^t = C$$

令 $y_t^* = 2^t(at + b)$, 代入原方程得

$$2^{t+1}[a(t+1) + b] - 2^t(at + b) = t2^t$$

解得 $a = 1, b = -2$, 原方程通解为 $y_t = C + (t-2)2^t$.**【例 13】** (1998, 数三) 差分方程 $2y_{t+1} + 10y_t - 5t = 0$ 的通解为_____.**【解】** 原方程对应的齐次差分方程为 $y_{t+1} + 5y_t = 0$, 其通解为 $y_c(t) = C(-5)^t$.设原方程的特解为 $y_t^* = at + b$, 代入原方程得

$$2a(t+1) + 2b + 10at + 10b = 5t, \text{ 即 } 12at + 2a + 12b = 5t$$

比较系数知 $a = \frac{5}{12}, b = -\frac{5}{72}$, 则 $y_t^* = \frac{5}{12}\left(t - \frac{1}{6}\right)$. 从而原差分方程的通解为

$$y_t = C(-5)^t + \frac{5}{12}\left(t - \frac{1}{6}\right)$$

【例 14】 (2001, 数三) 某公司每年的工资总额在比上一年增加 20% 的基础上再追加 2 百万元, 若以 W_t 表示第 t 年的工资总额(单位: 百万元), 则 W_t 满足的差分方程是_____.**【解】** $W_t = 1.2 \cdot W_{t-1} + 2$.**【例 15】** (2017, 数三) 差分方程 $y_{t+1} - 2y_t = 2^t$ 的通解为_____.**【解】** 齐次方程通解为

$$y_c(t) = C \cdot 2^t$$

令 $y_t^* = at2^t$, 代入原方程得

$$a(t+1)2^{t+1} - 2at2^t = 2^t$$

 $a = \frac{1}{2}$, 原方程通解为 $y_t = C2^t + \frac{1}{2}t2^t$.

。 常考题型与典型例题 。

常考题型

1. 方程求解
2. 综合题
3. 应用题

一、方程求解

【例 16】 (2014, 数一) 微分方程 $xy' + y(\ln x - \ln y) = 0$ 满足条件 $y(1) = e^3$ 的解为 $y =$ _____.

【解】 由 $xy' + y(\ln x - \ln y) = 0$ 得 $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$, 该方程为齐次方程.

令 $u = \frac{y}{x}$ 代入上式得

$$u' = \frac{u(\ln u - 1)}{x}$$

$$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}$$

$\ln |\ln u - 1| = \ln x + C$, 即 $\ln u - 1 = Cx$, $\ln \frac{y}{x} - 1 = Cx$, 由 $y(1) = e^3$ 的得 $C = 2$, 则

$$\ln \frac{y}{x} - 1 = 2x, y = xe^{2x+1}$$

【例 17】 (2012, 数二) 微分方程 $ydx + (x - 3y^2)dy = 0$ 满足条件 $y|_{x=1} = 1$ 的解为 $y =$ _____.

【 $y = \sqrt{x}$ 】

【例 18】 (2017, 数一) 微分方程 $y'' + 2y' + 3y = 0$ 的通解为 $y =$ _____.

【 $e^{-x}(C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x)$ 】

【例 19】 (2017, 数二) 微分方程 $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(1 + \cos 2x)$ 的特解可设为 $y^* =$

- (A) $Ae^{2x} + e^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$. (B) $Axe^{2x} + e^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$.
(C) $Ae^{2x} + xe^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$. (D) $Axe^{2x} + xe^{2x}(B \cos 2x + C \sin 2x)$. 【C】

【例 20】 (2015, 数二、三) 设函数 $y = y(x)$ 是微分方程 $y'' + y' - 2y = 0$ 的解, 且在 $x = 0$ 处取得极值 3, 则 $y(x) =$ _____.

【 $2e^x + e^{-2x}$ 】

【例 21】 (2015, 数一) 设 $y = \frac{1}{2}e^{2x} + \left(x - \frac{1}{3}\right)e^x$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的一个特解, 则

- (A) $a = -3, b = 2, c = -1$. (B) $a = 3, b = 2, c = -1$.
(C) $a = -3, b = 2, c = 1$. (D) $a = 3, b = 2, c = 1$.

【解】 由 $y = \frac{1}{2}e^{2x} + (x - \frac{1}{3})e^x$ 是方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的一个特解可知, $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^x$ 是齐次方程的两个线性无关的解, $y^* = xe^x$ 是非齐次方程的一个解. $r = 1$ 和 $r = 2$ 是齐次方程的特征方程的两个根, 特征方程为

$$(r-1)(r-2) = 0$$

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

$$a = -3, b = 2$$

将 $y = xe^x$ 代入方程 $y'' - 3y' + 2y = ce^x$, 比较等式两端 e^x 项的系数得 $c = -1$. 故应选(A).

【例 22】 (2009, 数一) 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^x$, 则非齐次方程 $y'' + ay' + by = x$ 满足条件 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ 的解为 _____.

【解】 由微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^x$ 可知, $r = 1$ 是齐次方程的特征方程的二重根, 则齐次方程的特征方程为 $(r-1)^2 = 0$, 即 $r^2 - 2r + 1 = 0$, 则 $a = -2, b = 1$, 非齐次方程为 $y'' - 2y' + y = x$.

设非齐次方程的特解为 $y^* = a'x + b'$, 代入方程得 $a' = 1, b' = 2$, 则其通解为

$$y = (C_1 + C_2x)e^x + x + 2$$

由 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ 知 $C_1 = 0, C_2 = -1$, 故 $y = x(1 - e^x) + 2$.

【例 23】 (2013, 数一、二) 已知 $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}, y_2 = e^x - xe^{2x}, y_3 = -xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解, 则该方程的通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x - xe^{2x}]$$

二、综合题

【例 24】 (1994, 数三) 设 $y = f(x)$ 是微分方程 $y'' - y' - e^{\sin x} = 0$ 的解, 且 $f'(x_0) = 0$, 则 $f(x)$ 在

(A) x_0 的某个邻域内单调增加.

(B) x_0 的某个邻域内单调减少.

(C) x_0 处取得极小值.

(D) x_0 处取得极大值.

【C】

【例 25】 (2002, 数二) 设 $y = y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y'' + py' + qy = e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0) = y'(0) = 0$ 的特解, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限

(A) 不存在.

(B) 等于 1.

(C) 等于 2.

(D) 等于 3.

【解】 由 $y'' + py' + qy = e^{3x}$ 知 $y''(x)$ 连续且 $y''(0) = 1$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{y(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{y(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{y'(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{y''(x)} = \frac{2}{y''(0)} = 2 \end{aligned}$$

故应选(C).

【例 26】 (2018, 数二、三) 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x+\Delta x) - f(x) = 2xf(x)\Delta x + o(\Delta x) (\Delta x \rightarrow 0)$, 且 $f(0) = 2$, 则 $f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解】 由 $f(x+\Delta x)-f(x)=2xf(x)\Delta x+o(\Delta x)(\Delta x\rightarrow 0)$ 知

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=2xf(x)+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$$

上式中令 $\Delta x\rightarrow 0$ 得

$$f'(x)=2xf(x)$$

解方程得

$$f(x)=Ce^{x^2}$$

又 $f(0)=2$, 则 $C=2$, $f(x)=2e^{x^2}$, $f(1)=2e$.

【例 27】 (1995, 数四) 已知连续函数 $f(x)$ 满足条件 $f(x)=\int_0^{3x}f\left(\frac{t}{3}\right)dt+e^{2x}$, 求 $f(x)$.

【解】 等式 $f(x)=\int_0^{3x}f\left(\frac{t}{3}\right)dt+e^{2x}$ 两端对 x 求导数得一阶线性微分方程

$$f'(x)=3f(x)+2e^{2x}, \text{ 即 } f'(x)-3f(x)=2e^{2x}$$

解此方程得

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right] = e^{3x} \left[\int 2e^{2x} \cdot e^{-3x} dx + C \right] \\ &= e^{3x} \left(2 \int e^{-x} dx + C \right) = e^{3x} (C - 2e^{-x}) = Ce^{3x} - 2e^{2x} \end{aligned}$$

由 $f(0)=1$, 可得 $C=3$. 于是 $f(x)=3e^{3x}-2e^{2x}$.

【例 28】 (2016, 数三) 设函数 $f(x)$ 连续, 且满足

$$\int_0^x f(x-t)dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt + e^{-x} - 1$$

求 $f(x)$ 的表达式.

【解】 令 $u=x-t$, 则 $\int_0^x f(x-t)dt = \int_0^x f(u)du$.

由题设知 $\int_0^x f(u)du = x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt + e^{-x} - 1$

两端求导得 $f(x) = \int_0^x f(t)dt - e^{-x}$, 且 $f(0) = -1$

因此 $f'(x) - f(x) = e^{-x}$

从而 $f(x) = e^{\int dx} \left(\int e^{-x} e^{-\int dx} dx + C \right) = Ce^x - \frac{e^{-x}}{2}$

由 $f(0) = -1$, 得 $C = -\frac{1}{2}$, 所以 $f(x) = -\frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

三、应用题

【例 29】 (2015, 数一、三) 设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零. 若对于任意的 $x_0 \in I$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4, 且 $f(0)=2$, 求 $f(x)$ 的表达式.

【解】 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

令 $y=0$ 得, $x=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

切线 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, 直线 $x = x_0$ 及 x 轴所围区域的面积

$$S = \frac{1}{2} \frac{|f(x_0)|}{|f'(x_0)|} \cdot |f(x_0)| = 4$$

即 $\frac{1}{2} \frac{f^2(x_0)}{f'(x_0)} = 4$, 记 $y = f(x_0)$, 则 $\frac{1}{2}y^2 = 4y'$.

解方程得 $-\frac{8}{y} = x + C$

由 $y(0) = 2$ 知, $C = -4$, 则所求曲线方程为 $y = \frac{8}{4-x}$.

【例 30】 (2006, 数三) 在 xOy 坐标平面上, 连续曲线 L 过点 $M(1, 0)$, 其上任意点 $P(x, y)$ ($x \neq 0$) 处的切线斜率与直线 OP 的斜率之差等于 ax (常数 $a > 0$).

(1) 求 L 的方程;

(2) 当 L 与直线 $y = ax$ 所围成平面图形的面积为 $\frac{8}{3}$ 时, 确定 a 的值.

【解】 (1) 依题意得 $y' - \frac{1}{x}y = ax$, 求得其通解为

$$y = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left(\int ax e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right) = ax^2 + Cx$$

将 $x = 1, y = 0$ 代入上式得 $C = -a$. 从而 L 的方程为 $y = ax^2 - ax$.

(2) L 与直线 $y = ax$ 的交点坐标为 $(0, 0)$ 和 $(2, 2a)$, 那么 L 与直线 $y = ax$ 围成平面图形的面积

$$S(a) = \int_0^2 (ax - ax^2 + ax) dx = \int_0^2 (2ax - ax^2) dx = \frac{4}{3}a$$

于是由题设知 $\frac{4}{3}a = \frac{8}{3}$, 从而 $a = 2$.

【例 31】 (2009, 数二) 设非负函数 $y = y(x)$ ($x \geq 0$) 满足微分方程 $xy'' - y' + 2 = 0$. 当曲线 $y = y(x)$ 过原点时, 其与直线 $x = 1$ 及 $y = 0$ 围成的平面区域 D 的面积为 2, 求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

【解】 记 $y' = p$, 则 $y'' = p'$, 代入微分方程, 当 $x > 0$ 时,

$$p' - \frac{1}{x}p = -\frac{2}{x}$$

解得

$$y' = p = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left(\int \left(-\frac{1}{x} \right) e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx + C_1 \right) = x \left(\int \left(-\frac{2}{x^2} \right) dx + C_1 \right) = 2 + C_1 x$$

因此

$$y = 2x + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 \quad (x > 0)$$

由已知 $y(0) = 0$, 有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = 0$, 于是 $C_2 = 0$, $y = 2x + \frac{1}{2}C_1 x^2$.

由于 $2 = \int_0^1 \left(2x + \frac{1}{2}C_1 x^2 \right) dx = 1 + \frac{1}{6}C_1$, 所以 $C_1 = 6$, 故

$$y = 2x + 3x^2$$

故所求体积为 $V = 2\pi \int_0^1 xy(x) dx = 2\pi \int_0^1 (2x^2 + 3x^3) dx = \frac{17\pi}{6}$.

第八章 多元函数微分学

。本章考点。

多元函数的概念 二元函数的几何意义 二元函数的极限与连续的概念 有界闭区域上多元连续函数的性质 多元函数的偏导数和全微分 全微分存在的必要条件和充分条件 多元复合函数、隐函数的求导法 二阶偏导数 多元函数的极值和条件极值 多元函数的最大值、最小值及其简单应用

第一节 多元函数的基本概念

。考试内容概要。

一、多元函数的极限

定义 设 D 是平面上的一个点集,若对每个点 $P(x, y) \in D$, 变量 z 按照某一对应法则 f 有一个确定的值与之对应,则称 z 为 x, y 的二元函数,记为

$$z = f(x, y)$$

其中点集 D 称为该函数的定义域, x, y 称为自变量, z 称为应变量. 函数值 $f(x, y)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域,记为 $f(D)$.

通常情况下,二元函数 $z = f(x, y)$ 在几何上表示一张空间曲面.

定义 设函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上有定义,点 $P_0(x_0, y_0) \in D$ 或为 D 的边界点,如果 $\forall \epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $P(x, y) \in D$, 且 $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ 时, 都有

$$|f(x, y) - A| < \epsilon$$

成立,则称常数 A 为函数 $f(x, y)$ 当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 时的极限,记为

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)}} f(x, y) = A \text{ 或 } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A \text{ 或 } \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A$$

【注】 (1) 这里的极限是要求点 (x, y) 在 D 内以任意方式趋近于点 (x_0, y_0) 时, 函数 $f(x, y)$ 都趋近于同一确定的常数 A , 否则该极限就不存在.

(2) 一元函数极限中的下述性质对多元函数仍成立.

① 局部有界性, ② 保号性, ③ 有理运算, ④ 极限与无穷小的关系, ⑤ 夹逼性.

【例 1】 求极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$.

【例 2】 证明极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ 不存在.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

二、多元函数的连续性

1. 连续的概念

定义 设函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上有定义, 点 $P_0(x_0, y_0) \in D$, 如果

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

成立, 则称函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 连续; 如果 $f(x, y)$ 在区域 D 上的每个点 (x, y) 处都连续, 则称函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上连续.

2. 连续函数的性质

性质 1 多元连续函数的和、差、积、商(分母不为零)仍为连续函数.

性质 2 多元连续函数的复合函数也是连续函数.

性质 3 多元初等函数在其定义区域内连续.

性质 4(最大值定理)

有界闭区域 D 上的连续函数在区域 D 上必能取得最大值与最小值.

性质 5(介值定理)

有界闭区域 D 上的连续函数在区域 D 上必能取得介于最大值与最小值之间的任何值.

三、偏导数

1. 偏导数的定义

定义 设 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某一邻域内有定义, 如果

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称这个极限值为函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处对 x 的偏导数, 记为

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \quad \text{或} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \quad \text{或} \quad f'_x(x_0, y_0)$$

类似地, 如果

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

存在, 则称这个极限值为函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处对 y 的偏导数, 记为

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \quad \text{或} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \quad \text{或} \quad f'_y(x_0, y_0)$$

【注】 由以上定义不难看出偏导数本质上就是一元函数的导数, 其中 $f'_x(x_0, y_0)$ 就是一元函数 $f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 处的导数, $f'_y(x_0, y_0)$ 就是一元函数 $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数.

类似地, 可以定义三元函数乃至 n 元函数的偏导数.

2. 二元函数偏导数的几何意义

设 $M(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 为曲面 $z = f(x, y)$ 上的一点. 过点 M 作平面 $y = y_0$ 与曲面

$z = f(x, y)$ 相交, 其交线为平面 $y = y_0$ 上的曲线 $z = f(x, y_0)$, 即 $\begin{cases} z = f(x, y_0) \\ y = y_0 \end{cases}$, 则 $f'_x(x_0, y_0)$ 表示上述交线在点 M 处的切线对 x 轴的斜率. 同样, 过点 M 作平面 $x = x_0$ 与曲面 $z = f(x, y)$ 相交, 其交线为平面 $x = x_0$ 上的曲线 $z = f(x_0, y)$, 则 $f'_y(x_0, y_0)$ 表示上述交线在点 M 处的切线对 y 轴的斜率.

3. 高阶偏导数

定义 如果 $z = f(x, y)$ 在区域 D 内的偏导函数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 仍然存在偏导数, 则称之为函数 $f(x, y)$ 的二阶偏导数, 常记为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad \text{或 } f''_{xx}, & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \text{或 } f''_{xy} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \quad \text{或 } f''_{yx}, & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad \text{或 } f''_{yy} \end{aligned}$$

常称 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 为混合偏导数.

定理 如果函数 $z = f(x, y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 在区域 D 内连续, 则在该区域内这两个混合偏导数必定相等.

对于二元以上的函数, 也可以类似地定义二阶或更高阶偏导数, 且二阶与高阶混合偏导数连续时, 混合偏导数的值与求导次序无关.

四、全微分

定义(全微分) 如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的全增量

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

可表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

其中 A, B 与 $\Delta x, \Delta y$ 无关, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, 则称函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微, 而 $A\Delta x + B\Delta y$ 称为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的全微分, 记为

$$dz = A\Delta x + B\Delta y$$

如果 $f(x, y)$ 在区域 D 内的每一点 (x, y) 都可微分, 则称 $f(x, y)$ 在 D 内可微分.

定理(全微分存在的必要条件) 如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微, 则该函数在点 (x, y) 处的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在, 且

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

用定义判定 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的可微性分以下两步:

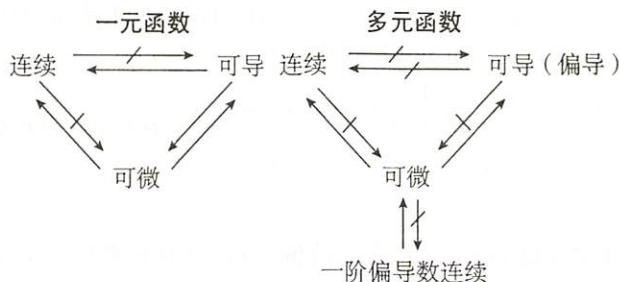
(1) $f'_x(x_0, y_0)$ 与 $f'_y(x_0, y_0)$ 是否都存在?

(2) $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] - [f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$

是否为零?

定理(全微分存在的充分条件) 如果 $z = f(x, y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x_0, y_0) 处连续, 则函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微.

连续、可偏导及可微之间的关系



。 常考题型与典型例题 。

常考题型

多元函数连续、偏导数、全微分的概念及其之间的关系

【例 3】(1997, 数一) 二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 处

(A) 连续、偏导数存在.

(B) 连续、偏导数不存在.

(C) 不连续、偏导数存在.

(D) 不连续、偏导数不存在.

【C】

【例 4】(1994, 数一、二) 二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处两个偏导数 $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ 存在, 是 $f(x, y)$ 在该点连续的

(A) 充分而非必要条件.

(B) 必要而非充分条件.

(C) 充分必要条件.

(D) 既非充分又非必要条件.

【D】

【例 5】(2012, 数三) 设连续函数 $z = f(x, y)$ 满足 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x, y) - 2x + y - 2}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = 0$, 则

 $dz|_{(0,1)} =$ _____.

【解】由 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x, y) - 2x + y - 2}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = 0$ 得, $f(0, 1) = 1$, 且

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{[f(x, y) - f(0, 1)] - [2x - (y-1)]}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = 0$$

即 $\Delta z = f(x, y) - f(0, 1) = 2x - (y-1) + o(\rho)$

则 $dz|_{(0,1)} = 2dx - dy$.

【例 6】证明以下几个经典的反例

(1) $f(x, y) = |x| + |y|$ 在 $(0, 0)$ 点连续, 但不可导(也不可微);

(2) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在 $(0, 0)$ 点可导, 但不连续;

$$(3) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{在}(0, 0) \text{点可导, 但不可微;}$$

$$(4) f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{在}(0, 0) \text{点可微, 但偏导数不连续.}$$

【例7】(2017, 数二) 设 $f(x, y)$ 具有一阶偏导数, 且对任意的 (x, y) 都有 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0$,

$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0$, 则

(A) $f(0, 0) > f(1, 1)$.

(B) $f(0, 0) < f(1, 1)$.

(C) $f(0, 1) > f(1, 0)$.

(D) $f(0, 1) < f(1, 0)$.

【D】

第二节 多元函数的微分法

。 考试内容概要 。

一、复合函数微分法

定理 设函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 在点 (x, y) 处有对 x 及对 y 的偏导数, 函数 $z = f(u, v)$ 在对应点 (u, v) 处有连续偏导数, 则复合函数 $z = f[u(x, y), v(x, y)]$ 在点 (x, y) 处的两个偏导数存在, 且有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

全微分形式的不变性

设函数 $z = f(u, v)$, $u = u(x, y)$ 及 $v = v(x, y)$ 都有连续的一阶偏导数, 则复合函数 $z = f[u(x, y), v(x, y)]$ 的全微分

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$$

即: 不论把函数 z 看做自变量 x, y 的函数, 还是看作中间变量 u, v 的函数, 函数 z 的全微分形式都是一样的.

二、隐函数微分法

(1) 由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的隐函数 $y = y(x)$

若函数 $F(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 的某一邻域内有连续偏导数, 且 $F(x_0, y_0) = 0, F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, 则方程 $F(x, y) = 0$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域可唯一确定一个有连续导数的函数 $y = f(x)$, 并有

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

(2) 由方程 $F(x, y, z) = 0$ 确定的隐函数 $z = z(x, y)$

若函数 $F(x, y, z)$ 在点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的某一邻域内有连续偏导数, 且 $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, 则方程 $F(x, y, z) = 0$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 的某邻域可唯一确定一个有连续偏导数的函数 $z = f(x, y)$, 并有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

(3) 由方程组 $\begin{cases} F_1(x, y, u, v) = 0 \\ F_2(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$ 确定的隐函数 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ (仅数一要求)

欲求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$, 可以将每个方程分别对 x 求偏导数, 得出以 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ 为变量的方程组, 可解得 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$. 同样, 将每个方程分别对 y 求偏导数, 可以得出以 $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ 为变量的方程组, 解之可得 $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

。常考题型与典型例题。

常考题型

复合函数及隐函数的偏导数和全微分的计算

一、复合函数偏导数与全微分

【例 1】(2011, 数一) 设函数 $F(x, y) = \int_0^{xy} \frac{\sin t}{1+t^2} dt$, 则 $\left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{\substack{x=0 \\ y=2}} =$ _____.

【解 1】 $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{y \sin xy}{1+x^2 y^2}$
 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{y^2 \cos(xy)(1+x^2 y^2) - 2xy^3 \sin xy}{(1+x^2 y^2)^2}$

故 $\left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{\substack{x=0 \\ y=2}} = 4$.

【解 2】 $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{y \sin xy}{1+x^2 y^2}, F'_x(x, 2) = \frac{2 \sin 2x}{1+4x^2}$.

$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{\substack{x=0 \\ y=2}} = F''_{xx}(0, 2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{x(1+4x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x(1+4x^2)} = 4$.

【例 2】(2011, 数三) 设函数 $z = \left(1 + \frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{y}}$, 则 $dz|_{(1,1)} =$ _____.

【 $(1+2\ln 2)(dx - dy)$ 】

【例 3】(2007, 数一) 设 $f(u, v)$ 为二元可微函数, $z = f(x^y, y^x)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____.

【 $yx^{y-1}f'_1 + y^x \ln y f'_2$ 】

【例 4】(2017, 数一、二) 设函数 $f(u, v)$ 具有二阶连续导数, $y = f(e^x, \cos x)$, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}, \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0}$.
 $\left[\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = f'_u(1, 1), \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} = f''_{uu}(1, 1) - f'_v(1, 1) \right]$

【例 5】(2019, 数三) 设函数 $f(u, v)$ 具有 2 阶连续偏导数, 函数 $g(x, y) = xy - f(x + y, x - y)$, 求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$. 【1 - 3f''_{11} - f''_{22}】

【例 6】(2009, 数二) 设 $z = f(x + y, x - y, xy)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 dz 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

【解】 由于 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 + f'_2 + yf'_3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_1 - f'_2 + xf'_3$, 所以

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (f'_1 + f'_2 + yf'_3) dx + (f'_1 - f'_2 + xf'_3) dy \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= f''_{11} - f''_{12} + xf''_{13} + f''_{21} - f''_{22} + xf''_{23} + f'_3 + y(f''_{31} - f''_{32} + xf''_{33}) \\ &= f''_{11} + (x + y)f''_{13} - f''_{22} + (x - y)f''_{23} + xyf''_{33} + f'_3. \end{aligned}$$

【例 7】(2011, 数一、二) 设函数 $z = f(xy, yg(x))$, 其中函数 f 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导且在 $x = 1$ 处取得极值 $g(1) = 1$. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}}$.

【解 1】 由 $z = f(xy, yg(x))$ 知

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yf'_1 + yg'(x)f'_2$$

上式两端对 y 求偏导得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'_1 + y[xf''_{11} + g(x)f''_{12}] + g'(x)f'_2 + yg'(x)[xf''_{21} + g(x)f''_{22}]$$

由题意 $g(1) = 1, g'(1) = 0$, 在上式中令 $x = 1, y = 1$ 得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = f'_1(1, 1) + f''_{11}(1, 1) + f''_{12}(1, 1)$$

【解 2】 由 $z = f(xy, yg(x))$ 知

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yf'_1 + yg'(x)f'_2$$

由题意 $g(1) = 1, g'(1) = 0$, 在上式中令 $x = 1$ 得

$$z'_x(1, y) = yf'_1(y, y)$$

上式两端对 y 求偏导得

$$z''_{xy}(1, y) = f'_1(y, y) + y[f''_{11}(y, y) + f''_{12}(y, y)]$$

令 $y = 1$ 得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = f'_1(1, 1) + f''_{11}(1, 1) + f''_{12}(1, 1)$$

【例 8】(2014, 数一、二) 设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数, $z = f(e^x \cos y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y)e^{2x}$$

若 $f(0) = 0, f'(0) = 0$, 求 $f(u)$ 的表达式.

【解】 令 $e^x \cos y = u$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)e^x \cos y, \frac{\partial z}{\partial y} = -f'(u)e^x \sin y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u)e^{2x} \cos^2 y + f'(u)e^x \cos y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u)e^{2x} \sin^2 y - f'(u)e^x \cos y$$

将以上两个式子代入 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y)e^{2x}$ 得

$$f''(u) = 4f(u) + u$$

即

$$f''(u) - 4f(u) = u$$

以上方程对应的齐次方程的特征方程为 $r^2 - 4 = 0$, 特征根为 $r = \pm 2$, 齐次方程的通解为

$$f(u) = C_1 e^{2u} + C_2 e^{-2u}$$

设非齐次方程的特解为 $f^* = au + b$, 代入非齐次方程得 $a = -\frac{1}{4}, b = 0$.

则原方程的通解为

$$f(u) = C_1 e^{2u} + C_2 e^{-2u} - \frac{1}{4}u$$

由 $f(0) = 0, f'(0) = 0$ 得 $C_1 = \frac{1}{16}, C_2 = -\frac{1}{16}$, 则

$$f(u) = \frac{1}{16}(e^{2u} - e^{-2u} - 4u)$$

二、隐函数偏导数与全微分

【例 9】(2015, 数二、三) 若函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 确定, 则 $dz|_{(0,0)} =$ _____.

【解 1】将 $x = 0, y = 0$ 代入 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 中得 $e^{3z} = 1$, 则 $z = 0$.
方程 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 两端微分得

$$e^{x+2y+3z}(dx + 2dy + 3dz) + yzdx + xzdy + xydz = 0$$

将 $x = 0, y = 0, z = 0$ 代入上式得

$$dx + 2dy + 3dz = 0$$

则 $dz|_{(0,0)} = -\frac{1}{3}(dx + 2dy)$.

【解 2】将 $x = 0, y = 0$ 代入 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 中得 $e^{3z} = 1$, 则 $z = 0$.

$$dz|_{(0,0)} = z'_x(0,0)dx + z'_y(0,0)dy$$

在 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 中令 $y = 0$ 得, $e^{x+3z} = 1$, 两边对 x 求导得

$$e^{x+3z}(1 + 3z'_x) = 0$$

$$z'_x(0,0) = -\frac{1}{3}$$

在 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 中令 $x = 0$ 得, $e^{2y+3z} = 1$, 两边对 y 求导得

$$e^{2y+3z}(2 + 3z'_y) = 0$$

$$z'_y(0,0) = -\frac{2}{3}$$

则 $dz|_{(0,0)} = -\frac{1}{3}(dx + 2dy)$.

【例 10】 (1988, 数四) 已知 $u + e^u = xy$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

【解】 等式 $u + e^u = xy$ 两端对 x 求偏导得

$$(1 + e^u) \frac{\partial u}{\partial x} = y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{1 + e^u}$$

同理可得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{1 + e^u}$$

等式 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{1 + e^u}$ 两端对 y 求偏导得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{(1 + e^u) - e^u \frac{\partial u}{\partial y} y}{(1 + e^u)^2} = \frac{1}{1 + e^u} - \frac{xy e^u}{(1 + e^u)^3}$$

【例 11】 (2010, 数一、二) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$ 确定, 其中 F 为可微函数, 且 $F'_2 \neq 0$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$

(A) x .

(B) z .

(C) $-x$.

(D) $-z$.

【解】 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-\frac{y}{x^2} F'_1 - \frac{z}{x^2} F'_2}{\frac{1}{x} F'_2}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{1}{x} F'_1}{\frac{1}{x} F'_2},$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-\frac{y}{x} F'_1 - \frac{z}{x} F'_2}{\frac{1}{x} F'_2} - \frac{\frac{y}{x} F'_1}{\frac{1}{x} F'_2} = z$$

故应选(B).

【例 12】 (2001, 数三) 设 $u = f(x, y, z)$ 有连续的一阶偏导数, 又函数 $y = y(x)$ 及 $z = z(x)$ 分别由下列两式确定:

$$e^{xy} - xy = 2 \quad \text{和} \quad e^x = \int_0^{x-z} \frac{\sin t}{t} dt$$

求 $\frac{du}{dx}$.

【解 1】 $\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dx}$ ①

由 $e^{xy} - xy = 2$ 两边对 x 求导, 得

$$e^{xy} \left(y + x \frac{dy}{dx} \right) - \left(y + x \frac{dy}{dx} \right) = 0$$

即 $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$.

又由 $e^x = \int_0^{x-z} \frac{\sin t}{t} dt$ 两边对 x 求导, 得 $e^x = \frac{\sin(x-z)}{x-z} \cdot \left(1 - \frac{dz}{dx} \right)$, 即

$$\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)}$$

将其代入①式,得

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{y}{x} \frac{\partial f}{\partial y} + \left[1 - \frac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)}\right] \frac{\partial f}{\partial z}$$

【解2】

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (2)$$

等式 $e^{xy} - xy = 2$ 两端微分得

$$e^{xy}(ydx + xdy) - (ydx + xdy) = 0$$

$$dy = -\frac{y}{x} dx$$

等式 $e^x = \int_0^{x-z} \frac{\sin t}{t} dt$ 两端微分得 $e^x dx = \frac{\sin(x-z)}{x-z} (dx - dz)$, 即

$$dz = \left(1 - \frac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)}\right) dx$$

将其代入②式,得

$$du = \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{y}{x} \frac{\partial f}{\partial y} + \left(1 - \frac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)}\right) \frac{\partial f}{\partial z} \right] dx$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{y}{x} \frac{\partial f}{\partial y} + \left(1 - \frac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)}\right) \frac{\partial f}{\partial z}$$

【例13】(2008, 数三) 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $x^2 + y^2 - z = \varphi(x + y + z)$ 所确定的函数, 其中 φ 具有二阶导数, 且 $\varphi' \neq -1$.

(1) 求 dz ; (2) 记 $u(x, y) = \frac{1}{x-y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right)$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$.

【解1】(1) 设 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z - \varphi(x + y + z)$, 则

$$F'_x = 2x - \varphi', F'_y = 2y - \varphi', F'_z = -1 - \varphi'$$

由公式 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$, 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x - \varphi'}{1 + \varphi'}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y - \varphi'}{1 + \varphi'}$$

所以

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{1}{1 + \varphi'} [(2x - \varphi') dx + (2y - \varphi') dy]$$

(2) 由于 $u(x, y) = \frac{2}{1 + \varphi'}$, 所以

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-2}{(1 + \varphi')^2} \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) \varphi'' = -\frac{2(2x + 1)\varphi''}{(1 + \varphi')^3}$$

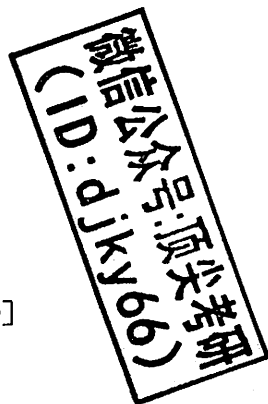
【解2】(1) 对等式 $x^2 + y^2 - z = \varphi(x + y + z)$, 两端求微分, 得

$$2xdx + 2ydy - dz = \varphi' \cdot (dx + dy + dz)$$

解出 dz , 得

$$dz = \frac{2x - \varphi'}{1 + \varphi'} dx + \frac{2y - \varphi'}{1 + \varphi'} dy$$

(2) 同解1.



第三节 多元函数的极值与最值

。 考试内容概要 。

一、无约束极值

定义 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 的某邻域内有定义, 若对该邻域内任意的点 $P(x, y)$ 均有

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \text{ (或 } f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \text{)}$$

则称 (x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 的极大值点(或极小值点); 称 $f(x_0, y_0)$ 为 $f(x, y)$ 的极大值(或极小值). 极大值点和极小值点统称为极值点, 极大值和极小值统称为极值.

定理(极值的必要条件) 设 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 存在偏导数, 且 (x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 的极值点, 则

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$$

定理(极值的充分条件) 设 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域内有二阶连续偏导数, 又 $f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$. 记

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0)$$

则有下列结论:

(1) 若 $AC - B^2 > 0$, 则 (x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 的极值点.

① $A < 0$, 则 (x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 的极大值点.

② $A > 0$, 则 (x_0, y_0) 为 $f(x, y)$ 的极小值点.

(2) 若 $AC - B^2 < 0$, 则 (x_0, y_0) 不为 $f(x, y)$ 的极值点.

(3) 若 $AC - B^2 = 0$, 则 (x_0, y_0) 可能为 $f(x, y)$ 的极值点, 也可能不为 $f(x, y)$ 的极值点(此时, 一般用定义判定).

求具有二阶连续偏导数二元函数 $z = f(x, y)$ 极值的一般步骤为:

(1) 求出 $f(x, y)$ 的驻点 $P_1, \dots, P_k$;

(2) 利用极值的充分条件判定驻点 P_i 是否为极值点.

【注】 (1) 二元函数 $z = f(x, y)$ 在偏导数不存在的点也可能取到极值(如 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$), 而这种点是否取得极值一般用极值定义判定;

(2) 二元函数 $z = f(x, y)$ 可能取得极值的点就两种, 驻点和偏导数不存在的点.

二、条件极值及拉格朗日乘数法

求 $z = f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的条件极值的一般方法为:

(1) 构造拉格朗日函数 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$.

(2) 将 $F(x, y, \lambda)$ 分别对 x, y, λ 求偏导数, 构造方程组

$$\begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda \varphi'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) + \lambda \varphi'_y(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

解出 x, y 及 λ , 则其中 (x, y) 就是函数 $f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的可能极值点.

以上方法可推广到对于 n 元函数在 m 个约束条件下的极值问题, 如求 $u = f(x, y, z)$ 在条件 $\varphi(x, y, z) = 0, \psi(x, y, z) = 0$ 下的极值, 可构造拉格朗日函数

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = f + \lambda \varphi + \mu \psi$$

对 F 的 x, y, z, λ, μ 分别求偏导数, 并构造方程组

$$\begin{cases} f'_x(x, y, z) + \lambda \varphi'_x(x, y, z) + \mu \psi'_x(x, y, z) = 0 \\ f'_y(x, y, z) + \lambda \varphi'_y(x, y, z) + \mu \psi'_y(x, y, z) = 0 \\ f'_z(x, y, z) + \lambda \varphi'_z(x, y, z) + \mu \psi'_z(x, y, z) = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \\ \psi(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

解出 x, y, z, λ 及 μ , 则其中 (x, y, z) 就是可能的极值点.

对于实际问题, 如果驻点唯一, 且由实际意义知问题存在最大(小)值, 则该驻点即为最大(小)值点. 如果存在多个驻点, 且由实际意义知道问题既存在最大值也存在最小值, 只需比较各驻点处的函数值, 最大的则为最大值, 最小的则为最小值.

三、最大最小值

最大最小值常见有两种问题

1. 求连续函数 $f(x, y)$ 在有界闭域 D 上的最大最小值, 常用如下方法, 即三步曲.

(1) 求 $f(x, y)$ 在 D 内部可能的极值点.

(2) 求 $f(x, y)$ 在 D 的边界上的最大最小值.

(3) 比较.

2. 应用题

首先将要求最大或最小的变量用一个多元函数表示出来, 即建立目标函数 $z = f(x, y)$, 然后按照 1 的三步曲求解.

。 常考题型与典型例题 。

常考题型

1. 求极值(无条件)
2. 求连续函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上的最大最小值
3. 最大最小值应用题

【例 1】(2003, 数三) 设可微函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得极小值, 则下列结论正确的是

- (A) $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数等于零.
 (B) $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数大于零.

(C) $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数小于零.

(D) $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数不存在.

【A】

【例 2】(2009, 数二) 设函数 $z = f(x, y)$ 的全微分为 $dz = xdx + ydy$, 则点 $(0, 0)$

(A) 不是 $f(x, y)$ 的连续点.

(B) 不是 $f(x, y)$ 的极值点.

(C) 是 $f(x, y)$ 的极大值点.

(D) 是 $f(x, y)$ 的极小值点.

【D】

【解 1】充分条件.

【解 2】求出 $f(x, y)$.

【解 3】排除法.

【例 3】(2017, 数三) 二元函数 $z = xy(3 - x - y)$ 的极值点是

(A) $(0, 0)$.

(B) $(0, 3)$.

(C) $(3, 0)$.

(D) $(1, 1)$.

【解】由 $\begin{cases} z'_x = y(3 - 2x - y) = 0 \\ z'_y = x(3 - 2y - x) = 0 \end{cases}$ 得驻点 $(0, 0), (0, 3), (3, 0), (1, 1)$.

$$z_{xx} = -2y, z_{yy} = -2x, z_{xy} = 3 - 2x - 2y$$

在 $(0, 0)$ 点 $AC - B^2 = -9 < 0$, 无极值;

在 $(0, 3)$ 点 $AC - B^2 = -9 < 0$, 无极值;

在 $(3, 0)$ 点 $AC - B^2 = -9 < 0$, 无极值;

在 $(1, 1)$ 点 $AC - B^2 = 3 > 0$, 有极值.

故应选(D).

【例 4】(2009, 数一、三) 求二元函数 $f(x, y) = x^2(2 + y^2) + y \ln y$ 的极值.

【解】 $f'_x(x, y) = 2x(2 + y^2)$, $f'_y(x, y) = 2x^2y + \ln y + 1$.

令 $\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases}$ 解得唯一驻点 $(0, \frac{1}{e})$. 由于

$$A = f''_{xx}\left(0, \frac{1}{e}\right) = 2(2 + y^2)\Big|_{(0, \frac{1}{e})} = 2\left(2 + \frac{1}{e^2}\right)$$

$$B = f''_{xy}\left(0, \frac{1}{e}\right) = 4xy\Big|_{(0, \frac{1}{e})} = 0$$

$$C = f''_{yy}\left(0, \frac{1}{e}\right) = \left(2x^2 + \frac{1}{y}\right)\Big|_{(0, \frac{1}{e})} = e$$

所以 $AC - B^2 = 2e\left(2 + \frac{1}{e^2}\right) > 0$, 且 $A > 0$. 从而 $f\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值, 极小值为

$$f\left(0, \frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}.$$

【例 5】(2008, 数二) 求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在约束条件 $z = x^2 + y^2$ 和 $x + y + z = 4$ 下的最大值和最小值.

【解】作拉格朗日函数

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z) + \mu(x + y + z - 4)$$

$$\text{令} \quad \begin{cases} F'_x = 2x + 2\lambda x + \mu = 0 \\ F'_y = 2y + 2\lambda y + \mu = 0 \\ F'_z = 2z - \lambda + \mu = 0 \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 - z = 0 \\ F'_\mu = x + y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

解方程组, 得 $(x_1, y_1, z_1) = (1, 1, 2), (x_2, y_2, z_2) = (-2, -2, 8)$.

故所求的最大值为 72, 最小值为 6.

【例 6】(2005, 数二) 已知函数 $z = f(x, y)$ 的全微分 $dz = 2xdx - 2ydy$, 并且 $f(1, 1) =$

2. 求 $f(x, y)$ 在椭圆域 $D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$ 上的最大值和最小值.

【解 1】 由 $dz = 2xdx - 2ydy$ 可知

$$z = f(x, y) = x^2 - y^2 + C$$

再由 $f(1, 1) = 2$, 得 $C = 2$, 故

$$z = f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$$

$$\text{令} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0, \text{解得驻点} (0, 0).$$

在椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 上, $z = x^2 - (4 - 4x^2) + 2$, 即

$$z = 5x^2 - 2 \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

其最大值为 $z|_{x=\pm 1} = 3$, 最小值为 $z|_{x=0} = -2$. 再与 $f(0, 0) = 2$ 比较, 可知 $f(x, y)$ 在椭圆域 D 上的最大值为 3, 最小值为 -2.

【解 2】 同解 1, 得驻点 $(0, 0)$. 用拉格朗日乘数法求此函数在椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 上的极值.

设 $L = x^2 - y^2 + 2 + \lambda \left(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 \right)$, 令

$$\begin{cases} L'_x = 2x + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = -2y + \frac{\lambda}{2}y = 0 \\ L'_\lambda = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0 \end{cases}$$

解得 4 个可能的极值点 $(0, 2), (0, -2), (1, 0)$ 和 $(-1, 0)$.

又 $f(0, 2) = -2, f(0, -2) = -2, f(1, 0) = 3, f(-1, 0) = 3$, 再与 $f(0, 0) = 2$ 比较, 得 $f(x, y)$ 在 D 上的最大值为 3, 最小值为 -2.

【解 3】 同解 1, 得驻点 $(0, 0)$. 椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 的参数方程为 $x = \cos t, y = 2\sin t$.

则 $z = x^2 - y^2 + 2 = \cos^2 t - 4\sin^2 t + 2 = 3 - 5\sin^2 t$

故 $f_{\max} = 3, f_{\min} = -2$.

第九章 二重积分

。 本章考点 。

二重积分的概念、性质、计算和应用

。 考试内容概要 。

一、二重积分的概念及性质

1. 二重积分的概念

定义 设函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上有定义, 将区域 D 任意分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$

其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小区域, 也表示它的面积. 在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i, η_i) , 作乘积 $f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$, 并求和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$. 记 λ 为 n 个小区域 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ 中的最大直径, 如果 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ 存在, 则称此极限值为函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上的二重积分, 记为

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

几何意义

二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 是一个数. 当 $f(x, y) \geq 0$ 时, 其值等于以区域 D 为底, 以曲面 $z = f(x, y)$ 为曲顶的曲顶柱体的体积; 当 $f(x, y) \leq 0$ 时, 二重积分的值为负值, 其绝对值等于上述曲顶柱体的体积.

2. 二重积分的性质

性质 1 (不等式性质)

(1) 若在 D 上 $f(x, y) \leq g(x, y)$, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma$$

(2) 若在 D 上 $m \leq f(x, y) \leq M$, 则

$$m\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M\sigma$$

其中 σ 为区域 D 的面积.

$$(3) \left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_D |f(x, y)| d\sigma.$$

性质 2(中值定理)

设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续, σ 为区域 D 的面积, 则在 D 上至少存在一点 (ξ, η) , 使得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot \sigma$$

二、二重积分的计算

1. 利用直角坐标计算

(1) 先 y 后 x

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

(2) 先 x 后 y

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$$

2. 利用极坐标计算

先 ρ 后 θ

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^\beta d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho$$

【注】 适合用极坐标计算的二重积分的特征:

(1) 适合用极坐标计算的被积函数: $f(\sqrt{x^2+y^2})$, $f(\frac{y}{x})$, $f(\frac{x}{y})$;

(2) 适合用极坐标的积分域:

如 $x^2 + y^2 \leq R^2$; $r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$; $x^2 + y^2 \leq 2ax$; $x^2 + y^2 \leq 2bx$.

3. 利用函数的奇偶性计算

(1) 若积分域 D 关于 y 轴对称, $f(x, y)$ 关于 x 有奇偶性, 则:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 2 \iint_{D_{x \geq 0}} f(x, y) d\sigma, & f(x, y) \text{ 关于 } x \text{ 为偶函数} \\ 0, & f(x, y) \text{ 关于 } x \text{ 为奇函数} \end{cases}$$

(2) 若积分域 D 关于 x 轴对称, $f(x, y)$ 关于 y 有奇偶性, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 2 \iint_{D_{y \geq 0}} f(x, y) d\sigma, & f(x, y) \text{ 关于 } y \text{ 为偶函数} \\ 0, & f(x, y) \text{ 关于 } y \text{ 为奇函数} \end{cases}$$

4. 利用变量的轮换对称性计算

如果积分域 D 具有轮换对称性, 也就是关于直线 $y = x$ 对称, 即 D 的表达式中将 x 换作 y , y 换作 x 表达式不变, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(y, x) d\sigma$$

常考题型与典型例题

常考题型

1. 累次积分交换次序或计算
2. 二重积分计算

一、累次积分交换次序或计算

【例 1】 交换累次积分 $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x, y) dy$ 的次序.

【例 2】 (2009, 数二) 设函数 $f(x, y)$ 连续, 则 $\int_1^2 dx \int_x^2 f(x, y) dy + \int_1^2 dy \int_y^{4-y} f(x, y) dx =$

(A) $\int_1^2 dx \int_1^{4-x} f(x, y) dy.$

(B) $\int_1^2 dx \int_x^{4-x} f(x, y) dy.$

(C) $\int_1^2 dy \int_1^{4-y} f(x, y) dx.$

(D) $\int_1^2 dy \int_y^2 f(x, y) dx.$

【C】

【例 3】 (1996, 数三) 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho$ 可以写成

(A) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$

(B) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$

(C) $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy.$

(D) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$

【D】

【例 4】 (2017, 数二) 积分 $\int_0^1 dy \int_y^1 \frac{\tan x}{x} dx =$ _____.

【 $-\ln \cos 1$ 】

【例 5】 积分 $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy =$ _____.

【 $\frac{16}{9}$ 】

二、二重积分计算

【例 6】 (2008, 数三) 设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则 $\iint_D (x^2 - y) dx dy =$ _____.

【 $\frac{\pi}{4}$ 】

【例 7】 (1991, 数一、二) 设 D 是 xOy 平面上以 $(1, 1)$ $(-1, 1)$ 和 $(-1, -1)$ 为顶点的三角形区域, D_1 是 D 在第一象限的部分, 则 $\iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y) dx dy$ 等于

(A) $2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy.$

(B) $2 \iint_{D_1} xy dx dy.$

(C) $4 \iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y) dx dy.$

(D) 0.

【A】

【例 8】 (2006, 数三) 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{y^2 - xy} dx dy$, 其中 D 是由直线 $y = x, y = 1, x = 0$ 所围成的平面区域.

【解】 原式 = $\int_0^1 dy \int_0^y \sqrt{y^2 - xy} dx$

$$= -\int_0^1 \frac{2}{3} \sqrt{y} (y - x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^y dy = \frac{2}{3} \int_0^1 y^2 dy = \frac{2}{9}.$$

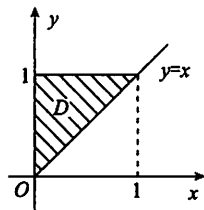


图 1

【例 9】 (2017, 数二) 已知平面域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2y\}$, 计算二重积分

$$I = \iint_D (x+1)^2 dx dy$$

【解】 $I = \iint_D (x^2 + 2x + 1) dx dy$

由于 D 关于 y 轴对称, 且函数 $2x$ 是 x 的奇函数, 所以 $\iint_D 2x dx dy = 0$.

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x^2 + 1) dx dy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} \rho^2 \cos^2\theta \rho d\rho + \pi \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta \cos^2\theta d\theta + \pi = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta (1 - \sin^2\theta) d\theta + \pi \\ &= 8 \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) + \pi \\ &= \frac{5}{4} \pi \end{aligned}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

【例 10】 (2005, 数二、三) 计算二重积分 $\iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma$, 其中

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

【解】 如图所示, 将 D 分成 D_1 与 D_2 两部分.

$$\begin{aligned} \iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma &= \iint_{D_1} (1 - x^2 - y^2) d\sigma + \iint_{D_2} (x^2 + y^2 - 1) d\sigma \\ &= \iint_{D_1} (1 - x^2 - y^2) d\sigma + \left[\iint_D (x^2 + y^2 - 1) d\sigma - \iint_{D_1} (x^2 + y^2 - 1) d\sigma \right] \\ &= 2 \iint_{D_1} (1 - x^2 - y^2) d\sigma + \iint_D (x^2 + y^2 - 1) d\sigma \end{aligned}$$

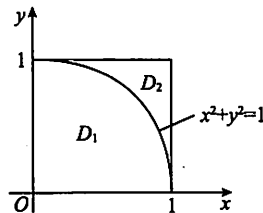


图 2

由于

$$\iint_{D_1} (1-x^2-y^2) d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (1-\rho^2) \rho d\rho = \frac{\pi}{8},$$

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2+y^2-1) d\sigma &= \int_0^1 dx \int_0^1 (x^2+y^2-1) dy \\ &= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{2}{3}\right) dx = -\frac{1}{3}, \end{aligned}$$

$$\text{因此 } \iint_D |x^2+y^2-1| d\sigma = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}.$$

【例 11】 (2014, 数二、三) 设平面域 $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, 计算

$$\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2+y^2})}{x+y} dx dy$$

【解 1】 由于积分域 D 关于直线 $y = x$ 对称, 则

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2+y^2})}{x+y} dx dy &= \iint_D \frac{y \sin(\pi \sqrt{x^2+y^2})}{x+y} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \left[\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2+y^2})}{x+y} dx dy + \iint_D \frac{y \sin(\pi \sqrt{x^2+y^2})}{x+y} dx dy \right] \\ &= \frac{1}{2} \iint_D \sin(\pi \sqrt{x^2+y^2}) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 \sin(\pi \rho) \rho d\rho \\ &= -\frac{1}{4} \int_1^2 \rho d\cos(\pi \rho) = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\text{【解 2】 } \iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2+y^2})}{x+y} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta \cdot \int_1^2 \rho \sin(\pi \rho) d\rho.$$

由于

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta = \frac{\pi}{4} \\ \int_1^2 \rho \sin(\pi \rho) d\rho &= \frac{1}{\pi} (-\rho \cos \pi \rho + \frac{1}{\pi} \sin \pi \rho) \Big|_1^2 = -\frac{3}{\pi} \end{aligned}$$

$$\text{故 } \iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2+y^2})}{x+y} dx dy = -\frac{3}{4}.$$

【例 12】 (2013, 数二、三) 设 D_k 是圆域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 在第 k 象限的部分, 记 $I_k = \iint_{D_k} (y-x) dx dy (k=1, 2, 3, 4)$, 则

$$(A) I_1 > 0.$$

$$(B) I_2 > 0.$$

$$(C) I_3 > 0.$$

$$(D) I_4 > 0.$$

【B】

第十章 无穷级数

。本章考点。

(仅数学一、三) 常数项级数的收敛与发散的概念 收敛级数的和的概念 级数的基本性质与收敛的必要条件 几何级数与 p 级数及其收敛性 正项级数收敛性的判别法 交错级数与莱布尼茨定理 任意项级数的绝对收敛与条件收敛 函数项级数的收敛域与和函数的概念 幂级数及其收敛半径、收敛区间(指开区间)和收敛域 幂级数的和函数 幂级数在其收敛区间内的基本性质 简单幂级数的和函数的求法 初等函数的幂级数展开式 $e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x)$ 及 $(1+x)^\alpha$ 的麦克劳林(Maclaurin)展开式

(仅数学一) 函数的傅里叶(Fourier)系数与傅里叶级数 狄利克雷(Dirichlet)定理 函数在 $[-l, l]$ 上的傅里叶级数 函数在 $[0, l]$ 上的正弦级数和余弦级数

第一节 常数项级数

。考试内容概要。

一、级数的概念与性质

1. 级数的概念

设 $\{u_n\}$ 是一数列, 则表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为无穷级数, 简称级数. $s_n = \sum_{i=1}^n u_i$ 称为级数的部分和. 若部分和数列 $\{s_n\}$ 有极限 s , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$,

则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 并称这个极限值 s 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和, 记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$. 如果极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ 不存在,

则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

【例 1】 判定下列级数敛散性.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right);$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} aq^n (a \neq 0).$$

$$\begin{aligned}
 \text{【解】} \quad (1) s_n &= \ln\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
 &= \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} = \ln\left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \cdots \frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1).
 \end{aligned}$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 发散.

$$(2) s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \begin{cases} \frac{a(1-q^n)}{1-q}, & q \neq 1 \\ na, & q = 1 \end{cases}.$$

当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a}{1-q}$, 原级数收敛;

当 $|q| > 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$, 原级数发散;

当 $q = 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} na = \infty$, 原级数发散;

当 $q = -1$ 时, $s_n = a - a + a - \cdots + (-1)^{n-1}a = \begin{cases} a, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ 不存在, 原级数发散.

综上所述, 原级数 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n (a \neq 0)$ 在 $|q| < 1$ 时收敛, 在 $|q| \geq 1$ 时发散.

2. 级数的性质

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 s , 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛, 且其和为 ks .

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 s, σ , 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 收敛于 $s \pm \sigma$.

【注】 ① 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 必发散;

② 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 敛散性不定.

(3) 在级数中去掉、加上或改变有限项, 不会改变级数的敛散性.

【注】 一个级数的敛散性与其前有限项无关.

(4) 收敛级数加括号仍收敛且和不变.

【注】 ① 若级数加括号以后收敛, 原级数不一定收敛;

② 若级数加括号以后发散, 则原级数一定发散.

(5) (级数收敛的必要条件) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

【注】 ① 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 不一定收敛;

② 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定发散.

二、级数的审敛准则

1. 正项级数 ($\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n \geq 0$)基本定理: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \{s_n\}$ 上有界.(1) 比较判别法: 设 $u_n \leq v_n$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 发散}.$$

(2) 比较法极限形式: 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l (0 \leq l \leq +\infty)$ ① 若 $0 < l < +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散.② 若 $l = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.③ 若 $l = +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛.【注】 使用比较法和比较法的极限形式时, 需要适当地选择一个已知其敛散性的级数作为比较的基准. 最常用的是 p 级数和等比级数.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \text{当 } p > 1 \text{ 时收敛, 当 } p \leq 1 \text{ 时发散.}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n, \text{ 其中 } a \text{ 和 } q \text{ 为正数} \quad \text{当 } q < 1 \text{ 时收敛, 当 } q \geq 1 \text{ 时发散.}$$

(3) 比值法: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \begin{cases} \text{收敛,} & \rho < 1 \\ \text{发散,} & \rho > 1. \\ \text{不一定,} & \rho = 1 \end{cases}$ (4) 根值法: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \begin{cases} \text{收敛,} & \rho < 1 \\ \text{发散,} & \rho > 1. \\ \text{不一定,} & \rho = 1 \end{cases}$ 2. 交错级数 ($\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n, u_n > 0$)莱布尼茨准则: 若 (1) $\{u_n\}$ 单调减; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛.【注】 $\{u_n\}$ 单调减, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛的充分条件, 但非必要条件.如交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+(-1)^n}}$ 收敛, 但 $u_n = \frac{1}{2^{n+(-1)^n}}$ 并不递减.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

3. 任意项级数 ($\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n$ 为任意实数)

绝对收敛与条件收敛概念

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛, 此时称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛.

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 此时称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛.

绝对收敛和条件收敛的基本结论

(1) 绝对收敛的级数一定收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(2) 条件收敛的级数的所有正项(或负项)构成的级数一定发散.

即: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n + |u_n|}{2}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n - |u_n|}{2}$ 发散.

。 常考题型与典型例题 。

常考题型

常数项级数的敛散性判定

【例 2】(2015, 数三) 下列级数中发散的是

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
(C) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{\ln n}$. (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

【C】

【例 3】(2013, 数三) 设 $\{a_n\}$ 为正项数列, 下列选项正确的是

- (A) 若 $a_n > a_{n+1}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛.
(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛, 则 $a_n > a_{n+1}$.
(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则存在常数 $p > 1$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n$ 存在.
(D) 若存在常数 $p > 1$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n$ 存在, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

【D】

【例 4】(2009, 数一) 设有两个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则

- (A) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛. (B) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散.
(C) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛. (D) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散.

【C】

【例 5】(2011, 数三) 设 $\{u_n\}$ 是数列, 则下列命题正确的是

- (A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛.
 (B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.
 (C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛.
 (D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

【A】

第二节 幂级数

。 考试内容概要 。

一、幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域

定义 形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

或者

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \cdots + a_n (x - x_0)^n + \cdots$$

的函数项级数称为幂级数.

定理(阿贝尔定理)

(1) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0 (x_0 \neq 0)$ 处收敛, 则当 $|x| < |x_0|$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛.

(2) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0$ 处发散, 则当 $|x| > |x_0|$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散.

定理 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛性有且仅有以下三种可能:

(1) 对任何 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都收敛;

(2) 仅在 $x = 0$ 处收敛;

(3) 存在一个正数 R , 当 $|x| < R$ 时绝对收敛, 当 $|x| > R$ 时发散.

定义 上述定理中的正数 R 称为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径. 开区间 $(-R, R)$ 称为它的收

敛区间. 若再考察 $x = \pm R$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛性, 可得出该级数收敛点的全体, 称之为收敛域.

【注】若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x = x_0$ 处条件收敛, 则点 x_0 必为该幂级数收敛区间 $(-R, R)$ 的一个端点.

定理 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$, 则 $R = \frac{1}{\rho}$.

定理 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$, 则 $R = \frac{1}{\rho}$.

二、幂级数的性质

1. 有理运算性质

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R_1 , $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径为 R_2 , 令 $R = \min\{R_1, R_2\}$, 则有

$$(1) \text{ 加法: } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n, \quad x \in (-R, R)$$

$$(2) \text{ 减法: } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) x^n, \quad x \in (-R, R)$$

$$(3) \text{ 乘法: } \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) x^n + \cdots \quad x \in (-R, R)$$

$$(4) \text{ 除法: } \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad x \in (-R, R)$$

其中系数 $c_n (n = 0, 1, 2, \cdots)$ 由 $\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 所确定.

2. 分析性质

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , 和函数为 $S(x)$, 则

(1) 连续性: $S(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内连续.

(2) 可导性: $S(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内可导, 且可逐项求导, 即

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

求导后的幂级数与原幂级数有相同的收敛半径.

(3) 可积性: $S(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内可积, 且可逐项积分, 即

$$\int_0^x S(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$$

积分后的幂级数与原幂级数有相同的收敛半径.

三、函数的幂级数展开

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 上有定义, 若

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

对任意的 $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ 都成立, 则称函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 上能展开为 $x - x_0$ 的幂级数.

由幂级数的性质可知,如果函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 上能展开为 $x - x_0$ 的幂级数,那么, $f(x)$ 在区间 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 上任意阶可导.

定理 如果函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 上能展开为 $x - x_0$ 的幂级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

那么, $f(x)$ 在区间 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 上任意阶可导,且其展开式是唯一的,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (n = 0, 1, 2, \dots)$$

定义 若函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处任意阶可导,则称幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

为 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的泰勒级数.

特别地, $x_0 = 0$ 处的泰勒级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ 称为函数 $f(x)$ 的麦克劳林级数.

定理 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某邻域内任意阶可导,则 $f(x)$ 在该邻域内能展开为泰勒级数 $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, 其中 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒公式

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x)$$

中的余项.

几个常用的展开式

$$(1) \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$(2) \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (-1 < x < 1)$$

$$(3) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$(4) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$(5) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$(6) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \quad (-1 < x \leq 1)$$

$$(7) (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

($-1 < x < 1$, 区间端点展开式是否成立由 α 的值确立)

函数展开为幂级数的两种方法

(1) 直接展开法

直接展开法分以下两步进行:

第一步 求出 $f(x)$ 在 x_0 处的各阶导数 $f^{(n)}(x_0)$, 并写出 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的泰勒级数

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

第二步 考查 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} = 0$ 是否成立.

(2) 间接展开法

根据函数展开为幂级数的唯一性,从某些已知函数的展开式出发,利用幂级数的性质(四则运算、逐项求导、逐项积分)及变量代换等方法,求得所给函数的展开式.

【注】直接展开法分两步,但这两步都比较困难,主要用于一开始推导一些基本展开式(如 $e^x, \sin x$);有了一些基本展开式后,主要用间接展开法.

。常考题型与典型例题。

常考题型

1. 求收敛半径、收敛区间及收敛域
2. 将函数展开为幂级数
3. 求幂级数(或数项级数)的和

一、求收敛半径、收敛区间及收敛域

【例1】(2009,数三) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n - (-1)^n}{n^2} x^n$ 的收敛半径为 _____. 【1/e】

【例2】(1995,数一) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + (-3)^n} x^{2n-1}$ 的收敛半径 $R =$ _____. 【√3】

【例3】(2000,数一) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + (-2)^n} \frac{x^n}{n}$ 的收敛区间,并讨论该区间端点处的收敛性.

【解】 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[3^n + (-2)^n]n}{[3^{n+1} + (-2)^{n+1}](n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]n}{3\left[1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right](n+1)} = \frac{1}{3}$$

或
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{3^n + (-2)^n} \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}} = \frac{1}{3}$$

所以收敛半径为 3,收敛区间为 $(-3, 3)$.

当 $x = 3$ 时,因为 $\frac{3^n}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{1}{n} > \frac{1}{2n}$,且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散,所以原级数在点 $x = 3$ 处发散.

当 $x = -3$ 时,由于 $\frac{(-3)^n}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{1}{n} = (-1)^n \frac{1}{n} - \frac{2^n}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{1}{n}$,且都收敛,所以原级数在点 $x = -3$ 处收敛.

【例4】(2008,数一) 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+2)^n$ 在 $x = 0$ 处收敛,在 $x = -4$ 处发散,则

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$ 的收敛域为 _____.

【(1,5)】

【例 5】(2015, 数一) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则 $x = \sqrt{3}$ 与 $x = 3$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n (x-1)^n$ 的

(A) 收敛点, 收敛点.

(B) 收敛点, 发散点.

(C) 发散点, 收敛点.

(D) 发散点, 发散点.

【解】 由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛可知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x = 2$ 处条件收敛, 则 $x = 2$ 为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 的收敛区间的端点. 又其收敛半径为 1. 由幂级数的性质可知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n (x-1)^n$ 的收敛半径也为 1.

由于 $|\sqrt{3}-1| < 1, |3-1| > 1$, 则 $x = \sqrt{3}$ 为收敛点, $x = 3$ 为发散点, 故应选(B).

二、将函数展开为幂级数

【例 6】(2006, 数一) 将函数 $f(x) = \frac{x}{2+x-x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

【解】 因为 $\frac{x}{2+x-x^2} = \frac{x}{3} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x} \right)$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, |x| < 1$$

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}, |x| < 2$$

所以 $\frac{x}{2+x-x^2} = \frac{x}{3} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x} \right) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}} \right] x^{n+1}, |x| < 1$

【例 7】(2007, 数三) 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2-3x-4}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数, 并指出其收敛区间.

【解】 因为 $\frac{1}{x^2-3x-4} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+1} \right)$,

$$\frac{1}{x-4} = \frac{1}{(x-1)-3} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{x-1}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{3} \right)^n, x \in (-2, 4)$$

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{(x-1)+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{x-1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x-1}{2} \right)^n, x \in (-1, 3)$$

所以 $\frac{1}{x^2-3x-4} = -\frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \right] (x-1)^n, x \in (-1, 3)$

【例 8】 将函数 $f(x) = \ln(x^2 + x)$ 在 $x = 1$ 处展开为幂级数.

$$\left[\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) (x-1)^n, |x-1| < 1 \right]$$

【例 9】 将函数 $f(x) = \sin x$ 在 $x = \frac{\pi}{4}$ 处展开为幂级数.

$$\begin{aligned} \text{【解】 } f(x) &= \sin\left[\frac{\pi}{4} + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{(2n)!} \right], x \in (-\infty, +\infty) \end{aligned}$$

【例 10】 将函数 $f(x) = \arctan x^2$ 展开成 x 的幂级数.

$$\left[2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+2} x^{4n+2}, |x| < 1 \right]$$

三、级数求和

【例 11】 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的收敛域及和函数.

$$\left[(-1, 1); \frac{x}{(1-x)^2} \right]$$

【例 12】 (2017, 数一) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} nx^{n-1}$ 在区间 $(-1, 1)$ 内的和函数 $S(x) =$ _____.

$$\text{【解】 } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} nx^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n \right)' = \left(\frac{x}{1+x} \right)' = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

【例 13】 (2014, 数三) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域及和函数.

【解】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1, R = 1$, 当 $x = \pm 1$ 时原级数显然发散, 则其收敛域为 $(-1, 1)$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+3)x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} \right)'' + \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \right)' = \left(\frac{x^2}{1-x} \right)'' + \left(\frac{x}{1-x} \right)' \\ &= \left(-(x+1) + \frac{1}{1-x} \right)'' + \left(-1 + \frac{1}{1-x} \right)' \\ &= \frac{3-x}{(1-x)^3}, x \in (-1, 1) \end{aligned}$$

【例 14】 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛域及和函数.

$$\left[[-1, 1], \begin{cases} 1 + \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \ln(1-x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \right]$$

【注】 常用结论: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

【例 15】 (2010, 数一) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

【解】 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} = 1$, 因此幂级数的收敛半径 $R = 1$.

当 $x = \pm 1$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$, 由莱布尼茨判别法知此级数收敛, 因此幂级数的收敛域为 $[-1, 1]$.

设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} (-1 \leq x \leq 1)$, 则

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \frac{1}{1+x^2}$$

又 $S(0) = 0$, 故 $S(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan x$, 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n} = xS(x) = x \arctan x, x \in [-1, 1]$$

第三节 傅里叶级数

◦ 考试内容概要 ◦

一、傅里叶系数与傅里叶级数

设函数 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数, 且在 $[-\pi, \pi]$ 上可积, 则称

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, n = 1, 2, \dots$$

为 $f(x)$ 的傅里叶系数, 称级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

为 $f(x)$ 以 2π 为周期的傅里叶级数. 记作

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

二、收敛定理(狄利克雷)

设 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上连续或只有有限个第一类间断点, 且最多只有有限个极值点, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $[-\pi, \pi]$ 上处处收敛, 且收敛于

(1) $S(x) = f(x)$, 当 x 为 $f(x)$ 的连续点.

(2) $S(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$, 当 x 为 $f(x)$ 的间断点.

$$(3) S(x) = \frac{f((- \pi)^+) + f(\pi^-)}{2}, \quad \text{当 } x = \pm \pi.$$

三、周期为 2π 的函数的展开

1. $[-\pi, \pi]$ 上展开

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

2. $[-\pi, \pi]$ 上奇偶函数的展开

(1) $f(x)$ 为奇函数.

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

(2) $f(x)$ 为偶函数.

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

3. 在 $[0, \pi]$ 上展为正弦或展为余弦

(1) 展为正弦.

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

(2) 展为余弦.

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

四、周期为 $2l$ 的函数的展开

1. $[-l, l]$ 上展开

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

2. $[-l, l]$ 上奇偶函数的展开

(1) $f(x)$ 为奇函数.

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

(2) $f(x)$ 为偶函数.

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

3. 在 $[0, l]$ 上展为正弦或展为余弦

(1) 展为正弦.

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

(2) 展为余弦.

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

。 常考题型与典型例题 。

常考题型

1. 狄利克雷收敛定理
2. 将函数展开为傅里叶级数

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

一、狄利克雷收敛定理

【例 1】(1988, 数一) 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 它在区间 $(-1, 1]$ 上的定义为

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x \leq 0 \\ x^3, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

则 $f(x)$ 的傅里叶(Fourier) 级数在 $x = 1$ 处收敛于_____.

【 $\frac{3}{2}$ 】

【例 2】(1989, 数一) 设函数 $f(x) = x^2, 0 \leq x < 1$, 而

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x, \quad -\infty < x < +\infty$$

其中 $b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx, n = 1, 2, 3, \dots$, 则 $S(-\frac{1}{2})$ 等于

(A) $-\frac{1}{2}$.

(B) $-\frac{1}{4}$.

(C) $\frac{1}{4}$.

(D) $\frac{1}{2}$.

【B】

二、将函数展开为傅里叶级数

【例 3】(1993, 数一) 设函数 $f(x) = \pi x + x^2 (-\pi < x < \pi)$ 的傅里叶级数展开式为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

则其中系数 b_3 的值为_____.

【 $\frac{2}{3}\pi$ 】

【例 4】 (1991, 数一) 将函数 $f(x) = 2 + |x|$ ($-1 \leq x \leq 1$) 展开成以 2 为周期的傅里叶级数, 并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的和.

【解】 由于 $f(x) = 2 + |x|$ ($-1 \leq x \leq 1$) 是偶函数, 所以

$$a_0 = 2 \int_0^1 (2+x) dx = 5$$

$$a_n = 2 \int_0^1 (2+x) \cos n\pi x dx = 2 \int_0^1 x \cos n\pi x dx = \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2 \pi^2}, n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = 0, n = 1, 2, \dots$$

因所给函数在区间 $[-1, 1]$ 上满足收敛定理的条件, 故

$$2 + |x| = \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x = \frac{5}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } 2 = \frac{5}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \text{ 从而 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

$$\text{又 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\text{故 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

【例 5】 (1995, 数一) 将 $f(x) = x - 1$ ($0 \leq x \leq 2$) 展开成周期为 4 的余弦级数.

$$\text{【解】 } a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 (x-1) dx = 0$$

$$a_n = \frac{2}{2} \int_0^2 (x-1) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{2}{n\pi} \int_0^2 (x-1) d\sin \frac{n\pi x}{2}$$

$$= -\frac{2}{n\pi} \int_0^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{4}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1]$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2k \\ -\frac{8}{(2k-1)^2 \pi^2}, & n = 2k-1 \end{cases} (k = 1, 2, \dots)$$

$$f(x) = -\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2}, x \in [0, 2]$$

重复是学习之母!

——狄慈根



第十一章 向量代数与空间解析几何 及多元微分学在几何上的应用

。 本章考点 。

(仅数学一) 向量的概念 线性运算 向量的数量积和向量积 向量的混合积 两向量垂直、平行的条件 向量的坐标表达式及其运算 曲面方程和空间曲线方程的概念 平面方程 直线方程 点到平面和点到直线的距离 球面 柱面 旋转曲面 空间曲线的切线和法平面 曲面的切平面和法线

第一节 向量代数

。 考试内容概要 。

1. 数量积

- (1) 几何表示: $a \cdot b = |a| |b| \cos \alpha$.
- (2) 代数表示: $a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.
- (3) 运算规律:
 - 交换律: $a \cdot b = b \cdot a$,
 - 分配律: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
- (4) 几何应用:
 - 求模: $|a| = \sqrt{a \cdot a}$,
 - 求夹角: $\cos \alpha = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$,
 - 判定两向量垂直: $a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0$.

2. 向量积

- (1) 几何表示: $a \times b$ 是一向量.
 - 模: $|a \times b| = |a| |b| \sin \alpha$.
 - 方向: 右手法则.

$$(2) \text{ 代数表示: } a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

(3) 运算规律:

$$a \times b = -(b \times a),$$

$$\text{分配律: } a \times (b + c) = a \times b + a \times c.$$

(4) 几何应用:

求同时垂直于 a 和 b 的向量: $a \times b$.

求以 a 和 b 为邻边的平行四边形面积: $S = |a \times b|$.

判定两向量平行: $a \parallel b \Leftrightarrow a \times b = 0$.

3. 混合积

(1) 几何表示: $(abc) = (a \times b) \cdot c$

$$(2) \text{ 代数表示: } (abc) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

(3) 运算规律:

$$\text{轮换对称性: } (abc) = (bca) = (cab).$$

$$\text{交换变号: } (abc) = -(acb).$$

(4) 几何应用:

$$V_{\text{平行六面体}} = |(abc)|.$$

判定三向量共面: a, b, c 共面 $\Leftrightarrow (abc) = 0$.

。 常考题型与典型例题 。

常考题型

向量的运算

【例 1】(1995) 设 $(a \times b) \cdot c = 2$, 则 $[(a + b) \times (b + c)] \cdot (c + a) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解】 $[(a + b) \times (b + c)] \cdot (c + a) = [a \times b + a \times c + b \times b + b \times c] \cdot (c + a)$
 $= (a \times b) \cdot c + (a \times b) \cdot a + (a \times c) \cdot c + (a \times c) \cdot a + (b \times c) \cdot c + (b \times c) \cdot a$
 $= (a \times b) \cdot c + (b \times c) \cdot a = 2(a \times b) \cdot c = 4$

第二节 空间平面与直线

。 考试内容概要 。

1. 平面方程

(1) 一般式: $Ax + By + Cz + D = 0, \quad n = \{A, B, C\}.$

(2) 点法式: $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$.

(3) 截距式: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

2. 直线方程

(1) 一般式: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$.

(2) 对称式: $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$.

(3) 参数式: $x = x_0 + lt, y = y_0 + mt, z = z_0 + nt$.

3. 平面与直线的位置关系(平行、垂直、夹角)

关键: 平面的法线向量, 直线的方向向量.

4. 点到面的距离

点 (x_0, y_0, z_0) 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

5. 点到直线的距离

点 (x_0, y_0, z_0) 到直线 $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ 的距离为

$$d = \frac{|(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \times (l, m, n)|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

。 常考题型与典型例题 。

常考题型

建立平面和直线方程

【例 1】(1987) 与两直线 $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + t, \\ z = 2 + t \end{cases}$ 及 $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$ 都平行, 且过原点的平面方程为_____.

【 $x - y + z = 0$ 】

【注】 所求平面的法线向量 n 和两直线的方向向量都垂直, 故 $n = \{1, -1, 1\}$.

【例 2】(1990) 过点 $M(1, 2, -1)$ 且与直线

$$\begin{cases} x = -t + 2 \\ y = 3t - 4 \\ z = t - 1 \end{cases}$$

垂直的平面方程为_____.

【 $x - 3y - z + 4 = 0$ 】

【例 3】(1991) 已知两条直线的方程是

$$L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}, L_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$$

则过 L_1 且平行于 L_2 的平面方程是_____.

【 $x-3y+z+2=0$ 】

【注】 所求平面的法线向量 $n = \{1, 0, -1\} \times \{2, 1, 1\} = \{1, -3, 1\}$.

【例 4】(1993) 设有直线 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+8}{1}$ 与 $L_2: \begin{cases} x-y=6 \\ 2y+z=3 \end{cases}$, 则 L_1 与 L_2 的

夹角为

- (A) $\frac{\pi}{6}$. (B) $\frac{\pi}{4}$. (C) $\frac{\pi}{3}$. (D) $\frac{\pi}{2}$.

【解】 L_1 和 L_2 的方向向量分别为 $s_1 = \{1, -2, 1\}$ 和 $s_2 = \{-1, -1, 2\}$,

$$\cos \theta = \frac{s_1 \cdot s_2}{|s_1| |s_2|} = \frac{1}{2}, \theta = \frac{\pi}{3}$$

【例 5】(1995) 设有直线

$$L: \begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$$

及平面 $\pi: 4x-2y+z-2=0$, 则直线 L

- (A) 平行于 π . (B) 在 π 上.
(C) 垂直于 π . (D) 与 π 斜交.

【C】

【例 6】(1996) 设一平面经过原点及点 $(6, -3, 2)$, 且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直, 则此平面方程为_____.

【 $2x+2y-3z=0$ 】

【注】 所求平面的法线向量 $n \perp \{4, -1, 2\}$, $n \perp \{6, -3, 2\}$, 取 $n = \{2, 2, -3\}$.

【例 7】(2006) 点 $(2, 1, 0)$ 到平面 $3x+4y+5z=0$ 的距离 $d =$ _____.

【 $\sqrt{2}$ 】

第三节 曲面与空间曲线

。 考试内容概要 。

1. 曲面方程

一般式 $F(x, y, z) = 0$ 或 $z = f(x, y)$.

2. 空间曲线

(1) 参数式: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

(2) 一般式: $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$.

3. 常见曲面

旋转面: 一条平面曲线绕平面上一条直线旋转

设 L 是 yOz 平面上一条曲线, 其方程是 $\begin{cases} f(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$, 则

(1) L 绕 y 轴旋转所得旋转面方程为 $f(y, \pm\sqrt{x^2+z^2}) = 0$.

(2) L 绕 z 轴旋转所得旋转面方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0$.

柱面: 平行于定直线并沿定曲线 Γ 移动的直线 L 形成的轨迹

(1) 准线为 $\Gamma: \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, 母线平行于 z 轴的柱面方程为 $f(x, y) = 0$;

(2) 准线为 $\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$, 母线平行于 z 轴的柱面方程为 $F(x, y, z) = 0$ 和 $G(x, y, z) = 0$. 联立消去 z 所得的二元方程 $H(x, y) = 0$.

二次曲面

(1) 椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$; 特别的: 圆锥面 $x^2 + y^2 = z^2$;

(2) 椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; 特别的: 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

(3) 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$;

(4) 双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$;

(5) 椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$; 特别的: 旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$;

(6) 双曲抛物面 (马鞍面) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$.

空间曲线投影

曲线 $\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$, 消去 z 得到关于 xOy 面的投影柱面 $H(x, y) = 0$. 曲线 Γ 在

xOy 面上的投影曲线方程为 $\begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

常考题型与典型例题

常考题型

建立柱面和旋转面方程

【例 1】 求以曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2z^2 = 1 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$ 为准线, 母线平行于 z 轴的柱面.

【解】 将 $z = x^2 + y^2$ 代入 $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ 得 $x^2 + y^2 + 2(x^2 + y^2)^2 = 1$, 即

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$$

为所要求的柱面.

【例 2】 求下列曲线绕指定的轴旋转产生的旋转面的方程.

(1) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$, 分别绕 x 轴和 y 轴旋转.

(2) $\begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$, 分别绕 y 轴和 z 轴旋转.

【解】 (1) 绕 x 轴旋转面方程: $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

绕 y 轴旋转面方程: $2(x^2 + z^2) + y^2 = 1$.

(2) 绕 y 轴旋转面方程: $\sqrt{x^2 + z^2} = y^2$, 即 $x^2 + z^2 = y^4$;

绕 z 轴旋转面方程: $z = y^2 + x^2$.

【例 3】 求曲线 $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a > 0) \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases}$ 在 xOy 面和 xOz 面上的投影曲线方程.

【解】 在 xOy 面上的投影为 $\begin{cases} x^2 + y^2 = ax \\ z = 0 \end{cases}$,

在 xOz 面上的投影为 $\begin{cases} z^2 + ax = a^2 \\ y = 0 \end{cases} (0 \leq x \leq a)$.

第四节 多元微分学在几何上的应用

。 考试内容概要 。

1. 曲面的切平面与法线

(1) 曲面 $F(x, y, z) = 0$

法向量: $\mathbf{n} = (F'_x, F'_y, F'_z)$;

(2) 曲面 $z = f(x, y)$

法向量: $\mathbf{n} = (f'_x, f'_y, -1)$.

2. 曲线的切线与法平面

(1) 曲线 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, 切向量: $\boldsymbol{\tau} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$.

(2) 曲线 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$, 切向量: $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$, 其中 $\mathbf{n}_1 = (F'_x, F'_y, F'_z)$, $\mathbf{n}_2 = (G'_x, G'_y, G'_z)$.

常考题型与典型例题

常考题型

建立曲面的切平面和法线及曲线的切线和法平面的方程

【例 1】 (2013) 曲面 $x^2 + \cos(xy) + yz + x = 0$ 在点 $(0, 1, -1)$ 处的切平面方程为

(A) $x - y + z = -2$.

(B) $x + y + z = 0$.

(C) $x - 2y + z = -3$.

(D) $x - y - z = 0$.

【A】

【例 2】 (1993) 由曲线 $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 12 \\ z = 0 \end{cases}$ 绕轴 y 旋转一周得到的旋转面在点 $(0, \sqrt{3}, \sqrt{2})$

处的指向外侧的单位法向量为_____.

【 $(0, \sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}})$ 】

【例 3】 (2003) 曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $2x + 4y - z = 0$ 平行的切平面的方程是

【 $2x + 4y - z = 5$ 】

【例 4】 求曲线 $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4\sin \frac{t}{2}$ 在点 $t = \frac{\pi}{2}$ 处的切线方程和法平面方程.

【解】 切线方程为 $\frac{x+1-\frac{\pi}{2}}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

法平面方程为 $x + y + \sqrt{2}z - \frac{\pi}{2} - 4 = 0$.

【例 5】 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, -2, 1)$ 处的切线和法平面方程.

【解】 切线方程为 $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{3}$.

法平面方程为 $x - z = 0$.

不愤不启，不悱不发，举一隅不以三隅反，则不复也。

——《论语·述而》



第十二章 多元积分学及其应用

。 本章考点 。

(仅数学一) 三重积分的概念、性质、计算和应用 两类曲线积分的概念、性质及计算 两类曲线积分的关系 格林(Green)公式 平面曲线积分与路径无关的条件 二元函数全微分的原函数 两类曲面积分的概念、性质及计算 两类曲面积分的关系 高斯(Gauss)公式 斯托克斯(Stokes)公式 梯度、散度、旋度的概念及计算 曲线积分和曲面积分的应用

第一节 三重积分

。 考试内容概要 。

三重积分

1. 定义

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta v_k.$$

2. 性质

与二重积分类似.

3. 计算

直角坐标

(1) 先一后二(先单后重)

设平行于 z 且穿过闭区域 Ω 内部的直线与 Ω 的边界曲面 S 最多两个交点, Ω 在 xOy 面上的投影域为 D_{xy} (如图 1), 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

(2) 先二后一(先重后单)

设空间区域 $\Omega = \{(x, y, z) | (x, y) \in D_z, c_1 \leq z \leq c_2\}$, 其中 D_z 是垂直于 z 轴的平面截闭区域 Ω 所得的平面闭区域 (如图 2), 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_{c_1}^{c_2} dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy$$

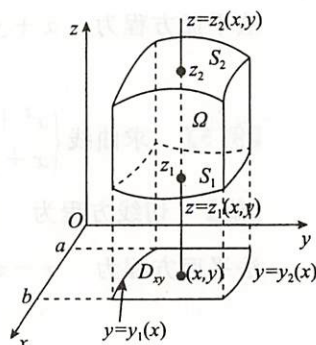


图 1

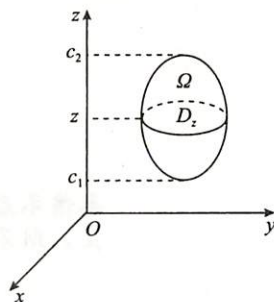


图 2

柱坐标

柱坐标与直角坐标的关系为

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, & 0 \leq \rho < +\infty \\ y = \rho \sin \theta, & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z = z, & -\infty < z < +\infty \end{cases}$$

体积微元 $dv = \rho d\rho d\theta dz$ (如图 3)

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho d\rho d\theta dz$$

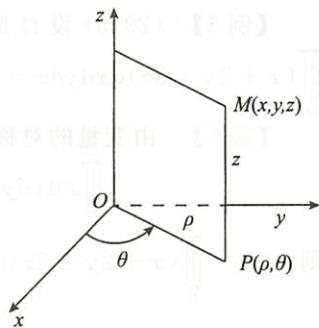


图 3

球坐标

球坐标与直角坐标的关系为

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta, & 0 \leq r < +\infty \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, & 0 \leq \varphi \leq \pi \\ z = r \cos \varphi, & 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

体积微元 $dv = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$ (如图 4)

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

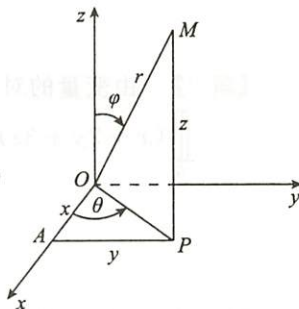


图 4

利用奇偶性

若积分域 Ω 关于 xOy 坐标面对称, $f(x, y, z)$ 关于 z 有奇偶性, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \begin{cases} 2 \iiint_{D_{z>0}} f(x, y, z) dv, & f(x, y, z) \text{ 关于 } z \text{ 是偶函数} \\ 0, & f(x, y, z) \text{ 关于 } z \text{ 是奇函数} \end{cases}$$

【注】若积分域关于 xOz 或 yOz 坐标面对称有相应结论.

利用变量的轮换对称性

常考题型与典型例题

常考题型

三重积分计算

【例 1】(1988) 设有空间区域 $\Omega_1: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0$ 及 $\Omega_2: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, 则

(A) $\iiint_{\Omega_1} x dv = 4 \iiint_{\Omega_2} x dv.$

(B) $\iiint_{\Omega_1} y dv = 4 \iiint_{\Omega_2} y dv.$

(C) $\iiint_{\Omega_1} z dv = 4 \iiint_{\Omega_2} z dv.$

(D) $\iiint_{\Omega_1} xyz dv = 4 \iiint_{\Omega_2} xyz dv.$

【C】

【例 2】(2009) 设 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, 则 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz =$ _____.

【 $\frac{4}{15}\pi$ 】

【解 1】先二后一.

【解 2】轮换对称性 + 球坐标.

【例 3】 (2015) 设 Ω 是由平面 $x + y + z = 1$ 与三个坐标平面围成的空间区域, 则 $\iiint_{\Omega} (x + 2y + 3z) dx dy dz =$ _____.

【解 1】 由变量的对称性知

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} x dx dy dz &= \iiint_{\Omega} z dx dy dz, \iiint_{\Omega} 2y dx dy dz = \iiint_{\Omega} 2z dx dy dz \\ \text{则 } \iiint_{\Omega} (x + 2y + 3z) dx dy dz &= 6 \iiint_{\Omega} z dx dy dz = 6 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} z dz \\ &= 3 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)^2 dy \\ &= \int_0^1 (1-x)^3 dx = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

【解 2】 由变量的对称性知

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x + 2y + 3z) dx dy dz &= 6 \iiint_{\Omega} z dx dy dz = 6 \int_0^1 dz \iint_{D_z} z dx dy \quad (\text{先二后一}) \\ &= 6 \int_0^1 z \cdot \frac{1}{2} (1-z)^2 dz = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

【例 4】 (1989) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (x + z) dv$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 所围成的区域.

【解 1】 由 Ω 关于 yOz 坐标面对称, x 是 x 的奇函数, 则 $\iiint_{\Omega} x dv = 0$.

利用球面坐标计算

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dv &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} \\ \text{所以 } \iiint_{\Omega} (x + z) dv &= \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

【解 2】 先一后二.

【解 3】 先二后一.

【解 4】 柱坐标.

第二节 曲线积分

。 考试内容概要 。

一、对弧长的线积分(第一类线积分)

1. 定义

$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

2. 性质

$$\int_{L(AB)} f(x, y) ds = \int_{L(BA)} f(x, y) ds \quad (\text{与积分路径方向无关})$$

3. 计算(平面)

直接法

(1) 若 $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \alpha \leq t \leq \beta$, 则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^\beta f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$$

(2) 若 $L: y = y(x), a \leq x \leq b$, 则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$$

(3) 若 $L: \rho = \rho(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta$, 则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^\beta f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta$$

利用奇偶性

(1) 若积分曲线 L 关于 y 轴对称, 则

$$\int_L f(x, y) ds = \begin{cases} 2 \int_{L_{x \geq 0}} f(x, y) ds, & \text{当 } f(x, y) \text{ 关于 } x \text{ 为偶函数} \\ 0, & \text{当 } f(x, y) \text{ 关于 } x \text{ 为奇函数} \end{cases}$$

(2) 若积分曲线 L 关于 x 轴对称, 则

$$\int_L f(x, y) ds = \begin{cases} 2 \int_{L_{y \geq 0}} f(x, y) ds, & \text{当 } f(x, y) \text{ 关于 } y \text{ 为偶函数} \\ 0, & \text{当 } f(x, y) \text{ 关于 } y \text{ 为奇函数} \end{cases}$$

利用对称性

若积分曲线关于直线 $y = x$ 对称, 则 $\int_L f(x, y) ds = \int_L f(y, x) ds$.

特别的 $\int_L f(x) ds = \int_L f(y) ds$.

对空间线积分 $\int_L f(x, y, z) ds$, 通常化为定积分计算, 即若曲线 L 的方程为: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$, 则

$$\int_L f(x, y, z) ds = \int_a^\beta f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$$

二、对坐标的线积分(第二类线积分)

1. 定义

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i]$$

2. 性质

$$\int_{L(AB)} P dx + Q dy = - \int_{L(BA)} P dx + Q dy \quad (\text{与积分路径方向有关})$$

3. 计算方法(平面)

直接法

设有光滑曲线 $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$, 其起点和终点分别对应参数 $t = \alpha$ 和 $t = \beta$, $P(x, y), Q(x, y)$ 在 L 上连续, 则

$$\int_L P dx + Q dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt$$

格林公式

设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成, 函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma$$

其中 L 为 D 取正向的边界曲线.

补线用格林公式

利用线积分与路径无关

(1) 线积分与路径无关的判定

定理 设函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在单连通域 D 上有一阶连续偏导数, 则以下四条等价:

① 线积分 $\int_L P dx + Q dy$ 与路径无关;

② $\oint_L P dx + Q dy = 0$, 其中 L 为 D 中任一分段光滑闭曲线;

③ $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \forall (x, y) \in D$;

④ $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y)$.

(2) 计算

① 改换路径计算 一般是沿平行于坐标轴的直线积分.

$$\begin{aligned} \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} P dx + Q dy &= \int_{x_1}^{x_2} P(x, y_1) dx + \int_{y_1}^{y_2} Q(x_2, y) dy \text{ 或} \\ \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} P dx + Q dy &= \int_{y_1}^{y_2} Q(x_1, y) dy + \int_{x_1}^{x_2} P(x, y_2) dx \end{aligned}$$

② 利用原函数计算

设 $P dx + Q dy = dF(x, y)$, 即 $F(x, y)$ 为 $P dx + Q dy$ 的原函数, 则

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} P dx + Q dy = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1)$$

求原函数方法: 偏积分; 凑微分.

4. 两类线积分的联系

$$\oint_L P dx + Q dy = \oint_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta) ds$$

5. 计算方法(空间)

(1) 直接法

设分段光滑的曲线 L 由参数方程 $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [\alpha, \beta]$ 给出, 其起点和终点分别对应参数 $t = \alpha$ 和 $t = \beta$, P, Q, R 在 L 上连续, 则

$$\int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \\ = \int_a^b \{P[x(t), y(t), z(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)]y'(t) + R[x(t), y(t), z(t)]z'(t)\} dt$$

(2) 斯托克斯公式

设 L 为空间分段光滑的有向闭曲线, Σ 是以 L 为边界的分片光滑曲面, L 的方向与 Σ 的法方向符合右手法则, 函数 P, Q, R 在 Σ 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\oint_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \\ = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS \\ = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

常考题型与典型例题

常考题型

曲线积分计算

一、第一类线积分的计算

【例 1】 (1989) 设平面曲线 L 为下半圆 $y = -\sqrt{1-x^2}$, 则曲线积分

$$\int_L (x^2 + y^2) ds = \underline{\hspace{2cm}}. \quad [\pi]$$

$$\int_L x ds = \underline{\hspace{2cm}}. \quad [0]$$

$$\int_L y ds = \underline{\hspace{2cm}}. \quad [-2]$$

【例 2】 (1998) 设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 其周长记为 a , 则

$$\oint_L (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds = \underline{\hspace{2cm}}. \quad [12a]$$

【例 3】 (2009) 已知曲线 $L: y = x^2 (0 \leq x \leq \sqrt{2})$, 则 $\int_L x ds = \underline{\hspace{2cm}}. \quad [\frac{13}{6}]$

二、第二类线积分的计算

【例 4】 (2004) 设 L 为正向圆周 $x^2 + y^2 = 2$ 在第一象限中的部分, 则曲线积分 $\int_L x dy - 2y dx$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}. \quad [\frac{3}{2}\pi]$

【解 1】 直接法.

【解 2】 补线用格林公式.

【例 5】 (2010) 已知曲线 L 的方程为 $y = 1 - |x|$ ($x \in [-1, 1]$), 起点是 $(-1, 0)$, 终点为 $(1, 0)$, 则曲线积分 $\int_L xy dx + x^2 dy =$ _____.

【解 1】 $L = L_1 + L_2$, 其中 $L_1: y = 1 + x (-1 \leq x \leq 0)$, $L_2: y = 1 - x (0 \leq x \leq 1)$.

$$\int_{L_1} xy dx + x^2 dy = \int_{-1}^0 [x(1+x) + x^2] dx = \int_{-1}^0 (2x^2 + x) dx = \frac{1}{6}$$

$$\int_{L_2} xy dx + x^2 dy = \int_0^1 [x(1-x) - x^2] dx = \int_0^1 (x - 2x^2) dx = -\frac{1}{6}$$

故 $\int_L xy dx + x^2 dy = 0$.

【解 2】 补线用格林公式.

【例 6】 (1999) 求 $I = \int_L (e^x \sin y - b(x+y)) dx + (e^x \cos y - ax) dy$, 其中 a, b 为正的常数, L 为从点 $A(2a, 0)$ 沿曲线 $y = \sqrt{2ax - x^2}$ 到点 $O(0, 0)$ 的弧.

【解】 添加从点 $O(0, 0)$ 沿 $y = 0$ 到点 $A(2a, 0)$ 的有向直线段 L_1 ,

$$I = \int_{L \cup L_1} (e^x \sin y - b(x+y)) dx + (e^x \cos y - ax) dy$$

$$- \int_{L_1} (e^x \sin y - b(x+y)) dx + (e^x \cos y - ax) dy$$

由格林公式, 前一积分 $I_1 = \iint_D (b-a) d\sigma = \frac{\pi}{2} a^2 (b-a)$

其中 D 为 $L \cup L_1$ 所围成的半圆域. 直接计算后一积分可得

$$I_2 = \int_0^{2a} (-bx) dx = -2a^2 b$$

从而 $I = I_1 - I_2 = \frac{\pi}{2} a^2 (b-a) + 2a^2 b = \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) a^2 b - \frac{\pi}{2} a^3$.

【例 7】 (2008) 计算曲线积分 $\int_L \sin 2x dx + 2(x^2 - 1)y dy$, 其中 L 是曲线 $y = \sin x$ 上从点 $(0, 0)$ 到点 $(\pi, 0)$ 的一段.

【解 1】 直接法.

$$\begin{aligned} \int_L \sin 2x dx + 2(x^2 - 1)y dy &= \int_0^\pi [\sin 2x + 2(x^2 - 1) \sin x \cdot \cos x] dx \\ &= \int_0^\pi x^2 d \sin^2 x = x^2 \sin^2 x \Big|_0^\pi - 2 \int_0^\pi x \sin^2 x dx \\ &= (-2) \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \sin^2 x dx = -2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx \\ &= (-2\pi) \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

【解 2】 补线用格林公式.

【例 8】 (2014, 数一) 设 L 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $y + z = 0$ 的交线, 从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向, 则曲线积分 $\oint_L z dx + y dz =$ _____.

【解 1】 柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $y + z = 0$ 的交线的参数方程为

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = -\sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \oint_L z dx + y dz &= \int_0^{2\pi} [\sin^2 t - \sin t \cos t] dt \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

【解 2】 由斯托克斯公式得

$$\oint_L z dx + y dz = \iint_{\Sigma} (1-0) dy dz + (1-0) dz dx + (0-0) dx dy$$

其中 Σ 为平面 $y+z=0$ 包含在柱面 $x^2+y^2=1$ 之内部分的上侧,

$$\begin{aligned} \oint_L z dx + y dz &= \iint_{\Sigma} dy dz + dz dx = \iint_{\Sigma} dz dx \\ &= \iint_{D_x} dz dx = \pi \quad \text{其中 } D_x = \{(x, z) | x^2 + z^2 \leq 1\} \end{aligned}$$

【解 3】 将空间线积分化为平面线积分用格林公式,

由 $y+z=0$ 得, $z=-y$, 代入积分 $\oint_L z dx + y dz$ 得

$$\begin{aligned} \oint_L z dx + y dz &= \oint_C (-y dx - y dy) \quad (\text{其中 } C \text{ 为单位圆 } x^2 + y^2 = 1 \text{ 沿逆时针方向}) \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy = \pi \quad (\text{格林公式}) \end{aligned}$$

第三节 曲面积分

。 考试内容概要 。

一、对面积的面积分(第一类面积分)

1. 定义

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

2. 性质

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{-\Sigma} f(x, y, z) dS \quad (\text{与积分曲面的方向无关})$$

3. 计算

(1) 直接法

设曲面 $\Sigma: z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$,

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy$$

若曲面由方程 $x = x(y, z)$ 或 $y = y(z, x)$ 给出, 也可类似地把对面积的面积分化为相应的二重积分.

(2) 利用奇偶性

若曲面 Σ 关于 xOy 面对称, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \begin{cases} 2 \iint_{\Sigma_{z \geq 0}} f(x, y, z) dS, & \text{当 } f(x, y, z) \text{ 关于 } z \text{ 为偶函数} \\ 0, & \text{当 } f(x, y, z) \text{ 关于 } z \text{ 为奇函数} \end{cases}$$

若曲面 Σ 关于 yOz 面或 zOx 面对称, 也有类似的结论.

(3) 利用对称性

二、对坐标的面积分(第二类面积分)

1. 定义

$$I = \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy$$

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{yz}$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{zx}$$

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xy}$$

2. 性质

$$\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = - \iint_{-\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

(与积分曲面的方向有关)

3. 计算

(1) 直接法

设有向曲面 $\Sigma: z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$, 则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dx dy$$

若有向曲面 Σ 的法线向量与 z 轴正向夹角为锐角, 即曲面的上侧, 上式中取正号, 否则取负号;

设有向曲面 $\Sigma: x = x(y, z), (y, z) \in D_{yz}$, 则

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} P[x(y, z), y, z] dy dz$$

若有向曲面 Σ 的法线向量与 x 轴正向夹角为锐角, 即曲面的前侧, 上式中取正号, 否则取负号;

设有向曲面 $\Sigma: y = y(z, x), (z, x) \in D_{zx}$, 则

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx = \pm \iint_{D_{xz}} Q[x, y(z, x), z] dz dx$$

若有向曲面 Σ 的法线向量与 y 轴正向夹角为锐角,即曲面的右侧,上式中取正号,否则取负号.

(2) 高斯公式

设空间闭区域 Ω 由分片光滑闭曲面 Σ 所围成,函数 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数,则有

$$\oiint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv$$

(3) 补面用高斯公式

4. 两类面积分的联系

$$\iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iint_{\Sigma} (P dy dz + Q dz dx + R dx dy)$$

。 常考题型与典型例题 。

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)

常考题型

曲面积分计算

一、第一类曲面积分的计算

【例 1】 (2000) 设 $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0)$, S_1 为 S 在第一卦限中的部分, 则有

(A) $\iint_S x dS = 4 \iint_{S_1} x dS.$

(B) $\iint_S y dS = 4 \iint_{S_1} x dS.$

(C) $\iint_S z dS = 4 \iint_{S_1} x dS.$

(D) $\iint_S xyz dS = 4 \iint_{S_1} xyz dS.$

【答案】 C.

【解】 对于 A $\iint_S x dS = 0, \iint_{S_1} x dS > 0$, 故 A 错.

对于 B $\iint_S y dS = 0, \iint_{S_1} x dS > 0$, 故 B 错.

对于 C $\iint_S z dS = 4 \iint_{S_1} z dS = 4 \iint_{S_1} x dS$ 正确.

对于 D $\iint_S xyz dS = 0, \iint_{S_1} xyz dS > 0$, 故 D 错.

【例 2】 (2012) 设 $\Sigma = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, 则 $\iint_{\Sigma} y^2 dS =$

【解】 $\iint_{\Sigma} y^2 dS = \sqrt{3} \iint_D y^2 dx dy = \sqrt{3} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} y^2 dx = \frac{\sqrt{3}}{12}.$

【例 3】 (1995) 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} z dS$, 其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在柱体 $x^2 + y^2 \leq 2x$ 内的部分.

【解】 Σ 在 xOy 平面上的投影区域 $D: x^2 + y^2 \leq 2x$.

$$dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} d\sigma = \sqrt{2} d\sigma$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad \iint_{\Sigma} z dS &= \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{2} d\sigma = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^2 d\rho \\ &= \frac{16\sqrt{2}}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta = \frac{32}{9} \sqrt{2} \end{aligned}$$

二、第二类曲面积分的计算

【例 4】 (1988) 设 Σ 为曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧, 计算曲面积分

$$I = \oiint_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$$

【解】 由高斯公式, 并利用球面坐标计算三重积分, 得

$$\begin{aligned} I &= 3 \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv \quad (\Omega \text{ 是由 } \Sigma \text{ 所围成的区域}) \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^2 \cdot r^2 dr = \frac{12}{5} \pi \end{aligned}$$

【例 5】 (2005) 设 Ω 是由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 围成的空间区域, Σ 是 Ω 的整个边界的外侧, 则 $\oiint_{\Sigma} x dydz + y dzdx + z dxdy = \underline{\hspace{2cm}}$. **【 $(2 - \sqrt{2})\pi R^3$ 】**

【例 6】 (2008) 设曲面 Σ 是 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 的上侧, 则 $\iint_{\Sigma} xy dydz + x dzdx + x^2 dxdy = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解】 设 Σ_1 是曲面 $z = 0 (x^2 + y^2 \leq 4)$ 取下侧, 由 Σ 与 Σ_1 所围的立体(上半球体)为 Ω , 则由高斯公式

$$\iint_{\Sigma} = \iint_{\Sigma + \Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} = \iiint_{\Omega} y dx dy dz - \iint_{\Sigma_1}$$

由对称性知 $\iiint_{\Omega} y dx dy dz = 0$, 故

$$\iint_{\Sigma} = - \iint_{\Sigma_1} = \iint_{x^2 + y^2 \leq 4} x^2 dxdy = \frac{1}{2} \iint_{x^2 + y^2 \leq 4} (x^2 + y^2) dxdy = 4\pi$$

【例 7】 (2014) 设 Σ 是曲面 $z = x^2 + y^2 (z \leq 1)$ 的上侧, 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (x-1)^3 dydz + (y-1)^3 dzdx + (z-1) dxdy$$

【解】 设 S 为平面 $z = 1$ 包含在曲面 $z = x^2 + y^2$ 之内部分的下侧, 则

$$\begin{aligned} I &= \oiint_{\Sigma + S} (x-1)^3 dydz + (y-1)^3 dzdx + (z-1) dxdy - \\ &\quad \iint_S (x-1)^3 dydz + (y-1)^3 dzdx + (z-1) dxdy \\ &= - \iiint_{\Omega} [3(x-1)^2 + 3(y-1)^2 + 1] dv - 0 \quad (\Omega \text{ 为 } z = 1 \text{ 和 } z = x^2 + y^2 \text{ 所围空间体}) \end{aligned}$$

$$= - \iiint_{\Omega} (3x^2 + 3y^2 + 7) dv + 6 \iiint_{\Omega} x dv + 6 \iiint_{\Omega} y dv$$

注意到 Ω 关于 yOz 面和 zOx 面都对称, 则

$$\iiint_{\Omega} x dv = \iiint_{\Omega} y dv = 0$$

$$\iiint_{\Omega} (3x^2 + 3y^2 + 7) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_{\rho^2}^1 (3\rho^2 + 7) \rho dz \quad (\text{柱坐标})$$

$$= 2\pi \int_0^1 \rho(3\rho^2 + 7)(1 - \rho^2) d\rho = 4\pi$$

则 $I = -4\pi$.

第四节 多元积分应用

。 考试内容概要 。

多元积分应用一览表

几何形体 所求量	平板	空间体	曲线	曲面
几何度量	面积: $S = \iint_D d\sigma$	体积: $V = \iiint_{\Omega} dv$	弧长 $L = \int_C ds$	面积 $S = \iint_{\Sigma} dS$
质量	$m = \iint_D \rho(x, y) d\sigma$	$m = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dv$	$m = \int_C f(x, y, z) ds$	$m = \iint_{\Sigma} \rho(x, y, z) dS$
质心	$\bar{x} = \frac{\iint_D x\rho(x, y) d\sigma}{\iint_D \rho(x, y) d\sigma}$	$\bar{x} = \frac{\iiint_{\Omega} x\rho(x, y, z) dv}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dv}$	$\bar{x} = \frac{\int_C x\rho(x, y, z) ds}{\int_C \rho(x, y, z) ds}$	$\bar{x} = \frac{\iint_{\Sigma} x\rho(x, y, z) dS}{\iint_{\Sigma} \rho(x, y, z) dS}$
转动惯量	$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) d\sigma$	$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dv$	$I_x = \int_C (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds$	$I_x = \iint_{\Sigma} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dS$

1. 变力做功

$$\text{力 } \mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$$

$$W = \int_{AB} P dx + Q dy + R dz$$

2. 通量

$$\text{向量场: } \mathbf{U}(x, y, z) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$$

$$\text{通量: } \Phi = \iiint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy$$

常考题型与典型例题

常考题型

形心和变力做功的计算

【例 1】 (2010) 设 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$, 则 Ω 的形心的竖坐标 $\bar{z} =$

【解】 $\bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z \, dv}{\iiint_{\Omega} dv}$, 而

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} dv &= \int_0^1 \left(\iint_{x^2+y^2 \leq z} dx dy \right) dz = \int_0^1 \pi z \, dz = \frac{\pi}{2} \\ \iiint_{\Omega} z \, dv &= \int_0^1 \left(\iint_{x^2+y^2 \leq z} dx dy \right) z \, dz = \int_0^1 \pi z^2 \, dz = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

故 $\bar{z} = \frac{2}{3}$.

【例 2】 (2000) 设有一半径为 R 的球体, P_0 是此球的表面上一个定点, 球体上任一点的密度与该点到 P_0 距离的平方成正比 (比例常数 $k > 0$), 求球体的重心位置.

【解】 设所考虑的球体为 Ω , 球心为 O , 以定点 P_0 为原点, 射线 P_0O 为正 z 轴建立直角坐标系, 则球面的方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$$

设 Ω 的重心位置为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, 由对称性, 得

$$\bar{x} = 0, \bar{y} = 0, \bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} kz(x^2 + y^2 + z^2) \, dv}{\iiint_{\Omega} k(x^2 + y^2 + z^2) \, dv}$$

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \, dv = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} r^4 \sin\varphi \, dr = \frac{32}{15} \pi R^5$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z(x^2 + y^2 + z^2) \, dv &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} r^5 \sin\varphi \cos\varphi \, dr \\ &= \frac{64}{3} \pi R^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\varphi \sin\varphi \, d\varphi = \frac{8}{3} \pi R^5 \end{aligned}$$

故 $\bar{z} = \frac{5}{4}R$. 因此, 球体 Ω 的重心位置为 $(0, 0, \frac{5}{4}R)$.

【例 3】 (1990) 质点 P 沿着以 AB 为直径的半圆周, 从点 $A(1, 2)$ 运动到点 $B(3, 4)$ 的过程中受到变力 F 作用 (见右图), F 的大小等于点 P 与原点 O 之间的距离, 其方向垂直于直线段 OP , 且与 y 轴正向的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$. 求变力 F 对质点 P 所作的功.

【解 1】 按题意, 变力 $F = -yi + xj$.

变力 F 所做的功

$$W = \int_{AB} (-y)dx + xdy$$

圆弧 AB 的参数方程是

$$\begin{cases} x = 2 + \sqrt{2}\cos\theta \\ y = 3 + \sqrt{2}\sin\theta \end{cases}, -\frac{3}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

$$W = \int_{AB} (-y)dx + xdy$$

$$= \int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} [\sqrt{2}(3 + \sqrt{2}\sin\theta)\sin\theta + \sqrt{2}(2 + \sqrt{2}\cos\theta)\cos\theta] d\theta$$

$$= 2(\pi - 1)$$

【解 2】 按题意, 变力 $F = -yi + xj$. 变力 F 所作的功

$$W = \int_{AB} (-y)dx + xdy$$

$$= \oint_{AB+BA} (-y)dx + xdy = \int_{AB} (-y)dx + xdy - \int_{BA} (-y)dx + xdy$$

$$= \iint_D 2dxdy - \int_3^1 -(1+x)dx + xdx$$

$$= 2\pi - 2$$

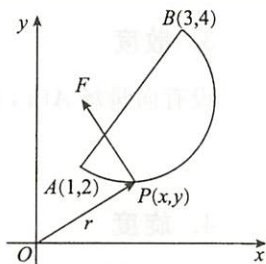


图 5

第五节 场论初步

。 考试内容概要 。

1. 方向导数

(1) 定义

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

其中 $e_l = (\cos\alpha, \cos\beta)$.

(2) **定理** 若函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处可微, 则函数在该点沿任一方向 l 的方向导数都存在, 且有

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} = f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\cos\beta$$

2. 梯度

定义 设 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处具有一阶连续偏导数,

$$\text{grad}f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f'_y(x_0, y_0)\mathbf{j}$$

【注】 梯度 $\text{grad}f(x_0, y_0)$ 是一个向量, 它的方向是函数在这点方向导数最大的方向, 它的模等于方向导数的最大值.

3. 散度

设有向量场 $\mathbf{A}(x, y, z) = \{P, Q, R\}$, 其中 P, Q, R 均具有一阶连续偏导数, 则

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

4. 旋度

设有向量场 $\mathbf{A}(x, y, z) = \{P, Q, R\}$, 其中 P, Q, R 均具有一阶连续偏导数, 则

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

。常考题型与典型例题。

常考题型

梯度、散度、旋度的计算

【例 1】(1996) 函数 $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$ 在点 $A(1, 0, 1)$ 处沿 A 指向 $B(3, -2, 2)$ 方向的方向导数为_____。 【 $\frac{1}{2}$ 】

【例 2】在椭球面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 上求一点, 使函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在该点沿 $l = (1, -1, 0)$ 方向的方向导数最大。 【 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$ 】

【例 3】(2012) $\operatorname{grad}\left(xy + \frac{z}{y}\right) \Big|_{(2, 1, 1)} =$ _____。 【 $(1, 1, 1)$ 】

【例 4】(1989) 向量场 $\mathbf{u}(x, y, z) = xy^2\mathbf{i} + ye^z\mathbf{j} + x\ln(1+z^2)\mathbf{k}$ 在点 $P(1, 1, 0)$ 处的散度 $\operatorname{div} \mathbf{u} =$ _____。 【2】

【例 5】(2018) 设 $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$, 则 $\operatorname{rot} \mathbf{F}(1, 1, 0) =$ _____。

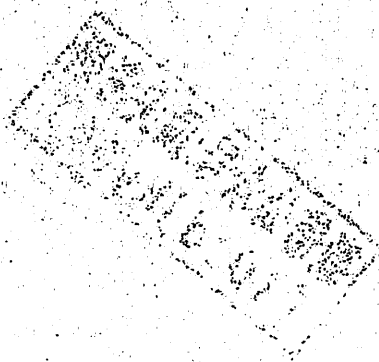
【解】 $\operatorname{rot} \mathbf{F}(1, 1, 0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & -yz & zx \end{vmatrix} \Big|_{(1, 1, 0)}$
 $= [(0+y)\mathbf{i} - (z-0)\mathbf{j} + (0-x)\mathbf{k}] \Big|_{(1, 1, 0)}$
 $= \mathbf{i} - \mathbf{k}$

第二篇



微信公众平台【顶尖考研】
(ID: djky66)

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



第一章 行列式

。 本章考点 。

行列式的概念和基本性质 行列式按行(列)展开定理
线性方程组的克拉默(Cramer)法则

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

一、行列式的概念

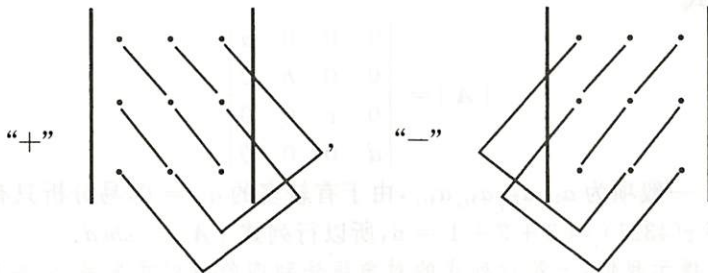
行列式是一个数,它是不同行不同列元素乘积的代数和。

例如,大家所熟悉的三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2$$

其每一项都是3个数的乘积,从字母看 a, b, c 各有一个,说明这三个数一个在第一行,一个在第二行,一个在第三行;而从下标看数字 $1, 2, 3$ 各有一个,说明这三个数分别来自第一列,第二列和第三列。

在这六项中,有3项带“+”号,3项带“-”号,大家可以用对角线方法来记忆:



当行列式的元素中有较多的“0”时,用对角线法来计算行列式的值是简便的。

例如, $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 \times 0 \times 0 + 1 \times 4 \times 5 + 2 \times 3 \times 6 - 2 \times 0 \times 5 - 1 \times 3 \times 0 - 0 \times 4 \times 6 = 56.$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -8 + 0 + 6 - 0 - 0 - (-3) = 1.$$

一般地,我们应当用行列式的性质将其恒等变形化简,再通过展开公式(用降阶法)来计算行列式的值。

关于 n 阶行列式的概念大家要有一个简单了解:

n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

的代数和, 这里 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列. 当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是偶排列时, 该项的前面带正号; 当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是奇排列时, 该项的前面带负号, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \quad (1)$$

这里 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和. 式(1)称为 n 阶行列式的完全展开式.

【注】 所谓排列是指由 n 个数 $1, 2, \cdots, n$ 所构成的一个有序数组, 通常用 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 表示 n 阶排列, 显然共有 $n!$ 个 n 阶排列.

一个排列中, 如果一个大的数排在小的数之前, 就称这两个数构成一个逆序. 一个排列的逆序总数称为这个排列的逆序数. 用 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 表示排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数.

如果一个排列的逆序数是偶数, 则称这个排列为偶排列, 否则称为奇排列.

例如, $a_{12} a_{24} a_{33} a_{41}$ 是四阶行列式中的一项, 那么该项所带的符号由 $\tau(2431) = 1 + 2 + 1 = 4$ (即 2 有 1 个逆序, 4 有 2 个逆序, 3 有 1 个逆序) 是偶排列, 故取正号.

又如, $a_{13} a_{25} a_{31} a_{42} a_{54}$ 是五阶行列式中的一项, 由 $\tau(35124) = 2 + 3 = 5$ 是奇排列, 故在行列式中应取负号.

对四阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

因为行列式 $|A|$ 一般项为 $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$, 由于有较多的 $a_{ij} = 0$, 易分析只有 $a_{14} a_{23} a_{32} a_{41}$ 这一项非 0, 而逆序 $\tau(4321) = 3 + 2 + 1 = 6$, 所以行列式 $|A| = abcd$.

【注】 这也提示我们, 三阶行列式的对角线法到四阶行列式失灵. 今后计算四阶行列式必须用展开公式法.

二、行列式的性质

$$\text{记 } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad |A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ 行列式 } |A^T| \text{ 称为 } |A|$$

的转置行列式.

性质 1 经过转置行列式的值不变, 即 $|A^T| = |A|$.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

由此可知行列式的性质与列的性质是对等的。(为方便说明,行列式都以三阶为例)。

性质 2 两行(或列)互换位置,行列式的值变号。

特别地,两行(或列)相同,行列式的值为 0。

性质 3 某行(或列)如有公因子 k ,则可把 k 提出行列式记号外。(亦即用数 k 乘行列式 $|A|$ 等于用 k 乘它的某行(或列))。

特别地:(1) 某行(或列)的元素全为 0,行列式的值为 0。

(2) 若两行(或列)的元素对应成比例,行列式的值为 0。

性质 4 如果行列式某行(或列)是两个元素之和,则可把行列式拆成两个行列式之和。

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

性质 5 把某行(或列)的 k 倍加到另一行(或列),行列式的值不变。

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + ka_1 & b_2 + ka_2 & b_3 + ka_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

【例 1】 证明:任意的 a, b, c 恒有

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = 0$$

【证】 由行列式性质,有

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} && \text{(第二行加到第三行)} \\ &= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} && \text{(第三行提公因数 } a+b+c) \\ &= 0 && \text{(两行相同行列式为 0)} \end{aligned}$$

【例 2】 证明 $\begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & a_1 + b_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & a_2 + b_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & a_3 + b_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 。

【证法 1】 把二列、三列均加至第一列,并提出第一列的公因式 2,得

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & a_1 + b_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & a_2 + b_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & a_3 + b_3 \end{vmatrix} &= 2 \begin{vmatrix} a_1 + b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & a_3 + b_3 \end{vmatrix} \\ &= \frac{c_2 - c_1}{c_3 - c_1} 2 \begin{vmatrix} a_1 + b_1 + c_1 & -b_1 & -c_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 & -b_2 & -c_2 \\ a_3 + b_3 + c_3 & -b_3 & -c_3 \end{vmatrix} && \text{(把第一列的 } -1 \text{ 倍分别加至二列和三列)} \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{c_1+c_2+c_3} 2 \begin{vmatrix} a_1 & -b_1 & -c_1 \\ a_2 & -b_2 & -c_2 \\ a_3 & -b_3 & -c_3 \end{vmatrix} \quad (\text{把第二列、三列均加至第一列})$$

$$= 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (\text{把第二列、第三列分别提出公因数 } -1)$$

【注】 倍加性质是行列式计算中常用的.

【证法 2】 本题也可用一些同学不太熟悉的拆开(性质 4)来处理: 由于行列式每一列都是 2 个数的和, 那么用拆开性质左端的行列式可表示成 8 个行列式之和, 但因两列相等行列式的值为 0, 所以这里有 6 个行列式的值为 0.

例如, 当第一列选 $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ 时, 若第二列选 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, 则第三列不论如何选择, 其行列式的值必为 0.

故

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ = * \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

* 前者先一、三两列互换, 然后再二、三两列互换; 后者先一、二两列互换, 然后再二、三两列互换.

【例 3】 证明 $\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}.$

【证】 用行列式拆开性质: 由于每列都是两个数的和, 原行列式可拆成 8 个行列式之和, 由于两列成比例行列式的值必为 0. 故这 8 个行列式中有六个必为 0.

(注意到如第一列是 $\begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \end{pmatrix}$, 第二列取 $\begin{pmatrix} bx \\ by \end{pmatrix}$, 那么无论第三列是 $\begin{pmatrix} az \\ ax \end{pmatrix}$ 还是 $\begin{pmatrix} by \\ bz \end{pmatrix}$, 这里的行

列式必有两列成比例, 行列式的值必为 0. 因此若行列式不为 0, 当第一列取 $\begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \end{pmatrix}$ 时, 第二列

只能是 $\begin{pmatrix} ay \\ az \\ ax \end{pmatrix}$, 此时第三列只能为 $\begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix}$)

那么

$$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax & ay & az \\ ay & az & ax \\ az & ax & ay \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & bz & bx \\ bz & bx & by \\ bx & by & bz \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= a^3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3 \begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix} \\
&= a^3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \text{(先二,三两列互换)} \\ \text{(再一,二两列互换)} \end{matrix} \\
&= (a^3 + b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} ax & ay+bz & az+bx \\ ay & az+bx & ax+by \\ az & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & ay+bz & az+bx \\ bz & az+bx & ax+by \\ bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} \\
&= a \begin{vmatrix} x & ay+bz & az+bx \\ y & az+bx & ax+by \\ z & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} y & ay+bz & az+bx \\ z & az+bx & ax+by \\ x & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} \\
&= a \begin{vmatrix} x & ay+bz & az \\ y & az+bx & ax \\ z & ax+by & ay \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} y & bz & az+bx \\ z & bx & ax+by \\ x & by & ay+bz \end{vmatrix} \\
&= a^2 \begin{vmatrix} x & ay+bz & z \\ y & az+bx & x \\ z & ax+by & y \end{vmatrix} + b^2 \begin{vmatrix} y & z & az+bx \\ z & x & ax+by \\ x & y & ay+bz \end{vmatrix} \\
&= a^2 \begin{vmatrix} x & ay & z \\ y & az & x \\ z & ax & y \end{vmatrix} + b^2 \begin{vmatrix} y & z & bx \\ z & x & by \\ x & y & bz \end{vmatrix} = a^3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3 \begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix} \\
&= a^3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = (a^3 + b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

三、行列式按行(或列)展开公式

在 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中划去 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列的元素,由剩下的元素按原来的位置排法构成的一个 $n-1$ 阶的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称其为 a_{ij} 的余子式, 记为 M_{ij} ; 称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式, 记为 A_{ij} , 即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

定理 n 阶行列式等于它的任何一行(列)元素与其对应的代数余子式乘积之和, 即

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{kj}A_{kj}, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

前一个公式称 $|A|$ 按第 i 行展开的展开式, 后一个公式称 $|A|$ 按第 j 列展开的展开式.

定理 行列式的任一行(列)元素与另一行(列)元素的代数余子式乘积之和为 0, 即

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}A_{jk} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, \quad i \neq j$$

$$\sum_{k=1}^n a_{ki}A_{kj} = a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0, \quad i \neq j$$

在用展开公式的时候, 还要注意下面几个特殊情况的配合:

1. 上(下)三角形行列式的值等于主对角线元素的乘积

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

2. 关于副对角线的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

3. 两个特殊的拉普拉斯展开式

如果 A 和 B 分别是 m 阶和 n 阶矩阵, 则

$$\begin{vmatrix} A & * \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|, \quad \begin{vmatrix} O & A \\ B & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| \cdot |B|$$

4. 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

【例 4】 计算行列式的值

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}; \quad (2) \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【分析】 计算行列式要用展开公式,在用展开公式之前一般先用行列式的性质把该行列式的某一行(或列)化出较多的 0.

(1) 例如,把第二行的 -2 倍加至第一行,然后把第三行的 2 倍加至第二行,得

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & -5 & -2 \\ 8 & 0 & 14 & 7 \\ 3 & -1 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -3 & -5 & -2 \\ 8 & 14 & 7 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 8 & 14 & 7 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 14 & -1 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 14 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -9$$

(2) 除用(1)的思路例如在第四行现构造出一个 0,用展开公式之外,还应有用拉普拉斯的设想

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 7 & 1 \\ 5 & 3 & 8 & 4 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 60$$

【例 5】 计算行列式的值

$$D = \begin{vmatrix} a+x & a & a & a \\ a & a+x & a & a \\ a & a & a+x & a \\ a & a & a & a+x \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【分析一】 把每一行都加至第一行,有

$$D = \begin{vmatrix} 4a+x & 4a+x & 4a+x & 4a+x \\ a & a+x & a & a \\ a & a & a+x & a \\ a & a & a & a+x \end{vmatrix} = (4a+x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a+x & a & a \\ a & a & a+x & a \\ a & a & a & a+x \end{vmatrix} \\ = (4a+x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = (4a+x)x^3$$

【分析二】 把第一行的 -1 倍分别加到其他各行,有

$$D = \begin{vmatrix} a+x & a & a & a \\ -x & x & 0 & 0 \\ -x & 0 & x & 0 \\ -x & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4a+x & a & a & a \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = (4a+x)x^3$$

【分析三】 先把第三行的 -1 倍加到第四行,然后把第二行的 -1 倍加到第三行,最后把第一行的 -1 倍加到第二行,有

$$D = \begin{vmatrix} a+x & a & a & a \\ -x & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4a+x & a & a & a \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix}$$

$$= (4a+x) \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ -x & x & 0 \\ 0 & -x & x \end{vmatrix} = (4a+x)x^3$$

【分析四】 $D = \begin{vmatrix} a+x & a+0 & a+0 & a+0 \\ a+0 & a+x & a+0 & a+0 \\ a+0 & a+0 & a+x & a+0 \\ a+0 & a+0 & a+0 & a+x \end{vmatrix}$ 用拆开性质应该是 16 个行列式的和,

你能写出不为 0 的那 5 个行列式吗?

【例 6】 计算 $D = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = \frac{\quad}{\quad}$.

【分析一】 (用按行展开公式) 第二行的 -1 倍加到第一行,再第一列的 -1 倍加到第二列,然后按第一行展开,

$$D = \begin{vmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+y & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

$$= x \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 0 & 1+y & 1 \\ 0 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = -x^2 \begin{vmatrix} 1+y & 1 \\ 1 & 1-y \end{vmatrix} = x^2 y^2$$

【分析二】 (爪型处理) 第一行的 -1 倍分别加到其他每一行

$$D = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ -x & -x & 0 & 0 \\ -x & 0 & y & 0 \\ -x & 0 & 0 & -y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ -x & 0 & y & 0 \\ -x & 0 & 0 & -y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+\frac{x}{y} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ -x & 0 & 0 & -y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix} = x^2 y^2$$

【分析三】 (加边法) 然后把第一行的 -1 倍分别加到其他各行.

$$\begin{vmatrix} \lambda & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-4 & -4 \\ 2 & -4 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 2-2\lambda \\ -2 & \lambda-4 & 0 \\ 2 & -4 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+4 & -10 & 0 \\ -2 & \lambda-4 & 0 \\ 2 & -4 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda+4 & -10 \\ -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda^2-36) = 0$$

所以 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = -6$.

【例 8】 证明范德蒙 (Vandermonde) 行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

【证】 (用归纳法)

$$n=2 \text{ 时, } D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1, \text{ 命题成立.}$$

$$\text{设 } D_{n-1} = \prod_{1 \leq j < i \leq n-1} (x_i - x_j) \text{ 成立.}$$

对 D_n , 从第 n 行开始, 依次把上一行的一 x_1 倍加至下一行, 有

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{*}{=} (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \cdot \prod_{2 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

$$= \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

* 上式右端的行列式是 $n-1$ 阶范德蒙行列式, 归纳假设可用.

【例 9】 证明

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}_{n \times n} = n+1$$

【证】 当 $n=1$ 时, $D_1 = 2 = 1+1$, 命题 $D_n = n+1$ 成立.

当 $n = 2$ 时, $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 = 2 + 1$, 命题 $D_n = n + 1$ 成立.

设 $n < k$ 时, 命题 $D_n = n + 1$ 成立.

当 $n = k$ 时, 按第一行展开, 有

$$\begin{aligned}
 D_k &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}_k = 2A_{11} - A_{12} \\
 &= 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 & \end{vmatrix}_{k-1} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}_{k-1} \\
 &= 2D_{k-1} - D_{k-2} = 2(k-1+1) - (k-2+1) = k+1
 \end{aligned}$$

故对每个自然数 n , 命题 $D_n = n + 1$ 恒成立.

四、克拉默法则

若 n 个方程 n 个未知量构成的非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式 $|A| \neq 0$, 则方程组有唯一解, 且

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, i = 1, 2, \cdots, n$$

其中 $|A_i|$ 是 $|A|$ 中第 i 列元素 (即 x_i 的系数) 替换成方程组右端的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 所构成的行列式.

推论 若包含 n 个方程 n 个未知量的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数行列式 $|A| \neq 0$ 的充要条件是方程组有唯一零解.

反之, 若齐次线性方程组有非零解, 充要条件是其系数行列式 $|A| = 0$.

【例 10】方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

的解中, $x_1 =$ _____.

【分析】 系数行列式是范德蒙行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 9 \end{vmatrix} = (-1-2)(-3-2)(-3-(-1)) = -30$$

$$\text{又 } D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -6, \text{ 故 } x_1 = \frac{1}{5}.$$

练习 1

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(2) \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(3) \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(4) \text{ 已知 } \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & 2 \\ -2 & \lambda & 2 \\ -2 & 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0, \text{ 求 } \lambda.$$

$$(5) \text{ 已知 } \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & -2 \\ -1 & \lambda-2 & 1 \\ -1 & -3 & \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ 求 } \lambda.$$

(6) 已知齐次方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解, 则 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}.$

(练习答案在 207 页)

第二章 矩阵

。本章考点。

矩阵的概念 单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵、三角矩阵、对称矩阵和反对称矩阵以及它们的性质 矩阵的线性运算 矩阵的乘法 方阵的幂 方阵乘积的行列式 矩阵的转置 逆矩阵的概念和性质 矩阵可逆的充分必要条件 伴随矩阵 矩阵的初等变换 初等矩阵 矩阵的秩 矩阵的等价 分块矩阵及其运算

一、矩阵的概念及运算

1. 矩阵的概念

定义 $m \times n$ 个数排成如下 m 行 n 列的一个表格

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为是一个 $m \times n$ 矩阵, 当 $m = n$ 时, 矩阵 A 称为 n 阶矩阵或叫 n 阶方阵.

如果一个矩阵的所有元素都是 0, 即

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

则称这个矩阵是零矩阵, 可简记为 O .

两个矩阵 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{s \times t}$, 如果 $m = s, n = t$, 则称 A 与 B 是同型矩阵.

两个同型矩阵 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, 如果对应的元素都相等, 即

$a_{ij} = b_{ij} (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$, 则称矩阵 A 与 B 相等, 记作 $A = B$.

n 阶方阵 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ 的元素所构成的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶矩阵 A 的行列式, 记成 $|A|$ 或 $\det A$.

【注】 矩阵 A 是一个表格, 而行列式 $|A|$ 是一个数, 这里的概念与符号不要混淆. $A = O$ 与 $|A| = 0$ 是不同的, 不能搞错. 当 $A \neq O$ 时可以有 $|A| = 0$, 当然也可能有 $|A| \neq 0$; 这些基本常识要想清楚.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

关于对角矩阵

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 b_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 b_3 \end{bmatrix}.$$

$$(1) \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1.$$

$$(2) \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_1^n & 0 & 0 \\ 0 & a_2^n & 0 \\ 0 & 0 & a_3^n \end{bmatrix}.$$

$$(3) \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & \\ & \frac{1}{a_2} & \\ & & \frac{1}{a_3} \end{bmatrix}.$$

关于 $\alpha\beta^T, \beta\alpha^T, \alpha^T\beta, \beta^T\alpha$.

练习 2.1

若 $\alpha = [1, 3, 2]^T, \beta = [1, 2, -1]^T$, 则

$$(1) \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} [1, 2, -1] = \underline{\hspace{2cm}}. \quad (2) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} [1, 3, 2] = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(3) [1, 2, -1] \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}. \quad (4) [1, 3, 2] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(5) \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} [1, 3, 2] = \underline{\hspace{2cm}}. \quad (6) [1, 2, -1] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(练习答案在 207 页)

定义(转置) 将 $m \times n$ 型矩阵 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ 的行列互换得到的 $n \times m$ 矩阵 $[a_{ji}]_{n \times m}$ 称为 A 的转置矩阵, 记为 A^T , 即若

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ 则 } A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

定义(矩阵多项式) 设 A 是 n 阶矩阵, $f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$ 是 x 的多项式, 则称 $a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E$

为矩阵多项式, 记为 $f(A)$.

运算法则

(1) 加法 A, B, C 是同型矩阵, 则

$$A + B = B + A \quad \text{交换律}$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) \quad \text{结合律}$$

$$A + O = A \quad \text{其中 } O \text{ 是元素全为零的同型矩阵}$$

$$A + (-A) = O$$

(2) 数乘矩阵

$$k(mA) = (km)A = m(kA); (k+m)A = kA + mA$$

$$k(A+B) = kA + kB; 1A = A, 0A = O$$

(3) 乘法 A, B, C 满足运算条件时

$$(AB)C = A(BC)$$

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$(B+C)A = BA + CA$$

(4) 转置

$$(A+B)^T = A^T + B^T; (kA)^T = kA^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T; (A^T)^T = A$$

【例 1】 若 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} - X + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} [2, 0, -1] = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, 则 $X =$ _____.

【分析】
$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} [2, 0, -1] - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \\ 9 & 9 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

【例 2】 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, 则

(1) $AB - BA =$ _____; (2) $(AB)^2 =$ _____; (3) $A^2 B^2 =$ _____.

【分析】 (1) $AB - BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) $(AB)^2 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$

(3) $A^2 B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$

【例 3】 方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = 5 \end{cases}$$

用矩阵可以表示为

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

若记 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 11 \end{bmatrix}$ 称为方程组系数矩阵, 未知数 $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$, 常数

项 $b = [2, 1, 5]^T$, 则方程组表示为: $Ax = b$.

如果对系数矩阵 A 按列分块, 记 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$.

由分块矩阵乘法, 有

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = b$$

得 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 = b$.

那么用向量的语言: 方程组问题就可转换为向量 b 由向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出的问题.

【例 4】 设 $A = E - \xi\xi^T$, 其中 ξ 是 n 维非零列向量.

证明: $A^2 = A \Leftrightarrow \xi^T\xi = 1$.

【证】 $A^2 = (E - \xi\xi^T)(E - \xi\xi^T) = E - \xi\xi^T - \xi\xi^T + \xi\xi^T\xi\xi^T$
 $= A + \xi(\xi^T\xi)\xi^T - \xi\xi^T = A + (\xi^T\xi - 1)\xi\xi^T$

因为 $\xi \neq 0$, 所以 $\xi\xi^T \neq O$.

$A^2 = A \Leftrightarrow (\xi^T\xi - 1)\xi\xi^T = O$

$\Leftrightarrow \xi^T\xi - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \xi^T\xi = 1$.

3. 常见的矩阵

设 A 是 n 阶矩阵.

(1) **单位阵**: 主对角元素为 1, 其余元素为 0 的矩阵称为单位阵, 记成 E_n .

(2) **数量阵**: 数 k 与单位阵 E 的积 kE 称为数量阵.

(3) **对角阵**: 非对角元素都是 0 的矩阵 (即 $\forall i \neq j$ 恒有 $a_{ij} = 0$) 称为对角阵, 记成 Λ .

$\Lambda = \text{diag}[a_1, a_2, \dots, a_n]$.

(4) **上(下)三角阵**: 当 $i > j$ ($i < j$) 时, 有 $a_{ij} = 0$ 的矩阵称为上(下)三角阵.

(5) **对称阵**: 满足 $A^T = A$, 即 $a_{ij} = a_{ji}$ 的矩阵称为对称阵.

(6) **反对称阵**: 满足 $A^T = -A$, 即 $a_{ij} = -a_{ji}$, $a_{ii} = 0$ 的矩阵称为反对称阵.

练习 2.2

(1) $[x_1, x_2] \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(2) $[x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(3) 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, 若 $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$, 则 $f(A) = \underline{\hspace{2cm}}.$

(练习答案在 207 页)

二、伴随矩阵、可逆矩阵

1. 伴随矩阵的概念与公式

伴随矩阵: 由矩阵 A 的行列式 $|A|$ 所有的代数余子式所构成的形如

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

的矩阵称为矩阵 A 的伴随矩阵, 记为 A^* .

例如, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, 则计算代数余子式, 得

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 6, A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4, A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -5, A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3, A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -8, A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

按定义 $A^* = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 3 \\ 4 & 0 & -8 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

伴随矩阵的公式:

$$AA^* = A^*A = |A|E$$

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \frac{1}{|A|}A \quad (|A| \neq 0)$$

$$(kA)^* = k^{n-1}A^*$$

$$(A^*)^T = (A^T)^*$$

$$|A^*| = |A|^{n-1}$$

$$(A^*)^* = |A|^{n-2}A \quad (n \geq 2)$$

2. 可逆矩阵的概念与定理

定义 设 A 是 n 阶矩阵, 如果存在 n 阶矩阵 B 使得

$$AB = BA = E \text{ (单位矩阵)}$$

成立, 则称 A 是可逆矩阵或非奇异矩阵, B 是 A 的逆矩阵, 记成 $A^{-1} = B$.

定理 若 A 可逆, 则 A 的逆矩阵唯一.

定理 A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$.

定理 设 A 和 B 是 n 阶矩阵且 $AB = E$, 则 $BA = E$.

3. n 阶矩阵 A 可逆的充分必要条件

- (1) 存在 n 阶矩阵 B , 使 $AB = E$ (或 $BA = E$).
- (2) $|A| \neq 0$, 或秩 $r(A) = n$, 或 A 的列(行)向量线性无关.
- (3) 齐次方程组 $Ax = 0$ 只有零解.
- (4) $\forall b$, 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 总有唯一解.
- (5) 矩阵 A 的特征值全不为 0.

4. 逆矩阵的运算性质

若 $k \neq 0$, 则 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$; 若 A, B 可逆, 则 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, 特别地 $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$;

若 A^T 可逆, 则 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$; $(A^{-1})^{-1} = A$; $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

注意 即使 A, B 和 $A+B$ 都可逆, 一般地 $(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$.

5. 求逆矩阵的方法

方法一 用公式, 若 $|A| \neq 0$, 则 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$.

方法二 初等变换法 $(A|E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E|A^{-1})$.

方法三 用定义求 B , 使 $AB = E$ 或 $BA = E$, 则 A 可逆, 且 $A^{-1} = B$.

方法四 用分块矩阵.

设 B, C 都是可逆矩阵, 则

$$\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}$$

【例 5】 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, 则 $A^{-1} =$ _____.

【分析】 用行变换 $(A|E) \rightarrow (E|A^{-1})$ 的方法:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\text{故 } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

【例 6】 设 $\alpha = \left(\frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2}\right)^T$ 是 n 维列向量, 矩阵 $A = E - \alpha\alpha^T, B = E + a\alpha\alpha^T$,

若 B 是 A 的逆矩阵, 则 $a =$ _____.

【分析】 $AB = (E - \alpha\alpha^T)(E + a\alpha\alpha^T) = E + a\alpha\alpha^T - \alpha\alpha^T - a\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T$
 $= E + (a - 1 - a\alpha^T\alpha)\alpha\alpha^T$

$$\text{又 } \alpha^T\alpha = \left(\frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}, \text{ 故 } AB = E + (a - 1 - \frac{1}{2}a)\alpha\alpha^T = E.$$

$$\Leftrightarrow (\frac{1}{2}a - 1)\alpha\alpha^T = O, \text{ 所以 } a = 2.$$

【例 7】 A 是 n 阶矩阵满足 $A^2 - 3A - 2E = O$, 则 $(A + E)^{-1} =$ _____.

【分析】 本题矩阵 A 没有具体元素, 应考虑用定义法:

$$\text{由 } (A + E)(A - 4E) + 2E = A^2 - 3A - 2E = O$$

$$\text{即 } (A + E)(A - 4E) = -2E$$

$$\text{即 } (A + E) \cdot \frac{1}{2}(4E - A) = E$$

$$\text{故 } (A + E)^{-1} = \frac{1}{2}(4E - A)$$

【例 8】 设 A, B 都是三阶矩阵, 且 $AB = 2A + B$, 若 $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 则 $(A - E)^{-1} =$ _____.

【分析】 由 $AB = 2A + B$, 有

$$AB - B - 2A + 2E = 2E, \text{ 即 } (A - E)(B - 2E) = 2E$$

$$\text{故 } (A - E)^{-1} = \frac{1}{2}(B - 2E) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

【例 9】 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 矩阵 X 满足

$$AXA + BXB = AXB + BXA + E$$

则 $X =$ _____.

【分析】

$$AXA + BXB - AXB - BXA = E$$

$$(A - B)XA - (A - B)XB = E$$

$$(A - B)X(A - B) = E$$

$$X = [(A - B)^{-1}]^2 = \left[\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \right]^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

【例 10】 设 $f(x) = x^{100} + x^{99} + \cdots + x + 1$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

求 $f(A)$ 和 $f(A)^{-1}$.

【分析】 因 $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 又

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A^2$$

知 $A^m = A^2$ (当 $m \geq 2$ 时), 故

$$\begin{aligned}
 f(A) &= A^{100} + \cdots + A^2 + A + E = 99A^2 + A + E \\
 &= \begin{bmatrix} 99 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 101 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 f(A)^{-1} &= \begin{bmatrix} 101 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{101} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

练习 2.3

(1) A, B, C 均为 n 阶矩阵, 且 $ABC = E$, 则必有

(A) $ACB = E$.

(B) $CBA = E$.

(C) $BAC = E$.

(D) $BCA = E$.

(2) 已知 $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, 则 $X =$ _____.

(3) 已知 $A^{-1}BA = 6A + BA$, 若 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$, 则 $B =$ _____.

(4) 已知 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $A^{-1} =$ _____.

(练习答案在 207 页)

三、初等变换、初等矩阵

1. 初等变换与初等矩阵的概念

定义(初等变换) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵,

(1) 用某个非零常数 $k (k \neq 0)$ 乘 A 的某行(列)的每个元素;

(2) 互换 A 的某两行(列)的位置;

(3) 将 A 的某行(列)元素的 k 倍加到另一行(列),

称为矩阵的三种初等行(列)变换, 且分别称为初等倍乘、互换、倍加行(列)变换, 统称初等变换.

定义(初等矩阵) 由单位矩阵经一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵, 它们分别是(以三阶为例).

(1) 倍乘初等矩阵, 记 $E(i(k))$.

$$E(2(k)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$E(2(k))$ 表示由单位阵 E 的第二行(或第二列)乘 $k(k \neq 0)$ 倍得到的矩阵.

(2) 互换初等矩阵, 记 $E(i, j)$.

$$E(1, 2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$E(1, 2)$ 表示由单位阵 E 的第一, 二行(或一, 二列)互换得到的矩阵.

(3) 倍加初等矩阵, 记 $E(ij(k))$.

$$E(13(k)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$E(13(k))$ 表示由单位阵 E 的第一行的 k 倍加到第三行得到的矩阵. 当看成列变换时, 应是 E 的第三列的 k 倍加到第一列得到的矩阵.

定义(等价矩阵) 矩阵 A 经过有限次初等变换变成矩阵 B , 则称 A 与 B 等价, 记成 $A \cong B$. 若 $A \cong \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$, 则后者称为 A 的等价标准形. (A 的等价标准形是与 A 等价的所有矩阵中的最简矩阵).

2. 初等矩阵与初等变换的性质

(1) 初等矩阵的转置仍是初等矩阵.

(2) 初等矩阵均是可逆阵, 且其逆矩阵仍是初等矩阵.

$$E(i, j)^{-1} = E(i, j); E(i(k))^{-1} = E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right); E(ij(k))^{-1} = E(ij(-k))$$

(3) 用初等矩阵 P 左乘(右乘) A , 其结果 $PA(AP)$, 相当于对 A 作相应的初等行(列)变换.

定理 矩阵 A 可逆的充分必要条件是它能表示成一些初等矩阵的乘积

$$P_N \cdots P_2 P_1 A = E$$

3. 行阶梯矩阵, 行最简矩阵

行阶梯矩阵

(1) 如果矩阵中有零行(即这一行元素全是 0), 则零行在矩阵的底部.

(2) 每个非零行的主元(即该行最左边的第 1 个非零元), 它们的列指标随着行指标的递增而严格增大.

$$\text{例} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ 都不是行阶梯矩阵.}$$

$$\text{例} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 是行阶梯矩阵.}$$

行最简矩阵

一个行阶梯矩阵, 如果还满足:

非零行的主元都是 1, 且主元所在的列的其他元素都是 0, 则称其为行最简矩阵.

$$\text{例} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 都不是行最简矩阵.}$$

$$\text{例} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 是行最简矩阵.}$$

如 $A \xrightarrow{\text{行}} B$, 即 $P_i \cdots P_2 P_1 A = B$. 记 $P = P_i \cdots P_2 P_1$ 有 $PA = B$.

由 $P_i \cdots P_2 P_1 A = B$ 和 $P_i \cdots P_2 P_1 E = P$ 表明当 A 经行变换得到 B 时, E 在同样的行变换下得到 P , 即 $(A | E) \rightarrow (B | P)$.

【例 11】 设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} + a_{11} & a_{32} + a_{12} & a_{33} + a_{13} \end{bmatrix}$,

$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则必有

(A) $AP_1P_2 = B$.

(B) $AP_2P_1 = B$.

(C) $P_1P_2A = B$.

(D) $P_2P_1A = B$.

【分析】 观察到矩阵 A 经过两次初等行变换可得到 B , 按初等矩阵的性质应该是左乘初等矩阵, 排除 (A) (B).

P_1P_2A 表示先把 A 的第一行加至第三行, 然后再一、二两行互换, 这正是矩阵 B , 所以应当选 (C).

而 P_2P_1A 表示先把 A 的一、二两行互换, 然后再把第一行加至第三行, 那么这时的矩阵是

$$\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} + a_{21} & a_{32} + a_{22} & a_{33} + a_{23} \end{bmatrix}$$

【例 12】 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -5 & 2 \end{bmatrix}$, 化其为行最简矩阵 F , 并求可逆矩阵 P 使 $PA = F$.

【解】 对矩阵 A 作初等行变换

$$\begin{aligned} (A, E) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -7 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 18 & 7 & -5 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & \frac{7}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 & \frac{11}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 6 & \frac{7}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

矩阵 A 的行最简矩阵 $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

$$P = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 11 & -7 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \end{bmatrix} \text{ 有 } PA = F.$$

练习 2.4

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(2) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(3) 设 A 是三阶矩阵, 把 A 的二, 三两列互换得到 B , 把 B 的第三行的 -1 倍加到第一行得到 C , 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, 则 $C = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 将 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & -6 \\ -1 & 3 & -4 & 9 \end{bmatrix}$ 化为行最简矩阵.

(练习答案在 207 页)

四、分块矩阵

1. 分块矩阵的概念

将矩阵用若干纵线和横线分成许多小块, 每一小块称为原矩阵的子矩阵(或子块), 把子块看成原矩阵的一个元素, 则原矩阵叫分块矩阵.

由于不同的需要, 同一个矩阵可以用不同的方法分块, 构成不同的分块矩阵.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$$

其中 $\alpha_i = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}]$, $i = 1, 2, \dots, m$, 是 A 的子矩阵, A 是以行分块的分块阵.

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]$$

其中 $\beta_j = [b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{mj}]^T$, $j = 1, 2, \dots, n$, 是 B 的子矩阵, B 是以列分块的分块阵.

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & O \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix}$$

其中 $C_1 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$, $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C_3 = \begin{bmatrix} c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{bmatrix}$, $C_4 = \begin{bmatrix} c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{43} & c_{44} & c_{45} \end{bmatrix}$ 是 C 的子矩阵.

2. 分块矩阵的运算

对矩阵适当地分块处理(要保证相对应子块的运算能够合理进行), 就有如下运算法则:

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 & A_2 + B_2 \\ A_3 + B_3 & A_4 + B_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX + BZ & AY + BW \\ CX + DZ & CY + DW \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix}$$

若 B, C 分别是 m 阶与 s 阶矩阵, 则

$$\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} B^n & O \\ O & C^n \end{bmatrix}$$

若 B, C 分别是 m 阶与 n 阶可逆矩阵, 则

$$\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}$$

【例 13】 已知 B, C 分别是 m 阶与 n 阶可逆矩阵, 证明 $\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}$ 可逆, 且

$$\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & \\ & C^{-1} \end{bmatrix}$$

【证】 由 B, C 均可逆, 有 $\begin{vmatrix} B & O \\ O & C \end{vmatrix} = |B| \cdot |C| \neq 0$, 所以 $\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}$ 可逆.

设 $\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}$, 则

$$\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & O \\ O & E \end{bmatrix}$$

$$\text{即} \begin{cases} BX = E & (1) \\ BY = O & (2) \\ CZ = O & (3) \\ CW = E & (4) \end{cases}$$

由 (1) 有 $X = B^{-1}$.

由 (2), 因 B 可逆, 有 $Y = B^{-1}O = O$.

类似地 $Z = O, W = C^{-1}$.

所以 $\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{bmatrix}$.

【例 14】 已知 $X = ABA$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则 $X =$ _____.

【分析】 把 A, B 各分成四个 2×2 的小矩阵, 即

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & C \\ C & -E \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & C \\ C & O \end{bmatrix}$$

由于 $C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = E$, 就有

$$X = \begin{bmatrix} E & C \\ C & -E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & C \\ C & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & C \\ C & -E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & C \\ -C & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & C \\ C & -E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2E & O \\ O & -2E \end{bmatrix}$$

即 $X = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

【例 15】(1) 若 $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $A^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, 其中 $a_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$, 则 $A^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【分析】(1) 应当对 A 作分块处理, 利用公式

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$$

由 $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

故 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

(2) 把 A 分块如下

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & A_1 \\ A_2 & O \end{bmatrix}$$

由于 $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}$, 且 $\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix},$

立即有

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{bmatrix}$$

五、方阵的行列式

抽象 n 阶方阵行列式公式

1. 若 A 是 n 阶矩阵, A^T 是 A 的转置矩阵, 则 $|A^T| = |A|$;
2. 若 A 是 n 阶矩阵, 则 $|kA| = k^n |A|$;
3. (行列式乘法公式) 若 A, B 都是 n 阶矩阵, 则 $|AB| = |A| |B|$;
特别地 $|A^2| = |A|^2$.
4. 若 A 是 n 阶矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 则 $|A^*| = |A|^{n-1}$;
5. 若 A 是 n 阶可逆矩阵, A^{-1} 是 A 的逆矩阵, 则 $|A^{-1}| = |A|^{-1}$;
6. 设 A 是 m 阶矩阵, B 是 n 阶矩阵

$$\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & D \\ O & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|;$$

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| \cdot |B|.$$

【注】一般情况 $|A+B| \neq |A|+|B|$, $|A-B| \neq |A|-|B|$, $|kA| \neq k|A|$.

【例 16】 设 A, B 均为 n 阶矩阵, $|A| = 2$, $|B| = -3$, 则 $|2A^*B^{-1}| =$ _____.

【分析】 $|2A^*B^{-1}| = 2^n |A^*B^{-1}| = 2^n |A^*| |B^{-1}| = 2^n |A|^{n-1} |B|^{-1} = -\frac{2^{2n-1}}{3}$.

本题用到的公式依次是

$$|kA| = k^n |A|, |AB| = |A| |B|, |A^*| = |A|^{n-1}, |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

【例 17】 设 A 是四阶矩阵, 如果 $|A| = -\frac{2}{3}$, 则 $|3A^* + 4A^{-1}| =$ _____.

【分析】 因 $A^* = |A| A^{-1} = -\frac{2}{3} A^{-1}$, 又 $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = -\frac{3}{2}$, 则有

$$\begin{aligned} |3A^* + 4A^{-1}| &= |-2A^{-1} + 4A^{-1}| = |2A^{-1}| \\ &= 2^4 |A^{-1}| = -3 \cdot 2^3 = -24 \end{aligned}$$

练习 2.5

(1) 设 A, B 均为四阶矩阵, $|A| = 3$, $|B| = 2$, 则 $|-A^T B^*| =$ _____.

(2) 设 A 是三阶矩阵且 $|A| = 5$, 则 $\left|A^* - \left(\frac{1}{2}A\right)^{-1}\right| =$ _____.

(练习答案在 207 页)

第三章 向量

。本章考点。

向量的概念 向量的线性组合与线性表示 向量组的线性相关与线性无关 向量组的极大线性无关组 等价向量组 向量组的秩 向量组的秩与矩阵的秩之间的关系 向量的内积 线性无关向量组的正交规范化方法 施密特(Schmidt)方法

数一还有向量空间,可参看《复习全书》或《线性代数辅导讲义》相关内容.

向量是初学线性代数时的一个难点,主要表现在对定义的理解、语言的表述、逻辑推理的合理性等方面.当然也是考研的重点.

一、向量的概念、向量组的概念

定义 n 个数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 所组成的有序数组

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T \text{ 或 } \alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

叫做 n 维向量,其中 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 叫做向量 α 的分量(或坐标),前一个表示式称为列向量,后者称为行向量.

相等 $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha, \beta$ 同维,且对应分量 $a_i = b_i, i = 1, 2, \dots, n$.

向量的基本运算

加法 $\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$.

数乘 $k\alpha = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n)$.

若干个同维数的行向量(或同维数的列向量)所组成的集合叫做向量组.

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 及 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \dots, \alpha_s$ (其中 $s \geq r$), 称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的部分组, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是整体组.

向量组

$$\alpha_1 = [a_{11}, a_{21}, \dots, a_{r1}]^T, \alpha_2 = [a_{12}, a_{22}, \dots, a_{r2}]^T, \dots, \alpha_m = [a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{rm}]^T$$

及

$$\tilde{\alpha}_1 = [a_{11}, a_{21}, \dots, a_{r1}, \dots, a_{s1}]^T, \tilde{\alpha}_2 = [a_{12}, a_{22}, \dots, a_{r2}, \dots, a_{s2}]^T, \dots, \tilde{\alpha}_m = [a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{rm}, \dots, a_{sm}]^T$$

其中 $s \geq r$, 则称 $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_m$ 为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的延伸组(或称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是 $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_m$ 的缩短组).

二、线性表出、线性相关

定义 m 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 及 m 个数 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 则向量

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m$$

称为向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的一个线性组合, $k_1, k_2, \dots, k_m$ 称为这个线性组合的系数.

若 β 能表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的线性组合, 即

$$\beta = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m$$

则称 β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表出.

定义 对 m 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, 若存在不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = 0$$

成立, 则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 否则称它们线性无关.

显然含有零向量, 相等向量或成比例向量的向量组是线性相关的; 单个向量时, 零向量是线性相关的.

m 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 下面几种表述等价:

对任意不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 均有

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m \neq 0$$

当且仅当 $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$ 时才有

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = 0$$

成立.

不存在不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = 0$$

成立.

向量组 $\varepsilon_1 = (1, 0, \dots, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \varepsilon_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ 是线性无关的, 单个向量是非零向量时, 是线性无关的; 两个向量不成比例时, 是线性无关的.

定理 向量 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表出

$\Leftrightarrow \exists$ 实数 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 使 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_m \alpha_m = \beta$.

$\Leftrightarrow$ 方程组 $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \beta$ 有解.

$\Leftrightarrow$ 秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta)$.

定理 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ($\alpha_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})^T, j = 1, 2, \dots, m$) 线性相关 $\Leftrightarrow$ 以 α_j 为列向量的齐次线性方程组

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_m \alpha_m = 0$$

即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases}$$

有非零解.

推论 1 n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = 0$.

推论 2 任何 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关.

定理 任何部分组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 相关 $\Rightarrow$ 整体组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \dots, \alpha_s$ 相关, 整体组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \dots, \alpha_s$ 无关 $\Rightarrow$ 任何部分组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 无关, 反之都不成立.

$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 及 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \dots, \alpha_s$ (其中 $s > r$), 称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的部分组, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是整体组.]

定理 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关 $\Rightarrow$ 延伸组 $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_m$ 线性无关;

$\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_m$ 线性相关 $\Rightarrow$ 缩短组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 反之均不成立.

向量组 $\alpha_1 = [a_{11}, a_{21}, \dots, a_{r1}]^T, \alpha_2 = [a_{12}, a_{22}, \dots, a_{r2}]^T, \dots, \alpha_m = [a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{rm}]^T$ 及 $\tilde{\alpha}_1 = [a_{11}, a_{21}, \dots, a_{r1}, \dots, a_{s1}]^T, \tilde{\alpha}_2 = [a_{12}, a_{22}, \dots, a_{r2}, \dots, a_{s2}]^T, \dots, \tilde{\alpha}_m = [a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{rm}, \dots, a_{sm}]^T$, 其中 $s \geq r$, 则称 $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_m$ 为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的延伸组 (或称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是 $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_m$ 的缩短组)

定理 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s \geq 2)$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 至少有一个向量 α_i 可以由其余向量线性表出.

定理 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 而向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关, 则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 且表出法唯一.

定理 设有两个向量组 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, (\text{II}) \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$

(1) 若 $\beta_i (i = 1, 2, \dots, t)$ 均可由 (I) 线性表出, 且 $t > s$, 则 (II) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性相关.

(2) 若 $\beta_i (i = 1, 2, \dots, t)$ 均可由 (I) 线性表出, 且 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性无关, 则 $t \leq s$.

【例 1】 设 $\alpha_1 = (1, 2, 3)^T, \alpha_2 = (1, 3, 4)^T, \alpha_3 = (2, -1, 1)^T, \beta = (2, 5, t)^T$, 问 t 取何值时, (1) 向量 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出?

(2) 向量 β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 并写出此表达式.

【解】 设 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$, 按分量写出有

$$x_1(1, 2, 3)^T + x_2(1, 3, 4)^T + x_3(2, -1, 1)^T = (2, 5, t)^T$$

即

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = t \end{cases}$$

作初等行变换得

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & t \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & t-6 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & t-7 \end{array} \right]$$

(1) 当 $t \neq 7$ 时, 方程组无解, 即向量 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

(2) 当 $t = 7$ 时, 方程组有解

$$\bar{A} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

令 $x_3 = t$ 得 $x_2 = 1 + 5t, x_1 = 1 - 7t$, 所以 $\beta = (1 - 7t)\alpha_1 + (1 + 5t)\alpha_2 + t\alpha_3, t$ 为任意常数.

【例 2】 设 $\alpha_1 = (1 + \lambda, 1, 1)^T, \alpha_2 = (1, 1 + \lambda, 1)^T, \alpha_3 = (1, 1, 1 + \lambda)^T, \beta = (0, \lambda, \lambda^2)^T$, 当 λ 取什么值时: (1) β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示?

(2) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 并写出该表示式.

【解】 设 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$, 按分量写出得方程组

$$\begin{cases} (1 + \lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1 + \lambda)x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + (1 + \lambda)x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

$$\text{由 } \bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 + \lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 + \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 1 + \lambda & \lambda^2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 + \lambda & 1 & 1 & 0 \\ -\lambda & \lambda & 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 & \lambda & \lambda^2 \end{array} \right],$$

若 $\lambda = 0$, 同解方程组

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

令 $x_2 = t, x_3 = u$ 得 $x_1 = -t - u$.

故 $\beta = -(t+u)\alpha_1 + t\alpha_2 + u\alpha_3$, t, u 是任意常数.

若 $\lambda \neq 0$,

$$\bar{A} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1+\lambda & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \lambda \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda+3 & 0 & 0 & -\lambda-1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \lambda \end{array} \right]$$

若 $\lambda = -3$, 方程组无解, β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出

若 $\lambda \neq -3$, 解出

$$x_1 = -\frac{\lambda+1}{\lambda+3}, x_2 = \frac{2}{\lambda+3}, x_3 = \frac{\lambda^2+2\lambda-1}{\lambda+3}$$

$$\text{故 } \beta = -\frac{\lambda+1}{\lambda+3}\alpha_1 + \frac{2}{\lambda+3}\alpha_2 + \frac{\lambda^2+2\lambda-1}{\lambda+3}\alpha_3.$$

【例 3】 已知 $\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2$ 都是 n 维向量, 如果 α 可由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可由 γ_1, γ_2 线性表出, 则 α 可由 γ_1, γ_2 线性表出.

【证】 据已知条件, 可设

$$\alpha = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3$$

$$\beta_1 = l_{11}\gamma_1 + l_{12}\gamma_2$$

$$\beta_2 = l_{21}\gamma_1 + l_{22}\gamma_2$$

$$\beta_3 = l_{31}\gamma_1 + l_{32}\gamma_2$$

$$\text{那么 } \alpha = k_1(l_{11}\gamma_1 + l_{12}\gamma_2) + k_2(l_{21}\gamma_1 + l_{22}\gamma_2) + k_3(l_{31}\gamma_1 + l_{32}\gamma_2)$$

$$= (k_1l_{11} + k_2l_{21} + k_3l_{31})\gamma_1 + (k_1l_{12} + k_2l_{22} + k_3l_{32})\gamma_2$$

即 α 可由 γ_1, γ_2 线性表出.

【例 4】 判断向量组

$$\alpha_1 = (1, 2, -1, 4), \alpha_2 = (0, -1, -5, 3), \alpha_3 = (2, 5, 3, 5)$$

的线性相关性.

【分析】 设 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$, 按分量写出

$$x_1(1, 2, -1, 4) + x_2(0, -1, -5, 3) + x_3(2, 5, 3, 5) = (0, 0, 0, 0)$$

即有

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ -x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

加减消元, 有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & -5 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由 $r(A) < n$, 齐次方程组 $Ax = 0$ 必有非 0 解, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

【例 5】 判断向量组的线性相关性

(1) $\alpha_1 = (3, 4, 2)^T, \alpha_2 = (2, 1, -7)^T, \alpha_3 = (1, 2, 4)^T$.

(2) $\alpha_1 = (1, 2)^T, \alpha_2 = (3, 4)^T, \alpha_3 = (5, 6)^T$.

【分析】 已知向量的坐标, 判断向量组的线性相关就是转化为齐次方程组考查有无非零解.

(1) 设 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$, 按分量写出, 即

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

由于系数行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & -7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & -7 & 18 \end{vmatrix} = 0$$

齐次方程组必有非 0 解, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

(2) 设 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$, 按分量写出, 有

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

由 $r(A) < n$ 齐次方程组必有非 0 解, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 必线性相关.

【例 6】 (1) 已知向量组 $\alpha_1 = (1, 3, 2)^T, \alpha_2 = (-1, 1, 2)^T, \alpha_3 = (0, a, 3)^T$ 线性相关, 求 a .

(2) 判断向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 2, 3)^T, \alpha_2 = (1, 1, 3, 5)^T, \alpha_3 = (1, -1, a, 1)^T$ 的线性相关性.

【解】 (1) n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = 0$

$$|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & a \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & a \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 4(3-a)$$

所以 $a = 3$ 时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

(2) 设 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$, 按分量写出, 即

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

对系数矩阵作初等行变换有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a-2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可见 $a = 1$ 时, 秩 $r(A) = 2 < 3$, 齐次方程组 $Ax = 0$ 有非 0 解. 从而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关. 当 $a \neq 1$ 时, 秩 $r(A) = 3$, 齐次方程组 $Ax = 0$ 只有零解, 那么 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

【例 7】 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n), AB = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ 均是 n 阶矩阵, 记向量组

(I): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, (II): $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, (III): $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$,

若(III)线性相关,则

(A)(I)(II)均线性相关.

(B)(I)或(II)至少有一个线性相关.

(C)(I)必线性相关.

(D)(II)必线性相关.

【分析】(III)线性相关 $\Leftrightarrow |AB| = 0$

$$\Leftrightarrow |A| = 0 \text{ 或 } |B| = 0$$

所以应选(B).

【例 8】 证明定理:如果 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关则向量 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出且表示法唯一.

【证】因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关,故存在不全为 0 的 $k_1, k_2, \dots, k_s, k$ 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s + k\beta = 0.$$

如果其中 $k = 0$. 那么必有 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 不全为 0, 而

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

这与已知条件 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关相矛盾. 所以必有 $k \neq 0$, 那么

$$\beta = \left(-\frac{k_1}{k}\right)\alpha_1 + \left(-\frac{k_2}{k}\right)\alpha_2 + \dots + \left(-\frac{k_s}{k}\right)\alpha_s,$$

即向量 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出.

若 β 有两种不同的表示法, 设

$$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_s\alpha_s,$$

$$\beta = y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + \dots + y_s\alpha_s,$$

两式相减, 得

$$(x_1 - y_1)\alpha_1 + (x_2 - y_2)\alpha_2 + \dots + (x_s - y_s)\alpha_s = 0$$

因为是两种不同的表示法, $x_i - y_i$ 不可能全为 0, 于是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 与已知条件矛盾. 故 β 的表示法唯一.

【例 9】 证明定理: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ($s \geq 2$) 线性相关的充分必要条件至少有一个向量 α_i 可由其余的向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_s$ 线性表出.

【证】必要性

若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $\exists$ 不全为 0 的 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

不妨设 $k_1 \neq 0$, 则有

$$k_1\alpha_1 = -k_2\alpha_2 - k_3\alpha_3 - \dots - k_s\alpha_s.$$

那么 $\alpha_1 = \left(-\frac{k_2}{k_1}\right)\alpha_2 + \left(-\frac{k_3}{k_1}\right)\alpha_3 + \dots + \left(-\frac{k_s}{k_1}\right)\alpha_s$, 即 α_1 可由 $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_s$ 线性表出.

充分性

如果 α_i 可由 $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_s$ 线性表出. 设

$$\alpha_i = k_1\alpha_1 + \dots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \dots + k_s\alpha_s,$$

即有

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_{i-1}\alpha_{i-1} - \alpha_i + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

组合系数 $k_1, \dots, k_{i-1}, -1, k_{i+1}, \dots, k_s$ 不全为 0, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关.

【例 10】 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 证明 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 线性无关.

【证明】记 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_1$, 则

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

由于 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ 知矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 可逆.

又因 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 从而 $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$, 所以向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 线性无关.

或者, 设 $k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_2 + \alpha_3) + k_3(\alpha_3 + \alpha_1) = 0$

即 $(k_1 + k_3)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + (k_2 + k_3)\alpha_3 = 0$

因 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 故

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

由 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, 得齐次方程组 (*) 只有零解, 即必有 $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$.

所以向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 必线性无关.

练习 3.1

(1) 已知 $\alpha_1 = (1, 2, 1)^T, \alpha_2 = (2, a, 3)^T, \alpha_3 = (5, 7, 2)^T$ 线性相关, 则 $a =$ _____.

(2) 已知 $\beta = (1, -4, a)^T$ 可由 $\alpha_1 = (1, 2, 3)^T, \alpha_2 = (2, 1, 0)^T, \alpha_3 = (4, -1, -6)^T$ 线性表示, 则 $a =$ _____.

(3) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组中线性无关的是

(A) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$.

(B) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$.

(C) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$.

(D) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$.

(练习答案在 207 页)

三、向量组的秩、矩阵的秩

1. 向量组的秩

定义 向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r} (1 \leq i_r \leq s)$ 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的部分组, 满足条件

(1) $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性无关;

(2) 向量组中任一向量 $\alpha_i (1 \leq i \leq s)$ 均可由 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性表出, 则称向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的极大线性无关组.

条件(2)的等价说法是: $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 中加入任一向量 $\alpha_i (1 \leq i \leq s)$, 则向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}, \alpha_i$ 线性相关.

向量组的极大无关组一般不唯一, 但极大无关组的向量个数是一样的. 只有一个零向量组成的向量组没有极大线性无关组, 一个线性无关向量组的极大线性无关组就是该向量组本身.

向量组的极大线性无关组的向量个数称为向量组的秩, 记为 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$.

定义 设向量组

$$(I) \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s; \quad (II) \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t,$$

若(I)中的每个向量 $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, s$, 均可由(II)线性表出, 则称(I)可由(II)线性表出; 若向量组(I)、(II)可以相互表出, 则称向量组(I)、(II)是等价向量组, 记成 $(I) \cong (II)$.

向量组和它的极大线性无关组是等价向量组.

一个向量组中各极大无关组之间是等价向量组, 且向量个数相同.

定理 如果向量组(I)可由向量组(II)线性表出, 则 $r(I) \leq r(II)$.

推论 如果向量组(I)和(II)等价, 则 $r(I) = r(II)$.

【例 11】 向量组 $\alpha_1 = (1, -1, 2, 4)^T, \alpha_2 = (0, 3, 1, 2)^T, \alpha_3 = (3, 0, 7, 14)^T, \alpha_4 = (1, -2, 2, 0)^T, \alpha_5 = (2, -1, 5, 2)^T$ 的极大线性无关组是_____.

【分析】 列向量作初等行变换化为阶梯形, 有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{记}} (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5)$$

此时每行第1个非0数在第一, 二, 四列, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 是一个极大线性无关组.

【注】 由 $(3, 1, 0, 0)^T = 3(1, 0, 0, 0)^T + (0, 1, 0, 0)^T$

$$(2, 1, 2, 0)^T = (0, 1, 0, 0)^T + 2(1, 0, 1, 0)^T$$

即 $\beta_3 = 3\beta_1 + \beta_2, \beta_5 = \beta_2 + 2\beta_4$, 故知 $\alpha_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_5 = \alpha_2 + 2\alpha_4$.

于是用极大线性无关组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 表示出 α_3 和 α_5 .

【例 12】 向量组(I): $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; (II): $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$; (III): $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$. 若秩 $r(I) = r(II) = 3, r(III) = 4$. 则 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 + \alpha_5) =$ _____.

【分析】 由 $r(I) = 3$ 知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关,

$r(II) = 3$ 知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关,

故 α_4 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 那么向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 + \alpha_5$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ 可以互相线性表示, 即向量组等价.

所以 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 + \alpha_5) = 4$.

或设 $\alpha_4 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$, 则

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 + \alpha_5) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + \alpha_5)$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 1 & 0 & k_2 \\ 0 & 0 & 1 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{由于矩阵} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 1 & 0 & k_2 \\ 0 & 0 & 1 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{可逆, 故 } r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 + \alpha_5) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5) = 4.$$

练习 3.2

(1) 已知向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 3, 4), \alpha_2 = (2, 3, 4, 5), \alpha_3 = (3, 4, 5, 6), \alpha_4 = (4, 5, 6, 7)$, 则该向量组的秩是_____.

(2) 已知向量组 $\alpha_1 = (1, -1, 0, 5)^T, \alpha_2 = (2, 0, 1, 4)^T, \alpha_3 = (3, 1, 2, 3)^T, \alpha_4 = (4, 2, 3, a)^T$, 其中 a 是参数. 求该向量组的秩与一个极大线性无关组, 并将其余向量用该极大线性无关组线性表示.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

(练习答案在 207 页)

2. 矩阵的秩

定义 在 $m \times n$ 矩阵 A 中, 任取 k 行与 k 列 ($k \leq m, k \leq n$), 位于这些行与列的交叉点上的 k^2 个元素按其在原来矩阵 A 中的次序可构成一个 k 阶行列式, 称其为矩阵 A 的一个 k 阶子式.

定义 (矩阵的秩) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 若 A 中存在 r 阶子式不等于零, r 阶以上子式均等于零, 则称矩阵 A 的秩为 r , 记成 $r(A)$, 零矩阵的秩规定为 0.

秩 $r(A) = r \Leftrightarrow$ 矩阵 A 中非零子式的最高阶数是 r .

$r(A) < r \Leftrightarrow A$ 中每一个 r 阶子式全为 0.

$r(A) \geq r \Leftrightarrow A$ 中有 r 阶子式不为 0.

特别地, $r(A) = 0 \Leftrightarrow A = O$,

$$A \neq O \Leftrightarrow r(A) \geq 1.$$

若 A 是 n 阶矩阵, $r(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ 可逆.

$$r(A) < n \Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow A \text{ 不可逆}.$$

若 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则 $r(A) \leq \min(m, n)$.

定理 9 经初等变换矩阵的秩不变.

矩阵秩的公式

$$r(A) = r(A^T); r(A^T A) = r(A).$$

$$\text{当 } k \neq 0 \text{ 时, } r(kA) = r(A); r(A+B) \leq r(A) + r(B),$$

$$r(AB) \leq \min(r(A), r(B)), \max(r(A), r(B)) \leq r(A, B) \leq r(A) + r(B).$$

若 A 可逆, 则 $r(AB) = r(B), r(BA) = r(B)$.

若 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, $AB = O$, 则 $r(A) + r(B) \leq n$.

$$\text{分块矩阵 } r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B).$$

定理(三秩相等) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 将 A 以行及列分块, 得

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]$$

则有 $r(A)$ (矩阵 A 的秩) $= r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ (A 的行秩) $= r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ (A 的列秩).

例如: 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

A 中有二阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, A 中三阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 全

为 0. 故 $r(A) = 2$.

A 的列向量 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$, 极大无关组是 α_1, α_3 ,

故 A 的列秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 2$.

A 的行向量组 $\beta_1 = (1, 2, -1, 3), \beta_2 = (0, 0, 1, 5), \beta_3 = (0, 0, 0, 0)$, 极大无关组是 β_1, β_2 ,

故 A 的行秩 $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 2$.

【例 13】 (1) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & a & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ 的秩 $r(A) = 3$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 设 $A = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{bmatrix}$, 且秩 $r(A) = 3$, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

【分析】 (1) 经初等变换矩阵的秩不变, 对矩阵 A 作初等变换

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & a & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & a & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & a-1 & -2 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

可见 $a = 2$ 时, 秩 $r(A) = 3$.

$$(2) \text{ 由 } |A| = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k+3)(k-1)^3$$

若 $k=1$ 知 $r(A)=1$, 故 $k=-3$.

练习 3.3

(1) 设 A, B 都是 n 阶非零矩阵, 且 $AB=O$, 则 A 和 B 的秩

- (A) 必有一个等于 0. (B) 都小于 n .
(C) 一个小于 n , 一个等于 n . (D) 都等于 n .

(2) 设 A 是秩为 r 的 $m \times n$ 矩阵, C 是 n 阶可逆矩阵, $B=AC$. 若 $r(B)=r_1$, 则

- (A) $r=r_1$. (B) $r < r_1$.
(C) $r > r_1$. (D) r 和 r_1 关系与 C 有关.

(练习答案在 207 页)

微信公众号【顶尖考研】

(ID: djky66)

四、正交规范化、正交矩阵

1. 内积

定义 设有 n 维向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, 令

$$(\alpha, \beta) = \alpha^T \beta = \beta^T \alpha = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

则称 (α, β) 为向量 α, β 的内积.

内积满足下列性质

- (1) $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$ (对称性);
(2) $\lambda(\alpha, \beta) = (\lambda\alpha, \beta) = (\alpha, \lambda\beta)$ (线性性);
(3) $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$ (线性性);
(4) $(\alpha, \alpha) \geq 0$, 等号成立当且仅当 $\alpha = 0$ (正定性).

定义 设 $\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha, \alpha)} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$ 称为向量 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ 的模 (长度), $\|\alpha\| = 1$ 时称 α 为单位向量.

定义 两个向量 α, β 夹角的余弦为

$$\cos(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\| \|\beta\|}$$

当 $(\alpha, \beta) = 0$ 时, 则 $\cos(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = 0$, $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \frac{\pi}{2}$, 此时称向量 α, β 正交.

2. 施密特正交化

施密特(Schmidt) 标准正交化方法

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 其标准正交化的方法如下(又称正交规范化):

先正交化, 取

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2$$

则 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是正交向量组.

再将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 单位化, 取

$$\eta_1 = \frac{\beta_1}{|\beta_1|}, \eta_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|}, \eta_3 = \frac{\beta_3}{|\beta_3|}$$

则 η_1, η_2, η_3 是标准正交向量组, 即有 $(\eta_i, \eta_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$.

3. 正交矩阵

定义 设 A 为 n 阶矩阵, 若 $AA^T = A^T A = E$, 则称 A 为正交矩阵.

定理 如 A 是正交矩阵 $\Leftrightarrow A^T = A^{-1}$
 $\Leftrightarrow A$ 的行(列)向量都是单位向量且两两正交

定理 如 A 是正交矩阵 $\Rightarrow |A| = \pm 1$.

【例 14】 与向量 $\alpha_1 = (1, 3, 2)^T, \alpha_2 = (1, 1, -2)^T$ 都正交的单位向量是_____.

【分析】 设 $\alpha = (x_1, x_2, x_3)^T$ 与 α_1, α_2 都正交, 则

$$\begin{cases} (\alpha, \alpha_1) = x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ (\alpha, \alpha_2) = x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

得 $\alpha = (4, -2, 1)^T$, 再单位化有 $\pm \frac{1}{\sqrt{21}}(4, -2, 1)^T$ 为所求.

【例 15】 已知 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是两两正交的非零向量.

证明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

【证】 设

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_s \alpha_s = 0 \quad (1)$$

由于 α_i, α_j 两两正交, 即 $\alpha_i \alpha_j = 0$, 用 α_i^T 左乘(1)式两端, 得

$$k_1 \alpha_i^T \alpha_1 = 0 \quad (2)$$

因 $\alpha_1 \neq 0$, 故 $\alpha_i^T \alpha_1 = \|\alpha_1\|^2 \neq 0$, 从而必有 $k_1 = 0$.

类似可证 $k_2 = 0, \dots, k_s = 0$. 于是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

第四章 线性方程组

。本章考点。

线性方程组有解和无解的判定 非齐次线性方程组的解与相应的齐次线性方程组(导出组)的解之间的关系 线性方程组解的性质和解的结构 齐次线性方程组的基础解系和通解 非齐次线性方程组的通解

一、基本概念

我们称

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (\text{I})$$

是 n 个未知数 m 个方程的非齐次线性方程组, 其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 代表 n 个未知数, 而 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 是不全为 0 的常数.

利用矩阵乘法, 方程组(I)可表示为:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

于是方程组(I)的矩阵形式:

$$Ax = b$$

称 A 为方程组(I)的系数矩阵.

对矩阵 A 按列分块, 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 则方程组(I)有向量形式

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$$

其中 $\alpha_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})^T, j = 1, 2, \cdots, n, \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$.

如果 $\forall j = 1, 2, \cdots, m$ 恒有 $b_j = 0$, 则称

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (\text{II})$$

为齐次线性方程组(也称(II)是(I)的导出组). 其矩阵形式为:

$$Ax = 0$$

而齐次方程组(II)的向量形式, 则是

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots + x_n \alpha_n = 0$$

若将一组数 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 分别代替方程组 (I) (或 (II)) 中的 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 使 (I) (或 (II)) 中 m 个等式都成立, 则称 $(c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ 是方程组 (I) (或 (II)) 的一个解.

解方程组就是要求出方程组的所有解.

求方程组的解就是要对所给方程组作同解变形, 而同解变形的方法:

- (1) 两个方程互换位置;
- (2) 用非零常数乘方程的两端;
- (3) 把某个方程的 k 倍加到另一个方程上.

同解变形所对应的矩阵语言就是矩阵的初等行变换.

二、齐次线性方程组

对于齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (\text{II})$$

易见 $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ 必满足每一个方程. 故 $(0, 0, \dots, 0)^T$ 一定是齐次线性方程组的一个解, 称其为零解. 除去零解之外, 如果齐次方程组还有其他的解. 那些解就称为非零解.

基础解系 如果 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 是齐次方程组 $Ax = 0$ 的解, 而且满足

- (1) $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 线性无关,
- (2) $Ax = 0$ 的任一个解 η 都可由 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 线性表出,

则称 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 是 $Ax = 0$ 的一个基础解系.

解的性质 如果 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 是齐次方程组 $Ax = 0$ 的解, 则对任意常数 $k_1, k_2, \dots, k_t$, $k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_t\eta_t$

仍是该齐次方程组的解.

定理 齐次方程组 $A_{m \times n}x = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow r(A) < n$.

推论 1. 当 $m < n$ 时, $Ax = 0$ 必有非零解.

2. 当 $m = n$ 时, $Ax = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow |A| = 0$.

定理 如齐次线性方程组 (II) 系数矩阵的秩 $r(A) = r < n$, 则 (II) 有 $n - r$ 个线性无关的解, 且 (II) 的任一个解都可由这 $n - r$ 个线性无关的解线性表出 (即 (II) 的基础解系由 $n - r$ 个解向量构成).

定理 若 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 是齐次方程组 (II) 的基础解系, 则 (II) 的通解是 $k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_t\eta_t$, $k_1, k_2, \dots, k_t$ 是任意常数.

【例 1】 求齐次方程组

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

的基础解系和通解.

【解】 对系数矩阵作初等行变换, 有

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得同解方程组:

$$\begin{cases} x_1 - 8x_3 + 7x_4 = 0 \\ x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = 8x_3 - 7x_4 \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4 \end{cases}$$

令 $x_3 = 1, x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = -6, x_1 = 8$,

$x_3 = 0, x_4 = 1 \Rightarrow x_2 = 5, x_1 = -7$,

故基础解系为 $\eta_1 = (8, -6, 1, 0)^T, \eta_2 = (-7, 5, 0, 1)^T$.

通解是: $k_1\eta_1 + k_2\eta_2, k_1, k_2$ 是任意常数.

或者, 令 $x_3 = t, x_4 = u$, 得通解:

$$\begin{cases} x_1 = 8t - 7u \\ x_2 = -6t + 5u \\ x_3 = t \\ x_4 = u \end{cases}$$

亦即 $x = t \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 基础解系为: $\begin{bmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

【例 2】求齐次方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

通解.

【解】对系数矩阵作初等行变换, 有

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & -5 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -5 & -2 \\ 2 & -1 & -7 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 9 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = 3x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

令 $x_3 = 1 \Rightarrow x_4 = 0, x_2 = -1, x_1 = 3$.

故基础解系为 $\eta = (3, -1, 1, 0)^T$.

通解为: $k\eta, k$ 为任意常数.

或者, 令 $x_3 = t$, 解出

$$\begin{cases} x_1 = 3t \\ x_2 = -t \\ x_3 = t \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

亦即 $x = t(3, -1, 1, 0)^T$.

【注】 如何加减消元?怎样求解?要重视这里的基本计算.

对自由变量既可以用 $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ 来赋值, 也可用 t, u, v .

【例 3】 要使 $\alpha_1 = (1, 0, 2)^T, \alpha_2 = (0, 1, -1)^T$ 都是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解, 则 A 可以为

(A) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

【分析】 因为 α_1, α_2 线性无关, 所以 $Ax = 0$ 有 2 个线性无关的解, 于是 $n - r(A) \geq 2$. 即知 $r(A) \leq 1$, 可排除 (B), (D).

下面应排查 α_1, α_2 是不是 $Ax = 0$ 的解. 由在 (C) 中

$$A\alpha_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \neq 0$$

即 α_2 不是 (C) 的解. 故应选 (A).

【例 4】 求一个齐次线性方程组, 使它的基础解系为

$$\eta_1 = (4, 3, 1, 2)^T, \eta_2 = (0, 1, 3, -2)^T$$

【解】 设所求齐次方程组为 $Ax = 0$.

由 $n - r(A) = 2$, 且 $n = 4$, 知 $r(A) = 2$.

又 $A(\eta_1, \eta_2) = 0$, 转置得

$$\begin{bmatrix} \eta_1^T \\ \eta_2^T \end{bmatrix} A^T = 0$$

考查齐次方程组 $Bx = \begin{bmatrix} \eta_1^T \\ \eta_2^T \end{bmatrix} x = 0$.

由 $n - r(B) = 4 - 2 = 2$, 从而 $Bx = 0$ 基础解系是 A^T 的列向量.

$$B = \begin{bmatrix} \eta_1^T \\ \eta_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

令 $x_3 = 1, x_4 = 0$, 解出 $x_1 = 2, x_2 = -3$,

令 $x_3 = 0, x_4 = 1$, 解出 $x_1 = -2, x_2 = 2$,

于是 $Bx = 0$ 的基础解系为

$$(2, -3, 1, 0)^T, (-2, 2, 0, 1)^T.$$

故 $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

那么所求齐次方程组是

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

【注】 所求方程组是不唯一的.

练习 4.1

(1) 齐次方程组 $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0$ 的基础解系是_____.

(2) 齐次方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

只有零解, 则 λ 应满足条件是_____.

(3) 设 A 是 4×5 矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是齐次方程组 $A^T x = 0$ 的基础解系, 则秩 $r(A) =$
 (A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

(4) 求齐次方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 12x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$ 的通解.

(练习答案在 207 页)

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

三、非齐次线性方程组

解的性质 1. 设 ξ_1, ξ_2 是方程组 $Ax = b$ 的两个解, 则 $\xi_1 - \xi_2$ 是导出组 $Ax = 0$ 的解.

2. 设 ξ 是方程组 $Ax = b$ 的解, η 是导出组 $Ax = 0$ 的解, k 是任意常数, 则 $\xi + k\eta$ 是方程组 $Ax = b$ 的解.

定理 $Ax = b$ 有解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A})$

$\Leftrightarrow b$ 可由 A 的列向量线性表出.

$Ax = b$ 无解 $\Leftrightarrow r(A) + 1 = r(\bar{A})$.

【注】 $\bar{A} = [A, b]$ 称为方程组 $Ax = b$ 的增广矩阵.

定理 (解的结构) 设 α 是 $Ax = b$ 的解, $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 是导出组 $Ax = 0$ 的基础解系, 则方程组 $Ax = b$ 的通解为

$$\alpha + k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2 + \dots + k_t \eta_t$$

其中 $k_1, k_2, \dots, k_t$ 是任意常数.

【例 5】解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 4 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 6 \end{cases}$$

【解】对增广矩阵作初等行变换,有

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 2 & 6 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ & 1 & -1 & -1 & -5 & -4 \\ & & & 1 & -3 & -2 \\ & & & & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ & 1 & -1 & 0 & -8 & -6 \\ & & & 1 & -3 & -2 \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 12 & 10 \\ & 1 & -1 & 0 & -8 & -6 \\ & & & 1 & -3 & -2 \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 12x_5 = 10 \\ x_2 - x_3 - 8x_5 = -6 \\ x_4 - 3x_5 = -2 \end{cases} \quad (*)$$

令 $x_3 = 0, x_5 = 0$ 得方程组 $Ax = b$ 的一个特解

$$\alpha = (10, -6, 0, -2, 0)^T$$

对应的齐次方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 12x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 - 8x_5 = 0 \\ x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

得 $Ax = 0$ 的同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 - 12x_5 \\ x_2 = x_3 + 8x_5 \\ x_4 = 3x_5 \end{cases}$$

分别令 $x_3 = 1, x_5 = 0$ 和 $x_3 = 0, x_5 = 1$ 得 $Ax = 0$ 的基础解系

$$\eta_1 = (-2, 1, 1, 0, 0)^T, \eta_2 = (-12, 8, 0, 3, 1)^T$$

所以方程组通解:

$$(10, -6, 0, -2, 0)^T + k_1(-2, 1, 1, 0, 0)^T + k_2(-12, 8, 0, 3, 1)^T, k_1, k_2 \text{ 任意常数}$$

或对同解方程组 (*)

令 $x_3 = t, x_5 = u$, 解出

$$\begin{cases} x_1 = 10 - 2t - 12u \\ x_2 = -6 + t + 8u \\ x_3 = t \\ x_4 = -2 + 3u \\ x_5 = u \end{cases}$$

亦得通解 $x = (10, -6, 0, -2, 0)^T + t(-2, 1, 1, 0, 0)^T + u(-12, 8, 0, 3, 1)^T$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

【例 6】 解方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

【解】 对增广矩阵作初等行变换,有

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 3 & 7 & 7 \\ 9 & 12 & 1 & 0 & 7 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ & & 1 & 3 & 1 \\ & & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{4}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ & 1 & 3 & 1 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3} \\ x_3 = -3x_4 + 1 \end{cases} \quad (*)$$

令 $x_2 = 0, x_4 = 0$, 则 $x_1 = \frac{2}{3}, x_3 = 1$ 得方程组 $Ax = b$ 的特解 $\alpha = \left(\frac{2}{3}, 0, 1, 0\right)^T$.

此时对应的齐次方程组为

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4 \\ x_3 = -3x_4 \end{cases}$$

令 $x_2 = 1, x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{4}{3}, x_3 = 0$;

$x_2 = 0, x_4 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}, x_3 = -3$.

于是导出组的基础解系是

$$\eta_1 = \left(-\frac{4}{3}, 1, 0, 0\right)^T, \eta_2 = \left(\frac{1}{3}, 0, -3, 1\right)^T$$

从而方程组通解为

$$x = \alpha + k_1\eta_1 + k_2\eta_2, k_1, k_2 \text{ 是任意实数}$$

或对同解方程组(*)

令 $x_2 = t, x_4 = u$, 得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}t + \frac{1}{3}u \\ x_2 = t \\ x_3 = 1 - 3u \\ x_4 = u \end{cases}$$

从而有通解 $x = \left(\frac{2}{3}, 0, 1, 0\right)^T + t\left(-\frac{4}{3}, 1, 0, 0\right)^T + u\left(\frac{1}{3}, 0, -3, 1\right)^T$.

【例 7】 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 = 4 \\ -x_1 + ax_2 + x_3 = a^2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$

有无穷多解,求 a 的值并求这些解.

【解】 对增广矩阵作初等行变换,有

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 4 \\ -1 & a & 1 & a^2 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & a & 4 \\ -1 & a & 1 & a^2 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & a-2 & 8 \\ 0 & a-1 & 3 & a^2-4 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & a-2 & 8 \\ 0 & 0 & \frac{(a+1)(4-a)}{2} & a(a-4) \end{array} \right]\end{aligned}$$

由于方程组有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) \leq 2$.

故 $a = 4$.

$$\bar{A} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

令 $x_3 = 0$, 得方程组的特解 $\alpha = (0, 4, 0)^T$,

令 $x_3 = 1$, 得导出组的基础解系 $\eta = (-3, -1, 1)^T$,

所以方程组通解为 $x = \alpha + k\eta$, k 为任意常数.

【例 8】 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + ax_3 - ax_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + \quad + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

问 a 为何值时方程组有解? 并在有解时求出方程组的通解.

【解】 对增广矩阵作初等行变换, 有

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & -a & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & -a & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 2 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & a-2 & 2-a & 1 \end{array} \right]\end{aligned}$$

当 $a = 2$ 时, $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 3$ 方程组无解.

当 $a \neq 2$ 时, $r(A) = r(\bar{A}) = 3 < n$, 方程组有无穷多解,

$$\begin{aligned}\bar{A} &\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{a-2} \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 3 & \frac{a-4}{a-2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2-2a}{a-2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{a-2} \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & \frac{7a-10}{a-2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2-2a}{a-2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{a-2} \end{array} \right]\end{aligned}$$

所以方程组通解为

$$x = \left(\frac{7a-10}{a-2}, \frac{2-2a}{a-2}, \frac{1}{a-2}, 0 \right)^T + k(-3, 0, 1, 1)^T, k \text{ 为任意常数.}$$

【例 9】 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 4 元非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的三个解向量, 且秩 $r(A) = 3$, $\alpha_1 = (1, 2, 3, 4)^T, \alpha_2 + \alpha_3 = (0, 1, 2, 3)^T$, 则方程组 $Ax = b$ 的通解是_____.

【分析】 由 $n - r(A) = 4 - 3 = 1$, 所以方程组通解形式为 $\alpha + k\eta$, 现在特解已知可取 α_1 , 下面就是应找出导出组 $Ax = 0$ 的一个非零解.

因为 $A\alpha_i = b, (i = 1, 2, 3)$ 有 $A[2\alpha_1 - (\alpha_2 + \alpha_3)] = 0$. 即

$$2\alpha_1 - (\alpha_2 + \alpha_3) = (2, 3, 4, 5)^T$$

是 $Ax = 0$ 的一个非零解. 于是方程组通解为 $(1, 2, 3, 4)^T + k(2, 3, 4, 5)^T, k$ 是任意常数.

练习 4.2

1. 已知方程组 $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ 有无穷多解, 则 $a =$ _____.

2. 解方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 5x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 4 \end{cases}$

3. 已知方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = a \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 = a + 2 \\ x_1 + 4x_2 + 11x_3 = a + 3 \end{cases}$

问 a 为何值时方程组有解? 并在有解时求其通解.

(练习答案在 207 页)

四、公共解、同解

请在复习好方程组求解这些基础知识后, 再参看《复习全书》或《线性代数辅导讲义》的相关内容.

五、方程组的应用

【例 10】 求和矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 可交换的矩阵.

【解】 设 $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ 与矩阵 A 可交换, 即

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

即 $\begin{bmatrix} x_3 & x_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & x_3 \end{bmatrix}$, 得齐次方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

令 $x_2 = 1, x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = 0, x_1 = 0$

$x_2 = 0, x_4 = 1 \Rightarrow x_3 = 0, x_1 = 1$

方程组(*)的通解

$x = k_1(0, 1, 0, 0)^T + k_2(1, 0, 0, 1)^T, k_1, k_2$ 是任意常数

故 $\begin{bmatrix} k_2 & k_1 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$ 与矩阵 A 可交换, k_1, k_2 是任意常数.

【例 11】 若 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, 则 $X = \underline{\hspace{2cm}}$.

【分析】 设 $X = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}$, 则有

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 5 \\ 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 = 6 \end{cases}$$

两个方程组系数矩阵一样, 故可

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right]$$

解出 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

故 $X = \begin{bmatrix} -2+k_1 & -3+k_2 \\ 3-2k_1 & 4-2k_2 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}, k_1, k_2$ 是任意常数

【例 12】 已知向量组 $\alpha_1 = (1, 3, 1, 1)^T, \alpha_2 = (-1, 1, 3, 1)^T, \alpha_3 = (5, 7, a, 1)^T$ 线性相关, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【分析】 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关 $\Leftrightarrow [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$ 有非零解.

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & 4 & a-5 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a+3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得 $a = -3$.

【例 13】 已知 $\alpha_1 = (2, 3, 3)^T$, $\alpha_2 = (1, 0, 3)^T$, $\alpha_3 = (3, 5, a+2)^T$, 若 $\beta_1 = (4, -3, 15)^T$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 但 $\beta_2 = (2, 5, a)^T$ 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 写出 β_1 由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示的表达式.

【解】 β_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 即方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta_1$ 有解, β_2 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 即方程组 $y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + y_3\alpha_3 = \beta_2$ 无解.

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 | \beta_1, \beta_2] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & -3 & 5 \\ 3 & 3 & a+2 & 15 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 7 & -3 \\ 3 & 0 & 5 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & a-3 & 18 & a-5 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 18 & -4 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 & a-1 \end{bmatrix}$$

$$\forall a, \text{方程组} \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -7 \\ 3x_2 - x_3 = 18 \\ (a-2)x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{一定有解, 即 } \beta_1 \text{ 一定能由 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 线性表示.}$$

$$\text{当且仅当 } a = 2 \text{ 时} \begin{cases} y_1 - y_2 + 2y_3 = 3 \\ 3y_2 - y_3 = -4 \\ 0y_3 = 1 \end{cases} \quad \text{无解, 即 } \beta_2 \text{ 不能由 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 线性表示.}$$

当 $a = 2$,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -7 \\ 3 & -1 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 29 \\ -3 & 1 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得方程组通解

$$x = (29, 0, -18)^T + k(-5, 1, 3)^T$$

那么

$$\beta_1 = (29 - 5k)\alpha_1 + k\alpha_2 + (-18 + 3k)\alpha_3, k \text{ 为任意常数}$$

学而不思则罔, 思而不学则殆。

——《论语·为政》



第五章 特征值和特征向量

。本章考点。

矩阵的特征值和特征向量的概念、性质 相似矩阵的概念及性质 矩阵可相似对角化的充分必要条件及相似对角矩阵 实对称矩阵的特征值、特征向量及其相似对角矩阵

一、特征值、特征向量

定义 设 A 是 n 阶矩阵, 如果存在一个数 λ 及非零的 n 维列向量 α , 使得

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

成立, 则称 λ 是矩阵 A 的一个特征值, 称非零向量 α 是矩阵 A 属于特征值 λ 的一个特征向量.

由定义 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$, 即 $(\lambda E - A)\alpha = 0, \alpha \neq 0$ 可见特征向量 α 是齐次方程组 $(\lambda E - A)x = 0$ 的非零解.

定义 设 $A = [a_{ij}]$ 为一个 n 阶矩阵, 则行列式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为矩阵 A 的特征多项式, $|\lambda E - A| = 0$ 称为 A 的特征方程.

求特征值, 特征向量的方法:

(1) 先由 $|\lambda E - A| = 0$ 求矩阵 A 的特征值 λ_i (共 n 个). 再由 $(\lambda_i E - A)x = 0$ 求基础解系, 即矩阵 A 属于特征值 λ_i 的线性无关的特征向量.

(2) 用定义 $A\alpha = \lambda\alpha$ 推理分析.

定理 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 都是矩阵 A 的属于特征值 λ 的特征向量, 那么当 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r$ 非零时, $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r$ 仍是矩阵 A 属于特征值 λ 的特征向量.

定理 如果 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 是矩阵 A 的互不相同的特征值, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 分别是与之对应的特征向量, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关.

定理 设 A 是 n 阶矩阵, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是矩阵 A 的特征值, 则

$$(1) \sum \lambda_i = \sum a_{ii},$$

$$(2) |A| = \prod \lambda_i.$$

【注】 如 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0, \forall k \neq 0$, 有 $k\alpha \neq 0$, 则

$$A(k\alpha) = kA\alpha = k(\lambda\alpha) = \lambda(k\alpha)$$

即若 α 是矩阵 A 对应于特征值 λ 的特征向量, 那么 $k\alpha$ ($k \neq 0$ 时) 仍是 A 关于 λ 的特征向量.

类似地, 如 $A\alpha_1 = \lambda\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda\alpha_2$ 且 $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0$, 那么 $\forall k_1, k_2$, 若 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \neq 0$ 有

$$\begin{aligned} A(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2) &= A(k_1\alpha_1) + A(k_2\alpha_2) \\ &= k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 \end{aligned}$$

$$= k_1(\lambda \alpha_1) + k_2(\lambda \alpha_2) \\ = \lambda(k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2)$$

即 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2$ 仍是 A 关于 λ 的特征向量.

【例 1】 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{bmatrix}$ 的特征值与特征向量.

【解】 由矩阵 A 的特征多项式

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 17 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda - 14 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda - 14 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - 17 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda - 14 & 4 \\ 0 & 18 - \lambda & \lambda - 18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 17 & 4 & 2 \\ 2 & \lambda - 10 & 4 \\ 0 & 0 & \lambda - 18 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 18)(\lambda^2 - 27\lambda + 162) = (\lambda - 18)^2(\lambda - 9) \end{aligned}$$

得到矩阵 A 的特征值是 $\lambda_1 = \lambda_2 = 18, \lambda_3 = 9$.

当 $\lambda = 18$ 时, 由 $(18E - A)x = 0$, 即

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_1 = [-2, 1, 0]^T, \alpha_2 = [-2, 0, 1]^T$.

因此属于特征值 $\lambda = 18$ 的特征向量是 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2$ (k_1, k_2 不全为 0).

当 $\lambda = 9$ 时, 由 $(9E - A)x = 0$, 即

$$\begin{bmatrix} -8 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 4 \\ 2 & 4 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_3 = [1, 2, 2]^T$.

因此属于特征值 $\lambda = 9$ 的特征向量是 $k_3 \alpha_3$ ($k_3 \neq 0$).

【例 2】 求 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量.

【解】 由特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda - 3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ 4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 1)$$

得到矩阵 A 的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时, 解方程 $(E - A)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_1 = (-1, -2, 1)^T$.

所以特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征向量为 $k_1 \alpha_1$ ($k_1 \neq 0$).

当 $\lambda_3 = 2$ 时, 解方程 $(2E - A)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_2 = (0, 0, 1)^T$. 所以特征值 $\lambda_3 = 2$ 的特征向量为 $k_2 \alpha_2 (k_2 \neq 0)$.

【注】 通过例1和例2大家应当注意到当特征值是二重根时, 有可能只有一个线性无关的特征向量, 也可能有两个线性无关的特征向量, 这一点在后面相似对角化问题上是很重要的.

【例3】 求 $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的特征值, 特征向量.

【解】 由特征多项式

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda+2 & 1 & -2 \\ 0 & \lambda+1 & -4 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 2\lambda-2 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda+2 & 1 & 0 \\ 2 & \lambda+1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda^2+3\lambda) \end{aligned}$$

矩阵 A 的特征值: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -3$.

对 $\lambda = 1$, 由 $(E - A)x = 0$,

$$E - A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

基础解系 $\alpha_1 = (0, 2, 1)^T$.

$\lambda = 1$ 的所有特征向量: $k_1 \alpha_1 = k_1 (0, 2, 1)^T, k_1 \neq 0$.

对 $\lambda = 0$, 由 $(0E - A)x = 0$,

$$0E - A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

基础解系 $\alpha_2 = (-1, 4, 1)^T$.

$\lambda = 0$ 的所有特征向量: $k_2 \alpha_2 = k_2 (-1, 4, 1)^T, k_2 \neq 0$.

对 $\lambda = -3$, 由 $(-3E - A)x = 0$,

$$-3E - A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

基础解系 $\alpha_3 = (-4, -2, 1)^T$.

$\lambda = -3$ 的所有特征向量 $k_3 \alpha_3 = k_3 (-4, -2, 1)^T, k_3 \neq 0$.

【例4】 证明 A 和 A^T 有相同的特征值, 举二阶矩阵说明 A 和 A^T 的特征向量可以不同.

【证】 因 $|\lambda E - A| = |(\lambda E - A)^T| = |(\lambda E)^T - A^T| = |\lambda E - A^T|$, 故 A 和 A^T 有相同的特征值.

例如 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 A 和 A^T 的特征值都是 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

但矩阵 A 关于 $\lambda = 0$ 的特征向量是 $k(1, 0)^T$, 而 A^T 的特征向量是 $k(0, 1)^T$.

【例 5】 已知 A 是三阶矩阵, 特征值是 $-1, 0, 4$, 又知 $A + B = 2E$, 则矩阵 B 的特征值是_____.

【分析】 设矩阵 A 属于特征值 -1 的特征向量是 α_1 , 即 $A\alpha_1 = -\alpha_1$.

由 $A + B = 2E$ 有 $B = 2E - A$, 那么

$$B\alpha_1 = (2E - A)\alpha_1 = 2\alpha_1 - A\alpha_1 = 3\alpha_1$$

所以, 3 是矩阵 B 的一个特征值, α_1 是矩阵 B 关于特征值 $\lambda = -1$ 的特征向量.

类似地, 由 $A\alpha_2 = 0\alpha_2, A\alpha_3 = 4\alpha_3$

知 $B\alpha_2 = (2E - A)\alpha_2 = 2\alpha_2, B\alpha_3 = (2E - A)\alpha_3 = -2\alpha_3$.

可知矩阵 B 的特征值 3, 2, -2 .

【例 6】 已知 $\alpha = (1, 1, -1)^T$ 是矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{bmatrix}$ 的一个特征向量,

则 $a =$ _____, $b =$ _____.

【分析】 设 α 是对应于特征值 λ 的特征向量, 即 $A\alpha = \lambda\alpha$,

那么
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

即
$$\begin{cases} 2 - 1 - 2 = \lambda \\ 5 + a - 3 = \lambda \\ -1 + b + 2 = -\lambda \end{cases} \quad \text{得 } a = -3, b = 0.$$

【例 7】 已知 A 是三阶矩阵, 且 $A^2 + 2A - 3E = O$.

证明矩阵 A 的特征值只能是 1 或 -3 .

【证】 设 λ 是 A 的特征值, α 是其特征向量, 则 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$,

那么 $A^2\alpha = A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha = \lambda^2\alpha$

由 $A^2 + 2A - 3E = O$ 得 $(A^2 + 2A - 3E)\alpha = O$.

即 $(\lambda^2 + 2\lambda - 3)\alpha = O, \alpha \neq 0$

故 $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = (\lambda - 1)(\lambda + 3) = 0$

所以矩阵 A 的特征值只能是 1 或 -3 .

练习 5.1

(1) 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, 则 A 有一个特征向量

(A) $(1, 0, -1)^T$. (B) $(3, 3, -6)^T$. (C) $(1, 1, -2)^T$. (D) $(4, -1, 2)^T$.

(2) 已知三阶矩阵 A 的特征值是 1, $-1, -2$, 则下列矩阵中可逆矩阵是

(A) $A + E$. (B) $A - E$. (C) $A + 2E$. (D) $A - 2E$.

(3) 设 A 是三阶可逆矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 如果 A 的特征值是 1, 2, 3, 那么 $(A^*)^2 +$

E 的最大特征值是_____.

(4) 求矩阵 A 的特征值, 特征向量. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

(5) 求矩阵 A 的特征值, 特征向量. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

(练习答案在 207 页)

二、相似矩阵

定义 设 A, B 都是 n 阶矩阵, 若存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$, 则称 B 是 A 的相似矩阵, 或 A 相似于 B , 记成 $A \sim B$.

若 $A \sim \Lambda$, 其中 Λ 是对角阵, 则称 A 可相似对角化. Λ 是 A 的相似标准形.

根据相似的定义, 可知

性质 (1) $A \sim A$, 反身性.

(2) 若 $A \sim B \Rightarrow B \sim A$, 对称性.

(3) 若 $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$, 传递性.

两个矩阵相似的必要条件

$$A \sim B \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow (1) \text{ 特征多项式相同, 即 } |\lambda E - A| = |\lambda E - B|; \\ \Rightarrow (2) r(A) = r(B); \\ \Rightarrow (3) A, B \text{ 有相同的特征值}; \\ \Rightarrow (4) |A| = |B| = \prod_{i=1}^n \lambda_i; \\ \Rightarrow (5) \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n b_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i. \end{array} \right.$$

由 $A \sim B$, 注意联想:

(1) 如 $A \sim B$, 则 $A^2 \sim B^2$, 进而 $A^n \sim B^n$.

因 $A \sim B$ 有 $P^{-1}AP = B$. 于是

$$B^2 = (P^{-1}AP)^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^2P$$

所以 $A^2 \sim B^2$.

(2) 如 $A \sim B$, 则 $A + kE \sim B + kE$.

因 $A \sim B$, 有 $P^{-1}AP = B$. 那么

$$P^{-1}(A + kE)P = P^{-1}AP + P^{-1}(kE)P = B + kE$$

所以 $A + kE \sim B + kE$.

(3) 如 $A \sim B$ 且 A 可逆, 则 $A^{-1} \sim B^{-1}$.

因 $A \sim B$ 有 $|A| = |B|$. 由 A 可逆知 $|B| \neq 0$, 即 B 必可逆.

$$B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$$

所以 $A^{-1} \sim B^{-1}$.

定理 n 阶方阵 A 可对角化的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量.

推论 若 n 阶矩阵 A 有 n 个不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则 A 可相似对角化, 且

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

定理 n 阶矩阵 A 可相似对角化的充分必要条件是 A 的每个特征值中, 线性无关的特征向量的个数恰好等于该特征值的重数. 即

$A \sim \Lambda \Leftrightarrow \lambda_i$ 是 A 的 n_i 重特征值, 则 λ_i 有 n_i 个线性无关的特征向量

$\Leftrightarrow \text{秩 } r(\lambda_i E - A) = n - n_i, \lambda_i$ 为 n_i 重特征值.

“求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP = \Lambda$ ” 解题步骤:

1. 求出矩阵 A (设为三阶) 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (可以有重根)
2. 求出线性无关的特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

3. 构造可逆矩阵 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 则有 $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix}$.

注意: 由 $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2, A\alpha_3 = \lambda_3\alpha_3$

$$\Rightarrow A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \lambda_3\alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

即 $AP = P\Lambda$, 即 $P^{-1}AP = \Lambda$.

【例 8】 已知 $A \sim B$, 若 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, 则 $|B + E| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【分析】 由 $A \sim B$ 知 $A + E \sim B + E$, 那么

$$|B + E| = |A + E| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 16$$

【例 9】 已知矩阵 A 和 B 相似, 若 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, 则秩 $r(A - E) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【分析】 由 $A \sim B$ 知 $A - E \sim B - E$, 故 $r(A - E) = r(B - E) = 2$.

【例 10】* 已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP = \Lambda$.

【解】 由特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)$$

得矩阵 A 的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 时, 由 $(E - A)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得 $\lambda = 1$ 的特征向量 $\alpha_1 = (0, 1, 0)^T, \alpha_2 = (1, 0, 1)^T$.

当 $\lambda_3 = -1$ 时, 由 $(-E - A)x = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得 $\lambda = -1$ 时特征向量 $\alpha_3 = (-1, 0, 1)^T$.

$$\text{令 } P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 有 } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}.$$

【注】 * 这是一重要的基础题型要复习好!

【例 11】 证明矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 不能相似对角化.

【证】 由特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda - 3 & 0 \\ -1 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^3$$

得到矩阵 A 的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

于是 $n - r(2E - A) = 3 - 2 = 1$, 说明齐次方程组 $(2E - A)x = 0$ 只有一个线性无关的解, 亦即 $\lambda = 2$ 只有 1 个线性无关的特征向量.

3 重特征值只有 1 个线性无关的特征向量, 故 A 不能相似对角化.

练习 5.2

(1) 已知 $A \sim B$, 若 $A^2 = E$, 则 $B^2 =$ _____.

(2) 已知三阶矩阵 A 的特征值为 1, 2, 3. 对应的特征向量依次为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. 若 $P = (\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2)$, 则 $P^{-1}AP =$ _____.

(3) 下列矩阵中不能相似对角化的矩阵一共有

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(A) 1 个. (B) 2 个. (C) 3 个. (D) 0 个.

(4) 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ a & -6 & 2 \end{bmatrix}$ 可以相似对角化, 求 a 并求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP = \Lambda$.

(练习答案在 208 页)

三、实对称矩阵

定理 实对称矩阵必可相似对角化.

定理 实对称矩阵的属于不同特征值对应的特征向量相互正交.

定理 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 则必存在正交阵 Q , 使得 $Q^{-1}AQ = Q^T A Q = \Lambda$.

“实对称矩阵用正交矩阵相似对角化”解题步骤

1. 求出矩阵 A (设为三阶) 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

2. 求出相应的特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

3. 改造特征向量

1° 如果特征值不同, 特征向量已正交, 只需单位化, 记为 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

2° 如果特征值有重根, 要先判断特征向量是否已正交?

若已正交则只需单位化; 若不正交则要正交化处理, 记为 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

4. 把上述特征向量 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 构成正交矩阵 $Q = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$.

即有 $Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix}$.

【注】 在例 10 中, A 是实对称矩阵, 此时 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征向量 α_1, α_2 已正交, 因此, 若用正交矩阵得其相似对角化, 只需单位化处理:

$$\gamma_1 = (0, 1, 0)^T, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)^T, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)^T$$

$$\text{令 } Q = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \text{ 即有 } Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}.$$

【例 12】 已知 A 是三阶实对称矩阵, 满足 $A^2 = A$, 若 $r(A - E) = 2$, 则 A 的特征值

【分析】 设 $A\alpha = \lambda\alpha$, 则 $A^2\alpha = \lambda^2\alpha$, 于是由 $A^2 = A, A^2\alpha = A\alpha$ 即 $(\lambda^2 - \lambda)\alpha = 0$. 知矩阵 A 的特征值为 1 或 0.

因 A 是实对称矩阵, 知 $A \sim \Lambda$ 那么 $A - E \sim \Lambda - E$.

故 $r(A - E) = r(\Lambda - E) = 2$, 所以 $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$, 即矩阵 A 的特征值为: 1, 0, 0.

【注】 注意和例 7 的区别. 在那里不能求出 A 的具体特征值!

【例 13】 已知 A 是三阶实对称矩阵, 特征值是 $3, 0, 0$, 对应于 $\lambda = 3$ 的特征向量 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T$.

(1) 求矩阵 A 关于 $\lambda = 0$ 的特征向量;

(2) 求矩阵 A ;

(3) 求正交矩阵 Q 使 $Q^{-1}AQ = \Lambda$.

【解】 (1) 实对称矩阵特征值不同特征向量相互正交, 设 $\lambda = 0$ 的特征向量 $\alpha = (x_1, x_2, x_3)^T$ 则 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

解出 $\alpha_2 = (-1, 1, 0)^T, \alpha_3 = (-1, 0, 1)^T$.

所以矩阵 A 关于 $\lambda = 0$ 的特征向量为: $k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3, k_2, k_3$ 不全为 0.

(2) 由 $A\alpha_1 = 3\alpha_1, A\alpha_2 = 0, A\alpha_3 = 0$ 有

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (3\alpha_1, 0, 0)$$

故 $A = (3\alpha_1, 0, 0)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1}$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(3) 对 $\lambda = 0$, 因为 α_2, α_3 不正交, 故需正交化:

令 $\beta_2 = \alpha_2 = (-1, 1, 0)^T$,

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

再单位化

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{令 } Q = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \text{ 有 } Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}.$$

【注】 重要题型!

练习 5.3

(1) 已知 A 是三阶实对称矩阵, 秩为 2, $\lambda = 6$ 是 A 的二重特征值, 对应的特征向量是 $\alpha_1 = (1, 1, 0)^T$ 和 $\alpha_2 = (2, 1, 1)^T$, 求 A 的另一特征值和对应的特征向量.

(2) 已知 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, 求正交矩阵 Q 使 $Q^{-1}AQ = \Lambda$.

(练习答案在 208 页)

第六章 二次型

。本章考点。

二次型及其矩阵表示 合同变换与合同矩阵 二次型的秩 惯性定理 二次型的标准形和规范形 用正交变换和配方法化二次型为标准形 二次型及其矩阵的正定性

一、二次型及其标准形

定义 n 个变量的一个二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n \\ + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n \\ + \dots + a_{nn}x_n^2 \quad (1)$$

称为 n 个变量的二次型, 系数均为实数时, 称为 n 元实二次型.

若令 $a_{ij} = a_{ji}, i < j$, 则 $2a_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i$, 那么二次型 (1) 可以写成矩阵形式:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j \\ = [x_1, x_2, \dots, x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

其中 $\mathbf{A}$ 是对称矩阵, 称为二次型 f 的对应矩阵.

例如: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$

$$= [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^T = \mathbf{A}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

注意: 当 $\mathbf{A}$ 是对称阵时, 二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 和 $\mathbf{A}$ 一一对应.

定义 若二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 只有平方项, 没有混合项 (即混合项的系数全为零), 即

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_n^2$$

则称二次型为标准形 (又称平方和).

在二次型的标准形中, 若平方项的系数 a_i 只是 1, -1, 0, 即

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2$$

则称为二次型的规范形 (系数中 1 的个数是 p 个, -1 的个数是 q 个, 0 的个数是 $n - (p + q)$ 个).

定义 在二次型 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 的标准形中, 正平方项的个数 p 称为二次型的正惯性指数, 负平

方项的个数 q 称为二次型的负惯性指数.

定义 二次型 $x^T A x$ 矩阵 A 的秩称为二次型的秩.

定义(合同) 设 A, B 是两个 n 阶方阵, 若存在可逆阵 C , 使得 $C^T A C = B$, 则称 A 合同于 B , 记成 $A \simeq B$.

合同矩阵有如下性质

反身性: $A \simeq A$.

对称性: 若 $A \simeq B$, 则 $B \simeq A$.

传递性: 若 $A \simeq B, B \simeq C$, 则 $A \simeq C$.

对于三元二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x$

$$\text{如果} \begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + c_{13}y_3 \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + c_{23}y_3 \\ x_3 = c_{31}y_1 + c_{32}y_2 + c_{33}y_3 \end{cases} \quad (*)$$

满足

$$|C| = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

则称 $(*)$ 是由 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ 到 $y = (y_1, y_2, y_3)^T$ 的坐标变换.

用矩阵描述即: $x = Cy$.

注意 以 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ 为自变量的二次型 $x^T A x$ 经坐标变换 $x = Cy$ 后将成为以 $y = (y_1, y_2, y_3)^T$ 为自变量的二次型 $y^T B y$, 其中 $B = C^T A C$. 可见经坐标变换二次型矩阵 A 和 B 是合同的.

定理 对任意一个 n 元二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T A x$, 必存在正交变换 $x = Qy$, 其中 Q 是正交阵, 化二次型为标准形. 即

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T A x \xrightarrow{x=Qy} y^T Q^T A Q y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值.

用矩阵的语言表达, 即对任意一个 n 阶实对称阵 A , 必存在正交阵 Q , 使得

$$Q^{-1} A Q = Q^T A Q = \Lambda$$

$$\text{其中 } \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \lambda_i (i=1, 2, \dots, n) \text{ 是 } A \text{ 的特征值, 即 } A \text{ 必既相似又合同于对角阵.}$$

【注】 正交变换法只能化二次型为标准形, 平方项的系数即是特征值.

定理 任一个 n 元二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T A x$, 都可以通过(配方法)可逆线性变换 $x = Cy$, 其中 C 是可逆阵, 化成标准形. 即

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T A x \xrightarrow{x=Cy} y^T C^T A C y = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \dots + d_n y_n^2$$

用矩阵的语言表达, 即对任意一个 n 阶实对称阵 A , 一定存在可逆阵 C , 使得 $C^T A C = \Lambda$. 其中

$$\Lambda = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

定理 (惯性定理) 对一个二次型 $x^T A x$ 经坐标变换化为标准形, 其正惯性指数和负惯性指数都是唯一确定的.

【例 1】 用配方法化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_2x_3 - 4x_3x_1$$

为标准形, 写出所用坐标变换, 并验证 $C^TAC = \Lambda$.

【解】 先把所有含 x_1 的项配成一个完全平方, 即有

$$\begin{aligned} f &= 2[x_1^2 + 2x_1(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2] + 3x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3 - 2(x_2 - x_3)^2 \\ &= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3 \end{aligned}$$

再把所有含 x_2 的项配成一个完全平方, 即

$$\begin{aligned} f &= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + (x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2) + 3x_3^2 - 4x_3^2 \\ &= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 - x_3^2 \end{aligned}$$

引入新变量, 令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = x_2 - 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - y_3 \\ x_2 = y_2 + 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

则有 f 的标准形 $f = 2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

用矩阵描述即: 二次型矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$, 经坐标变换 $x = Cy$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

有 $x^T Ax = (Cy)^T A(Cy) = y^T \Lambda y = 2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$,

$$\begin{aligned} C^TAC &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

【例 2】 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$, 经正交变换 $x = Py$ 化为标准形 $y_1^2 + 4y_2^2$, 则 $a =$ _____.

【分析】 二次型 $x^T Ax$ 经正交变换化为标准形 $y_1^2 + 4y_2^2$, 那么标准形中的平方项系数 1, 4, 0 就是 A 的特征值.

现 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 由

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a-1 & 0 \\ a & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(a-1)^2 = 0$$

得 $a = 1$.

【例 3】 二次型 $f(x_1, x_2) = x^T Ax$ 经正交变换 $x = Qy$ 化为标准形 $y_1^2 + 3y_2^2$, 若 Q 的第

一列是 $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T$, 则 $Q =$ _____.

【分析】二次型 $x^T A x$ 经正交变换 $x = Qy$ 化为标准形 $y_1^2 + 3y_2^2$, 那么标准形中平方项系数 1, 3 就是矩阵 A 的特征值, 而正交矩阵 Q 就是 A 的特征向量.

已知 Q 的第一列是 $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T$, 即矩阵 A 关于 $\lambda = 1$ 的特征向量是 $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T$. 设 $\lambda = 3$ 的特征向量是 $\alpha = [x_1, x_2]^T$.

于是 $\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 = 0$, 解出基础解系 $[1, -1]^T$, 单位化为 $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T$.

$$\text{所以 } Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

【例 4】用正交变换化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_2x_3$ 为标准形, 写出所用坐标变换, 并用 $Q^T A Q = \Lambda$ 验证.

【解】二次型矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & -2 \\ 0 & -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 2)$$

得矩阵 A 的特征值: 1, 3, -2.

当 $\lambda = 1$ 时, 由 $(E - A)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得特征向量 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T$.

当 $\lambda = 3$ 时, 由 $(3E - A)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得特征向量 $\alpha_2 = (0, 1, 2)^T$.

当 $\lambda = -2$ 时, 由 $(-2E - A)x = 0$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得特征向量 $\alpha_3 = (0, -2, 1)^T$.

实对称矩阵特征值不同特征向量相互正交, 故只需单位化

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$\gamma_1 = (1, 0, 0)^T, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, 2)^T, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, -2, 1)^T$$

那么令 $x = Qy$, 其中 $Q = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$

即

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{有 } x^T A x = y^T (Q^T A Q) y = y^T (Q^{-1} A Q) y = y_1^2 + 3y_2^2 - 2y_3^2.$$

$$\begin{aligned} Q^T A Q &= Q^{-1} A Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{6}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

【例 5】用正交变换化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$$

为标准形, 并写出所用坐标变换.

【解】二次型矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵 A 的特征多项式

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 4 & 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 0 & 5 - \lambda \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 4 & 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda - 4 & 4 \\ 4 & 2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 5) \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 4 \\ 2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)^2 (\lambda + 4) \end{aligned}$$

得矩阵 A 的特征值: 5, 5, -4.

当 $\lambda = 5$ 时, 由 $(5E - A)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得特征向量 $\alpha_1 = (1, -2, 0)^T, \alpha_2 = (0, -2, 1)^T$.

当 $\lambda = -4$ 时, 由 $(-4E - A)x = 0$

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得特征向量 $\alpha_3 = (2, 1, 2)^T$.

$\lambda = 5$ 的特征向量 α_1, α_2 不正交, 用施密特正交化有:

$$\beta_1 = \alpha_1 = (1, -2, 0)^T$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

单位化得

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \gamma_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

那么令 $Q = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$, 经 $x = Qy$ 有

$$x^T A x = y^T (Q^T A Q) y = y^T (Q^{-1} A Q) y = 5y_1^2 + 5y_2^2 - 4y_3^2$$

【例 6】 已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + cx_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$$

的秩为 2.

(1) 求 c 的值;

(2) 求二次型的正惯性指数、负惯性指数.

【解】 (1) 二次型矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & c \end{bmatrix}$$

二次型的秩 $r(f) = r(A) = 2$,

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & c \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & c \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & -6 & c \end{bmatrix}$$

解出 $c = 3$.

$$(2) \text{ 由 } |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 1 & -3 \\ 1 & \lambda - 5 & 3 \\ -3 & 3 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 4)(\lambda - 9)$$

得特征值为: 4, 9, 0.

所以正惯性指数 $p = 2$, 负惯性指数 $q = 0$.

【注】 也可用配方法, 有:

$$f = 5\left(x_1 - \frac{1}{5}x_2 + \frac{3}{5}x_3\right)^2 + \frac{6}{5}(2x_2 - x_3)^2$$

而得 $p = 2, q = 0$.

【例 7】与矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 合同的矩阵是

(A) $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$.

【分析】 $A \simeq B \Leftrightarrow p_A = p_B, q_A = q_B$.

(1) 由特征值

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda + 1)$$

知二次型标准形为 $2y_1^2 + 3y_2^2 - y_3^2$, 即 $p = 2, q = 1$. 所以选(B).

(2) 用配方法

$$\begin{aligned} x^T A x &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1 x_2 \\ &= (x_1^2 + 4x_1 x_2 + 4x_2^2) - 4x_2^2 + x_2^2 + 2x_3^2 \\ &= (x_1 + 2x_2)^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 \\ &= y_1^2 - 3y_2^2 + 2y_3^2 \end{aligned}$$

亦知 $p = 2, q = 1$. 选(B).

二、正定二次型

定义(正定) 若对于任意的非零向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 恒有

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = x^T A x > 0$$

则称二次型 f 为正定二次型, 对应矩阵为正定矩阵.

例如: 三元二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2$,

$$\forall x = \begin{bmatrix} t \\ u \\ v \end{bmatrix} \neq 0, \text{ 恒有 } f(t, u, v) = t^2 + 3u^2 + 5v^2 > 0$$

所以二次型 f 正定, 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & 5 \end{bmatrix}$ 是正定矩阵.

又如三元二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_3^2 + 5x_1 x_2$ 不是正定二次型, 因为当 $x = (0, 1, 0)^T$ 时, $f(0, 1, 0) = 0$ 不满足 $\forall x \neq 0, f > 0$ 的要求.

定理 可逆线性变换不改变二次型的正定性.

由定理可知, 对一般的二次型(或对称阵)应设法作可逆线性变换化成标准形(或规范形), 看 d_i 是否均大于零来判别其正定性.

定理 f 正定的充要条件

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T A x \text{ 正定}$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 的正惯性指数 } p = n$$

$$\Leftrightarrow A \simeq E, \text{ 即存在可逆阵 } C, \text{ 使得 } C^T A C = E$$

$$\Leftrightarrow A = D^T D, \text{ 其中 } D \text{ 是可逆阵}$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 的全部特征值 } \lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 的全部顺序主子式大于零, 即}$$

$$\text{若 } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ 正定} \Leftrightarrow a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \cdots, |A| > 0.$$

定理 $f = x^T A x$ 正定的必要条件

若二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^T A x$ 正定, 则

(1) A 的主对角元素 $a_{ii} > 0$.

(2) A 的行列式 $|A| > 0$.

【例 8】 判别二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

的正定性.

【解法一】 (用顺序主子式) 二次型矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$.

$$\Delta_1 = 2 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6 > 0, \Delta_3 = |A| = 10 > 0$$

所以 f 是正定二次型.

【解法二】 (用特征值) 由 A 的特征多项式

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -4 & 2 \\ -2 & \lambda-9 & 4 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda-2 & -4 \\ -2 & \lambda-9 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-10) \end{aligned}$$

A 的特征值 1, 1, 10 全大于 0, 所以二次型 f 正定.

【解法三】 (用配方法)

$$\begin{aligned} f &= 2[x_1^2 + 2x_1(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2] + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_2x_3 - 2(x_2 - x_3)^2 \\ &= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2 - 4x_2x_3 + 3x_3^2 \\ &= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3(x_2^2 - \frac{4}{3}x_2x_3 + (\frac{2}{3}x_3)^2) + 3x_3^2 - \frac{4}{3}x_3^2 \\ &= 2(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3(x_2 - \frac{2}{3}x_3)^2 + \frac{5}{3}x_3^2 \end{aligned}$$

可知正惯性指数 $p = 3$, 负惯性指数 $q = 0$, 故二次型正定.

【例 9】 已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

正定, 求 t 的取值.

【解】 二次型矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

其顺序主子式

$$\Delta_1 = 1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{vmatrix} = 4 - t^2, \Delta_3 = |A| = -4t^2 - 4t + 8$$

正定的充分必要条件是顺序主子式全大于0,故

$$\begin{cases} 4-t^2=(2-t)(2+t)>0, & t\in(-2,2) \\ -4t^2-4t+8=-4(t-1)(t+2)>0, & t\in(-2,1) \end{cases}$$

故 $t\in(-2,1)$ 时,二次型 f 正定.

【例 10】 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 若 $A+kE$ 是正定矩阵, 则 k _____.

【分析】 A 正定 $\Leftrightarrow A$ 的特征值 $\lambda > 0$.

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & -\lambda-1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)(\lambda-3)$$

A 的特征值为: $0, -1, 3$,

$A+kE$ 的特征值为: $k, k-1, k+3$,

$$A+kE \text{ 正定} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k-1 > 0 \\ k+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow k > 1.$$

练习 6

(1) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + ax_3^2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 的秩为 2, 则 $a =$ _____.

(2) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_2^2 + 2x_1x_3$ 的规范形是_____.

(3) 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 的合同标准形是_____.

(4) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3$, 用正交变换法化其为标准形, 并写出所用坐标变换.

(5) 判断二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2$ 的正定性.

(练习答案在 208 页)

知之为知之, 不知为不知, 是知也。

——《论语·为政》



练习题答案

练习 1

(1) 2 (2) $(a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$ 可用范德蒙?(3) $(a_2a_3 - b_2b_3)(a_1a_4 - b_1b_4)$ 可用拉普拉斯或直接展开.

(4) 0 或 1 (5) 1 或 -1 (6) 2

练习 2.1

注意这 6 个符号, 是矩阵? 还是数? 数与矩阵的关系.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \quad (3) 5 \quad (4) 5 \quad (5) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad (6) 6$$

练习 2.2

$$(1) x_1^2 + 7x_2^2 + 8x_1x_2 \quad (2) x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 \quad (3) \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

练习 2.3

$$(1) D \quad (2) \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

练习 2.4

$$(1) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 10 & 8 & 12 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

练习 2.5

$$(1) 24 \text{ 有同学得 } -24 \text{ 吗?} \quad (2) \frac{27}{5} \text{ (注意 } A^* = |A| A^{-1} \text{)}$$

练习 3.1

$$(1) a = 5 \quad (2) a = -9 \quad (3) D$$

练习 3.2

$$(1) r = 2$$

(2) 当 $a = 2$ 时, $r = 2$. 极大无关组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_4 = -2\alpha_1 + 3\alpha_2$.当 $a \neq 2$ 时, $r = 3$. 极大无关组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$.

练习 3.3

$$(1) B \quad (2) A$$

练习 4.1

$$(1) (2, 1, 0, 0)^T, (-3, 0, 1, 0)^T, (4, 0, 0, 1)^T \quad (2) \lambda \neq 1$$

$$(3) D \quad (4) k_1(-2, 2, 1, 0, 0)^T + k_2(3, 2, 0, 1, 2)^T \quad k_1, k_2 \text{ 为任意常数}$$

练习 4.2

$$(1) a = -2 \quad (2) (0, 0, 0, -1)^T + k_1(-1, 1, 0, 0)^T + k_2(-1, 0, 1, -2)^T \quad k_1, k_2 \text{ 为任意常数}$$

$$(3) \text{ 当 } a = 3 \text{ 时方程组有解, } (2, 1, 0)^T + k(1, -3, 1)^T \quad k \text{ 为任意常数}$$

练习 5.1

$$(1) D \quad (2) D \quad (3) 37$$

$$(4) \text{ 特征值: } 4, 0, -2, \text{ 特征向量依次为 } k_1(7, 4, -17)^T, k_2(1, 0, 1)^T, k_3(1, -2, 1)^T, k_1,$$

$$k_2, k_3 \text{ 全不为 } 0$$

(5) 特征值: $1, 1, -5$, $\lambda = 1$ 时特征向量为 $k_1(1, 1, 0)^T + k_2(1, 0, 1)^T$, k_1, k_2 不全为 0;
 $\lambda = -5$ 时特征向量为 $k_3(-1, 1, 1)^T$, $k_3 \neq 0$

练习 5.2

(1) E (2) $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$ (3) B (其中第二和第三两个矩阵不能相似对角化)

(4) $a = 2$ $P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 时 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$

练习 5.3

(1) $\lambda = 0$, 特征向量 $k(-1, 1, 1)^T$ 注: $r(A) = 2 \Rightarrow |A| = 0$, 所以 $\lambda = 0$ 是特征值

(2) $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ 时, $Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 5 \end{bmatrix}$

练习 6

(1) $a = 5$ (2) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$

(4) $x = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} y, x^T A x = y^T \Lambda y = 3y_1^2 - 2y_2^2$

(5) 不正定. 对二次型矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, 有 $|A| = 0$, 所以二次型不是正定

二次型. 注意若令 $\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 \\ y_2 = x_2 - x_3 \\ y_3 = -x_1 + x_3 \end{cases} (*)$, 则因 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ 而知 $(*)$ 不是坐标变换.

知之者不如好之者, 好之者不如乐之者。

——《论语·雍也》



第三篇



概率论与数理统计
(ID: djky66)

本篇内容
数学二不要求

第一章 随机事件和概率

。本章考点。

随机事件与样本空间 事件的关系与运算 完备事件组 概率的概念 概率的基本性质 古典型概率 几何型概率 条件概率 概率的基本公式(加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式以及贝叶斯(Bayes)公式) 事件的独立性 独立重复试验

第一节 随机事件、事件间的关系与运算

一、随机试验

定义 对随机现象进行观察或实验称为随机试验,简称试验,记作 E . 它具有如下特点:

- (1) 可以在相同条件下重复进行;
- (2) 所得的可能结果不止一个,且所有可能结果都能事前已知;
- (3) 每次具体实验之前无法预知会出现哪个结果.

例如,抛一枚硬币,记录其结果是正面向上还是反面向上;测试灯泡使用寿命有多长;购买福利彩票中奖或不中奖;等等,都可看成随机试验.

二、随机事件

定义 随机试验的每一可能结果称为样本点,记作 ω . 由所有样本点全体组成的集合称为样本空间,记作 Ω .

【注】 显然,样本点是组成样本空间的元素.

定义 样本空间的子集称为随机事件,简称事件,常用字母 A, B, C 等表示.

随机事件是由样本空间中的元素即样本点组成,由一个样本点组成的子集是最简单事件,称为基本事件. 因此,也可将随机事件看成是由基本事件组成.

如果一次试验的结果为某一基本事件出现,就称该基本事件出现或发生. 如果组成事件 A 的一个基本事件出现或发生,也称事件 A 出现或发生.

把 Ω 看成一事件,则每次试验必有 Ω 中某一基本事件(即样本点)发生,也就是每次试验 Ω 必然发生,称 Ω 为必然事件.

把不包含任何样本点的空集 $\varnothing$ 看成一个事件. 每次试验 $\varnothing$ 必不发生,称 $\varnothing$ 为不可能事件.

【例 1】 判断下列试验是否为随机试验,如果是随机试验则写出样本空间及相应的随机事件.

(1) 2022 年清明节下雨不下雨.

(2) 射手对一目标射击两次,考察目标被击中次数. 事件 A 为至少击中一次.

(3) 对某品牌的灯泡使用寿命进行测试. 事件 A 为使用寿命不超过 1000 小时.

【解】 (1) 尽管 2022 年清明节可能下雨也可能不下雨,但这种试验不能在相同条件下重复进行,因此这不是随机试验.

(2) 目标可能被击中 0 次,1 次,2 次,这是一随机试验,样本空间为 $\Omega = \{0, 1, 2\}$. 事件 $A = \{1, 2\}$.

(3) 灯泡使用寿命如果记为 t (小时),则 t 的测试是随机试验. 样本空间为 $\Omega = \{t \mid t > 0\}$, 事件 $A = \{t \mid t \leq 1000\}$.

三、事件的关系与运算

定义 如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 B 包含事件 A ,或称事件 A 包含于事件 B ,记为 $B \supset A$ 或 $A \subset B$.

事件是一个集合,因而事件之间的关系与运算自然是按照集合之间关系与运算的规则进行. 同学们要明确在概率论中这些关系与运算的含义. 从集合关系来说,事件 A 的每一个样本点都属于事件 B .

定义 如果 $A \supset B$ 与 $B \supset A$ 同时成立,则称事件 A 与事件 B 相等,记作 $A = B$.

$A = B$ 表示事件 A 与事件 B 有完全相同的样本点.

定义 如果事件 A 与事件 B 同时发生,则称这样的一个事件为事件 A 与事件 B 的交或积,记为 $A \cap B$ 或 AB .

集合 $A \cap B$ 是由同时属于 A 与 B 的所有公共样本点构成.

事件的交可以推广到有限多个事件或可数无穷多个事件的情形:

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n, \quad \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots.$$

定义 如果事件 A 与事件 B 的关系为 $AB = \emptyset$,即 A 与 B 不能同时发生,则称事件 A 和事件 B 为互斥或互不相容.

互斥的两事件没有公共样本点.

事件的互斥可以推广到有限多个事件或可数无穷多个事件的情形:

若 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中任意两个事件均互斥,即 $A_i A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$, 则称这 n 个事件是两两互斥或两两互不相容.

如果可数无穷个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 中任意两个事件均互斥,即 $A_i A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n, \dots$, 则称这可数无穷个事件是两两互斥或两两互不相容.

定义 如果事件 A 与事件 B 至少有一个发生,则称这样一个事件为事件 A 与事件 B 的并或和,记为 $A \cup B$.

集合 $A \cup B$ 是由属于 A 与 B 的所有样本点构成.

事件的并可以推广到有限多个事件或可数无穷多个事件的情形:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n, \quad \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots.$$

【例 2】 设 A, B, C 为随机事件, 则有结论:

(A) 当 $AB = AC$ 时, 必有 $B = C$.

(B) 当 $AB \supset AC$ 时, 必有 $B \supset C$.

(C) 当 $AB = \emptyset$, 且 $A = B$ 时, 必有 $A = \emptyset$.

(D) 当 $AB = A$ 时, 必有 $A = B$.

【解】 当 $A = B$, 且 $AB = \emptyset$ 时, $AA = AB = \emptyset$, 即 $A = \emptyset$. 故答案应选 (C).

定义 如果事件 A 与事件 B 有且仅有一个发生, 即同时成立 $A \cup B = \Omega$, 且 $A \cap B = \emptyset$, 则称事件 A 与事件 B 为对立事件或互逆事件, 记为 $\bar{A} = B$ 或 $\bar{B} = A$.

在样本空间中, 集合 $\bar{A}$ 是由所有不属于事件 A 的样本点构成的集合.

定义 事件 A 发生而事件 B 不发生称为事件 A 与事件 B 的差, 记为 $A - B$.

在样本空间中集合 $A - B$ 是由属于事件 A 而不属于事件 B 的所有样本点构成的集合. 显然 $A - B = A\bar{B}$.

直观上常用几何图形表示集合、事件间的关系: 包含、相等、互斥、对立和事件间的运算: 交、并、差也可以用几何图形直观表示. 如图 1 所示.

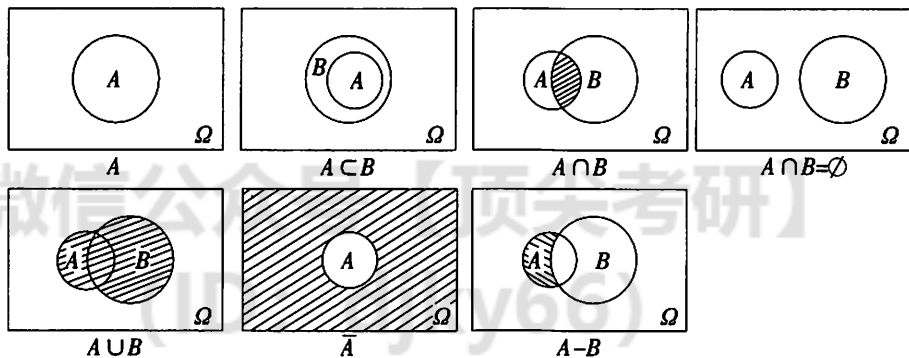


图 1

【例 3】 从一批产品中每次抽一件不放回, 如此抽取三次, 用 $A_i (i = 1, 2, 3)$ 表示事件“第 i 次取到的产品为正品”.

(I) 用文字叙述下列事件: $A_1 A_2 \cup A_2 A_3 \cup A_1 A_3, \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$;

(II) 用 A_1, A_2, A_3 表示下列事件: 至少取到二件次品, 最多取到二件正品.

【解】 (I) $A_1 A_2 \cup A_2 A_3 \cup A_1 A_3$ —— 至少取到两件正品或者最多取到一件次品.

$\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$ —— 至少取到一件次品或者最多取到二件正品.

(II) 至少取到二件次品 — $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \cup \bar{A}_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_3$ 或者 $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 \cup A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3$.

最多取到二件正品 —— $\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$ 或者 $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$.

【评注】 同一事件可以有不同表达形式, 尤其要正确理解“至少”“最多”“恰有”等的含义.

事件的运算规律

(1) 交换律 $A \cup B = B \cup A; A \cap B = B \cap A$.

(2) 结合律 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C;$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(3) 分配律 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(4) 对偶律 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}; \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B};$

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i; \bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i.$$

【例 4】 A, B, C 为随机事件, A 发生必导致 B 与 C 最多有一个发生, 则有

- (A) $A \subset BC$. (B) $A \supset BC$. (C) $\bar{A} \subset BC$. (D) $\bar{A} \supset BC$.

【解】 B 与 C 最多有一个发生, 就是 B 与 C 不能同时发生, 即 $\overline{BC}$.

题意说 A 发生导致 $\overline{BC}$ 发生, 即 $A \subset \overline{BC}$ 也就有 $\bar{A} \supset BC$. 答案选(D).

【例 5】 设随机事件 A 和 B 满足关系式 $A \cup B = \bar{A} \cup \bar{B}$, 则必有

- (A) $A - B = \emptyset$. (B) $AB = \emptyset$.
(C) $AB \cup \bar{A}\bar{B} = \Omega$. (D) $A \cup \bar{B} = \Omega$.

【解】 方法一 因 $A \cup B = \bar{A} \cup \bar{B}$, 所以 $A(A \cup B) = A(\bar{A} \cup \bar{B})$,
即 $A \cup AB = \emptyset \cup A\bar{B}$. 也就有 $A = A\bar{B} = A - B, AB = \emptyset$.

答案应选(B).

方法二 因 $A \cup B = \bar{A} \cup \bar{B}$, 所以 $\overline{A \cup B} = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$, 即 $\bar{A}\bar{B} = AB$, 也就有 $A\bar{A}\bar{B} = AAB, \emptyset = AB$. 答案应选(B).

【例 6】 设 A, B, C 是任意三事件, 则有

- (A) 当 $A \cup C = B \cup C$ 时, 就有 $A = B$.
(B) 当 $A - C = B - C$ 时, 就有 $A = B$.
(C) 当 $A - B = C$ 时, 就有 $A = B \cup C$.
(D) 当 $\bar{A} \cup \bar{B} \supset C$ 时, 就有 $ABC = \emptyset$.

【解】 当 $\bar{A} \cup \bar{B} \supset C$ 时, 就有 $\emptyset = C - (\bar{A} \cup \bar{B}) = C \overline{(\bar{A} \cup \bar{B})} = ABC$. 答案应选(D).

第二节 概率及概率公式

一、概率公理

定义 设试验 E 的样本空间为 Ω , 称实值函数 P 为概率, 如果 P 满足如下三条件:

- (1) 对于任意事件 A , 有 $P(A) \geq 0$;
- (2) 对于必然事件 Ω , 有 $P(\Omega) = 1$;
- (3) 对于两两互斥的可数无穷个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, 有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots$$

称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

由概率的定义, 可推得概率的一些重要性质.

性质 (1) $P(\emptyset) = 0$;

- (2) 对于两两互斥的有限个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

- (3) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;

(4) $A \subset B$, 则 $P(A) \leq P(B)$;

(5) $0 \leq P(A) \leq 1$.

定义 设 A, B 为两事件, 且 $P(A) > 0$, 称

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

【注】 条件概率也是概率, 条件概率也有概率相应的各性质.

二、事件的独立性

定义 设 A, B 两事件满足等式

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称 A 与 B 相互独立.

设 A, B, C 三事件满足等式

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

$$P(AC) = P(A)P(C)$$

$$P(BC) = P(B)P(C)$$

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$

则称 A, B, C 三事件相互独立, 满足以上四等式中前三个则称 A, B, C 三事件两两独立.

设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是 n 个事件, 如果对于任意 $k (1 < k \leq n)$, 任意 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ 满足等式

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$$

则称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为相互独立的事件.

【注】 n 个事件相互独立需要 $C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n = 2^n - n - 1$ 个等式成立.

性质 (1) A 与 B 相互独立的充要条件是 A 与 $\bar{B}$ 或 $\bar{A}$ 与 B 或 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相互独立.

(2) 当 $0 < P(A) < 1$ 时, A 与 B 独立等价于 $P(B|A) = P(B)$ 或 $P(B|\bar{A}) = P(B|\bar{A})$ 成立.

(3) 若 $A_1, A_2, \dots, A_n (n > 2)$ 相互独立, 则 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 必两两独立. 反之, 若 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两独立, 则 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 不一定相互独立.

(4) 当 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立时, 它们的部分事件也是相互独立的.

将相互独立的 n 个事件中任何几个事件换成它们相应的对立事件, 则这新组成的 n 个事件也相互独立.

【例 1】 假设事件 A 和 B 满足 $0 < P(A) < 1$, 且 $P(B|A) = 1$, 则

(A) $B = \Omega$.

(B) $A \subset B$.

(C) $P(A - B) = 0$.

(D) $P(B|\bar{A}) = 0$.

【解】 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = 1$, 所以 $P(A) - P(AB) = 0$, $P(A - B) = P(A) - P(AB) = 0$. 答案应选(C).

【例 2】 设事件 A, B, C 两两独立, 则 A, B, C 相互独立的充分和必要条件是

(A) A 和 BC 独立.

(B) $A \cup B$ 和 $B \cup C$ 独立.

(C) AB 和 BC 独立.

(D) AB 和 $A \cup C$ 独立.

【解】 A, B, C 已知两两独立, 只要满足 $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ 就有 A, B, C 相互

独立,当 A 和 BC 独立时 $P(ABC) = P(A)P(BC)$. 又因为 BC 独立, $P(BC) = P(B)P(C)$, 所以 $P(ABC) = P(A)P(BC) = P(A)P(B)P(C)$ 成立.

答案选(A).

三、五大概率公式

(1) 加法公式 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$;

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$.

【例 3】 已知 $P(A) = 0.4, P(AB) = 0.2$ 且 $P(A | B) + P(\bar{A} | \bar{B}) = 1$, 则 $P(A \cup B) =$ _____.

【解】 $P(A | B) + P(\bar{A} | \bar{B}) = 1$ 就有 $P(A | B) = 1 - P(\bar{A} | \bar{B}) = P(A | \bar{B})$, A, B 相互独立. 所以 $P(AB) = P(A)P(B) = 0.2$. 故 $P(B) = 0.5$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.4 + 0.5 - 0.2 = 0.7$, 答案填 0.7.

【例 4】 已知随机事件 A 与 B 同时发生时必导致事件 C 发生, 则有

(A) $P(C) \leq P(A \cup B)$.

(B) $P(C) \geq P(A \cup B)$.

(C) $P(C) \leq P(A) + P(B) - 1$.

(D) $P(C) \geq P(A) + P(B) - 1$.

【解】 A 与 B 同时发生会导致 C 发生, 即 $AB \subset C$, 也就有 $P(AB) \leq P(C)$.

$1 \geq P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \geq P(A) + P(B) - P(C)$, 也就成立 $P(C) \geq P(A) + P(B) - 1$. 答案应选(D).

(2) 减法公式 $P(A - B) = P(A) - P(AB)$.

(3) 乘法公式

当 $P(A) > 0$ 时, $P(AB) = P(A)P(B | A)$;

当 $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$ 时,

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1) \cdots P(A_n | A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$$

(4) 全概率公式

设 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 满足 $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega, B_i B_j = \emptyset (i \neq j)$ 且 $P(B_k) > 0, k = 1, 2, \dots, n$, 则对任意事件 A 有

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A | B_i)$$

称满足 $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$ 和 $B_i B_j = \emptyset (i \neq j)$ 的 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 Ω 的一个完备事件组.

(5) 贝叶斯公式

设 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 满足 $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega, B_i B_j = \emptyset (i \neq j)$ 且 $P(A) > 0, P(B_k) > 0, k = 1, 2, \dots, n$, 则

$$P(B_j | A) = \frac{P(B_j)P(A | B_j)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A | B_i)}, j = 1, 2, \dots, n$$

【注】 (1) 概率计算中常要结合对偶律应用性质 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

(2) 计算相互独立事件的概率时,常将事件之间的“并”或“差”转化成“交”来计算. 因为事件的独立性是用事件之交的概率来定义. 而将相互独立事件中某个或某几个事件换成相应的对立事件并不影响它们之间的相互独立性,所以将“并”和“差”化成交后,常常会带来计算上的方便. 例如, A 与 B 独立时,

$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A}\overline{B}) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B})$$

$$P(A - B) = P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B})$$

【例 5】 已知随机事件 A, B 满足条件 $P(AB \cup \overline{A}\overline{B}) = 0$, 则有

(A) A, B 为对立事件.

(B) A, B 为互斥, 但不对立.

(C) $P(A) = P(B)$.

(D) $P(A) = P(\overline{B})$.

【解】 $P(AB \cup \overline{A}\overline{B}) = 0$ 则 $P(AB) = 0$ 同时 $P(\overline{A}\overline{B}) = 0$.

$$0 = P(\overline{A}\overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB)$$

$$= 1 - P(A) - P(B) = -P(A) + P(\overline{B})$$

故 $P(A) = P(\overline{B})$. 答案应选(D).

【评注】 选项(A)和选项(B)肯定不对. 因为题设条件是 $P(AB \cup \overline{A}\overline{B}) = 0$. 只给出概率的条件是得不出事件的结论的. (A)和(B)不用考虑. 选项(C)也不可能, 例如选 $A = \emptyset$, $B = \Omega$, 这时, $P(AB \cup \overline{A}\overline{B}) = P(\emptyset \cup \Omega \cap \emptyset) = P(\emptyset) = 0$ 但 $P(A) \neq P(B)$.

【例 6】 设概率相等的三随机事件 A, B, C 两两独立, 且已知它们中至少有一个发生的概率为 $\frac{23}{25}$, 而它们中至少有一个不发生的概率为 $\frac{14}{25}$, 则 $P(A) =$ _____.

【解】 根据题设条件可表示为 $P(A) = P(B) = P(C)$; A, B, C 两两独立; $P(A \cup B \cup C) = \frac{23}{25}$; $P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) = \frac{14}{25}$.

现要求 $P(A) = x$, 根据加法公式

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

$$\text{也就有 } \frac{23}{25} = 3x - 3x^2 + [1 - P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C})] = 3x - 3x^2 + \frac{11}{25}.$$

$$x^2 - x + \frac{4}{25} = 0, \text{ 解得 } x_1 = \frac{1}{5}, x_2 = \frac{4}{5}.$$

$$x_1 = \frac{1}{5} \text{ 不要, 因为它不满足条件 } \frac{11}{25} = P(ABC) \leq P(A) = \frac{1}{5}. \text{ 答案应填 } \frac{4}{5}.$$

【例 7】 设随机事件 A 与 B 相互独立, $P(B) = 0.5$, $P(A - B) = 0.3$, 则 $P(B - A) =$ _____.

(A) 0.1.

(B) 0.2.

(C) 0.3.

(D) 0.4.

【解】 方法一 $0.3 = P(A - B) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B)$
 $= P(A) - 0.5P(A) = 0.5P(A)$

$$P(A) = 0.6$$

$$P(B - A) = P(B) - P(AB) = P(B) - P(A)P(B) = 0.5 - 0.6 \times 0.5 = 0.2$$

答案应选(B).

方法二 $0.3 = P(A - B) = P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}) = 0.5P(A)$, $P(A) = 0.6$

$$P(B - A) = P(B\overline{A}) = P(B)P(\overline{A}) = 0.5 \times 0.4 = 0.2$$

答案应选(B).

方法三 A 与 B 独立, $P(B|A) = P(B) = 0.5 = \frac{1}{2}$.

即 $\frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{2}$, $P(AB)$ 占 $P(A)$ 一半.

$0.3 = P(A - B) = P(A) - P(AB)$, $P(AB) = 0.3$,

$P(B - A) = P(B) - P(AB) = 0.5 - 0.3 = 0.2$.

答案选(B).

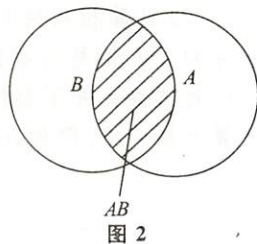


图 2

【例 8】 设 A, B, C 为三个随机事件, 且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$, $P(AB) = 0$,

$P(AC) = P(BC) = \frac{1}{12}$, 则 A, B, C 全不发生的概率为_____.

【分析】 方法一 A, B, C 全不发生的事件为 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - [P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)]$

$$= 1 - \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 0 - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} + 0 \right] = 1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

答案应填 $\frac{5}{12}$.

方法二 A, B, C 全不发生为图中阴影部分, 其面积应为

$$1 - \frac{1}{4} \times 3 + \frac{1}{12} \times 2 = \frac{5}{12}$$

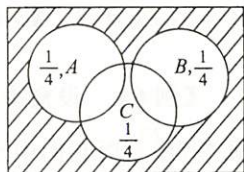


图 3

第三节：古典概型与伯努利概型

定义 当试验结果为有限 n 个样本点, 且每个样本点的发生具有相等的可能性, 如果事件 A 由 n_A 个样本点组成, 则事件 A 的概率

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{A \text{ 所包含的样本点数}}{\text{样本点总数}}$$

称有限等可能试验中事件 A 的概率 $P(A)$ 为古典型概率.

【例 1】 对随意选的一个三位数, 其中 3 个数字两两不同的概率 $P =$ _____.

【解】 三位数的首位数不能为 0, 所以总的三位数有 $9 \times 10 \times 10 = 900$ 个.

3 个数字两两不同的, 首位数有 9 种选法.

十位数可以选 0, 但不能与千位数重复, 故有 9 种.

个位数可选 0, 但不能与前两位数重复, 故有 8 种.

$$P = \frac{9 \times 9 \times 8}{9 \times 10 \times 10} = \frac{18}{25}$$

【例 2】 已知 6 个产品中混有 2 个次品, 现每次一个地逐个随机抽取检验.

求(1) 恰好查三次就确定 2 次品的概率;

(2) 不超过三次就确定 2 次品的概率.

【解】 (1) 只考虑 2 个次品的位置, 恰好查三次就确定 2 次品, 就是前两次检验已查出一个次品, 第 2 个次品在第 3 次抽检中查到.

总的情况是 6 个位置中任取 2 个放次品, 共有 C_6^2 种. 现要考虑的是第 3 次必为次品, 前 2 个位中取一放次品共 C_2^1 种.

$$\text{所求的概率为 } \frac{C_2^1}{C_6^2} = \frac{2}{15}.$$

(2) 不超过三次的情况是在前三次检查中取到两次品, 所求的概率为 $\frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{5}$.

定义 当试验的样本空间是某区域(该区域可以是一维, 二维或三维等等), 以 $L(\Omega)$ 表示其几何度量(长度、面积、体积等等). $L(\Omega)$ 为有限, 且试验结果出现在 Ω 中任何区域的可能性只与该区域几何度量成正比. 事件 A 的样本点所表示的区域为 Ω_A , 则事件 A 的概率

$$P(A) = \frac{L(\Omega_A)}{L(\Omega)} = \frac{\Omega_A \text{ 的几何度量}}{\Omega \text{ 的几何度量}}$$

称这种样本点个数无限但几何度量上的等可能试验中事件 A 的概率 $P(A)$ 为几何型概率.

【例 3】 随机地向半圆 $\{(x, y) \mid 0 < y < \sqrt{2ax - x^2}\}$ (其中 $a > 0$, 是常数) 内掷一点, 则原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为_____.

【解】 半圆即基本事件空间 Ω 的面积为 $\frac{1}{2}\pi a^2$, 所求事件即图 4 中阴影部分的面积为 $\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}\pi a^2$, 所求概率为

$$\frac{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}\pi a^2}{\frac{1}{2}\pi a^2} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}$$

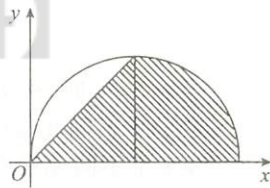


图 4

定义 把一随机试验独立重复做若干次, 即各次试验所联系的事件之间相互独立, 且同一事件在各个试验中出现的概率相同, 称为独立重复试验.

如果每次试验只有两个结果 A 和 $\bar{A}$, 则称这种试验为伯努利试验. 将伯努利试验独立重复进行 n 次, 称为 n 重伯努利试验.

设在每次试验中, 概率 $P(A) = p (0 < p < 1)$, 则在 n 重伯努利试验中事件 A 发生 k 次的概率, 又称为二项概率公式:

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n$$

【例 4】 某人打靶的命中率为 $\frac{1}{2}$, 当他连射三次后检查目标, 发现靶已命中, 则他在第一次射击时就已命中的概率为_____.

【解】 本题是条件概率. 靶已命中, 可以理解为至少中一次. 设 A ——至少命中一次, B ——第一次就命中, 显然 $B \subset A$. 所求概率为

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{1 - P(\bar{A})} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - (\frac{1}{2})^3} = \frac{4}{7}$$

答案应填 $\frac{4}{7}$.

古典概率的计算是一个难点. 首先, 样本空间 Ω 往往要根据题意自己去构造. Ω 越简单, 计算量就越小; 其次是计算样本空间 Ω 和事件 A 的样本点数 n 和 n_A , 既不能重复计算, 也不能漏算. 这部分内容只要会计算一些典型题就可以了, 而不必刻意去做大量古典型概率难题.

补充阅读

加法原理

设完成一件事有 m 类办法, 第 i 类有 n_i 种不同方法, 只要选一类中任一方法就可完成这事, 则完成这件事一共有 $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$ 种不同的方法.

乘法原理

设完成一件事分成 m 个步骤, 第 i 步有 n_i 种不同方法, 必须依次完成每一步才能完成这事, 则完成这件事一共有 $n_1 n_2 \cdots n_m$ 种不同的方法.

排列组合公式

从 n 个不同元素中放回(不重复)地选取 m 个元素进行排列, 则不同排列的总数为

$$P_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)\cdots(n-m+1)$$

当 $n = m$ 时, 称为全排列, 且 $P_n^n = n!$

从 n 个不同元素中有放回(可重复)地取 m 个元素进行排列, 其不同排列的总数为 n^m .

从 n 个不同元素中不重复地选取 m 个元素, 组成一组(不管顺序), 称为从 n 个不同元素中选取 m 个元素的组合, 则所有不同组合的总数为 $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

根据上面的计算可得: $C_n^m = \frac{P_n^m}{m!}$.

从 n 个不同元素中每次取出一个, 放回后再取下一个, 如此连续取 m 次所得的组合称为重复组合, 则重复组合总数为 C_{n+m-1}^m .

选组合可视为把 n 个不同元素分成两组, 一组 m 个, 另一组 $n-m$ 个, 组内不考虑元素的顺序, 那么不同的分法的总数为 C_n^m .

如果把 n 个不同元素分成 k 组 ($1 \leq k \leq n$), 使得第 i 组有 n_i 个元素, $\sum_{i=1}^k n_i = n$, 组内不考虑元素的顺序, 那么不同的分法总数为 $\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.

常用组合公式

$$C_n^k = C_n^{n-k}, C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}, \sum_{i=0}^n C_n^i = 2^n, C_{n+m}^k = \sum_{i=0}^k C_n^i C_m^{k-i}.$$

第二章 随机变量及其概率分布

。 本章考点 。

随机变量 随机变量分布函数的概念及其性质 离散型随机变量的概率分布 连续型随机变量的概率密度 常见随机变量的分布 0-1 分布、二项分布 $B(n, p)$ 、几何分布、超几何分布、泊松(Poisson) 分布 $P(\lambda)$ 、均匀分布 $U(a, b)$ 、正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 、指数分布 $E(\lambda)$ 及其应用 随机变量函数的分布

第一节 随机变量及其分布函数

定义 在样本空间 Ω 上的实值函数 $X = X(\omega), \omega \in \Omega$, 称 $X(\omega)$ 为随机变量, 简记 X .

【注】 $X(\omega)$ 的定义域是 Ω . 常用 X, Y, Z 等表示随机变量.

定义 如果一个随机变量的可能取值是有限多个或可数无穷多个, 则称它为离散型随机变量.

定义 设离散型随机变量 X 的可能取值是 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, X 取各可能值的概率为

$$P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \dots$$

称上式为离散型随机变量 X 的概率分布或分布律.

分布律也有用列表方式给出的:

$$\begin{array}{c|cccccc} X & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & \cdots \\ \hline P & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n & \cdots \end{array}$$

或者

$$X \sim \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{bmatrix}$$

这里只给出 X 可能取值可数无穷多个的情形. 不难给出 X 有限个可能取值的情形.

分布律性质:

(1) $p_k \geq 0, k = 1, 2, \dots$;

(2) $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1$.

【注】 性质(1) 和(2) 也是分布律的充要条件.

定义 设 X 是一个随机变量, 对于任意实数 x , 记函数

$$F(x) = P\{X \leq x\}, -\infty < x < +\infty$$

称 $F(x)$ 为随机变量 X 的分布函数.

分布函数 $F(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的一个实值函数, $F(x)$ 的值等于随机变量 X 在

区间 $(-\infty, x]$ 内取值的概率, 即事件“ $X \leq x$ ”的概率.

有的书上将分布函数定义成 $F(x) = P\{X < x\}$, 考试大纲要求是 $F(x) = P\{X \leq x\}$.

分布函数性质:

(1) $0 \leq F(x) \leq 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, 记为 $F(-\infty) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$, 记为 $F(+\infty) = 1$.

(2) $F(x)$ 是单调非减函数, 即当 $x_1 < x_2$ 时, $F(x_1) \leq F(x_2)$.

(3) $F(x)$ 是右连续的, 即 $F(x+0) = F(x)$.

(4) 对任意 $x_1 < x_2$, 有 $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$.

(5) 对任意的 x , $P\{X = x\} = F(x) - F(x-0)$.

由单调性和 $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$ 可以推出 $0 \leq F(x) \leq 1$, 所以性质(1), (2), (3) 可以简化为:

$F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$; 单调非减; 右连续.

这恰是函数 $F(x)$ 成为某一随机变量的分布函数的充要条件.

当 $F(x)$ 在 x 处连续时, $F(x) - F(x-0) = 0$, 根据性质(5), 就有 $P\{X = x\} = 0$.

【例 1】 设随机变量 X 的分布律为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

则随机变量 X 的分布函数 $F(x) =$ _____.

【解】 X 为离散型随机变量, 其分布函数

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_k \leq x} P\{X = x_k\} = \sum_{x_k \leq x} p_k$$

或着

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{3}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{5}{6}, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & 3 \leq x \end{cases}$$

【例 2】 从 1, 2, 3, 4 中随机取 2 个数, 则其中的小者 X 的分布律为 _____.

【解】 显然 X 的取值为 1, 2, 3. 从 4 个数中取 2 个, 有 C_4^2 种可能. $X = 1$ 时, 小数为 1, 大数可能取 2, 3, 4 三种. 所以 $P\{X = 1\} = \frac{3}{C_4^2} = \frac{1}{2}$.

同理 $P\{X = 2\} = \frac{2}{C_4^2} = \frac{1}{3}, P\{X = 3\} = \frac{1}{6}$.

答案应填

X	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

.

【例 3】 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} a + \frac{b}{1+x}, & x \geq 0 \\ c, & x < 0 \end{cases}$, 其中 a, b, c 为常数,

则 b 的可能取值范围为 _____.

【解】 分布 $F(x)$ 满足 $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$, 单调非减和右连续.

由 $F(-\infty) = 0$ 得 $c = 0, F(+\infty) = 1$ 得 $a = 1$,

$F(x)$ 单调非减则 $b \leq 0$. 答案应填 $-1 \leq b \leq 0$.

【例 4】 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$, 则我们可作出分布函数

(A) $2F(x)$. (B) $F(2x)$. (C) $F(x^2)$. (D) $F(|x|)$.

【解】 $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(2x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(2x) = 1, F(2x)$ 单调不降, $F(2x)$ 也右连续

所以 $F(2x)$ 也是分布函数. 答案应选(B).

【注】 $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2F(x) = 2, \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x^2) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} F(|x|) = 1$.

所以(A)(C)(D) 均不满足分布函数的充要条件.

【例 5】 设随机变量 X 的分布函数 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1, \text{ 则 } P\{X = 1\} = \\ 1 - e^{-x}, & 1 \leq x \end{cases}$

(A) 0. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{1}{2} - e^{-1}$. (D) $1 - e^{-1}$.

【解】 根据分布函数性质: $P\{X = x\} = F(x) - F(x-0)$. 则

$$P\{X = 1\} = F(1) - F(1-0) = 1 - e^{-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - e^{-1}$$

答案应选(C).

【例 6】 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 分别为随机变量 X_1 和 X_2 的分布函数, 为使 $F(x) = aF_1(x) - bF_2(x)$ 也是分布函数, 可选

(A) $a = \frac{3}{5}, b = -\frac{2}{5}$. (B) $a = \frac{2}{3}, b = \frac{2}{3}$.

(C) $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$. (D) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$.

【解】 分布函数的充要条件: $F(-\infty) = aF_1(-\infty) - bF_2(-\infty) = 0$,

$F(+\infty) = aF_1(+\infty) - bF_2(+\infty) = a - b = 1$

$F(x) = aF_1(x) - bF_2(x)$ 当 $a > 0, b < 0$ 时单调不减,

$F(x) = aF_1(x) - bF_2(x)$ 也右连续.

总之 a, b 要满足 $\begin{cases} a - b = 1 \\ a > 0, b < 0 \end{cases}$. 答案应选(A).

定义 如果对随机变量 X 的分布函数 $F(x)$, 存在一个非负可积函数 $f(x)$, 使得对任意实数 x , 都有

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, -\infty < x < +\infty$$

称 X 为连续型随机变量, 函数 $f(x)$ 称为 X 的概率密度.

【注】 连续型随机变量的分布函数 $F(x)$ 必可表示成 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$, 所以这时的 $F(x)$ 一定是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数, 反之, 不能说凡是连续的 $F(x)$ 对应的 X 一定是连续型随机变量.

连续型随机变量的 $F(x)$ 必连续, 但 $f(x)$ 不一定是连续的.

概率密度 $f(x)$ 的性质

(1) $f(x) \geq 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$;

(3) 对任意实数 $x_1 < x_2$, 有 $P\{x_1 < X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt$;

(4) 在 $f(x)$ 的连续点处有 $F'(x) = f(x)$.

函数 $f(x)$ 成为某一连续型随机变量的概率密度充要条件是 $f(x)$ 具有性质(1) 和(2).

如果 X 是连续型随机变量, 则显然有

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = P\{x_1 \leq X < x_2\} = P\{x_1 < X < x_2\} = P\{x_1 \leq X \leq x_2\}$$

【例 7】 已知 $f(x)$ 为概率密度函数, 则可以作出概率密度函数

(A) $f(2x)$. (B) $2f(x)$. (C) $f(-x)$. (D) $-f(x)$.

【解】 概率密度函数的充要条件是 $f(x) \geq 0$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

$f(-x)$ 满足充要条件: $f(-x) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(-x) dx = \int_{+\infty}^{-\infty} f(t) d(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$.

答案应选(C).

【例 8】 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{若 } x \in [0, 1] \\ \frac{2}{9}, & \text{若 } x \in [3, 6] \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

若 k 使得 $P\{X \geq k\} = \frac{2}{3}$, 则 k 的取值范围是_____.

【解】 $P\{X \geq k\} = 1 - P\{X < k\} = 1 - P\{X \leq k\} = 1 - \int_{-\infty}^k f(x) dx = \frac{2}{3}$,

故 $\int_{-\infty}^k f(x) dx = \frac{1}{3}$. 当 $1 \leq k \leq 3$ 时, $\int_{-\infty}^k f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3}$.

答案应填 $[1, 3]$.

【例 9】 对连续型随机变量 X 和它的概率密度函数 $f(x)$ 有结论:

(A) $f(x)$ 一定为连续函数. (B) $f(x) > 0$.

(C) $f(x) \leq 1$. (D) $P\{X = 0\} = 0$.

【解】 $P\{X = x\} = F(x) - F(x-0)$, 现 $F(x)$ 为连续函数, 故 $P\{X = 0\} = 0$.

答案应选(D).

【例 10】 设随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x) = f(1-x)$, 且 $\int_0^2 f(x) dx =$

0.6, 则 $P\{X < 0\} =$

(A) 0.2.

(B) 0.3.

(C) 0.4.

(D) 0.5.

【解】 方法一

$$\begin{aligned}
 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx + \int_2^{+\infty} f(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^0 f(x) dx + 0.6 + \int_1^{+\infty} f(1+t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^0 f(x) dx + 0.6 + \int_1^{+\infty} f(1-t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^0 f(t) dt + 0.6 + \int_0^{+\infty} f(s) d(-s) \\
 &= 2 \int_{-\infty}^0 f(x) dx + 0.6
 \end{aligned}$$

$$P\{X < 0\} = P\{X \leq 0\} = \int_{-\infty}^0 f(x) dx = 0.2$$

答案应选(A).

方法二 $f(1+x) = f(1-x)$,
 $f(x)$ 在 $x=1$ 处左右对称. (如图 1)

$$\text{现} \int_0^2 f(x) dx = 0.6.$$

$$P\{X < 0\} = P\{X \leq 0\} = 0.2.$$

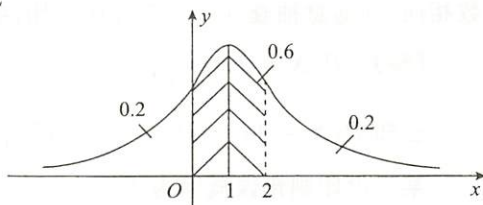


图 1

第二节 常用分布

定义 如果随机变量 X 有分布律

X	0	1
P	$1-p$	p

$0 < p < 1$, 则称 X 服从参数为 p 的 0-1 分布, 或称 X 具有 0-1 分布.

定义 如果随机变量 X 有分布律

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

其中 $0 < p < 1, q = 1 - p$, 则称 X 服从参数为 n, p 的二项分布, 记作 $X \sim B(n, p)$.

在 n 重伯努利试验中, 若每次试验成功率为 $p (0 < p < 1)$, 则在 n 次独立重复试验中成功的总次数 X 服从二项分布.

当 $n=1$ 时, 不难验证二项分布就退化成 0-1 分布. 所以 0-1 分布也可以记为 $B(1, p)$.

定义 如果随机变量 X 的分布律为

$$P\{X = k\} = pq^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

其中 $0 < p < 1, q = 1 - p$, 则称 X 服从参数为 p 的几何分布, 或称 X 具有几何分布.

【注】 在独立地重复做一系列伯努利试验中, 若每次试验成功率为 $p (0 < p < 1)$, 则在第 k 次试验时才首次试验成功的概率服从几何分布.

定义 如果随机变量 X 的分布律为

$$P\{X = k\} = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \quad k = l_1, \dots, l_2$$

其中 $l_1 = \max(0, n - N + M), l_2 = \min(M, n)$. 则称随机变量 X 服从参数为 n, N, M 的超几何分布.

如果 N 件产品中含有 M 件次品, 从中任意一次取出 n 件 (或从中一件接一件不放回地取 n 件), 令 $X =$ 抽取的 n 件产品中的次品件数, 则 X 服从参数为 n, N, M 的超几何分布.

如果 N 件产品中含有 M 件次品,从中一件接一件有放回地取 n 次(即每次取出记录后就放回,再取下一个),则 X 服从 $B\left(n, \frac{M}{N}\right)$.

定义 如果随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\dots$, 其中 $\lambda > 0$ 为常数,则称随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布,记为 $X \sim P(\lambda)$.

【注】 在一段时间内电话总机接到的呼叫次数、候车的旅客数、保险索赔的次数等都服从泊松分布.

【例 1】 设一文本各页的印刷错误 X 服从泊松分布. 已知有一个和两个印刷错误的页数相同,则随意抽查的 4 页中无印刷错误的概率 $p =$ _____.

【解】 $P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\dots$

已知 $P\{X=1\} = P\{X=2\}$, 即 $\frac{\lambda}{1!}e^{-\lambda} = \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$, 解得 $\lambda = 2$.

某页没印刷错误概率为 $P\{X=0\} = e^{-2}$.

可以理解各页印刷错误相互独立,所以 $p = (e^{-2})^4 = e^{-8}$.

答案应填 e^{-8} .

泊松定理 在伯努利试验中, p_n 代表事件 A 在一次试验中出现的概率,它与试验总数 n 有关,且随 n 的增大, p_n 在减小. 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda$, 则出现 k 次 A 发生的概率

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

【注】 应用泊松定理的要求: n 较大 ($n \geq 100$), p 较小 ($p \leq 0.1$), np 不太大. 这时有近似公式

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}.$$

定义 如果连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则称 X 在区间 $[a, b]$ 上服从均匀分布,记作 $X \sim U[a, b]$.

如果概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则称 X 在区间 (a, b) 上服从均匀分布,记作 $X \sim U(a, b)$.

【注】 无论 $X \sim U[a, b]$ 或 $X \sim U(a, b)$, 它们的分布函数均为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & b \leq x \end{cases}$$

性质 设 $X \sim U[a, b]$, 则对 $a \leq c < d \leq b$, 有

$$P\{c \leq X \leq d\} = \frac{d-c}{b-a}$$

即随机变量 X 落入区间 $[c, d]$ 的概率等于该区间长度与 $[a, b]$ 长度之比.

【例 2】 设随机变量 X 在区间 (a, b) 上均匀分布, 已知 $P\{X < 0\} = P\{X > 2\} = \frac{1}{4}$.
则 $a =$ _____.

【解】 $P\{0 \leq X \leq 2\} = 1 - P\{X < 0\} - P\{X > 2\} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$,

即 $\frac{2-0}{b-a} = \frac{1}{2}, b-a = 4$.

$P\{X < 0\} = \frac{0-a}{b-a} = \frac{-a}{4} = \frac{1}{4}$ 解得 $a = -1$.

答案应填 -1 .

定义 如果连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \lambda > 0$$

则称 X 服从参数为 λ 的指数分布, 记作 $X \sim E(\lambda)$.

有些书指数分布定义的概率密度形式有所不同, 本书采用考试大纲上的形式.

设 $X \sim E(\lambda)$, 则 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \lambda > 0$$

指数分布有很多应用, 有许多种寿命的分布都近似地服从指数分布.

性质 设 $X \sim E(\lambda)$, 则有

$$(1) P\{X > t\} = \int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda t}, t > 0,$$

$$(2) P\{X > t+s | X > s\} = \frac{P\{X > t+s\}}{P\{X > s\}} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P\{X > t\}, t, s > 0.$$

此性质称为指数分布具有“无记忆性”.

定义 如果随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty$$

其中 μ, σ 为常数且 $\sigma > 0$, 则称 X 服从参数为 μ, σ 的正态分布, 记作 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

当 $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ 时, 即 $X \sim N(0, 1)$, 称 X 服从标准正态分布, 此时用 $\varphi(x)$ 表示 X 的概率密度, 即

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < +\infty$$

【注】 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其分布函数为

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

当 $X \sim N(0, 1)$ 时, 分布函数用 $\Phi(x)$ 表示

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

性质 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其分布函数为 $F(x)$, 则

$$(1) F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$(2) P\{a < X \leq b\} = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right), a < b.$$

(3) 概率密度 $f(x)$ 关于 $x = \mu$ 对称, $\varphi(x)$ 是偶函数.

$$(4) \Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

(5) 当 $X \sim N(0, 1)$ 且 $a > 0$ 时, $P\{|X| \leq a\} = 2\Phi(a) - 1$.

【例 3】 设随机变量 X_1 服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, X_2 服从正态分布 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 且 $P\{|X_1 - \mu_1| < 1\} > P\{|X_2 - \mu_2| < 1\}$, 则必有

$$(A) \sigma_1 < \sigma_2.$$

$$(B) \sigma_1 > \sigma_2.$$

$$(C) \mu_1 < \mu_2.$$

$$(D) \mu_1 > \mu_2.$$

【解】 $P\{|X_1 - \mu_1| < 1\} = P\left\{\left|\frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right| \leq \frac{1}{\sigma_1}\right\} = 2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right) - 1$

同理 $P\{|X_2 - \mu_2| < 1\} = 2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right) - 1$.

现有 $2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right) - 1 > 2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right) - 1$, 所以 $\frac{1}{\sigma_1} > \frac{1}{\sigma_2}$, 即 $\sigma_1 < \sigma_2$. 答案应选 (A).

第三节 随机变量函数的分布

设 X 是一个随机变量, 则它的函数 $Y = g(X)$ 也是随机变量.

当 X 是离散型随机变量时, 设 X 的分布律为 $P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \dots$, 显然 Y 也是离散型随机变量, 其分布律为 $P\{Y = g(x_k)\} = p_k, k = 1, 2, 3, \dots$, 如果在 $g(x_k)$ 中有相同的数值, 则将它们相应的概率和作为 Y 取该值的概率.

当 X 是连续型随机变量时, 设 X 的概率密度函数为 $f_X(x)$, 显然一般 Y 也是连续型随机变量, 记其概率密度为 $f_Y(y)$, 则常用两种方法来计算:

(1) 公式法 设 $y = g(x)$ 是单调函数, 导数不为零的可导函数, $h(y)$ 为它的反函数, 则

$$f_Y(y) = \begin{cases} |h'(y)| f_X(h(y)), & \alpha < y < \beta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 (α, β) 是函数 $g(x)$ 在 x 可能取值的区间上的值域.

(2) 定义法 先求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\} = \int_{g(x) \leq y} f_X(x) dx$$

然后 $f_Y(y) = F'_Y(y)$.

【评注】 一般说, 用公式法时, 应要求条件较多: 单调, 可导, 导数不为零, 反函数存在等. 实际求解比较麻烦. 用定义法时, 实际上就是求积分 $\int_{g(x) \leq y} f_X(x) dx$. 只要掌握好 y 变化的范围, 不同范围和不同积分限的求积就不难求得 $F_Y(y)$.

【例 1】 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt{x^2}}, & \text{若 } x \in [1, 8] \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$F(x)$ 是 X 的分布函数, 求随机变量 $Y = F(X)$ 的分布函数.

【解】 先求出 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \sqrt[3]{x} - 1, & 1 \leq x < 8 \\ 1, & 8 \leq x \end{cases}$

设 $Y = F(X)$ 的分布函数为 $F_Y(y)$. 显然 $0 \leq Y \leq 1$.

当 $y < 0$ 时, $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = 0$,

$$\begin{aligned} \text{当 } 0 \leq y \leq 1 \text{ 时, } F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{F(X) \leq y\} = P\{\sqrt[3]{X} - 1 \leq y\} \\ &= P\{X \leq (y+1)^3\} = F[(y+1)^3] \\ &= \sqrt[3]{(y+1)^3} - 1 = y; \end{aligned}$$

当 $1 < y$ 时, $F_Y(y) = 1$.

$$\text{故 } F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y, & 0 \leq y \leq 1 \\ 1, & 1 < y \end{cases}$$

【评注】 本题也可以用公式法求 $F_Y(y)$.

可以证明: 设连续型随机变量 X 的分布函数 $F(x)$, 则 $Y = F(X)$ 一定服从 $(0, 1)$ 上的均匀分布, 本题是这一结论的一个特例.

【例 2】 已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 求 $Y = X^2 + 1$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

【解】 $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X^2 + 1 \leq y\} = P\{X^2 \leq y - 1\}$

当 $y < 1$ 时, $F_Y(y) = 0$;

$$\begin{aligned} \text{当 } 1 \leq y \leq 2 \text{ 时, } F_Y(y) &= P\{X^2 \leq y - 1\} = P\{|X| \leq \sqrt{y - 1}\} = \int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} f(x)dx \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{y-1}} x dx = y - 1; \end{aligned}$$

当 $y > 2$ 时, $F_Y(y) = P\{X^2 \leq y - 1\} = 1$.

$$\text{总之 } F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ y - 1, & 1 \leq y \leq 2 \\ 1, & 2 < y \end{cases} \quad f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} 1, & 1 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

【例 3】 设随机变量 X 服从标准正态分布, 则随机变量 $Y = \max\{X, 2\}$ 的分布函数

(A) 是连续函数.

(B) 恰好有一个间断点.

(C) 至少有两个间断点.

(D) 是阶梯函数.

【解】 设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$. $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{\max\{X, 2\} \leq y\}$.

当 $y < 2$ 时, $F_Y(y) = 0$,

当 $y \geq 2$ 时, $F_Y(y) = P\{\max(X, 2) \leq y\} = P\{X \leq y, 2 \leq y\} = P\{X \leq y\} = \Phi(y)$,

$$\text{总之, } F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 2 \\ \Phi(y), & y \geq 2 \end{cases}$$

不难看出 Y 的分布函数 $F_Y(y)$ 恰好有一个间断点在 $y = 2$ 处, 答案应选 (B).

第三章 多维随机变量及其分布

。本章考点。

多维随机变量及其分布 二维离散型随机变量的概率分布、边缘分布和条件分布 二维连续型随机变量的概率密度、边缘概率密度和条件密度 随机变量的独立性和不相关性 常用二维随机变量的分布(二维均匀分布 二维正态分布 $N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$) 两个及两个以上随机变量简单函数的分布

第一节 二维随机变量及其分布

一、二维随机变量

考试大纲以二维随机变量及其分布为主,二维以上基本上不讨论。

定义 设 $X = X(\omega), Y = Y(\omega)$ 是定义在样本空间 Ω 上的两个随机变量,则称向量 (X, Y) 为二维随机变量,或随机向量。

定义 设二维随机变量 (X, Y) , 对任意实数 x, y , 二元函数

$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}, -\infty < x, y < +\infty$$

称为二维随机变量 (X, Y) 的分布函数,或称随机变量 X 和 Y 的联合分布函数。

分布函数 $F(x, y)$ 的性质:

- (1) 对任意 x, y , 均有 $0 \leq F(x, y) \leq 1$;
- (2) $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0, F(+\infty, +\infty) = 1$;
- (3) $F(x, y)$ 关于 x 和关于 y 均单调不减;
- (4) $F(x, y)$ 关于 x 和关于 y 是右连续的;
- (5) $P\{a < X \leq b, c < Y \leq d\} = F(b, d) + F(a, c) - F(b, c) - F(a, d)$.

二维随机变量 (X, Y) 的分布函数为 $F(x, y)$, 分别称 $F_X(x) = P\{X \leq x\}$ 和 $F_Y(y) = P\{Y \leq y\}$ 为 (X, Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布。

显然, 边缘分布 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$ 与二维随机变量 $F(x, y)$ 有如下关系:

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{X \leq x, y < +\infty\} = F(x, +\infty)$$

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X < +\infty, Y \leq y\} = F(+\infty, y)$$

【注】 这里 $F(x, +\infty)$ 应理解为 $\lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y)$ 。

【例 1】 设二维随机变量 (X, Y) 的分布函数为 $F(x, y)$, X 和 Y 的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$, 则概率 $P\{X > a, Y > b\} =$

(A) $1 - F(a, b)$.

(B) $1 - F_X(a) - F_Y(b)$.

(C) $1 - F_X(a) - F_Y(b) + F(a, b)$.

(D) $F(a, b) + F_X(a) + F_Y(b) - 1$.

【解】 根据分布函数性质

$$P\{a < X \leq c, b < Y \leq d\} = F(c, d) + F(a, b) - F(a, d) - F(c, b)$$

令 $c, d \rightarrow +\infty$ 就有

$$P\{a < X, b < Y\} = F(+\infty, +\infty) + F(a, b) - F(a, +\infty) - F(+\infty, b)$$

即 $P\{X > a, Y > b\} = 1 + F(a, b) - F_X(a) - F_Y(b)$. 答案应选(C).**定义** 如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, $P\{y - \varepsilon < Y \leq y + \varepsilon\} > 0$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} P\{X \leq x \mid y - \varepsilon < Y \leq y + \varepsilon\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{P\{X \leq x, y - \varepsilon < Y \leq y + \varepsilon\}}{P\{y - \varepsilon < Y \leq y + \varepsilon\}}$$

存在, 则称此极限为在条件 $Y = y$ 下 X 的条件分布, 记作 $F_{X|Y}(x | y)$ 或 $P\{X \leq x \mid Y = y\}$.类似地可定义 $F_{Y|X}(y | x)$.

二、二维离散型随机变量

定义 如果随机变量 (X, Y) 可能取值为有限个或可数无穷个 (x_i, y_j) , $i, j = 1, 2, \dots$, 则称 (X, Y) 为二维离散型随机变量.**定义** 二维离散型随机变量 (X, Y) 的可能取值为 (x_i, y_j) ($i, j = 1, 2, \dots$) 称

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots$$

为二维离散型随机变量 (X, Y) 的概率分布或分布律.**【注】** 也可以用表格形式表示分布律:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

性质 (1) $p_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \dots$;

(2) $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$.

定义 $p_{i\cdot} = P\{X = x_i\}$, $i = 1, 2, \dots$ 和 $p_{\cdot j} = P\{Y = y_j\}$, $j = 1, 2, \dots$ 分别被称为 (X, Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布.显然, 边缘分布 $p_{i\cdot}$ 和 $p_{\cdot j}$ 与二维概率分布 p_{ij} 有如下关系:

$$p_{i\cdot} = P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{+\infty} P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij} \quad i = 1, 2, \dots$$

$$p_{\cdot j} = P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{+\infty} P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{+\infty} p_{ij} \quad j = 1, 2, \dots$$

定义 对给定的 j , 如果 $P\{Y = y_j\} > 0$, $j = 1, 2, \dots$

则称

$$P\{X = x_i \mid Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, \quad i = 1, 2, \dots$$

为在 $Y = y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布.

【例 2】 袋中有 1 个红球, 2 个黑球与 3 个白球, 现有放回地从袋中取两次. 每次取一个球, 以 X 和 Y 分别表示两次取球所得红球和黑球个数.

试求 (1) 二维随机变量 (X, Y) 的概率分布;

(2) (X, Y) 的边缘分布;

(3) 在 $X = 1$ 条件下 Y 的条件分布.

【解】 (1) 首先确定 X 与 Y 的取值范围为 0, 1, 2. 每次取球 6 种可能, 二次共 36 种可能.

$$P\{X = 0, Y = 0\} = \frac{3 \times 3}{36} = \frac{1}{4}, P\{X = 0, Y = 1\} = \frac{3 \times 2 + 2 \times 3}{36} = \frac{1}{3},$$

$$P\{X = 0, Y = 2\} = \frac{2 \times 2}{36} = \frac{1}{9}, P\{X = 1, Y = 0\} = \frac{1 \times 3 + 3 \times 1}{36} = \frac{1}{6},$$

$$P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{1 \times 2 + 2 \times 1}{36} = \frac{1}{9}, P\{X = 1, Y = 2\} = 0,$$

$$P\{X = 2, Y = 0\} = \frac{1 \times 1}{36} = \frac{1}{36}, P\{X = 2, Y = 1\} = 0, P\{X = 2, Y = 2\} = 0,$$

总 (X, Y) 概率分布

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

微信公众账号【顶尖考研】
(ID: djky66)

$X \backslash Y$	0	1	2	$p_{i \cdot}$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{25}{36}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{5}{18}$
2	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{1}{36}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	

(2) 进一步有 边缘分布为

X	0	1	2
$p_{i \cdot}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{36}$
Y	0	1	2
$p_{\cdot j}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

$$(3) P\{Y = i | X = 1\} = \frac{P\{X = 1, Y = i\}}{P\{X = 1\}} \quad i = 0, 1, 2.$$

$$P\{X = 1\} = \frac{5}{18}, P\{Y = 0 | X = 1\} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{18}} = \frac{3}{5},$$

$$P\{Y = 1 | X = 1\} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{5}{18}} = \frac{2}{5},$$

$$P\{Y = 2 | X = 1\} = \frac{0}{\frac{5}{18}} = 0,$$

	Y	0	1	2
在 $X = 1$ 条件下 Y 的条件分布	$P\{Y = i X = 1\}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	0

三、二维连续型随机变量

定义 如果对随机变量 (X, Y) 的分布 $F(x, y)$ 存在非负函数 $f(x, y)$, 使得对于任意实数 x 和 y , 都有

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv, \quad -\infty < x, y < +\infty$$

则称 (X, Y) 为二维连续型随机变量, 函数 $f(x, y)$ 称为 (X, Y) 的概率密度, 或称为随机变量 X 和 Y 的联合概率密度.

概率密度 $f(x, y)$ 的性质:

(1) $f(x, y) \geq 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$;

(3) 随机变量 (X, Y) 落在区域 D 内的概率

$$P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f(x, y) dx dy$$

【例 3】 设二维连续型随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} k(x+y), & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则常数 $k =$ _____.

【解】 由概率密度的性质,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x k(x+y) dy = k \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{2}x^2\right) dx = \frac{k}{2} = 1$$

所以 $k = 2$.

对连续型随机变量 (X, Y) , 设它的概率密度为 $f(x, y)$, 由

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^x \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \right] dx$$

知道, X 也是一个连续型变量, 且其概率密度为 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$.

定义 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$ 和 $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$ 分别称为 (X, Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘密度.

定义 设 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 连续, $f_Y(y)$ 连续且 $f_Y(y) > 0$, 则条件分布

$$F_{X|Y}(x | y) = \int_{-\infty}^x \frac{f(s, y)}{f_Y(y)} ds$$

其中 $\frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$ 被称为在条件 $Y = y$ 下的条件密度, 记作 $f_{X|Y}(x | y)$, 即

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}, f_Y(y) > 0$$

类似可定义,当 $f_X(x) > 0$ 时,

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \text{ 和 } F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^y \frac{f(x,s)}{f_X(x)} ds$$

【例 4】 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} 2(x+y), & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

试求 (1) $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$;

(2) $f_{X|Y}(x|y)$ 和 $f_{Y|X}(y|x)$.

【解】 (1) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy, f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx$.

当 $x \leq 0$ 时, $f_X(x) = 0$,

当 $0 < x < 1$ 时, $f_X(x) = \int_0^x 2(x+y) dy = 3x^2$,

当 $x \geq 1$ 时, $f_X(x) = 0$,

总之 $f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

同理 $f_Y(y) = \begin{cases} \int_y^1 2(x+y) dx, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} 1+2y-3y^2, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

(2) $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, f_Y(y) > 0$ 即 $0 < y < 1$.

故当 $0 < y < 1$ 时, $f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{2(x+y)}{1+2y-3y^2}, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

同理当 $0 < x < 1$ 时, $f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{2(x+y)}{3x^2}, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

【例 5】 设 (X,Y) 是二维随机变量, X 的边缘密度为 $f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 在给定

$X = x (0 < x < 1)$ 的条件下, Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{3y^2}{x^3}, & 0 < y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求 (X,Y) 的概率密度 $f(x,y)$;

(2) 求 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$;

(3) 求 $P\{X > 2Y\}$.

【解】 (1) $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$, 其中 $f_X(x) > 0$.

现 $f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 和 $f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{3y^2}{x^3}, & 0 < y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$,

所以当 $0 < x < 1$ 时, 也就是 $f_X(x) > 0$ 时,

$$f(x, y) = f_X(x)f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{9y^2}{x}, & 0 < y < x, 0 < x < 1. \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

这样得到的 $f(x, y)$ 是定义在 $0 < x < 1, -\infty < y < +\infty$ 范围上的 $f(x, y)$. 如图 1. 但 $f(x, y)$ 是定义在全平面: $-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$ 范围上的.

$$\text{已知 } \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1.$$

$$\text{现 } \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{9y^2}{x} dy = \int_0^1 3x^2 dx = 1.$$

因此, 我们有理由确定在 $0 < x < 1, -\infty < y < +\infty$ 以外的平面上 $f(x, y) \equiv 0$.

$$\text{最后可以将 } f(x, y) = \begin{cases} \frac{9y^2}{x}, & 0 < y < x, 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \text{ 延拓成}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{9y^2}{x}, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

【注】 本题解题过程中用了四个“其他”, 这四个“其他”的含意是不同的, 应该加以区分.

本题是 2013 年数学三的考题, 很多考生错误地把本题直接解成:

$$f(x, y) = f_X(x)f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{9y^2}{x}, & 0 < y < x, 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

这种写法的问题是第一个等号成立条件是 $0 < x < 1$, 因为 $f_{Y|X}(y|x)$ 只有在 $0 < x < 1$ 时才有定义, 而第二个等号要求包括 $0 < x < 1$ 以外的全部平面.

$$(2) f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_y^1 \frac{9y^2}{x} dx, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -9y^2 \ln y, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (3) P\{X > 2Y\} &= \iint_{x > 2y} f(x, y) dx dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{9y^2}{x} dy \\ &= \int_0^1 \frac{3x^2}{8} dx = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

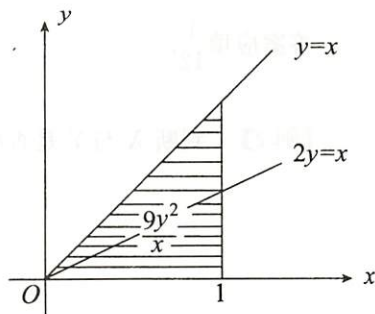


图 1

第二节 随机变量的独立性

定义 如果对任意 x, y 都有

$$P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\}P\{Y \leq y\}$$

即

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

则称随机变量 X 与 Y 相互独立.

离散型随机变量 X 和 Y 相互独立的充要条件: 对任意 $i, j = 1, 2, \dots$ 成立

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}$$

即 $p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$.

连续型随机变量 X 和 Y 相互独立的充要条件: 对任意的 x, y , 成立

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

【注】 可将两个随机变量的独立性推广到两个以上随机变量的情形.

【例 1】 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 已知 (X, Y) 的联合分布部分数值

X \ Y	1	2
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
2		

则 $P\{X = 2, Y = 1\} =$ _____.

【解】 记 $P\{X = i, Y = j\} = p_{ij}, i, j = 1, 2$,

题给条件 $p_{11} = \frac{1}{6}, p_{12} = \frac{1}{2}$, 故 $p_{1\cdot} = p_{11} + p_{12} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$,

又根据 X 和 Y 相互独立, 可知

$$p_{11} = p_{1\cdot} \cdot p_{\cdot 1} \quad \text{即} \quad \frac{1}{6} = \frac{2}{3} p_{\cdot 1}, \text{解得 } p_{\cdot 1} = \frac{1}{4}.$$

现要求 $P\{X = 2, Y = 1\} = p_{21} = p_{2\cdot} \cdot p_{\cdot 1} = (1 - p_{1\cdot}) \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

答案应填 $\frac{1}{12}$.

【例 2】 判断 X 与 Y 是否相互独立? 已知 (X, Y) 的分布律为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

【解】 先求出边缘分布

X \ Y	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{25}{36}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{5}{18}$
2	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{1}{36}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	

如果 X 与 Y 相互独立, 则应该对任意的 i, j 都有 $p_{ij} = p_{i\cdot} p_{\cdot j}$, 现在 $P\{X=1, Y=2\} = 0$ 而 $P\{X=1\}P\{Y=2\} = \frac{5}{18} \cdot \frac{1}{9} \neq 0$, 故 X 与 Y 是不相互独立的.

从这个例子可以看出凡是边缘分布均不为零, 而联合分布的某个 $p_{ij} = 0$, 则必可断定联合分布所对应的两个随机变量是不相互独立的.

一般给定边缘分布均不为零, 所以看到联合分布律中只要有一个 $p_{ij} = 0$ 则 X 和 Y 就一定不独立. 反之, 如果所有的 $p_{ij} \neq 0$, 并不能保证 X 和 Y 相互独立.

【例 3】 设随机变量 X 与 Y 相互独立且同分布, 已知 $\begin{array}{c|ccc} X & 0 & 1 & 2 \\ \hline P & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}$, 则 $P\{X \geq Y\} =$ _____.

【解】 根据 X 与 Y 独立就有 $p_{ij} = p_{i\cdot} p_{\cdot j}$ 可以求出联合分布律.

$X \backslash Y$	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0				$\frac{1}{4}$
1				$\frac{1}{2}$
2				$\frac{1}{4}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

 $\rightarrow$

$X \backslash Y$	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

$$P\{X \geq Y\} = 1 - P\{X < Y\} = 1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} \right) = \frac{11}{16}.$$

答案应填 $\frac{11}{16}$.

第三节 二维均匀分布和二维正态分布

定义 如果二维连续型随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{A}, & (x, y) \in G \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 A 是平面有界区域 G 的面积, 则称 (X, Y) 服从区域 G 上的均匀分布.

设 (X, Y) 在 G 上服从均匀分布, D 是 G 中的一个部分区域, 记它们的面积分别为 S_D 和 S_G , 则 $P\{(X, Y) \in D\} = \frac{S_D}{S_G}$.

【例 1】 设随机变量 (X, Y) 在 $D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ 上均匀分布, (X, Y) 的分布函数为 $F(x, y)$. 则成立 $F(\frac{1}{2}, y) = \frac{3}{4}$, y 的充要条件是_____.

【解】 显然 $F(\frac{1}{2}, y) = P\{X \leq \frac{1}{2}, Y \leq y\} = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy$,

其中 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{A}, & (x, y) \in D \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

A 是 D 的面积. $A = \frac{1}{2}$.

$$F\left(\frac{1}{2}, y\right) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y, & 0 \leq y < \frac{1}{2} \\ -y^2 + 2y - \frac{1}{4}, & \frac{1}{2} \leq y < 1 \\ \frac{3}{4}, & 1 \leq y \end{cases}$$

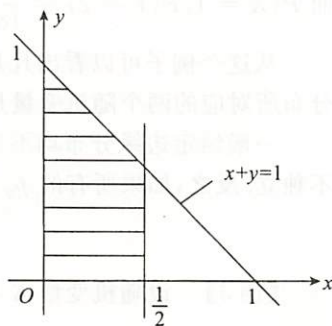


图 2

所以成立 $F(\frac{1}{2}, y) = \frac{3}{4}$, y 的充要条件为 $y \geq 1$.

答案应填 $y \geq 1$.

【评注】 $F(\frac{1}{2}, y) = P\{X \leq \frac{1}{2}, Y \leq y\}$ 根据均匀分布的性质. 图 2 中阴影部分已占了区域 D 的 $\frac{3}{4}$, 就直接可以判定 $y \geq 1$ 是 $F(\frac{1}{2}, y) = \frac{3}{4}$ 的充要条件.

【例 2】 设二维连续型随机变量 (X, Y) 在区域 D 上服从均匀分布, 其中

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

求 (1) X 的边缘密度 $f_X(x)$;

(2) 条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

【解】 (1) 区域 D 是半径为 1 的单位圆, 其面积应为 π .

因此, (X, Y) 的联合密度 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dy, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

(2) $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$, $f_X(x) > 0$, 即 $-1 < x < 1$.

所以当 $-1 < x < 1$ 时, $f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}, & -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

【例 3】 设二维随机变量 (X, Y) 服从区域 G 上的均匀分布, 其中 $G = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 2\}$.

求(1)(X,Y)的联合概率密度 $f(x,y)$;

(2)X 的概率密度 $f_X(x)$ 和 Y 的概率密度 $f_Y(y)$;

(3) 条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 和 $f_{Y|X}(y|x)$.

【解】 (1) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{A}, & (x,y) \in G, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 其中 A 是区域 G 的面积.

显然 $A = 2$, 所以 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

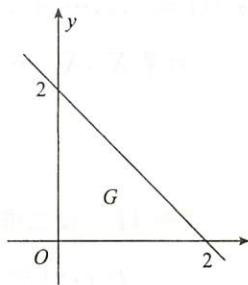


图 3

$$(2) f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy$$

$$= \begin{cases} \int_0^{2-x} \frac{1}{2} dy, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2-x}{2}, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx = \begin{cases} \int_0^{2-y} \frac{1}{2} dx, & 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2-y}{2}, & 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$(3) \text{ 当 } f_Y(y) > 0 \text{ 时, } f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

$$\text{即 } 0 \leq y < 2 \text{ 时, } f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{1}{2-y}, & 0 \leq x \leq 2-y \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

也就是说:在 $0 \leq y < 2$ 时, $f_{X|Y}(x|y)$ 是在 $[0, 2-y]$ 上均匀分布概率密度.

根据对称性,也可以说:在 $X = x(0 \leq x \leq 2)$ 的条件下,随机变量 Y 在区间 $[0, 2-x]$ 内服从均匀分布.

$$0 \leq x < 2 \text{ 时, } f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{2-x}, & 0 \leq y \leq 2-x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

定义 如果二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right),$$

$$-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$$

其中 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1$ 均为常数, $\exp(x)$ 表示 e^x , 则称 (X,Y) 服从参数为 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$ 和 ρ 的二维正态分布, 记作 $(X,Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$.

性质 设 $(X,Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$, 则

(1) $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$;

(2) X 与 Y 相互独立的充分必要条件是 $\rho = 0$.

【注】 如果 (X,Y) 二维正态可保证 X 与 Y 均正态, 反之则不能成立, 即已知 X 与 Y 均正态, 并不能保证 (X,Y) 正态.

(3) $aX + bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + 2ab\sigma_1\sigma_2\rho + b^2\sigma_2^2)$.

(4) 当 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ 时, $(aX + bY, cX + dY)$ 也一定为二维正态.

【注】 在今后的数理统计中, 常有随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立, 且 $X_i \sim N(\mu,$

$\sigma^2)(i=1,2,\cdots,n)$, 则有 $\sum_{i=1}^n c_i X_i \sim N(\sum_{i=1}^n c_i \mu_i, \sum_{j=1}^n c_j^2 \sigma_j^2)$.

如果 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立且 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)(i=1,2,\cdots,n)$, 则有

$$\sum_{i=1}^n c_i X_i \sim N(\sum_{i=1}^n c_i \mu_i, \sum_{j=1}^n c_j^2 \sigma_j^2)$$

【例 4】 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \frac{1 + \sin x \sin y}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$$

则关于 X 的边缘概率密度 $f_X(x) =$ _____.

$$\begin{aligned} \text{【解】 } f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \sin x \sin y}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \sin x \sin y}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \frac{\sin x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin y e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{2\pi}} \cdot 0 \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < +\infty \end{aligned}$$

答案应填 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

【评注】 显然 $X \sim N(0, 1)$, 同理 $Y \sim N(0, 1)$.

本题给出一个例子, X 与 Y 均服从标准正态, 但 (X, Y) 不是二维正态分布.

【例 5】 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-2x^2+2xy-y^2}, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$$

则条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x) =$ _____.

【解】 方法一 $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}, f_X(x) > 0$.

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \frac{1}{\pi} e^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2} dy = \frac{1}{\pi} e^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \quad -\infty < x < +\infty \end{aligned}$$

对任意 $x, f_X(x) > 0$ 所以 $f_{Y|X}(y|x) = \frac{\frac{1}{\pi} e^{-2x^2+2xy-y^2}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(y-x)^2}, -\infty < y < +\infty$.

答案应填 $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(y-x)^2}, -\infty < y < +\infty$.

方法二 二维正态概率密度一般形式为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right),$$

$-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty, \exp(x)$ 表示 e^x .

对比本题所给二维密度 $f(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-2x^2 + 2xy - y^2}$, 可知 $f(x, y)$ 也是二维正态概率密度,

且 $\mu_1 = \mu_2 = 0$ 成立

$$\begin{cases} \frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2} = 2 \\ \frac{\rho}{2(1-\rho^2)\sigma_1\sigma_2} = 2, \text{由此解得} \\ \frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2} = 1 \end{cases} \begin{cases} \rho = \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \sigma_2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{边缘密度 } f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, -\infty < x < +\infty,$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{\pi} e^{-2x^2 + 2xy - y^2}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(y-x)^2}, -\infty < y < +\infty$$

第四节 两个随机变量函数 $Z = g(X, Y)$ 的分布

两个随机变量函数的分布, 介绍几个简单函数的分布.

一、 X, Y 均为离散型随机变量

$Z = g(X, Y)$ 的分布律的求法与一维离散型类似.

【例 1】 设随机变量 X 和 Y 相互独立, X 与 Y 均服从分布 $B(1, p)$, 求随机变量 $Z = X + Y$ 的分布.

【解】 X 和 Y 取值均为 0, 1, 所以 $Z = X + Y$ 的取值范围为 0, 1, 2.

$$\begin{aligned} P\{Z=0\} &= P\{X+Y=0\} = P\{X=0, Y=0\} = P\{X=0\}P\{Y=0\} \\ &= (1-p) \cdot (1-p) = (1-p)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{Z=1\} &= P\{X+Y=1\} = P\{X=0, Y=1\} + P\{X=1, Y=0\} \\ &= P\{X=0\}P\{Y=1\} + P\{X=1\}P\{Y=0\} = (1-p) \cdot p + p \cdot (1-p) \\ &= 2p(1-p). \end{aligned}$$

$$P\{Z=2\} = P\{X+Y=2\} = P\{X=1, Y=1\} = P\{X=1\}P\{Y=1\} = p \cdot p = p^2.$$

总之, $P\{Z=k\} = C_2^k p^k (1-p)^{2-k}, k=0, 1, 2.$

即 Z 服从 $B(2, p)$ 分布.

二、 X, Y 均为连续型随机变量

$$\text{可用公式 } F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{g(X, Y) \leq z\} = \iint_{g(x, y) \leq z} f(x, y) dx dy.$$

【例 2】 $Z = X + Y$ 的分布

设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, 则 $Z = X + Y$ 的分布函数

$$\begin{aligned}
 F_Z(z) &= P\{X+Y \leq z\} = \iint_{x+y \leq z} f(x,y) dx dy \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f(x,y) dy \quad (\text{或} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{z-y} f(x,y) dx)
 \end{aligned}$$

由此可得 $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx$$

或

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) dy$$

特别是当 X 和 Y 相互独立时, $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$, 则

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$$

或

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy$$

这两个公式称为卷积公式, 记为 $f_Z = f_X * f_Y$.

三、 X 为离散型随机变量, Y 为连续型随机变量

一般对离散型随机变量 X 的各种可能取值用全概率公式把它们展开, 如下:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

Y 为连续型, $Z = g(X, Y)$ 则

$$\begin{aligned}
 F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} = P\{g(X, Y) \leq z\} \\
 &= \sum_i P\{X = x_i\} P\{g(X, Y) \leq z \mid X = x_i\} \\
 &= \sum_i p_i P\{g(x_i, Y) \leq z \mid X = x_i\}
 \end{aligned}$$

【例3】 设随机变量 X 和 Y 相互独立, X 服从标准正态分布, Y 在区间 $[-1, 1]$ 上服从均匀分布, 求随机变量 $Z = X + Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

【解】 X 和 Y 的概率密度分别为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < +\infty; f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

由于 X 和 Y 相互独立, 根据卷积公式, 可得 $Z = X + Y$ 的概率密度

$$\begin{aligned}
 f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy = \int_{-1}^1 f_X(z-y) \frac{1}{2} dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-y)^2}{2}} dy = \frac{1}{2} \int_{z-1}^{z+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\Phi(z+1) - \Phi(z-1)}{2}
 \end{aligned}$$

设 X, Y 是两个相互独立的随机变量, 它们的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$.

$Z = \max\{X, Y\}$ 的分布

由 $\max\{X, Y\}$ 不大于 z 等价于 X 和 Y 都不大于 z , 即

$$P\{Z \leq z\} = P\{X \leq z, Y \leq z\}$$

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{X \leq z, Y \leq z\} = P\{X \leq z\}P\{Y \leq z\} = F_X(z)F_Y(z)$$

$Z = \min\{X, Y\}$ 的分布

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = 1 - P\{Z > z\}$$

$$= 1 - P\{X > z, Y > z\} = 1 - P\{X > z\}P\{Y > z\}$$

$$= 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z))$$

以上结果可以推广至 n 个相互独立的随机变量.

【例 4】 设相互独立的随机变量 X_i 的分布函数为 $F_i(x)$, 概率密度为 $f_i(x)$, $i = 1, 2$. 则随机变量 $Y = \max\{X_1, X_2\}$ 的概率密度为

(A) $f_1(x)f_2(x)$.

(B) $f_1(x) + f_2(x)$.

(C) $f_1(x)F_1(x) + f_2(x)F_2(x)$.

(D) $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$.

【解】 $Y = \max\{X_1, X_2\}$, Y 的分布函数

$$F_Y(x) = P\{Y \leq x\} = P\{\max\{X_1, X_2\} \leq x\} = P\{X_1 \leq x, X_2 \leq x\}$$

$$= P\{X_1 \leq x\}P\{X_2 \leq x\} = F_1(x)F_2(x)$$

$$Y \text{ 的概率密度 } f_Y(y) = F'_Y(y) = f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$$

答案应选(D).

【例 5】 设随机变量 X 与 Y 相互独立. $X \sim E(\lambda_1)$, $Y \sim E(\lambda_2)$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. 令 $Z = \min\{X, Y\}$, 求 Z 的概率密度函数 $f_Z(z)$.

【解】 方法一 $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{\min\{X, Y\} \leq z\} = 1 - P\{\min(X, Y) > z\}$
 $= 1 - P\{X > z, Y > z\} = 1 - P\{X > z\}P\{Y > z\}$
 $= 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)]$
 $= F_X(z) + F_Y(z) - F_X(z)F_Y(z)$

$$\begin{aligned} z > 0 \text{ 时, } f_Z(z) &= F'_Z(z) = f_X(z) + f_Y(z) - f_X(z)F_Y(z) - F_X(z)f_Y(z) \\ &= \lambda_1 e^{-\lambda_1 z} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 z}(1 - e^{-\lambda_2 z}) - \lambda_2 e^{-\lambda_2 z}(1 - e^{-\lambda_1 z}) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)z} \end{aligned}$$

$$z \leq 0 \text{ 时 } f_Z(z) = 0, \text{ 故 } Z \sim E(\lambda_1 + \lambda_2).$$

方法二 $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{\min\{X, Y\} \leq z\} = P\{X \leq z \cup Y \leq z\}$
 $= P\{X \leq z\} + P\{Y \leq z\} - P\{X \leq z, Y \leq z\}$
 $= F_X(z) + F_Y(z) - F_X(z)F_Y(z)$

同方法一不难得出 $Z \sim E(\lambda_1 + \lambda_2)$.

方法三 $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{\min\{X, Y\} \leq z\} = 1 - P\{\min(X, Y) > z\}$
 $= 1 - P\{X > z, Y > z\} = 1 - P\{X > z\}P\{Y > z\}$
 $= \begin{cases} 1 - e^{-\lambda_1 z}e^{-\lambda_2 z}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)z}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$
 $f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} (\lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)z}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$
 $Z \sim E(\lambda_1 + \lambda_2).$

【例 6】 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求 $P\{X > 2Y\}$;

(2) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

【解】 (1) 如图 4, $P\{X > 2Y\} = \iint_{x > 2y} f(x, y) dx dy$

$$= \iint_D (2 - x - y) dx dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1}{2}x} (2 - x - y) dy$$

$$= \int_0^1 (x - \frac{5}{8}x^2) dx = \frac{7}{24}$$

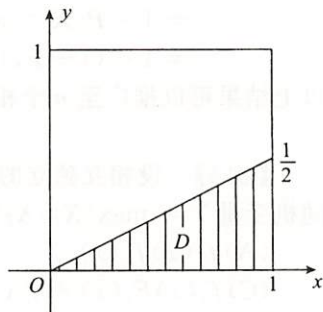


图 4

(2) 方法一 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx$

先考虑被积函数 $f(x, z-x)$ 中第一个自变量 x 的变化范围, 只有当 $0 < x < 1$ 时, $f(x, z-x)$ 才不等于 0, 因此

$$f_Z(z) = \int_0^1 f(x, z-x) dx$$

再考虑被积函数 $f(x, z-x)$ 中第二个变量 $z-x$, 也只有当 $0 < z-x < 1$ 时, $f(x, z-x)$ 不为 0, 其值为 $2 - x - (z-x) = 2 - z$. 因此, 将 z 分段讨论 $f_Z(z)$ 的值:

当 $z \leq 0$ 时, 由于 $0 < x < 1$, 故 $z-x < 0$ 所以 $f_Z(z) = 0$;

当 $0 < z \leq 1$ 时, $f_Z(z) = \int_0^z (2-z) dx = 2z - z^2$;

当 $1 < z \leq 2$ 时, $f_Z(z) = \int_{z-1}^1 (2-z) dx = 4 - 4z + z^2$;

当 $2 < z$ 时, 由于 $0 < x < 1$, 故 $z-x > 1$, 所以 $f_Z(z) = 0$.

$$\text{总之 } f_Z(z) = \begin{cases} 2z - z^2, & 0 < z \leq 1 \\ 4 - 4z + z^2, & 1 < z \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

方法二 如图 5, $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{X+Y \leq z\}$

$$= \iint_{x+y \leq z} f(x, y) dx dy$$

$z \leq 0$ 时, $F_Z(z) = 0$;

$0 < z \leq 1$ 时, $F_Z(z) = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy$

$$= \int_0^z dx \int_0^{z-x} (2-x-y) dy = z^2 - \frac{1}{3}z^3;$$

$1 < z \leq 2$ 时, $F_Z(z) = 1 - \iint_{x+y > z} f(x, y) dx dy$

$$= 1 - \iint_{D_2} f(x, y) dx dy = 1 - \int_{z-1}^1 dx \int_{z-x}^1 (2-x-y) dy$$

$$= \frac{1}{3}z^3 - 2z^2 + 4z - \frac{5}{3};$$

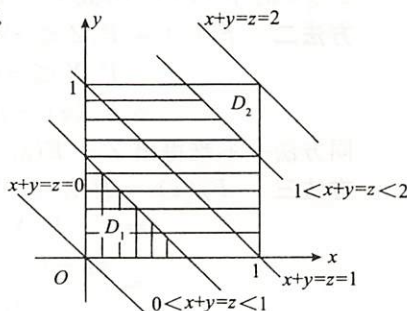


图 5

$2 < z$ 时, $F_Z(z) = 1$.

$$\text{所以 } f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} 2z - z^2, & 0 < z \leq 1 \\ 4 - 4z + z^2, & 1 < z \leq 2. \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

【例 7】 设二维随机变量 (X, Y) 服从正态分布 $N(1, 0; 1, 1; 0)$, 则 $P\{XY - Y < 0\} =$ _____.

【解】 $(X, Y) \sim N(1, 0; 1, 1; 0)$, 所以 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim N(1, 1), Y \sim N(0, 1)$. 也就有 $(X-1) \sim N(0, 1)$ 与 Y 相互独立.

根据正态分布密度的对称性, 有

$$P\{X-1 < 0\} = P\{X-1 > 0\} = P\{Y < 0\} = P\{Y > 0\} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} P\{XY - Y < 0\} &= P\{(X-1)Y < 0\} \\ &= P\{X-1 < 0, Y > 0\} + P\{X-1 > 0, Y < 0\} \\ &= P\{X-1 < 0\}P\{Y > 0\} + P\{X-1 > 0\}P\{Y < 0\} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

答案应填 $\frac{1}{2}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

在所阅读的书集中找出可以把自己引到深处的东西, 把其他一切统统抛掉, 就是抛掉使头脑负担过重和会把自己诱离要点的一切。

——爱因斯坦



第四章 随机变量的数字特征

。 本章考点 。

随机变量的数学期望(均值)、方差、标准差及其性质 随机变量函数的数学期望、矩、协方差、相关系数及其性质

第一节 随机变量的数学期望和方差

定义 (1) 离散型随机变量的数学期望

设随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

如果级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$ 绝对收敛, 则称此级数为随机变量 X 的数学期望或均值, 记作 $E(X)$,

$$\text{即 } E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k.$$

(2) 连续型随机变量的数学期望

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$, 如果积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ 绝对收敛, 则称此积分为随机变量 X 的数学期望或均值, 记作 $E(X)$, 即

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

【例1】 3双不同的鞋共6只, 现从中一次一个地随机抽取, 试问平均抽取几次才能凑成一双.

【解】 设 X 为配成一双所需抽取次数. 显然 X 的可能取值为 2, 3, 4.

$X = 2$ 时, 其概率: 第一次抽取有 6 种, 第二次取有 5 种, 总共 6×5 种, 要配成一双第一次取 6 种, 第二次就只能取与第一次取到的同一双的另一只, 有 6×1 种

$$P\{X = 2\} = \frac{6 \times 1}{6 \times 5} = \frac{1}{5};$$

$X = 3$ 时, 总的取三只鞋的取法有 $6 \times 5 \times 4$ 种.

第一次随机取有 6 种, 第二次再取是从余下 5 只中与第一次取到配对除外, 还有 4 只, 有 4 种. 第三次取时, 只能从第一, 第二配对的两只中任取一只.

$$P\{X = 3\} = \frac{6 \times 4 \times 2}{6 \times 5 \times 4} = \frac{2}{5},$$

$$P\{X=4\} = 1 - P\{X=2\} - P\{X=3\} = \frac{2}{5}.$$

$$\text{或者直接计算 } P\{X=4\} = \frac{6 \times 4 \times 2 \times 3}{6 \times 5 \times 4 \times 3} = \frac{2}{5}.$$

总之 X 的分布律为

X	2	3	4
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

$$\text{平均抽取次数 } EX = 2 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{2}{5} + 4 \times \frac{2}{5} = \frac{16}{5}.$$

【例 2】 设随机变量 X 的概率密度 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^n}{n!} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$, 求 EX .

【解】 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{n!} e^{-x} dx = 1$, 即 $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{x^n}{n!} e^{-x} dx = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} x^{n+1} e^{-x} dx = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1.$$

性质 (1) 设 C 是常数, 则有 $E(C) = C$.

(2) 设 X 是随机变量, C 是常数, 则有

$$E(CX) = CE(X)$$

(3) 设 X 和 Y 是任意两个随机变量, 则有

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$$

(4) 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 则有

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

【注】 性质(4) 要求 X 和 Y 的相互独立, 可以减弱为 X 和 Y 不相关就有 $E(XY) = E(X)E(Y)$. 事实上 $E(XY) = E(X)E(Y)$ 成立的充要条件是 X 和 Y 不相关.

【例 3】 设随机变量 X 的密度为 $f(x)$, 数学期望 $E(X) = 0$, 则必有

$$(A) \int_0^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{2}.$$

$$(B) \int_0^{+\infty} x f(x) dx = \frac{1}{2}.$$

$$(C) \int_0^{+\infty} x[f(x) + f(-x)] dx = 0.$$

$$(D) \int_0^{+\infty} x[f(x) - f(-x)] dx = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{【解】 } EX &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x f(x) dx + \int_0^{+\infty} x f(x) dx \\ &= \int_{+\infty}^0 (-t) f(-t) d(-t) + \int_0^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} -t f(-t) dt + \int_0^{+\infty} x f(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} x[f(x) - f(-x)] dx = 0. \end{aligned}$$

答案应选(D).

定理 (1) 设随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \dots$$

如果级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} g(x_k) p_k$ 绝对收敛, 则随机变量 $Y = g(X)$ 的数学期望为

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_{k=1}^{+\infty} g(x_k) p_k$$

(2) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$, 如果积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$ 绝对收敛, 则随机变量 $Y = g(X)$ 的数学期望为

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

定理 (1) 设随机变量 (X, Y) 的概率分布为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i, j = 1, 2, \dots$$

如果级数 $\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} g(x_i, y_j) p_{ij}$ 绝对收敛, 则随机变量 $Z = g(X, Y)$ 的数学期望为

$$E(Z) = E[g(X, Y)] = \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} g(x_i, y_j) p_{ij}$$

(2) 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, 如果积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$ 绝对收敛, 则随机变量 $Z = g(X, Y)$ 的数学期望为

$$E(Z) = E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$$

【例 4】 设随机变量 X 服从 $P(\lambda)$, 则随机变量 $Y = \frac{1}{1+X}$ 的数学期望 $EY =$ _____.

【解】 X 服从泊松分布 $P(\lambda)$, $P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{1+X}, E(Y) = E\left(\frac{1}{1+X}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{1+k} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k+1)!} e^{-\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} - e^{-\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda}). \end{aligned}$$

答案应填 $\frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda})$.

【例 5】 设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0, 1)$, 则 $E(e^{2X}) =$ _____.

【解】 由随机变量函数的数学期望公式

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

现在

$$f(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } E(e^{2X}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2-4x+4}{2}} dx \\ &= e^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}} dx \end{aligned}$$

积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}} dx$ 可以直接求积, 也可以看成是正态分布 $N(2, 1)$ 的密度函数积分等于 1 而不必直接求积, 所以答案应填 e^2 .

【例 6】某商店销售节日商品每公斤可获利 8 元. 节后只能削价处理, 每公斤就要亏损 2 元. 根据往年经验节日商品销售量 X 是一个在 $[100, 200]$ 上均匀分布的随机变量. 问节前应进多少公斤这种商品才可以使商店的利润期望值最大?

【解】 设进货量为 y (公斤), 利润为 Z (元). 显然, 利润与 X 和 y 有关系.

如果进货量 y 比节日销售量 X 小, 商品节日期间全销完, 利润为 $8y$.

如果进货量 y 比节日销售量 X 大, 有利润 $8X$, 还剩 $(y - X)$ 公斤商品节后再销, 亏损 $2(y - X)$. 所以实际利润 $8X - 2(y - X) = 10X - 2y$.

总之 $Z = \begin{cases} 8y, & X \geq y \\ 10X - 2y, & X < y \end{cases}$, 其中 $100 \leq y \leq 200$. $X \sim U[100, 200]$

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_{100}^y (10x - 2y) \frac{1}{100} dx + \int_y^{200} 8y \frac{1}{100} dx \\ &= \frac{1}{100} [(5y^2 - 50000) - 2y(y - 100)] + \frac{8}{100} y(200 - y) \\ &= \frac{1}{100} (-5y^2 + 1800y - 50000). \end{aligned}$$

$\frac{dE(Z)}{dy} = \frac{1}{100} (-10y + 1800) = 0$, 解得 $y = 180$, 显然 $y = 180$ 是 $E(Z)$ 的最大值. 故节前应进节日商品 180 (公斤).

定义 设 X 是随机变量, 如果数学期望 $E\{[X - E(X)]^2\}$ 存在, 则称之为 X 的方差, 记作 $D(X)$, 即

$$D(X) = E\{[X - E(X)]^2\}$$

称 $\sqrt{D(X)}$ 为随机变量 X 的标准差或均方差, 记作 $\sigma(X)$, 即 $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

性质 (1) 设 C 是常数, 则 $D(C) = 0$, 反之, 从 $D(X) = 0$ 不能得出 X 为常数的结论.

(2) 设 X 是随机变量, a 和 b 是常数, 则有

$$D(aX + b) = a^2 D(X)$$

(3) 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 则有

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$$

【注】 性质(3) 要求 X 和 Y 相互独立, 可以减弱为 X 和 Y 不相关就有 $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$. 事实上 $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$ 成立的充要条件是 X 和 Y 不相关.

随机变量 X 的方差计算公式

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\begin{aligned} D(X) &= E\{[X - E(X)]^2\} = E\{X^2 - 2XE(X) + [E(X)]^2\} \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2. \end{aligned}$$

由于对任何随机变量 X , $D(X) \geq 0$, 故恒有

$$E(X^2) \geq [E(X)]^2$$

有时在已知 X 的数学期望与方差时, 还用此公式求 $E(X^2)$.

【例 7】 已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $-\infty < x < +\infty$, 则 $D(X^2) =$

(A) 20.

(B) 22.

(C) 24.

(D) 28.

【解】 $D(X^2) = E(X^4) - [E(X^2)]^2$. 利用公式 $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$.

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = 2! = 2$$

$$E(X^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \int_0^{+\infty} x^4 e^{-x} dx = 4! = 24$$

$$D(X^2) = 24 - (2)^2 = 20$$

答案应选(A).

常用随机变量的数学期望和方差

(1) 0-1 分布

$$E(X) = p, \quad D(X) = p(1-p).$$

(2) 二项分布, $X \sim B(n, p)$

$$E(X) = np, \quad D(X) = np(1-p).$$

(3) 泊松分布, $X \sim P(\lambda)$

$$E(X) = \lambda, \quad D(X) = \lambda.$$

(4) 几何分布, $P\{X = k\} = p(1-p)^{k-1}, k = 1, 2, \dots, 0 < p < 1.$

$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad D(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

(5) 均匀分布, $X \sim U(a, b)$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

(6) 指数分布, $X \sim E(\lambda)$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

(7) 正态分布, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$E(X) = \mu, \quad D(X) = \sigma^2.$$

第二节 矩、协方差和相关系数

定义 (1) 设 X 是随机变量, 如果

$$E(X^k), \quad k = 1, 2, \dots$$

存在, 则称之为 X 的 k 阶原点矩.

(2) 设 X 是随机变量, 如果

$$E\{[X - E(X)]^k\}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

存在, 则称之为 X 的 k 阶中心矩.

(3) 设 X 和 Y 是两个随机变量, 如果

$$E(X^k Y^l), \quad k, l = 1, 2, \dots$$

存在, 则称之为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合矩.

(4) 设 X 和 Y 是两个随机变量, 如果

$$E\{[X - E(X)]^k [Y - E(Y)]^l\}, \quad k, l = 1, 2, \dots$$

存在, 则称之为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合中心矩.

定义 对于随机变量 X 和 Y , 如果 $E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$ 存在, 则称之为 X 和 Y 的协方差, 记作 $\text{cov}(X, Y)$, 即

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$

【例 1】 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 1)$ 相互独立, 均服从正态 $N(0, \sigma^2)$, 则 $\operatorname{cov}(X_1, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i) =$ _____.

$$\begin{aligned} \text{【解】} \operatorname{cov}(X_1, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i) &= E(X_1 - EX_1) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i \right) \\ &= E \left[X_1 \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right) \right] = \frac{1}{n} E \left(X_1 \sum_{i=1}^n X_i \right) \\ &= \frac{1}{n} E \left(X_1^2 + \sum_{i=2}^n X_1 X_i \right) = \frac{1}{n} (\sigma^2 + \sum_{i=2}^n 0) = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

答案应填 $\frac{\sigma^2}{n}$.

协方差的计算公式和性质

(1) $\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

(2) $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2\operatorname{cov}(X, Y)$.

(3) 协方差性质.

(i) $\operatorname{cov}(X, Y) = \operatorname{cov}(Y, X)$;

(ii) $\operatorname{cov}(aX, bY) = ab\operatorname{cov}(X, Y)$, 其中 a, b 是常数;

(iii) $\operatorname{cov}(X_1 + X_2, Y) = \operatorname{cov}(X_1, Y) + \operatorname{cov}(X_2, Y)$.

定义 随机变量 X 和 Y , 如果 $D(X)D(Y) \neq 0$, 则称 $\frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}}$ 为 X 和 Y 的相关系数, 记为 ρ_{XY} , 即

$$\rho_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}}$$

如果 $D(X)D(Y) = 0$, 则 $\rho_{XY} = 0$.

如果随机变量 X 和 Y 的相关系数 $\rho_{XY} = 0$, 则称 X 和 Y 不相关.

【例 2】 箱中装有 6 个球, 其中红、白、黑球的个数分别为 1, 2, 3 个, 现从箱中随机地取出 2 个球, 记 X 为取出的红球个数, Y 为取出的白球个数.

(1) 求随机变量 (X, Y) 概率分布;

(2) 求 $\operatorname{cov}(X, Y)$.

【解】 (1) 随机地一次取出 2 个, 总共有 C_6^2 种不同取法, X 表示取出的红球数, 可能取值为 0, 1; Y 表示取出白球数, 可能取值为 0, 1, 2. 所以 (X, Y) 的分布为

X \ Y	Y				X \ Y	Y		
	0	1	2			0	1	2
0	$\frac{C_3^2}{C_6^2}$	$\frac{C_2^1 C_3^1}{C_6^2}$	$\frac{C_2^2}{C_6^2}$	即	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$
1	$\frac{C_1^1 C_3^1}{C_6^2}$	$\frac{C_1^1 C_2^1}{C_6^2}$	0		1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	0

最后得

$X \backslash Y$	0	1	2	
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{3}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{1}{3}$
	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	

$$(2) \operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - EX \cdot EY$$

$$EX = 0 \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, EY = 0 \times \frac{2}{5} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{1}{15} = \frac{2}{3}$$

$$EXY = 0 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{5} \right) + 1 \times 1 \times \frac{2}{15} + 1 \times 2 \times 0 = \frac{2}{15}$$

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \frac{2}{15} - \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = -\frac{4}{45}$$

性质 (1) $|\rho_{XY}| \leq 1$;

(2) $|\rho_{XY}| = 1$ 的充分必要条件是存在常数 a 和 b , 其中 $a \neq 0$, 使得

$$P\{Y = aX + b\} = 1$$

【例 3】 将长度为 1m 的木棒随机地截成两段, 则两段长度的相关系数为

- (A) 1. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $-\frac{1}{2}$. (D) -1.

【解】 设木棒截成两段的长度分别为 X 和 Y , 因随机地截断, 所以 X 与 Y 均为随机变量, 显然, $X + Y = 1$ 或者 $Y = 1 - X$.

$$X \text{ 与 } Y \text{ 的相关系数 } \rho_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}},$$

$$DY = D(1 - X) = DX, \operatorname{cov}(X, Y) = \operatorname{cov}(X, 1 - X) = \operatorname{cov}(X, 1) - \operatorname{cov}(X, X) = -DX$$

$$\text{所以 } \rho_{XY} = \frac{-DX}{\sqrt{DX} \sqrt{DX}} = -1. \text{ 答案应选(D).}$$

【例 4】 随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1, A_2, A_3 , 且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$, 将试验 E 独立重复做 2 次, X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数, Y 表示 2 次试验中结果 A_2 发生的次数, 则 X 与 Y 的相关系数为

- (A) $-\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{1}{3}$. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $\frac{1}{2}$.

【解】 设 Z 表示 2 次试验中结果 A_3 发生的次数, 试验是独立重复的, 把 A_3 发生看成是试验成功, 且 $P(A_3) = \frac{1}{3}$, 所以, 随机变量 Z 必服从二项分布 $B\left(2, \frac{1}{3}\right)$, 同理, X 和 Y 也都服从 $B\left(2, \frac{1}{3}\right)$, 因此 $DX = DY$.

显然 $X + Y + Z = 2$, 即 $Y = 2 - X - Z$.

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \operatorname{cov}(X, 2 - X - Z) = \operatorname{cov}(X, 2) - \operatorname{cov}(X, X) - \operatorname{cov}(X, Z)$$

$$= 0 - DX - \operatorname{cov}(X, Z).$$

由对称性 $\operatorname{cov}(X, Y) = \operatorname{cov}(X, Z)$, 故

$$\operatorname{cov}(X, Y) = -DX - \operatorname{cov}(X, Z) = -DX - \operatorname{cov}(X, Y)$$

即 $\operatorname{cov}(X, Y) = -\frac{DX}{2}$, X 与 Y 的相关系数

$$\rho_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = \frac{-\frac{DX}{2}}{DX} = -\frac{1}{2}$$

答案应选(A).

【例5】 设随机变量 X_1, X_2, X_3 独立同分布, 且其方差为 $\sigma^2 > 0$, 则 $X_1 + X_2$ 与 $X_2 + X_3$ 的相关系数 $\rho =$ _____.

【解】
$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(X_1 + X_2, X_2 + X_3)}{\sqrt{D(X_1 + X_2)} \sqrt{D(X_2 + X_3)}},$$

$$D(X_1 + X_2) = D(X_1) + D(X_2) = \sigma^2 + \sigma^2 = 2\sigma^2, \text{ 同理 } D(X_2 + X_3) = 2\sigma^2.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(X_1 + X_2, X_2 + X_3) &= \operatorname{cov}(X_1, X_2) + \operatorname{cov}(X_1, X_3) + \operatorname{cov}(X_2, X_2) + \operatorname{cov}(X_2, X_3) \\ &= 0 + 0 + \sigma^2 + 0 = \sigma^2 \end{aligned}$$

$$\rho = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\sigma^2} \sqrt{2\sigma^2}} = \frac{1}{2}. \text{ 答案应填 } \frac{1}{2}.$$

独立与不相关

(1) 如果随机变量 X 和 Y 相互独立, 则 X 和 Y 必不相关; 反之, X 和 Y 不相关时, X 和 Y 却不一定相互独立.

(2) 对二维正态随机变量 (X, Y) , X 和 Y 相互独立的充分必要条件是 $\rho = 0$.

(3) 对二维正态随机变量 (X, Y) , X 和 Y 相互独立与 X 和 Y 不相关是等价的.

【例6】 设 X 服从区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的均匀分布, $Y = \sin X$, 则 $\operatorname{cov}(X, Y) =$ _____.

【解】 $X \sim U(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), EX = 0.$

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - EX \cdot EY = E(XY)$$

$$= E(X \sin X) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \cdot \frac{1}{\pi} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$$

$$= \frac{2}{\pi} (\sin x - x \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

答案应填 $\frac{2}{\pi}$.

【例7】 设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

$$\begin{array}{c|cc} X & 0 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \quad \text{和} \quad \begin{array}{c|ccc} Y & -1 & 0 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}$$

且 $P\{X^2 = Y^2\} = 1$,

(1) 求二维随机变量 (X, Y) 的概率分布;

(2) 求 $Z = XY$ 的概率分布;

(3) X 与 Y 是否相互独立?是否不相关.

【解】 (1) 由 $P\{X^2 = Y^2\} = 1$ 得 $P\{X^2 \neq Y^2\} = 0$,

而 $P\{X^2 \neq Y^2\} = P\{X = 0, Y = -1\} + P\{X = 0, Y = 1\} + P\{X = 1, Y = 0\}$,

所以 $P\{X = 0, Y = -1\} = P\{X = 0, Y = 1\} = P\{X = 1, Y = 0\} = 0$.

由题给条件得 (X, Y) 的边缘分布为

$X \backslash Y$	-1	0	1	$P_{i\cdot}$
0				$\frac{1}{3}$
1				$\frac{2}{3}$
$P_{\cdot j}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

结合 $P\{X = 0, Y = -1\} = 0$,

$P\{X = 0, Y = 1\} = 0$,

$P\{X = 1, Y = 0\} = 0$.

得到

$X \backslash Y$	-1	0	1	$P_{i\cdot}$
0	0		0	$\frac{1}{3}$
1		0		$\frac{2}{3}$
$P_{\cdot j}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

最后得到

$X \backslash Y$	-1	0	1	$P_{i\cdot}$
0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$P_{\cdot j}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

(2) $Z = XY$, 所以 Z 可能取值 $-1, 0, 1$.

由 (X, Y) 的概率分布可得 Z 的概率分布

Z	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(3) 显然, X 与 Y 不相互独立, (X, Y) 分布律中有 0, 或者 $p_{ij} \neq p_{i\cdot} p_{\cdot j}$

$$\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}}, \text{cov}(X, Y) = EXY - EX \cdot EY.$$

$$EX = \frac{2}{3}, EY = 0, E(XY) = EZ = 0,$$

$$\text{故 } \text{cov}(X, Y) = 0 - \frac{2}{3} \times 0 = 0, \rho_{XY} = 0.$$

因此 X 与 Y 不相关, 但不相互独立.

【例 8】 已知随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布 $N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; 0)$, 记 $Z_1 = X + Y$ 和 $Z_2 = X - Y$.

(1) 求 (Z_1, Z_2) 的分布;

(2) Z_1 与 Z_2 是否相互独立.

【解】 (1) 根据二维正态分布的性质:

(X, Y) 正态, 则 $(aX + bY, cX + dY)$ 也正态, 只要 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

所以 (Z_1, Z_2) 即 $(X + Y, X - Y)$ 服从二维正态.

$$E(X+Y) = \mu_1 + \mu_2, D(X+Y) = DX + DY = \sigma_1^2 + \sigma_2^2,$$

$$E(X-Y) = \mu_1 - \mu_2, D(X-Y) = DX + DY = \sigma_1^2 + \sigma_2^2,$$

$$\rho_{Z_1, Z_2} = \frac{\text{cov}(Z_1, Z_2)}{\sqrt{DZ_1} \sqrt{DZ_2}}, DZ_1 = DZ_2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2.$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(Z_1, Z_2) &= \text{cov}(X+Y, X-Y) \\ &= \text{cov}(X, X) - \text{cov}(X, Y) + \text{cov}(Y, X) - \text{cov}(Y, Y) \\ &= \sigma_1^2 - \sigma_2^2 \end{aligned}$$

$$\rho_{Z_1, Z_2} = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

$$\text{总之 } (Z_1, Z_2) \sim N\left(\mu_1 + \mu_2, \mu_1 - \mu_2; \sigma_1^2 + \sigma_2^2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2; \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right).$$

(2) 当 $\sigma_1 = \sigma_2$ 时, $\rho_{Z_1, Z_2} = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = 0 \Rightarrow Z_1, Z_2$ 不相关、相互独立.

当 $\sigma_1 \neq \sigma_2$ 时, $\rho_{Z_1, Z_2} \neq 0, \Rightarrow Z_1$ 与 Z_2 不相互独立.

【评注】 (1) (X, Y) 是正态时, 不相关与独立等价;

(2) (X, Y) 正态时, X 与 Y 必正态, 反之不一定;

(3) X 与 Y 均正态且相互独立, 则 (X, Y) 必正态;

(4) (X, Y) 正态的充要条件为 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ 时, $(aX + bY, cX + dY)$ 为正态.

【例 9】 设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P\{X=1\} = P\{X=-1\} = \frac{1}{2}$,

Y 服从参数为 λ 的泊松分布. 令 $Z = XY$.

(1) 求 $\text{cov}(X, Z)$;

(2) 求 Z 的概率分布.

【解】 按题意有 $\begin{array}{c|cc} X & -1 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$ 和 $P\{Y=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k=0, 1, 2, \dots$

$$(1) \text{cov}(X, Z) = \text{cov}(X, XY) = E(X^2Y) - E(X)E(XY).$$

$$E(X^2Y) = E(X^2)E(Y) = \left[(-1)^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{2}\right] \lambda = \lambda.$$

$$E(X)E(XY) = 0 \cdot E(XY) = 0.$$

所以, $\text{cov}(X, Z) = \lambda$.

(2) X 取值 $-1, 1$. Y 取值 $0, 1, 2, \dots$ 因此, $Z = XY$ 取值为 $0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Z 的分布: $P\{Z=0\} = P\{Y=0\} = e^{-\lambda}$;

$$P\{Z=k\} = P\{X=1, Y=k\} = P\{X=1\}P\{Y=k\} = \frac{1}{2} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k=1, 2, \dots$$

$$P\{Z=-k\} = P\{X=-1, Y=k\} = P\{X=-1\}P\{Y=k\} = \frac{1}{2} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k=1, 2, \dots$$

【例 10】 设随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布 $N\left(0, 0; 1, 4; -\frac{1}{2}\right)$, 则下列随机变量中服从标准正态分布且与 X 独立的是

$$(A) \frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y), \quad (B) \frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y), \quad (C) \frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y), \quad (D) \frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y).$$

【解】 $(X, Y) \sim N\left(0, 0; 1, 4; -\frac{1}{2}\right)$, 所以 $X \sim N(0, 1), Y \sim N(0, 4)$.

$$\rho = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = -\frac{1}{2}, \text{ 且 } \sqrt{DX} = 1, \sqrt{DY} = 2,$$

$$\text{所以 } \text{cov}(X, Y) = -\frac{1}{2} \sqrt{DX} \sqrt{DY} = -1.$$

$$D(X+Y) = DX + DY + 2\text{cov}(X, Y) = 1 + 4 - 2 = 3.$$

$$D(X-Y) = DX + DY - 2\text{cov}(X, Y) = 1 + 4 + 2 = 7.$$

$$E\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)\right] = \frac{\sqrt{3}}{3}(EX + EY) = 0, D\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)\right] = \frac{3}{3^2}D(X+Y) = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{cov}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y), X\right) &= \frac{\sqrt{3}}{3}[\text{cov}(X, X) + \text{cov}(Y, X)] = \frac{\sqrt{3}}{3}[DX + \text{cov}(X, Y)] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}[1 - 1] = 0. \end{aligned}$$

由于 (X, Y) 服从二维正态分布, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y), X\right)$ 也服从二维正态分布, $\text{cov}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y), X\right) = 0$.

即有 $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y) \sim N(0, 1)$, 且与 X 独立, 答案应选(C).

【评注】 本题四选项必有一个正确, 也仅有一个正确.

仅从标准正态分布的方差为 1 来判别四个选项:

因为

$$D(X+Y) = DX + DY + 2\text{cov}(X, Y) = 1 + 4 + 2\left(-\frac{1}{2} \sqrt{DX} \sqrt{DY}\right) = 1 + 4 - 2 = 3,$$

$$D(X-Y) = DX + DY - 2\text{cov}(X, Y) = 1 + 4 - 2\left(-\frac{1}{2} \sqrt{DX} \sqrt{DY}\right) = 1 + 4 + 2 = 7.$$

$$\text{因此 (A)} D\left[\frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)\right] = \frac{1}{5}D(X+Y) = \frac{3}{5}.$$

$$\text{(B)} D\left[\frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)\right] = \frac{1}{5}D(X-Y) = \frac{7}{5}.$$

$$\text{(C)} D\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)\right] = \frac{1}{3}D(X+Y) = 1.$$

$$\text{(D)} D\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)\right] = \frac{1}{3}D(X-Y) = \frac{7}{3}.$$

只有(C)的方差为 1, (A)(B)(D)不可能是标准正态随机变量.

答案应选(C).

第五章 大数定律和中心极限定理

。 本章考点 。

切比雪夫(Chebyshev)不等式 切比雪夫大数定律 伯努利(Bernoulli)大数定律
辛钦(Khinchine)大数定律 棣莫弗—拉普拉斯(De Moivre—Laplace)定理 列维—林德伯格(Levy—Lindberg)定理

切比雪夫不等式 设随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$ 存在, 则对任意的 $\epsilon > 0$, 总有

$$P\{|X - E(X)| \geq \epsilon\} \leq \frac{D(X)}{\epsilon^2}$$

这个不等式称为切比雪夫不等式。

【例 1】 设随机变量 X 的概率密度 $f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$,

(1) 根据切比雪夫不等式估计 $P\left\{X \geq \frac{3}{2}\right\} \leq A, A = ?$

(2) 直接计算 $P\left\{X \geq \frac{3}{2}\right\} = B, B = ?$

【解】(1) X 实际上服从指数分布 $E(2)$. X 为正.

根据切比雪夫不等式:

$$\begin{aligned} P\{|X - EX| \geq \epsilon\} &\leq \frac{DX}{\epsilon^2} \\ P\left\{X \geq \frac{3}{2}\right\} &= P\left\{X - \frac{1}{2} \geq 1\right\} = P\left\{X - \frac{1}{2} \geq 1\right\} + P\left\{X - \frac{1}{2} \leq -1\right\} \\ &= P\left\{\left|X - \frac{1}{2}\right| \geq 1\right\} = P\{|X - EX| \geq 1\} \leq \frac{DX}{1^2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

所以 $A = \frac{1}{4}$.

(2) 根据指数分布性质

$$P\{X > t\} = e^{-2t}, t > 0$$

所以 $P\left\{X \geq \frac{3}{2}\right\} = e^{-2 \cdot \frac{3}{2}} = e^{-3}, B = e^{-3}$.

【例 2】 设 X 的密度为 $f(x)$, $DX = 1$, 而 Y 的密度为 $f(-y)$, 且 X 与 Y 的相关系数为 $-\frac{1}{4}$, 用切比雪夫不等式估计 $P\{|X+Y| \geq 2\} \leq$ _____.

【解】 $EY = \int_{-\infty}^{+\infty} yf(-y)dy = \int_{+\infty}^{-\infty} (-t)f(t)d(-t) = -\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = -EX$,
即 $E(X+Y) = 0$.

$$\begin{aligned} DY &= E(Y^2) - (EY)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(-y)dy - (-EX)^2 \\ &= \int_{+\infty}^{-\infty} (-t)^2 f(t)d(-t) - (EX)^2 = E(X^2) - (EX)^2 = DX \end{aligned}$$

$$P\{|X+Y| \geq 2\} = P\{|(X+Y) - E(X+Y)| \geq 2\}$$

$$\leq \frac{D(X+Y)}{2^2} = \frac{D(X+Y)}{4}$$

$$\begin{aligned} D(X+Y) &= DX + DY + 2\text{cov}(X, Y) = DX + DY + 2\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY} \cdot \rho_{XY} \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{总之 } P\{|X+Y| \geq 2\} \leq \frac{D(X+Y)}{4} = \frac{3}{8}. \quad \text{答案应填 } \frac{3}{8}.$$

定义 设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 是一个随机变量序列, A 是一个常数, 如果对任意 $\epsilon > 0$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X_n - A| < \epsilon\} = 1$$

则称随机变量序列 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 依概率收敛于常数 A , 记作 $X_n \xrightarrow{P} A$.

切比雪夫大数定律 设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 为两两不相关的随机变量序列, 存在常数 C , 使 $D(X_i) \leq C$ ($i = 1, 2, \dots$), 则对任意 $\epsilon > 0$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)\right| < \epsilon\right\} = 1$$

伯努利大数定律 设随机变量 $X_n \sim B(n, p)$, $n = 1, 2, \dots$, 则对于任意 $\epsilon > 0$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{X_n}{n} - p\right| < \epsilon\right\} = 1$$

辛钦大数定律 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 独立同分布, 具有数学期望 $E(X_i) = \mu$, $i = 1, 2, \dots$, 则对任意 $\epsilon > 0$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu\right| < \epsilon\right\} = 1$$

【例 3】 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立, 均服从分布函数

$$F(x; \theta) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x \geq 0, \theta > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

(1) 是否存在实数 a , 使得对任何 $\epsilon > 0$ 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - a\right| \geq \epsilon\right\} = 0$?

(2) $a = ?$

【解】 (1) 记 $f(x; \theta) = F'(x; \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

$$EX_i^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x; \theta) dx = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx = \theta \int_0^{+\infty} te^{-t} dt = \theta.$$

$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立, 所以随机变量序列 $X_1^2, X_2^2, \dots, X_n^2, \dots$ 独立同分布.

数学期望 $EX_i^2 = \theta$ 存在, 根据辛钦大数定律, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 依概率收敛于 $EX_i^2 = \theta$. 即对任何 $\varepsilon > 0$, 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \theta \right| \geq \varepsilon \right\} = 0$$

(2) $a = \theta$.

棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理 设随机变量 $X_n \sim B(n, p) (n = 1, 2, \dots)$, 则对于任意实数 x , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x \right\} = \Phi(x)$$

其中 $\Phi(x)$ 是标准正态的分布函数.

【注】 定理表明当 n 充分大时, 服从 $B(n, p)$ 的随机变量 X_n 经标准化后得 $\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ 近似服从标准正态分布 $N(0, 1)$, 或者说 X_n 近似地服从 $N(np, np(1-p))$.

【例 4】 设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 为独立, 均服从 $B(1, \frac{1}{2})$ 的随机变量序列, 记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则有

$$(A) \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - 2n}{2\sqrt{n}} \leq x \right\} = \Phi(x). \quad (B) \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - 2n}{\sqrt{2n}} \leq x \right\} = \Phi(x).$$

$$(C) \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{2 \sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}} \leq x \right\} = \Phi(x). \quad (D) \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}} \leq x \right\} = \Phi(x).$$

【解】 根据棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理 $\sum_{i=1}^n X_i \sim B(n, \frac{1}{2})$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2})}} \leq x \right\} = \Phi(x) \quad \text{即} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{2 \sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}} \leq x \right\} = \Phi(x)$$

答案应选(C).

列维—林德伯格中心极限定理 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 独立同分布, 具有数学期望与方差, $E(X_n) = \mu, D(X_n) = \sigma^2, n = 1, 2, \dots$, 则对于任意实数 x , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x \right\} = \Phi(x)$$

【注】 定理表明当 n 充分大时 $\sum_{i=1}^n X_i$ 的标准化 $\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ 近似服从标准正态分布 $N(0, 1)$, 或者说 $\sum_{i=1}^n X_i$ 近似地服从 $N(n\mu, n\sigma^2)$.

【例 5】 设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 为独立同分布的随机变量列, 且均服从参数为 1 的指数分布, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\sum_{i=1}^n X_i \leq n\right\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解】 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 独立同分布, 且 $E(X_i) = 1, D(X_i) = 1$, 根据列维 — 林德伯格中心极限定理, $\sum_{i=1}^n X_i$ 近似地服从 $N\left(n \cdot \frac{1}{\lambda}, n \cdot \frac{1}{\lambda^2}\right)$ 即 $N(n, n)$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}} \leq x\right\} = \Phi(x)$.

$$\text{因此, } \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\sum_{i=1}^n X_i \leq n\right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right\} = \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

答案应填 $\frac{1}{2}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

良好的学习方法能使我们更好地发挥运用天赋的才能, 而拙劣的方法可能阻碍才能的发挥。

——贝尔纳



第六章 数理统计的基本概念

。 本章考点 。

总体 个体 简单随机样本 统计量 样本均值 样本方差和样本矩

χ^2 分布 t 分布 F 分布 分位数 正态总体的常用抽样分布

经验分布函数及其性质(仅数学三要求)

第一节 总体、样本、统计量和样本数字特征

定义 数理统计中所研究对象的某项数量指标 X 的全体称为总体。

X 是一个随机变量,称 X 的概率分布为总体分布, X 的数字特征为总体数字特征,总体中的每个元素称为个体。

定义 如果随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立且都与总体 X 同分布,则称 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体的简单随机样本,简称为样本。 n 为样本容量,样本的具体观测值 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 称为样本值,或称总体 X 的 n 个独立观测值。

如果总体 X 的分布为 $F(x)$,则样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的分布为

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F(x_i)$$

如果总体 X 有概率密度 $f(x)$,则样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的概率密度为

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$$

如果总体 X 有概率分布 $P\{X = a_j\} = p_j, j = 1, 2, \dots$,则样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的概率分布为

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n\} = \prod_{i=1}^n P\{X_i = x_i\}$$

其中 x_i 取 $a_1, a_2, \dots$ 中的某一个数。

【例 1】 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2), \sigma > 0$,则来自总体的样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的联合密度 $f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) =$ _____。

【解】 由于总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,其概率密度为 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty$

所以样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的联合概率密度为

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}, -\infty < x_1, x_2, \dots, x_n < +\infty$$

$$\text{答案应填 } \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}, -\infty < x_1, x_2, \dots, x_n < +\infty.$$

【例 2】 设总体 $X \sim P(\lambda), \lambda > 0$, 则来自总体的样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的联合概率 $P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n\} =$ _____.

【解】 $X \sim P(\lambda)$,

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \dots$$

所以 $P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n\}$

$$= \prod_{i=1}^n P\{X_i = x_i\} = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \right) = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-n\lambda}}{\prod_{i=1}^n x_i!}, \quad \begin{matrix} x_i = 0, 1, 2, \dots \\ i = 1, 2, \dots, n \end{matrix}$$

$$\text{答案应填 } \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-n\lambda}}{\prod_{i=1}^n x_i!}, \quad \begin{matrix} x_i = 0, 1, 2, \dots \\ i = 1, 2, \dots, n \end{matrix}$$

定义 样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的不含未知参数的函数 $T = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 称为统计量. 作为随机样本的函数, 统计量本身也是一个随机变量. 如果 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的样本值, 则数值 $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为统计量 $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的观测值.

下面所列的样本数字特征、顺序统计量都是最常用的统计量.

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的样本, 则称

$$(1) \text{ 样本均值 } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i;$$

$$(2) \text{ 样本方差 } S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

$$\text{样本标准差 } S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2};$$

$$(3) \text{ 样本 } k \text{ 阶原点矩 } A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k, k = 1, 2, A_1 = \bar{X};$$

$$(4) \text{ 样本 } k \text{ 阶中心矩 } B_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k, k = 1, 2, B_2 = \frac{n-1}{n} S^2 \neq S^2.$$

定义 (仅数学三要求) 将样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的一个观测值 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 按大小递增次序排列, 得到 $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$. 称

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x < x_{(1)} \\ \frac{k}{n}, & \text{当 } x_{(k)} \leq x \leq x_{(k+1)} \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \\ 1, & \text{当 } x_{(n)} \leq x \end{cases}$$

为经验分布函数.

性质 (1) 如果总体 X 具有数学期望 $E(X) = \mu$, 则

$$E(\bar{X}) = E(X) = \mu$$

(2) 如果总体 X 具有方差 $D(X) = \sigma^2$, 则

$$D(\bar{X}) = \frac{1}{n}D(X) = \frac{\sigma^2}{n}, \quad E(S^2) = D(X) = \sigma^2$$

(3) 如果总体 X 的 k 阶原点矩 $E(X^k) = \mu_k, k = 1, 2, \dots$ 存在, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k \xrightarrow{P} \mu_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

【例 3】 设来自总体 X 的样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的样本均值 $\bar{X}$, 试证 $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 =$

$$\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2.$$

【证明】

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 &= \sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2) = \sum_{i=1}^n X_i^2 - \sum_{i=1}^n 2X_i\bar{X} + n\bar{X}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\bar{X} \sum_{i=1}^n X_i + n\bar{X}^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\bar{X} \cdot n\bar{X} + n\bar{X}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2. \end{aligned}$$

【例 4】 总体 X 的数学期望和方差都存在, 且 $EX = \mu, DX = \sigma^2$. 来自总体 X 的样本 $X_1, X_2, \dots$ 试求

$$(1) \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2;$$

$$(2) \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

$$(1) E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i - \mu)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \sigma^2.$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 &= \frac{1}{n} E\left[\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2\right] = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n E(X_i^2) - nE(\bar{X}^2)\right] \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n [DX_i + (EX_i)^2] - n[DX + (EX)^2] \right\} \\ &= \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n (\sigma^2 + \mu^2) - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) \right] \\ &= \sigma^2 + \mu^2 - \frac{\sigma^2}{n} - \mu^2 = \frac{n-1}{n} \sigma^2. \end{aligned}$$

设总体 $X \sim B(1, p)$, 则来自总体 X 的样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的样本均值 $\bar{X}$ 的分

$X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立, X_i 可看成一次伯努利试验, 所以 $\sum_{i=1}^n X_i$ 可以看成 n 次独

立重复伯努利试验, $\sum_{i=1}^n X_i \sim B(n, p)$, 即有

$$P\left\{\sum_{i=1}^n X_i = k\right\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$P\left\{\bar{X} = \frac{k}{n}\right\} = P\left\{\sum_{i=1}^n X_i = k\right\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n$$

答案应填 $P\left\{\bar{X} = \frac{k}{n}\right\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n$.

第二节 常用统计抽样分布

一、 χ^2 分布

定义 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立且均服从标准正态分布 $N(0, 1)$, 则称随机变量

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$$

服从自由度为 n 的 χ^2 分布, 记作 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$.

【注】 n 个相互独立标准正态随机变量的平方和 $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$ 为 $\chi^2(n)$ 的典型模式, 必须熟记.

性质 (1) 设 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$, 对给定的 $\alpha (0 < \alpha < 1)$, 称满足条件

$$P\{\chi^2 > \chi_\alpha^2(n)\} = \int_{\chi_\alpha^2(n)}^{+\infty} f(x) dx = \alpha$$

的点 $\chi_\alpha^2(n)$ 为 $\chi^2(n)$ 分布的上 α 分位点, 如图 1 所示. 对不同的 α 和 n , $\chi_\alpha^2(n)$ 通常由表求得.

(2) 设 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$, 则 $E(\chi^2) = n, D(\chi^2) = 2n$.

(3) 设 $\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1), \chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$, 且 χ_1^2 和 χ_2^2 相互独立, 则 $\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$.

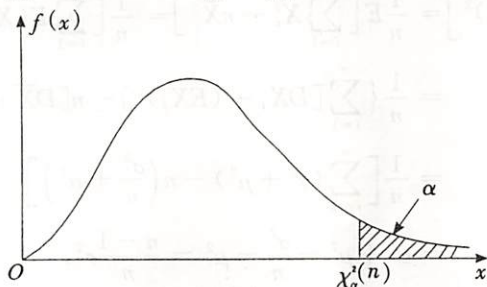


图 1

【例 1】 已知 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$, 则 $E(\chi^4) =$ _____.

【解】 根据 $\chi^2(n)$ 的性质, $E(\chi^2) = n, D(\chi^2) = 2n$.

故 $E(\chi^4) = D(\chi^2) + [E(\chi^2)]^2 = 2n + n^2$.

答案应填 $2n + n^2$.

【例2】 设 X_1, X_2, X_3 是来自正态总体 $N(0, 4)$ 的简单随机样本, 记 $X = a(X_1 - 2X_2 + 3X_3)^2$, 已知统计量 X 服从 χ^2 分布, 则常数 $a =$ _____.

【解】 χ^2 变量的典型模式是相互独立标准正态随机变量的平方和, 现只有一个平方. 如果 $\sqrt{a}(X_1 - 2X_2 + 3X_3) \sim N(0, 1)$, 则 $X \sim \chi^2(1)$, $X_1 - 2X_2 + 3X_3 \sim N(\mu, \sigma^2)$.

显然, $E(X_1 - 2X_2 + 3X_3) = EX_1 - 2EX_2 + 3EX_3 = 0$,

$$D(X_1 - 2X_2 + 3X_3) = DX_1 + 4DX_2 + 9DX_3 = 4 + 16 + 36 = 56,$$

$$X_1 - 2X_2 + 3X_3 \sim N(0, 56)$$

$$\text{故 } \frac{X_1 - 2X_2 + 3X_3}{\sqrt{56}} \sim N(0, 1), a = \frac{1}{56}.$$

答案应填 $\frac{1}{56}$.

二、t 分布

定义 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且 $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim \chi^2(n)$, 则称随机变量

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

服从自由度为 n 的 t 分布, 记作 $T \sim t(n)$.

【注】 满足 X, Y 独立, $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim \chi^2(n)$ 三条件的 $T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 称为 $t(n)$ 的典型模式.

性质 (1) t 分布的概率密度 $f(x)$ 是偶函数, 即

$$f(x) = f(-x)$$

且当 n 充分大时, $t(n)$ 分布近似于 $N(0, 1)$ 分布.

(2) 设 $T \sim t(n)$, 对给定的 $\alpha (0 < \alpha < 1)$, 称满足条件

$$P\{T > t_\alpha(n)\} = \int_{t_\alpha(n)}^{+\infty} f(x) dx = \alpha$$

的点 $t_\alpha(n)$ 为 $t(n)$ 分布的上 α 分位点.

(3) 由于 $t(n)$ 分布的概率密度为偶函数, 可知 t 分布的双侧 α 分位点 $t_{\alpha/2}(n)$, 即

$$P\{|T| > t_{\alpha/2}(n)\} = \alpha$$

如图 2 所示, 显然

$$t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$$

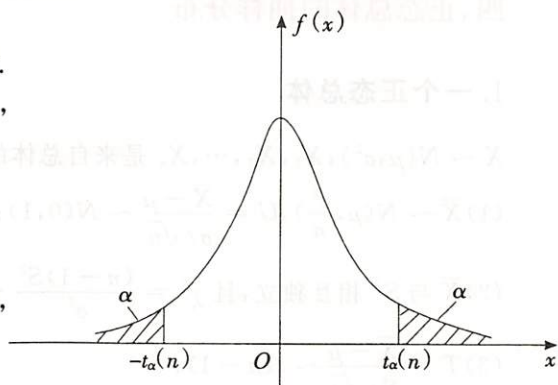


图 2

三、F 分布

定义 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且 $X \sim \chi^2(n_1)$, $Y \sim \chi^2(n_2)$, 则称随机变量

$$F = \frac{X/n_1}{Y/n_2}$$

服从自由度为 (n_1, n_2) 的 F 分布, 记作 $F \sim F(n_1, n_2)$, 其中 n_1 和 n_2 分别称为第一自由度和第二自由度.

【注】 满足 X, Y 独立, $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$ 三条件的 $F = \frac{X/n_1}{Y/n_2}$ 称为 $F(n_1, n_2)$ 的典型模式.

性质 (1) 设 $F \sim F(n_1, n_2)$, 对给定的 $\alpha (0 < \alpha < 1)$, 称满足条件

$$P\{F > F_{\alpha}(n_1, n_2)\} = \int_{F_{\alpha}(n_1, n_2)}^{+\infty} f(x) dx = \alpha$$

的点 $F_{\alpha}(n_1, n_2)$ 为 $F(n_1, n_2)$ 分布的上 α 分位点.

(2) 如果 $F \sim F(n_1, n_2)$, 则 $\frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$, 且有

$$F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_{\alpha}(n_2, n_1)}$$

【例 3】 设随机变量 X 和 Y 都服从标准正态分布, 则

(A) $X+Y$ 服从正态分布. (B) X^2+Y^2 服从 χ^2 分布.

(C) X^2 和 Y^2 都服从 χ^2 分布. (D) X^2/Y^2 服从 F 分布.

【解】 X 和 Y 都服从标准正态分布, 故 X^2 和 Y^2 都服从 $\chi^2(1)$ 分布.

【评注】 题设条件中并没给出 (X, Y) 正态, 故不能保证 $X+Y$ 正态, (A) 不成立, (B)、(D) 条件都要求 X, Y 相互独立, 所以也不能选.

如果题设条件加上 X, Y 相互独立, 则 (A)(B)(C)(D) 都正确.

四、正态总体的抽样分布

1. 一个正态总体

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体的样本, 样本均值为 $\bar{X}$, 样本方差为 S^2 , 则有:

$$(1) \bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}), U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1);$$

$$(2) \bar{X} \text{ 与 } S^2 \text{ 相互独立, 且 } \chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1);$$

$$(3) T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1);$$

$$(4) \chi^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n).$$

【例 4】 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(\mu, 1)$ 的简单随机样本. 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 则不能得出结论:

(A) $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布. (B) $2(X_n - X_1)^2$ 服从 χ^2 分布.

(C) $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 服从 χ^2 分布. (D) $n(\bar{X} - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布.

【解】 由于 $X_i \sim N(\mu, 1), i = 1, 2, \dots, n$, 且相互独立

$$X_n - X_1 \sim N(0, 2), \frac{X_n - X_1}{\sqrt{2}} \sim N(0, 1), \frac{(X_n - X_1)^2}{2} \sim \chi^2(1)$$

显然 $2(X_n - X_1)^2 \sim \chi^2$ 不正确.

答案应选(B).

【评注】 $(X_i - \mu) \sim N(0, 1), \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n);$

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = (n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1)$$

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{1}{n}), n(\bar{X} - \mu)^2 \sim \chi^2(1)$$

【例 5】 设总体 X 的概率密度 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, -\infty < x < +\infty, X_1, X_2, \dots, X_n$ 为总体 X 的简单随机样本, 其样本方差为 S^2 , 则 $E(S^2) =$ _____.

【解】 $E(S^2) = D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2,$

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{2}e^{-|x|} dx = 0,$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2}e^{-|x|} dx = 2 \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2}e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = 2.$$

所以 $E(S^2) = 2$. 答案应填 2.

【例 6】 设 X_1, X_2, X_3, X_4 为来自总体 $N(1, \sigma^2) (\sigma > 0)$ 的简单随机样本, 则统计量 $\frac{X_1 - X_2}{|X_3 + X_4 - 2|}$ 的分布为

(A) $N(0, 1)$.

(B) $t(1)$.

(C) $\chi^2(1)$.

(D) $F(1, 1)$.

【解】 (1) $X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$, 故 $\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0, 1)$.

(2) $X_3 + X_4 - 2 \sim N(0, 2\sigma^2)$, 故 $\frac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0, 1), \left(\frac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1),$

$$\sqrt{\left(\frac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 / 1} = \frac{|X_3 + X_4 - 2|}{\sqrt{2}\sigma}.$$

(3) $X_1 - X_2$ 与 $X_3 + X_4 - 2$ 相互独立, $\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}$ 与 $\left(\frac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2$ 也相互独立.

综上所述, 记 $\frac{X_1 - X_2}{|X_3 + X_4 - 2|} = \frac{\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\left(\frac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 / 1}} = \frac{X}{\sqrt{Y/1}},$ 其中 $X \sim N(0, 1), Y \sim$

$\chi^2(1)$ 且 X 与 Y 相互独立, 则 $\frac{X_1 - X_2}{|X_3 + X_4 - 2|} \sim t(1)$. 答案应选(B).

【评注】 本题也可以用排除法. $\frac{X_1 - X_2}{|X_3 + X_4 - 2|}$ 不可能为 $N(0, 1)$;

$\chi^2(1)$ 的典型模式是一个 $N(0, 1)$ 随机变量的平方, 不可能;

$F(1, 1)$ 的典型模式是两个相互独立的 $\chi^2(1)$ 随机变量之商也不像.

因此可判断(A), (C), (D) 都不对, 只能是(B).

【例 7】 设总体 X 服从正态分布 $N(-1, \sigma^2)$, $\sigma > 0$, $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自该总

体的简单随机样本, 则对于统计量 $T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 和 $T_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n} X_n$, 有

(A) $ET_1 > ET_2, DT_1 > DT_2$.

(B) $ET_1 > ET_2, DT_1 < DT_2$.

(C) $ET_1 < ET_2, DT_1 > DT_2$.

(D) $ET_1 < ET_2, DT_1 < DT_2$.

【解】 $ET_1 = E\bar{X} = -1, DT_1 = D\bar{X} = \frac{\sigma^2}{n}$.

$$ET_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (-1) - \frac{1}{n} = -1 - \frac{1}{n}, DT_2 = \frac{1}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n-1} \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n-1} + \frac{\sigma^2}{n^2}.$$

显然, $ET_1 > ET_2, DT_1 < DT_2$. 答案应选(B).

2. 两个正态总体

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$ 和 $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$ 是分别来自总体 X 和 Y 的样本且相互独立, 样本均值分别为 $\bar{X}$ 和 $\bar{Y}$, 样本方差分别为 S_1^2 和 S_2^2 , 则有

$$(1) \bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right), U = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1);$$

(2) 如果 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, 则

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

$$\text{其中 } S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2};$$

$$(3) F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1).$$

【例 8】 设总体 X 和 Y 均服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma > 0$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 和 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 分别是来自总体 X 和 Y 的两个相互独立的简单随机样本, 它们的样本方差分别为 S_X^2 和 S_Y^2 ,

则统计量 $T = \frac{n-1}{\sigma^2} (S_X^2 + S_Y^2)$ 服从的分布及参数为_____.

【解】 $\frac{n-1}{\sigma^2} S_X^2 \sim \chi^2(n-1), \frac{n-1}{\sigma^2} S_Y^2 \sim \chi^2(n-1)$, 且它们相互独立.

故
$$\frac{n-1}{\sigma^2} S_X^2 + \frac{n-1}{\sigma^2} S_Y^2 = \frac{n-1}{\sigma} (S_X^2 + S_Y^2) \sim \chi^2(2n-2)$$

答案应填 $\chi^2(2n-2)$.

【例 9】 设随机变量 $X \sim t(n)$, $Y \sim F(1, n)$, 给定 $\alpha (0 < \alpha < 0.5)$, 常数 c 满足 $P\{X > c\} = \alpha$, 则 $P\{Y > c^2\} =$

(A) α .

(B) $1 - \alpha$.

(C) 2α .

(D) $1 - 2\alpha$.

【解】 $X \sim t(n)$, 根据 t 分布典型模式, 可将 X 表示为:

$$X = \frac{X_1}{\sqrt{Y_1/n}}, \text{ 其中 } X_1 \sim N(0, 1); Y_1 \sim \chi^2(n); X_1 \text{ 和 } Y_1 \text{ 相互独立}$$

因为 t 分布的密度函数是偶函数, 所以对给定 $\alpha (0 < \alpha < 0.5)$, 常数 c 满足 $P\{X > c\} = \alpha$, 也有 $P\{X < -c\} = P\{X > c\} = \alpha$.

又 $X^2 = \frac{X_1^2}{Y_1/n}$, 其中 $X_1^2 \sim \chi^2(1); Y_1 \sim \chi^2(n); X_1^2$ 和 Y_1 相互独立.

根据 F 分布的典型模式知 $X^2 \sim F(1, n)$.

$$P\{Y > c^2\} = P\{X^2 > c^2\} = P\{X > c\} + P\{X < -c\} = 2\alpha$$

答案应选(C).

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

数学家通常是先透过直觉来发现一个定理,
这个结果对于他首先是似然的,
然后他再着手去制造一个证明。

——哈代



第七章 参数估计

。本章考点。

数学一,数学三要求

点估计的概念 估计量与估计值 矩估计法(一阶矩、二阶矩) 最大似然估计法

数学一要求

估计量的评选标准(无偏性、有效性和一致性) 区间估计的概念 单个正态总体的均值和方差的区间估计 两个正态总体的均值差和方差比的区间估计

第一节 点估计

定义 用样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 构造的统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 来估计未知参数 θ 称为点估计, 统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 称为估计量.

估计量是随机变量, 它所取得的观测值 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为估计值. 有时将 θ 的估计量和估计值统称为 θ 的估计.

定义* 设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的估计量, 如果 $E(\hat{\theta}) = \theta$, 则称 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是未知参数 θ 的无偏估计量.

【例 1】 设总体 X 的数学期望存在, $E(X) = \mu$, 来自总体 X 的样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 得样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 则 $E(\bar{X}) =$ _____.

【解】 $E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu = \mu$. 答案应填 μ .

【例 2】 设总体 X 的 $E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$, 来自总体 X 的样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 得样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 和样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 试证 S^2 是 σ^2 的无偏估计.

* 本章中数学三不要求的定义和例题均加框标记, 数学三考生可以不看.

【证明】 方法一
$$\begin{aligned} E(S^2) &= \frac{1}{n-1} E\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right] = \frac{1}{n-1} E\left[\sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2)\right] \\ &= \frac{1}{n-1} E\left[\sum_{i=1}^n (X_i^2 - n\bar{X}^2)\right] = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n E(X_i^2) - nE(\bar{X}^2)\right] \\ &= \frac{1}{n-1} \{n(\sigma^2 + \mu^2) - n[D(\bar{X}) + (E\bar{X})^2]\} \\ &= \frac{n}{n-1} \left[(\sigma^2 + \mu^2) - \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right)\right] = \sigma^2. \end{aligned}$$

方法二
$$\begin{aligned} E(S^2) &= \frac{1}{n-1} E\left\{\sum_{i=1}^n [(X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu)]^2\right\} \\ &= \frac{1}{n-1} E\left\{\sum_{i=1}^n [(X_i - \mu)^2 - 2(X_i - \mu)(\bar{X} - \mu) + (\bar{X} - \mu)^2]\right\} \\ &= \frac{1}{n-1} E\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2\right] \\ &= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n E(X_i - \mu)^2 - nE(\bar{X} - \mu)^2\right] \\ &= \frac{1}{n-1} [n\sigma^2 - nD(\bar{X})] = \sigma^2. \end{aligned}$$

【评注】 本题是方差估计中常用公式之一,尤其要熟练掌握这些公式推导过程或记牢下列公式:

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2$$

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2$$

【定义】 设 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 都是 θ 的无偏估计量,且 $D(\hat{\theta}_1) \leq D(\hat{\theta}_2)$,则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效,或 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效估计量.

【例 3】 设总体的数学期望和方差分别为 μ 和 σ^2 , X_1, X_2 是来自总体 X 的样本. 记 $\tilde{X} = (1-a)X_1 + aX_2$. (1) 试证 $\tilde{X}$ 是 μ 的无偏估计; (2) 确定 a , 使 $D(\tilde{X})$ 最小.

【解】 (1) $E(\tilde{X}) = (1-a)E(X_1) + aE(X_2) = (1-a)\mu + a\mu = \mu$.

(2) $D(\tilde{X}) = (1-a)^2 D(X_1) + a^2 D(X_2) = [(1-a)^2 + a^2]\sigma^2$, 显然当 $a = \frac{1}{2}$ 时 $D(\tilde{X})$ 最小.

可以证明如果样本为 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 时, μ 的估计 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 是形如

$$\tilde{X} = \sum_{i=1}^n a_i X_i \quad (\text{其中 } \sum_{i=1}^n a_i = 1)$$

的估计中最有效的.

【定义】 设 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是 θ 的估计, 如果 $\hat{\theta}$ 依概率收敛于 θ , 则称 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为 θ 的一致估计量.

【例 4】 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{3\theta^2}, & \theta < x < 2\theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 θ 是未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体的简单随机样本, 已知 $E(c \sum_{i=1}^n X_i^2) = \theta^2$, 则 $c =$ _____.

$$\begin{aligned} \text{【解】 } E(c \sum_{i=1}^n X_i^2) &= c \sum_{i=1}^n E(X_i^2) = cnE(X^2) = cn \int_{\theta}^{2\theta} x^2 f(x; \theta) dx \\ &= cn \int_{\theta}^{2\theta} \frac{2x^3}{3\theta^2} dx = cn \cdot \frac{5}{2} \theta^2 = \theta^2 \end{aligned}$$

$$\text{解得 } c = \frac{2}{5n}.$$

$$\text{答案应填 } \frac{2}{5n}.$$

【例 5】 设总体 X 服从泊松分布 $P(\lambda)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本. $\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 若 $\bar{X}^2 + kS^2$ 为 λ^2 的无偏估计量, 则 $k =$ _____.

$$\text{【解】 } E(\bar{X}^2 + kS^2) = E(\bar{X}^2) + kE(S^2) = D(\bar{X}) + [E(\bar{X})]^2 + k\lambda = \frac{\lambda}{n} + \lambda^2 + k\lambda = \lambda^2$$

$$\text{解得 } k = -\frac{1}{n}.$$

$$\text{答案应填 } -\frac{1}{n}.$$

【例 6】 设总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2(x-\theta)}, & x > \theta \\ 0, & x \leq \theta \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 是未知参数, 从总体 X 中抽取简单随机样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$, 记 $\hat{\theta} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

(1) 求总体 X 的分布函数 $F(x)$;

(2) 求统计量 $\hat{\theta}$ 的分布函数 $F_{\hat{\theta}}(x)$;

(3) 如果用 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量, 讨论它是否具有性质 $E\hat{\theta} = \theta$.

$$\begin{aligned} \text{【解】 (1) } F(x) &= P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \begin{cases} \int_{\theta}^x 2e^{-2(x-\theta)} dx, & x > \theta \\ 0, & x \leq \theta \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - e^{-2(x-\theta)}, & x > \theta \\ 0, & x \leq \theta \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) F_{\hat{\theta}}(x) &= P\{\hat{\theta} \leq x\} = P\{\min(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq x\} \\ &= 1 - P\{\min(X_1, X_2, \dots, X_n) > x\} \\ &= 1 - P\{X_1 > x, X_2 > x, \dots, X_n > x\} \\ &= 1 - P\{X_1 > x\} P\{X_2 > x\} \cdots P\{X_n > x\} \\ &= 1 - [1 - F(x)]^n = \begin{cases} 1 - e^{-2n(x-\theta)}, & x > \theta \\ 0, & x \leq \theta \end{cases} \end{aligned}$$

(3) $\hat{\theta}$ 的概率密度为

$$f_{\hat{\theta}}^{\wedge}(x) = F'_{\hat{\theta}}(x) = \begin{cases} 2ne^{-2n(x-\theta)}, & x > \theta \\ 0, & x \leq \theta \end{cases}$$

$$E\hat{\theta} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_{\hat{\theta}}^{\wedge}(x)dx = \int_{\theta}^{+\infty} x \cdot 2ne^{-2n(x-\theta)}dx = \theta + \frac{1}{2n} \neq \theta$$

所以不具有性质 $E\hat{\theta} = \theta$.

第二节 估计量的求法和区间估计

一、矩估计法

用样本矩估计相应的总体矩,用样本矩的函数估计总体矩相应的函数,然后求出要估计的参数,称这种估计法为矩估计法.

步骤:

设总体 X 的分布含有未知参数 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k, \alpha_l = E(X^l)$ 存在,显然它是 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ 的函数,记作 $\alpha_l(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k), l = 1, 2, \dots, k$. 样本的 l 阶原点矩为 $A_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^l$. 令

$$\alpha_l(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = A_l, l = 1, 2, \dots, k$$

从这 k 个方程组中,可以解得 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$.

矩估计法不需要知道总体的具体分布数学形式,只要知道各阶矩存在.

如果不用原点矩,而用中心矩也可以求解:用样本中心矩等于总体中心矩来建立方程组.

求 k 个参数的估计一般就列出一阶矩到 k 阶矩的方程. 考试大纲只要求最多两个参数的估计,故一般最多两个方程.

设 $g(\alpha_1, \alpha_2)$ 是一阶矩 α_1 和二阶矩 α_2 的函数,而 $\hat{\alpha}_1$ 和 $\hat{\alpha}_2$ 分别为 α_1 和 α_2 的矩估计,则 $g(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2)$ 就是 $g(\alpha_1, \alpha_2)$ 的矩估计.

【例 1】 设总体 $X \sim P(\lambda), X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本,则参数 λ 的矩估计量 $\hat{\lambda} =$ _____

【解】 要估计的参数就一个 λ ,矩估计只要一个方程 $EX = \bar{X}$.

$$\text{现 } EX = \lambda, \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \text{ 所以 } \hat{\lambda} = \bar{X},$$

答案应填 $\bar{X}$.

二、最大似然估计法

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的样本, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是样本值, θ 是待估参数.

定义 对于离散型总体 X , 设其概率分布为 $P\{X = a_i\} = p(a_i; \theta), i = 1, 2, \dots$, 称函数

$$L(\theta) = L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n p(x_i; \theta)$$

为参数 θ 的似然函数.

对于连续型总体 X , 概率密度为 $f(x; \theta)$, 则称函数

$$L(\theta) = L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$$

为参数 θ 的似然函数.

对于给定的样本值 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 使似然函数 $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$ 达到最大值的参数值 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为未知参数 θ 的最大似然估计值, 相应的使似然函数 $L(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta)$ 达到最大值的参数值 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 称为 θ 的最大似然估计量. 一般统称为 θ 的最大似然估计. 称这种估计法为最大似然估计法.

步骤:

如果 $L(\theta)$ 或 $\ln L(\theta)$ 关于 θ 可微, 值 $\hat{\theta}$ 往往可以从方程

$$\frac{dL(\theta)}{d\theta} = 0 \text{ 或 } \frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = 0$$

中求解, 称这两个方程为似然方程.

如果要估计的参数是两个, θ_1 和 θ_2 , 则得似然方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases}$$

解这两个方程组, 可以得到 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$.

有时, 使 $L(\theta)$ 或 $\ln L(\theta)$ 达到最大值的 $\hat{\theta}$ 不一定是 $L(\theta)$ 或 $\ln L(\theta)$ 驻点, 这时不能用似然方程来求解, 应采用其他方法求最大似然估计.

【例 2】 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 $\mu, \sigma^2 (\sigma > 0)$ 均为未知参数, 从总体取得样本为 $X_1, X_2, \dots, X_n$. 试求 (1) μ 和 σ^2 的矩估计; (2) μ 和 σ^2 的最大似然估计.

【解】 (1) 待估计参数有 2 个: μ, σ^2 . 考虑一阶、二阶矩

$$E(X) = \mu, E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

$$\text{令} \begin{cases} \mu = \bar{X} \\ \sigma^2 + \mu^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{cases}, \text{得 } \mu \text{ 和 } \sigma^2 \text{ 的矩估计 } \hat{\mu} = \bar{X},$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

【评注】 如果二阶矩不用原点矩而用二阶中心矩, 也可以直接得 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.

(2) 由于 X 的密度为 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty < x < +\infty$, 所以

$$L(\mu, \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}$$

$$\ln L(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

$$\text{似然方程组为} \begin{cases} \frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} \hat{\mu} = \bar{X} \\ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \end{cases}$$

【例 3】 设某种元件的使用寿命 X 的概率密度为

$$f(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \text{其中 } \lambda > 0 \text{ 为未知参数}$$

又设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是 X 的一组样本观测值, 求参数 λ 的最大似然估计值.

【解】 似然函数为

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \lambda) = \begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}, & x_1, x_2, \dots, x_n > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

当 $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ 时, $L(\lambda) > 0$, 取对数得

$$\ln L(\lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i, \quad \frac{d \ln L(\lambda)}{d \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

$$\text{解得 } \hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}.$$

【例 4】 设总体 $X \sim U[-\theta, \theta]$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 试求参数 θ 的最大似然估计.

【解】 似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{(2\theta)^n}, & -\theta \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

显然, θ 越小, $\frac{1}{(2\theta)^n}$ 越大, 但 θ 必须满足 $-\theta \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq \theta$, 也就是必有

$$\begin{cases} \theta \geq \max(x_1, \dots, x_n) \\ -\theta \leq \min(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \theta \geq \max(x_1, \dots, x_n) \\ \theta \geq \max(-x_1, \dots, -x_n) \end{cases}$$

总之必须有 $\theta \geq \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$, θ 又要尽量小.

即有 θ 的最大似然估计 $\hat{\theta} = \max(|X_1|, |X_2|, \dots, |X_n|)$.

【例 5】 设总体 X 的概率分布为

X	-1	0	1
P	2θ	θ	$1-3\theta$

其中 $\theta (0 < \theta < \frac{1}{3})$ 是未知参数, 利用总体 X 的如下样本值

$$1, 0, -1, 1, 1, -1$$

求 θ 的矩估计值和最大似然估计值.

【解】 矩估计值 $EX = -1 \cdot 2\theta + 0 \cdot \theta + 1 \cdot (1 - 3\theta) = 1 - 5\theta$

$$\bar{x} = \frac{1}{6} \cdot (1 + 0 - 1 + 1 + 1 - 1) = \frac{1}{6}$$

令 $EX = \bar{x}$, 即 $1 - 5\theta = \frac{1}{6}$, 解得 θ 的矩估计值 $\hat{\theta} = \frac{1}{6}$.

最大似然估计值 对于给定的样本值, 似然函数为

$$L(\theta) = (2\theta)^2 \cdot \theta \cdot (1 - 3\theta)^3 = 4\theta^3(1 - 3\theta)^3$$

$$\ln L(\theta) = \ln 4 + 3\ln \theta + 3\ln(1 - 3\theta)$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{3}{\theta} - \frac{9}{1 - 3\theta} = \frac{3 - 18\theta}{\theta(1 - 3\theta)}$$

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = 0$, 解得 $3 - 18\theta = 0$ 即 $\hat{\theta} = \frac{1}{6}$.

三、区间估计

(1) 置信区间

定义 设 θ 是总体 X 的未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的样本, 对于给定的 $\alpha (0 < \alpha < 1)$, 如果两个统计量 θ_1, θ_2 满足

$$P\{\theta_1 < \theta < \theta_2\} = 1 - \alpha$$

则称随机区间 (θ_1, θ_2) 为参数 θ 的置信水平 (或置信度) 为 $1 - \alpha$ 的置信区间 (或区间估计), 简称为 θ 的 $1 - \alpha$ 置信区间, θ_1 和 θ_2 分别称为置信下限和置信上限.

(2) 一个正态总体参数的区间估计

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的样本, $\bar{X}$ 是样本均值, S^2 是样本方差. 下表列出了 μ 和 σ^2 的 $1 - \alpha$ 置信区间.

未知参数		$1 - \alpha$ 置信区间
μ	σ^2 已知	$\left(\bar{X} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$
	σ^2 未知	$\left(\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$
σ^2		$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)} \right)$

(3) 两个正态总体参数的区间估计

设总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$ 和 $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$ 分别是来自总体 X 和 Y 的样本, $\bar{X}, S_1^2, \bar{Y}, S_2^2$ 是相应的样本均值和样本方差.

$$S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

下表列出了 $\mu_1 - \mu_2$ 和 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的 $1 - \alpha$ 置信区间.

未知参数		$1 - \alpha$ 置信区间
$\mu_1 - \mu_2$	σ_1^2, σ_2^2 已知	$\left(\bar{X} - \bar{Y} - u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, \bar{X} - \bar{Y} + u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right)$
	σ_1^2, σ_2^2 未知, 但 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\left(\bar{X} - \bar{Y} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2) S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \right.$ $\left. \bar{X} - \bar{Y} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2) S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right)$
$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$		$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)}, \frac{S_1^2}{S_2^2} F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2 - 1, n_1 - 1) \right)$

【例 6】 设来自正态总体 $N(\mu, 0.9^2)$ 的样本均值 $\bar{x} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 x_i = 5$, 则未知参数 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间是_____.

【解】 由于 $\alpha = 1 - 0.95 = 0.05, u_{\frac{\alpha}{2}} = u_{0.025} = 1.96$, 因此 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间是

$$\left(\bar{x} - u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + u_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(5 - 1.96 \cdot \frac{0.9}{\sqrt{9}}, 5 + 1.96 \cdot \frac{0.9}{\sqrt{9}} \right) = (4.412, 5.588)$$

答案应填(4.412, 5.588).

【例 7】 已知一批零件的长度 X (单位: cm) 服从正态分布 $N(\mu, 1)$, 从中随机地抽取 16 个零件, 得到长度的平均值为 40(cm), 则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是_____.

(注: 标准正态分布函数值 $\Phi(1.96) = 0.975, \Phi(1.645) = 0.95$)

【解】 本题是单个正态总体方差已知条件下, 数学期望值 μ 的置信区间为

$$\left(\bar{x} - \mu_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \mu_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

其中 $P\{|U| < \mu_{\frac{\alpha}{2}}\} = 1 - \alpha, U \sim N(0, 1)$.

现题给 $1 - \alpha = 0.95, P\{|U| < \mu_{\frac{\alpha}{2}}\} = P\{-\mu_{\frac{\alpha}{2}} < U < \mu_{\frac{\alpha}{2}}\} = 2\Phi(\mu_{\frac{\alpha}{2}}) - 1 = 0.95$, 即 $\Phi(\mu_{\frac{\alpha}{2}}) = 0.975$, 查得 $\mu_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$.

将 $\mu_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96, \sigma = 1, n = 16$ 和 $\bar{x} = 40$ 代入 $\left(\bar{x} - \mu_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \mu_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$,

得置信区间 $(40 - 1.96 \cdot \frac{1}{4}, 40 + 1.96 \cdot \frac{1}{4})$, 即 $(39.51, 40.49)$. 答案应填(39.51, 40.49).

【例 8】 假设 0.50, 1.25, 0.80, 2.00 是来自总体 X 的简单随机样本值. 已知 $Y = \ln x$ 服从正态分布 $N(\mu, 1)$.

(1) 求 X 的数学期望 EX (记 EX 为 b).

(2) 求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间.

(3) 利用上述结果求 b 的置信度为 0.95 的置信区间.

【解】 (1) $Y = \ln x$, 所以 $X = e^Y. Y = \ln x \sim N(\mu, 1)$, 故 $EX = E(e^Y)$.

Y 的概率密度为

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}, -\infty < y < +\infty$$

于是

$$\begin{aligned} b = EX = E(e^Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^y \cdot f(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^y \cdot e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t+\mu} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = e^{\mu+\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-1)^2}{2}} dt = e^{\mu+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

所以 $b = e^{\mu+\frac{1}{2}}$.

(2) 当置信度 $1 - \alpha = 0.95$ 时, $\alpha = 0.05$. 标准正态分布的双侧分位数等于 1.96, 故由 $\bar{Y} \sim N(\mu, \frac{1}{4})$, 可得参数 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为

$$(\bar{y} - 1.96 \cdot \frac{1}{\sqrt{4}}, \bar{y} + 1.96 \cdot \frac{1}{\sqrt{4}}) = (\bar{y} - 0.98, \bar{y} + 0.98)$$

其中 $\bar{y}$ 为总体样本均值, $\bar{y} = \frac{1}{4}(\ln 0.50 + \ln 0.80 + \ln 1.25 + \ln 2.00) = \frac{1}{4} \ln 1 = 0$.

最后得到 μ 的置信度为 0.95 的置信区间 $(-0.98, 0.98)$.

(3) 由指数函数 e^x 的严格单调上升性, 有

$$\begin{aligned} P\{-0.98 < \mu < 0.98\} &= P\left\{-0.48 < \mu + \frac{1}{2} < 1.48\right\} = P\{e^{-0.48} < e^{\mu+\frac{1}{2}} < e^{1.48}\} \\ &= P\{e^{-0.48} < b < e^{1.48}\} = 0.95 \end{aligned}$$

因此 b 的置信度为 0.95 的置信区间为 $(e^{-0.48}, e^{1.48})$.

【例 9】

设总体 X 的概率密度为 $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{3\theta^2}, & \theta < x < 2\theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 其中 θ 是未知参数,

$X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 若 $E(c \sum_{i=1}^n X_i^2) = \theta^2$, 则 $c =$ _____.

【解】 $E(c \sum_{i=1}^n X_i^2) = c \sum_{i=1}^n E(X_i^2) = cnE(X^2) = cn \int_{\theta}^{2\theta} \frac{2x^3}{3\theta^2} dx = cn \frac{5}{2} \theta^2 = \theta^2,$

$$c = \frac{2}{5n}.$$

人之为学, 不可自小, 又不可自大。

——顾炎武



第八章 假设检验*

。本章考点。

(仅数学一要求)

显著性检验 假设检验的两类错误 单个及两个正态总体的均值和方差的假设检验

一、假设检验

小概率事件在一次试验中实际上是不会发生的,这就是实际推断原理,又称小概率原理。

假设是指关于总体的论断或命题,常用字母“ H ”表示,假设分为基本假设 H_0 (又称原假设,零假设) 和备选假设 (又称备择假设,对立假设),还可将假设分为参数假设和非参数假设,参数假设是指已知总体分布函数形式,对其中未知参数的假设,其他的假设就是非参数假设,也可将假设分为简单假设和复合假设,完全决定总体分布的假设为简单假设,否则为复合假设。

假设检验: 根据样本,按照一定规则判断所做假设 H_0 的真伪,并作出接受还是拒绝接受 H_0 的决定。

由于依据样本来检验总体,接受一个假设并不意味着确信它是真的,拒绝一个假设也不意味着确信它是假的。

拒绝实际真的假设 H_0 (弃真) 称为第一类错误。

接受实际不真的假设 H_0 (纳伪) 称为第二类错误。

假设检验的两类错误

真实情况(未知)	所作决策	
	接受 H_0	拒绝 H_0
H_0 为真	正确	犯第一类错误
H_0 不真	犯第二类错误	正确

【例 1】 举例说明, H : _____ 是简单假设; H : _____ 是复合假设; H : _____ 是参数假设; H : _____ 是非参数假设。

【解】 例如, “ $X \sim N(0, 1)$ ” 是简单假设, 又是非参数假设; 当 μ 或 σ^2 未知时 “ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ” 是复合假设, 又是非参数假设。若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则当 σ^2 已知时 “ $\mu = 0$ ” 是简单参

* 仅数学一要求

数假设,而“ $\mu \leq 0$ ”是复合假设;当 σ^2 未知时“ $\mu = 0$ ”及“ $\mu \leq 0$ ”都是复合参数假设.

【例2】 已知总体 X 的概率密度只有两种可能,设

$$H_0: f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad H_1: f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

对 X 进行一次观测,得样本 X_1 ,规定当 $X_1 \geq \frac{3}{2}$ 时拒绝 H_0 ,否则就接受 H_0 ,则此检验的 α 和 β 分别为_____.

【解】 由检验的两类错误概率 α 和 β 的意义,知

$$\alpha = P\{X_1 \geq \frac{3}{2} | H_0\} = \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{4}$$

$$\beta = P\{X_1 < \frac{3}{2} | H_1\} = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{x}{2} dx = \frac{9}{16}$$

答案应填 $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{9}{16}$.

二、显著性检验

显著性水平:在假设检验中允许犯第一类错误的概率,记为 $\alpha(0 < \alpha < 1)$,则 α 称为检验的显著水平或检验水平,它表现了对 H_0 弃真的控制程度,一般 α 取0.1,0.05,0.01,0.001等值.

显著性检验:只控制第一类错误概率 α 的统计检验,称为显著性检验.

显著性检验的一般步骤

- (1) 根据问题要求提出原假设 H_0 ;
- (2) 给出显著性水平 $\alpha(0 < \alpha < 1)$;
- (3) 确定检验统计量及拒绝域形式;
- (4) 按犯第一类错误的概率等于 α 求出拒绝域 W ;
- (5) 根据样本值计算检验统计量 T 的观测值 t ,当 $t \in W$ 时,拒绝原假设 H_0 ;否则,接受原假设 H_0 .

三、正态总体参数的假设检验

设显著性水平为 α ,单个正态总体为 $N(\mu, \sigma^2)$ 的参数的假设检验以及两个正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 与 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的 $\mu_1 - \mu_2$ 和 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 的假设检验,列表如下:

检验参数	情形	假设		检验统计量	H_0 为真时 检验统计量 量的分布	拒绝域
		H_0	H_1			
μ	σ^2 已知	$\mu = \mu_0$ $\mu \leq \mu_0$ $\mu \geq \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$	$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$	$N(0, 1)$	$ U \geq u_{\frac{\alpha}{2}}$ $U \geq u_{\alpha}$ $U \leq -u_{\alpha}$
	σ^2 未知	$\mu = \mu_0$ $\mu \leq \mu_0$ $\mu \geq \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$	$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$	$t(n-1)$	$ T \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ $T \geq t_{\alpha}(n-1)$ $T \leq -t_{\alpha}(n-1)$

σ^2	μ 已知	$\sigma^2 = \sigma_0^2$ $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2(n)$	$\chi^2 \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)$ 或 $\chi^2 \geq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)$ $\chi^2 \geq \chi_{\alpha}^2(n)$ $\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2(n)$
	μ 未知	$\sigma^2 = \sigma_0^2$ $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2(n-1)$	$\chi^2 \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$ 或 $\chi^2 \geq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$ $\chi^2 \geq \chi_{\alpha}^2(n-1)$ $\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$
$\mu_1 - \mu_2$	σ_1^2, σ_2^2 已知	$\mu_1 - \mu_2 = \mu_0$ $\mu_1 - \mu_2 \leq \mu_0$ $\mu_1 - \mu_2 \geq \mu_0$	$\mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$ $\mu_1 - \mu_2 > \mu_0$ $\mu_1 - \mu_2 < \mu_0$	$U = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$N(0, 1)$	$ U \geq u_{\frac{\alpha}{2}}$ $U \geq u_{\alpha}$ $U \leq -u_{\alpha}$
	σ_1^2, σ_2^2 未知, 但 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\mu_1 - \mu_2 = \mu_0$ $\mu_1 - \mu_2 \leq \mu_0$ $\mu_1 - \mu_2 \geq \mu_0$	$\mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$ $\mu_1 - \mu_2 > \mu_0$ $\mu_1 - \mu_2 < \mu_0$	$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \mu_0}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$	$t(n_1 + n_2 - 2)$	$ T \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)$ $T \geq t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$ $T \leq -t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	μ_1, μ_2 已知	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$F = \frac{n_2 \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2}{n_1 \sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \mu_2)^2}$	$F(n_1, n_2)$	$F \leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1, n_2)$ 或 $F \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1, n_2)$ $F \geq F_{\alpha}(n_1, n_2)$ $F \leq F_{1-\alpha}(n_1, n_2)$
	μ_1, μ_2 未知	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	$F(n_1 - 1, n_2 - 1)$	$F \leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)$ 或 $F \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)$ $F \geq F_{\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)$ $F \leq F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)$

表中 $S_w = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$.

【例 3】 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是取自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单样本, 其中 μ, σ^2 未知, 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, Q^2 = \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2$, 则假设 $H_0: \mu = 0$ 的 t 检验使用统计量 $T = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解】 由于 σ^2 未知, H_0 为 $\mu = 0$, 因此 t 检验使用的统计量为 $T = \frac{\bar{X} - 0}{S/\sqrt{n}}$,

其中 $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} = \sqrt{\frac{Q^2}{n-1}}$, 从而得

$$T = \frac{\bar{X}}{\sqrt{\frac{Q^2}{n-1}} / \sqrt{n}} = \frac{\bar{X}}{Q} \sqrt{n(n-1)}$$

答案应填 $\frac{\bar{X}}{Q} \sqrt{n(n-1)}$.

【例 4】 设某次考试的学生成绩服从正态分布, 从中随机地抽取 36 位考生的成绩, 算得平均成绩为 66.5 分, 标准差为 15 分, 问在显著性水平为 0.05 下, 是否可以认为这次考试全

体考生的平均成绩为 70 分?并给出检验过程.

附表: t 分布表

$$P\{t(n) \leq t_p(n)\} = p$$

$t_p(n)$ \ p	0.95	0.975
n		
35	1.6896	2.0301
36	1.6883	2.0281

【解】 设该次考试的考生成绩为 X , 则 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 把从 X 中抽取的容量为 n 的样本均值记为 $\bar{X}$, 样本标准差为 S .

本题要在显著水平 $\alpha = 0.05$ 下检验假设

$$H_0: \mu = 70; H_1: \mu \neq 70$$

由于 σ^2 未知, 故用 t 检验, 选用检验统计量 $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n} \sim t(n-1)$.

现在 $\mu_0 = 70, n = 36$. 拒绝域为 $|t| = \frac{|\bar{x} - 70|}{S} \sqrt{36} \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(35)$.

由 $\bar{x} = 66.5, S = 15, t_{1-\frac{\alpha}{2}}(35) = t_{0.975}(35) = 2.0301$, 算得

$$|t| = \frac{|66.5 - 70|}{15} \sqrt{36} = 1.4 < 2.0301$$

所以接受假设 $H_0: \mu = 70$, 即在显著水平 0.05 下, 可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分.

【评注】 本题是 1998 年数学一的真题.

【例 5】 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本. 据此样本检测: 假设 $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$, 则

- (A) 如果在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下拒绝 H_0 , 那么在检验水平 $\alpha = 0.01$ 下必拒绝 H_0 .
- (B) 如果在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下拒绝 H_0 , 那么在检验水平 $\alpha = 0.01$ 下必接受 H_0 .
- (C) 如果在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下接受 H_0 , 那么在检验水平 $\alpha = 0.01$ 下必拒绝 H_0 .
- (D) 如果在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下接受 H_0 , 那么在检验水平 $\alpha = 0.01$ 下必接受 H_0 .

【解】 检验水平 α 为检验犯第一类错误的概率, 即 H_0 为真的条件下, 拒绝 H_0 而犯错误的概率, 显然当 α 变小时, 拒绝 H_0 的范围应变小, 接受 H_0 的范围应变大, 所以 $\alpha = 0.05$ 条件下接受 H_0 , 那么在 $\alpha = 0.01$ 条件下必接受 H_0 , 答案应选 (D).

不精不诚, 不能动人。

——《庄子·渔父》



金榜图书·书目

考研数学系列

书名	作者	出版时间
数学复习全书·基础篇(数学一、二、三通用)	李永乐 王式安 武忠祥	2020年6月
数学基础过关660题(数学一/数学二/数学三)	李永乐 王式安 武忠祥	2020年9月
数学复习全书(数学一/数学二/数学三)	李永乐 王式安 武忠祥	2020年12月
数学历年真题全精解析(数学一/数学二/数学三)	李永乐 王式安 武忠祥	2021年1月
数学公式的奥秘	武忠祥 姜晓千	2021年3月
高等数学辅导讲义	武忠祥	2021年3月
线性代数辅导讲义	李永乐	2021年3月
概率论与数理统计辅导讲义	王式安	2021年3月
高等数学(微积分)辅导讲义	曹显兵 刘喜波	2021年4月
概率论与数理统计辅导讲义	曹显兵	2021年4月
数学强化通关330题(数学一/数学二/数学三)	李永乐 王式安 武忠祥	2021年5月
数学历年真题全精解析·基础篇(数学一/数学二/数学三)	李永乐 王式安 武忠祥	2021年8月
数学决胜冲刺6套卷(数学一/数学二/数学三)	李永乐 王式安 武忠祥	2021年10月
数学临阵磨枪(数学一/数学二/数学三)	李永乐 刘喜波 章纪民	2021年10月
经济类联考数学复习全书	李永乐 王式安 章纪民	2021年4月
农学门类联考数学复习全书	李永乐 王式安 章纪民	2021年4月

大学数学系列

书名	作者	出版时间
大学数学线性代数辅导	李永乐	2018年12月
大学数学高等数学辅导	武忠祥 章纪民	2021年5月
大学数学概率论与数理统计辅导	刘喜波	2020年7月

考研政治系列

书名	作者	出版时间
思想政治理论大纲命题解析	米鹏	2021年5月
思想政治理论精雕细刻1000题	米鹏	2021年5月

思想政治理论大串讲	米鹏	2021 年 10 月
思想政治理论最后 20 天必背 20 题	米鹏	2021 年 10 月
考研政治复习手账	张纹	2021 年 5 月
考研政治时政与大题	张纹	2021 年 10 月
考研政治冲刺预测 5 套卷	张纹	2021 年 10 月
考研政治核心考点考前背诵	新东方国内大学项目事业部	2021 年 10 月
考研政治考前模拟 5 套卷	新东方国内大学项目事业部	2021 年 10 月
考研政治形势与政策及全年热点专题解析	新东方国内大学项目事业部	2021 年 10 月

考研英语系列

书名	作者	出版时间
考研英语语法和长难句实战突破 18 讲	全国考研英语金榜命题研究中心	2019 年 1 月
考研英语水平自测 3 套卷:英语一	全国考研英语金榜命题研究中心	2020 年 7 月
考研英语水平自测 3 套卷:英语二	全国考研英语金榜命题研究中心	2020 年 7 月
考研英语写作的奥秘:英语一	全国考研英语金榜命题研究中心	2020 年 8 月
考研英语写作的奥秘:英语二	全国考研英语金榜命题研究中心	2020 年 8 月
考研英语历年真题精析及复习思路:英语一(试卷版)	全国考研英语金榜命题研究中心	2020 年 9 月
考研英语历年真题精析及复习思路:英语二(试卷版)	全国考研英语金榜命题研究中心	2020 年 9 月
考研英语阅读理解精雕细刻 80 篇	全国考研英语金榜命题研究中心	2020 年 9 月
考研英语生猛海词	赵亮	2019 年 1 月
考研词伙	李超	2019 年 3 月
考研句伙	李超	2019 年 4 月
词维风暴	姜晗	2019 年 9 月
词法风暴	姜晗	2020 年 3 月
考研英语阅卷人写作高分万能模板	方妍	2018 年 11 月
考研英语语法长难句拆分攻略	欧阳栾天	2018 年 9 月
考研英语长难句核心语法	高维	2020 年 3 月

教师资格考试系列

书名	作者	出版时间
综合素质·中小学	新东方国内大学项目事业部	2020 年 1 月

教育教学知识与能力·小学	新东方国内大学项目事业部	2020 年 1 月
教育知识与能力·中学	新东方国内大学项目事业部	2020 年 1 月

医师资格考试系列

书名	作者	出版时间
贺银成国家临床执业医师资格考试辅导讲义(上册)	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业医师资格考试辅导讲义(下册)	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业医师资格考试辅导讲义同步练习	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业医师资格考试全真模拟试卷及精析	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业及助理医师资格考试历年考点精析(上册)试题	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业及助理医师资格考试历年考点精析(下册)答案及精析	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业及助理医师资格考试实践技能应试指南	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试辅导讲义(上、下册)	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试辅导讲义同步练习	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试全真模拟试卷及精析	贺银成	2020 年 12 月
乡村全科执业助理医师资格考试考点精编	高鑫	2020 年 12 月
乡村全科执业助理医师资格考试实践技能应试指南	高鑫	2020 年 12 月
乡村全科执业助理医师资格考试习题精练精析	王大群 李慧婷	2020 年 12 月

考研西医系列

书名	作者	出版时间
贺银成考研西医临床医学综合能力辅导讲义(上、下册)	贺银成	2021 年 2 月
贺银成考研西医临床医学综合能力辅导讲义同步练习	贺银成	2021 年 3 月
贺银成考研西医临床医学综合能力全真模拟试卷及精析	贺银成	2021 年 3 月
贺银成考研西医临床医学综合能力历年真题精析	贺银成	2021 年 3 月

专业硕士系列

书名	作者	出版时间
数学复习指南	罗瑞	2019 年 1 月
逻辑复习指南	房文学	2019 年 6 月
写作复习指南	房文学	2019 年 8 月

中外名著系列

书名	作者	出版时间
小王子	[法]安托万·德·圣-埃克苏佩里	2018 年 12 月
飞鸟集	[印]泰戈尔	2018 年 12 月
瓦尔登湖	[美]亨利·戴维·梭罗	2018 年 12 月
了不起的盖茨比	[美]弗·司各特·菲茨杰拉德	2018 年 12 月
简·爱	[英]夏洛蒂·勃朗特	2018 年 12 月
老人与海	[美]海明威	2018 年 12 月
月亮和六便士	[英]威廉·萨默塞特·毛姆	2018 年 12 月
呼啸山庄	[英]艾米莉·简·勃朗特	2018 年 12 月
傲慢与偏见	[英]简·奥斯丁	2018 年 12 月
双城记	[英]查尔斯·狄更斯	2019 年 3 月
朝花夕拾·呐喊	鲁迅	2018 年 4 月
呼兰河传	萧红	2018 年 4 月
骆驼祥子	老舍	2018 年 4 月
我这一辈子	老舍	2018 年 4 月
茶馆	老舍	2018 年 4 月

以上图书书名及出版时间仅供参考,以实际出版物为准,均属北京时代巨流文化有限公司!

金榜图书编辑部电话:(010)51906740

金榜图书天猫官方店店名:时代巨流图书专营店

新浪微博:@金榜图书官方微博

微信公众号:金榜图书考研



@金榜图书官方微博



天猫
时代巨流图书专营店





乡村艺术Ke梦想社

音体美教师 志愿者招募

不要被摩天大厦挡个正着

去青瓦淡墨乡间

用我们的方式热爱这个时代



TEACH FOR CHINA

招募：乡村小学音体美青年教师志愿者

项目简介

乡村艺术Ke梦想社创办于2017年，旨在改善乡村音体美教师紧缺现状，让乡村儿童感受音体美艺术之美，让更多的孩子，无论出身，都能获得同等的优质教育。梦想社创立之初，便启动了“助力乡村学校音体美课堂”行动计划，截止目前，该计划已牵手近300余名青年志愿者，落地学校已达10所。（详情敬请关注公众号“乡村艺术ke梦想社”）为善益众，求贤若渴，我们，正在远方，等着如诗般的你！

成为志愿者你将获得

- 服务学校包吃包住
- 每月1500元补助
- 志愿者服务期间的短期保障保险
- 方寸天地得享人生意趣，大美原乡遍寻香径落花

我们希望你

- 品行端正，有爱心，有耐心
- 身体健康，能适应艰苦乡村环境
- 受过良好教育且有音体美专业特长
- 认真负责，充满正能量，支教有清晰规划
- 吃苦耐劳，乐于助人，有良好的团队合作精神

报名方式

Step 1.

请以“**报名2020乡村艺术Ke梦想社音体美教师志愿者**”为邮件标题，发送邮件至：

CountryClass@126.com

Step 2.

邮件内容：正文简要介绍你对社会公益的理解，

参加本次活动的原
因及您的一技之长；

附件1：支教课程设计（包括3节课以上的教案或课件）

附件2：个人简历（Word格式）



主编 推荐

本套考研数学系列图书自出版以来，一直深受历届考研学生的喜爱，作为主编，我们深感欣慰。在编写该系列图书的过程中，我们偕同每一位编写老师力求将数学的内容写得容易理解，让学生有个循序渐进的学习过程。希望同学们通过学习，不仅能够掌握基本理论知识，还具备运用知识分析、解决问题的能力。

——王式安 李永乐 武忠祥

金榜时代考研数学系列

书名	出版时间	适用阶段
数学公式的奥秘	2020年3月	全程复习
数学复习全书·基础篇	2020年6月	夯实基础
数学基础过关660题	2020年8月	夯实基础
数学历年真题全精解析·基础篇	2020年8月	夯实基础
数学复习全书	2020年12月	全程复习
数学历年真题全精解析	2021年1月	全程复习
高等数学辅导讲义	2021年3月	全程复习
线性代数辅导讲义	2021年3月	全程复习
概率论与数理统计辅导讲义	2021年3月	全程复习
数学强化通关330题	2021年4月	强化提高
数学决胜冲刺6套卷	2021年10月	冲刺预测
数学临阵磨枪	2021年10月	冲刺预测

G20210001



微信扫一扫
解锁更多精彩内容



关注作者团队微博
与名师一起互动交流



责任编辑 / 吕睿

ISBN 978-7-109-26836-4



9 787109 268364 >

定价：69.80元