

“助力乡村学校音体美课堂行动”官方合作图书
V研客及全国各大考研培训学校指定用书

金榜时代TM
GLIST 明德·弘毅·品质 02

金榜时代 考研 数学 系列

数学基础过关 660题 答案册 (数学一)

2022

编著◎李永乐 王式安 刘喜波 宋浩 姜晓千 铁军 武忠祥 章纪民 李正元 蔡燧林 胡金德

主编建议 | 与《数学复习全书·基础篇》、《历年真题全精解析·基础篇》配合使用●无基础 不数学!

通关攻略 | 赠送《通关攻略》，内含复习指导，量化题与知识点，记录练习成果，统计薄弱考点●二刷三刷必备攻略

刷题绝配 | 微信扫右侧二维码即可[免费观看](#)全部重点题、难题超精讲视频



中国农业出版社
CHINA AGRICULTURE PRESS



金榜图书用户

专享福利活动

赠送

¥1000

代金券

适用于：李永乐老师全套图书以及课程

1. 活动参与方式

关注公众号 金榜时代考研 ▶ 回复 “22考研上岸” 即可参与

2. 活动时间

2020年8月20日——2021年11月24日

3. 兑换方式

进群咨询管理员兑换千元代金券

QQ群：1019913136

扫右侧二维码即可进群



“助力乡村学校音体美课堂行动”官方合作图书
V研客及全国考研培训学校指定用书

金榜时代TM
GLIST 明德·弘毅·品质 02

金榜时代 考研数学系列

数学基础过关 660题 答案册 (数学一)

2022

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

编著◎李永乐 王式安 刘喜波 宋浩 姜晓千 铁军 武忠祥 章纪民 李正元 蔡燧林 胡金德

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)

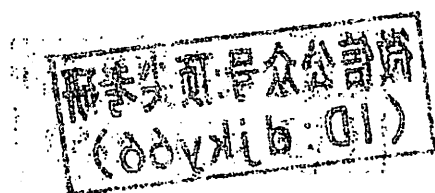
@考研路上刚刚启程的你

业精于勤，荒于嬉；行成于思，毁于随。

中国农业出版社
CHINA AGRICULTURE PRESS

·北京·

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



目录 Contents

基础过关 1 阶

高等数学

填空题.....	3
选择题	52

微信公众号【顶尖考研】

线性代数

填空题.....	122
选择题.....	142

概率论与数理统计

填空题.....	160
选择题.....	180

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

基础过关 2 阶

高等数学

填空题.....	205
选择题.....	219

第 一 章 导 论

一、导论

..... 1

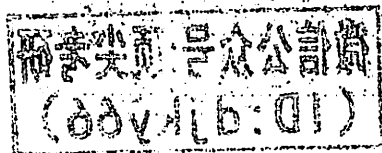
..... 2

微信公众号【顶尖考研】

(ID: djky66)

..... 3

..... 4



..... 5

..... 6

第 二 章 导 论

二、导论

..... 7

..... 8

基础过关



微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

1阶

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

微信公众号【考研】
(ID: djl)

微信号: djl
(ID: djl)



高等数学

填空题

1

【答案】

$$f(g(x)) = \begin{cases} -1, & x < \frac{1}{3} \\ 0, & x = \frac{1}{3} \\ 1, & x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

【分析】

$$g(x) = e^{2x-1} - e^{-x} = 0, x = \frac{1}{3}, \text{ 所以 } f(g(x)) = \begin{cases} -1, & x < \frac{1}{3} \\ 0, & x = \frac{1}{3} \\ 1, & x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

2

【答案】 -2

【分析】

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2,$$

所以 $f(x) = x^2 - 2, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2$.

难吗? 不会做? 可以看
《数学复习全书·基础篇》
高数第一章
函数 极限 连续

3

【答案】 -1

【分析】

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2} - 1) \frac{2x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}}{\ln(1-x^2) \sin \frac{x}{1+x}}$$

用等价无穷小因子替换: $x \rightarrow 0$ 时

$$e^{x^2} - 1 \sim x^2, \ln(1-x^2) \sim -x^2, \sin \frac{x}{1+x} \sim \frac{x}{1+x} \sim x$$

得

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 \cdot 2x}{-x^2 \cdot x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \right) = -1$$

【评注】 在计算极限时, 正确利用等价无穷小因子的代换定理能简化计算. 常用到的等价无穷小有:

$$\text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } \sin x \sim x, \tan x \sim x, \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2,$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a (a > 0), \ln(1+x) \sim x.$$

4

【答案】 e^2

【分析】

因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \sqrt{\frac{x+1}{x^2}} = \cos 0 = 1$, 所以只须求

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$J = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$$

方法1 这是指数型(1^∞)极限,用求指数型极限的一般方法:

$$J = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)}$$

转化为求

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right) & \stackrel{t = \frac{1}{x}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin 2t + \cos t)}{t} \\ & \stackrel{\text{洛必达}}{\text{法则}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2\cos 2t - \sin t}{\sin 2t + \cos t} = 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow J = e^2, I = (e^2)^1 = e^2.$$

方法2 用求 1^∞ 型极限的方法:

$$\begin{aligned} J &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right) + 1 \right]^{\frac{1}{\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1} \cdot x \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{其中} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right) & \stackrel{t = \frac{1}{x}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2t + \cos t - 1}{t} \\ & \stackrel{\text{洛必达}}{\text{法则}} \lim_{t \rightarrow 0^+} (2\cos 2t - \sin t) = 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow J = e^2, I = (e^2)^1 = e^2.$$

5 【答案】 $\frac{1}{3}$

【分析】 方法1 $\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5} = x \left(\sqrt[6]{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right) - x \left(\sqrt[6]{1 - \frac{1}{x}} - 1 \right)$

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt[6]{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right) - \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt[6]{1 - \frac{1}{x}} - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{x} \right) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \times \frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{x} \right) \right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

【评注】 这里先作恒等变形后利用了等价无穷小因子替换:

$$(1+t)^a - 1 \sim at \quad (t \rightarrow 0).$$

方法2 这是求 $\infty - \infty$ 型的极限,先转化为 $\frac{0}{0}$ 型极限,然后再用洛必达法则.

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[6]{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt[6]{1 - \frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \\ & \stackrel{t = \frac{1}{x}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(1+t)^{\frac{1}{6}} - (1-t)^{\frac{1}{6}}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{6} (1+t)^{-\frac{5}{6}} + \frac{1}{6} (1-t)^{-\frac{5}{6}} \right) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

6

【答案】 0

【分析】 这是 $\frac{0}{0}$ 型极限, 先作如下变形:

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x^2 - 2 \sin x + \sin 2x}{x^4}$$

可用的方法是洛必达法则(计算较繁)与泰勒公式.

注意泰勒公式

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \quad (x \rightarrow 0) \quad (x^4 \text{ 项系数为 } 0)$$

 $\Rightarrow$

$$x \sin x^2 = x(x^2 + o(x^4)) = x^3 + o(x^4)$$

$$-2 \sin x = -2\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right) = -2x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$$

$$\sin 2x = 2x - \frac{1}{6}(2x)^3 + o(x^4) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^4)$$

相加得

$$x \sin x^2 - 2 \sin x + \sin 2x = 0 + o(x^4) \quad (x \rightarrow 0)$$

因此

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^4)}{x^4} = 0$$

【评注】 如果求

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x^2 - 2 \sin x + \sin 2x}{x^5}$$

就要把 $\sin x$ 展开到 x^5 项:

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5) \quad (x \rightarrow 0)$$

然后可得

$$x \sin x^2 - 2 \sin x + \sin 2x = \frac{1}{4}x^5 + o(x^5) \quad (x \rightarrow 0)$$

于是

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4}x^5 + o(x^5)}{x^5} = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}$$

7

【答案】 $\frac{1}{n!}$

【分析】 方法 1 用等价无穷小因子替换

$$\sqrt[m]{1+x} - 1 = (1+x)^{\frac{1}{m}} - 1 \sim \frac{x}{m} \quad (x \rightarrow 0)$$

得 $\sqrt[m]{\cos x} - 1 = \sqrt[m]{1 + \cos x - 1} - 1 \sim \frac{\cos x - 1}{m} \quad (x \rightarrow 0)$, 于是

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{(\cos x - 1) + 1})(1 - \sqrt[3]{(\cos x - 1) + 1}) \cdots (1 - \sqrt[n]{(\cos x - 1) + 1})}{(1 - \cos x)^{n-1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{(\cos x - 1) + 1} - 1}{\cos x - 1} \right) \times \left(\frac{\sqrt[3]{(\cos x - 1) + 1} - 1}{\cos x - 1} \right) \times \cdots \times \left(\frac{\sqrt[n]{(\cos x - 1) + 1} - 1}{\cos x - 1} \right)$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(\cos x - 1)}{\cos x - 1} \times \frac{\frac{1}{3}(\cos x - 1)}{\cos x - 1} \cdots \frac{\frac{1}{n}(\cos x - 1)}{\cos x - 1}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \cdots \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}.$$

方法2 用等价无穷小因子替换:

$$t \sim \ln(1+t) \quad (t \rightarrow 0)$$

$$(\cos x)^{\frac{1}{m}} - 1 \sim \ln[(\cos x)^{\frac{1}{m}} - 1 + 1] = \frac{1}{m} \ln \cos x \quad (x \rightarrow 0)$$

因此

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{\cos x} - 1)(\sqrt[3]{\cos x} - 1) \cdots (\sqrt[n]{\cos x} - 1)}{(\cos x - 1)^{n-1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt{\cos x} \ln \sqrt[3]{\cos x} \cdots \ln \sqrt[n]{\cos x}}{(\cos x - 1)^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \cdots \times \frac{1}{n} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^{n-1} \cos x}{(\cos x - 1)^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln[(\cos x - 1) + 1]}{\cos x - 1} \right)^{n-1} = \frac{1}{n!}.$$

方法3 用极限的四则运算法则,这是 $n-1$ 个极限的乘积,分别求每个 $\frac{0}{0}$ 型极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[m]{\cos x}}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{m}(\cos x)^{\frac{1}{m}-1} \sin x}{\sin x} = \frac{1}{m}, (m = 2, 3, \cdots, n).$$

于是

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{\cos x}}{1 - \cos x} \cdots \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[n]{\cos x}}{1 - \cos x}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \cdots \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}.$$

8

【答案】 e

【分析】 这是 ∞^0 型极限,先作恒等变形

$$I = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{x^2} \left(1 + \frac{x^3}{e^{x^2}} \right) \right)^{\frac{1}{x^2}} = e \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x^2} \ln \left(1 + \frac{x^3}{e^{x^2}} \right)}$$

又

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \ln \left(1 + \frac{x^3}{e^{x^2}} \right) \xrightarrow[\text{因子替换}]{\text{等价无穷小}} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^3}{e^{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{x^2}}$$

$$\xrightarrow[\text{洛必达法则}]{\frac{\infty}{\infty}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = 0$$

其中

$$\ln \left(1 + \frac{x^3}{e^{x^2}} \right) \sim \frac{x^3}{e^{x^2}} \quad (x \rightarrow \infty)$$

因此,

$$I = e \cdot e^0 = e$$

9

【答案】 1

【分析】 $\int_{x^2}^x \frac{\sin(xt)}{t} dt \stackrel{xt=s}{=} \int_{x^3}^{x^2} \frac{\sin s}{s} ds$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{x^3}^{x^2} \frac{\sin s}{s} ds}{x^2} \stackrel{\text{洛必达法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x^2}{x^2} \times 2x - \frac{\sin x^3}{x^3} \times 3x^2}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2} \times \frac{\sin x^3}{x^3} \times x = 1 - \frac{3}{2} \times 1 \times 0 = 1. \end{aligned}$$

10

【答案】 $\ln 2$

【分析】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (2^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x+1}}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{\frac{1}{x+1}} x^2 (2^{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}} - 1)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (2^{\frac{1}{x(x+1)}} - 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \frac{1}{x(x+1)} \ln 2 = \ln 2. \end{aligned}$$

11

【答案】 1

【分析】 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x^2 \ln(x^2 + x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x^2 + x)} = e^0 = 1.$

12

【答案】 2

【分析】 方法1 这是 $\infty \cdot 0$ 型的数列极限, 转化为求 $\frac{0}{0}$ 型的函数极限, 然后用洛必达法则.

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan \frac{2}{n} - \arctan \frac{2}{n(1 + \frac{1}{n})}}{\frac{1}{n^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan 2x - \arctan \frac{2x}{1+x}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2}{1+4x^2} - \frac{1}{1 + \frac{4x^2}{(1+x)^2}} \cdot \frac{2(1+x) - 2x}{(1+x)^2}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+x)^2 - 1}{x(1+4x^2)((1+x)^2 + 4x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2+x}{(1+4x^2)((1+x)^2 + 4x^2)} = 2. \end{aligned}$$

方法2 这是 $\infty \cdot 0$ 型极限, 为简化计算设法寻求 $\arctan \frac{2}{n} - \arctan \frac{2}{n+1}$ 的等价无穷小,

它是 $f(x) = \arctan x$ 的改变量 $f\left(\frac{2}{n}\right) - f\left(\frac{2}{n+1}\right)$. 由拉格朗日中值定理, 它可改写成

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$\begin{aligned}\arctan \frac{2}{n} - \arctan \frac{2}{n+1} &= f\left(\frac{2}{n}\right) - f\left(\frac{2}{n+1}\right) = f'(\xi)\left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{1+\xi^2} \cdot \frac{2}{n(n+1)} \sim \frac{2}{n(n+1)} \quad (n \rightarrow \infty)\end{aligned}$$

其中 $\frac{2}{n+1} < \xi < \frac{2}{n}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{1+\xi^2} \rightarrow 1$.

$$\text{因此, } I = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \frac{2}{n(n+1)} = 2.$$

【评注】 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$.

求形如

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(y_n) - f(z_n)]$$

的数列极限($\infty \cdot 0$ 型), 可考虑用拉格朗日中值定理, 转化为求

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - z_n) \cdot f'(\xi)$$

其中 ξ 在 y_n 与 z_n 之间.

13 【答案】 $-\frac{\sqrt{e}}{4}$

$$\begin{aligned}\text{【分析】 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} - \sqrt{e} \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[e^{\frac{n}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)} - e^{\frac{1}{2}} \right] \\ &= e^{\frac{1}{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[e^{\frac{1}{2} (n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1)} - 1 \right] \\ &= e^{\frac{1}{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \cdot \frac{1}{2} \left[n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \right] \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{e}}{4}\end{aligned}$$

14 【答案】 2

$$\text{【分析】 由 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right)}{x} = 3 \quad (1)$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, 分母为无穷小, 所以分子也为无穷小, 进一步有 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \frac{f(x)}{x}\right) = 0$.

因此, 当 $x \rightarrow 0$ 时

$$\ln \left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right) \sim x + \frac{f(x)}{x}, \text{ 所以 (1) 可写为 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{f(x)}{x}}{x} = 3.$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 2.$$

15 【答案】 $\frac{1}{2}$

【分析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + xf(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1-x) + x}{x^2} + \frac{xf(x) - x}{x^2} \right] = 0,$
而 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + x}{x^2} = -\frac{1}{2}$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{1}{2}.$

16 【答案】 $\ln 3$

【分析】 先求出 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{x'}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}} = e^0 = 1$

由函数的连续性得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x^{\frac{1}{x}}) = f(1) = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln[2 + f(x^{\frac{1}{x}})] = \ln 3.$

17 【答案】 $-1, 0$

【分析】 由泰勒展开, 当 $x \rightarrow \infty$ 时,

$$\sqrt[3]{1-x^6} = -x^2 \left(1 - \frac{1}{x^6} \right)^{\frac{1}{3}} = -x^2 \left(1 - \frac{1}{3x^6} + o(x^{-6}) \right)$$

所以 $a = -1, b = 0.$

18 【答案】 $-p$

【分析】 因为 $|x|$ 是分段函数, 分界点是 $x = 0$, 又 $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$ 不存在, 但 $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$, 所以要分别求左、右极限.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a + be^{\frac{1}{x}}}{a - be^{\frac{1}{x}}} \cdot \frac{\sin px}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ae^{-\frac{1}{x}} + b}{ae^{-\frac{1}{x}} - b} \cdot \frac{px}{x} = \frac{0+b}{0-b} \cdot p = -p$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a + be^{\frac{1}{x}}}{a - be^{\frac{1}{x}}} \cdot \frac{\sin px}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a + be^{\frac{1}{x}}}{a - be^{\frac{1}{x}}} \cdot \frac{px}{-x} = \frac{a+0}{a-0} \cdot (-p) = -p$$

因此 $I = -p.$

19 【答案】 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

【分析】 显然

$$0 < x_n = \frac{2(1+x_{n-1})-1}{1+x_{n-1}} = 2 - \frac{1}{1+x_{n-1}} < 2 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

即 x_n 有界.

令 $f(x) = 2 - \frac{1}{1+x} \Rightarrow f(x) \nearrow (x \geq 0) \Rightarrow x_{n+1} = f(x_n) (n=1, 2, 3, \dots)$ 单调.

因此 x_n 收敛, 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

对递归方程 $x_n = \frac{1+2x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$ 两边取极限得

$$a = \frac{1+2a}{1+a}, \text{即 } a^2 - a - 1 = 0$$

解得 $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

【评注】也可按定义证明 x_n 单调. 考察

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \left(2 - \frac{1}{1+x_n}\right) - \left(2 - \frac{1}{1+x_{n-1}}\right) = \frac{1}{1+x_{n-1}} - \frac{1}{1+x_n} \\ &= \frac{x_n - x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

又 $x_1 = 1 < x_2 = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}$, 由归纳法可知 $x_n \nearrow$.

20 【答案】 $n+1$

【分析】已知 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = A \neq 0 (\exists)$, 求正数 k 使得 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\int_a^x f(t) dt}{(x-a)^k} \exists \neq 0$.

这是 $\frac{0}{0}$ 型极限, 用洛必达法则得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\int_a^x f(t) dt}{(x-a)^k} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{k(x-a)^{k-1}} \xrightarrow{\text{取 } k=n+1} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(n+1)(x-a)^n} \\ &= \frac{A}{n+1} \neq 0 (\exists) \Rightarrow \int_a^x f(t) dt \text{ 是 } (x-a) \text{ 的 } (n+1) \text{ 阶无穷小.} \end{aligned}$$

21 【答案】 6

【分析】确定 $n > 0$ 使得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x-\sin x} \ln(1+t) dt}{x^n} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+(x-\sin x))(1-\cos x)}{nx^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-\sin x) \frac{1}{2} x^2}{nx^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-\sin x}{nx^{n-3}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{n(n-3)x^{n-4}} \stackrel{\text{取 } n=6}{=} \frac{1}{72} \neq 0. \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \ln(1+(x-\sin x)) &\sim x-\sin x \quad (x \rightarrow 0) \\ 1-\cos x &\sim \frac{1}{2} x^2 \quad (x \rightarrow 0) \end{aligned}$$

应填 $n=6$.

22 【答案】 $-1, \frac{4}{3}$

【分析】 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{\ln(1+3x)} = \frac{1}{3}$

要使得函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点极限存在, 必须满足

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x (b \cos x - 1)}{e^x + a} = \frac{1}{3}$$

故 $a = -1$, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x (b \cos x - 1)}{e^x - 1} = b - 1 = \frac{1}{3}$$

$$b = \frac{4}{3}.$$

23 【答案】 $a = -1, b = \ln 2$

【分析】 先分别考察 $f(x), g(x)$ 的连续性.

对 $\forall a, x \neq 0$ 时 $f(x)$ 连续, $x = 0$ 时 $f(x)$ 左连续, $f(0) = 6$.

$$\begin{aligned} \text{又} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax^3} - 1}{x - \arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax^3}{x - \arcsin x} \\ &\stackrel{t = \arcsin x}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{a \sin^3 t}{\sin t - t} = a \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^3}{\sin t - t} \\ &= a \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{3t^2}{\cos t - 1} = -6a \end{aligned}$$

仅当 $a = -1$ 时 $f(x)$ 在 $x = 0$ 右连续. 因此, 仅当 $a = -1$ 时 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续.

对 $\forall b, x \neq 1$ 时 $g(x)$ 连续, $x = 1$ 时 $g(x)$ 右连续, $g(1) = e^b + 1$, 又

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3 \sin(x-1)}{x-1} = 3,$$

仅当 $e^b + 1 = 3$, 即 $e^b = 2, b = \ln 2$ 时 $g(x)$ 在 $x = 1$ 左连续. 因此, 仅当 $b = \ln 2$ 时 $g(x)$ 在 $x = 1$ 连续.

现由连续性运算法则知, $b = \ln 2, a = -1$ 时 $f(x) + g(x)$ 处处连续.

$a \neq -1$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 不连续, $g(x)$ 在 $x = 0$ 连续

$\Rightarrow f(x) + g(x)$ 在 $x = 0$ 不连续.

$b \neq \ln 2$ 时, $f(x)$ 在 $x = 1$ 连续, $g(x)$ 在 $x = 1$ 不连续

$\Rightarrow f(x) + g(x)$ 在 $x = 1$ 不连续.

因此, 仅当 $a = -1, b = \ln 2$ 时 $f(x) + g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 处处连续.

24 【答案】 $(1, e)$

【分析】 $f(x)$ 只有间断点 $x = a, x = b$.

当 $a = 1, b = e$ 时

$$f(x) = \frac{e^x - e}{(x-1)(x-e)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{(x-1)(x-e)} = \frac{1}{1-e} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x-1} = \frac{e}{1-e},$$

$x = 1$ 为可去间断点.

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{e^x - e}{(x-1)(x-e)} = \infty$$

$x = e$ 为无穷间断点.

当 $a = e, b = 1$ 时

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{(x-e)(x-1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow e} f(x) = \infty.$$

$x=1, x=e$ 均为无穷间断点. 因此, $(a, b) = (1, e)$.

25 【答案】 $(-\infty, +\infty)$.

【分析】 先求出 $f(x)$.

$$x < 0 \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}} = \frac{x + 0}{1 + 0} = x,$$

$$x = 0 \text{ 时, } f(0) = 0,$$

$$x > 0 \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x e^{-nx} + x^2}{1 + e^{-nx}} = \frac{0 + x^2}{1 + 0} = x^2.$$

因此
$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$$

$f(x)$ 处处连续, 即连续区间是 $(-\infty, +\infty)$.

26 【答案】
$$\begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(2xe^{x^2-1} - 1), & x > 1 \end{cases}$$

【分析】 注意在 $x=1$ 处 $\arctan x = \frac{1}{2}(e^{x^2-1} - x) + \frac{\pi}{4}$. 易得

$$f'(x) = (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, x \leq 1$$

其中 $x=1$ 处是 $f'_-(1) = \frac{1}{1+x^2} \Big|_{x=1} = \frac{1}{2}$.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2}(e^{x^2-1} - x) + \frac{\pi}{4} \right)' = \frac{1}{2}(2xe^{x^2-1} - 1), x \geq 1$$

其中 $x=1$ 处是 $f'_+(1) = \frac{1}{2}(2xe^{x^2-1} - 1) \Big|_{x=1} = \frac{1}{2}$.

因为 $f'_+(1) = f'_-(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$.

因此
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(2xe^{x^2-1} - 1), & x > 1 \end{cases}$$

27 【答案】
$$\begin{cases} \frac{-x - (1-x)\ln(1-x)}{x^2(1-x)}, & -\infty < x < 1, x \neq 0 \\ -\frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

【分析】 首先由 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续确定 b 值:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+bx)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx}{x} = b = f(0) = -1$$

$\Rightarrow b = -1$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-x)}{x}, & -\infty < x < 1, x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$$

$x \neq 0$ 时

$$f'(x) = \frac{\frac{-x}{1-x} - \ln(1-x)}{x^2} = \frac{-x - (1-x)\ln(1-x)}{x^2(1-x)} \quad (-\infty < x < 1, x \neq 0)$$

下求 $f'(0)$.

方法 1 按定义求 $f'(0)$.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1-x)}{1-x} + 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + x}{x^2} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{1-x} + 1}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-1 + 1 - x}{2x} \cdot \frac{1}{1-x} \right) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

或用泰勒公式

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) + x}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

方法 2 在连续的条件下求 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$.

已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 在 $x=0$ 空心邻域可导, 于是

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - (1-x)\ln(1-x)}{x^2(1-x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - (1-x)\ln(1-x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \frac{1-x}{1-x} + \ln(1-x)}{2x} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

因此

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-x - (1-x)\ln(1-x)}{x^2(1-x)}, & -\infty < x < 1, x \neq 0 \\ -\frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

【评注】 求形如 $f(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq x_0 \\ A, & x = x_0 \end{cases}$ 分段函数在分段点处的导数时一般要用定义来求, 或函数在分段点连续的条件下求导数的极限. 即用下面定理求分段函数在分段点的导数: (1) $f(x)$ 在 x_0 处连续; (2) $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域内可导, (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ 存在, 则

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x).$$

28 **【答案】** $\alpha > 1, \alpha > 2$

【分析】 只要考虑 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的情况.

若 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导, 则

$$f'(0) = f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} h = 0$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

所以
$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^\alpha \sin \frac{1}{h}}{h} = 0, \alpha > 1$$

若 $f'(x)$ 在 $x=0$ 点连续, 则当 $x > 0$ 时,

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x} \right) = f'(0) = 0$$

所以 $\alpha > 2$.

29 【答案】 $-\frac{1}{2}$

【分析】 $f'(x)$ 也以 3 为周期且是奇函数:

$$f'(5) = f'(2) = -f'(-2)$$

现按导数定义求此极限.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5-2\sin h) - f(5)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(5-2\sin h) - f(5)}{-2\sin h} \times \frac{-2\sin h}{h} \right] \\ &= -2f'(5) = -2 \times (-f'(-2)) \\ &= 2 \times (-1) = -2 \end{aligned}$$

因此, 原极限 $= -\frac{1}{2}$.

30 【答案】 e^6

【分析】 这是指数型的数列极限, 先化为

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \ln f\left(\frac{1}{n}\right)}$$

转化为求

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \ln f\left(\frac{1}{n}\right)}{1 - \cos \frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2} \frac{1}{n^2}} \left[\ln f\left(\frac{1}{n}\right) - \ln f(0) \right] \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln f\left(\frac{1}{n}\right) - \ln f(0)}{\frac{1}{n}} = 2 \times (\ln f(x))' \Big|_{x=0} \\ &= 2 \times \frac{f'(0)}{f(0)} = 2 \times 3 = 6 \\ \Rightarrow I &= e^6. \end{aligned}$$

【评注】 下面方法是错误的.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln f\left(\frac{1}{n}\right) - \ln f(0)}{\frac{1}{n}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln f(t) - \ln f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{f'(t)}{f(t)}}{1} = \frac{f'(0)}{f(0)}$$

这是因为题设中没有假设 $f(x)$ 在 $x=0$ 邻域可导及 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续.

31

【答案】 $\frac{1}{2}f''(a)$

【分析】

方法 1

$$I = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - hf'(a)}{h^2} \quad (1)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{2h} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2}f''(a) \quad (3)$$

(1) 式到(2)式用了洛必达法则, (2) 式到(3)式利用了 $f'(x)$ 在 $x=a$ 处的导数定义.

【评注】 由于题设中没有 $f''(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内存在及 $f''(x)$ 在 $x=a$ 是连续的, 所以(2)式到(3)不能利用洛必达法则. 由 $f''(a) \exists \Rightarrow f'(x)$ 在 $x=a$ 某邻域可导, 对(1)式可用洛必达法则.

方法 2 用泰勒公式.

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + o(h^2) \quad (h \rightarrow 0)$$

$$\frac{f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + o(h^2)}{h} - f'(a)$$

代入得

$$I = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + o(h^2)}{h} - f'(a)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}f''(a) + \frac{o(h^2)}{h^2} \right) = \frac{1}{2}f''(a).$$

32

【答案】 $x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$

【分析】

$$f(x) = x^{\sin x} = e^{\sin x \cdot \ln x},$$

$$f'(x) = e^{\sin x \cdot \ln x} (\sin x \cdot \ln x)' = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right).$$

33

【答案】 $2(n!)^2$

【分析】

记 $g(x) = (x+1)^2(x+2)^2 \cdots (x+n)^2$, 则

$$f(x) = x^2 g(x), f'(x) = 2xg(x) + x^2 g'(x)$$

$$f''(x) = 2g(x) + 4xg'(x) + x^2 g''(x)$$

因此, 令 $x=0$ 得

$$f''(0) = 2g(0) = 2(n!)^2$$

34

【答案】

$$\frac{1}{t}; -\frac{1+t^2}{t^3}; \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

【分析】

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_i}{x'_i} = \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t}{1+t^2}} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dy}{dx} \right)'_i}{x'_i} = -\frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{\frac{t}{1+t^2}} = -\frac{1+t^2}{t^3}$$

知识点链接

《数学复习全书·基础篇》
高数第二章
导数与微分

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$y = y(x)$ 的曲率

$$K = \frac{|y''(x)|}{(1 + y'^2(x))^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1+t^2}{|t|^3}}{\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

【评注】(1) 通常将一阶导数化简后,再计算二阶导数会简单些.

(2) 注意 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)'$, 通常易犯的错误是 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)'$.

35

【答案】 $-\frac{y}{(1 - \cos(x+y))^3}$

【分析】 将方程两边对 x 求导得

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x+y) \left(1 + \frac{dy}{dx}\right)$$

解出

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x+y)}{1 - \cos(x+y)} \quad \left(1 + \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - \cos(x+y)}\right)$$

再对 x 求导得

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 - \cos(x+y)} \right) = -\frac{\sin(x+y)}{(1 - \cos(x+y))^2} (1 + y')$$

代入 $1 + y'$ 的表达式得

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\sin(x+y)}{(1 - \cos(x+y))^3} = -\frac{y}{(1 - \cos(x+y))^3}$$

36

【答案】 $-\frac{e^x}{(1 + e^x)^3}$

【分析】 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1 + e^x}$

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{1 + e^x} \right) = \frac{\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 + e^x} \right)}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{e^x}{(1 + e^x)^3}$$

37

【答案】 $\frac{\cos x}{1 + \sin x}$

【分析】 $f'(x) = \ln(1 + \sin x)$

$$f''(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

38

【答案】 $-\frac{2x}{2 + \sin y^2} dx$

【分析】 $2x + (2 + \sin y^2) \frac{dy}{dx} = 0$, 所以 $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2 + \sin y^2}$, $dy = -\frac{2x}{2 + \sin y^2} dx$.

39

【答案】 $\frac{d^2 y}{dt^2} + a^2 y = 0$

【分析】 方法 1 y 作为 t 的函数是 $y = y(x)$ 与 $x = \sin t$ 的复合函数, 由复合函数求导法得

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = \cos t \frac{dy}{dx}$$

再对 t 求导得

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\cos t \frac{dy}{dx} \right) = \cos t \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) - \sin t \frac{dy}{dx} \\ &= \cos t \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{dt} - \sin t \frac{dy}{dx} = \cos^2 t \frac{d^2 y}{dx^2} - \sin t \frac{dy}{dx} \\ &= (1 - \sin^2 t) \frac{d^2 y}{dx^2} - \sin t \frac{dy}{dx} = (1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

由原方程得

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a^2 y = 0.$$

方法 2 $y = y(x)$ 也是 y 作为 t 的函数与 $t = \arcsin x$ 的复合函数, 由复合函数求导法得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{dt}, x \frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{dt}$$

再对 x 求导得

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{1}{(1-x^2)} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{dy}{dt} \\ (1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} + x \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

由原方程得

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a^2 y = 0.$$

40

【答案】 $(-1)^{n-1} (n-1)! [(-2)^n - 3^n]$

【分析】 方法 1 $f(x) = \ln(1-2x) - \ln(1+3x)$

$$f^{(n)}(x) = (\ln(1-2x))^{(n)} - (\ln(1+3x))^{(n)}$$

由归纳法易得到

$$(\ln(1+ax))^{(n)} = (-1)^{n-1} a^n (n-1)! (1+ax)^{-n}$$

于是

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1} (n-1)! [(-2)^n (1-2x)^{-n} - 3^n (1+3x)^{-n}] \\ f^{(n)}(0) &= (-1)^{n-1} (n-1)! [(-2)^n - 3^n]. \end{aligned}$$

$$\text{方法 2 } \ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}t^n + o(t^n)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^k + o(t^n) \quad (t \rightarrow 0)$$

$$\Rightarrow f(x) = \ln(1-2x) - \ln(1+3x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} (-2x)^k - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} (3x)^k + o(x^n)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} [(-2)^k - 3^k] x^k + o(x^n)$$

$$\stackrel{\text{记}}{=} \sum_{k=1}^n a_k x^k + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0) = n! a_n = n! \frac{(-1)^{n-1}}{n} [(-2)^n - 3^n] = (-1)^{n-1} (n-1)! [(-2)^n - 3^n].$$

41 【答案】 $\begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数} \\ 2^{n-1} \left[\left(\frac{n-1}{2} \right)! \right]^2, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$

【分析】 $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}, f'(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \arcsin x + \frac{1}{1-x^2},$

$$(1-x^2)f'(x) - xf(x) - 1 = 0$$

$$[(1-x^2)f'(x) - xf(x) - 1]^{(n)} = 0$$

$$[(1-x^2)f'(x)]^{(n)} - [xf(x)]^{(n)} = 0$$

$$(1-x^2)f^{(n+1)}(x) - (2n+1)xf^{(n)}(x) - n^2 f^{(n-1)}(x) = 0$$

令 $x=0$, 则 $f^{(n+1)}(0) - n^2 f^{(n-1)}(0) = 0$. 而 $f'(0) = 1, f''(0) = 0$, 所以

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数} \\ 2^{n-1} \left[\left(\frac{n-1}{2} \right)! \right]^2, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

42 【答案】 $x=1$

【分析】 将方程 $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$ 两边对 x 求导, 得

$$6y^2 y' - 4yy' + 2y + 2xy' - 2x = 0$$

整理得

$$y'(3y^2 - 2y + x) = x - y \quad (1)$$

令 $y' = 0$, 有 $x = y$, 将其代入 $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$ 得

$$2x^3 - x^2 - 1 = (x^3 - 1) + (x^3 - x^2) = 0$$

即 $(x-1)(2x^2 + x + 1) = 0$, 于是 $x=1$ 是唯一的驻点. 此时, $y = x = 1$.

进一步判断 $x=1$ 是否极值点:

对(1)求导 $y''(3y^2 - 2y + x) + y'(3y^2 - 2y + x)'_x = 1 - y'$

把 $x=1, y=1, y'(1)=0$ 代入上式, 得 $y''(1) = \frac{1}{2} > 0$, 于是 $y(x)$ 只有极值点为 $x=1$,

它是极小值点.

43 【答案】 $(-\infty, -1], [3, +\infty)$ 是单调增区间; $[-1, 1), (1, 3]$ 是单调减区间;
 $f(-1) = -2$ 是极大值, $f(3) = 0$ 是极小值; $(1, +\infty)$ 是凹区间; $(-\infty, 1)$ 是凸区间

【分析】 $y = \frac{((x-1)+(-2))^2}{4(x-1)} = \frac{1}{4}(x-1) - 1 + \frac{1}{x-1}$

$$y' = \frac{1}{4} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 4}{4(x-1)^2} = \frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}$$

$$y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 3, x = -1, y'' \neq 0, x = 1$ 处 y 无定义. 现用 $x = -1, x = 1, x = 3$ 将定义域分成如下区间并列表:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	+	0	-	无定义	-	0	+
y''	-	-	-		+	+	+
y		-2				0	

44 【答案】 $-3, -9$

【分析】 求出 $y'' = 6x + 2a$.

$(1, 3)$ 为该曲线拐点 $\Rightarrow$

$$y(1) = 1 + a + b + 14 = 3$$

$$y''(1) = 6 + 2a = 0$$

$\Rightarrow a = -3, b = -9$. 又

$$y''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1) \begin{cases} > 0, & x > 1 \\ = 0, & x = 1 \\ < 0, & x < 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow a = -3, b = -9$ 时 $(1, 3)$ 确为该曲线的拐点.

因此, $a = -3, b = -9$.

45 【答案】 64

【分析】 为使 $f(x) \geq 20$, 只要 $3x^5 + A \geq 20x^3$ 即 $20x^3 - 3x^5 \leq A$. 设 $g(x) = 20x^3 - 3x^5$, 则 A 至少是 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内的最大值.

因

$$g'(x) = 60x^2 - 15x^4 = 15x^2(4 - x^2) \begin{cases} > 0, & 0 < x < 2 \\ = 0, & x = 2 \\ < 0, & x > 2 \end{cases}$$

所以 $x = 2$ 是 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 的最大值点, 所以 A 至少为 $g(2) = 64$, 有 $f(x) \geq 20$.

46 【答案】 $0; 27$

【分析】 设 $\varphi(x) = 4x^3 - 18x^2 + 27$, 则

$$\varphi'(x) = 12x(x - 3) \begin{cases} < 0, & 0 < x < 3 \\ = 0, & x = 3 \\ > 0, & x > 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow \varphi(x)$ 在 $[0, 2]$ 单调下降

$$\varphi(0) = 27, \quad \varphi(2) = -13$$

$\Rightarrow \exists$ 唯一 $x_0 \in (0, 2), \varphi(x_0) = 0$.

由于 $f(x) = |\varphi(x)| \Rightarrow$

$$f(0) = 27, \quad f(x_0) = 0, \quad f(2) = 13.$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

因此, $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 的最小值为 0, 最大值为 27.

【评注】(1) 若求 $f(x) = |\varphi(x)|$ 在 $[2, 4]$ 上的最大值与最小值, 除求出 $\varphi(2) = -13$ 外, 还须求出

$$\varphi(3) = -27, \varphi(4) = -5$$

由 $\varphi(x)$ 的单调性知, 在 $[2, 4]$ 上 $\varphi(x) \neq 0$.

由于 $f(x) = |\varphi(x)|$

$$f(2) = 13, f(3) = 27, f(4) = 5$$

因此, $f(x)$ 在 $[2, 4]$ 的最小值为 5, 最大值为 27.

(2) 求在 $[a, b]$ 上连续函数 $f(x)$ 的最值时, 只须求出 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内的驻点, 不可导点, 再将这些点处的函数值与端点的函数值比较, 挑出最大者和最小者, 不必判断驻点和不可导点是否为极值点.

47 【答案】 0

【分析】 方法 1 若知道以下事实: 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = b > 0 (< 0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty (-\infty)$, 立即可得 $b = 0$. 否则由 $b > 0$ (或 $b < 0$) $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty (-\infty)$ 与 $f(x)$ 在 $(c, +\infty)$ 有界矛盾.

【评注】 实质上就是用反证法证明 $b = 0$, 不妨设 $b > 0$, 取 a 满足 $0 < a < b$, 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = b > a$, 则存在 $x_0 > 0$.

当 $x \geq x_0$ 时 $f'(x) > a$, 在 $[x_0, x]$ 上用拉格朗日中值定理,

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) > a(x - x_0) \quad (\xi \in (x_0, x)),$$

即 $f(x) > a(x - x_0) + f(x_0)$, 因

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [a(x - x_0) + f(x_0)] = +\infty.$$

所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 从而 $f(x)$ 在 $(c, +\infty)$ 上无界, 这与 $f(x)$ 在 $(c, +\infty)$ 上是有界函数矛盾.

方法 2 因 $f(x)$ 在 $(c, +\infty)$ 可导, 有界.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = b \Rightarrow b = 0.$$

【评注】 事实上有如下结论: 设

(1) $f(x), g(x)$ 在 $(c, +\infty)$ 可导, 且 $g'(x) \neq 0$;

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \infty$; (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (A 为有限或 ∞);

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

也就是, 在上述情形下, 我们可不必验证分子 $f(x)$ 是否为无穷大量. 方法 2 中用到了这个结论.

48

【答案】 $x = -\frac{1}{2}, y = (2\ln 2)x + \frac{1}{4}\ln 2 + 1 (x \rightarrow +\infty),$

$$y = -(2\ln 2)x - \frac{1}{4}\ln 2 - 1 (x \rightarrow -\infty)$$

【分析】 函数的全部间断点是 $x = 0, x = -\frac{1}{2}$.

$$\text{因 } \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\sqrt{4x^2 + x} \ln(2x+1) - \sqrt{4x+1} \sqrt{x} \ln x] = 0 - 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} y = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} \left(\sqrt{4x^2 + x} \ln \frac{2x+1}{x} \right) = \infty$$

于是垂直渐近线只有 $x = -\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x|}{x} \sqrt{4 + \frac{1}{x}} \ln \left(2 + \frac{1}{x} \right) = \pm 2 \ln 2,$$

$$\begin{aligned} \text{又 } \lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (2 \ln 2)x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{x}} \ln \left(2 + \frac{1}{x} \right) - 2 \ln 2}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{4+t} \ln(2+t) - 2 \ln 2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{4+t}}{2+t} + \frac{\ln(2+t)}{2\sqrt{4+t}} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{4} \ln 2. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (-2 \ln 2)x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \left[\sqrt{4 + \frac{1}{x}} \ln \left(2 + \frac{1}{x} \right) - 2 \ln 2 \right] = -1 - \frac{1}{4} \ln 2.$$

因此,全部渐近线是: $x = -\frac{1}{2}, y = (2 \ln 2)x + \frac{1}{4} \ln 2 + 1 (x \rightarrow +\infty),$
 $y = -(2 \ln 2)x - \frac{1}{4} \ln 2 - 1, (x \rightarrow -\infty).$

49 【答案】 $y = -\frac{1}{2}x$

【分析】 由连续性, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, 又 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{e^x - 1} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 于是 $f(0) = 0$.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{e^x - 1} \cdot \frac{e^x - 1}{x} = 2 \times 1 = 2$$

$\Rightarrow$ 曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 0$ 处的法线斜率为 $-\frac{1}{2}$, 法线方程为 $y = -\frac{1}{2}x$.

50 【答案】 3

【分析】 由于 $y(x)$ 二阶可导, $(x_0, 3)$ 是拐点, 则 $y(x_0) = 3, y''(x_0) = 0$.

先求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = (4-y)\beta y^{\beta-1} \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} y^\beta = \frac{dy}{dx} y^{\beta-1} ((4-y)\beta - y)$$

$$\text{由 } \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=x_0} = 0, \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = (4-y(x_0))y(x_0)^\beta = 3^\beta \neq 0,$$

$$(4-y(x_0))\beta - y(x_0) = 0$$

$$\beta = \frac{3}{4-3} = 3.$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

51 【答案】 $\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$, C 为任意常数

【分析】 将 $\int f'(x^3)dx = x^3 + C$ 两边求得

$$f'(x^3) = 3x^2$$

令 $t = x^3 (x = t^{\frac{1}{3}})$, 则 $f'(t) = 3t^{\frac{2}{3}}$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{9}{5}t^{\frac{5}{3}} + C$$

因此, $f(x) = \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$, C 为任意常数.

难吗? 不会做? 可以看
《数学复习全书·基础篇》
高数第四章
不定积分

52 【答案】 $\frac{3}{2}\arcsin \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}\sqrt{9-4x^2} + C$, C 为任意常数

【分析】 方法 1 $I = \int \frac{3-2x}{\sqrt{9-4x^2}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{2}{3}x)^2}} + \frac{1}{4}\int \frac{d(9-4x^2)}{\sqrt{9-4x^2}}$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d(\frac{2}{3}x)}{\sqrt{1-(\frac{2}{3}x)^2}} + \frac{1}{4}\int \frac{d(9-4x^2)}{\sqrt{9-4x^2}}$$

$$= \frac{3}{2}\arcsin \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}\sqrt{9-4x^2} + C.$$

方法 2 令 $t = \sqrt{\frac{3-2x}{3+2x}}$, 解出 $x = \frac{3}{2}\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{-6t}{(1+t^2)^2}dt$, 于是

$$I = \int \frac{-6t^2}{(1+t^2)^2}dt = \int 3td\left(\frac{1}{1+t^2}\right)$$

$$= \frac{3t}{1+t^2} - \int \frac{3tdt}{1+t^2} = \frac{3t}{1+t^2} - 3\arctan t + C$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{9-4x^2} - 3\arctan \sqrt{\frac{3-2x}{3+2x}} + C$$

53 【答案】 $\ln \left| \frac{x+2-2\sqrt{x+1}}{x+2+\sqrt{x+1}} \right| - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan \frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}} + C$, C 为任意常数

【分析】 令 $\sqrt{x+1} = t$, 则 $x = t^2 - 1$, $dx = 2tdt$, 于是

$$I = \int \frac{t+2}{t^4-t}2tdt = 2\int \frac{t+2}{t^3-1}dt = 2\int \frac{(t^2+t+1)-(t^2-1)}{(t-1)(t^2+t+1)}dt$$

$$= 2\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{t+1}{t^2+t+1} \right)dt = 2\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{2} \frac{2t+1+1}{t^2+t+1} \right)dt$$

$$= 2\int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1} - \int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= 2\ln|t-1| - \ln|t^2+t+1| - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \ln \left| \frac{x+2-2\sqrt{x+1}}{x+2+\sqrt{x+1}} \right| - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}} + C$$

54 【答案】 $2x\sqrt{1+e^x} - 4\sqrt{1+e^x} - 2\ln \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + C$, C 为任意常数

【分析】 先用分部积分法.

$$I = \int 2x d\sqrt{1+e^x} = 2x\sqrt{1+e^x} - 2 \int \sqrt{1+e^x} dx$$

再作变量替换, 令 $\sqrt{1+e^x} = t$, 则 $x = \ln(t^2 - 1)$, $dx = \frac{2t}{t^2 - 1} dt$, 于是

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+e^x} dx &= \int \frac{2t^2}{t^2 - 1} dt = 2 \int \frac{t^2 - 1 + 1}{t^2 - 1} dt \\ &= 2 \left(t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) + C \\ &= 2\sqrt{1+e^x} + \ln \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + C \end{aligned}$$

因此, $I = 2x\sqrt{1+e^x} - 4\sqrt{1+e^x} - 2\ln \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + C$.

55 【答案】 $-\frac{1}{x} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - \frac{1}{2} \arctan x + C$, C 为任意常数

【分析】
$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} \right) dx = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{x^2-1+1}{(1-x^2)(1+x^2)} \right) dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx + \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= \int \frac{1}{x^2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-x^2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - \frac{1}{2} \arctan x + C. \end{aligned}$$

56 【答案】 $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \ln |1 + \sin 2x| + C$, C 为任意常数

【分析】 方法 1
$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin x (\cos x - \sin x)}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1 - \cos 2x}{\cos 2x} dx \\ &= -\frac{1}{4} \int \frac{1}{\cos 2x} d(\cos 2x) - \frac{1}{4} \int \frac{1}{\cos 2x} d(2x) + \frac{1}{2} \int dx \\ &= -\frac{1}{4} \ln |\cos 2x| - \frac{1}{4} \ln |\sec 2x + \tan 2x| + \frac{1}{2}x + C \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \ln |1 + \sin 2x| + C. \end{aligned}$$

方法 2 将 $\sin x$ 作如下分解

$$\sin x = \alpha(\sin x + \cos x) + \beta(\sin x + \cos x)' = (\alpha - \beta)\sin x + (\alpha + \beta)\cos x$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

令 $\begin{cases} \alpha - \beta = 1 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$ 得 $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2}$. 于是

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{1}{2}(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{(\sin x + \cos x)'}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \ln |\sin x + \cos x| + C \end{aligned}$$

【评注】(1) 方法1中用到了 $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln |\sec x + \tan x| + C$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos x} &= \int \frac{d\sin x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1 + \sin x} + \frac{1}{1 - \sin x} \right) d\sin x \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + C = \frac{1}{2} \ln \frac{(1 + \sin x)^2}{\cos^2 x} + C \\ &= \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| + C \end{aligned}$$

(2) 方法2中的方法适用于求积分

$$\int \frac{\sin x}{a \sin x + b \cos x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{a \sin x + b \cos x} dx.$$

57 【答案】 $\frac{1}{2} \ln(\sqrt{1+x^4}-1) - \ln|x| + C, C$ 为任意常数

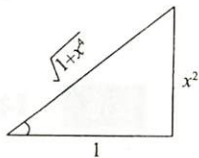
【分析】 方法1 先凑微分后作变量代换

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{1}{4} dx^4}{x^4 \sqrt{x^4+1}} \xrightarrow{t=x^4} \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t \sqrt{t+1}} \xrightarrow{u=\sqrt{t+1}} \frac{1}{4} \int \frac{2udu}{(u^2-1)u} \\ &= \frac{1}{4} \int \left[\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right] du = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{(u-1)^2}{u^2-1} + C = \frac{1}{2} \ln(\sqrt{1+x^4}-1) - \ln|x| + C. \end{aligned}$$

方法2 作三角函数代换

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{x^2 \sqrt{1+(x^2)^2}} \xrightarrow{x^2=\tan t} \frac{1}{2} \int \frac{1}{\tan t \cdot \frac{1}{\cos t}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sin t} = -\frac{1}{2} \int \frac{d\cos t}{1-\cos^2 t} \\ &= -\frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{1-\cos t} + \frac{1}{1+\cos t} \right) d\cos t \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1-\cos t}{1+\cos t} \right| + C = \frac{1}{2} \ln(1-\cos t) - \frac{1}{2} \ln|\sin t| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \right) - \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}} + C \\ &= \frac{1}{2} \ln(\sqrt{1+x^4}-1) - \ln|x| + C. \end{aligned}$$

方法3 倒代换后套用公式:



$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2+a^2}| + C$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1+\frac{1}{x^4}}} = \frac{-1}{2} \int \left[1 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} d\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{x^2} + \sqrt{1+\frac{1}{x^4}} \right| + C = -\frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1+x^4}+1}{x^2} + C. \end{aligned}$$

58

【答案】 $f(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$

【分析】 设 $\int_0^1 f(x)dx = a, \int_0^2 f(x)dx = b$, 则

$$f(x) = x^2 - bx + 2a$$

对上式两边分别在 $[0, 1]$ 和 $[0, 2]$ 上作定积分

$$a = \int_0^1 f(x)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{bx^2}{2} + 2ax \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{b}{2} + 2a$$

即 $a - \frac{1}{2}b = -\frac{1}{3}$ (1)

$$b = \int_0^2 f(x)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{bx^2}{2} + 2ax \right]_0^2 = \frac{8}{3} - 2b + 4a$$

即 $4a - 3b = -\frac{8}{3}$ (2)

由(1)式和(2)式得

$$a = \frac{1}{3}, b = \frac{4}{3}$$

于是 $f(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$.

【评注】 注意: $\int_a^b f(x)dx$ 是一个确定的数是解本题的关键.

59

【答案】 $-x \sin x + \cos x + C, C$ 为任意常数

【分析】 作变量替换 $tx = s$, 改写方程为

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(s)ds = f(x) + x \sin x \quad (x \neq 0)$$

$$\int_0^x f(s)ds = xf(x) + x^2 \sin x \quad (\forall x) \quad (1)$$

$$f(x) = xf'(x) + f(x) + (x^2 \sin x)' \quad (2)$$

(1) 式与(2) 式是等价的, (2) 式又可改写成

$$f'(x) = -\frac{(x^2 \sin x)'}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= -\int \frac{d(x^2 \sin x)}{x} = -x \sin x + \int x^2 \sin x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx \\ &= -x \sin x + \cos x + C \quad (\forall x). \end{aligned}$$

60 【答案】 $\frac{\pi}{16}$

【分析】 $I = \int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx - \int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx$

$$\begin{aligned} \text{而 } \int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx &= \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2} dx \\ &\stackrel{\text{令 } x-1=t}{=} \int_{-1}^0 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{1}{4}\pi (\text{单位圆面积的 } \frac{1}{4}) \\ \int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx &\stackrel{\text{令 } x=\sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{3}{16}\pi \end{aligned}$$

因此, 原式 $= \frac{\pi}{4} - \frac{3}{16}\pi = \frac{\pi}{16}$.

【评注】 解答本题时, 要注意以下两条:

- (1) 有时需作定积分的换元法后再利用定积分的几何意义.
- (2) 记住结论:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3}, & n \text{ 为大于 } 1 \text{ 的奇数} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

有时对计算定积分很有用.

61 【答案】 2

【分析】 按题意的提示, 我们应把左端定积分变形并作变量替换得

$$\begin{aligned} I &\stackrel{\text{记}}{=} \int_0^{2\pi} f(a \cos x + b \sin x) dx = \int_0^{2\pi} f\left(\sqrt{a^2+b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin x\right)\right) dx \\ &= \int_0^{2\pi} f(\sqrt{a^2+b^2} \sin(x+\varphi)) dx \left(\cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\ &\stackrel{t=x+\varphi}{=} \int_{\varphi}^{2\pi+\varphi} f(\sqrt{a^2+b^2} \sin t) dt \end{aligned}$$

被积函数以 2π 为周期, 由周期函数的积分性质

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} f(\sqrt{a^2+b^2} \sin t) dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sqrt{a^2+b^2} \sin t) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} f(\sqrt{a^2+b^2} \sin t) dt \end{aligned}$$

现对第二个积分作变量替换 $t = \pi - s$, 转换为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的积分

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sqrt{a^2+b^2} \sin t) dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(\sqrt{a^2+b^2} \sin(\pi-s)) ds \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sqrt{a^2+b^2} \sin x) dx \end{aligned}$$

因此 $A = 2$.

62 【答案】 $\tan \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-4} + \frac{1}{2}$

【分析】 先对 $\int_1^4 f(x-2) dx$ 换元, 再计算.

设 $x-2=t$, $dx=dt$, 当 $x=1$ 时 $t=-1$; 当 $x=4$ 时 $t=2$.

$$\begin{aligned}\int_1^4 f(x-2)dx &= \int_{-1}^2 f(t)dt = \int_{-1}^0 \frac{dt}{1+\cos t} + \int_0^2 te^{-t^2}dt \\&= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \sec^2 \frac{t}{2} dt - \frac{1}{2} \int_0^2 e^{-t^2} d(-t^2) \\&= \tan \frac{t}{2} \Big|_{-1}^0 - \frac{1}{2} e^{-t^2} \Big|_0^2 = \tan \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-4} + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

63 【答案】 2

【分析】 $F(x) = \left(\frac{2}{x} + \ln x\right) \int_1^x f(t)dt - \int_1^x \left(\frac{2}{t} + \ln t\right) f(t)dt$

$$\begin{aligned}\Rightarrow F'(x) &= \left(-\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}\right) \int_1^x f(t)dt + \left(\frac{2}{x} + \ln x\right) f(x) - \left(\frac{2}{x} + \ln x\right) f(x) \\&= \frac{x-2}{x^2} \int_1^x f(t)dt \begin{cases} < 0, & (1 < x < 2) \\ = 0, & (x = 2) \\ > 0, & (x > 2) \end{cases}\end{aligned}$$

$\Rightarrow x=2$ 是极小值点(也是最小值点).

64 【答案】 $\frac{1}{4}\pi^2$

【分析】 $I \stackrel{x=\pi-t}{=} \int_{\pi}^0 \frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)} dt = \int_0^{\pi} \frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t} dt$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t} dt - I$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2} \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t} dt = -\frac{1}{2} \pi \int_0^{\pi} \frac{d\cos t}{1+\cos^2 t} \\&= -\frac{1}{2} \pi \arctan \cos t \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2} \pi \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} \pi^2.\end{aligned}$$

【评注】 对某些积分 $I = \int_a^b f(x)dx$ 难以处理时, 有时通过变形将 I 变为另一种形式

$I = \int_a^b g(x)dx$, 然后把两者结合在一起

$$2I = \int_a^b [f(x) + g(x)]dx$$

若该积分易处理, 则问题就解决了. 以下两种情形是有用的.

$$(1) I = \int_0^b f(x)dx \stackrel{\text{令 } x=b-t}{=} \int_0^b f(b-t)dt = \int_0^b f(b-x)dx.$$

与原式相加得 $2I = \int_0^b [f(x) + f(b-x)]dx$.

(2) 由 $I = \int_{-a}^a f(x)dx \stackrel{x=-t}{=} \int_{-a}^a f(-t)dt$ 得到

$$2I = \int_{-a}^a [f(x) + f(-x)]dx$$

本题属于情形(1),又如 $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

令 $x = -t$,

$$I = - \int_1^{-1} \frac{dt}{1+e^{-\frac{1}{t}}} = \int_{-1}^1 \frac{e^{\frac{1}{t}}}{1+e^{\frac{1}{t}}} dt = \int_{-1}^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} dx$$

因此

$$2I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} dx + \int_{-1}^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} dx = \int_{-1}^1 dx = 2$$

于是 $I = 1$.

这就属于情形(2).

65

【答案】

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}, & x < -1 \\ x-1, & -1 \leq x \leq 1. \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}, & x > 1 \end{cases}$$

【分析】 方法1 因为

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < -1 \\ 1, & -1 \leq x \leq 1. \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$$

所以这是求分段函数的变限积分.

$$\begin{aligned} \text{当 } x < -1 \text{ 时, } \int_1^x f(t) dt &= \int_1^{-1} f(t) dt + \int_{-1}^x f(t) dt = \int_1^{-1} 1 dt + \int_{-1}^x t^2 dt \\ &= -2 + \frac{1}{3}t^3 \Big|_{-1}^x = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{当 } -1 \leq x \leq 1 \text{ 时, } \int_1^x f(t) dt = \int_1^x 1 dt = x-1.$$

$$\text{当 } x > 1 \text{ 时, } \int_1^x f(t) dt = \int_1^x t^2 dt = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}.$$

因此,

$$\int_1^x f(t) dt = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}, & x < -1 \\ x-1, & -1 \leq x \leq 1. \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}, & x > 1 \end{cases}$$

方法2 $\int_1^x f(t) dt \stackrel{(\text{记})}{=} F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,满足 $F(1) = 0$. 因而,也可用拼接法求得分段函数 $f(x)$ 的一个原函数,记为 $F_0(x)$

$$F_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & x \leq -1 \\ x+C_1, & -1 \leq x \leq 1. \\ \frac{1}{3}x^3 + C_2, & x \geq 1 \end{cases}$$

其中 C_1, C_2 满足

$$\left. \frac{1}{3}x^3 \right|_{x=-1} = (x + C_1) \Big|_{x=-1} \Rightarrow C_1 = \frac{2}{3},$$

$$(x + C_1) \Big|_{x=1} = \left(\frac{1}{3}x^3 + C_2 \right) \Big|_{x=1} \Rightarrow C_2 = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = F_0(x) + C.$$

$$\text{现定出 } C \text{ 使得 } 0 = F_0(1) + C = 1 + \frac{2}{3} + C \Rightarrow C = -\frac{5}{3}.$$

因此

$$\int_1^x f(t) dt = F_0(x) - \frac{5}{3} = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}, & x \leq -1 \\ x - 1, & -1 \leq x \leq 1. \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}, & x \geq 1 \end{cases}$$

【评注】 若求分段函数 $f(x) = \max\{1, x^2\}$ 的不定积分 $\int f(x) dx$, 或由变限积分法先求得一个原函数 $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ (这时要用分段积分法如方法 1), 然后就可得

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

或由方法 2 中的拼接法, 先求得一个原函数, 同样可得 $\int f(x) dx$. 对于多个连接点的分段函数, 也许拼接法更简便些.

66

【答案】

$$\frac{1}{2}$$

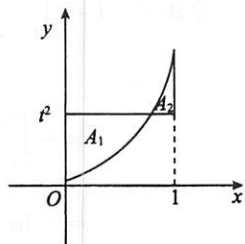
$$\text{【分析】 } A_1 = \int_0^t (t^2 - x^2) dx, A_2 = \int_t^1 (x^2 - t^2) dx$$

$$A(t) = A_1(t) + A_2(t) = 2 \int_0^t (t^2 - x^2) dx + \int_0^1 (x^2 - t^2) dx$$

$$= \frac{4}{3}t^3 - t^2 + \frac{1}{3}, (0 < t < 1),$$

$$A'(t) = 2t(2t-1) \begin{cases} < 0, & 0 < t < \frac{1}{2} \\ = 0, & t = \frac{1}{2}. \\ > 0, & \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$$

因此, $t = \frac{1}{2}$ 时, $A = A_1 + A_2$ 取最小值.



微信扫码

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

67

【答案】

$$\frac{\pi}{4}$$

$$\text{【分析】 方法 1 } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{2x^2 - 1}} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2}x^2 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}x}\right)^2}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_1^{+\infty} \frac{-d \frac{1}{\sqrt{2}x}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}x}\right)^2}} = -\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}x} \Big|_1^{+\infty} \\
 &= \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{方法 2} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{2x^2 - 1}} &\stackrel{x = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\cos t}}{=} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}} dt \\
 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

68 【答案】 $a = b = 2(e-1)$

【分析】 $I = \int_1^{+\infty} \frac{2x^2 + bx + a - 2x^2 - ax}{x(2x+a)} dx = \int_1^{+\infty} \frac{(b-a)x + a}{x(2x+a)} dx$

积分 I 收敛, 则 $b = a$ (否则 I 发散). $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 \text{方法 1} \quad I &= \int_1^{+\infty} \frac{a}{x(2x+a)} dx = \int_1^{+\infty} \left[\frac{1}{x} - \frac{2}{2x+a} \right] dx \\
 &= \ln \frac{x}{2x+a} \Big|_1^{+\infty} = \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2+a} \\
 &= \ln(2+a) - \ln 2 = 1
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ln\left(1 + \frac{a}{2}\right) = 1, a = 2e - 2 = 2(e-1)$$

因此, $a = b = 2(e-1)$.

$$\begin{aligned}
 \text{方法 2} \quad I &= \int_1^{+\infty} \frac{a}{x(2x+a)} dx = \int_1^{+\infty} \frac{adx}{x^2\left(2 + \frac{a}{x}\right)} \\
 &= -\int_1^{+\infty} \frac{d\left(2 + \frac{a}{x}\right)}{2 + \frac{a}{x}} = -\ln\left(2 + \frac{a}{x}\right) \Big|_1^{+\infty} \\
 &= -\ln 2 + \ln(2+a) \\
 &= \ln\left(1 + \frac{a}{2}\right) = 1
 \end{aligned}$$

同样得 $a = b = 2(e-1)$.

69 【答案】 $\ln 2$

【分析】 方法 1 $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x d\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{1+e^{-x}} \Big|_0^b - \int_0^b \frac{dx}{1+e^{-x}} \right] \\
 &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{b}{1+e^{-b}} - \ln(1+e^x) \Big|_0^b \right] \\
 &= \ln 2 + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{b}{1+e^{-b}} - \ln(e^b + 1) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{而} \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{b}{1+e^{-b}} - \ln(e^b + 1) \right] &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^{-b}} \left[b - (1+e^{-b}) \ln(e^b + 1) \right] \\
 &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\ln e^b - (1+e^{-b}) \frac{\ln(1+e^b)}{e^b} \right] \\
 &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\ln \frac{e^b}{e^b + 1} - \frac{\ln(1+e^b)}{e^b} \right] \\
 &= \ln 1 + 0 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{或} \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{b}{1+e^{-b}} - \ln(e^b + 1) \right] &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{b(1+e^{-b}-e^{-b})}{1+e^{-b}} - \ln[e^b(1+e^{-b})] \right] \\
 &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[b - \frac{be^{-b}}{1+e^{-b}} - b - \ln(1+e^{-b}) \right] \\
 &= 0 - \ln 1 = 0
 \end{aligned}$$

$$\text{因此} \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx = \ln 2.$$

方法2 作恒等变形后,对无穷积分作分部积分.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{xe^x}{(e^x+1)^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x de^x}{(e^x+1)^2} \\
 &= - \int_0^{+\infty} x d\left(\frac{1}{e^x+1}\right) = - \frac{x}{e^x+1} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x+1} \\
 &= - \int_0^{+\infty} \frac{de^{-x}}{1+e^{-x}} = - \ln(1+e^{-x}) \Big|_0^{+\infty} = \ln 2.
 \end{aligned}$$

【评注】 $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx = \int_0^{+\infty} x d\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$

但不可对它直接用分部积分公式,因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+e^{-x}} = +\infty, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+e^{-x}} \text{ 发散.}$$

因此方法1中,先对 $\int_0^b x d\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$ 用分部积分,然后再求

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x d\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right).$$

70 【答案】 $7\pi^2 a^3$

【分析】 该曲线可表为 $y = y(x) (0 \leq x \leq 2\pi a)$.

先求出摆线和直线 $y = 2a, x = 0, x = 2\pi a$ 所围平面图形绕 $y = 2a$ 旋转一周所成旋转体的体积 V_1 .

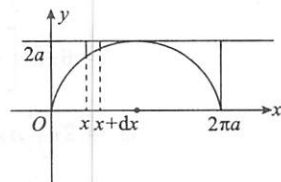
任取 $[x, x+dx] \subset [0, 2\pi a]$, 对应的小窄条相应的体积微元

$$dV_1 = \pi [2a - y(x)]^2 dx$$

于是

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \pi \int_0^{2\pi a} [2a - y]^2 dx \\
 &\stackrel{x = a(t - \sin t)}{=} \pi \int_0^{2\pi} [2a - a(1 - \cos t)]^2 a(1 - \cos t) dt
 \end{aligned}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



$$\begin{aligned}
 &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 + \cos t)^2 (1 - \cos t) dt \\
 &= 8\pi a^3 \int_0^{2\pi} \cos^4 \frac{t}{2} \sin^2 \frac{t}{2} dt = 16\pi a^3 \int_0^{\pi} \cos^4 s (1 - \cos^2 s) ds \\
 &= 16\pi a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 s (1 - \cos^2 s) ds \\
 &= 32\pi a^3 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 s ds - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 s ds \right] \\
 &= 32\pi a^3 \left[\frac{3 \times 1}{4 \times 2} - \frac{5 \times 3 \times 1}{6 \times 4 \times 2} \right] \times \frac{\pi}{2} = \pi^2 a^3
 \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 t)(1 + \cos t) dt \\
 &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 + \cos t - \cos^2 t - \cos^3 t) dt \\
 &= \pi a^3 \left[2\pi - \pi - \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t) d\sin t \right] = \pi^2 a^3
 \end{aligned}$$

因此, $V = \pi(2a)^2 2\pi a - \pi^2 a^3 = 7\pi^2 a^3$.

71

【答案】 $\frac{3}{8}\pi a^2; 6a; \frac{32}{105}\pi a^3; \frac{12}{5}\pi a^2$

【分析】 星形线围成的图形关于 x, y 轴均对称.

$$\begin{aligned}
 A &= 4 \int_0^a y dx = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 a \sin^3 t \cdot 3a \cos^2 t (-\sin t) dt \\
 &= 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 (\sin^4 t - \sin^6 t) dt \\
 &= 12a^2 \left[\frac{1 \times 3}{2 \times 4} - \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} \right] \frac{\pi}{2} = \frac{3}{8}\pi a^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3^2 a^2 (\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t)} dt \\
 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a \cos t \sin t dt = 6a (\sin t)^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V &= 2 \int_0^a \pi y^2 dx = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \pi a^2 \sin^6 t \cdot 3a \cos^2 t (-\sin t) dt \\
 &= 6\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t (1 - \sin^2 t) dt \\
 &= 6\pi a^3 \left[\frac{6}{7} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \left(1 - \frac{8}{9} \right) \right] = \frac{32}{105}\pi a^3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S &= 2\pi \int_0^{\pi} a \sin^3 t \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt \\
 &= 2\pi \int_0^{\pi} 3a^2 \sin^3 t \sqrt{\sin^2 t \cos^2 t} dt \\
 &= 6\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^4 t |\cos t| dt = 6\pi a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t dt \\
 &= 12\pi a^2 \cdot \frac{1}{5} \sin^5 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12}{5}\pi a^2.
 \end{aligned}$$

知识点链接

《数学复习全书·基础篇》
高数第六章
定积分的应用

【评注】 (1) 星形线的参数方程等同于星形线的隐函数表示:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

若给出星形线的隐函数表示,由隐函数求导法得

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y' = 0, y' = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} = \sqrt{\frac{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

由对称性用相应的侧面积公式,也可求得

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot 2\pi \int_0^a y \sqrt{1+y'^2} dx = 4\pi \int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx \\ &= 4\pi \cdot \frac{3}{2} \int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{3}} dx^{\frac{2}{3}} = 6\pi a^{\frac{1}{3}} \left(-\frac{2}{5}\right) (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{2}} \Big|_0^a = \frac{12}{5}\pi a^2. \end{aligned}$$

(2) 若星形线由隐函数表示给出,可导出显式表示(上半平面部分):

$$y = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \quad (-a \leq x \leq a)$$

由此可得

$$A = 4 \int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} dx$$

现作三角函数代换 $x^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \cos t$ ($x = a \cos^3 t$) 得

$$A = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin^3 t \cdot a^{\frac{1}{3}} 3 \cos^2 t \sin t dt = 12a^{\frac{4}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 t - \sin^6 t) dt.$$

72

【答案】 $\frac{1}{6}(11\sqrt{5}-1)\pi$

【分析】 切点为 $(x_0, y_0) = (x_0, \sqrt{x_0-1})$, 切线方程为

$$y = \sqrt{x_0-1} + \frac{1}{2\sqrt{x_0-1}}(x-x_0)$$

令 $x=0, y=0$ 得 $\sqrt{x_0-1} - \frac{x_0}{2\sqrt{x_0-1}} = 0$, 解得 $x_0=2, y_0=1$. 所以切线方程为

$$y = 1 + \frac{1}{2}(x-2) \text{ 即 } y = \frac{1}{2}x$$

由切线 $y = \frac{1}{2}x$ ($0 \leq x \leq 2$) 绕 x 轴旋转一圈旋转体的侧面积为

$$S_1 = \int_0^2 2\pi y \sqrt{1+y'^2} dx = \int_0^2 2\pi \cdot \frac{1}{2}x \sqrt{1+\frac{1}{4}} dx = \sqrt{5}\pi$$

由曲线 $y = \sqrt{x-1}$ ($1 \leq x \leq 2$) 绕 x 轴旋转一圈旋转体的侧面积为

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_1^2 2\pi y \sqrt{1+y'^2} dx = \int_1^2 2\pi \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)^2} dx \\ &= \pi \int_1^2 \sqrt{4x-3} dx = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1). \end{aligned}$$

所以, 所求旋转体表面积为

$$S = S_1 + S_2 = \sqrt{5}\pi + \frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)\pi = \frac{1}{6}(11\sqrt{5}-1)\pi.$$

73 【答案】 $\frac{8}{5}\sqrt{3}; (\frac{9}{7}, 0)$

【分析】 (1) 由对称性, 上半平面部分 $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x) (0 \leq x \leq 3)$ 与 x 轴围成的面积的两倍即是 M 的面积. 于是

$$A = 2 \int_0^3 \frac{1}{3} \sqrt{x}(3-x) dx = \frac{2}{3} \int_0^3 3\sqrt{x} dx - \frac{2}{3} \int_0^3 x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{8}{5}\sqrt{3}$$

$$(2) \text{ 由对称性, } \bar{y} = 0, \bar{x} = \frac{2 \int_0^3 xy dx}{A} = \frac{\frac{2}{3} \int_0^3 x(3-x) \sqrt{x} dx}{\frac{8}{5}\sqrt{3}} = \frac{9}{7}.$$

74 【答案】 $\left[8(\arcsin y + y \sqrt{1-y^2}) + 4\pi \right] (\text{m}^3); 0.01 (\text{m/min}); 8000g\pi (\text{J})$

【分析】 液体的体积

$$\begin{aligned} V &= 4 \times 2 \int_{-1}^y 2 \sqrt{1-y^2} dy = 16 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin y} \cos^2 t dt \\ &= \left[8(\arcsin y + y \sqrt{1-y^2}) + 4\pi \right] (\text{m}^3) \end{aligned}$$

设液面下降的速度 $\frac{dy}{dt}$, 则

$$\frac{dV}{dt} = 16 \sqrt{1-y^2} \frac{dy}{dt}$$

所以

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = \frac{dV}{dt} / 16 \sqrt{1-y^2} \Big|_{y=0} = \frac{0.16}{16} = 0.01 (\text{m/min})$$

抽出全部液体所做的功

$$\begin{aligned} W &= 4 \cdot 1000g \int_{-1}^1 4 \sqrt{1-y^2} \cdot (1-y) dy \\ &= 4000g \int_{-1}^1 4 \sqrt{1-y^2} dy = 8000g\pi (\text{J}) \end{aligned}$$

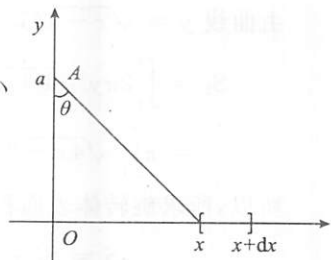
【评注】 因 $y \sqrt{1-y^2}$ 为奇函数, 所以 $\int_{-1}^1 y \sqrt{1-y^2} dy = 0$, 又因 $\int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy$ 表示 $\frac{1}{4}$ 单位圆面积, 所以 $\int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} dy = 2 \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy = 2 \times \frac{1}{4} \pi = \frac{1}{2} \pi$.

75 【答案】 $\frac{2k}{a}$

【分析】 取 L 为 x 轴, y 轴过 A 点, 如图所示. 在 L 上 $\forall$ 取小线段 $[x, x+dx]$, 它对点 A 的引力沿 y 轴方向分量为

$$dF_y = \frac{k dx}{a^2 + x^2} \cos \theta$$

其中 $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$, 所以



$$dF_y = \frac{ka dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

于是 L 对质点 A 的引力

$$\begin{aligned} F_y &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ka dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{ka dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \xrightarrow{x = a \tan t} 2ka \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{a}{\cos^2 t}}{a^3 (1 + \tan^2 t)^{\frac{3}{2}}} dt \\ &= \frac{2k}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = \frac{2k}{a}. \end{aligned}$$

76 【答案】 $(1+x)[\ln(1+x)+1]$

【分析】 本题实质上是解微分方程的初值问题. 首先, 将等式两边除以 Δx , 并令 $\Delta x \rightarrow 0$, 注意

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y', \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (1 + \Delta y) = 1 \text{ (可导必连续)}, \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\Delta x} = 1. \text{ 于是得}$$

$$\begin{cases} y' - \frac{y}{1+x} = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

这是一阶线性非齐次微分方程的初值问题, 两边乘 $\frac{1}{1+x}$ ($e^{-\int \frac{dx}{1+x}} = e^{-\ln|1+x|}$) 得

$$\left(\frac{y}{1+x} \right)' = \frac{1}{1+x} \quad (*)$$

积分得

$$\frac{y}{1+x} = \ln(1+x) + C$$

$y = (1+x)\ln(1+x) + C(1+x)$ ($x \geq 0$) 或代公式得其通解为

$$y = e^{\int \frac{dx}{1+x}} \left(\int e^{-\int \frac{dx}{1+x}} dx + C \right) = (1+x)[\ln(1+x) + C].$$

由 $y(0) = 1$ 得 $C = 1$, 所以 $y = (1+x)[\ln(1+x) + 1]$.

【评注】 我们也可将 $(*)$ 式从 0 到 x 积分, 并用初值 $y(0) = 1$ 得特解

$$\frac{y}{1+x} \Big|_0^x = \int_0^x \frac{dx}{1+x}, \frac{y}{1+x} - 1 = \ln(1+x)$$

即 $y = (1+x)[\ln(1+x) + 1]$.

77

【答案】 $\frac{b}{a}$

【分析】 先求出一阶线性微分方程的解, 用积分因子法, 方程两边同乘 $e^{ax} = e^{ax}$ 得

$$(e^{ax}y)' = e^{ax}f(x)$$

积分得

$$e^{ax}y(x) = y(0) + \int_0^x e^{at}f(t)dt$$

$$y(x) = y(0)e^{-ax} + \frac{\int_0^x e^{at}f(t)dt}{e^{ax}}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

于是

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} y(0)e^{-ax} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x e^{at} f(t) dt}{e^{ax}} \\ &= 0 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax} f(x)}{ae^{ax}} = \frac{b}{a}.\end{aligned}$$

78

【答案】 $y = x \tan(\ln x)$

【分析】 曲线 $y = y(x)$ 在点 (x, y) 处切线的斜率即函数 $y = y(x)$ 在点 x 处的导数 y' ，由题设知函数 $y(x)$ 是如下微分方程初值问题的特解：

$$\begin{cases} y' = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

这是齐次方程，设 $u = \frac{y}{x}$ 即 $y = ux$ ， $\frac{dy}{dx} = x \frac{du}{dx} + u$ 可将以上问题化为 $u(x)$ 满足的可分离变量类型的初值问题

$$\begin{cases} x \frac{du}{dx} + u = 1 + u + u^2 \\ u(1) = 0 \end{cases} \quad \xLeftrightarrow{\text{(分离变量)}} \quad \begin{cases} \frac{du}{1+u^2} = \frac{dx}{x} \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

求积分即得方程的通解 $\arctan u = \ln x + C$ ，由 $u(1) = 0$ 可确定常数 $C = 0$ ，故上述初值问题的解是

$$\arctan u = \ln x \Leftrightarrow \arctan \frac{y}{x} = \ln x \Leftrightarrow y = x \tan(\ln x).$$

【评注】 严格地讲所求曲线的方程应是 $y = x \tan(\ln x)$ ($e^{-\frac{\pi}{2}} < x < e^{\frac{\pi}{2}}$)，这是由于当 $x \in (e^{-\frac{\pi}{2}}, e^{\frac{\pi}{2}})$ 时 $y = x \tan(\ln x)$ 的图象才是一条通过点 $(1, 0)$ 的连续可微曲线。

79

【答案】 $x = y\left(\frac{1}{3}y^3 + C\right)$, C 为任意常数.

【分析】 在方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y^4}$ 中，对 x 是一次的，以 y 为自变量， x 为未知函数变形得

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x+y^4}{y}$$

即 $\frac{dx}{dy} - x \cdot \frac{1}{y} = y^3$.

这是一个线性方程. 两边乘 $\mu(y) = e^{-\int \frac{1}{y} dy} \stackrel{\text{(取)}}{=} \frac{1}{y}$ 得

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{x}{y}\right) = y^2$$

积分得通解 $x = y\left(\frac{1}{3}y^3 + C\right)$.

或代公式由线性方程通解公式得

$$x = e^{\int \frac{1}{y} dy} \left(\int y^3 \cdot e^{-\int \frac{1}{y} dy} dy + C \right) = y \left(\int y^2 dy + C \right) = y \left(\frac{1}{3}y^3 + C \right)$$

80 【答案】 $\sqrt[3]{1-3x}$

【分析】 这是可降阶的二阶的方程(方程不显含 x). 作变换 $p = y' = \frac{dy}{dx}$, 并以 y 为自变量, 即令 $y' = p(y)$, 则 $y'' = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$, 代入方程得

$$yp \frac{dp}{dy} + 2p^2 = 0 \text{ 即 } y \frac{dp}{dy} + 2p = 0 \text{ 或 } p = 0.$$

由于 $p = 0$ 即 $y' = 0$ 不符合题目要求, 故只考虑方程 $y \frac{dp}{dy} + 2p = 0$.

分离变量得 $\frac{dp}{p} + 2 \frac{dy}{y} = 0$, 积分得 $\ln|p| + 2\ln|y| = \ln|C_1|$ 即 $p = \frac{C_1}{y^2}$.

由 $x = 0$ 时 $y = 1, p = y' = -1$ 可确定常数 $C_1 = -1$. 于是 $y' = p = -\frac{1}{y^2}$, 即 $y^2 dy + dx = 0$, 积分得 $y^3 + 3x = C_2$, 又由 $y(0) = 1$ 可确定 $C_2 = 1$, 故所求特解为 $y = \sqrt[3]{1-3x}$.

81 【答案】 $(x^2 + 2)e^x + e^{-2x}$

【分析】 题设二阶常系数线性微分方程的特征方程是 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, 特征根是 $\lambda_1 = 1$ 与 $\lambda_2 = -2$. 从而对应的齐次线性微分方程有线性无关的两个特解 e^x 与 e^{-2x} , 且对应于方程非齐次项 $f(x) = (6x + 2)e^x$, 可考虑非齐次微分方程具有形状为 $y^* = x(Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x$ 的特解.

把 $y^* = (Ax^2 + Bx)e^x, (y^*)' = (Ax^2 + Bx + 2Ax + B)e^x$ 与 $(y^*)'' = (Ax^2 + Bx + 4Ax + 2B + 2A)e^x$ 代入方程可得

$$(y^*)'' + (y^*)' - 2y^* = [3(2Ax + B) + 2A]e^x \stackrel{\text{令}}{=} (6x + 2)e^x$$

可确定常数 $A = 1, B = 0$, 故非齐次方程具有特解 $y^* = x^2 e^x$.

按通解结构定理, 应设通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + x^2 e^x$, 其中 C_1 与 C_2 是两个任意常数. 利用初值 $y(0) = 3$ 和 $y'(0) = 0$ 可得

$$\begin{cases} y(0) = (C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + x^2 e^x) \Big|_{x=0} = C_1 + C_2 = 3 \\ y'(0) = [C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x} + (x^2 + 2x)e^x] \Big|_{x=0} = C_1 - 2C_2 = 0 \end{cases}$$

解之即得 $C_1 = 2, C_2 = 1$. 故所求特解 $y^* = (x^2 + 2)e^x + e^{-2x}$.

82 【答案】 $\frac{3}{2}e^x + \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$

【分析】 为了用变限积分求导法将方程两边分别求导, 转化为微分方程.

先把 $\int_0^x t f(x-t) dt$ 转化为如下形式:

$$\begin{aligned} \int_0^x t f(x-t) dt &\stackrel{x-t=u}{=} \int_x^0 (x-u) f(u) (-du) \\ &= \int_0^x (x-u) f(u) du = x \int_0^x f(u) du - \int_0^x u f(u) du \\ &= x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt. \end{aligned}$$

代入原方程得
$$\int_0^x f(t)dt = x + \sin x + x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x t f(t)dt. \quad (1)$$

由 $f(x)$ 连续可知上式中各变限积分均可导,将方程两端对 x 求导有

$$f(x) = 1 + \cos x + \int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x)$$

即
$$f(x) = 1 + \cos x + \int_0^x f(t)dt \quad (2)$$

(在(1)式中令 $x=0$ 得 $0=0$,不必另加条件,(1)与(2)等价).

在(2)式中令 $x=0$ 可得 $f(0)=2$,由(2)式还可见 $f(x)$ 可导.于是将它的两端对 x 求导,又得

$$f'(x) = -\sin x + f(x).$$

故 $y=f(x)$ 是一阶线性微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' - y = -\sin x \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

的特解.解之可得 $y=f(x) = \frac{3}{2}e^x + \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$.

83 【答案】 $\frac{1}{n^2}(2ma+b)$

【分析】 $y'' + 2my' + n^2y = 0$ 的特征方程 $\lambda^2 + 2m\lambda + n^2 = 0$ 的特征根是

$$\lambda_1 = -m + \sqrt{m^2 - n^2} = -(m - \sqrt{m^2 - n^2}) < 0, \lambda_2 = -m - \sqrt{m^2 - n^2} < 0.$$

由此可见微分方程的任何一个解 $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ 都满足 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$. 又因 $y' = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 x}$, 从而又有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y' = 0$.

故对于特解 $y = y(x)$ 满足 $y(0) = a, y'(0) = b$, 有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{+\infty} [y''(x) + 2my'(x) + n^2y(x)]dx \\ &= y'(x) \Big|_0^{+\infty} + 2my(x) \Big|_0^{+\infty} + n^2 \int_0^{+\infty} y(x)dx \\ &= -y'(0) - 2my(0) + n^2 \int_0^{+\infty} y(x)dx \\ &= -(2ma + b) + n^2 \int_0^{+\infty} y(x)dx. \end{aligned}$$

即
$$\int_0^{+\infty} y(x)dx = \frac{1}{n^2}(2ma + b).$$

84 【答案】 $y'' - y' - 2y = (1-2x)e^x$

【分析】 $y_1 - y_3 = e^{-x}$ 与 $y_1 - y_2 = e^{2x} - e^{-x}$ 都是对应齐次方程的解, $(y_1 - y_3) + (y_1 - y_2) = e^{2x}$ 也是对应齐次方程的解, e^{-x} 与 e^{2x} 是对应齐次方程两个线性无关的特解; 而 $y_2 - e^{-x} = xe^x$ 是非齐次方程的解.

下面求该微分方程:

方法1 由 e^{-x}, e^{2x} 是对应齐次方程线性无关二解知 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$ 是特征方程的两个根, 从而特征方程为 $(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$ 即 $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, 故对应齐次微分方程为

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

设所求非齐次方程为 $y'' - y' - 2y = f(x)$,

把非齐次解 xe^x 代入, 使得

$$f(x) = (xe^x)'' - (xe^x)' - 2(xe^x) = (1 - 2x)e^x.$$

于是所求方程为 $y'' - y' - 2y = (1 - 2x)e^x$.

方法 2 由前面求得该微分方程的一个特解 xe^x 及相应的齐次方程两个线性无关的解: e^{-x}, e^{2x} , 于是该微分方程的通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + xe^x$, 求出

$$y' = -C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{2x} + (x+1)e^x, y'' = C_1 e^{-x} + 4C_2 e^{2x} + (x+2)e^x$$

并消去 C_1, C_2

$$y'' - y' = 2(C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + xe^x) - 2xe^x + e^x = 2y + (1 - 2x)e^x$$

使得微分方程 $y'' - y' - 2y = (1 - 2x)e^x$.

85 【答案】 $C_1 \cos \sqrt{x^2 + y^2} + C_2 \sin \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2 - 2$ (C_1, C_2 均为任意常数)

【分析】 $u(\sqrt{x^2 + y^2})$ 是一元函数 $u = u(r)$ 与二元函数 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 的复合函数, 由复合函数求导法则得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{du}{dr}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 u}{dr^2} \frac{x^2}{r^2} + \frac{du}{dr} \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{d^2 u}{dr^2} \frac{y^2}{r^2} + \frac{du}{dr} \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right)$$

$$\frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{du}{dr}$$

于是原方程化为二阶线性常系数微分方程

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + u = r^2$$

即

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + u = r^2$$

通解为

$$u = C_1 \cos r + C_2 \sin r + r^2 - 2$$

因此

$$u(\sqrt{x^2 + y^2}) = C_1 \cos \sqrt{x^2 + y^2} + C_2 \sin \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2 - 2$$

86 【答案】 2

【分析】 由 $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{e^{xy} + xy \sqrt{x^2 + y^2}}$ 知, $f(x, 0) = x^2$, 则

$$f'_x(1, 0) = 2x|_{x=1} = 2$$

87 【答案】 $e^x + 3(x+y)^2 - e^{x+y}$

【分析】 在等式 $z = e^x + y^2 + f(x+y)$ 中令 $y = 0$, 得

$$x^3 = e^x + f(x)$$

则 $f(x) = x^3 - e^x, z = e^x + y^2 + (x+y)^3 - e^{x+y}$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x + 3(x+y)^2 - e^{x+y}$$

知识点链接

《数学复习全书·基础篇》
高数第八章
多元函数微分学

88 【答案】 -2

【分析】 在 $z = (x-2y)^{y-2x}$ 中令 $y=0$, 得

$$z = x^{-2x}$$

$$z'_x = (e^{-2x \ln x})' = x^{-2x}(-2 \ln x - 2)$$

则 $z'_x \Big|_{x=1} = -2$, 即 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x=1, y=0} = -2$.

89 【答案】 $\frac{\pi(2+\pi)}{(1+\pi)^2}$

【分析】 按一、二阶偏导数的定义直接计算可得

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+y} - y \cos(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{(x+y)^2} - \cos(xy) + xy \sin(xy)$$

从而

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,\pi)} &= -\frac{1}{(1+\pi)^2} - \cos \pi + \pi \sin \pi \\ &= 1 - \frac{1}{(1+\pi)^2} = \frac{\pi(2+\pi)}{(1+\pi)^2} \end{aligned}$$

90 【答案】 $yx^{y-1}f'_1 + 2 \ln y \cdot y^{2x}f'_2$

【分析】 由 $z = f(x^y, y^{2x})$ 知

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}f'_1 + 2y^{2x} \ln y \cdot f'_2.$$

91 【答案】 $e^{xy} + xye^{xy} + f''_{11} + (x+y)f''_{12} + xyf''_{22} + f'_2$

【分析】 由 $z = e^{xy} + f(x+y, xy)$ 知

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy} + f'_1 + yf'_2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{xy} + xye^{xy} + f''_{11} + xf''_{12} + f'_2 + yf''_{21} + xyf''_{22}$$

$$(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}) \Big|_{(1,1)} = e^{xy} + xye^{xy} + f''_{11} + (x+y)f''_{12} + xyf''_{22} + f'_2$$

92 【答案】 50

【分析】 引入函数 $\phi(x) = f(x, 2x)$, 则 $\varphi(x) = f(x, 2\phi(x))$, 从而

$$\varphi'(x) = f'_1(x, 2\phi(x)) + 2\phi'(x)f'_2(x, 2\phi(x))$$

令 $x=1$ 得

$$\varphi'(1) = f'_1(1, 2\phi(1)) + 2\phi'(1)f'_2(1, 2\phi(1))$$

(1)

可见为了求得 $\varphi'(1)$ 只需算出 $\psi(1)$ 与 $\psi'(1)$ 的值并代入上式. 由 $\psi(x)$ 的定义可得

$$\psi(1) = f(1, 2) = 1$$

又因

$$\psi'(x) = f'_1(x, 2x) + 2f'_2(x, 2x)$$

在上式中令 $x = 1$ 可得

$$\psi'(1) = f'_1(1, 2) + 2f'_2(1, 2) = f'_x(1, 2) + 2f'_y(1, 2) = 2 + 2 \times 3 = 8$$

把以上结果代入(1)式就有

$$\begin{aligned}\varphi'(1) &= f'_1(1, 2) + 2 \times 8 \times f'_2(1, 2) \\ &= f'_x(1, 2) + 16f'_y(1, 2) = 2 + 16 \times 3 = 50\end{aligned}$$

【评注】 本题是多元复合函数求导数问题. 在利用复合函数求导的链式法则时, 必须选用适当的记号, 这里我们用记号 f'_1 与 f'_2 分别表示二元函数 f 对其第一个变量与第二个变量的偏导数, 于是可不必再用字母表示中间变量了, 书写比较简便且不会产生混淆.

注意在本题求解过程中不宜采用记号 $f'_x(x, 2f(x, 2x))$, 原因在于它的含意不清楚, 这究竟是表示一元函数 $\varphi(x) = f(x, 2f(x, 2x))$ 对 x 的导数, 还是表示二元函数 $f(x, y)$ 对 x 求偏导数后再把 y 换为 $2f(x, 2x)$ 呢? 从这个记号本身无法区分开来.

93

【答案】 $x^2 - y^2$

【分析】 利用一阶全微分形式不变性可得复合函数 $g(x, y)$ 的一阶全微分

$$\begin{aligned}dg &= f'_u d(x^2 + y^2) + f'_v d(xy) \\ &= 2(xdx + ydy)f'_u + (ydx + xdy)f'_v \\ &= (2xf'_u + yf'_v)dx + (2yf'_u + xf'_v)dy\end{aligned}$$

从而 $g'_x = 2xf'_u + yf'_v$, $g'_y = 2yf'_u + xf'_v$. 继续求 $g(x, y)$ 的二阶偏导数, 又有

$$\begin{aligned}g''_{xx} &= 2f'_u + 2x(f'_u)'_x + y(f'_v)'_x \\ &= 2f'_u + 2x(2xf''_{uu} + yf''_{uv}) + y(2xf''_{vu} + yf''_{vv}) \\ &= 2f'_u + 4x^2 f''_{uu} + 4xy f''_{uv} + y^2 f''_{vv} \\ g''_{yy} &= 2f'_u + 2y(f'_u)'_y + x(f'_v)'_y \\ &= 2f'_u + 2y(2yf''_{uu} + xf''_{uv}) + x(2yf''_{vu} + xf''_{vv}) \\ &= 2f'_u + 4y^2 f''_{uu} + 4xy f''_{uv} + x^2 f''_{vv}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{故 } g''_{xx} - g''_{yy} &= 4(x^2 - y^2)f''_{uu} - (x^2 - y^2)f''_{vv} \\ &= (x^2 - y^2)(4f''_{uu} - f''_{vv}) = x^2 - y^2.\end{aligned}$$

94

【答案】 $2(x^2 + y^2)f(xy)$

【分析】 $z = \int_0^1 |xy - t| f(t) dt$

$$\begin{aligned}&= \int_0^{xy} (xy - t)f(t)dt + \int_{xy}^1 (t - xy)f(t)dt \\ &= xy \int_0^{xy} f(t)dt - \int_0^{xy} tf(t)dt + \int_{xy}^1 tf(t)dt - xy \int_{xy}^1 f(t)dt\end{aligned}$$

$$\text{则 } z'_x = y \int_0^{xy} f(t)dt + xy^2 f(xy) - xy^2 f(xy) - xy^2 f(xy) - y \int_{xy}^1 f(t)dt + xy^2 f(xy)$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



微信扫码

$$= y \int_0^{xy} f(t) dt - y \int_{xy}^1 f(t) dt$$

$$z''_{xx} = y^2 f(xy) + y^2 f(xy) = 2y^2 f(xy)$$

由变量对称性知

$$z''_{yy} = 2x^2 f(xy)$$

$$\text{则 } z''_{xx} + z''_{yy} = 2(x^2 + y^2) f(xy).$$

95 【答案】 $\frac{1}{2} \sin x + C$

【分析】 由 $u(x, y) = f(2x + 5y) + g(2x - 5y)$ 及 $u(x, 0) = \sin 2x$ 知

$$f(2x) + g(2x) = \sin 2x$$

$$u'_y(x, y) = 5f'(2x + 5y) - 5g'(2x - 5y)$$

$$u'_y(x, 0) = 5f'(2x) - 5g'(2x) = 0$$

即 $f'(2x) - g'(2x) = 0$ (1)

又由 $f(2x) + g(2x) = \sin 2x$ 知

$$2f'(2x) + 2g'(2x) = 2\cos 2x \quad (2)$$

由以上(1)式和(2)式得

$$f'(2x) = \frac{1}{2} \cos 2x$$

即 $f'(x) = \frac{1}{2} \cos x$

故 $f(x) = \frac{1}{2} \sin x + C.$

96 【答案】 $\frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + x + y^2$

【分析】 连续两次分别对 x 和 y 积分, 即可得到 $f(x, y)$ 的表达式.

由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y$, 有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \int (x + y) dy = xy + \frac{1}{2}y^2 + C_1(x)$$

进一步有

$$f(x, y) = \int \left(xy + \frac{1}{2}y^2 + C_1(x) \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + \int C_1(x) dx + C_2(y)$$

又 $f(x, 0) = \int C_1(x) dx + C_2(0) = x$, 两边对 x 求导得, $C_1(x) = 1$, 于是

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + x + C_2(y)$$

再由 $f(0, y) = C_2(y) = y^2$

从而得 $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + x + y^2$

【评注】 要注意 $\int (x+y)dy = xy + \frac{1}{2}y^2 + C_1(x)$, 其中 $C_1(x)$ 是 x 的一个任意函数.

97 【答案】 $2dx - dy$

【分析】 由于 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x,y) - 2x + y - 2}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = 0$, 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 0$, 则

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} [f(x,y) - 2x + y - 2] = 0$$

又 $f(x,y)$ 连续, 则

$$\begin{aligned} f(0,1) - 0 + 1 - 2 &= 0 \\ f(0,1) &= 1 \end{aligned}$$

从而有 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x,y) - f(0,1) - 2x + (y-1)}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = 0$. 即

$$f(x,y) - f(0,1) = 2x - (y-1) + o(\rho)$$

由微分定义知 $f(x,y)$ 在 $(0,1)$ 处可微, 且

$$f'_x(0,1) = 2, f'_y(0,1) = -1$$

$$dz \Big|_{(0,1)} = 2dx - dy$$

98 【答案】 $bdx + cdy$

【分析】 当 $(x,y) \rightarrow (0,0)$ 时, $\ln(1+x^2+y^2) \sim x^2+y^2$, 由求极限中等价无穷小因子替换得

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - a - bx - cy}{x^2 + y^2} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} [f(x,y) - a - bx - cy] = 0, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = a$$

又由 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续即得 $f(0,0) = a$. 再由极限与无穷小的关系可知

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - bx - cy}{x^2 + y^2} = 1 + o(1) \quad ((x,y) \rightarrow (0,0))$$

($o(1)$ 为当 $(x,y) \rightarrow (0,0)$ 时的无穷小量) $\Rightarrow$

$$f(x,y) - f(0,0) - bx - cy = x^2 + y^2 + (x^2 + y^2) \cdot o(1) = o(\rho)$$

($\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$) 即

$$f(x,y) - f(0,0) = bx + cy + o(\rho) \quad (\rho \rightarrow 0)$$

由可微性概念 $\Rightarrow$

$$df(x,y) \Big|_{(0,0)} = bdx + cdy$$

99 【答案】 $3, -2, x^3y^2 - x^2y^2 + y + C$

【分析】 方法 1 若 $df(x,y) = (ax^2y^2 - 2xy^2)dx + (2x^3y + bx^2y + 1)dy$, 则

$$f'_x(x,y) = ax^2y^2 - 2xy^2, f'_y(x,y) = 2x^3y + bx^2y + 1$$

由于 f'_x 与 f'_y 仍然可微, 从而

$$f''_{xy}(x,y) = 2ax^2y - 4xy, f''_{yx}(x,y) = 6x^2y + 2bxy$$

由于对任何常数 a, b , f''_{xy} 与 f''_{yx} 都是连续的, 所以两者相等, 即

$$2ax^2y - 4xy = 6x^2y + 2bxy$$

比较同次幂系数, 得 $a = 3, b = -2$.

现由

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 - 2xy^2 \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y - 2x^2y + 1 \quad (2)$$

将(1)式对 x 积分得

$$f(x,y) = x^3y^2 - x^2y^2 + C(y)$$

对 y 求偏导数得

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y - 2x^2y + C'(y)$$

再由(2)式得 $C'(y) = 1, C(y) = y + C$.

因此

$$f(x,y) = x^3y^2 - x^2y^2 + y + C, (C \text{ 为任意常数})$$

方法2 由全微分运算法则得

$$\begin{aligned} & (ax^2y^2 - 2xy^2)dx + (2x^3y + bx^2y + 1)dy \\ &= \frac{a}{3}y^2dx^3 + x^3dy^2 - y^2dx^2 + \frac{b}{2}x^2dy^2 + dy \\ & \xrightarrow[b=-2]{a=3} d(x^3y^2 - x^2y^2 + y + C) \end{aligned}$$

因此 $a = 3, b = -2, f(x,y) = x^3y^2 - x^2y^2 + y + C, C$ 为任意常数.

【评注】 设 $P(x,y), Q(x,y)$ 具有连续的一阶偏导数, 则 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 为某函数的全微分的必要条件是 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

100 【答案】 1

【分析】 由 $f(x,y,z) = e^x + y^2z$ 知

$$f'_x(x,y,z) = e^x + y^2z'_x$$

等式 $x + y + z + xyz = 0$ 两端对 x 求偏导得

$$1 + z'_x + yz + xyz'_x = 0$$

令 $x = 0, y = 1, z = -1$ 得 $z'_x = 0$.

则 $f'_x(0,1,-1) = e^0 = 1$.

101 【答案】 $-\frac{1}{3}(dx + 2dy)$

【分析】 方法1 将 $x = 0, y = 0$ 代入 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 中, 得 $e^{3z} = 1$, 则 $z = 0$.

方程 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 两端微分得

$$e^{x+2y+3z}(dx + 2dy + 3dz) + yzdx + xzdy + xydz = 0$$

将 $x=0, y=0, z=0$ 代入上式得

$$dx + 2dy + 3dz = 0$$

$$\text{则 } dz \Big|_{(0,0)} = -\frac{1}{3}(dx + 2dy).$$

方法2 将 $x=0, y=0$ 代入 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 中, 得 $e^{3z} = 1$, 则 $z=0$.
由隐函数求导公式得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{e^{x+2y+3z} + yz}{3e^{x+2y+3z} + xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2e^{x+2y+3z} + xz}{3e^{x+2y+3z} + xy}$$

$$\text{将 } x=0, y=0, z=0 \text{ 代入上式得 } \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,0)} = -\frac{1}{3}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(0,0)} = -\frac{2}{3}.$$

$$\text{则 } dz \Big|_{(0,0)} = -\frac{1}{3}(dx + 2dy).$$

方法3 将 $x=0, y=0$ 代入 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 中, 得 $e^{3z} = 1$ 则 $z=0$.
将 $y=0$ 代入 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 中, 得 $e^{x+3z} = 1$, 该式两端对 x 求导得

$$e^{x+3z}(1 + 3z'_x) = 0,$$

$$\text{将 } x=0, z=0 \text{ 代入上式得 } \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,0)} = -\frac{1}{3}, \text{ 同理可得 } \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(0,0)} = -\frac{2}{3}.$$

$$\text{则 } dz \Big|_{(0,0)} = -\frac{1}{3}(dx + 2dy).$$

【评注】对于隐函数求具体点偏导数和全微分, 仍然可采用先代后求的方法, 即方法

3. 如果本题改为:

$$\text{若函数 } z = z(x, y) \text{ 由方程 } e^{x+2y+3z} + \frac{xyz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} = 1 \text{ 确定, 则 } dz \Big|_{(0,0)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

此方法的优越性更加明显.

102 【答案】 $-dx + 2dy$

【分析】等式 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$ 两端微分, 得

$$(x+1)dz + zdx - 2ydy = x^2 df(x-z, y) + f(x-z, y)2xdx$$

当 $x=0, y=1$ 时, 由 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$ 知 $z=1$, 所以

$$dz \Big|_{(0,1)} + dx - 2dy = 0$$

$$\text{即 } dz \Big|_{(0,1)} = -dx + 2dy.$$

103 【答案】 $\frac{1}{2}[f(y) - f(x)] - (x+y)$

【分析】将积分作变量替换, 令 $x+y-t = s$, 则

$$\int_x^y f(x+y-t)dt = -\int_y^x f(s)ds = \int_x^y f(s)ds$$

原方程化为

$$x^2 + y^2 + z^2 = \int_x^y f(s)ds$$

方法1 方程两边分别对 x, y 求偏导数, 得

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} = -f(x)$$

$$2y + 2z \frac{\partial z}{\partial y} = f(y)$$

$$\Rightarrow z \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} [f(y) - f(x)] - (x + y).$$

方法2 将方程两边求全微分得

$$2x dx + 2y dy + 2z dz = f(y) dy - f(x) dx$$

移项,得

$$z dz = - \left(x + \frac{1}{2} f(x) \right) dx + \left(-y + \frac{1}{2} f(y) \right) dy$$

于是

$$\begin{aligned} z \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \right) &= - \left(x + \frac{1}{2} f(x) \right) + \left(-y + \frac{1}{2} f(y) \right) \\ &= \frac{1}{2} [f(y) - f(x)] - (x + y). \end{aligned}$$

104 【答案】 $-\frac{1}{e}$

【分析】 $f'_x = 2x(2 + y^2)$, $f'_y = 2x^2 y + \ln y + 1$.

令 $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$, 解得驻点 $(0, \frac{1}{e})$.

$$A = f''_{xx} \left(0, \frac{1}{e} \right) = 2(2 + y^2) \Big|_{(0, \frac{1}{e})} = 2 \left(2 + \frac{1}{e^2} \right)$$

$$B = f''_{xy} \left(0, \frac{1}{e} \right) = 4xy \Big|_{(0, \frac{1}{e})} = 0$$

$$C = f''_{yy} \left(0, \frac{1}{e} \right) = \left(2x^2 + \frac{1}{y} \right) \Big|_{(0, \frac{1}{e})} = e$$

所以 $B^2 - AC = -2e \left(2 + \frac{1}{e^2} \right) < 0$, $A > 0$, 则 $f \left(0, \frac{1}{e} \right)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值, 极小值为

$$f \left(0, \frac{1}{e} \right) = -\frac{1}{e}.$$

105 【答案】 大, (1, 1), 6.

【分析】 按隐函数微分法求偏导数.

$$2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} - 2 - 4 \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1-x}{z-2} \quad (1)$$

由 x, y 的对称性知

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1-y}{z-2} \quad (2)$$

由 $\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ 得唯一驻点 $(x, y) = (1, 1)$.

将 $(x, y) = (1, 1)$ 代入方程中得到

$$z^2 - 4z - 12 = 0, (z - 6)(z + 2) = 0.$$

由于 $z > 0 \Rightarrow z(1, 1) = 6$.

为判断 $(1, 1)$ 是否极值点, 进一步求 $z(x, y)$ 在 $(1, 1)$ 处的二阶偏导数.

注意 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,1)} = \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(1,1)} = 0$. 由 (1) 式得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-(z-2) - (1-x) \frac{\partial z}{\partial x}}{(z-2)^2}, A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(1,1)} = -\frac{1}{z-2} \Big|_{(1,1)} = -\frac{1}{4}$$

同样由 (1) 式得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{(x-1) \frac{\partial z}{\partial y}}{(z-2)^2}, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1)} = 0$$

由 (2) 式得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-(z-2) - (1-y) \frac{\partial z}{\partial y}}{(z-2)^2}, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(1,1)} = -\frac{1}{z-2} \Big|_{(1,1)} = -\frac{1}{4}$$

于是在 $(1, 1)$ 处 $AC - B^2 = \frac{1}{16} > 0, A = -\frac{1}{4} < 0$, $(1, 1)$ 是 $z(x, y)$ 的极大值点, 相应的极大值是 6.

106

【答案】 $\int_0^a dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} f(x, y) dy$

107

【答案】 $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y) dx$

【分析】 由题设知对应的二重积分

$\iint_D f(x, y) d\sigma$ 的积分区域 $D = D_1 \cup D_2$, 且

$$D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \frac{1}{2}(3-x)\},$$

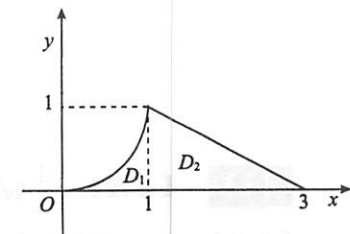
画出积分区域 D 如图所示. 由此可见在区域 D 中最高点的纵坐标为 1, 最低点的纵坐标为 0, 左边界的方程是 $x = \sqrt{y}$, 右边界的方程 $x = 3 - 2y$, 从而积分区域 D 又可表成

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, \sqrt{y} \leq x \leq 3 - 2y\}.$$

故交换积分次序得 $I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y) dx$.

【评注】 二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 可化为累次积分 $\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$ 或 $\int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$.

累次积分的基本特点是外层积分限为常数, 内层积分限为函数, 而且积分上限总是不小于积分下限.



难吗? 不会做? 可以看
《数学复习全书·基础篇》
高数第九章
二重积分

108 【答案】 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{8}(1 - e^{-R^2})$

【分析】 I 是二重积分 $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} d\sigma$ 的累次积分, 其中

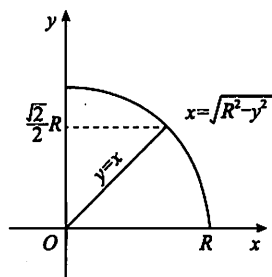
$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}R, 0 \leq x \leq y \right\} \cup \left\{ (x, y) \mid \frac{\sqrt{2}}{2}R \leq y \leq R, \right.$$

$0 \leq x \leq \sqrt{R^2 - y^2} \}$, D 如图所示, 应作极坐标变换

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 可得

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq r \leq R, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

$$\text{于是 } I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R e^{-r^2} r dr = -\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} e^{-r^2} \Big|_0^R = \frac{\pi}{8}(1 - e^{-R^2}).$$

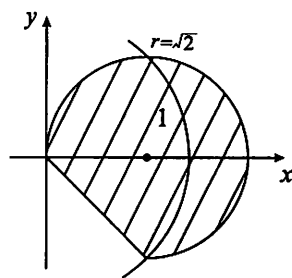


109 【答案】 $\int_0^{\sqrt{2}} r dr \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arccos \frac{r}{\sqrt{2}}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta + \int_{\sqrt{2}}^2 r dr \int_{-\arccos \frac{r}{\sqrt{2}}}^{\arccos \frac{r}{\sqrt{2}}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta$

【分析】 由原题知积分域如图所示, 则

$$\text{原式} = \int_0^{\sqrt{2}} r dr \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arccos \frac{r}{\sqrt{2}}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta +$$

$$\int_{\sqrt{2}}^2 r dr \int_{-\arccos \frac{r}{\sqrt{2}}}^{\arccos \frac{r}{\sqrt{2}}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta$$



110 【答案】 $2 - \frac{\pi}{2}$

【分析】 本题在直角坐标下不易计算, 利用极坐标计算.

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2} dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}}^1 (\cos \theta + \sin \theta) dr \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta + \sin \theta) d\theta - \frac{\pi}{2} \\ &= 2 - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

111 【答案】 $\frac{1}{3}(\sqrt{2} - 1)$

【分析】 交换积分次序得

$$\int_0^1 dx \int_x^1 \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}} dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{1+y^3}} dy = \frac{1}{3}(\sqrt{2} - 1).$$

112 【答案】 $\frac{2}{3}$

【分析】 交换积分次序得

$$\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} \cos^2 x dx = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx \int_0^{\sin x} dy = \int_0^{\pi} \cos^2 x \sin x dx = \frac{2}{3}$$

113 【答案】 $\frac{\pi}{4}$

【分析】 由于 $2y$ 是 y 的奇函数, 而积分域 $x^2 + y^2 \leq 1$ 关于 x 轴对称, 则

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} 2y d\sigma &= 0 \\ \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 d\sigma &= \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) d\sigma \quad (\text{变量的对称性}) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

114 【答案】 2π

【分析】 本题直接用直角坐标或极坐标都不易计算, 应考虑平移加极坐标, 或奇偶性的平移.

方法 1 令 $x = 1 + r\cos\theta, y = 1 + r\sin\theta$, 则

$$\begin{aligned} \iint_D xy dx dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (1 + r\cos\theta)(1 + r\sin\theta) r dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (1 + r\cos\theta + r\sin\theta + r^2 \sin\theta \cos\theta) r dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r dr = 2\pi \end{aligned}$$

方法 2 由于区域 D 关于 $x = 1, y = 1$ 都对称, 则

$$\begin{aligned} \iint_D xy dx dy &= \iint_D [(xy - x) + x] dx dy \\ &= \iint_D [x(y - 1) + (x - 1) + 1] dx dy \\ &= \iint_D 1 dx dy = 2\pi \end{aligned}$$

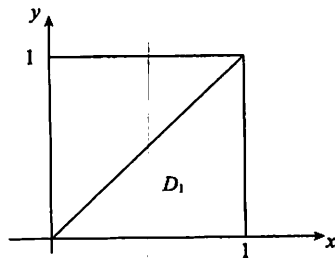
115 【答案】 $2\ln(1 + \sqrt{2})$

【分析】 由于区域 D 关于直线 $y = x$ 对称, 则

$$\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 2 \iint_{D_1} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

其中区域 D_1 如右图, 为下半三角形, 则

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} dr = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\cos\theta} \\ &= 2 \ln(\sec\theta + \tan\theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 2 \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$



微信扫码

116 【答案】 $\frac{5}{3} + \frac{\pi}{2}$

【分析】 这是带有绝对值的二重积分,可通过分割积分区域的办法去掉绝对值符号.

如图所示,将区域 D 分成 D_1 和 D_2 两部分,其中

$$D_1 = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2\},$$

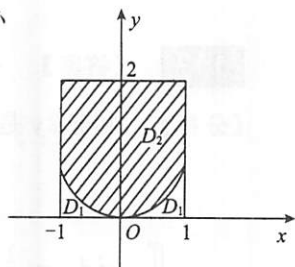
$$(x, y) \in D_1 \text{ 时, } \sqrt{|y - x^2|} = \sqrt{x^2 - y}.$$

$$(x, y) \in D_2 \text{ 时, } \sqrt{|y - x^2|} = \sqrt{y - x^2}. \text{ 所以}$$

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{|y - x^2|} dx dy &= \iint_{D_1} \sqrt{x^2 - y} dx dy + \iint_{D_2} \sqrt{y - x^2} dx dy \\ &= \int_{-1}^1 dx \int_0^{x^2} \sqrt{x^2 - y} dy + \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^2 \sqrt{y - x^2} dy \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_0^{x^2} \sqrt{x^2 - y} dy + 2 \int_0^1 dx \int_{x^2}^2 \sqrt{y - x^2} dy \\ &= -\frac{4}{3} \int_0^1 (x^2 - y)^{\frac{3}{2}} \Big|_{y=0}^{y=x^2} dx + \frac{4}{3} \int_0^1 (y - x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{y=x^2}^{y=2} dx \\ &= \frac{4}{3} \int_0^1 x^3 dx + \frac{4}{3} \int_0^1 (2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{3} + \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 t dt \\ &= \frac{5}{3} + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 t dt &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right)^2 dt = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + 2\cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2}) dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2t + \frac{1}{2} \cos 4t \right) dt = \frac{3}{32} \pi + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

【评注】 在计算中利用了积分区域 D_1 与 D_2 关于 y 轴的对称性以及被积函数 $\sqrt{x^2 - y}$ 与 $\sqrt{y - x^2}$ 都是 x 的偶函数.



117 【答案】 $(x-1)f(x)$

【分析】 交换积分次序

$$F(x) = \int_1^x dv \int_v^x f(u) du = \int_1^x du \int_1^u f(u) dv = \int_1^x (u-1)f(u) du$$

所以

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_1^x (u-1)f(u) du = (x-1)f(x)$$

118 【答案】 $\frac{3}{4} \sqrt{x^2 + y^2} + y^2$

【分析】 因 $f(x, y)$ 连续, 从而 $f(x, y)$ 在区域 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上可积, 设

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(x, y) d\sigma = A$$

则 $f(x, y) = \frac{A}{\pi} \sqrt{x^2 + y^2} + y^2$, 两边在 D 上积分得

$$\begin{aligned} A &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left(\frac{A}{\pi} \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 \right) d\sigma = \frac{A}{\pi} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma + \iint_{x^2+y^2 \leq 1} y^2 d\sigma \\ &= \frac{A}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 \sin^2 \theta dr \\ &= \frac{2}{3} A + 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{2}{3} A + \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = \frac{3}{4} \pi. \text{ 故 } f(x, y) = \frac{3}{4} \sqrt{x^2 + y^2} + y^2.$$

119 【答案】 $\frac{\pi}{8}(3e^4 + 1)$

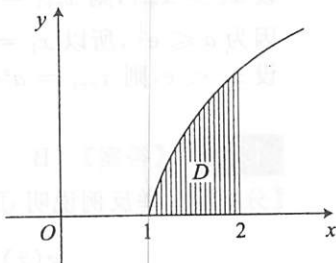
【分析】 令 $I = \iint_D x^2 \ln(x^2 + y^2) d\sigma$, $J = \iint_D y^2 \ln(x^2 + y^2) d\sigma$, 由于积分区域 $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2\}$ 关于直线 $y = x$ 对称, 故

$$\begin{aligned} I &= J = \frac{1}{2}(I + J) = \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^e r^2 \ln(r^2) r dr = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^e r^2 \ln(r^2) d(r^2) \\ &= \frac{\pi}{2} \int_1^{e^2} t \ln t dt = \frac{\pi}{4} \int_1^{e^2} \ln t d(t^2) = \frac{\pi}{4} \left[t^2 \ln t \Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} t dt \right] \\ &= \frac{\pi}{4} \left[e^4 \ln(e^2) - \frac{1}{2}(e^4 - 1) \right] = \frac{\pi}{4} \left(\frac{3}{2} e^4 + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{8} (3e^4 + 1). \end{aligned}$$

120 【答案】 $\ln 2$

【分析】 由题设知积分区域 $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \ln x\}$, 从而

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{e^{xy}}{x^x - 1} d\sigma &= \int_1^2 dx \int_0^{\ln x} \frac{e^{xy}}{x^x - 1} dy \\ &= \int_1^2 \frac{dx}{x^x - 1} \int_0^{\ln x} e^{xy} dy \\ &= \int_1^2 \frac{dx}{x(x^x - 1)} \int_0^{\ln x} e^{xy} d(xy) \\ &= \int_1^2 \frac{e^{xy}}{x(x^x - 1)} \Big|_{y=0}^{y=\ln x} dx \\ &= \int_1^2 \frac{e^{x \ln x} - 1}{x(x^x - 1)} dx = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2. \end{aligned}$$



微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

选 择 题

121 【答案】 C

【分析】 若极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \exists$, 则 x_n 有界. 这是我们应熟悉的基本定理, 即 ① 正确. 关于 ②, ③ 的正确性, 从直观上理解即可.

$$x_n: x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

$$x_{n+l}: x_{1+l}, x_{2+l}, x_{3+l}, \dots, x_{n+l}, \dots$$

x_n 中去掉前 l 项即 x_{n+l} .

$$x_{2n-1}: x_1, x_3, x_5, \dots, x_{2n-1}, \dots$$

$$x_{2n}: x_2, x_4, x_6, \dots, x_{2n}, \dots$$

它们一起涵盖了 x_n 的所有项.

命题 ④ 是错的. 例如 $x_n = n, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$,

但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ (不 $\exists$ 极限).

因此选(C).

【评注】 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 若 $a \neq 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a}{a} = 1.$$

若 $a = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 可能存在, 也可能不存在.

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \stackrel{\text{记}}{=} C$ 存在, 则必有 $C \in [-1, 1]$ (因为若 $|C| > 1$, 必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$).

例如 $x_n = \frac{1}{l^n} (|l| > 1) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{l}$.

难吗? 不会做? 可以看
《数学复习全书·基础篇》
高数第一章
函数极限连续

122 【答案】 B

【分析】 因为 $a > 1$, 所以 $x_2 = a^{x_1} > a = x_1$.

设 $x_n > x_{n-1}$, 则 $x_{n+1} = a^{x_n} > a^{x_{n-1}} = x_n$, 所以数列 $\{x_n\}$ 单调增.

因为 $a \leq e^{\frac{1}{e}}$, 所以 $x_1 = a \leq e$.

设 $x_n < e$, 则 $x_{n+1} = a^{x_n} \leq e$. 所以数列 $\{x_n\}$ 有上界, 故数列 $\{x_n\}$ 有极限.

123 【答案】 B

【分析】 举反例说明 ①, ②, ③ 均错, 例如

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}, h(x) = \begin{cases} -1, & x > 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$$

则 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x), \lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ 均不 $\exists$, 但

$$\lim_{x \rightarrow 0} (g(x) + h(x)) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} (g(x) \cdot h(x)) = -1$$

故 ②, ③ 不正确.

若取 $f(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = 0$, 故 ① 也不正确.

按题设, 易知 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ 不 $\exists$. (否则, 若 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) \exists$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} [(f(x) + g(x)) - f(x)] \exists$, 矛盾). 故 ④ 正确. 选(B).

【评注】 (1) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 不 $\exists$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ 不 $\exists$, 当 $A \neq 0$ 时, 又有 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x))$ 不 $\exists$; 当 $A = 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x))$ 可能 $\exists$, 也可能不 $\exists$.

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 均不 $\exists$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)), \lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x))$ 可能 $\exists$, 也可能不 $\exists$.

124 【答案】 B

【分析】 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

所以 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 区间有界.

125 【答案】 D

【分析】 (D) 正确. (D) 正是极限的不等式性质中所述的结论.

(A) 的错误在于由 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 不能判断 x_0 附近 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小关系. 由(B) 的条件只能得 $A_0 \geq B_0$. 在(C) 中没假设极限存在. 选(D).

126 【答案】 A

【分析】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2[\pi(\sqrt{n^2 + n} - n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \frac{n\pi}{\sqrt{n^2 + n} + n} = 1$.

127 【答案】 B

【分析】 $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e - e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})} = e[1 - e^{n \ln(1 + \frac{1}{n}) - 1}]$.

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sim -e[n \ln(1 + \frac{1}{n}) - 1] \sim \frac{e}{2n}$.

所以 $A = \frac{e}{2}, p = 1$, (B) 选项正确.

128 【答案】 D

【分析】

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2 + n + n} + \frac{2}{n^2 + n + n} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} &\leq \frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \\ &\leq \frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 1} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + 1}, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n} \leq \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} \leq \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}.$$

$$\text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n} = \frac{1}{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1} = \frac{1}{2},$$



微信扫码

所以由夹逼定理, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right) = \frac{1}{2}$.

129 【答案】 D

【分析】 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin \pi x}{x-1} e^{\frac{1}{(x-1)^3}} = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin \pi x}{x-1} e^{\frac{1}{(x-1)^3}} = 0$$

其中 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \pi \cos \pi x = -\pi$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{(x-1)^3}} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{(x-1)^3}} = 0$.

所以选(D).

【评注】 注意 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{(x-1)^3}} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{(x-1)^3}} = 0$, 因而 $\lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{1}{(x-1)^3}}$ 不存在. 于是考察 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 时需要分别考察 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

130 【答案】 D

【分析】 先作如下变形

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - e^{-\frac{1}{2}(xe^x)^2}}{(xe^x)^4} \cdot e^{4x}$$

$$\stackrel{t = xe^x}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - e^{-\frac{1}{2}t^2}}{t^4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} e^{4x}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - e^{-\frac{1}{2}t^2}}{t^4}$$

方法1 用洛必达法则求这个极限

$$I = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t + te^{-\frac{1}{2}t^2}}{4t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\cos t + e^{-\frac{1}{2}t^2} - t^2 e^{-\frac{1}{2}t^2}}{12t^2}$$

$$\stackrel{\text{分解法}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{12t^2} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{2}t^2} - 1}{12t^2} - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{1}{24} - \frac{1}{24} - \frac{1}{12} = -\frac{1}{12}$$

其中 $1 - \cos t \sim \frac{1}{2}t^2$, $e^{-\frac{1}{2}t^2} - 1 \sim -\frac{1}{2}t^2$ ($t \rightarrow 0$), 选(D).

方法2 用泰勒公式求这个极限

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + o(t^4) \quad (t \rightarrow 0)$$

$$e^{-\frac{1}{2}t^2} = 1 + \left(-\frac{t^2}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{t^2}{2}\right)^2 + o(t^4) \quad (t \rightarrow 0)$$

相减得

$$\cos t - e^{-\frac{1}{2}t^2} = \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{4}\right)t^4 + o(t^4) = -\frac{1}{12}t^4 + o(t^4)$$

因此 $I = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{12}t^4 + o(t^4)}{t^4} = -\frac{1}{12}.$

【评注】 求 $\frac{0}{0}$ 型极限常可用洛必达法则或泰勒公式, 若需多次用洛必达法则, 导致求导计算不方便, 而又容易由间接法求得分子、分母的泰勒公式时, 应该用泰勒公式求这类 $\frac{0}{0}$ 型极限.

131 【答案】 D

【分析】
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \sqrt{\cos 2x}}{x^k} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos 2x)^2 - \cos 2x}{x^k (\cos 2x + \sqrt{\cos 2x})} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x^k} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}(2x)^2}{x^k} = a \neq 0 \end{aligned}$$

所以 $k = 2, a = -1.$

132 【答案】 C

【分析】
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{(1 - \cos x) \sin^2 x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}.$$

由三角公式可知, $\cos(\sin x) - \cos x = 2 \sin \frac{x + \sin x}{2} \sin \frac{x - \sin x}{2}$, 所以当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\cos(\sin x) - \cos x \sim \frac{1}{2}(x + \sin x)(x - \sin x)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{(1 - \cos x) \sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \sin x)(x - \sin x)}{x^4} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \\ &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

133 【答案】 D

【分析】
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}) - x}.$$

而由泰勒展开, $x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x = x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o(x^{-2})\right) - x = -\frac{1}{2} + o(1), x \rightarrow +\infty,$

所以
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}}{e^x} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

134 【答案】 A

【分析】 将已知条件改写成



微信扫码

微信公众账号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$I = a + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx + 1 - e^{x^2-2x}}{x^2} = 2,$$

即

$$I_1 = 2 - a$$

其中

$$I_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx + 1 - e^{x^2-2x}}{x^2} \exists$$

由此定出参数 a 与 b .

方法1 用洛必达法则:

$$I_1 \xrightarrow[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b - (2x - 2)e^{x^2-2x}}{2x}$$

分母极限为0,分子极限为 $b+2$,若 $b+2 \neq 0$,则极限 I_1 为 ∞ ,但极限 I_1 存在,故必有 $b+2=0$,即 $b=-2$,于是代入 $b=-2$ 后该极限为 $\frac{0}{0}$ 型,可用洛必达法则得

$$I_1 \xrightarrow{b=-2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(2x-2)^2 e^{x^2-2x} - 2e^{x^2-2x}}{2} \xrightarrow{\text{代入 } x=0} \frac{-6}{2} = -3$$

因此 $2-a=-3, b=-2$. 即 $a=5, b=-2$. 选(A).

方法2 用泰勒公式:

由极限与无穷小的关系

$$I_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx + 1 - e^{x^2-2x}}{x^2} = 2 - a$$

可写成

$$bx + 1 - e^{x^2-2x} = (2-a)x^2 + o(x^2)$$

由泰勒公式

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + o(t^2) (t \rightarrow 0)$$

令 $t = x^2 - 2x$, 则

$$t^2 = (x^2 - 2x)^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 4x^2 + o(x^2) (x \rightarrow 0)$$

$$o(t^2) = o(x^2) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\begin{aligned} e^{x^2-2x} &= 1 + (-2x + x^2) + \frac{1}{2}(4x^2) + o(x^2) \\ &= 1 - 2x + 3x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

于是

$$bx + 1 - e^{x^2-2x} = (b+2)x - 3x^2 + o(x^2) = (2-a)x^2 + o(x^2)$$

由此得

$$b+2=0, -3=2-a, \text{ 即 } a=5, b=-2. \text{ 选(A).}$$

135

【答案】 B

$$\text{【分析】} \quad \frac{\sin 6x - (\sin x)f(x)}{x^3} = \frac{\sin 6x - 6\sin x + (\sin x)(6-f(x))}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x - (\sin x)f(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x - 6\sin x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{6-f(x)}{x^2} \right] = 0,$$

由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow$

$$I \stackrel{\text{记}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6-f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6\sin x - \sin 6x}{x^3} \stackrel{\text{记}}{=} I_1$$

方法1 用洛必达法则求 I_1

$$I_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6\cos x - 6\cos 6x}{3x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + 6\sin 6x}{2x} = -1 + 36 = 35$$

因此 $I = 35$. 选(B).

方法2 用泰勒公式

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), 6\sin x = 6x - x^3 + o(x^3)$$

$$\sin 6x = 6x - \frac{1}{6}(6x)^3 + o(x^3), -\sin 6x = -6x + 36x^3 + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6\sin x - \sin 6x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{35x^3 + o(x^3)}{x^3} = 35.$$

因此 $I = 35$. 选(B).

136 【答案】 D

【分析】 方法1 (A) 是错的. 因为 n 是正整数, 对数列没有导数概念, 不能直接用洛必达法则.

(B) 是错的. 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi \cos \pi x}{6x - 2}$ 已不是未定式, 不能用洛必达法则.

(C) 也是错的. 用洛必达法则求 $\frac{0}{0}$ 型极限 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 时, 若 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在, 也不为 ∞ , 则法则失效, 不能推出原极限不存在, 事实上该极限是存在的. 因此选(D).

方法2 (D) 是正确的.

用洛必达法则求 $\frac{0}{0}$ 型极限 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 时,

若 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (有限数), 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

若 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, (D) 正是后一种情形.

【评注】 (A)、(B)、(C) 的正确解法是:

$$(A) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} \xrightarrow{\text{数列极限转化为函数极限}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$(B) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{3x^2 - 2x - 1} \xrightarrow{\frac{0}{0}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi \cos \pi x}{6x - 2} = \frac{-\pi}{4}.$$

$$(C) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 1 \times 0 = 0.$$

$$(D) \text{ 的另一解法: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 - \frac{\sin x}{x}} = \infty \text{ (分子极限为 2, 分母极限为 0).}$$

137 【答案】 D

【分析】 该题就是要计算极限

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e}{\frac{1}{n}} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ 型数列极限}\right)$$

方法1 直接转化为求 $\frac{0}{0}$ 型函数极限, 然后用洛必达法则.

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} - e)'}{x'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x) \ln(1+x)}{x^2} \\ &= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\ln(1+x)}{2x} = -\frac{e}{2} \end{aligned}$$

因此, 选(D).

方法2 先用等价无穷小因子替换, 再转化为求 $\frac{0}{0}$ 型函数极限, 然后用洛必达法则

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e} - 1}{\frac{1}{n}} = e \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e} \right)}{\frac{1}{n}} \\ &= e \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1}{\frac{1}{n}} = e \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \\ &= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = -\frac{e}{2} \end{aligned}$$

其中 $\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e} - 1 \sim \ln \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e} - 1 + 1 \right] = n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1$.

因此选(D).

方法3 用泰勒公式.

转化为求

$$I = e \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1}{\frac{1}{n}}$$

后用泰勒公式: $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), (x \rightarrow 0)$

$$\begin{aligned} I &= e \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] - 1}{\frac{1}{n}} = e \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{2} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \\ &= -\frac{e}{2} \end{aligned}$$

因此选(D).

138 【答案】 C

【分析】 逐一分析它们的阶.

(A)(考察等价无穷小)

$(1+x)^{x^2} - 1 \sim \ln[(1+x)^{x^2} - 1 + 1] = x^2 \ln(1+x) \sim x^3 (x \rightarrow 0), \Rightarrow (1+x)^{x^2} - 1$ 是 x 的三阶无穷小.

(B)(考察等价无穷小)

$e^{x^4-2x} - 1 \sim x^4 - 2x \sim -2x (x \rightarrow 0) \Rightarrow e^{x^4-2x} - 1$ 是 x 的一阶无穷小.

(C)(待定阶数法)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin t^2 dt}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x^4}{kx^{k-1}} \stackrel{k=6}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin x^4}{3x \cdot x^4} = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow \int_0^{x^2} \sin t^2 dt$ 是 x 的六阶无穷小.

(D)(待定阶数法或泰勒公式法)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^{\frac{1}{2}} - (1+3x)^{\frac{1}{3}}}{x^k} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(1+2x)^{-\frac{1}{2}} \times 2 - \frac{1}{3}(1+3x)^{-\frac{2}{3}} \times 3}{kx^{k-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}(1+2x)^{-\frac{1}{2}} \times 2 + \frac{2}{3}(1+3x)^{-\frac{2}{3}} \times 3}{k(k-1)x^{k-2}} \stackrel{k=2}{=} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}$ 是 x 的二阶无穷小.

或用泰勒公式. 已知

$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)t^2 + o(t^2) (t \rightarrow 0)$$

$$\Rightarrow (1+2x)^{\frac{1}{2}} - (1+3x)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \times 2x + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) (2x)^2 - \left[1 + \frac{1}{3} \times 3x + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) (3x)^2 \right] + o(x^2)$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) x^2 + o(x^2) = \frac{1}{2} x^2 + o(x^2)$$

$\Rightarrow \sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}$ 是 x 的二阶无穷小. 因此选(C).

139 【答案】 C

【分析】 此类问题要逐一分析, 按无穷小阶的定义:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = A \neq 0 (\exists), \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{(x-a)^m} = B \neq 0 (\exists)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x)}{(x-a)^{n+m}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{(x-a)^m} = A \cdot B \neq 0 (\exists)$$

$\Rightarrow f(x)g(x)$ 是 $(x-a)$ 的 $n+m$ 阶无穷小;

又, 若 $n > m$,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \Big/ (x-a)^{n-m} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} \Big/ \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{(x-a)^m} = \frac{A}{B} \neq 0 (\exists)$$

$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ 是 $(x-a)$ 的 $n-m$ 阶无穷小;

因此 ①② 正确. 再考察

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + g(x)}{(x-a)^n} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{(x-a)^m} (x-a)^{m-n} \\ &= \begin{cases} A + B \cdot 0 = A \neq 0 (\exists) (n < m) \\ A + B & (n = m) \end{cases}\end{aligned}$$

由此得, 当 $n < m$ 时 $f(x) + g(x)$ 是 $x-a$ 的 n 阶无穷小.

当 $n = m$ 时 $f(x) + g(x)$ 是 $x-a$ 的 n 阶 ($A+B \neq 0$) 或高于 n 阶 ($A+B = 0$) 的无穷小.

例如, $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x$ 与 $-x$ 均是 x 的一阶无穷小, 但

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{6}$$

即 $\sin x + (-x)$ 是 x 的三阶无穷小; 因此 ③ 不正确.

最后考察

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\int_a^x f(t) dt}{(x-a)^{n+1}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(n+1)(x-a)^n} = \frac{A}{n+1} \neq 0 \Rightarrow \int_a^x f(t) dt \text{ 是 } x-a \text{ 的 } n+1 \text{ 阶无穷小.}$$

因此 ④ 正确. 选(C).

【评注】 本题是讨论无穷小阶的运算规律. 再补充一条:

设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处 n 阶可导, $x \rightarrow a$ 时 $f(x)$ 是 $x-a$ 的 n 阶无穷小 ($n \geq 2$), 则 $f'(x)$ 是 $x-a$ 的 $n-1$ 阶无穷小.

【证法一】 $f(x)$ 在 $x=a$ 有泰勒公式且为

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + o((x-a)^n) \quad (x \rightarrow a)$$

其中 $f^{(n)}(a) \neq 0, f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$.

记 $g(x) = f'(x)$ 在 $x=a$ 处 $n-1$ 阶可导, 有泰勒公式

$$g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} g^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + o((x-a)^{n-1})$$

即

$$f'(x) = \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(a)(x-a)^{n-1} + o((x-a)^{n-1}) \quad (x \rightarrow a)$$

因此, $x \rightarrow a$ 时 $f'(x)$ 是 $x-a$ 的 $n-1$ 阶无穷小.

【证法二】 连续用 $n-1$ 次洛必达法则.

$f(x)$ 在 $x=a$ 处 n 阶可导 ($n \geq 2$) $\Rightarrow f(x)$ 在 $x=a$ 邻域 $n-1$ 阶可导且 $f^{(n-1)}(x)$ 在 $x=a$ 连续.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{n(x-a)^{n-1}} \quad (\text{分子极限为 } f'(a) = 0, \text{ 否则该极限为 } \infty, \text{ 这不可能})$$

$$= \dots = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} \quad (\text{分子极限为 } f^{(n-1)}(a) = 0, \text{ 否则该极限为 } \infty, \text{ 不可能})$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{n!(x-a)} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \neq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{(x-a)^{n-1}} = \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(a) \neq 0$$

因此 $f'(x)$ 是 $x-a$ 的 $n-1$ 阶无穷小.

140 【答案】 B**【分析】** 当 $x \rightarrow 0$ 时, 设 $f(x)$ 为 x 的 p 阶无穷小, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^p} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t e^{\sin t} dt}{x^p} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{\sin x}}{p x^{p-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{p x^{p-2}}$$

当 $p = 2$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^p} = \frac{1}{2}$ 为非零常数, 所以当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 为 x 的 2 阶无穷小.**141** 【答案】 D**【分析】** 易知 (A), (B) 中 $f(u)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续, $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续 $\Rightarrow$ 复合函数 $f(g(x))$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续. 因此只须在 (C), (D) 中选择.**方法 1** 考察 (C)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(g(x)) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(x + \frac{\pi^2}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \cos \sqrt{x + \frac{\pi^2}{4}}\right) \\ &= 1 - \cos \frac{\pi}{2} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(g(x)) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1-x^2)}{x} \sin \frac{1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2}{x} \sin \frac{1}{x} = 0. \end{aligned}$$

 $\Rightarrow x = 0$ 是 $f(g(x))$ 的第一类间断点. 选 (D).**方法 2** 考察 (D)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\sin \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{\sin^2 \frac{1}{x}} + 1)$$

该极限不存在 $\Rightarrow x = 0$ 是 $f(g(x))$ 的第二类间断点. 选 (D).

或考察

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{\frac{1}{x^2}} + 1) = +\infty$$

 $\Rightarrow x = 0$ 是 $f(g(x))$ 的第二类间断点. 选 (D).**142** 【答案】 C

$$\text{【分析】} \quad \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{x-1}{x} = \mp \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \arctan \frac{x-1}{x} = \mp \frac{\pi}{2}$$

 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \mp \frac{2}{\pi} \Rightarrow x = 0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

$$\text{又} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \arctan \frac{x-1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$$

 $\Rightarrow x = 1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

因此选 (C).

143 【答案】 B**【分析】** **方法 1** 若 $f(x) + \sin x$ 在 $x = x_0$ 连续 $\Rightarrow$
 $f(x) = (f(x) + \sin x) - \sin x$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

在 $x = x_0$ 连续,与已知矛盾.因此 $f(x) + \sin x$ 在 x_0 必间断.选(B).

【评注】 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 间断, $g(x)$ 在 $x = x_0$ 连续,则 $f(x) \pm g(x)$ 在 $x = x_0$ 间断.

方法2 举反例说明(A)、(C)、(D) 不对.

设 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 间断, $f(x) \cdot \sin x = 0 (\forall x)$ 在 $x = 0$ 连续.

设 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x)$ 在 $x = 0$ 间断, 但 $f^2(x) = 1 (\forall x)$,

$|f(x)| = 1 (\forall x)$ 在 $x = 0$ 均连续, 因此不选(A)、(C)、(D).

144 【答案】 A

【分析】 由“若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |a|$ ”可得“如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |f(x_0)|$ ”因此, $f(x)$ 在 x_0 连续, 则 $|f(x)|$ 在 x_0 连续, 但 $|f(x)|$ 在 x_0 处连续, $f(x)$ 在 x_0 处不一定连续.

如 $f(x) = \begin{cases} -1, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$, 在 $x = 0$ 不连续, 但 $|f(x)| = 1$ 在 $x = 0$ 处连续.

于是应选(A).

145 【答案】 C

【分析】 若 $\exists x_n \in [a, +\infty)$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$, 则 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 无界. 因为若 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 有界, 即 $|f(x)| \leq M (x \in [a, +\infty)) \Rightarrow |f(x_n)| \leq M$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$ 矛盾.



微信扫码

若 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 无界 $\Rightarrow$ 对 $\forall$ 自然数 n , $f(x)$ 在 $[n, +\infty)$ 无界

$\Rightarrow \exists x_n \in [n, +\infty)$, $|f(x_n)| > n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$.

因此选(C).

146 【答案】 C

【分析】 先分别考察左、右可导性.

显然, $f(0) = 0$.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^4}{x^4} = \frac{1}{2} (\Rightarrow f(x) \text{ 在 } x = 0 \text{ 右连续})$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) \frac{\arcsin^2 x}{x} \xrightarrow{\text{有界变量与无穷小之积}} 0 (\Rightarrow f(x) \text{ 在 } x = 0 \text{ 左连续})$$

$f'_+(0) \neq f'_-(0)$. 因此 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续, 但不可导. 选(C).

【评注】 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 左可导且右可导, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续, 从而它在 x_0 处的极限存在.

147 【答案】 A

【分析】 $|x| \neq 1$ 时显然可导. 由于 $f(x)$ 是偶函数, 故只须考察 $x = 1$.

首先要求 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续, 即 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$

$$\text{即 } \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{x^2-1}} = 1 - b + c, 0 = 1 - b + c$$

$$\text{又 } f'_+(1) = (x^4 - bx^2 + c)' \Big|_{x=1} = 4 - 2b$$

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{\frac{1}{x^2-1}} - 0}{x - 1} \stackrel{\text{洛必达法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{0}{0}}{(x^2 - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2} e^{\frac{1}{x^2-1}} \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{\frac{1}{x^2-1}}}{(x^2 - 1)^2} \stackrel{t = \frac{1}{x^2-1}}{=} -2 \lim_{t \rightarrow -\infty} t^2 e^t = 0 \end{aligned}$$

现要求 $f'_+(1) = f'_-(1)$, 即 $4 - 2b = 0$.

因此, $b = 2, c = 1$. 选(A).

【评注】 有一类如下类型的分段函数:

设 $f(x) = \begin{cases} g(x), & x_0 - \delta < x \leq x_0 \\ h(x), & x_0 < x < x_0 + \delta \end{cases}$, δ 为大于零的常数, $h(x)$ 在 x_0 无定义, 又 $g'_-(x_0)$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} h(x) = a, \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{h(x) - a}{x - x_0} = b \text{ 均存在.}$$

现考察 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的可导性.

首先考察 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的连续性.

$$f(x) \text{ 在 } x = x_0 \text{ 连续} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = g(x_0) (g'_-(x_0) \exists, \text{ 则 } g(x) \text{ 在 } x = x_0 \text{ 左连续}).$$

$$\Leftrightarrow a = g(x_0). \text{ 补充定义 } h(x_0) = a, \text{ 则}$$

$$h'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{h(x) - a}{x - x_0} = b$$

当 $g(x_0) = a$ 时,

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x_0 - \delta < x \leq x_0 \\ h(x), & x_0 \leq x < x_0 + \delta \end{cases}$$

$$f'(x_0) \exists \Leftrightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0) \Leftrightarrow g'_-(x_0) = h'_+(x_0) = b.$$

因此在题设条件下, $f(x)$ 在 $x = x_0$ 可导 $\Leftrightarrow g(x_0) = a, g'_-(x_0) = b$.

148 【答案】 A

【分析】 方法 1 关于(A), 当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} \sin \frac{1}{x} - x^{-\frac{2}{3}} \cos \frac{1}{x}$

而 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ 不存在 $\Rightarrow f'(x)$ 在 $x = 0$ 不连续. 选(A).

【评注】 设 $f(x) = \begin{cases} |x|^a \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 则

$f(x)$ 在 $x = 0$ 连续 $\Leftrightarrow a > 0$; 在 $x = 0$ 可导 $\Leftrightarrow a > 1$; 在 $x = 0$ 处 $f'(x)$ 连续 $\Leftrightarrow a > 2$.

(A) 中 $a = \frac{4}{3}, 1 < a < 2, f'(x)$ 在 $x = 0$ 不连续.

方法2 (B)、(C)、(D) 中的三个 $f(x)$ 在 $x=0$ 均连续, 直接求出

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \quad (x \neq 0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{2x} = 0$$

$\Rightarrow f'(0) = 0, f'(x)$ 在 $x=0$ 连续.

类似可证(C)、(D) 函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续. 因此选(A).

【评注】 (B)、(C)、(D) 中的函数均可表为幂级数.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (|x| < +\infty).$$

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} = 1 + \frac{1}{3!} x^2 + \dots$$

右端级数当 $x=0$ 时取值为 1, $\Rightarrow$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} \quad (|x| < +\infty)$$

由幂级数的性质 $\Rightarrow f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 任意阶可导.

其余类似.

149 【答案】 B

【分析】 当 $f(0) = 0$ 时,

$$f'(0) \exists \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \exists,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x^2} \exists \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t} \exists \Leftrightarrow f'_+(0) \exists.$$

若 $f'(0) \exists \Rightarrow f'_+(0) \exists \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x^2} \exists$. 反之, 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x^2} \exists \Rightarrow f'_+(0) \exists \nRightarrow f'(0) \exists$. 因此选(B).

【评注】 例 $f(x) = |x|, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x^2} = 1$, 但 $f(x)$ 在 $x=0$ 不可导.

150 【答案】 C

【分析】 $f'(x)$ 也以 3 为周期 $\Rightarrow f'(1) = f'(4)$, 我们可由 $f'(1)$ 求得极限值 I .

$$\begin{aligned} I &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(1+h) - f(1)] - [f(1-3\tan h) - f(1)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-3\tan h) - f(1)}{-3\tan h} \cdot \frac{3\tan h}{h} \\ &= (1+3)f'(1) = 4 \end{aligned}$$

应该选(C).



微信扫码

【评注】 设 $f'(a) \exists, \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(a + \varphi(x)) - f(a)}{\varphi(x)} \stackrel{t = \varphi(x)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t) - f(a)}{t} = f'(a).$$

本题就是利用 $f'(1)$ 来求

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + \varphi(h)) - f(1)}{\varphi(h)} = f'(1)$$

其中 $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$, 这里是 $\varphi(h) = h$ 或 $\varphi(h) = -3 \tan h$.

151 【答案】 C

【分析】 因为 $f(x) = |x - a| g(x)$ 在 $x = a$ 点处可导, 所以

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} g(a + h)$$

存在. 而函数 $g(x)$ 在 $x = a$ 点处连续, $\lim_{h \rightarrow 0} g(a + h) = g(a)$, $\lim_{h \rightarrow 0^{\pm}} \frac{|h|}{h} = \pm 1$, 所以 $g(a) = 0$.

152 【答案】 C

【分析】 $f(x) = \begin{cases} x \sin^2 x, & x \geq 0 \\ -x \sin^2 x, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \sin^2 x + x \sin 2x, & x \geq 0 \\ -(\sin^2 x + x \sin 2x), & x < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow f''(x) = \begin{cases} 2 \sin 2x + 2x \cos 2x, & x \geq 0 \\ -(2 \sin 2x + 2x \cos 2x), & x < 0 \end{cases}$$

$$f_+^{(3)}(0) = (2 \sin 2x + 2x \cos 2x)' \Big|_{x=0} = 6$$

$$f_-^{(3)}(0) = (-(2 \sin 2x + 2x \cos 2x))' \Big|_{x=0} = -6$$

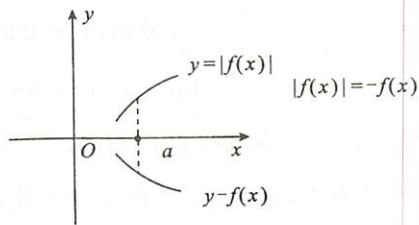
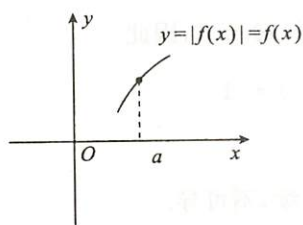
$\Rightarrow f^{(3)}(0)$ 不存在. 因此 $n = 2$. 选(C).

知识点链接

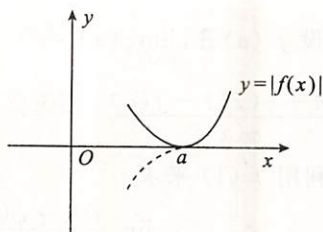
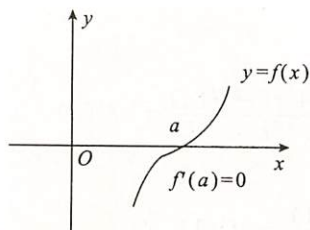
《数学复习全书·基础篇》
高数第二章
导数与微分

153. 【答案】 B

【分析】 方法1 当 $f(a) \neq 0$ 时(不论 $f'(a)$ 是正值还是负值), 由连续性, 在 $x = a$ 附近或 $|f(x)| = f(x)$, 或 $|f(x)| = -f(x)$, 于是 $|f(x)|$ 与 $f(x)$ 在 $x = a$ 有相同的可导性. 由 $f'(a) \exists \Rightarrow |f(x)|' \Big|_{x=a} \exists$, (C)、(D) 被排除.



当 $f(a) = 0, f'(a) = 0$ 时曲线 $y = f(x)$ 在 $(a, 0)$ 点与 x 轴相切 $\Rightarrow y = |f(x)|$ 同样在 $(a, 0)$ 点与 x 轴相切 $\Rightarrow |f(x)|' \Big|_{x=a} \exists$ (且为零值). (A) 被排除.



因此选(B).

方法 2 $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, $|x|' = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} = \frac{x}{|x|}$, 所以, 当 $f(x) \neq 0$ 且

$f(x)$ 可导, 由复合函数的导数法则, 有 $(|f(x)|)' = \frac{f(x)}{|f(x)|} f'(x)$.

若 $f(a) \neq 0$, 则有 $[|f(x)|]' \Big|_{x=a} = \frac{f(x)}{|f(x)|} f'(x) \Big|_{x=a} = \frac{f(a)}{|f(a)|} f'(a)$, 因此不选(C) 和

(D). (当 $f(x)$ 在 $x=a$ 可导, 且 $f(a) \neq 0$ 时, $|f(x)|$ 在 $x=a$ 点可导).

当 $f(a) = 0$ 时

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{|f(x)| - |f(a)|}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = |f'(a)| \\ \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{|f(x)| - |f(a)|}{x - a} &= - \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -|f'(a)| \end{aligned}$$

上两式分别是 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 点的右、左导数, 因此, 当 $f(a) = 0$ 时, $|f(x)|$ 在 $x=a$ 点不可导的充要条件是上两式不相等, 即 $f'(a) \neq 0$ 时, 于是选(B).

【评注】 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 可导, 关于 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 是否可导有如下结论:

若 $f(a) \neq 0$, 则 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 可导.

若 $f(a) = 0$, $\begin{cases} f'(a) = 0, & \text{则 } |f(x)| \text{ 在 } x=a \text{ 可导.} \\ f'(a) \neq 0, & \text{则 } |f(x)| \text{ 在 } x=a \text{ 不可导.} \end{cases}$

154 【答案】 D

【分析】 首先将 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的左右导数 $f'_-(x_0), f'_+(x_0)$ 与 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 处的左右极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$ 区分开来.

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = a$, 只能得出 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = a$, 但不能保证 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 以及在 $x=x_0$ 处连续和极限存在.

例如 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x > 0 \\ x, & x \leq 0 \end{cases}$. 显然, $x \neq 0$ 时, $f'(x) = 1$, 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 1$$

但 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$,

因而 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在, 因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续, 不可导.

因此选(D).

【评注】 (1) $f(x)$ 在 x_0 可导, 则 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ 存在, 不一定有 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

(2) 本题讨论的一个问题是, $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ 与 $f'(x_0)$ 的关系, 我们有如下结论:

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的空心邻域内可导

① $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = A \begin{cases} \text{若 } f(x) \text{ 在 } x = x_0 \text{ 不连续} \Rightarrow f'(x_0) \text{ 不 } \exists. \\ \text{若 } f(x) \text{ 在 } x = x_0 \text{ 连续} \Rightarrow f'(x_0) = A. \end{cases}$

(此时可用洛必达法则求得 $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = A$)

② $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \infty \Rightarrow f'(x_0) \text{ 不 } \exists.$

(此时若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 不连续, 当然也就不可导, 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续, 仍可用洛必达法则得

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \infty$$

即 $f'(x_0) \text{ 不 } \exists.$)

③ $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) \text{ 不 } \exists$, 也不为 ∞ , 此时 $f'(x_0)$ 是否存在要具体问题具体分析.

155

【答案】 A

【分析】 作变量代换 $u = x + t$, 则

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-x}^0 t f(x+t) dt = \int_0^x (u-x) f(u) du = \int_0^x u f(u) du - x \int_0^x f(u) du \\ g'(x) &= x f(x) - \int_0^x f(u) du - x f(x) = - \int_0^x f(u) du \end{aligned}$$

156

【答案】 B

【分析】 设切点为 (x_0, y_0) , 则因为 $y = x$ 为曲线 $y = a^x$ 的切线,

$$\begin{cases} a^{x_0} = x_0 \\ a^{x_0} \ln a = 1 \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} a^{x_0} \ln a - 1 = 0 \\ x_0 \ln a - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{\ln a} = \frac{\ln \frac{1}{\ln a}}{\ln a} \\ a &= e^{\frac{1}{e}}, x_0 = y_0 = e \end{aligned}$$

157

【答案】 D

【分析】

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

因为 $f(0) = 0$, 所以由中值定理知 $f(x) = xf'(\xi)$, 其中 $0 < \xi < x$. 所以

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x}$$

而 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 为严格单调增函数, 所以 $g'(x) < 0$, 函数 $g(x) = \frac{1-f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 为单调减函数.

158 【答案】 C

【分析】 由条件出发, 按导数定义

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

及极限的不等式性质可知, $\exists \delta > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$ 时,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

$\Rightarrow$ 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时 $f(x) - f(x_0) > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时 $f(x) - f(x_0) < 0$.
因此, 选(C).

【评注】 (1) 前面的分析方法, 给出了如下结论的证明:

设 $f'(x_0) > 0$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时 $f(x) > f(x_0)$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时 $f(x) < f(x_0)$.

作为选择题, 有时我们可选用特殊选取法. 即特殊选取某具体的 $f(x)$ 满足题中的条件, 若四个选项中, 有三个选项不正确, 一个选项正确, 就选该项即可.

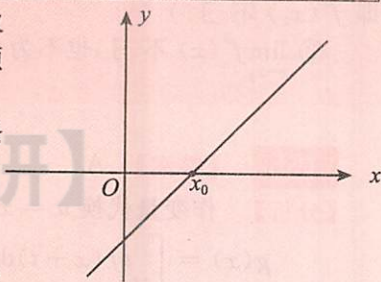
如取 $f(x) = x - x_0$ 如右图, 则 $f'(x) = 1 > 0$, 满足条件. 对此 $f(x)$, 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上单调上升, 且

$$f(x) > f(x_0) = 0 \quad (x \in (x_0, x_0 + \delta)),$$

$$f(x) < f(x_0) = 0 \quad (x \in (x_0 - \delta, x_0)).$$

于是选项(B)、(D) 不正确, 对此 $f(x)$, (A)、(C) 均正确. 但若(A) 正确, 则(C) 一定正确, 由“四选一”原则, (A) 一定不正确, 故选(C).

(2) 若 $f'(x_0) > 0$ 且 $f'(x)$ 在 $x = x_0$ 连续 $\Rightarrow \exists \delta > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时 $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 单调上升.



159 【答案】 A

【分析】 因 $f'(a) = 0$ 于是有 $(a-1)f''(a) = 1 - e^{1-a}$

显然

$$f''(a) = \frac{e^{1-a} - 1}{1-a} > 0$$

所以, $x = a$ 是极小值点. 选(A).

【评注】 对 $\forall x, e^x - 1 > x$, (令 $F(x) = e^x - 1 - x, F'(x) = e^x - 1$)

$$\begin{cases} < 0, & x < 0 \\ = 0, & x = 0 \\ > 0, & x > 0 \end{cases},$$

$\Rightarrow F(x) > F(0) = 0 (x \neq 0)$.

160 【答案】 B

【分析】 方法 1 因 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f''(x)}{(x-1)^2} = \frac{1}{2} > 0$, 由极限的保号性质, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 <$

$|x-1| < \delta$ 时 $\frac{f''(x)}{(x-1)^2} > 0$, 又因 $(x-1)^2 > 0 (x \neq 1)$, 所以当 $0 < |x-1| < \delta$ 时, $f''(x) >$

0, 因此 $f'(x)$ 在 $(1-\delta, 1+\delta)$ 单调递增, 从而当 $1-\delta < x < 1$, $f'(x) < f'(1) = 0$, 当 $1 < x < 1+\delta$, $f'(x) > f'(1) = 0$, 由取得极值的充分条件, $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极小值. 因此选(B).

【评注】 由当 $0 < |x-1| < \delta$ 时, $f''(x) > 0$ 可以断定 $(1, f(1))$ 肯定不是曲线的拐点, 因 $f''(x)$ 在 $x=1$ 的两侧没有改变符号.

方法 2 由前面分析知, $f(x)$ 在 $(1-\delta, 1+\delta)$ 为凹函数, 直接由凹函数的特征知, $f(x) > f(1) + f'(1)(x-1) = f(1)$ ($x \in (1-\delta, 1+\delta)$, $x \neq 1$). 选(B).

方法 3 特殊选取 $f(x)$ 满足: $f''(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2$.

取 $f(x) = \frac{1}{24}(x-1)^4$, 则 $f(x)$ 满足题中条件, $f(x)$ 在 $x=1$ 处取极小值, 而其余均不正确. 因此选(B).

161 【答案】 C

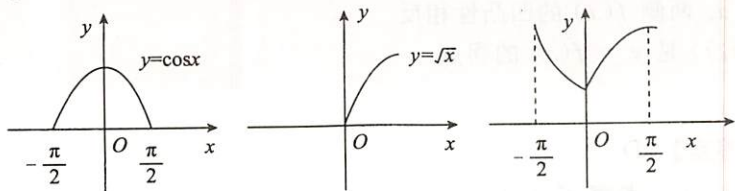
【分析】 方法 1 显然 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续. 只须考察 $f(x)$ 在 $x=0$ 某空心邻域如 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $x \neq 0$ 时 $f'(x)$ 与 $f''(x)$ 的变化.

$$f'(x) = \begin{cases} \sin x < 0, & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} > 0, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases},$$

$$f''(x) = \begin{cases} \cos x > 0, & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} < 0, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

由此可得 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 且 $(0, 1)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点. 因此选(C).

方法 2 由 $y = \cos x$, $y = \sqrt{x}$ 的图形可得 $y = f(x)$ 的图形.



因此选(C).

【评注】 (1) 只须考察 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的连续性及 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 两侧 $f'(x)$, $f''(x)$ 是否变号, 而不须考虑 $f'(x_0)$, $f''(x_0)$ 是否存在就可判定 $x=x_0$ 是否是 $f(x)$ 的极值点与拐点. 本题中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 $f'(0)$, $f''(0)$ 不 $\exists$, 但它们在 $x=1$, $x=0$ 分别均连续.

(2) $f(x)$ 在 $x=x_0$ 不可导, $x=x_0$ 与 $(x_0, f(x_0))$ 可以同时是 $y=f(x)$ 的极值点与拐点. 本题就是如此. 但对于可导函数, 可以证明: 若 $(x_0, f(x_0))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点, 则 $x=x_0$ 不可能是 $f(x)$ 的极值点.

162 【答案】 D

【分析】 方法 1 若在 $(-\infty, +\infty)$ 上 $f'(x) > 0$, 则一定有 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单

调增加,但可导函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调增加,只能有 $f'(x) \geq 0$ (即可能在某些点上 $f'(x) = 0$),例如 $f(x) = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加, $f'(0) = 0$. 因此不选(A).

$f(x)$ 若在 x_0 处取得极值,且 $f'(x_0)$ 存在,则有 $f'(x_0) = 0$,但当 $f(x)$ 在 x_0 处取得极值,在 x_0 处不可导,就得不到 $f'(x_0) = 0$,例如 $f(x) = |x|$ 在 $x_0 = 0$ 处取得极小值,它在 $x_0 = 0$ 处不可导,因此不选(B).

如果 $f(x)$ 在 x_0 处二阶导数存在,且 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线的拐点坐标,则 $f''(x_0) = 0$,反之不一定,例如 $f(x) = x^4$ 在 $x_0 = 0$ 处 $f''(0) = 0$,但 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 没有拐点,因此不选(C). 由上分析,应选(D).

方法2 可以证明(D)是正确的.

不妨设 $f'''(x_0) > 0$. 由带佩亚诺余项的泰勒公式得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x-x_0)^3 + o((x-x_0)^3) \quad (x \rightarrow x_0)$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = (x-x_0)^3 \left[\frac{1}{3!}f'''(x_0) + o(1) \right]$$

当 $x \rightarrow x_0$ 时 $o(1)$ 为无穷小量.

由极限的保号性质 $\Rightarrow \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x-x_0| < \delta$ 时, $\frac{1}{3!}f'''(x_0) + o(1) > 0$

$\Rightarrow x_0 - \delta < x < x_0$ 时 $f(x) - f(x_0) < 0$, $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时 $f(x) - f(x_0) > 0$. 因此 $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值.

【评注】 可以证明满足(D)的条件的点 $(x_0, f(x_0))$ 是 $y = f(x)$ 的拐点. 不妨设 $f'''(x_0) > 0$. 写出 $f''(x)$ 的带佩亚诺余项的泰勒公式

$$\begin{aligned} f''(x) &= f''(x_0) + f'''(x_0)(x-x_0) + o((x-x_0)) \\ &= (x-x_0)[f'''(x_0) + o(1)] \quad (x \rightarrow x_0) \end{aligned}$$

由极限的保号性质 $\Rightarrow \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x-x_0| < \delta$ 时, $f'''(x_0) + o(1) > 0$

$\Rightarrow x_0 - \delta < x < x_0$ 时 $f''(x) < 0$, $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时 $f''(x) > 0$

$\Rightarrow$ 在 $x = x_0$ 两侧 $f(x)$ 的凹凸性相反

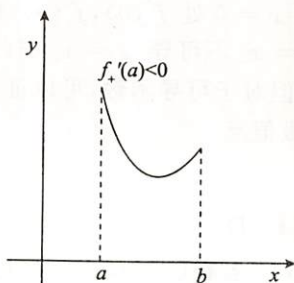
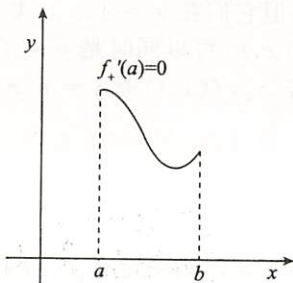
$\Rightarrow (x_0, f(x_0))$ 是 $y = f(x)$ 的拐点.

163 【答案】 D

【分析】 方法1 考察 $f'_+(a)$.

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \leq 0. \text{ 选(D).}$$

方法2



由 $f'_+(a)$ 的几何意义可知, 应选(D).

【评注】 最值点处的导数性质:

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可导, $f(c) = \max_{[a, b]} f(x)$ 或 $f(c) = \min_{[a, b]} f(x)$.

(1) 若 $c \in (a, b)$, 则 $f'(c) = 0$.

(2) 若 $c = a, f(a) = \max_{[a, b]} f(x)$, 则 $f'_+(a) \leq 0$,

$f(a) = \min_{[a, b]} f(x)$, 则 $f'_+(a) \geq 0$.

(3) 若 $c = b, f(b) = \max_{[a, b]} f(x)$, 则 $f'_-(b) \geq 0$,

$f(b) = \min_{[a, b]} f(x)$, 则 $f'_-(b) \leq 0$.

164 【答案】 B

【分析】 设 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}, x \geq 1$, 考察 $f(x)$ 的单调性并求 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 的最大值.

$$f'(x) = (e^{\frac{1}{x} \ln x})' = x^{\frac{1}{x}} \frac{1 - \ln x}{x^2} \begin{cases} > 0, 1 \leq x < e \\ = 0, x = e \\ < 0, x > e \end{cases}$$

于是 $1 \leq x \leq e$ 时 $f(x) \nearrow$, 当 $x \geq e$ 时 $f(x) \searrow$. 因此在 $x = e$ 两侧的数列项是 $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt[3]{3}$, $x = e$ 是 $f(x)$ 的最大值点.

比较 $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt[3]{3}$ 的值 $\sqrt{2} = \sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9} = \sqrt[3]{3}$.

所以数列的最大项为 $\sqrt[3]{3}$. 选(B).

【评注】 不能对 $f(n) = n^{\frac{1}{n}} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 求导, 因为数列没有导数概念.

165 【答案】 C

【分析】 令 $f'(x) = 3ax^2 - 12ax = 3ax(x - 4) = 0$ 得 $x_1 = 0, x_2 = 4$ (不合题意舍去)
 $f(0) = b, f(-1) = -7a + b, f(2) = -16a + b$, 由于 $a > 0$; 所以, $f(0)$ 是最大值, $f(2)$ 是最小值.

$$\begin{cases} f(0) = b = 3 \\ f(2) = -16a + b = -29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 2 \end{cases}$$

所以选(C).

166 【答案】 D

【分析】 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$, 在参数 $t = \frac{\pi}{2}$ 对应的点处 $\frac{dy}{dx} = 1$;

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{\sin t}{1 - \cos t} \right)}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2}$, 在参数 $t = \frac{\pi}{2}$ 对应的点处 $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{a}$;

曲率为 $\frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}a}$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

167 【答案】 C

【分析】 方法1 举例否定错误的命题.

$f(x) = \frac{1}{x-a}, f'(x) = -\frac{1}{(x-a)^2}$, 它们在 (a, b) 均连续且无界. (A)、(B) 不正确.

$f(x) = \sqrt{x-a}$ 在 (a, b) 有界, 但 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-a}}$ 在 (a, b) 无界. (D) 不正确. 应选(C).

方法2 联系 $f'(x)$ 与 $f(x)$ 的是拉格朗日中值定理. 取定 $x_0 \in (a, b)$, 则由拉格朗日中值定理知, 对 $\forall x \in (a, b), \exists \xi$ 在 x 与 x_0 之间使得

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$$

于是

$$|f(x)| \leq |f(x_0)| + |f'(\xi)| |x - x_0| \leq |f(x_0)| + M |b - a| \quad (x \in (a, b))$$

其中 $|f'(x)| \leq M (x \in (a, b))$. 因此 $f(x)$ 在 (a, b) 有界. 选(C).

168 【答案】 D

【分析】 设 $f(x) = x$, 则 $f'(x) = 1$ 在 $(a, +\infty)$ 有界, 但 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 无界.

设 $f(x) = \sin x^2$, 则 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 有界, 但 $f'(x) = 2x \cos x^2$ 在 $(a, +\infty)$ 无界.

$(x_n = \sqrt{n\pi}$ 时 $f'(x_n) = 2\sqrt{n\pi} \cos n\pi = (-1)^n 2\sqrt{n\pi} \rightarrow \infty$). 因此选(D).

【评注】 此题说明, 在无穷区间上可导函数 $f(x)$ 的有界性与 $f'(x)$ 的有界性无确定性的关系. 但在有界区间 (a, b) 上, 前题说明 $f'(x)$ 的有界性保证了 $f(x)$ 的有界性, 反之则不一定.

169 【答案】 C

【分析】 只须考察 $f''(x) = 0$ 的点与 $f''(x)$ 不存在的点.

$f''(x_1) = f''(x_4) = 0$, 在 $x = x_1, x_4$ 两侧 $f''(x)$ 变号, 故凹凸性相反, $\Rightarrow (x_1, f(x_1)), (x_4, f(x_4))$ 是 $y = f(x)$ 的拐点.

$x = 0$ 处 $f''(0)$ 不存在, 但 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续, 在 $x = 0$ 两侧 $f''(x)$ 变号, 因此 $(0, f(0))$ 也是 $y = f(x)$ 的拐点.

虽然 $f''(x_3) = 0$, 但在 $x = x_3$ 两侧 $f''(x) > 0, y = f(x)$ 是凹的. $(x_3, f(x_3))$ 不是 $y = f(x)$ 的拐点. 因此总共有三个拐点. 选(C).

170 【答案】 C

【分析】 只须考察 $f''(x) = 0$ 的点, 这里就是 $f'(x)$ 的驻点, 即 $x = x_1, x_3, x_6$, 与 $f''(x)$ 不 $\exists$ 的点, 这就是 $f'(x)$ 的尖点 x_4 .

在 $x = x_1, x_6$ 两侧 $f'(x)$ 的单调性相反, 故凹凸性相反 $\Rightarrow (x_1, f(x_1)), (x_6, f(x_6))$ 是 $y = f(x)$ 的拐点, 在 $x = x_3$ 处, 虽 $f''(x_3) = 0$, 但 $x = x_3$ 两侧 $f'(x)$ 均单调上升即 $x = x_3$ 两侧 $y = f(x)$ 均是凹的, $(x_3, f(x_3))$ 不是 $y = f(x)$ 的拐点. 虽然 $f''(x_4)$ 不 $\exists$, 但 $f(x)$ 在 $x = x_4$ 连续, 在 $x = x_4$ 两侧 $f'(x)$ 的单调性相反, 故凹凸性相反, $(x_4, f(x_4))$ 也是 $y = f(x)$ 的拐点. 因此共有三个拐点. 选(C).

171 【答案】 B

【分析】 $y' = \frac{1}{3}(x-4)^{-\frac{2}{3}}, y'' = -\frac{2}{9}(x-4)^{-\frac{5}{3}}$.

所以当 $y \in (-\infty, 4)$ 时, $y'' > 0$, 曲线凹; 当 $y \in (4, +\infty)$ 时, $y'' < 0$, 曲线凸.
(4, 0) 为拐点.

172 【答案】 C

【分析】 归结为求 $f'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3(1-4x^2)}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}} \\ &= 3 \frac{(1-4x^2) \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-(3x-4x^3)^2}}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-(3x-4x^3)^2}} \quad \left(|x| < \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

考察 $f'(x)$ 的分子:

$$((1-4x^2) \sqrt{1-x^2})^2 = (1-8x^2+16x^4)(1-x^2) = 1-9x^2+24x^4-16x^6$$

$$(\sqrt{1-(3x-4x^3)^2})^2 = 1-9x^2+24x^4-16x^6$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \left(|x| < \frac{1}{2}\right), \text{ 又 } f(x) \text{ (初等函数) 在定义域 } \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \text{ 连续.}$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ 在 } \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \text{ 为常数.}$$

选(C).

【评注】 (1) $g(x) \stackrel{\text{记}}{=} 3x-4x^3$ 是奇函数, $g'(x) = 3-12x^2 > 0 \left(0 < x < \frac{1}{2}\right) \Rightarrow g(x)$ 在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上 ↗, 又 $g(0) = 0, g\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow |x| \leq \frac{1}{2}$ 时 $|g(x)| \leq 1$, 从而 $\arccos(3x-4x^3)$ 在 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 有定义.

(2) $f(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 上为常数 $f(0) = \pi$.

173 【答案】 A

【分析】 方法1 为考察 $f(x)$ 与 x 之间的关系, 设 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F'(x) = f'(x) - 1$, $F'(x)$ 在 $(1-\delta, 1+\delta)$ 单调减少, $F'(1) = 0, F(1) = 0$.

当 $x \in (1-\delta, 1)$ 时 $F'(x) > F'(1) = 0$, 因此 $F(x)$ 在 $(1-\delta, 1]$ 内单调递增, $F(x) < F(1) = 0$, 即在 $(1-\delta, 1)$, $F(x) < 0$.

当 $x \in (1, 1+\delta)$ 时, $F'(x) < F'(1) = 0$, 因此 $F(x)$ 在 $[1, 1+\delta)$ 内单调递减, $F(x) < F(1) = 0$, 即在 $(1, 1+\delta)$ 内 $F(x) < 0$. 因此, 选(A).

方法2 $f'(x)$ 在 $(1-\delta, 1+\delta)$ 严格单调减少 $\Rightarrow f(x)$ 在 $(1-\delta, 1+\delta)$ 是凸的 $\Rightarrow$ 在此区间上, $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 即 $(1, 1)$ 处的切线 $y-1 = f'(1)(x-1)$ 即 $y = x$ 在此曲线的上方(除切点外). 因此

$$f(x) < x \quad (x \in (1-\delta, 1+\delta), x \neq 1).$$

174 【答案】 D

【分析】 只有间断点 $x = \pm 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}} = +\infty$$

$\Rightarrow x = 1$ 与 $x = -1$ 为垂直渐近线.

因为

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \pm 1$$

又

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} - x + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) + 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 0$$

同理 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (y + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} + x + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \left(\left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) = 0$

$\Rightarrow x \rightarrow +\infty$ 时有斜渐近线 $y = x$, $x \rightarrow -\infty$ 时有斜渐近线 $y = -x$.

因此选(D).

【评注】 同是 $x \rightarrow +\infty$ (或 $x \rightarrow -\infty$), 如果曲线有斜渐近线就不可能有水平渐近线, 如果曲线有水平渐近线, 就不可能有斜渐近线.

175 【答案】 D

【分析】 $f(x)$ 为连续的偶函数, $f(0) = 1$, 故只需讨论 $(0, 2\pi)$ 内零点的个数. 用单调性分析方法. 先考察

$$f'(x) = x \cos x \begin{cases} > 0 & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ = 0 & x = \frac{\pi}{2} \\ < 0 & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi \\ = 0 & x = \frac{3}{2}\pi \\ > 0 & \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上 ↗, 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$ 上 ↘, 在 $\left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$ 上 ↗. 又

$$f(0) = 1, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -\frac{3}{2}\pi, f(2\pi) = 1,$$

由此可知, $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 无零点, 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$ 和 $\left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$ 均单调且端点函数值异号, 因而各有唯一零点, 所以 $f(x)$ 在 $(-2\pi, 2\pi)$ 内共有 4 个零点.

176 【答案】 C

【分析】 方法 1 因 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 (a, b) 上的一个原函数, 所以 $F'(x) = f(x)$, 因此 $F(x)$ 在 (a, b) 上连续, 于是 $F(x)$ 在 (a, b) 上存在原函数, 从而 $f(x) + F(x)$ 在 (a, b) 上存在原函数. 因此选(C).

方法 2 函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上存在原函数, $f(x)$ 在 (a, b) 上可能不连续, 例如

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad F'(x) = f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续. 函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上存在原函数, 又因 $F(x)$ 在 (a, b) 上连续, 因此 $F(x) + f(x)$ 在 (a, b) 不连续, 所以不选(B) 从而也不选(A).

$f(x) + F(x)$ 不一定是初等函数, 例如 $f(x) = e^{x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在一个原函数 $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$, 它不是初等函数 $\Rightarrow F(x) + f(x)$ 不是初等函数, 因此不选(D).

【评注】 关于 $f(x)$ 在 (a, b) 上有原函数 $F(x)$, 要注意以下几点: 在 (a, b) 上

- (1) $f(x)$ 不一定连续;
- (2) $f(x)$ 不一定是初等函数;
- (3) $F(x)$ 不一定是初等函数;
- (4) 由原函数定义, $F'(x) = f(x)$, 因而 $F(x)$ 连续.

177 【答案】 B

【分析】 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 有界, 只有一个间断点 $x=0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 可积 $\Rightarrow F(x)$ 在 $[-1, 1]$ 连续, 因而有界. 选(B).

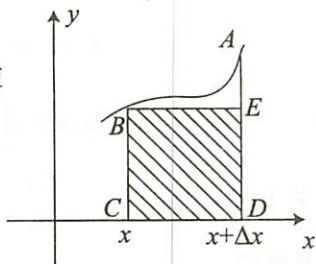
178 【答案】 A

【分析】 方法 1 由积分中值定理 $\Rightarrow \exists \xi \in (x, x+\Delta x)$ 使得

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(\xi) \Delta x > f(x) \Delta x > 0$$

($f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ 是单调增加的).

因此选(A).



方法 2 由定积分的几何意义来分析, 曲线 $y = f(x)$ 在 x 轴上方且单调增加 $\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt$ 是曲边梯形 $ABCD$ 的面积, $f(x) \Delta x$ 是矩形 $BCDE$ 的面积, 因此 $\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt > f(x) \Delta x > 0$. 选(A).

179 【答案】 C

【分析】 由题目的设置可知,这四个命题中有两个是正确的,两个是错误的.

方法1 由“若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$,则 $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |a|$ ”可得“若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$,则 $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |f(x_0)|$ ”,因此,若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续,则 $|f(x)|$ 在 $x = x_0$ 连续,即②正确.

由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界,只有有限个间断点,则 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 也有界,也只有有限个间断点(因 $f(x)$ 的连续点必是 $|f(x)|$ 的连续点),因而 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 可积即④正确.选(C).

方法2 ①是不正确的,例如, $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x \leq 0 \end{cases}$,在 $x = 0$ 间断,但 $f^2(x) = 1$ 在 $x = 0$ 连续.③也是错的,例如 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ -1, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$,则 $\int_a^b f(x) dx$ 不存在(易构造两个积分和有不同的极限),但 $|f(x)| = 1$ 在 $[a, b]$ 可积.因此,只能是②,④正确,选(C).

180 【答案】 C

【分析】 方法1 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上定积分的必要条件是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界.因此,若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 无界,则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不 $\exists$ 定积分.

函数(C)在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 无界 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上不 $\exists$ 定积分.选(C).

方法2 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积的充分条件是: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界,至多有有限个间断点. $\Rightarrow$ (A)、(B)、(D)函数在指定区间可积.因此选(C).

181 【答案】 B

【分析】 方法1 (B)正确.

这是线性性质的体现.若 $f(x) + g(x)$ 在 $[a, b]$ 可积,因 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积,由线性性质知,

$$g(x) = [f(x) + g(x)] - f(x)$$

在 $[a, b]$ 可积,与已知 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 不可积矛盾了.因此 $f(x) + g(x)$ 在 $[a, b]$ 不可积.选(B).

方法2 (A)、(C)、(D)是错的.

关于(A), $f(x) \geq 0, \neq 0(x \in [a, b]) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0, \neq \int_a^b f(x) dx > 0$.例如

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a, b] \setminus \{x_0\} \\ 1, & x = x_0 \end{cases}, \text{其中 } x_0 \in [a, b]$$

$f(x) \geq 0, \neq 0(x \in [a, b]), \int_a^b f(x) dx = 0$.因此(A)是错的.

关于(C), $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为无理数} \\ -1, & x \text{ 为有理数} \end{cases}, f^2(x) = 1, \int_a^b f^2(x) dx \exists$,但 $\int_a^b f(x) dx$ 不 $\exists$.因此

(C)是错的.

关于(D),在(D)的条件下, $F(x)$ 在 $[a, b]$ 处处连续, $x \neq x_0$ 时可导. $F(x)$ 在 $x = x_0$ 处是否可导与 $x = x_0$ 的间断点类型有关.若 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点,则 $F(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导.因为

$$F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(F(x) - F(x_0))'}{(x - x_0)'} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) (\exists) \neq f(x_0)$$

因此(D)不正确. 选(B).

【评注】 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续且 $f(x) \geq 0, \neq 0$, 则 $\int_a^b f(x) dx > 0$.

证明: 此时必存在 $x_0 \in (a, b), f(x_0) > 0$, 由连续函数的性质, 存在 $\delta > 0$, 在 $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ 上 $f(x) > 0$, 因此

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x) dx > 0$$

182 【答案】 C

【分析】 我们要逐一分析.

结论① 正确. 由条件 $\Rightarrow \int_a^x f(t) dt = 0 (\forall x \in [a, b])$

$$(\int_a^x f(t) dt)' = f(x) = 0 (x \in [a, b])$$

结论② 正确. 由条件 $\Rightarrow$

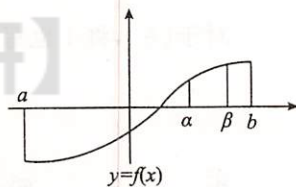
$$0 \leq \int_a^x f(t) dt \leq \int_a^b f(x) dx = 0 (\forall x \in [a, b])$$

$$\Rightarrow \int_a^x f(t) dt = 0 (x \in [a, b]) \Rightarrow f(x) = 0 (x \in [a, b]).$$

结论③ 错误, 如图所示, 由定积分几何意义知,

$$\int_a^b f(x) dx < 0, \int_a^\beta f(x) dx > 0, \text{ 其中 } [\alpha, \beta] \subset [a, b].$$

因此选(C).



【评注】 结论①、②的证明也可用反证法.

若 $f(x) \neq 0 (x \in [a, b])$, 则 $\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) \neq 0$, 不妨设 $f(x_0) > 0$, 由连续性 $\Rightarrow \exists \delta > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ 时 $f(x) > 0$

$$\Rightarrow \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x) dx > 0$$

与①中 $[a, b]$ 的 $\forall$ 子区间 $[\alpha, \beta]$ 上 $\int_a^\beta f(x) dx = 0$ 矛盾了, 因此只能是

$$f(x) = 0 (\forall x \in [a, b])$$

在②中此时

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^{x_0 - \delta} f(x) dx + \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x) dx + \int_{x_0 + \delta}^b f(x) dx \\ &\geq \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x) dx > 0 \end{aligned}$$

与 $\int_a^b f(x) dx = 0$ 矛盾了. 因此 $f(x) = 0 (\forall x \in [a, b])$.

183 【答案】 C

【分析】 下面来证明(C)不正确.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx,$$

对于第2个积分,作变量变换,命 $x = \pi + t$, 当 $x = \pi$ 时 $t = 0$; $x = 2\pi$ 时 $t = \pi$, 于是

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_0^{\pi} \frac{\sin(\pi+t)}{\pi+t} dt \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx - \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\pi+t} dt \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx - \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\pi+x} dx \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin x}{x(x+\pi)} dx > 0. \end{aligned}$$

【评注】 (1) 考查积分 $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ 时, 在区间 $[0, 2\pi]$ 上, 被积函数 $\frac{\sin x}{x}$ 有正有负, 应将 $[0, 2\pi]$ 划分成两个区间, 使 $\frac{\sin x}{x}$ 正、负分清, 然后再用积分变量变换, 将两个积分的上、下限化成为相同, 然后合并考查被积函数的符号, 一般就可断定该积分的值的符号了, 这是处理积分不等式的一个常用办法, 如本题(C).

(2) 下面证明(A)、(B)、(D)都正确.

对于(A), 将1也写为0到 $\frac{\pi}{4}$ 的一个积分 $1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4}{\pi} dx$, 于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} dx - 1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\tan x}{x} - \frac{4}{\pi} \right) dx.$$

记 $\varphi(x) = \frac{\tan x}{x} - \frac{4}{\pi}, x \in (0, \frac{\pi}{4})$. 有 $\varphi(\frac{\pi}{4}) = 0$,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{x \sec^2 x - \tan x}{x^2} = \frac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x} \\ &= \frac{2x - \sin 2x}{2x^2 \cos^2 x} > 0 \text{ (当 } 0 < x < \frac{\pi}{4} \text{)}. \end{aligned}$$

所以当 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时 $\varphi(x) < 0$, 从而 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} dx - 1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\tan x}{x} - \frac{4}{\pi} \right) dx < 0$, (A) 正确.对于(B), 由于被积函数为以 2π 为周期的偶函数, 所以

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos x \cdot \ln(2 + \cos x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cdot \ln(2 + \cos x) dx \\ &= 2 \int_0^{\pi} \cos x \cdot \ln(2 + \cos x) dx \\ &= 2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \ln(2 + \cos x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \cdot \ln(2 + \cos x) dx \right]. \end{aligned}$$

对后一积分作积分变量变换 $x = \pi - t$, 于是当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时 $t = \frac{\pi}{2}$; $x = \pi$ 时 $t = 0$.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \cdot \ln(2 + \cos x) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos t \cdot \ln(2 - \cos t) dt,$$

于是 $\int_0^{2\pi} \cos x \cdot \ln(2 + \cos x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \ln \frac{2 + \cos x}{2 - \cos x} dx > 0$, (B) 正确.

对于(D),将右边1也写成积分: $1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} dx$, 为证 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx > 1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} dx$, 只要证明在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上 $\frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi}$. 命

$$\varphi(x) = \frac{\sin x}{x} - \frac{2}{\pi}, x \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

有 $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 0, \varphi'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x \cdot (x - \tan x)}{x^2} < 0$, 所以当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$

时 $\varphi(x) > 0$. 于是 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx > 1$. 证毕.

以上证明中(A)与(D)用的是同一个方法,(B)与(C)是另一个方法,这些方法希望读者掌握.

184 【答案】 C

【分析】 当 $1 < x \leq 2$ 时,

$$1+x < 1+x^2 \\ \sqrt[3]{x} < \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow (1+x) \sqrt[3]{x} < (1+x^2) \sqrt[3]{x} < (1+x^2) \sqrt{x} \\ \frac{1}{(1+x^2) \sqrt{x}} < \frac{1}{(1+x^2) \sqrt[3]{x}} < \frac{1}{(1+x) \sqrt[3]{x}} \quad (1 < x \leq 2)$$

而 $x=1$ 时它们相等. 于是

$$\int_1^2 \frac{1}{(1+x^2) \sqrt{x}} dx < \int_1^2 \frac{1}{(1+x^2) \sqrt[3]{x}} dx < \int_1^2 \frac{1}{(1+x) \sqrt[3]{x}} dx$$

即 $K < J < I$
选(C).

185 【答案】 A

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } I_1 - I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+x^a} (\cos x - \sin x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^a} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+x^a} (\cos x - \sin x) dx. \end{aligned}$$

对于后者作积分变量变换, 命 $x = \frac{\pi}{2} - t$,

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^a} (\cos x - \sin x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+(\frac{\pi}{2}-t)^a} (\sin t - \cos t) dt. \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) \left(\frac{1}{1+x^a} - \frac{1}{1+(\frac{\pi}{2}-x)^a} \right) dx \end{aligned}$$

当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 时, $\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \frac{\pi}{2}$. 有

$$(\frac{\pi}{2} - x)^2 > x^2, (\text{当 } x \neq \frac{\pi}{4} \text{ 时}),$$

又当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 时, $\cos x - \sin x > 0$ (当 $x \neq \frac{\pi}{4}$). 所以

$$I_1 - I_2 > 0.$$

选(A).

【评注】 比较两个积分的大小, 其中一个办法是, 在同一区间比较而被积函数的大小. 若在该区间上, 两被积函数有时大有时小, 则划分区间使在小区间上能明确被积函数的大小.

186 【答案】 D

【分析】 必须逐一分析

(1) $\frac{2}{5} \sin^{\frac{5}{2}} x$ 仅在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上是被积函数的原函数, 在 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上的原函数是 $-\frac{2}{5} \sin^{\frac{5}{2}} x$. 因此这里的做法是错误的.

(2) $\frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 无定义, 在 $[-1, 1]$ 上无界, 不存在定积分, 这里错误地应用了牛顿-莱布尼茨公式.

(3) $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}}$ 不是整个区间 $[0, \pi]$ 上的原函数, 它在 $x = \frac{\pi}{2}$ 无定义, 只是 $[0, \frac{\pi}{2})$ 与 $(\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上的原函数, 不能在 $[0, \pi]$ 上用牛顿-莱布尼茨公式.

(4) $f(x) = \frac{d}{dx} \left(\arctan \frac{1}{x} \right)$ 在 $x = 0$ 无定义, 可任意补充定义 $f(0)$ 后, $\arctan \frac{1}{x}$ 仍不是 $f(x)$ 在整个区间 $[-1, 1]$ 上的原函数, 因为它在 $x = 0$ 无定义, 因此不能在 $[-1, 1]$ 上用牛顿-莱布尼茨公式.

因此选(D).

【评注】 改正错误.

$$\begin{aligned} (1) \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} dx &= \int_0^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x |\cos x| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x d\sin x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x d\sin x \\ &= \frac{2}{5} \sin^{\frac{5}{2}} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{5} \sin^{\frac{5}{2}} x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

(2) $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $[-1, 1]$ 无界, 它在 $[-1, 1]$ 上不存在定积分(作为反常积分, 它也是发散的).

(3) 先分段积分, 然后用推广的牛顿-莱布尼茨公式.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{\sec^2 x}{2 + \tan^2 x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{2 + \tan^2 x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sec^2 x}{2 + \tan^2 x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}^-} + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}} \Big|_{\frac{\pi}{2}^+}^{\pi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi. \end{aligned}$$

另解. 被积函数以 π 为周期且为偶函数.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{\sec^2 x}{2 + \tan^2 x} dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{2 + \tan^2 x} dx \\&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{2 + \tan^2 x} dx \\&= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}-} \\&= \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4) \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\arctan \frac{1}{x} \right) dx &= \int_{-1}^0 \frac{d}{dx} \left(\arctan \frac{1}{x} \right) dx + \int_0^1 \frac{d}{dx} \left(\arctan \frac{1}{x} \right) dx \\&= \arctan \frac{1}{x} \Big|_{-1}^{0-} + \arctan \frac{1}{x} \Big|_{0+}^1 \\&= -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

187 【答案】 B

【分析】 方法 1

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\pi} x |\cos x| \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \sin x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \cos x \sin x dx \\&= -\frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d\cos 2x + \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x d\cos 2x \\&= -\frac{1}{4} x \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx + \frac{1}{4} x \cos 2x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos 2x dx \\&= \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

方法 2

$$\begin{aligned}I &\stackrel{x=t+\frac{\pi}{2}}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(t + \frac{\pi}{2} \right) \sqrt{\cos^2 \left(t + \frac{\pi}{2} \right) - \cos^4 \left(t + \frac{\pi}{2} \right)} dt \\&= 0 + \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t - \sin^4 t} dt \\&= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = \pi \frac{1}{2} \sin^2 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

188 【答案】 B

【分析】 方法 1 分母先配方后再作平移变换

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2} \right)^2}} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t + \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4} - t^2}} dt \\&= \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{4} - t^2}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d(2t)}{\sqrt{1 - (2t)^2}} = \arcsin 2t \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

选(B).

方法2 先改写成

$$I = \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$$

令 $\sqrt{\frac{x}{1-x}} = t$, 解出 $x = \frac{t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$, $dx = \frac{2t}{(1+t^2)^2} dt$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} t \cdot \frac{2t}{(1+t^2)^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt = - \int_0^{+\infty} t d \frac{1}{1+t^2} \\ &= - \frac{t}{1+t^2} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

选(B).

方法3 令 $x = \sin^2 t$, 则

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t \cdot 2 \sin t \cos t dt}{\sqrt{\sin^2 t (1 - \sin^2 t)}} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

选(B).

189 【答案】 B

【分析】 先改写成

$$I = \int_0^1 x^4 \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

再作三角函数代换 $x = \sin t$, 则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \frac{1+\sin t}{\cos t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t dt \\ &= \frac{3 \times 1}{4 \times 2} \times \frac{\pi}{2} + \frac{4 \times 2}{5 \times 3 \times 1} = \frac{3}{16} \pi + \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

选(B).

190 【答案】 B

【分析】 被积函数 $f(x) = x^n \ln^m x$ 虽在 $x=0$ 无定义, 但 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln^m x = 0$, 若补充定义 $f(0) =$

0, 则 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续, 因而 $\int_0^1 x^n \ln^m x dx$ 是定积分.

$$\begin{aligned} I_{n,m} &= \frac{1}{n+1} \int_0^1 \ln^m x dx^{n+1} = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln^m x \Big|_{0^+}^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} m \ln^{m-1} x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= - \frac{m}{n+1} \int_0^1 x^n \ln^{m-1} x dx = - \frac{m}{n+1} I_{n,m-1} \end{aligned}$$

反复用此递推公式得

$$\begin{aligned} I_{n,m} &= \left(-\frac{m}{n+1}\right) \left(-\frac{m-1}{n+1}\right) I_{n,m-2} \\ &= \left(-\frac{m}{n+1}\right) \left(-\frac{m-1}{n+1}\right) \left(-\frac{m-2}{n+1}\right) \cdots \left(-\frac{1}{n+1}\right) I_{n,0} \\ &= (-1)^m \frac{m!}{(n+1)^{m+1}}, \text{ 其中 } I_{n,0} = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

因此选(B).

【评注】 对 $\forall$ 常数 $\alpha > 0$ 与 β

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln^\beta x = 0.$$

【证明】 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{-1}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0$

若 $\beta > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln^\beta x = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{\frac{\alpha}{\beta}} \ln x)^{\frac{1}{\beta}} = 0$

若 $\beta \leq 0$ 显然成立.

191 【答案】 B

【分析】 $\int x f'(x) dx = \int x df(x) = x f(x) - \int f(x) dx$
 $= x(\sin x \ln |x|)' - \sin x \ln |x| + C$
 $= x(\cos x \ln |x| + \frac{\sin x}{x}) - \sin x \ln |x| + C$
 $= x \cos x \ln |x| + \sin x - \sin x \ln |x| + C$

$$\text{其中 } \ln |x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases} \Rightarrow (\ln |x|)' = \frac{1}{x}$$

因此选(B).

【评注】 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则

$$F'(x) = f(x), \int f(x) dx = F(x) + C, C \text{ 为任意常数.}$$

192 【答案】 A

【分析】 $\frac{d}{dx} \int_{2x}^{\ln x} \ln(1+t) dt = \ln(1+\ln x) \cdot (\ln x)' - \ln(1+2x) \cdot (2x)'$
 $= \ln(1+\ln x) \cdot \frac{1}{x} - \ln(1+2x) \cdot (2)$
 $= \frac{1}{x} \ln(1+\ln x) - 2 \ln(1+2x)$

因此选(A).

193 【答案】 B

【分析】 先求

$$F'(x) = \int_0^{x^2} \ln(1+t^2) dt$$

再求

$$F''(x) = 2x \ln(1+x^4) \begin{cases} > 0, & x > 0 \\ = 0, & x = 0 \\ < 0, & x < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow y = F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 是凸的, 在 $(0, +\infty)$ 是凹的. 因此, 选(B).

194 【答案】 B

【分析】 方法1 先求出 $F(x)$, 再判断.

当 $x > 0$ 时, $F(x) = \int_0^x \sqrt{4+t} dt = \frac{2}{3} [(4+x)^{\frac{3}{2}} - 8]$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

当 $x = 0$ 时, $F(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0$.

当 $x < 0$ 时, $F(x) = \int_0^x \sqrt{1-t} dt = \frac{2}{3} [1 - (1-x)^{\frac{3}{2}}]$.

所以
$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} [(4+x)^{\frac{3}{2}} - 8], & x \geq 0 \\ \frac{2}{3} [1 - (1-x)^{\frac{3}{2}}], & x \leq 0 \end{cases}$$

(这里 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处自然连续拼接).

$$F'_+(0) = \left(\frac{2}{3} [(4+x)^{\frac{3}{2}} - 8] \right)' \Big|_{x=0} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} (4+x)^{\frac{1}{2}} \Big|_{x=0} = 2$$

$$F'_-(0) = \left(\frac{2}{3} [1 - (1-x)^{\frac{3}{2}}] \right)' \Big|_{x=0} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} (1-x)^{\frac{1}{2}} \Big|_{x=0} = 1$$

$F'_+(0) \neq F'_-(0)$, $F(x)$ 在 $x = 0$ 不可导. 选(B).

方法 2 不必求出 $F(x)$. 利用已知结论来判断: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 则 $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ 在 $[a, b]$ 可导且 $F'(x) = f(x)$ ($x \in [a, b]$), x_0 是 $[a, b]$ 某定点. (这里端点 a, b 当然是单侧导数, 即 $F'_+(a) = f(a)$, $F'_-(b) = f(b)$).

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{4+t} dt \quad (x \geq 0), \sqrt{4+t} \text{ 在 } [0, +\infty) \text{ 连续} \Rightarrow F'_+(0) = \sqrt{4+x} \Big|_{x=0} = 2$$

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{1-t} dt \quad (x \leq 0), \sqrt{1-t} \text{ 在 } (-\infty, 0] \text{ 连续} \Rightarrow F'_-(0) = \sqrt{1-x} \Big|_{x=0} = 1$$

$\Rightarrow F'_+(0) \neq F'_-(0)$, $F(x)$ 在 $x = 0$ 不可导, 选(B).

方法 3 按一般性结论: $x_0 \in (a, b)$, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 除 x_0 外连续且在 $[a, b]$ 有界, 考察 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, 则

(1) $F'(x) = f(x)$ ($x \in [a, b], x \neq x_0$).

(2) 若 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点, 则 $F'_\pm(x_0)$ 均存在但不相等. ($F'_\pm(x_0) = f(x_0^\pm)$).

(3) 若 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点, 则 $F'(x_0)$ 存在但 $F'(x_0) \neq f(x_0)$ 或 $f(x_0)$ 无定义.

该题中, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 除 $x = 0$ 外连续, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点 $\Rightarrow F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 在 $x = 0$ 不可导 (因 $F'_+(0) \neq F'_-(0)$), 选(B).

【评注】 定积分的一个性质:

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 可积且除去有限个点外, $f(x) = g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$$

因此 $\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \sqrt{4+t} dt$ ($x \geq 0$), 这里 $f(x) = \sqrt{4+x}$ ($x > 0$), 但 $f(0) \neq \sqrt{4+0}$.

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \sqrt{1-t} dt \quad (x \leq 0)$$

这里 $f(x) = \sqrt{1-x}$ ($x < 0$), 但 $f(0) \neq \sqrt{1-0}$.

195 【答案】 B

【分析】 方法 1 因

$$\int f(x) dx = \int_0^x f(t) dt + C, C \text{ 为任意常数}$$

当 $f(x)$ 为偶函数时 $\int_0^x f(t)dt$ 为奇函数, 仅当 $C=0$ 时 $\int_0^x f(t)dt + C$ 才是奇函数.

因此, $f(x)$ 为偶函数时 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 只有唯一的一个原函数为奇函数即 $\int_0^x f(t)dt$. (B) 是错误的, 选(B).

方法2 因

$$\int f(x)dx = \int_0^x f(t)dt + C, C \text{ 为任意常数}$$

当 $f(x)$ 为奇函数时 $\int_0^x f(x)dt$ 为偶函数 $\Rightarrow$ 对 $\forall$ 常数 C , $\int_0^x f(t)dt + C$ 也是偶函数 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[-a, a]$ 的全体原函数均是偶函数 $\Rightarrow$ (A) 正确.

当 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续, 以 T 为周期时,

$$\int_0^x f(t)dt \text{ 以 } T \text{ 为周期} \Leftrightarrow \int_0^T f(t)dt = 0$$

当 $f(x)$ 又是奇函数时

$$\int_0^T f(t)dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = 0$$

$\Rightarrow \int_0^x f(t)dt$ 以 T 为周期. (C) 是正确的.

现考察(D).

$\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t)dt \exists \Rightarrow$ 数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{nT} f(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \int_0^T f(t)dt \right) \exists$
 $\Rightarrow \int_0^T f(t)dt = 0 \Rightarrow \int_0^x f(t)dt$ 也以 T 为周期. (D) 正确. 因此选(B).

196

【答案】 A

【分析】

令 $g(t) = f(t) - f(-t)$, 则

$$g(-t) = f(-t) - f(t) = -g(t)$$

$$g(t+T) = f(t+T) - f(-(t+T)) = f(t) - f(-t) = g(t)$$

所以 $f(t) - f(-t)$ 是以 T 为周期的连续的奇函数, 考察 $\Phi(x) = \int_a^x [f(t) - f(-t)]dt$.

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \int_a^x [f(t) - f(-t)]dt \\ &= \int_a^0 [f(t) - f(-t)]dt + \int_0^x [f(t) - f(-t)]dt \\ &= C_0 + \int_0^x [f(t) - f(-t)]dt \end{aligned}$$

其中 C_0 为某常数, 它可以认为是以随便什么正数为周期的周期函数也是偶函数.

又 $\int_0^x [f(t) - f(-t)]dt$ 是偶函数, 所以 $\Phi(x)$ 是偶函数, 而 $[f(t) - f(-t)]$ 是以 T 为周期的周期函数, $\int_0^x [f(t) - f(-t)]dt$ 有周期 $T \Leftrightarrow \int_0^T [f(t) - f(-t)]dt = 0$.

由周期函数的积分性质, 并注意到 $[f(t) - f(-t)]$ 为 t 的奇函数, 有

$$\int_0^T [f(t) - f(-t)]dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t) - f(-t)]dt = 0$$

所以 $\Phi(x) = C_0 + \int_0^x [f(t) - f(-t)]dt$ 为 T 周期的偶函数, 选(A).

【评注】 注意到 $[f(t) - f(-t)]$ 为 t 的奇函数是十分关键的一步.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

197 【答案】 A

【分析】 因被积函数是以 π 为周期的函数,它在每个周期上的积分值相等,因此,

$$\begin{aligned} F(x) &= F(0) = \int_0^\pi \ln(1 + \cos^2 t) \cos 2t dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi \ln(1 + \cos^2 t) d\sin 2t \\ &= \frac{1}{2} \ln(1 + \cos^2 t) \sin 2t \Big|_0^\pi - \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{2\cos t(-\sin t)}{1 + \cos^2 t} \sin 2t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\sin^2 2t}{1 + \cos^2 t} dt > 0 \text{ (因被积函数连续且大于等于零,不恒为 } 0) \end{aligned}$$

所以选(A).

198 【答案】 B

【分析】 比较 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x \cos x) \cos x dx$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x \cos x) x \sin x dx$.

$$\begin{aligned} &\text{考察 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x \cos x) \cos x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x \cos x) x \sin x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x \cos x) [\cos x dx + x d\cos x] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x \cos x) d(x \cos x) \\ &= F(x \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = F(0) - F(0) = 0 \end{aligned}$$

其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数.

因此 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x \cos x) x \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x \cos x) \cos x dx = A$
选(B).

199 【答案】 D

【分析】 这是讨论原函数的存在性问题. 我们知道,若 $F(x)$ 在 (a, b) 连续,则 $F(x)$ 在 (a, b) 一定存在原函数,这里 $g(x)$ 在 $(-1, 1)$ 连续,所以 $g(x)$ 在 $(-1, 1)$ 存在原函数.

余下的是 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 是否存在原函数($x=0$ 是 $f(x)$ 的间断点).

方法1 $f(x)$ 在 $[0, 1)$ 的原函数为 $\frac{1}{3}x^3 + C_1$, 在 $(-1, 0)$ 的原函数为 $\sin x + C_2$, 在 $x=0$ 处该原函数必连续:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{3}x^3 + C_1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\sin x + C_2)$$

$\Rightarrow C_1 = C_2$. 若 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 存在原函数则应是

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + C_1, & 0 \leq x < 1 \\ \sin x + C_1, & -1 < x < 0 \end{cases},$$

但此 $F(x)$ 在 $x=0$ 不可导,因为

$$\begin{aligned} F'_+(0) &= \left(\frac{1}{3}x^3 + C_1 \right)' \Big|_{x=0} = 0, F'_-(0) = (\sin x + C_1)' \Big|_{x=0} = 1, \\ F'_+(0) &\neq F'_-(0). \end{aligned}$$

因此 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 不存在原函数.

选(D).

方法2 因 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点,所以 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 有第一类间断点 $\Rightarrow f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 不存在原函数. 选(D).

【评注】 (1) 设 $f(x)$ 在 $(x_0, x_0 + \delta)$ (或 $(x_0 - \delta, x_0)$) 可导, 在 x_0 右(左)连续, 又

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = A (\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = A) \Rightarrow f'_+(x_0) = A (f'_-(x_0) = A)$$

证明: $f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = A.$

(2) 设 $f(x)$ 在 (a, b) 可导, $x_0 \in (a, b)$ 是 $f'(x)$ 的间断点, 则 x_0 只能是 $f'(x)$ 的第二类间断点.

证明 若同时存在

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = A^+, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = A^- \Rightarrow f'_+(x_0) = A^+, f'_-(x_0) = A^-$$

由 $f'(x_0) \exists \Rightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0) \Rightarrow$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0) \Rightarrow f'(x)$ 在 $x = x_0$ 连续. 与已知条件矛盾.

由导函数的这一性质立即得出, 若 $f(x)$ 在 (a, b) 上存在第一类间断点, 则它不存在原函数.

200 【答案】 C

【分析】 $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+4}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+16}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+4n^2}}$

$$= \frac{1}{n} \left[\frac{1}{\sqrt{1+4\left(\frac{1}{n}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+4\left(\frac{2}{n}\right)^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+4\left(\frac{n}{n}\right)^2}} \right]$$

这是 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$ 在 $[0, 1]$ 区间上的一个积分和.

$$x_n = \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right] = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \frac{1}{n}$$

其中积分区间 $[0, 1]$ 是 n 等分后, 每个小区间是 $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] (i=1, 2, 3, \cdots, n)$, ξ_i 是小区间的右端点.

由于 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 可积, 因此

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}} = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \\ &= \frac{1}{2} \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{5}). \end{aligned}$$

201 【答案】 C

【分析】 $|\sin x|$ 以 π 为周期, 它在每个周期上的积分相等, 等于 $\int_0^\pi |\sin x| dx = 2$, 因此

$$\begin{aligned} \frac{\int_0^{n\pi} |\sin x| dx}{(n+1)\pi} &= \frac{n \int_0^\pi |\sin x| dx}{(n+1)\pi} = \frac{2n}{(n+1)\pi} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{n\pi} |\sin x| dx}{(n+1)\pi} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \cdot \frac{2}{\pi} \right) = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

选(C).

【评注】(1) 利用本题的方法,再结合适当放大缩小法可求得函数极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x |\sin t| dt}{x}$$

当 $n\pi \leq x \leq (n+1)\pi$

$$2n = \int_0^{n\pi} |\sin x| dx \leq \int_0^x |\sin x| dx \leq \int_0^{(n+1)\pi} |\sin x| dx = 2(n+1)$$

所以有

$$\frac{2n}{(n+1)\pi} \leq \frac{\int_0^x |\sin x| dx}{x} \leq \frac{2(n+1)}{n\pi}$$

注意, $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow n \rightarrow \infty$. 在上式中,令 $n \rightarrow \infty$,得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x |\sin x| dx}{x} = \frac{2}{\pi}$$

(2) 在本题的解答中,要注意以下两点:

如果 $f(x)$ 是以 T 为周期连续函数,则 $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$,

当 $f(x) \geq 0$ 时,当 $x > y > a$ 时就有 $\int_a^x f(t) dt \geq \int_a^y f(t) dt$.

202 【答案】 A

【分析】 方法1 $x=0$ 是(A)的瑕点.

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sin x} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sin x} dx + \int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx,$$

以 $\int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx$ 为例.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx &= \int_0^1 \frac{dx}{2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \int_0^1 \frac{d \tan \frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2}} \\ &= \ln \tan \frac{x}{2} \Big|_0^1 = \infty, \end{aligned}$$

所以 $\int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx$ 发散,从而知 $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sin x} dx$ 发散. 选(A).

方法2 (B) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{-1}^1 = \pi$.

(C) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(D) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int_2^{+\infty} \frac{d \ln x}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} \Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2}$.

因此(B),(C),(D)均收敛,选(A).

203 【答案】 C

【分析】 通过具体计算可知(C)收敛. 命 $x = \sec t$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec t \tan t}{\sec^2 t \tan t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 1.$$

或

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}} &= \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \int_1^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2} d\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \\ &= \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} \Big|_1^{+\infty} = 1. \end{aligned}$$

可证(A),(B),(D)是发散的.

方法1 直接计算

(A) 令 $x = \frac{1}{\sin t}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1}} \cdot \frac{-\cos t}{\sin^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t} \text{ 发散 (同题 202)}$$

(B) $\sqrt{x^2-x} = \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{(2x-1)^2-1}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}} = 2 \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(2x-1)^2-1}} \stackrel{t=2x-1}{=} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} \text{ 发散 (同(A)).}$$

(D) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2-1)} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3 \left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = -\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{d\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2} \ln \left(1-\frac{1}{x^2}\right) \Big|_1^{+\infty}$
 $= +\infty$, 发散.

故选(C).

方法2 用适当放大缩小法

$x > 1$ 时

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} &> \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{x}, \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} > \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x \\ \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = +\infty, \text{(A) 发散.} \end{aligned}$$

同理, 当 $x > 1$ 时

$$\frac{1}{\sqrt{x(x-1)}} > \frac{1}{x} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)}} = +\infty$$

(B) 发散.

当 $1 < x < 2$ 时

$$\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{1}{x(x+1)(x-1)} > \frac{1}{6(x-1)} \quad (1 < x < 2)$$

$$\int_x^2 \frac{dt}{t(t^2-1)} > \int_x^2 \frac{dt}{6(t-1)} = \frac{1}{6} \ln(t-1) \Big|_x^2$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{6} \ln(t-1) \Big|_x^2 = +\infty \Rightarrow \int_1^2 \frac{dx}{x(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \int_x^2 \frac{dt}{t(t^2-1)} = +\infty$

(D) 发散, 因此选(C).

204 【答案】 A

【分析】 我们要逐一分析各命题是否正确.

命题①是错的. 因为

$f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续 $\nRightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 如 $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$ 发散.

命题②也是错的. 如 $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$ 发散, 但 $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \sin x dx = 0$.

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x)dx \exists \nRightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛}.$$

命题③是正确的.

命题④是错误的. 在④的条件下 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 是发散的.

总共只有一个正确, 选(A).

【评注】 (1) 若 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \begin{cases} 0, & f(x) \text{ 为奇函数} \\ 2 \int_0^{+\infty} f(x)dx, & f(x) \text{ 为偶函数} \end{cases}$$

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ B \rightarrow -\infty}} \int_B^A f(x)dx \quad (\exists)$$

$$\downarrow \nearrow$$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x)dx \quad \exists$$

$$(3) \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx \quad \int_a^{+\infty} g(x)dx \quad \int_a^{+\infty} [f(x) + g(x)]dx$$

收敛 收敛 $\Rightarrow$ 收敛

收敛 发散 $\Rightarrow$ 发散

发散 发散 敛散性不确定, 要具体问题具体分析.

$$(4) \quad \int_{-\infty}^0 f(x)dx \quad \int_0^{+\infty} f(x)dx \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

收敛 收敛 $\Rightarrow$ 收敛

收敛 发散 $\Rightarrow$ 发散

发散 收敛 $\Rightarrow$ 发散

发散 发散 $\Rightarrow$ 发散

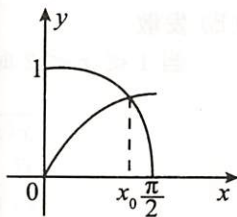
205 【答案】 C

【分析】 先求 $y = \cos x$ 与 $y = a \sin x$ 的交点的坐标 x_0 .

$$\text{由 } \cos x = a \sin x \Rightarrow \tan x_0 = \frac{1}{a}.$$

$$\text{因 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1, \text{ 故}$$

$$\int_0^{x_0} [\cos x - a \sin x] dx = [\sin x + a \cos x] \Big|_0^{x_0} = \sin x_0 + a \cos x_0 - a$$



$$\begin{aligned}
 &= (\tan x_0 + a) \cos x_0 - a = \left(\frac{1}{a} + a\right) \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x_0}} - a \\
 &= \frac{1 + a^2}{a} \cdot \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}} - a = \sqrt{1 + a^2} - a = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

由 $\sqrt{1 + a^2} - a = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{1 + a^2} + a = 2$ 相减得 $a = \frac{3}{4}$.

选(C).

知识点链接

《数学复习全书·基础篇》

高数第六章

定积分的应用

206 【答案】 D

【分析】 把曲线表成 $x = x(y)$, 要分成两条:

$$x = 1 \pm \sqrt{1 - y} \quad (0 \leq y \leq 1)$$

看成两个旋转体的体积之差:

$$V_1 = \pi \int_0^1 (1 + \sqrt{1 - y})^2 dy, \quad V_2 = \pi \int_0^1 (1 - \sqrt{1 - y})^2 dy.$$

$$\text{于是 } V = V_1 - V_2 = \pi \int_0^1 [(1 + \sqrt{1 - y})^2 - (1 - \sqrt{1 - y})^2] dy,$$

因此选(D).

【评注】 (1) 按公式计算得

$$V = \pi \int_0^1 4 \sqrt{1 - y} dy = 4\pi \left(-\frac{2}{3} (1 - y)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{3} \pi$$

(2) 也可利用另一旋转体体积公式

设 $b > a \geq 0$, 曲线 $y = f(x) (a \leq x \leq b)$ 与直线 $x = a, x = b$ 及 x 轴围成图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

我们也可求出

$$V = 2\pi \int_0^2 x [1 - (x - 1)^2] dx = 2\pi \int_0^2 x (2x - x^2) dx = 2\pi \left(\frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3} \pi$$

207 【答案】 A

【分析】 利用极坐标方程表示曲线的弧长公式,

$$s = \int_0^a \sqrt{r^2 + (r')^2} d\theta = \int_0^a \sqrt{(ae^{\theta})^2 + (abe^{\theta})^2} d\theta = \int_0^a ae^{\theta} \sqrt{1 + b^2} d\theta$$

因此选(A).

【评注】 也可用参数方程的弧长公式来计算:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta = ae^{\theta} \cos \theta \\ y = r \sin \theta = ae^{\theta} \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 s &= \int_0^a \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2} d\theta \\
 &= \int_0^a \sqrt{(ae^{\theta} \cos \theta - ae^{\theta} \sin \theta)^2 + (ae^{\theta} \sin \theta + ae^{\theta} \cos \theta)^2} d\theta \\
 &= \int_0^a ae^{\theta} \sqrt{1 + b^2} d\theta.
 \end{aligned}$$

208 【答案】 A

【分析】 先求弧微分

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt \\ &= a \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = 2a \sin \frac{t}{2} dt (0 \leq t \leq 2\pi) \end{aligned}$$

于是得弧长

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} dt = 4a \left(-\cos \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 8a$$

四个选项中,质心的横坐标均相同,所以只须求质心的纵坐标 $\bar{y}$. 为此,

$$\begin{aligned} \text{再求} \quad \int_0^{2\pi} y(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) 2a \sin \frac{t}{2} dt \\ &= 4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt = 8a^2 \int_0^{\pi} \sin^3 t dt \\ &= 16a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t dt = 16a^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{3} a^2 \end{aligned}$$

$$\text{因此代入公式得} \quad \bar{y} = \frac{\int_0^{2\pi} y(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt}{\int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt} = \frac{\frac{32}{3} a^2}{8a} = \frac{4}{3} a$$

因此选(A).

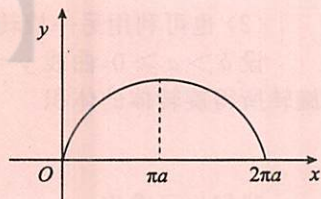
【评注】 这枝旋轮线关于直线 $x = \pi a$ 对称. 由对称性知 $\bar{x} = \pi a$.

或直接计算

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} x(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt &= \int_0^{2\pi} a(t - \sin t) 2a \sin \frac{t}{2} dt \\ &= -4a^2 \int_0^{2\pi} t d\cos \frac{t}{2} - 4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} dt. \\ &= -4a^2 t \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} + 4a^2 \int_0^{2\pi} \cos \frac{t}{2} dt - 8a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{t}{2} d\sin \frac{t}{2} = 8a^2 \pi. \end{aligned}$$

因此代入公式得质心的横坐标:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{2\pi} x(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt}{\int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt} = \frac{8a^2 \pi}{8a} = \pi a$$

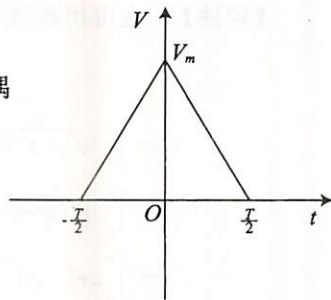


209 【答案】 A

【分析】 先写出三角形波电压函数 $V(t)$, 它在 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 是偶函数.

$$V(t) = -\frac{V_m}{T} \left(t - \frac{T}{2} \right) = -\frac{2V_m}{T} \left(t - \frac{T}{2} \right) \left(0 \leq t \leq \frac{T}{2} \right).$$

$\Rightarrow$ 一个周期的平均电压



$$\begin{aligned}\bar{V} &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} V(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} -\frac{2V_m}{T} \left(t - \frac{T}{2}\right) dt \\ &= -\frac{4}{T^2} V_m \cdot \frac{1}{2} \left(t - \frac{T}{2}\right)^2 \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \frac{V_m}{2}.\end{aligned}$$

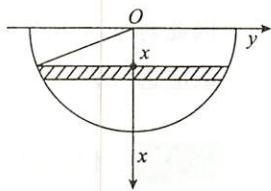
因此选(A).

210 【答案】 C

【分析】 如图所示,任取 $[x, x+dx] \subset [0, R]$, 相应的小横条所受压力微元

$$dp = x \cdot 2y dx = 2x \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

于是, 闸门所受压力 $p = \int_0^R 2x \sqrt{R^2 - x^2} dx$. 选(C).



211 【答案】 D

【分析】 由于 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是方程 $y' + p(x)y = 0$ 的两个不同的特解, 则 $y_1(x) - y_2(x)$ 为该方程的一个非零解, 则 $y = C(y_1(x) - y_2(x))$ 为该方程的通解.

【评注】 由于 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 都可能是原方程的零解, 则(A) 和(B) 都不正确.

212 【答案】 C

【分析】 先求题设一阶线性方程的全部解. 两边乘 $e^{\int_0^x P(t) dt}$ 得

$$(ye^{\int_0^x P(t) dt})' = 0$$

积分得

$$y = Ce^{-\int_0^x P(t) dt}, C \text{ 为任意常数.}$$

方法 1 方程的解 $y(x) \not\equiv 0$, 且以 T 为周期 $\Leftrightarrow y = Ce^{-\int_0^x P(t) dt}$ 且 $C \neq 0$,

$$\begin{aligned}y(x+T) - y(x) &= C[e^{-\int_0^{x+T} P(t) dt} - e^{-\int_0^x P(t) dt}] \\ &= Ce^{-\int_0^x P(t) dt} [e^{-\int_x^{x+T} P(t) dt} - 1] \\ &= Ce^{-\int_0^x P(t) dt} [e^{-\int_0^T P(t) dt} - 1] = 0\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \int_0^T P(t) dt = 0$. 故选(C).

方法 2 $y = Ce^{-\int_0^x P(t) dt}$, $C \neq 0$ 以 T 为周期 $\Leftrightarrow \int_0^x P(t) dt$ 以 T 为周期 $\Leftrightarrow \int_0^T P(t) dt = 0$. 故选(C).

【评注】 注意周期函数的积分性质: 设 $P(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续, 以 T 为周期, 则

$$(1) \int_x^{x+T} P(t) dt = \int_0^T P(t) dt \quad (\forall x)$$

$$(2) \int_0^x P(t) dt \text{ 以 } T \text{ 为周期} \Leftrightarrow \int_0^T P(t) dt = 0.$$

上述方法 1 中用到了性质(1), 方法 2 中用到了性质(2).

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

213 【答案】 B

【分析】 $y'' + by' + cy = 0$ 是二阶线性常系数齐次微分方程,其特征方程是 $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$,特征根为 $\lambda_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4c})/2$.

它们或为相异实根,或为重实根,或为共轭复根.但不论哪种情形,在 b, c 为正数的条件下特征根的实部总是负的.

注意当常数 $\alpha > 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\alpha x} = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-\alpha x} = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x = 0$.

因此对 $y'' + by' + cy = 0$ 的任一解 $y = y(x)$ 均有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$.

故应选(B).

214 【答案】 A

【分析】 方法1 由二阶线性微分方程解的性质与结构知,相应的齐次方程 $y'' + ay' + by = 0$ 有两个线性无关的解: $y_1 = e^{-2x}, y_2 = e^x$,于是相应的特征根是 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$,特征方程是 $(\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0$,即 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

故 $a = 1, b = -2, y^* = x^2 e^x$ 是方程

$$y'' + y' - 2y = (cx + d)e^x$$

的解,

$$y^{*'} = (x^2 + 2x)e^x, y^{*''} = (x^2 + 4x + 2)e^x, \text{代入得}$$

$$y^{*''} + y^{*' } - 2y^* = (6x + 2)e^x = (cx + d)e^x$$

$\Rightarrow c = 6, d = 2$.

因此选(A).

方法2 把 $y^* = e^{-2x} + (x^2 + 2)e^x, (y^*)' = -2e^{-2x} + (x^2 + 2x + 2)e^x, (y^*)'' = 4e^{-2x} + (x^2 + 4x + 4)e^x$ 代入微分方程可得

$$(y^*)'' + a(y^*)' + by^* = (4 - 2a + b)e^{-2x} + (1 + a + b)x^2 e^x + (4 + 2a)xe^x + (4 + 2a + 2b)e^x \stackrel{\text{令}}{=} (cx + d)e^x$$

就有

$$\begin{cases} 4 - 2a + b = 0 \\ 1 + a + b = 0 \\ 4 + 2a = c \\ 4 + 2a + 2b = d \end{cases}$$

不难由前两个方程求得 $a = 1, b = -2$,把它们代入后两个方程又可得到 $c = 6, d = 2$,故应选(A).

215 【答案】 C

【分析】 令 $tx = s$,原方程变为

$$\int_0^x f(s)ds + 2 \int_0^x f(t)dt = xf(x) + x^3$$

即

$$3 \int_0^x f(t)dt = xf(x) + x^3$$

两边对 x 求导得

$$3f(x) = xf'(x) + f(x) + 3x^2$$

$$f'(x) - \frac{2}{x}f(x) = -3x \quad (x > 0)$$

即

(原方程中令 $x = 0$, 等式自然成立, 不必附加条件).

方程两边乘 $\mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = \frac{1}{x^2}$ 得

$$\left(\frac{1}{x^2}f(x)\right)' = -\frac{3}{x}$$

积分得

$$\frac{1}{x^2}f(x) = -3\ln x + C$$

$$f(x) = Cx^2 - 3x^2 \ln x \quad (x > 0)$$

由连续性

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

因此求得

$$f(x) = \begin{cases} Cx^2 - 3x^2 \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

C 为任意常数, 选(C).

216 【答案】 C

【分析】 设 L 的方程为 $y = y(x)$, 由题设知 $y(0) = 1, y(1) = 0$. 又因 L 是连接 A, B 两点的凸弧, 从而当 $0 \leq x < 1$ 时 $y(x) > 0$ 成立.

设点 Q 是点 P 在 x 轴上的投影, 则点 Q 的坐标是 $(x, 0)$, 且曲边梯形 $OQPA$ 的面积为 $\int_0^x y(t) dt$, 梯形 $OQPA$ 的面积为 $\frac{x}{2}(1 + y(x))$, 于是凸弧 L 与弦 AP 围成的平面图形的面积

$$\int_0^x y(t) dt - \frac{x}{2}(1 + y(x)) = x^4 \quad (1)$$

因 $y(x)$ 连续, 于是 $\int_0^x y(t) dt$ 可导, 由上面等式知 $y(x)$ 当 $0 < x \leq 1$ 时可导. 将(1)式求导即得

$$y(x) - \frac{1}{2}(1 + y(x)) - \frac{x}{2}y'(x) = 4x^3$$

整理得 $y = y(x)$ 满足一阶线性微分方程

$$y' - \frac{y}{x} = -8x^2 - \frac{1}{x}$$

((1)式令 $x = 0$, 得 $0 = 0$ 自然成立, 不必另加条件).

用积分因子 $\frac{1}{x} \left(e^{-\int \frac{dx}{x}} = \frac{1}{x} \right)$ 同乘方程两端, 得

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = -8x - \frac{1}{x^2}$$

积分得方程的通解

$$y = x \left(C - \int \left(8x + \frac{1}{x^2} \right) dx \right) = 1 + Cx - 4x^3. \text{ 对 } \forall C, \text{ 总满足 } y(0) = 1.$$

令 $x = 1, y(1) = 0$ 可确定常数 $C = 3$, 故 L 的方程是 $y = 1 + 3x - 4x^3$. 应选(C).

【评注】 函数 $e^{\int p(x) dx}$ 称为一阶线性方程 $y' + p(x)y = Q(x)$ 的积分因子, 用它同乘方程的两端可得 $(ye^{\int p(x) dx})' = Q(x)e^{\int p(x) dx}$, 再积分一次就可求得方程的通解.

217 【答案】 D

【分析】 微分方程对应的齐次微分方程是: $y'' - 3y' + 2y = 0$, 其特征方程为 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, 其特征根为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$.

因此微分方程 $y'' - 3y' + 2y = -2e^x$ 有形如 $y_1^* = ce^x$ 的特解.

又微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 3x$ 有形如 $y_2^* = ax + b$ 的特解. 所以, 由迭加原理知, 原方程 $y'' - 3y' + 2y = 3x - 2e^x$ 有形如 $y^* = y_1^* + y_2^* = ce^x + (ax + b)$ 的特解, 应选(D).

【评注】 经计算可确定常数 $a = \frac{3}{2}, b = \frac{9}{4}, c = 2$.

218 【答案】 C

【分析】 由题设知 $y = y(x)$ 是 $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$ 满足 $y(0) = 0, y'(0) = 2$ 的特解. 对应的特征方程为 $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$, 特征根 $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. 从而对应的齐次微分方程的通解为 $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$. 因非齐次项 $f(x) = e^{3x}$, 从而可设非齐次微分方程 $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$ 具有形式为 $y^* = Ax^2 e^{3x}$ 的特解. 代入原方程可确定常数 $A = \frac{1}{2}$, 即原方程的通解为

$$y = \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{2} x^2 \right) e^{3x}$$

由 $y(0) = 0, y'(0) = 2$ 可确定 $C_1 = 0, C_2 = 2$. 故所求曲线的方程为

$$y = \left(2x + \frac{1}{2} x^2 \right) e^{3x} = \frac{x}{2} (x + 4) e^{3x}$$

应选(C).

【评注】 按选项特点((A)、(B)、(D)中均含三角函数), 求出特征根 $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, 写出通解形式 $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + Ax^2 e^{3x}$ 后不必再计算就可选(C).

219 【答案】 D

【分析】 由线性微分方程解的结构知 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 线性无关是 $C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$ 为方程通解的充分必要条件, 即 $f_1(x) \neq C f_2(x)$, 从而

$$\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right)' = \frac{f_1'(x) f_2(x) - f_1(x) f_2'(x)}{f_2^2(x)} \neq 0,$$

故应选(D).

【评注】 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的任二解 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 必满足恒等式

$$y_1' y_2 - y_1 y_2' = C e^{-\int p(x) dx} \quad (1)$$

其中 C 是一个常数. 由(1)式可见任二解 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 或者满足 $y_1' y_2 - y_1 y_2' \equiv 0$ 或者满足 $y_1' y_2 - y_1 y_2' \neq 0$. 前者对应 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 线性相关, 后者对应 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 线性无关.

$$(1) \text{ 式的证明如下: 已知 } y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0, \quad (2)$$

$$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0, \quad (3)$$

用 y_2 乘方程(2), 用 y_1 乘方程(3), 然后相减即得

$$(y_1' y_2 - y_1 y_2') + p(x)(y_1' y_2 - y_1 y_2') = 0,$$

$$\text{即 } (y_1' y_2 - y_1 y_2')' + p(x)(y_1' y_2 - y_1 y_2') = 0,$$

这表明 $y_1' y_2 - y_1 y_2'$ 是一阶线性齐次微分方程 $y' + p(x)y = 0$ 的一个解. 由通解公式即得存在一个常数 C 使得 $y_1' y_2 - y_1 y_2' = C e^{-\int p(x) dx}$, 常数 C 可用 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 在某点 $x = x_0$ 处的函数值与导数值确定.

220 【答案】 C

【分析】 由于齐次方程的通解为 $C_1 \cos kx + C_2 \sin kx$, 这样只需验证的就是在四个函数 $A \sin x + B \cos x, Ax \cos x, Ax \sin x$ 与 $Ax \sin x + Bx \cos x$ 中哪一个是非齐次方程的特解. 如果非齐次方程的特解形式为 $A \sin x + B \cos x$, 说明此时 $k \neq 1$, 经验证可知特解为 $\frac{1}{k^2 - 1} \cos x$, 即 $A = 0, B = \frac{1}{k^2 - 1}$. 而根据题设 A, B 均为非零常数, 说明它不符合题意, 故选项 (A) 是错误的. $k \neq 1$ 时通解的形式不可能是 (B)、(C)、(D), 所以只能是 $k = 1$.

如果 $k = 1$, 则特解应具有形式 $Ax \sin x + Bx \cos x$, 代入原方程可知: $A = \frac{1}{2}, B = 0$, 由此可见应选 (C).

221 【答案】 D

【分析】 微分方程 $y'' - 2y' + 5y = 0$ 的特征方程是 $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$, 特征根是 $\lambda_1 = 1 + 2i, \lambda_2 = 1 - 2i$, 方程的非齐次项 $f(x) = e^x \cos 2x = e^{\alpha x} \cos \beta x, \alpha \pm i\beta = 1 \pm 2i$ 是特征根.

按照选取特解的规则应设非齐次微分方程 $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$ 具有形式为 $y^* = xe^x(a \cos 2x + b \sin 2x)$ 的特解, 其中 a 与 b 是待定常数.

记 $y_1 = e^x \cos 2x, y_2 = e^x \sin 2x$, 则

$$y^* = x(ay_1 + by_2),$$

$$y^{*'} = x(ay_1' + by_2') + (ay_1 + by_2),$$

$$y^{*''} = x(ay_1'' + by_2'') + 2(ay_1' + by_2'),$$

从而

$$y^{*''} - 2y^{*'} + 5y^* =$$

$$= x[a(y_1'' - 2y_1' + 5y_1) + b(y_2'' - 2y_2' + 5y_2)] + 2a(y_1' - y_1) + 2b(y_2' - y_2)$$

$$= 2a(y_1' - y_1) + 2b(y_2' - y_2)$$

$$= 2ae^x(\cos 2x - 2\sin 2x - \cos 2x) + 2be^x(\sin 2x + 2\cos 2x - \sin 2x)$$

$$= -4ae^x \sin 2x + 4be^x \cos 2x.$$

要使 y^* 是方程的特解, 待定系数应满足 $a = 0, b = \frac{1}{4}$, 即微分方程

$$y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$$

有特解

$$y^* = \frac{1}{4}xe^x \sin 2x,$$

故应选 (D).

222 【答案】 B

【分析】 由 $y_1 = e^{-x}, y_2 = 2xe^{-x}, y_3 = 3e^x$ 是所求方程的三个特解知, $r = -1, -1, 1$ 为所求三阶常系数线性齐次微分方程的特征方程的三个根, 则其特征方程为

$$(r-1)(r+1)^2 = 0$$

$$\text{即 } r^3 + r^2 - r - 1 = 0$$

对应的微分方程为

$$y''' + y'' - y' - y = 0$$

故应选 (B).

223 【答案】 B

【分析】 这是伯努利方程,改写成

$$2y \frac{dy}{dx} + 2xy^2 = xe^{-x^2}$$

$$\frac{dy^2}{dx} + 2xy^2 = xe^{-x^2}$$

两边乘 $\mu = e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$ 得

$$\frac{d}{dx}(y^2 e^{x^2}) = x$$

积分得

$$y^2 e^{x^2} = \frac{1}{2}x^2 + C$$

由 $y(0) = 1 \Rightarrow C = 1$, 得特解

$$y^2 = \left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right)e^{-x^2}$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 + 1}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

224 【答案】 D

【分析】 这不是可分离变量的,一阶线性的,也不是齐次方程与伯努利方程,检验一下是否全微分方程,方程表成 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ (在全平面)}$$

因此该方程是全微分方程,归结为求 $u(x, y)$ 使得

$$du = Pdx + Qdy$$

方法1 (观察法即凑微分法)

原方程改写成

$$(y^2 - 1)dx + xdy - \sin y = 0$$

$$d((y^2 - 1)x - \sin y) = 0$$

因此通解为

$$(y^2 - 1)x - \sin y = C. \text{ 选(D).}$$

方法2 (不定积分法)

归结为求 $u(x, y)$, 使得 $\frac{\partial u}{\partial x} = P = y^2 - 1, \frac{\partial u}{\partial y} = Q = 2xy - \cos y$.

将第一式对 x 积分得

$$u = (y^2 - 1)x + C(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy + C'(y) = 2xy - \cos y, C'(y) = -\cos y$$

$$C(y) = -\sin y + C$$

$$\Rightarrow u(x, y) = (y^2 - 1)x - \sin y + C$$

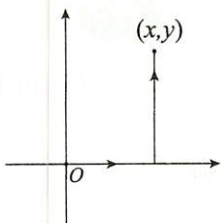
通解为 $(y^2 - 1)x - \sin y = C$. 选(D).

方法3 (特殊路径积分法)

取特殊路径如右图折线路径

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy \\
 &= \int_0^x P(x, 0)dx + \int_0^y Q(x, y)dy \\
 &= \int_0^x (-1)dx + \int_0^y (2xy - \cos y)dy \\
 &= -x + xy^2 - \sin y = x(y^2 - 1) - \sin y
 \end{aligned}$$

通解为 $x(y^2 - 1) - \sin y = C$. 选(D).



225

【答案】 D

【分析】 对于欧拉方程

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + p \cdot x \frac{dy}{dx} + qy = 0$$

(p, q 为常数), 作自变量替换

$$x = \pm e^t$$

则原方程化为二阶线性常系数方程

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (p-1) \frac{dy}{dt} + qy = 0$$

对该题即化为

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = 0$$

特征方程为

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0, \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$$

通解

$$y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t$$

$$\text{即 } y = \frac{C_1}{x^2} + C_2 x.$$

226

【答案】 B

【分析】

$$\begin{aligned}
 |f(x, y)| &\leq \left| \frac{x^2 y + y^4}{x^2 + y^2} \right| \\
 &= \left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot y + \frac{y^2}{x^2 + y^2} \cdot y^2 \right| \leq |y| + y^2
 \end{aligned}$$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (|y| + y^2) = 0$. 因此 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$. 选(B).

227

【答案】 A

【分析】 由于

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \left| \frac{xy^2 \sin ky}{x^2 + y^4} \right| \leq \frac{\frac{1}{2}(x^2 + y^4)}{x^2 + y^4} |\sin ky| \\
 &= \frac{1}{2} |\sin ky| \rightarrow 0 \quad (\text{当 } (x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ 时})
 \end{aligned}$$

则 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2 \sin ky}{x^2 + y^4} = 0$, 故应选(A).

知识点链接

《数学复习全书·基础篇》
高数第八章
多元函数微分学

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

228 【答案】 A

【分析】 由于 $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{x^4+x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x^2+1} = 0$

而

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x^2}} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^4}{x^4+x^4} = 1$$

则极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在.

【评注】 事实上,当 (x,y) 沿过原点的任何直线趋于 $(0,0)$ 时,都有 $\frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ 趋于0,但极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ 仍然不存在,因为当 (x,y) 沿 $y=x^2$ 趋于 $(0,0)$ 时, $\frac{2x^2y}{x^4+y^2} \rightarrow 1$.

229 【答案】 C

【分析】 由于

$$0 \leq |xy \ln(x^2+y^2)| \leq -\frac{1}{2}(x^2+y^2) \ln(x^2+y^2) \quad (\text{当 } 0 < x^2+y^2 < 1 \text{ 时})$$

令 $x^2+y^2=r$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2+y^2) \ln(x^2+y^2) &= \lim_{r \rightarrow 0^+} r \ln r = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\ln r}{\frac{1}{r}} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{r}}{-\frac{1}{r^2}} \quad (\text{洛必达法则}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{则 } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} -\frac{1}{2}(x^2+y^2) \ln(x^2+y^2) = 0,$$

故 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \ln(x^2+y^2) = 0$, 应选(C).

230 【答案】 C

【分析】 由于 $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=kx}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}$

与 k 取值有关, 则 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在, 从而 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续, 而

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

同理 $f'_y(0,0) = 0$.

故应选(C).

【评注】 本题中的函数给出了一个两个偏导数都存在但不连续的例子.

231 【答案】 C

【分析】 由于 $0 \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq |y| \rightarrow 0$, 则

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$

则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续, (A) 不正确.

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0$$

所以, $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处偏导数存在, (B) 不正确.

$$\text{又 } \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f'_x(0, 0)\Delta x - f'_y(0, 0)\Delta y}{\rho} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{3/2}}$$

由于 $\lim_{\substack{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0) \\ \Delta y = \Delta x}} \frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{3/2}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^3}{2\sqrt{2} |\Delta x|^3}$ 不存在, 则

$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{3/2}}$ 不存在, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点不可微, 故应选 (C).

【评注】 用定义判定 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 是否可微分以下两步进行:

(1) 用定义判断 $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ 是否都存在, 如果都存在则进行下一步, 否则, $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处不可微.

$$(2) \text{ 考察极限 } \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - [f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y]}{\rho}$$

是否为零. 如果此极限为零, 则函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微, 否则不可微.

232 【答案】 B

$$\text{【分析】 } f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

由对称性知, $f'_y(0, 0) = 0$

而

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) - [f'_x(0, 0)\Delta x + f'_y(0, 0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta x \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

不存在.

$$\text{事实上 } \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y = k\Delta x}} \frac{\Delta x \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2 + k^2(\Delta x)^2} = \frac{k}{1 + k^2}$$

故 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点不可微. 应选 (B).

【评注】 本题中的函数给出了一个偏导数存在但不可微的例子.

233 【答案】 D

【分析】 $f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) = \Delta x \Delta y \sin \frac{1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$

$$= \rho \cdot \rho \frac{\Delta x}{\rho} \frac{\Delta y}{\rho} \sin \frac{1}{\rho} = o(\rho) (\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \rightarrow 0)$$

其中 $\left| \frac{\Delta x}{\rho} \frac{\Delta y}{\rho} \sin \frac{1}{\rho} \right| \leq 1$, 所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微.

当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时,

$$f'_x(x,y) = y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f'_y(x,y) = x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

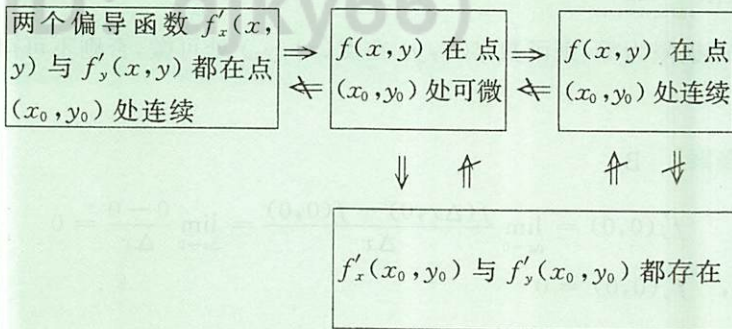
当 $x^2 + y^2 = 0$ 时, $f'_x(0,0) = 0, f'_y(0,0) = 0$.

当取路径 $y = x$ 时,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ y=x}} f'_x(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \sin \frac{1}{\sqrt{2}x} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos \frac{1}{\sqrt{2}x} \right)$$

不存在, 所以 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f'_x(x,y)$ 不存在, 故 $f'_x(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续. 同理 $f'_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续, 应选(D).

【评注】 (1) 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的连续性, 偏导数的存在性, 可微性三者的相互关系. 如下:



(2) 按定义, $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 可微, 即

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), (\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \rightarrow 0)$$

其中 A, B 与 $\Delta x, \Delta y$ 无关为常数. 特别是, 若有 $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = o(\rho) (\rho \rightarrow 0)$, 则 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 可微, 且 $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = 0, \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = 0$.

234

【答案】 D

【分析】 先求 f'_x 和 f'_y .

$x^2 + y^2 \neq 0$ 时

$$f'_x = \frac{4x^3(x^2 + y^2) - 2x(x^4 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f'_y = \frac{-4y^3(x^2 + y^2) - 2y(x^4 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\text{由 } f(x, 0) = x^2 (\forall x), f(0, y) = -y^2 (\forall y)$$

$$\Rightarrow f'_x(0, 0) = 0, f'_y(0, 0) = 0$$

$$\text{注意 } \left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| \leq 1, \left| \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq 1$$

$$\Rightarrow |f'_x| \leq 4|x| + 2|x| + 2|x| = 8|x|$$

$$|f'_y| \leq 4|y| + 2|y| + 2|y| = 8|y|$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f'_x = 0 = f'_x(0,0), \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f'_y = 0 = f'_y(0,0)$$

因此 $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 连续, 从而 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 可微. 选(D)

235 【答案】 B

【分析】 直接法.

由 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) + 2x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1$, 且 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ 知

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} [f(x,y) - f(0,0) + 2x - y] = 0$$

则 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0)$, $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续, 又

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{f(x,y) - f(0,0) + 2x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0) + 2x}{\sqrt{x^2}} = 1$$

$$\text{即 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0) + 2x}{|x|} = 1$$

$$\text{从而有 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} + 2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{-x} - 2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = -3$$

则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x}$ 不存在, 即 $f'_x(0,0)$ 不存在.

同理可得 $f'_y(0,0)$ 不存在, 故应选(B).

排除法.

令 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - 2x + y$. 显然 $f(x, y)$ 满足原题设的条件, 且 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点连续, 而

$$f(x, 0) = \sqrt{x^2} - 2x = |x| - 2x$$

在 $x = 0$ 处不可导 ($|x|$ 在 $x = 0$ 处不可导, $2x$ 在 $x = 0$ 处可导), 则 $f'_x(0, 0)$ 不存在.

同理 $f'_y(0, 0)$ 不存在, 从而(A)、(C)、(D) 均不正确, 故应选(B).

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

236 【答案】 D

【分析】 由已知条件 $\Rightarrow$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (f(x,y) - 1) = 0, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 1.$$

再由极限与无穷小的关系得

$$\frac{f(x,y) - f(0,0)}{x^2 + y^2} = 2 + \alpha$$

其中 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \alpha = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(0,0) &= 2(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2) \cdot \alpha \\ &= o(\rho) \quad (\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0) \\ &= 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + o(\rho) \end{aligned}$$

由可微性概念知: $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微且 $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0, \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$. 选(D).

【评注】 此类选择题可用特殊选取法,即取满足条件的特殊的 $f(x,y)$,易看出其中某选项成立,而其余三项不成立,就可选出正确选项. 这里取

$$f(x,y) - 1 = 2(x^2 + y^2)$$

即

$$f(x,y) = 2(x^2 + y^2) + 1$$

满足题中条件,显然此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微且 $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$.

因此选(D).



微信扫码

237 【答案】 D

【分析】 由 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f'_x(x,y) = f'_x(0,0)$ 和 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f'_y(x,y) = f'_y(0,0)$ 可知 $f(x,y)$ 的两个一阶偏导数 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续,则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微,故应选(D).

238 【答案】 B

【分析】 方法1 由 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续可知,如果 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2}$ 存在,则必有

$$f(0,0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x,y) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

由于 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2}$ 存在, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \infty$, 则 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$, 或 $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$,

即

$$f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + o(\rho)$$

由微分的定义知 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

方法2 排除法:取 $f(x,y) = |x| + |y|$, 显然 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)}{|x| + |y|}$ 存在,但 $f(x,y) = |x| + |y|$

$|y|$ 在 $(0,0)$ 处不可微. 这是由于 $f(x,0) = |x|$ 在 $x=0$ 处不可导, 则 $f'_x(0,0)$ 不存在, 从而 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微, 排除(A).

取 $f(x,y) \equiv 1$, 显然 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微, 但 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)}{|x|+|y|} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2} = \infty$ 不存在, 则排除(C)和(D), 故应选(B).

239 【答案】 D

【分析】 由多元函数的连续、偏导数存在和可微之间的关系知, 多元函数的连续既非两个偏导数存在的必要条件, 也非充分条件.

例如 $f(x,y) = |x| + |y|$ 在 $(0,0)$ 点连续, 但 $(0,0)$ 点两个偏导数 $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$ 都不存在. 而

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

在 $(0,0)$ 点的两个偏导数 $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$ 都存在(可用定义验证), 但在 $(0,0)$ 点不连续, 事实上极限

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ 不存在.}$$

故应选(D).

240 【答案】 C

【分析】 由于偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$ 就是一元函数 $f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 处的导数, 则由 $f'_x(x_0, y_0)$ 存在可知, 一元函数 $f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 从而 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0)$, 同理 $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x_0, y) = f(x_0, y_0)$. 故应选(C).

241 【答案】 A

【分析】 由二元函数 $f(x,y)$ 在某点 (x_0, y_0) 的可微性和它的偏导数的关系可知: 函数 $f(x,y)$ 的两个偏导数在点 (x_0, y_0) 处连续是函数 $f(x,y)$ 在该点处可微充分但非必要条件. 因此选(A).

【评注】 (1) 要熟悉基本定理. 若 $z = f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0, y_0) 连续, 则 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 可微, 即 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0, y_0) 的连续性是 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 可微的充分条件, 但 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 可微不能保证 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0, y_0) 连续. 例如

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

易求

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} 2y \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $(0,0)$ 不连续, 但

$$f(x,y) - f(0,0) = (x^2+y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2} = \rho \cdot \rho \sin \frac{1}{\rho^2} = o(\rho),$$

其中 $\rho = \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow 0$, 即 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微.

(2) 若想通过考察 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0, y_0) 的连续性来讨论 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 的可微性时, 只能由 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0, y_0) 连续时, 可知 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 可微, 但若 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0, y_0) 不连续时, 此时不足以判断 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 是否可微, 该方法失效.

242 【答案】 D

【分析】 由于偏导数本质上就是一元函数的导数, 则由 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} > 0, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} < 0$ 可知, $f(x,y)$ 关于变量 x 是单调增加的, 而关于变量 y 是单调减的. 因此, 当 $x_1 < x_2, y_1 > y_2$ 时

$$f(x_1, y_1) < f(x_2, y_1), f(x_2, y_1) < f(x_2, y_2)$$

从而有

$$f(x_1, y_1) < f(x_2, y_2)$$

故应选(D).

243 【答案】 D

【分析】 $f(1, -1) = f(1, -1) - f(0, 0)$

$$= [f(1, -1) - f(0, -1)] + [f(0, -1) - f(0, 0)]$$

$$= f'_x(\xi, -1) + f'_y(0, \eta)(-1)$$

$$> 1 + (-1) \times (-1) = 2$$

故应选(D).

排除法, 令 $f(x,y) = 1.1x - 1.1y$.

显然 $\frac{\partial f}{\partial x} = 1.1 > 1, \frac{\partial f}{\partial y} = -1.1 < -1, f(0,0) = 0$, 但

$$f(1,1) = 1.1 - 1.1 = 0$$

则(A)不正确.

$$f(-1,1) = -1.1 - 1.1 = -2.2 < -2$$

则(B)不正确.

$$f(-1, -1) = -1.1 + 1.1 = 0$$

则(C)不正确,故应选(D).

244 【答案】 A

【分析】
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-\frac{y}{x^2}f'_1 - \frac{z}{x^2}f'_2}{\frac{1}{x}f'_2} = \frac{\frac{y}{x}f'_1 + \frac{z}{x}f'_2}{f'_2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{1}{x}f'_1}{\frac{1}{x}f'_2} = -\frac{f'_1}{f'_2}$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{yf'_1 + zf'_2 - yf'_1}{f'_2} = z$$

245 【答案】 A

【分析】 设 $u(x, y)$ 满足

$$du = \frac{x+ay}{(x+y)^2}dx + \frac{y}{(x+y)^2}dy$$

由可微与可偏导的关系有:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x+ay}{(x+y)^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{(x+y)^2} \quad (1)$$

分别对 y, x 求偏导数有:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{a(x+y)^2 - (x+ay) \cdot 2(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{(a-2)x - ay}{(x+y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{-2y}{(x+y)^3}$$

由于 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ 与 $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ 连续, 从而 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, 即 $(a-2)x \equiv (a-2)y$, 所以当 $a=2$ 时上式成立, 应选(A).

【评注】 由全微分与偏导数存在的关系及混合偏导数连续时与求导次序无关的性质可导出 $Pdx + Qdy$ 为某函数的全微分的必要条件.

设 $P(x, y), Q(x, y)$ 在区域 D 有连续偏导数. 若在 D 上存在 $u(x, y)$ 使得

$$du = Pdx + Qdy \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad ((x, y) \in D)$$

但反过来不一定成立. 本题是已知 $Pdx + Qdy$ 为某函数的全微分, 故只需利用这个必要条件定出 P 中的参数 a , 而不必去求出原函数.

若有 $u(x, y)$ 满足

$$du = \frac{(x+ay)dx + ydy}{(x+y)^2}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

则充要条件是(1)式成立,由此我们也可用如下方法定出 a 值并相应地求出 $u(x, y)$.

由 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x+ay}{(x+y)^2}$, 对 x 积分(y 为任意固定常数)

$$\begin{aligned} \text{得} \quad u(x, y) &= \int \frac{x+ay}{(x+y)^2} dx = \int \frac{x+y+(a-1)y}{(x+y)^2} dx \\ &= \int \frac{dx}{x+y} + (a-1)y \int \frac{dx}{(x+y)^2} \\ &= \ln|x+y| - \frac{(a-1)y}{x+y} + C(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{再对 } y \text{ 求导得} \quad \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{x+y} - \frac{a-1}{x+y} + \frac{(a-1)y}{(x+y)^2} + C'(y) \\ &= \frac{y}{(x+y)^2} \text{ (用(1)式中另一条件)} \end{aligned}$$

因此得 $a=2, C'(y)=0$, 于是 $C(y)=C(\forall \text{ 常数})$

$$u(x, y) = \ln|x+y| - \frac{y}{x+y} + C$$

246 【答案】 C

【分析】 方法1 由题设知

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2 + 2xy + 3x^2, \frac{\partial f}{\partial y} = 4xy + x^2$$

由 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2 + 2xy + 3x^2$ 知

$$f(x, y) = \int (2y^2 + 2xy + 3x^2) dx = 2xy^2 + x^2y + x^3 + \varphi(y)$$

由 $\frac{\partial f}{\partial y} = 4xy + x^2$ 知, $4xy + x^2 = 4xy + x^2 + \varphi'(y), \varphi'(y) = 0, \varphi(y) = C$,

则 $f(x, y) = 2xy^2 + x^2y + x^3 + C$.

$$\begin{aligned} \text{方法2} \quad df(x, y) &= (2y^2 + 2xy + 3x^2)dx + (4xy + x^2)dy \\ &= (2y^2 dx + 4xy dy) + (2xy dx + x^2 dy) + 3x^2 dx \\ &= d(2xy^2) + d(x^2y) + dx^3 \end{aligned}$$

则 $f(x, y) = 2xy^2 + x^2y + x^3 + C$.

【评注】 方法1是利用偏积分,方法2是利用凑微分.这两种方法是已知某个函数的全微分或两个一阶偏导数求原函数的两种常用方法.

247 【答案】 C

【分析】 方法1 由 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}} = -2$, 及 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的连续性

知 $f(0, 0) = 0$.

由 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}} = -2 < 0$, 及极限的保号性知存在 $(0,0)$ 点的某个去心邻域, 在此去心邻域内

$$\frac{f(x,y)}{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}} < 0$$

而 $1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2} > 0$, 则 $f(x,y) < 0$, 又 $f(0,0) = 0$, 由极值定义知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 取极大值, 故应选(C).

方法 2 由于当 $(x,y) \rightarrow (0,0)$ 时, $1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2} \sim \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

取 $f(x,y) = -(x^2 + y^2)$, 显然满足题设条件, 但 $f'_x(0,0) = 0$, 且由极值定义知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 取极大值, 则排除(A)、(B)、(D), 故应选(C).

【评注】 方法 1 是利用极限的保号性和极值的定义, 方法 2 是利用排除法, 这是解决此类问题常用的两种方法.

248 【答案】 D

【分析】 由 $f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得极小值及极值的定义可知, $f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 取极小值, $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处取极小值, 故应选(D).

【评注】 极值点不一定是驻点, 因为在该点处偏导数不一定存在, 例如 $f(x,y) = |x| + |y|$ 显然在 $(0,0)$ 点取极小值, 但 $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$ 都不存在, 则排除(A); 驻点不一定是极值点, 排除(B); (C) 选项的结论对一元函数是成立的, 但对二元函数不成立.

249 【答案】 B

【分析】 $y'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$.

又 $F'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $y'(x_0) = 0$

$$y''(x) = -\frac{(F''_{xx} + F''_{xy}y')F'_y - (F''_{yx} + F''_{yy}y')F'_x}{(F'_y)^2}$$

$$y''(x_0) = -\frac{F''_{xx}(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

若 $F''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, 则 $y''(x_0) > 0$, x_0 是 $y = y(x)$ 的极小值点, 故应选(B).

250 【答案】 D

【分析】 $f'_x = 2kx$, $f'_y = 3y^2 - 3$, 显然

$$f'_x(0,1) = 0, f'_y(0,1) = 0$$

$$f''_{xx}(0,1) = 2k, f''_{yy}(0,1) = 6, f''_{xy}(0,1) = 0$$

$AC - B^2 = 12k$, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,1)$ 处是否取得极值与 k 的取值有关.

251 【答案】 A

【分析】 显然 $f(x, y) = 1 + x + y$ 在区域 $x^2 + y^2 \leq 1$ 内无驻点, 令

$$F(x, y, \lambda) = 1 + x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\text{令} \begin{cases} F'_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ F'_y = 1 + 2\lambda y = 0 \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}, \text{得 } x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + \sqrt{2}$ 为最大值, $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \sqrt{2}$ 为最小值, $(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -1$.

故应选(A).

252 【答案】 C

【分析】 令 $g(x, y) = xy$, 问题可转化为求函数 $g(x, y)$ 在区域 $D = \{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最小值.

由于函数 $g(x, y)$ 在 D 内仅有唯一驻点 $(0, 0)$ 且 $g(0, 0) = 0$. 从而为求 $g(x, y)$ 在 D 上的最小值, 只需比较 $g(x, y)$ 在 D 的边界 $4x^2 + y^2 = 1$ 上的最小值与 $g(0, 0) = 0$ 的大小.

方法1 求 $g(x, y) = xy$ 在 $4x^2 + y^2 = 1$ 上的最小值可用拉格朗日乘数法. 引入拉格朗日函数 $F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(4x^2 + y^2 - 1)$, 求 $F(x, y, \lambda)$ 的驻点, 解方程组

$$\begin{cases} F'_x = y + 8\lambda x = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} F'_y = x + 2\lambda y = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} F'_\lambda = 4x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

显然 $(x, y) = (0, 0)$ 不是解, 由(1), (2) 求它的非零解, 必须有 $\begin{vmatrix} 8\lambda & 1 \\ 1 & 2\lambda \end{vmatrix} = 0, \lambda = \pm \frac{1}{4}$,

即 $y = \pm 2x$, 代入(3) 得, $8x^2 = 1, x = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$, 于是可解得四个驻点 $P_1\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

$P_2\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), P_3\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 与 $P_4\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, 经计算知在 P_1 与 P_4 处 $g(x, y) = \frac{1}{4}$,

在 P_2 与 P_3 处 $g(x, y) = -\frac{1}{4}$.

比较即知函数 $f(x, y) = e^{-xy}$ 在 D 上的最大值在 P_2 与 P_3 处取得, 且最大值是 $e^{\frac{1}{4}}$. 应选(C).

方法2 化为求一元函数的最小值问题.

由 $4x^2 + y^2 = 1$ 解出

$$y = \pm \sqrt{1 - 4x^2} \left(-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\right)$$

代入 $g(x, y)$ 中转化为求 $z(x) = \pm x \sqrt{1 - 4x^2} \left(-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\right)$ 的最小值.

$$z' = \pm \left(\sqrt{1 - 4x^2} - \frac{4x^2}{\sqrt{1 - 4x^2}} \right) = \pm \frac{1 - 8x^2}{\sqrt{1 - 4x^2}}$$

由 $z' = 0$ 得 $x = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

$$z\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{1}{4}, z\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \mp \frac{1}{4}$$

又 $z\left(\pm \frac{1}{2}\right) = 0$. 因此 $z(x) \left(-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\right)$ 的最小值是 $-\frac{1}{4}$. $f(x, y) = e^{-xy}$ 在 D 的最大值是 $e^{\frac{1}{4}}$.

【评注】 (1) 设函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续. 求其在 D 上的最大值或最小值的步骤如下:

① 求出函数 $z = f(x, y)$ 在 D 内的所有驻点处或至少一个偏导数不存在的点处的函数值.

② 设 D 是由边界曲线 $F_i(x, y) = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ 所围成, 求出函数 $z = f(x, y)$ 分别在约束条件 $F_i(x, y) = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ 下的所有可能的驻点, 并计算出其函数值.

③ 比较 ①, ② 两组中已计算出的函数值, 其中最大者就是函数 $z = f(x, y)$ 在 D 上的最大值, 最小者就是函数 $z = f(x, y)$ 在 D 上的最小值.

(2) 条件极值应用问题的求解方法.

条件极值应用问题的求解常用拉格朗日乘法.

例如, 求函数 $z = f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 之下的条件极值的程序为:

① 引入拉格朗日函数 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$.

② 求拉格朗日函数 $F(x, y, \lambda)$ 的驻点, 即解方程组

$$\begin{cases} F'_x = f'_x + \lambda\varphi'_x = 0 \\ F'_y = f'_y + \lambda\varphi'_y = 0 \\ F'_\lambda = \varphi = 0 \end{cases}$$

③ 在考研试题中通常是条件最大值或最小值的应用问题, 常由问题的实际意义可知存在最大值或最小值. 若驻点唯一即为所求.

又如, 求函数 $u = f(x, y, z)$ 在约束条件 $\varphi(x, y, z) = 0$ 与 $\psi(x, y, z) = 0$ 之下的条件极值的程序为:

① 引入拉格朗日函数 $F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z) + \mu\psi(x, y, z)$.

② 求拉格朗日函数 $F(x, y, z, \lambda, \mu)$ 的驻点, 即解方程组

$$\begin{cases} F'_x = f'_x + \lambda\varphi'_x + \mu\psi'_x = 0 \\ F'_y = f'_y + \lambda\varphi'_y + \mu\psi'_y = 0 \\ F'_z = f'_z + \lambda\varphi'_z + \mu\psi'_z = 0 \\ F'_\lambda = \varphi = 0 \\ F'_\mu = \psi = 0 \end{cases}$$

③ 判定各驻点是否为最大、小值点.

253

【答案】 B

【分析】 由于

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 8x + 2y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 2y = 0 \end{cases},$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

的解为 $(0,0), (2,2)$. 只有 $(0,0)$ 在 D 内.

又因为 $A = f''_{xx} = 6x - 8, B = f''_{xy} = 2, C = f''_{yy} = -2$, 可得在点 $(0,0)$ 处 $A = -8, AC - B^2 > 0$, 所以点 $(0,0)$ 是极大值点.

注意 $f(0,0) = 0$, 在 D 的边界上点 $(4,1)$ 处 $f(4,1) = 7 > f(0,0)$, 即 $f(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 在 D 的最大值, $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 在 D 的最大值点. 因此选(B).

【评注】 (1) 本题考察当二元函数的两个偏导数都存在的条件下取得极值的必要条件和充分条件.

(2) 该题表明了多元函数与一元函数的一个区别: 区域 D 上的连续的二元函数 $f(x,y)$ 在 D 内有唯一的极值点, 若是极小(大)值点, 不一定是 $f(x,y)$ 的最小(大)值点.

254

【答案】 A

【分析】 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某空心邻域中满足

$$\frac{f(x,y) + 4x^2 - y^2}{x^4 + x^2y^2 + y^4} \equiv 1$$

即

$$f(x,y) = -4x^2 + y^2 + x^4 + x^2y^2 + y^4$$

不难求得 $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0, f''_{xx}(0,0) = -8, f''_{xy}(0,0) = 0, f''_{yy}(0,0) = 2$. 于是点 $(0,0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的驻点, 且 $A = -8, B = 0, C = 2$ 满足 $AC - B^2 = -16 < 0$, 故点 $(0,0)$ 不是函数 $f(x,y)$ 的极值点.

【评注】 在求解选择题时常可利用满足全部题设条件的特例来确定正确的选项. 本题所选的函数 $f(x,y)$ 正是满足本题全部假设条件的一个特例.

这类题目的一般解法是利用极限的充分必要条件来给出函数 $f(x,y)$ 的一般表达式, 然后进行分析. 具体作法如下: 首先由题设的极限等式可知 $f(0,0) = 0$, 其次由极限与无穷小的关系知存在满足 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = 0$ 的 $g(x,y)$ 使得

$$\frac{f(x,y) + 4x^2 - y^2}{x^4 + x^2y^2 + y^4} = 1 + g(x,y)$$

$\Leftrightarrow$

$$f(x,y) = y^2 - 4x^2 + (x^4 + x^2y^2 + y^4)[1 + g(x,y)]$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \frac{f(x,0)}{x^2} = -4 + x^2[1 + g(x,0)], & x \neq 0 \\ \frac{f(0,y)}{y^2} = 1 + y^2[1 + g(0,y)], & y \neq 0 \end{cases}$$

由 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = 0$ 知存在 $0 < \delta < 1$ 使得当 $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ 时 $|g(x,y)| < \frac{1}{2}$, 从而这时必有

$$\begin{cases} \frac{f(x,0)}{x^2} < -4 + 1 \times \frac{1}{2} = -\frac{7}{2} \\ \frac{f(0,y)}{y^2} > 1 - 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x,0) < 0 \\ f(0,y) > 0 \end{cases}$$

这表明 $f(0,0) = 0$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

255

【答案】 D

【分析】 此问题归结为求函数

$$u = xyz (x > 0, y > 0, z > 0)$$

在条件 $x + y + z = a$ 下的最大值.

方法 1 用拉格朗日乘数法.

$$\text{令 } F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(x + y + z - a)$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = yz + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = xz + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = xy + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y + z - a = 0 \end{cases}$$

用 x, y, z 分别乘第一、二、三个方程得 $x = y = z$, 再代入最后一个方程式得

$$x = y = z = \frac{a}{3}$$

由题意最大值一定存在, 因此当 $x = y = z = \frac{a}{3}$ 时 u 取最大值 $\left(\frac{a}{3}\right)^3 = \frac{a^3}{27}$.

方法 2 化为简单最值问题.

从条件 $x + y + z = a$ 中解得 $z = a - x - y$, 代入 $u = xyz$ 得 $u = xy(a - x - y)$, 转化为求函数 $u = xy(a - x - y)$ 在开区域

$$D = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0, x + y < a\}$$

中的最大值. 这个最大值一定存在, 它在 D 内的驻点达到. 令

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = y(a - x - y) - xy = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = x(a - x - y) - xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x + y = a \end{cases}$$

解得

$$x = \frac{a}{3}, y = \frac{a}{3}$$

是唯一驻点, 也就是最大值点. 因此 u 的最大值是 $u = \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} \left(a - \frac{a}{3} - \frac{a}{3}\right) = \frac{a^3}{27}$.

256

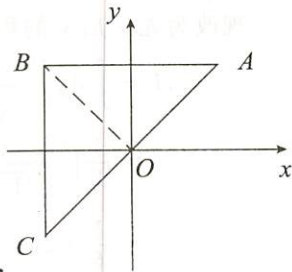
【答案】 A

【分析】 连接 OB 将原积分域分为两部分, $\triangle CBO$, 记为 D_2 , $\triangle BOA$, 记为 D_3 .由于 D_2 关于 x 轴对称, 而 $xy + \cos x \sin y$ 是 y 的奇函数, 则

$$\iint_{D_2} (xy + \cos x \sin y) d\sigma = 0$$

而 D_3 关于 y 轴对称, xy 是 x 的奇函数, $\cos x \sin y$ 是 x 的偶函数,

则



$$\iint_{D_3} xy d\sigma = 0, \iint_{D_3} \cos x \sin y d\sigma = 2 \iint_{D_1} \cos x \sin y d\sigma.$$

故应选(A).

257 【答案】 C

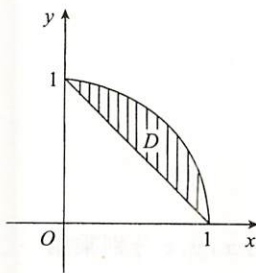
【分析】 原积分域为直线 $y = x, x + y = 2$, 与 y 轴围成的三角形区域, 故应选(C).

258 【答案】 B

【分析】 首先确定被积函数, 由于在极坐标系 (r, θ) 中面积元 $d\sigma = r dr d\theta$, 从而题设二重积分的被积函数应是 $\frac{1}{r} f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. 其次由题设知二重积分的积分区域 D 在极坐标系 (r, θ) 中的不等式表示是

$$D = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta} \leq r \leq 1 \right\}$$

这表明 D 在满足 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 的直角坐标系 Oxy 中位于第一象限, 且内外边界分别是 $r \cos \theta + r \sin \theta = 1$ 即 $x + y = 1$ 与 $r = 1$ 即 $x^2 + y^2 = 1$, 从而积分区域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 1 - x \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$, 如图所示.



微信扫码

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}}^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr &= \iint_D f(x, y) \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\sigma \\ &= \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy \end{aligned}$$

应选(B).

259 【答案】 C

【分析】 原积分域应为由 $x^2 + y^2 \leq 2y$ 与 $x \geq 0$ 所确定的右半圆, 故应选(C).

260 【答案】 B

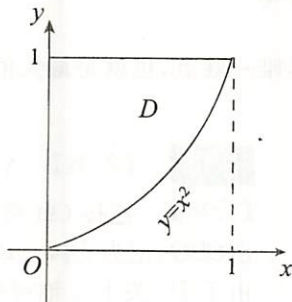
【分析】 方法1 直接计算不方便, 这是二重积分 $\iint_D \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}} d\sigma$ 的累次积分, 其中 $D: 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1$, 如图所示.

现改为先 x 后 y 的积分顺序:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}} dx = \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1+y^3}} \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^{\sqrt{y}} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{1+y^3}} dy = \frac{1}{6} \int_0^1 (1+y^3)^{-\frac{1}{2}} dy^3 \\ &= \frac{1}{6} \cdot 2(1+y^3)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}(\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

选(B).

方法2 用分部积分法简化计算.



$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 \frac{y}{\sqrt{1+y^3}} dy \right) dx^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left(x^2 \int_{x^2}^1 \frac{y}{\sqrt{1+y^3}} dy \right) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 d \left(\int_{x^2}^1 \frac{y}{\sqrt{1+y^3}} dy \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \left(-\frac{x^2 \cdot 2x}{\sqrt{1+x^6}} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^5 dx}{\sqrt{1+x^6}} \\
 &= \frac{1}{6} \int_0^1 (1+x^6)^{-\frac{1}{2}} dx^6 = \frac{1}{6} \cdot 2(1+x^6)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^1 \\
 &= \frac{1}{3}(\sqrt{2}-1).
 \end{aligned}$$

261 【答案】 C

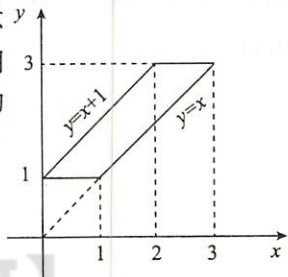
【分析】 对被积函数而言,先积 x 还是先积 y ,繁简程度差别不大.但对积分区域 D ,如右图,若先积 y 后积 x , D 的边界分段表示,要用分块积分法,不方便.选择先积 x 后积 y 的积分顺序则不必分块, D 的表示是:

$$1 \leq y \leq 3, y-1 \leq x \leq y$$

于是

$$\iint_D y d\sigma = \int_1^3 dy \int_{y-1}^y y dx = \int_1^3 y dy = \frac{1}{2} y^2 \Big|_1^3 = 4.$$

选(C).



262 【答案】 B

【分析】 因为 $x^2 + y^2 \leq 2x + 2y \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2$, 从而可引入坐标轴的平移 $x-1=u, y-1=v$ 即 $x=u+1, y=v+1$, 这时区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x + 2y\}$ 变为区域 $D_1 = \{(u, v) \mid u^2 + v^2 \leq 2\}$.

二重积分

$$\begin{aligned}
 \iint_D (x^2 + xy + y^2) d\sigma &= \iint_{D_1} [(u+1)^2 + (u+1)(v+1) + (v+1)^2] dudv \\
 &= \iint_{D_1} [u^2 + uv + v^2 + 3(u+v) + 3] dudv \\
 &= \iint_{D_1} (u^2 + v^2) dudv + \iint_{D_1} [uv + 3(u+v)] dudv + 3 \iint_{D_1} dudv
 \end{aligned}$$

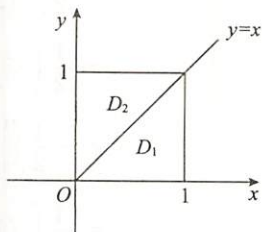
利用 D_1 关于 u 轴或 v 轴的对称性与函数 $uv + 3(u+v)$ 关于 v 或 u 是奇函数的性质可得 $\iint_{D_1} [uv + 3(u+v)] dudv = 0$, 利用二重积分的几何意义可得 $\iint_{D_1} dudv = D_1$ 的面积 $= 2\pi$.

最后,在 D_1 中引入极坐标 $u = r \cos \theta, v = r \sin \theta$, 则 $D_1 = \{(r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \sqrt{2}\}$, 于是 $\iint_{D_1} (u^2 + v^2) dudv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \cdot r dr = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r^3 dr = \frac{\pi}{2} (\sqrt{2})^4 = 2\pi$.

故 $\iint_{D_1} (x^2 + xy + y^2) d\sigma = 2\pi + 6\pi = 8\pi$. 故应选(B).

263 【答案】 D

【分析】 在二重积分 I 中积分区域 D 被直线 $y = x$ 分割成关于 $y = x$ 对称的两个部分区域 $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$, $D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\} = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$ (如图所示), 被积函数 $f(x, y)$ 关于变量 x, y 对称, 即 $f(x, y) = f(y, x)$, 从而



$$\iint_{D_1} \frac{d\sigma}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \iint_{D_2} \frac{d\sigma}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

故

$$I = \iint_D \frac{d\sigma}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 2 \iint_{D_1} \frac{d\sigma}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

设 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 在极坐标系 (r, θ) 中 D_1 可表示成 $\{(r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \theta}\}$, 所以

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} \frac{r dr}{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} \frac{d(1+r^2)}{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \Big|_0^{\frac{1}{\cos \theta}} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{\cos \theta}{\sqrt{1+\cos^2 \theta}}\right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\sin \theta)}{\sqrt{2-\sin^2 \theta}} = \frac{\pi}{2} - 2 \arcsin \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{2} - 2 \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

即应选(D).

【评注】 若区域 D 关于直线 $y = x$ 对称, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(y, x) d\sigma$.

264 【答案】 B

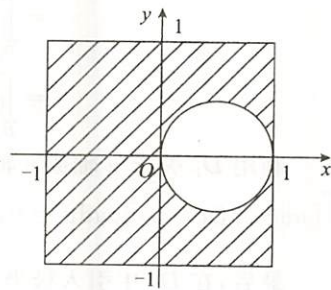
【分析】 因 $D = D_1 - D_2$, 且

$$D_1 = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\},$$

$$\text{于是 } \iint_D |xy| d\sigma = \iint_{D_1} |xy| d\sigma - \iint_{D_2} |xy| d\sigma.$$

由于 $|xy|$ 对于 x 或 y 都是偶函数, D_1 关于 x 轴或 y 轴都对称, 从而 $|xy|$ 在 D_1 上的积分可化简为区域 D_1 在第一象限部分 $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ 上的积分的四倍, 即



$$\begin{aligned} \iint_{D_1} |xy| d\sigma &= 4 \int_0^1 dx \int_0^1 |xy| dy \\ &= 4 \int_0^1 dx \int_0^1 xy dy = 4 \int_0^1 x dx \int_0^1 y dy = 1 \end{aligned}$$

由于 $|xy|$ 对于 y 是偶函数, D_2 关于 x 轴对称, 从而 $|xy|$ 在 D_2 上的积分可化简为区域 D_2 在第一象限部分 $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq x, y \geq 0\}$ 上的积分的两倍, 令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 引入极坐标, 则有

$$\begin{aligned} \iint_{D_2} |xy| d\sigma &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos \theta} r^3 \sin \theta \cos \theta dr = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{\cos \theta} r^3 dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos^5 \theta d\theta \stackrel{t = \cos \theta}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 t^5 dt = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

故 $\iint_D |xy| d\sigma = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$, 应选(B).

265 【答案】 C

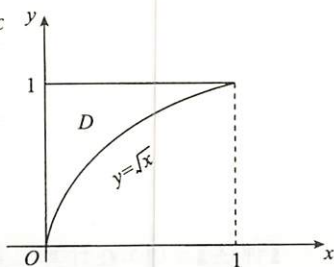
【分析】 积分区域 D 如右图. 由被积函数的特点, 应选择先 x 后 y 的积分顺序, D 表为

$$0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-y^2} dx dy &= \int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^{-y^2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^1 e^{-y^2} 2\sqrt{x} \Big|_{x=0}^{x=y^2} dy = \int_0^1 2ye^{-y^2} dy \\ &= -e^{-y^2} \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

应选(C).

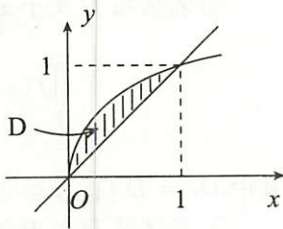


266 【答案】 C

【分析】 由题设知 $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq y\}$, 如图所示. 从而

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\sin \pi y}{y} d\sigma &= \int_0^1 dy \int_{y^2}^y \frac{\sin \pi y}{y} dx = \int_0^1 \frac{\sin \pi y}{y} dy \int_{y^2}^y dx \\ &= \int_0^1 (1-y) \sin \pi y dy = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 (1-y) d(\cos \pi y) \\ &= -\frac{1}{\pi} \left[(1-y) \cos \pi y \Big|_0^1 - \int_0^1 \cos \pi y d(1-y) \right] \\ &= -\frac{1}{\pi} \left[-1 + \int_0^1 \cos \pi y dy \right] = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \cos \pi y dy \\ &= \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi^2} \sin \pi y \Big|_0^1 = \frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

故应选(C).



267 【答案】 C

【分析】 由于积分区域 D 分别关于 x 轴, y 轴对称, 而被积函数 $f(x, y) = \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}$ 分别是自变量 x 与 y 的偶函数. 若记 D_1 是 D 在第一象限的部分, 即

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} \leq 1\} \\ &= \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq (1 - \sqrt{x})^2\} \end{aligned}$$

则

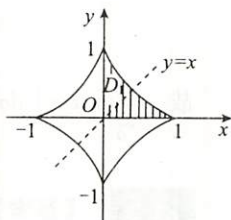
$$\iint_D (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}) d\sigma = 4 \iint_{D_1} (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}) d\sigma = 4 \iint_{D_1} (\sqrt{x} + \sqrt{y}) d\sigma.$$

又因积分区域 D_1 关于直线 $y = x$ 对称, 从而又有

$$\iint_{D_1} \sqrt{x} d\sigma = \iint_{D_1} \sqrt{y} d\sigma$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_D (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}) d\sigma &= 8 \iint_{D_1} \sqrt{x} d\sigma = 8 \int_0^1 dx \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} \sqrt{x} dy \\ &= 8 \int_0^1 \sqrt{x} (1 - \sqrt{x})^2 dx = 8 \int_0^1 \sqrt{x} (1 - 2\sqrt{x} + x) dx \\ &= 8 \int_0^1 (\sqrt{x} - 2x + x^{\frac{3}{2}}) dx = 8 \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - x^2 + \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right) \Big|_0^1 \\ &= 8 \left(\frac{2}{3} - 1 + \frac{2}{5} \right) = 8 \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{15} \end{aligned}$$



【评注】 (1) 在计算二重积分时, 要注意利用被积函数与积分区域的特点来简化计算:

① 若区域 D 关于 y 轴对称, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 0, & f(x, y) \text{ 是 } x \text{ 的奇函数} \\ 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma, & f(x, y) \text{ 是 } x \text{ 的偶函数} \end{cases}$$

其中 $D_1 = D \cap \{x \geq 0\}$.

② 若区域 D 关于 x 轴对称, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 0, & f(x, y) \text{ 是 } y \text{ 的奇函数} \\ 2 \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma, & f(x, y) \text{ 是 } y \text{ 的偶函数} \end{cases}$$

其中 $D_2 = D \cap \{y \geq 0\}$.

③ 若区域 D 关于直线 $y = x$ 对称, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(y, x) d\sigma = \frac{1}{2} \iint_D [f(x, y) + f(y, x)] d\sigma.$$

除此之外, 在计算二重积分时还要注意利用二重积分的几何意义: $\iint_D d\sigma = D$ 的面积.

(2) 我们也可利用三角函数替换来计算本题中的积分. 令 $x = \sin^4 t$, 则

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{x} (1 - \sqrt{x})^2 dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^4 t \cdot 4 \sin^3 t \cos t dt \\ &= \frac{4}{2^5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t \cos^4 t dt = \frac{1}{2^4} \int_0^{\pi} \sin^5 \theta d\theta = \frac{1}{2^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2^3} \times \frac{4 \times 2}{5 \times 3 \times 1} = \frac{1}{15} \end{aligned}$$

268 【答案】 B

【分析】 引入极坐标 (r, θ) 令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 则 $D = \left\{ (r, \theta) \mid \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, 1 \leq r \leq 3 \right\}$, 且 $\arctan \frac{y}{x} = \theta$, 故

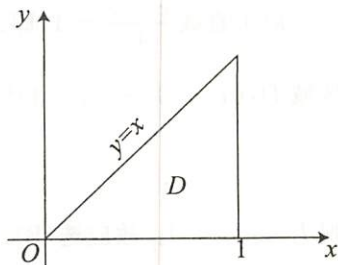
$$\iint_D \arctan \frac{y}{x} d\sigma = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \theta d\theta \int_1^3 r dr = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{36} \right) \times \frac{1}{2} (9 - 1) = \frac{\pi^2}{6}$$

269 【答案】 C

【分析】 直接计算是不方便的, 这是二重积分

 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$ 的累次积分, 其中 $D: 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1$.如图所示, 现改用极坐标变换, D 的极坐标表示

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \theta}$$

于是 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} r \cdot r dr = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 \theta} d\theta$.

方法 1

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 \theta} d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d \sin \theta}{\cos^4 \theta} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d \sin \theta}{(1 - \sin^2 \theta)^2} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dt}{(1 - t^2)^2} \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right)^2 dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[\frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1+t)^2} \right] dt \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{1-t} + \ln \frac{1+t}{1-t} - \frac{1}{1+t} \right] \bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} + \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} \right) \\ &= \frac{1}{4} [2\sqrt{2} + 2\ln(\sqrt{2}+1)]. \end{aligned}$$

方法 2

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 \theta} d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos^3 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \sin \theta d \frac{1}{\cos^2 \theta} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos \theta} d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos \theta} d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d \sin \theta}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{1 - \sin \theta} + \frac{1}{1 + \sin \theta} \right) d \sin \theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} \ln \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2}+1) \end{aligned}$$

因此

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$I = \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{1}{6} \ln(\sqrt{2} + 1)$$

应选(C).

270 【答案】 B

【分析】 同一积分域上二重积分大小的比较,只要比较被积函数的大小,而被积函数为同一函数 $\frac{x+y}{4}$ 的不同方幂,关键是要确定在 D 上 $\frac{x+y}{4}$ 是大于1还是小于1.

由于直线 $\frac{x+y}{4} = 1$ (即 $x+y=4$) 与圆 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ 在点(2,2)处相切,则在区域 $D: (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2$ 上, $\frac{x+y}{4} \leq 1$, 从而有

$$\frac{x+y}{4} \leq \sqrt{\frac{x+y}{4}} \leq \sqrt[3]{\frac{x+y}{4}}$$

则 $I_1 < I_2 < I_3$, 故应选(B).

271 【答案】 C

【分析】 显然在 D 上 $0 < x+y \leq 1$, 则

$$\ln(x+y)^3 \leq 0, 0 < \sin(x+y)^3 < (x+y)^3$$

从而有

$$\iint_D \ln(x+y)^3 dx dy < \iint_D \sin(x+y)^3 dx dy < \iint_D (x+y)^3 dx dy$$

故应选(C).

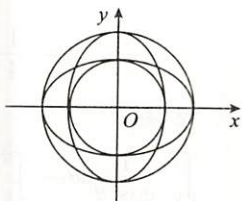
【评注】 本题用到一个常用的不等式,即

$$\sin x < x < \tan x, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

272 【答案】 D

【分析】 $D_1: x^2 + y^2 \leq 1, D_2: x^2 + y^2 \leq (\sqrt{2})^2$ 为圆域,

$D_3: \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} + y^2 \leq 1, D_4: x^2 + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} \leq 1$ 为椭圆域, 它们的关系如图所示.



被积函数 $f(x, y) = 1 - (x^2 + \frac{1}{2}y^2)$ 为连续函数, 在 D_4 上 $f(x, y) \geq$

$0, \neq 0$, 而在 D_4 之外 $f(x, y) \leq 0, \neq 0$.

因 $D_4 \supset D_1 \Rightarrow I_4 > I_1$, D_4 与 D_2 的公共部分是 D_4 , D_2 的其余部分 $f(x, y) \leq 0, \neq 0 \Rightarrow I_4 > I_2$. D_4 与 D_3 的公共部分记为 D^* , D_4 的其余部分 $f(x, y) \geq 0, \neq 0$, 而 D_3 的其余部分 $f(x, y) \leq 0, \neq 0 \Rightarrow I_4 > I_3$.

因此 $\max\{I_1, I_2, I_3, I_4\} = I_4$. 故选(D).

273

【答案】 C

【分析】 由积分中值定理知

$$\iint_{x^2+y^2 \leq r^2} f(x,y) dx dy = \pi r^2 f(\xi, \eta)$$

其中 (ξ, η) 为圆域 $x^2 + y^2 \leq r^2$ 上的一个点, 则

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} f(\xi, \eta) = f(0, 0)$$

$$\text{而 } \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^2}{g(r^2)} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{2r}{2rg'(r^2)} = \frac{1}{a}.$$

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\iint_{x^2+y^2 \leq r^2} f(x,y) dx dy}{g(r^2)} = \frac{\pi}{a} f(0, 0)$$

274

【答案】 C

【分析】 等式 $f(x,y) = xy + \iint_D f(u,v) du dv$ 两端积分得

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_D xy dx dy + \iint_D f(u,v) du dv \cdot \iint_D dx dy$$

$$\iint_D xy dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} xy dy = \frac{1}{12}$$

$$\iint_D dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy = \frac{1}{3}$$

$$\text{则 } \iint_D f(x,y) dx dy = \frac{1}{8}$$

$$f(x,y) = xy + \frac{1}{8}.$$

275

【答案】 C

【分析】 $\int_0^1 dx \int_0^{f(x)} g(t) dt = \int_0^1 \left[\int_0^{f(x)} g(t) dt \right] dx$ (利用分部积分法)

$$= x \int_0^{f(x)} g(t) dt \Big|_0^1 - \int_0^1 xg[f(x)]f'(x) dx$$

$$= 0 - \int_0^1 x^2 f'(x) dx = - \int_0^1 x^2 df(x)$$

$$= -x^2 f(x) \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 xf(x) dx$$

$$= 2 \int_0^1 xf(x) dx = 2022.$$

难吗? 不会做? 可以看
《数学复习全书·基础篇》
高数第九章
二重积分

线性代数

填空题

276 【答案】 -15

【分析】 行列式结构上没有特殊规律,就用展开公式,但要先做0.可按第一行也可按第一列展开:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -15.$$

277 【答案】 -12

【分析】 先将第一行的-3倍加到第四行(或第四列的-2倍加到第一列)再注意公式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} a_1 a_2 \cdots a_n.$$

278 【答案】 -3

【分析】 把每行都加到第一行,有

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ = 3 \cdot (-1)^{\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3} \cdot 1 \cdot (-1)^3 = -3$$

279 【答案】 -120

【分析】 把第一行加到第四行,提出公因数10,再把第四行逐行互换到第一行,由范德蒙行列式,得



微信扫码

$$D = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix} \\ = -10(2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3) \\ = -120.$$

280 【答案】 75

【分析】 按第一列展开

$$D = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 16 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 75$$

或利用拉普拉斯展开式

$$D = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 75$$

【评注】 拉普拉斯展开式的两种特殊情况应当会用

$$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A| |B|$$

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| |B| \quad (\text{这里 } A, B \text{ 分别是 } m \text{ 阶与 } n \text{ 阶方阶})$$

本题直接由一行(列)展开计算也不困难,但要注意,

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} \neq a_1 a_2 a_3 a_4 -$$

$b_1 b_2 b_3 b_4$, 勿犯此类低级错误.

281 【答案】 84

【分析】 除去主对角线,第二、三、四列元素一样是爪型行列式.把第一行的-1倍分别加到其它各行,有

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 84$$

【评注】 做完这6个小题,思考小结一下数字型行列式如何计算?

直接展开,做0后再展开;把每行都加到第一行;把第一行-1倍加其它各行;逐行相加;...
 用过哪些公式: ∇ ; ∇ ; 拉普拉斯;范德蒙;...

282 【答案】 108

【分析】 因为

$$A + 2B = [\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4] + [2\beta, 2\gamma_2, 2\gamma_3, 2\gamma_4] = [\alpha + 2\beta, 3\gamma_2, 3\gamma_3, 3\gamma_4]$$

$$\begin{aligned} \text{故有 } |A + 2B| &= |\alpha + 2\beta, 3\gamma_2, 3\gamma_3, 3\gamma_4| = 27 |\alpha + 2\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4| \\ &= 27(|\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4| + 2|\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4|) \\ &= 27(|A| + 2|B|) = 108 \end{aligned}$$

【评注】 矩阵行列式在考研中多次出现,当 A, B 均为 n 阶矩阵时,有 $|AB| = |A| \cdot |B|$, 但 $|A+B| \neq |A| + |B|$, 而 $|\alpha + \beta, \gamma, \delta| = |\alpha, \gamma, \delta| + |\beta, \gamma, \delta|$ 两者不要混淆.

又若三阶矩阵 $A = [\alpha, \beta, \gamma]$ 则 $kA = [k\alpha, k\beta, k\gamma]$ 那么 $|kA| = k^3 |A|$, 而 $|k\alpha, \beta, \gamma| = k |A|$ 两者也不要混淆.

283 【答案】 $(-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{3}$

【分析】 由 $|kA| = k^n |A|$, $|AB| = |A| \cdot |B|$, $|A^T| = |A|$, $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ 有

$$\begin{aligned} |-A^T B^{-1}| &= (-1)^n |A^T B^{-1}| = (-1)^n |A^T| \cdot |B^{-1}| \\ &= (-1)^n |A| \cdot \frac{1}{|B|} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{3} \end{aligned}$$

284 【答案】 4

【分析】 因 $A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = B$, 于是 $A^* B = A^* A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, 故 $|A^* B| = 4$.

285 【答案】 132

【分析】 因 $|A| = \prod \lambda_i$, 现应求出矩阵 B 的特征值.

由 $A\alpha = \lambda\alpha$ 有 $A^2\alpha = \lambda^2\alpha$, 故 $B\alpha = (A^2 + 2A + 3E)\alpha = (\lambda^2 + 2\lambda + 3)\alpha$.

因 A 的特征值是 $1, 2, -1$, 故 B 的特征值为

$$1^2 + 2 + 3, 2^2 + 2 \times 2 + 3, (-1)^2 - 2 + 3$$

所以 $|B| = 6 \times 11 \times 2 = 132$.

286 【答案】 8

【分析】 由 $A \sim B$ 有 $A + kE \sim B + kE$, 进而 $|A + kE| = |B + kE|$, 故

$$|A + 2E| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 8$$

【评注】 这几个抽象行列式的题在提醒大家哪些构思?

287

【答案】

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & -18 \\ 14 & 24 & 0 \end{bmatrix}$$

【分析】

$$AA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 4 & 10 & -6 \\ 7 & 16 & -9 \end{bmatrix}$$

$$AA = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ -7 & -8 & -9 \end{bmatrix}$$

$$AA - \Lambda A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & -18 \\ 14 & 24 & 0 \end{bmatrix}$$

【评注】 由本题可引深到:

设 $A = [a_{ij}]$ 是 n 阶矩阵, $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$ 则, $\Lambda A = [\lambda_j a_{ij}]$, $A\Lambda = [\lambda_i a_{ij}]$.

288

【答案】

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 24 & 0 & 0 \\ -16 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

【分析】 因为 $A = \alpha\beta^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} [2, 0, 0] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

又因 $\beta^T \alpha = [2, 0, 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 2$, 所以

$$A^3 = (\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T) = \alpha(\beta^T \alpha)(\beta^T \alpha)\beta^T = 4\alpha\beta^T = 4A$$

【评注】 矩阵的运算要正确熟练. 注意, 若 $\alpha = (a_1, a_2, a_3)^T$, $\beta = (b_1, b_2, b_3)^T$, 则

$$A = \alpha\beta^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} [b_1, b_2, b_3] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix}$$

$$B = \beta^T \alpha = [b_1, b_2, b_3] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

前者 $\alpha\beta^T$ 是秩为 1 的三阶矩阵, 而 $\beta^T \alpha$ 是一个数.

当秩 $r(A) = 1$ 时, $A^2 = lA$, 其中 $l = \beta^T \alpha = \alpha^T \beta = \sum a_{ii}$, 进而 $A^m = l^{m-1}A$.

289

【答案】 $-3^9 A$

【分析】 由 $r(A) = 1$, 有 $A^2 = lA$, 其中 $l = \sum a_{ii}$, 则 $A^n = l^{n-1}A$.

现 $l = 2 + (-2) + (-3) = -3$, 所以 $A^{10} = -3^9 A$.

290

【答案】

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^4 & -2^4 \\ 0 & 0 & -2^4 & 2^4 \end{bmatrix}$$

【分析】 $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} A^n & O \\ O & B^n \end{bmatrix}$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 是两行互换的初等矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{2n} = E, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{2n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) 如 $r(A) = 1$, 则 $A^n = l^{n-1}A, l = \sum a_{ii}$.

291 【答案】 E

【分析】 因为矩阵 P 可逆, 由 $PA = BP$ 得 $A = P^{-1}BP$, 那么

$$A^2 = (P^{-1}BP)(P^{-1}BP) = P^{-1}B^2P$$

归纳地

$$A^{100} = P^{-1}B^{100}P = P^{-1}EP = E$$

注意 $\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_1^n & & \\ & a_2^n & \\ & & a_3^n \end{bmatrix}$.

292 【答案】

$$\begin{bmatrix} 20 & -10 & 0 \\ -15 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

【分析】 按定义, 求出行列式 $|A|$ 的代数余子式, 有

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 20, A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -15, A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \dots$$

所以 $A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -10 & 0 \\ -15 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

或者, 由 $A^* = |A|A^{-1}$, 现在 $|A| = -10, A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

而得 $A^* = -10 \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -10 & 0 \\ -15 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

【评注】 用定义法求伴随矩阵时, 要防止两种错误: 求代数余子式不要丢掉正负号 $(-1)^{i+j}$; 组装伴随矩阵时不要排错位置.

本题 $A^{-1}, |A|$ 均好计算, 所以用 $A^* = |A|A^{-1}$ 求 A^* 是较方便的.

求伴随矩阵的这两种方法都要掌握.

293 【答案】

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

【分析】 因为 $AA^* = |A|E$, 故 $A = |A|(A^*)^{-1}$, 由已知得 $|A^*| = -8$, 又 $|A^*| = |A|^3$, 得 $|A| = -2$.

$$\text{又 } (A^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{所以 } A = |A|(A^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

【评注】 由 A 可求 A^* , 由 A^* 也应会求 A . 本题求 $(A^*)^{-1}$ 时, 既可用初等行变换也可用分块矩阵求逆公式.

294

【答案】

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

【分析】 由 $AA^* = |A|E$, 有

$$(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A = |A^{-1}|A$$

因为 $(A^{-1})^{-1} = A$, 求出 A^{-1} 的逆矩阵就是求出矩阵 A .

$$\begin{aligned} (A^{-1} | E) &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right] \\ &= (E | A) \text{ 可知 } A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

又因 $|A^{-1}| = 2$. 故

$$(A^*)^{-1} = |A^{-1}|A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

295

【答案】

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

【分析】 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}, (ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}.$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}A\right)^{-1} &= 3A^{-1} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

记住初等矩阵逆矩阵的3个公式,以及左乘行变换右乘列变换的法则.

296 【答案】 $E - A$

【分析】 由 $A^3 + 3A^2 + 3A + E = A^3 - 6A^2 + 12A - 8E$
 $\Rightarrow A^2 - A = -E$
 $\Rightarrow A(E - A) = E$

297

【答案】

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

【分析】 由 $AB = A + B$ 有 $AB - A - B + E = E$.
 即 $A(B - E) - (B - E) = E$, 即 $(A - E)(B - E) = E$,

$$\therefore (A - E)^{-1} = B - E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

298

【答案】

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 13 \\ 1 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

【分析】 利用分块矩阵,有

$$A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

其中 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 可逆. 上式两边右乘 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^{-1}$.

$$\begin{aligned} \text{那么 } A &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 13 \\ 1 & -3 & -6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

【评注】 当 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 0, [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 不可逆时,你能求出 A 来吗?

299

【答案】

$$\begin{bmatrix} 2-t & 3-u \\ t & u \end{bmatrix}, t, u \text{ 为任意实数}$$

【分析】 由于矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ 不可逆, 故可设 $A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$, 于是

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{得方程组} \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 = 4 \\ y_1 + y_2 = 3 \\ 2y_1 + 2y_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - t \\ x_2 = t \\ y_1 = 3 - u \\ y_2 = u \end{cases}$$

所以 $A = \begin{bmatrix} 2-t & 3-u \\ t & u \end{bmatrix}$, t, u 是任意常数.

【评注】 由于方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} y_1 + y_2 = 3 \\ 2y_1 + 2y_2 = 6 \end{cases}$ 的系数矩阵完全一样, 区别仅在常数项, 所以解这一类方程组可以合并在一起加减消元. 即

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\text{由} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{可得} \begin{cases} x_1 = 2 - t \\ x_2 = t \end{cases} \quad \text{由} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{可得} \begin{cases} y_1 = 3 - u \\ y_2 = u \end{cases}$$

请你用这种方法判断矩阵方程

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a+2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ a+3 & a+6 & a+4 \end{bmatrix}$$

无解的条件. (答案 $a = -1$)

300

【答案】

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

【分析】 因 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, 矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ 可逆, 记其为 B , 记 $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

对已知条件 $AB = C$, 右乘 B^{-1} 有

$$\begin{aligned} A = CB^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{有同学得 } A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -2 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} ?$$

301

【答案】

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

【分析】 由 $BA = A + 2B$ 有 $B(A - 2E) = A$,

因 $A - 2E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 可逆,故

$$B = A(A - 2E)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

注意 $A - 2E$ 是初等矩阵.

302

【答案】

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

【分析】 化简矩阵方程,矩阵方程两边左乘 A^{-1} 、右乘 A 有

$$2B = BA + 6E$$

于是 $B(2E - A) = 6E$

$$\text{所以 } B = 6(2E - A)^{-1} = 6 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= 6 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

【评注】 二阶矩阵的伴随矩阵有规律:主对角线对调,副对角线变号,即

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

因此二阶矩阵求逆用 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$ 是简捷的.

对于分块矩阵,要会用两个公式

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}.$$

另外 $kA = [ka_{ij}]$ 不要出错. 不要与行列式性质混淆.

这4个求矩阵 A 和 B 的题目是不是有两种思路:

(1) 求逆矩阵和矩阵运算得到矩阵 A ; (2) 解方程组,用方程组的解构造矩阵 A .

303

【答案】 $a \neq 3$

【分析】 经初等变换矩阵秩不变

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 4 \\ 0 & 1 & a-2 & 4-a \\ 0 & 0 & (a+1)(3-a) & a(a-3) \end{bmatrix}$$

$r(A) = 3 \Leftrightarrow (a+1)(3-a)$ 与 $a(a-3)$ 不全为 0 $\Leftrightarrow a \neq 3$.

304 【答案】 2

【分析】 由 $AB + 2A = A(B + 2E)$, 而

$$B + 2E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

是可逆矩阵, 故 $r(AB + 2A) = r(A(B + 2E)) = r(A)$

经初等变换矩阵的秩不变, 易见

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $r(AB + 2A) = 2$.

305 【答案】 2

【分析】 因 $r(A) = A$ 的列秩.

由 α_1, α_2 坐标不成比例知 α_1, α_2 线性无关, 于是 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \geq 2$, 又三维向量 α_4 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 必有 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 有 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) < 3$.

从而有 $r(A) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$.

306 【答案】 2

【分析】 $r(A^T) = r(A)$, 又齐次方程组 $Ax = 0$ 的基础解系中, 解向量的个数为 $n - r(A)$. 因 $n - r(A) = 4 - r(A) = 2$ 知 $r(A) = 2$, 故 $r(A^T) = 2$.

307 【答案】 4

【分析】 由 $A \sim B$ 有 $A + kE \sim B + kE$, 进而 $r(A + kE) = r(B + kE)$.

$$\text{于是 } A - E \sim B - E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, A + E \sim B + E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

从而 $r(A - E) + r(A + E) = r(B - E) + r(B + E) = 2 + 2 = 4$.

【评注】 建议你把这 5 个与矩阵秩相关的小题目串联思考一下

308 【答案】 -3

【分析】 $A_{3 \times 3} \cong B_{3 \times 3} \Leftrightarrow r(A) = r(B)$

$$\text{其中 } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, r(B) = 2$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & a+3 \end{bmatrix}, r(A) = 2 \Leftrightarrow a = -3.$$

故 $A \cong B \Leftrightarrow a = -3$.

309 【答案】 3 或 4

【分析】 矩阵 A 和 B 等价 $\Leftrightarrow r(A) = r(B)$. 由

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{vmatrix} = -(a+1)(a-3)$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (a+1)(4-a)$$

当 $a = 3$ 时, $r(A) = 2, r(B) = 3$, 当 $a = 4$ 时, $r(A) = 3, r(B) = 2$, 所以 $a = 3$ 或 $a = 4$ 时, 矩阵 A 和 B 不等价.

310 【答案】 5

【分析】 n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = 0$.

$$|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & -7 & t-6 \end{vmatrix} = -7(t-5)$$

$\therefore t = 5$.

311 【答案】 $(-\infty, +\infty)$

【分析】 由于本题向量的个数与维数不一样, 不能用行列式去分析, 而要用齐次方程组只有零解, 或矩阵的秩等于 n 来进行分析.

$$A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & t & 5 \\ 1 & 0 & t \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & t+2 & 5 \\ 0 & -2 & t \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3-t \\ 0 & 0 & t+2 \end{bmatrix}$$

由于 $\forall t$, 恒有 $r(A) = 3$, 所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 必线性无关.

【评注】 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s \Leftrightarrow$ 方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_s\alpha_s = 0$ 只有零解.

n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| \neq 0$.

312 【答案】 -1 或 -2

【分析】 n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = 0$.

$$|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} a+1 & a & a-1 \\ 1 & -2 & -3 \\ a & 2-a & 4-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a+2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \\ a & 2-a & 4-a \end{vmatrix} = -2(a+1)(a+2)$$

本题把每行都加到第 1 行略简便.

313 【答案】 -1

【分析】 因为 $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + a\alpha_2, 3\alpha_2 + \alpha_3$ 线性相关, 故有不全为 0 的 x_1, x_2, x_3 使

$$x_1(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3) + x_2(\alpha_1 + a\alpha_2) + x_3(3\alpha_2 + \alpha_3) = 0$$

即 $(x_1 + x_2)\alpha_1 + (2x_1 + ax_2 + 3x_3)\alpha_2 + (x_1 + x_3)\alpha_3 = 0$ 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 故必有

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + ax_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

因为 x_1, x_2, x_3 不全为 0, 所以上述齐次方程组有非零解. 系数行列式必为 0, 于是

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & a & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & a-2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a+1 = 0$$

从而 $a = -1$.【评注】 若看清行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & a & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 的书写规律, 这一类填空题就很容易计算了.另外 $[\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + a\alpha_2, 3\alpha_2 + \alpha_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & a & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$, 下

面如何处理?

314 【答案】 $a \neq \frac{1}{9}$

【分析】 由于

$$[\alpha_1 - 3\alpha_3, a\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

那么 $\alpha_1 - 3\alpha_3, a\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3$ 线性无关 $\Leftrightarrow$

$$r[\alpha_1 - 3\alpha_3, a\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3] = 3$$

因 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$.所以 $r[\alpha_1 - 3\alpha_3, a\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3] = 3$

$$\Leftrightarrow \text{矩阵} \begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{可逆} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 9a \neq 0.$$

315 【答案】 3

【分析】 设 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$, 由题意 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示且表示法不唯一 $\Leftrightarrow$ 方程组 $Ax = \beta$ 有 ∞ 解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) < 3$

$$\bar{A} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 | \beta] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 3 \\ 1 & a & -2 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a^2 - 2a - 3 & a - 3 \end{array} \right]$$

可见 $r(A) = r(\bar{A}) < 3 \Leftrightarrow a = 3$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

316 【答案】 $a \neq 0$

【分析】 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示 $\Leftrightarrow$ 方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$ 无解.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 1 & a \\ 2 & 4 & 6 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -14 & a-21 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

317 【答案】 $a \neq 1$

【分析】 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可表示任一个三维向量

$\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)^T, \varepsilon_2 = (0, 1, 0)^T, \varepsilon_3 = (0, 0, 1)^T$ 等价

$\Leftrightarrow$ 秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$

$\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| \neq 0$

$$\text{由 } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & a \end{vmatrix} = 1 - a \neq 0, \text{ 所以 } a \neq 1.$$

【评注】 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 可以表示任一个 n 维向量, 那么 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 可以表示

$$\varepsilon_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)^T, \varepsilon_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)^T, \dots, \varepsilon_n = (0, 0, 0, \dots, 1)^T$$

显然, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 亦可表示 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. 于是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 可互相线性表出. 从而它们有相同的秩. 故

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = r(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = n$$

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关.

反之, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 则因 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ 是 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关.

从而 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出.

即 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 可表示任一个 n 维向量.

318 【答案】 $-\frac{1}{2}$

【分析】 秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$ 说明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

$$\text{由 } |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} a & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a+1 & 2a+1 & 2a+1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & a \end{vmatrix} \\ = -(2a+1)(a-1)^2 = 0$$

如 $a = 1$ 时, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, 秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$ 不合题意

$\therefore a = -\frac{1}{2}$ 时 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 秩为 2.

或者, 经初等变换向量组的秩不变, 有

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} a & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1-a^2 & a-a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a \end{bmatrix}$$

如 $a = 1$, 秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$.

下设 $a \neq 1$, 有

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1+a & a \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2a+1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

319 【答案】 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$

【分析】 对 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5]$ 作初等行变换, 有

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 8 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 8 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第一, 二, 五列三阶子式不为 0, 故极大无关组可以是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$.

320 【答案】 1 或 -3

【分析】 α_1, α_2 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的极大线性无关组, 意味着秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$ 且 α_3 可由 α_1, α_2 线性表示.

因 α_1, α_2 坐标不成比例, $\forall a, \alpha_1, \alpha_2$ 必线性无关, 下面只需检查 a 为何值时 α_3 可由 α_1, α_2 线性表示.

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a+1 \\ 4 & a & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & a+1 \\ 0 & 7 & 3a+2 \\ 0 & 0 & a^2+2a-3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore a = -3 \text{ 或 } a = 1.$$

321 【答案】 $(-1, -1, 1, 0)^T, (1, -1, 0, 1)^T$

【分析】 对系数矩阵加减消元, 有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$n - r(A) = 4 - 2 = 2$$

令 $x_3 = 1, x_4 = 0$ 得 $x_2 = -1, x_1 = -1$.

令 $x_3 = 0, x_4 = 1$ 得 $x_2 = -1, x_1 = 1$.

所以基础解系为 $(-1, -1, 1, 0)^T, (1, -1, 0, 1)^T$.

322 【答案】 $(0, 2, 1, 0)^T$

【分析】 对系数矩阵作初等行变换, 化为行最简, 有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -7 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由 $r(A) = 3, n - r(A) = 4 - 3 = 1$, 基础解系由 1 个解向量构成, x_3 为自由变量, 令 $x_3 = 1$, 解

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

出 $(0, 2, 1, 0)^T$ 为基础解系.

323 【答案】 -5 或 -6

【分析】 齐次方程组 $Ax = 0$ 有无穷多解的充分必要条件是 $r(A) < n$ (n 是未知量的个数). 现在是三个未知数三个方程的齐次方程组, 故可以用系数行列式 $|A| = 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -3 & 3 \\ 1 & a+2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ 1 & a+5 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ = (a+5) \begin{vmatrix} a & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (a+5)(-a-6) = 0$$

故 $a = -5$ 或 $a = -6$.

【评注】 对 n 个未知数 n 个方程的齐次线性方程组作是否有非零解的判定时, 既可以用秩也可以用行列式. 如果方程个数与未知数个数不相等, 那么一定用秩.

324 【答案】 $a = 1$

【分析】 $Ax = b$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) < n$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a-3 \\ 1 & a & 1 & -2 \\ 1 & 1 & a & -2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a-3 \\ 1-a & a-1 & 0 & 1-a \\ 1-a & 0 & a-1 & 1-a \end{array} \right]$$

如 $a = 1, r(A) = r(\bar{A}) = 1 < 3$, 方程组有无穷多解,

如 $a \neq 1$

$$\bar{A} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a-3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} a+2 & 0 & 0 & a-1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

此时方程组可能唯一解, 可能无解, 不存在无穷多解.

从而仅 $a = 1$, 方程组有无穷多解.

或者 $|A| = (a+2)(a-1)^2$, 方程组有无穷多解的必要条件 $|A| = 0$.

然后按 $a = 1, a = -2$ 分别讨论 $Ax = b$ 解的情况亦可.

325 【答案】 4

【分析】 基础考题, 由特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ -2 & \lambda-2 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ -2 & \lambda-2 & 2 \\ 0 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -2 & \lambda-4 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-4)$$

326 【答案】 $5, 0, 0$

【分析】

$$A = \alpha \alpha^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} [1, 0, 2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

是秩为 1 的矩阵, 其特征值为 $\sum a_{ii}, 0, 0$ 即 $5, 0, 0$.

【注意】 $\alpha^T \alpha = [1, 0, 2] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 + 0 + 4 = \sum a_{ii}$.

327

【答案】 -5

【分析】 设 α 是矩阵 A^{-1} 属于特征值 λ_0 的特征向量, 按定义有 $A^{-1}\alpha = \lambda_0\alpha$, 于是 $\alpha = \lambda_0 A\alpha$. 即

$$\begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_0 \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & a & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_0(-a+2+2) = a & (1) \\ \lambda_0(2a+a-2) = 1 & (2) \\ \lambda_0(2a-2-1) = 1 & (3) \end{cases}$$

即

由(2)或(3)知 $\lambda_0 \neq 0$, (2)-(3) 易见 $a = -1$, 那么 $\lambda_0 = -\frac{1}{5}$. 因为 A 和 A^{-1} 的同一个特征向量对应的特征值互为倒数, 故 α 是矩阵 A 中 $\lambda = -5$ 所对应的特征向量.

【评注】 若已知 A 的特征向量, 通常可用定义法, 由 $A\alpha = \lambda\alpha$ 建立方程组来求参数. 本题不要去求 A^{-1} , 而要通过转换.

328

【答案】 $k(0, 2, 1)^T, k \neq 0$

【分析】 由特征多项式

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & -2 \\ 0 & \lambda+1 & -4 \\ 1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 2\lambda-2 \\ 1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & 0 \\ -2 & \lambda+1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda+5) \end{aligned}$$

对 $\lambda = 1$, 由 $(E - A)x = 0$

$$E - A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得基础解系 $\alpha = (0, 2, 1)^T$.

所有特征向量为: $k(0, 2, 1)^T, k \neq 0$.

329

【答案】 $k(1, 1, 1)^T, k \neq 0$.

【分析】 矩阵 A 各行元素之和均为 5, 即

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + a_{13} = 5 \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} = 5 \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} = 5 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{即} \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

330 【答案】 $k(0, 1, 1)^T$ (k 是非零的任意常数)

【分析】 因为 A 是实对称矩阵, 不同特征值的特征向量相互正交, 设 $\lambda = -2$ 的特征向量是 $\alpha_3 = (x_1, x_2, x_3)^T$, 那么

$$\begin{cases} \alpha_1^T \alpha_2 = 4 - 2 - 2a = 0 \\ \alpha_3^T \alpha_1 = x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ \alpha_3^T \alpha_2 = 4x_1 - x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$$

可先求出 $a = 1$, 再由

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

得到基础解系 $(0, 1, 1)^T$, 所以 $\alpha_3 = (0, k, k)^T, k \neq 0$.

331 【答案】 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, k_1, k_2$ 不全为 0

【分析】 因 $P^{-1}AP = \Lambda$, 知 Λ 是 A 的特征值, 故 A 的特征值为 $1, 1, -1$.

当 $P^{-1}AP = \Lambda$ 时, $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 是 A 的相应的特征向量, 从而 $\lambda = 1$ 的特征向量为 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, k_1, k_2$ 不全为 0.

332 【答案】 2

【分析】 由相似的性质: $\sum a_{ii} = \sum b_{ii}$ 及 $|A| = |B|$, 有

$$\begin{cases} 3 + a + 3 = 3 + 4 + (-1) \\ 3(3a - 2b) = -12 \end{cases}$$

可解出 $b = 2$.

333 【答案】 -2

【分析】 因为 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & -a \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 3)^2$

所以矩阵 A 的特征值为 $2, 3, 3$. 因为矩阵 A 的特征值有二重根, 所以

$A \sim \Lambda \Leftrightarrow \lambda = 3$ 有两个线性无关的特征向量

$\Leftrightarrow (3E - A)x = 0$ 有两个线性无关的解

$\Leftrightarrow r(3E - A) = 1$.

那么 $3E - A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -a-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 可见 $a = -2$.

【评注】 A 是上三角阵,可直接得出其对角元素即是其特征值.

334

【答案】

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

【分析】 据已知条件,有

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{记 } P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三维线性无关的列向量知 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| \neq 0$, 故 P 是可逆矩阵, 于是由

$$AP = PB \Rightarrow P^{-1}AP = B$$

$$\text{故和矩阵 } A \text{ 相似的矩阵是 } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

【评注】 希望你还能求出矩阵 A 的特征值和特征向量.

提示: 特征值为 $2, -1, -1$, 相应的特征向量: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3; \alpha_2 - \alpha_1, \alpha_3 - \alpha_1$.

335

【答案】

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

【分析】 因为实对称矩阵特征值不同特征向量相互正交.

设 $\alpha_3 = (x_1, x_2, x_3)^T$ 是矩阵 A 属于 $\lambda = 6$ 的特征向量, 则

$$\begin{cases} \alpha_3^T \alpha_1 = x_1 - x_3 = 0 \\ \alpha_3^T \alpha_2 = x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_3 = (1, -1, 1)^T$$

由于 $\lambda = 3$ 的特征向量 α_1, α_2 不正交, 故需正交化处理

$$\text{令 } \beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

再单位化得

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

那么 $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ 为所求.

336 【答案】 $x_1^2 + 3x_2^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$

【分析】 二次型矩阵是唯一的, a_{ii} 是平方项 x_i^2 的系数, a_{ij} 是混合项 $x_i x_j$ 的系数的一半.

故 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = x_1^2 + 3x_2^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$

注意: $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1x_2,$

$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1x_2,$

矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ 都不是对称矩阵, 虽都能表示二次型 $x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1x_2$, 但都不是二次型的矩阵.

二次型 $x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1x_2$ 的矩阵是 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

337 【答案】 0 或 5

【分析】 二次型矩阵

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$

二次型的秩为 2, 即矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩 $r(\mathbf{A}) = 2$.

由 $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a^2 - 10a$, 且 $\mathbf{A}$ 中有二阶子式 $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

$\therefore a = 0$ 或 $a = 5$ 时, 二次型的秩为 2.

338 【答案】 $\left(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 1\right)^T$

【分析】 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是空间的基, 而 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$, 则称向量 β 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的坐标是 $(x_1, x_2, x_3)^T$.

对于方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -2 \\ 4x_1 + x_2 + 9x_3 = 4 \end{cases}$$

可解出 $x_1 = -\frac{5}{3}, x_2 = \frac{5}{3}, x_3 = 1$, 因此 β 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的坐标是 $\left(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 1\right)^T$.

【评注】 本题的方程组用克拉默法则与范德蒙行列式较简捷.

339

【答案】

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

【分析】 按过渡矩阵定义

$$[\beta_1, \beta_2, \beta_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]C.$$

可见矩阵 C 的第 1 列就是 β_1 在基底 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的坐标, 由于已知 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 所以矩阵 C 的第 1 列应当是 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 其余类同.【评注】 设 n 维向量空间给定两组基

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{ 与 } \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n,$$

若

$$\begin{cases} \beta_1 = c_{11}\alpha_1 + c_{21}\alpha_2 + \dots + c_{n1}\alpha_n, \\ \beta_2 = c_{12}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2 + \dots + c_{n2}\alpha_n, \\ \dots \dots \dots \dots \\ \beta_n = c_{1n}\alpha_1 + c_{2n}\alpha_2 + \dots + c_{nn}\alpha_n, \end{cases}$$

$$\text{即 } [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n] = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]C,$$

则矩阵 C 是由基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的过渡矩阵.

$$\text{若 } \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \beta_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

则因 $\beta_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = 2\alpha_1 - \alpha_2$ 而知由基 α_1, α_2 到基 β_1, β_2 的过渡矩阵

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

或者由 $[\beta_1, \beta_2] = [\alpha_1, \alpha_2]C$ 知

$$C = [\alpha_1, \alpha_2]^{-1}[\beta_1, \beta_2] = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

要会用这两种求过渡矩阵的方法.

340

【答案】 $a > \frac{5}{2}$ 【分析】 二次型 f 的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} a & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$, 因为 f 正定 $\Leftrightarrow A$ 的顺序主子式全大于零, 即

$$\Delta_1 = a > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4a - 9 > 0,$$

$$\Delta_3 = |A| = 4a^2 - 10a > 0,$$

$$\text{故 } f \text{ 正定} \Leftrightarrow a > \frac{5}{2}.$$

【评注】 二次型 $x^T A x$ 正定 $\Leftrightarrow \forall x \neq 0$, 恒有 $x^T A x > 0 \Leftrightarrow A$ 的特征值全大于 0 $\Leftrightarrow$ 二次型的正惯性指数 $p = n \Leftrightarrow A$ 与 E 合同, 即有可逆矩阵 C 使 $A = C^T C \Leftrightarrow A$ 的顺序主子式全大于 0.二次型 $x^T A x$ 正定的必要条件: $a_{ii} > 0$ 与 $|A| > 0$.

选 择 题

341 【答案】 B

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } |B| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ 2a_{11}+a_{12} & 2a_{21}+a_{22} & 2a_{31}+a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & 2a_{11}+a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & 2a_{21}+a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & 2a_{31}+a_{32} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

342 【答案】 D

【分析】 直接按第一列展开

$$D = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 24 - 24 = 0$$

343 【答案】 D

【分析】 $|B| = (-1)^{\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3} 4! = 24$

$$|C| = 4(-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 24$$

$$|D| = 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -24$$

344 【答案】 C

【分析】 因 $(\alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 故

$$|B| = |A| \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6|A| = 12$$

或者, 用行列式性质

$$\begin{aligned} |B| &= |\alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_2| = 3|\alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2| \\ &= 3|\alpha_3, 2\alpha_1, \alpha_2| = 6|\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2| \\ &= 6|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 6|A| = 12 \end{aligned}$$

345 【答案】 C

【分析】 本题考查行列式的性质,分别对每个行列式作适当的列变换,向 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3|$ 靠拢.

$$(A) |\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1| = |0, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1| = 0.$$

$$\begin{aligned} (B) |\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1| &= |2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1| \\ &= 2 |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1| \\ &= 2 |\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1| \\ &= 2 |\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3| = 2 |A|. \end{aligned}$$

$$(C) |\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2| = |\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2| = |\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1| = |A|.$$

$$(D) |\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2| = |\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2| = |\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2| = -|A|.$$

请说出每个等号成立的理由,作的什么变换,用的什么性质?

$$\text{或对(C) 如上题有 } (\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{则 } |C| = |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = |A| \cdot 1 = |A|$$

故应选(C).

346 【答案】 C

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } |\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1 + 2\beta_2| &= |\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1| + |\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, 2\beta_2| \\ &= -|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1| + 2|\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_2| \\ &= -a - 2|\alpha_3, \alpha_2, \beta_2, \alpha_1| \\ &= -a + 2|\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3| \\ &= -a + 2b \end{aligned}$$

347 【答案】 A

【分析】 由 $AA^* = |A|E$, 有 $|AA^*| = ||A|E|$, 即

$$|A| \cdot |A^*| = |A|^n |E|$$

即 A 可逆有 $|A| \neq 0$, 故 $|A^*| = |A|^{n-1}$.

348 【答案】 B

【分析】 由 $|kA| = k^n |A|$, $|A^*| = |A|^{n-1}$.

$$\left| \frac{1}{3}A^* \right| = \left(\frac{1}{3} \right)^3 |A^*| = \frac{1}{27} (|A|)^2 = \frac{4}{27}.$$

349 【答案】 B

【分析】 因 $(A-E)^{-1} = A^2 + A + E$. 有

$$(A-E)(A^2 + A + E) = E, \text{ 即 } A^3 = 2E$$

那么 $|A|^3 = |A^3| = |2E| = 2^3 |E| = 2^3$,

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

故 $|A| = 2$.

350 【答案】 A

【分析】 简单的矩阵 J 在右边,故可对 A 按列分块. 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则

$$AJ = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}).$$

故应选(A).

【评注】 希望你再计算 JA , 看看是什么情况?

351 【答案】 B

【分析】 设 $\alpha = (a_1, a_2, a_3)^T, \beta = (b_1, b_2, b_3)^T$,

$$\alpha^T \beta = (a_1 \ a_2 \ a_3) \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

$$\beta^T \alpha = (b_1 \ b_2 \ b_3) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

所以(B)正确.

注意: $A = \alpha\beta^T, B = \beta\alpha^T$ 都是 n 阶矩阵, $A^T = B$, 故(A)不正确. (C) 中一个是矩阵, 一个是数不可能相等. (D) 中其实是 $k\alpha^T$ 与 $k\beta^T$ 也不相同.

352 【答案】 C

【分析】 利用行列式代数余子式的定理有 $AA^* = A^*A = |A|E$, 按矩阵乘法定义, 有

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 b_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}$$

因为矩阵乘法有结合律: $A^m A^t = A^{m+t} = A^t \cdot A^m$. 又

$$(A+E)(A-E) = A^2 - E = (A-E)(A+E)$$

请你举例说明 AA^T 与 $A^T A, AA_1$ 与 $A_1 A$ 可以不相等.

353 【答案】 C

【分析】 由 $AA^* = |A|E$, 有 $(kA)(kA)^* = |kA|E$, 于是

$$(kA)^* = |kA| (kA)^{-1} = k^n |A| \cdot \frac{1}{k} A^{-1} = k^{n-1} A^*$$

所以 $(2A)^* = 2^{n-1}A^*$.

注意, $(AB)^T = B^T A^T$ 知(B) 正确.

$(AB)^* = B^* A^*$ 知(D) 正确.

$(kA)^T = kA^T$ 与 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ 不要混.

354 【答案】 D

【分析】 由 $r(A^T A) = r(A)$, 因 $A^T A = O$, 有 $r(A) = r(A^T A) = 0$, 故必有 $A = O$. 即(D) 正确.

若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 有 $A^2 = E$. 但 $A \neq E$ 且 $A \neq -E$,

若 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 有 $A^2 = O$, 但 $A \neq O$,

若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 有 $A^2 = A$ 且 $A \neq O$, 但 $A \neq E$.

355 【答案】 C

【分析】 由行列式乘法公式 $|AB| = |A||B|$.

当 $AB = O$ 时, 有 $|A||B| = 0$ 所以 $|A|$ 和 $|B|$ 至少有一个为 0, 即(C) 正确.

令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = O$,

可知(A)(B) 均不正确.

令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B$.

但 $A \neq E$, 知(D) 不正确.

356 【答案】 A

【分析】 $A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$, 而 $A_{11} = (-1)^{1+1}d = d$, $A_{12} = (-1)^{1+2}c = -c$,

$A_{21} = (-1)^{2+1}b = -b$, $A_{22} = (-1)^{2+2}a = a$, 故应是(A).

二阶矩阵的伴随矩阵: 主对角线互换, 副对角线变号.

357 【答案】 B

【分析】 按 $A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$ 本题只要计算出 A_{31}, A_{22}, A_{13} 中两个代数余子式的值即可.

因 $A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{vmatrix} = -ab$ 可排除(A)(C). 再由 $A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0 & a \\ c & 0 \end{vmatrix} = -ac$ 可知选(B).

或者作为选择题增强条件假设 A 是可逆的. 有



微信扫码

$$A^* = |A| A^{-1} = -abc \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{c} \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

亦知选(B).

358 【答案】 D

【分析】 (A)(B)(C) 是基本公式, 关于(D)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^2 &= \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB & O \\ O & BA \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^3 &= \begin{bmatrix} AB & O \\ O & BA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & ABA \\ BAB & O \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^4 &= \begin{bmatrix} AB & O \\ O & BA \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} (AB)^2 & O \\ O & (BA)^2 \end{bmatrix} \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

359 【答案】 B

【分析】 本题考查分块求逆及二阶求逆, 注意

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix},$$

再根据 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$, 用二阶矩阵的伴随矩阵是主对角线对调副对角线变号, 很容易看出

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = -\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

所以应选(B).

【评注】 设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 则 $A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

360 【答案】 B

【分析】 由 $BA = B + 2E$ 有 $B(A - E) = 2E$,

$$\text{于是 } B = 2(A - E)^{-1} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2 阶矩阵求逆, 用 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$.

361 【答案】 C

【分析】 $XA + 2E = X + B$ 有 $X(A - E) = B - 2E$, 于是

$$\begin{aligned}
 X &= (B - 2E)(A - E)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

如果你选的是(A),检查一下是哪里出错了?注意矩阵乘法!如果你选的(B)或(D)又是哪的问题?

362 【答案】 D

【分析】 矩阵的乘法没有交换律, A, B 可逆不能保证 $AB = BA$, 例如

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ 有 } AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ 而 } BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

可知(A)(C)均不正确.

A, B 可逆时, $A + B$ 不一定可逆, 即使 $A + B$ 可逆, 其逆一般也不等于 $A^{-1} + B^{-1}$. 例如

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ 有 } (A + B)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\text{而 } A^{-1} + B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \text{ 所以(B)不正确.}$$

因为 A 可逆时, $A^* = |A| A^{-1}$, 故

$$(AB)^* = |AB| (AB)^{-1} = |A| |B| B^{-1} A^{-1} = (|B| B^{-1}) (|A| A^{-1}) = B^* A^*,$$

即(D)正确.

【评注】 因为矩阵乘法没有交换律, 所以中学代数的乘法公式不能用, 但 $(A + E)^n$ 可用乘法公式展开.

363 【答案】 C

【分析】 $(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A + A^T$

$$(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$$

$$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$$

又 $AA^* = |A| E$, 所以 ①③④⑤ 均是对称矩阵.

而 $(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = -(A - A^T)$ 是反对称矩阵.

364 【答案】 B

【分析】 由于 $(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$
(A) 正确.

关于(C). 由 $(C^T AC)^T = C^T A^T (C^T)^T = C^T AC$ 知(C) 正确.

又 $(ABA)^T = A^T B^T A^T = ABA$, (D) 正确.

由于 $(AB)^T = B^T A^T = BA$, 从而(B) 选项的结论不正确.

注意, 当 A, B 均为对称矩阵时, AB 为对称矩阵的充要条件是 $AB = BA$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

365 【答案】 C

【分析】 (A) 中零行(第二行)不在矩阵的最下面.

(B) 中主元所在的列(第四列)其余元素不全为 0.

(D) 中非 0 行的第 1 个非零元(第二行)不是 1.

366 【答案】 D

【分析】 单位矩阵经过一次初等变换所得到的矩阵是初等矩阵,而(A)(B)(C)均需要单位矩阵作两次初等变换才能得到.

367 【答案】 C

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } P_2 A P_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & -3 \\ 7 & -1 & 9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

注意(A)是 $P_1 A P_2$, (B)是 $P_2 P_1 A$, (D)是 $A P_2 P_1$.

368 【答案】 B

【分析】 观察 A, B 之间的关系,矩阵 A 的第一列加到第三列,并再把 A 的一、三两行互换就可得到 B . (先将 A 的一、三两行互换,再将第一列加到第三列也是一样的) 故 $B = P_2 A P_1$.

369 【答案】 B

【分析】 矩阵 A 作两次行变换可得到矩阵 B , 而 $A P_3 P_2, A P_1 P_3$ 描述的是矩阵 A 作列变换, 故应排除.

或者把矩阵 A 第一行的 2 倍加至第三行后,再一、二两行互换可得到 B .

或者把矩阵 A 的一、二两行互换后,再把第二行的 2 倍加至第三行亦可得到 B , 而 $P_2 P_3 A$ 正是后者. 所以应选(B).

【评注】 本题考查行变换是左乘初等矩阵,列变换是右乘初等矩阵. 希望能看清楚

$$P_1 P_3 A = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} + 2a_{21} & a_{32} + 2a_{22} & a_{33} + 2a_{23} \end{bmatrix},$$

$$A P_3 P_2 = A P_1 P_3 = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} + 2a_{13} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} + 2a_{23} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} + 2a_{33} & a_{33} \end{bmatrix},$$

$$A P_3 P_1 = A P_2 P_3 = \begin{bmatrix} a_{12} + 2a_{13} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} + 2a_{23} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} + 2a_{33} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

370 【答案】 A

【分析】 按已知条件,有

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = B, B \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E, \text{即} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$

$$\text{故 } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

371 【答案】 B

【分析】 由已知条件,有

$$\begin{bmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} A = B$$

$$\text{那么 } B^{-1} = \left[\begin{bmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} A \right]^{-1} = A^{-1} \begin{bmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}^{-1} = A^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

所以 A^{-1} 的第一列乘以 $-\frac{1}{2}$ 得矩阵 B^{-1} . 故应选 B.

372 【答案】 C

【分析】 因 A 中有 2 阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$.

故 $r(A) = 2 \Leftrightarrow |A| = 0$,

$$\text{又 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & a-1 & 10 \end{vmatrix} = 15 - 5a.$$

373 【答案】 D

【分析】 注意对矩阵秩概念的理解. 当 $r(A) = r$ 时:

A 中一定有 r 阶子式不为 0, 但并不要求所有的 r 阶子式都不为 0.

A 中 $r-1$ 阶子式一定有不等于 0 的, 也不要求所有的 $r-1$ 阶子式全不为 0.

而 $r+1$ 阶子式则必须全为 0.

374 【答案】 D

【分析】 (A) 中三阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, 且没有四阶子式, 其秩必为 3.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

(B) 中 $\forall a$ 由于 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = a+1$ 至少有 1 个三阶子式不为 0, 其秩

必为 3.

类似地 (C) 中 a 和 $a+1$ 不可能同时为 0, 必有三阶子式不为 0, 而四阶子式一定为 0, 故其秩必为 3.

当 $a+1=0$ 时, 可见 (D) 的秩为 2.

375 【答案】 C

【分析】 因 A, B 均四阶非零矩阵, 那么 $1 \leq r(A) \leq 4, 1 \leq r(B) \leq 4$.

又 $AB = O$, 有 $r(A) + r(B) \leq 4$.

所以 $r(A) = 3$ 时, 必有 $r(B) = 1$, 即 (C) 正确.

当 $r(A) = 4$ 时, 只有 $r(B) = 0$, (D) 一定不可能.

而 $r(A) = 1$ 时, $r(B)$ 可能为 1, 可能为 2, 也可能为 3.

即 (A) 不一定必成立.

例如 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, B 可以是

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \dots$$

同理 (B) 也不是必然的.

【评注】 本题考查矩阵秩的概念以及 $AB = O$ 中关于秩的信息.

若 $AB = O$, 将 B 按列分块, $B = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]$, 有

$$AB = A[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n] = [A\beta_1, A\beta_2, \dots, A\beta_n] = [0, 0, \dots, 0].$$

从而 $A\beta_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 即 β_i 是方程组 $Ax = 0$ 的解. 这样向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 可由 $Ax = 0$ 的基础解系线性表出, 从而 $r([\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]) \leq n - r(A)$. 故有 $r(A) + r(B) \leq n$. 以上得到的命题“若 $AB = O$, 则 $r(A) + r(B) \leq n$ ”在考试中可直接使用. 由这一命题及 $r(A) > 0, r(B) > 0$, 立刻可得出 A 与 B 的秩均小于 n .

376 【答案】 A

【分析】 因 $B \neq O$, 必有 $r(B) \geq 1$.

又 A 中有二阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, 知 $r(A) \geq 2$.

由 $AB = O$ 有 $r(A) + r(B) \leq 3$, 故必有 $r(A) = 2, r(B) = 1$.

377 【答案】 A

【分析】 因 A 中有二阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, 故 $r(A) = 2 \Leftrightarrow |A| = 0$.

$$\text{而 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & a & 2 \\ a & 4 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & a-6 & 2 \\ a & 4-2a & a \end{vmatrix} = a^2 - 2a - 8 = (a-4)(a+2)$$

当 $a = -2$ 时, $|A| = 0$ 知 $r(A) = 2$, 但 $a = 4$ 时, 仍有 $|A| = 0$, 得 $r(A) = 2$, 所以 $a = -2$ 是 $r(A) = 2$ 的充分而非必要条件.

378 【答案】 D

【分析】 A 是四阶矩阵, 那么由伴随矩阵秩的公式

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & \text{若 } r(A) = n \\ 1, & \text{若 } r(A) = n-1 \\ 0, & \text{若 } r(A) < n-1 \end{cases}$$

可见 $r(A^*) = 1 \Leftrightarrow r(A) = 3$.

对矩阵 A 作初等变换, 有

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 2 & 3 & a & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & a-2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & a-1 & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & 6-2a \end{bmatrix}$$

$$\text{若 } a = 3, \text{ 则 } A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & -1 & 1 \\ & & 2 & -1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \text{ 秩 } r(A) = 3.$$

$$\text{若 } a = 2, \text{ 则 } A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & -1 & 2 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 2 \end{bmatrix}, \text{ 秩 } r(A) = 4.$$

$$\text{若 } a = 1, \text{ 则 } A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & -1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & -1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \text{ 秩 } r(A) = 3.$$

所以, $a = 1$ 或 $a = 3$ 时均有 $r(A^*) = 1$. 应选(D).

379 【答案】 D

【分析】 向量组 ① 是四个三维向量, 从而线性相关, 可排除(B).

由于 $(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3)$ 线性无关, 添上两个分量就可得向量组 ②, 故向量组 ② 线性无关. 所以应排除(C). 向量组 ③ 中前两个向量之差与最后一个向量对应分量成比例, 于是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性相关, 那么添加 α_3 后, 故向量组 ③ 必线性相关. 应排除(A), 由排除法, 应选(D).

【评注】关于向量组④亦可直接计算行列式,由

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 & 14 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

而知其线性相关.

380 【答案】 D

【分析】按定义, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow \exists$ 不全为 0 的 $k_1, k_2, \dots, k_s$

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

$\Leftrightarrow \exists$ 不全为 0 的 $k_1, k_2, \dots, k_s$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix} = 0 \text{ 有非零解}$$

线性相关时,可以有某些 $k_i = 0$. (A) 不正确.

$k_1, k_2, \dots, k_s$ 是齐次方程组 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix} = 0$ 的非零解. 故(B)、(C) 均不正确.

381 【答案】 C

【分析】 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 相关 $\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(t+2)(t-1)^2$$

$t = 1$ 或 -2 .

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 无关 $\Leftrightarrow |\beta_1, \beta_2, \beta_3| \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & t+2 \\ 2 & t+4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & t+2 \\ 2 & t & 3 \end{vmatrix} = -(t+3)(t-1) \neq 0$$

$t \neq -3$ 且 $t \neq 1$.

382 【答案】 C

【分析】 n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = 0$.

$$\text{由 } |\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{一、二两行成比例}).$$

注意 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = -c_1$, $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4| = c_1$, $|\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4| = c_3 + c_4$.

383 【答案】 A

【分析】 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)x = 0$ 有非零解

$$\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = 0$$

故(A)正确, (C)(D)均充分条件, 不是必要的.

384 【答案】 D

【分析】 必要性(反证法) 如果 $\alpha_i = k_1\alpha_1 + \dots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \dots + k_s\alpha_s$,
则 $k_1\alpha_1 + \dots + k_{i-1}\alpha_{i-1} - \alpha_i + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \dots + k_s\alpha_s = 0$.

因为 $k_1, \dots, k_{i-1}, -1, k_{i+1}, \dots, k_s$ 不全为 0. 于是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关. 矛盾.

充分性(反证法) 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性相关, 则有不全为 0 的 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$, 不妨设 $k_s \neq 0$, 则有 $\alpha_s = -\frac{1}{k_s}(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_{s-1}\alpha_{s-1})$. 矛盾.

注意(A)、(B)都是必要条件, 不是充分条件.

例如 $(1, 0), (0, 1), (1, 1)$.

而(C)是充分条件.

由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$ 线性无关 $\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关,

但由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关 $\nRightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$ 线性无关.

385 【答案】 B

【分析】 由于(A)、(C)两个命题互为逆否命题, 一个命题与它的逆否命题要正确就全正确, 要错误就全错误. 按本题的要求仅有一个命题是正确的, 所以(A)、(C)均谬误. 其实亦可考查下面的例子:

$\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (0, 1, 0), \alpha_3 = (0, 0, 0)$ 与 $\beta_1 = (1, 0, 0, 0), \beta_2 = (0, 1, 0, 0), \beta_3 = (0, 0, 0, 1)$.

显然 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2, r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 3$. 即当 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关时, 其延伸组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可以线性无关. 所以(A)、(C)错误.

如果 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关, 即有不全为 0 的 x_1, x_2, x_3 使 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = 0$, 即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 = 0 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \\ a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解, 那么齐次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 = 0 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

必有非零解, 即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关. 所以(D)错误.

【评注】 要会用定理若(I)无关, 则(II)无关, 即若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则其延伸组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 必线性无关.

386 【答案】 D

【分析】 若 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (0, 1, 0)^T$, 则 α_1, α_2 线性无关.

当 $\alpha_3 = (1, 1, 0)^T$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关; 当 $\alpha_3 = (0, 0, 1)^T$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

可知当(I)线性无关时, (II)既可能线性无关亦可能线性相关, 所以(A)、(B)均错误. (C)是(A)的逆否命题, 当然是错误的.

【评注】 要区分本题的(D)与上一题的(B), 一个是向量个数的增减, 一个是向量分量的增减两者不要混淆.

387 【答案】 B

【分析】 (III) 线性相关 $\Leftrightarrow |AB| = 0 \Leftrightarrow |A| = 0$ 或 $|B| = 0$

可见应选(B).

【评注】 本题选项中, 若(A)或(C)或(D)成立, 则(B)成立. 因是四选一的选择题, 只能有一个选项正确. 故(A)、(C)、(D)均可排除, 应选(B).

388 【答案】 D

【分析】 用观察法

$$(A) (\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_3 + \alpha_4) - (\alpha_4 + \alpha_1) = 0$$

$$(B) (\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_4) + (\alpha_4 - \alpha_1) = 0$$

$$(C) (\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_2 - \alpha_3) - (\alpha_3 - \alpha_4) - (\alpha_4 + \alpha_1) = 0$$

知(A)(B)(C)均线性相关, 故应选(D).

或者

$$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{由} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

故 $r(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 4$.

故(D)必线性无关.

389 【答案】 A

【分析】 因 $(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_1) = 0$,

$$(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_2 - \alpha_3) - (\alpha_3 + \alpha_1) = 0,$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_2 + \alpha_3) - (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3) = 0,$$

知 (B)、(C)、(D) 都线性相关.

$$\text{或者} (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

由于 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 是可逆矩阵, 那么

$$r(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3,$$

亦知(A)正确.

390 【答案】 C

【分析】

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 = (k_1, 0, 5k_2)^T$$

若 β 是 α_1, α_2 的线性组合, 则 β 的第 2 个坐标必须是 0, 而第 1、第 3 坐标是独立的, 故选(C).

391 【答案】 A

【分析】 β_1, β_2 可由 α_1, α_2 线性表示

$\Leftrightarrow x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 = \beta_1, y_1 \alpha_1 + y_2 \alpha_2 = \beta_2$ 都有解.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & -2 & b \\ 3 & -1 & a & 4 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & -10 & b-14 \\ 0 & 5 & a-12 & -17 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & -10 & b-14 \\ 0 & 0 & a-2 & -b-3 \end{array} \right]$$

$$\therefore a = 2, b = -3.$$



微信扫码

392 【答案】 D

【分析】 由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 知 α_1, α_2 必线性无关, 又因 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性相关, 故 α_4 必可由 α_1, α_2 线性表示. 因此 α_4 必可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示. 故应选(D).

如 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (0, 1, 0)^T, \alpha_3 = (0, 0, 1)^T, \alpha_4 = (0, 0, 0)^T$, 可知(A)(B)(C)均不正确.

393 【答案】 B

【分析】 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, β_2 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2$ 线性无关, 从而部分组 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2$ 线性无关, 故应选(B).

取 $\alpha_1 = (1, 0, 0, 0)^T, \alpha_2 = (0, 1, 0, 0)^T, \alpha_3 = (0, 0, 1, 0)^T, \beta_2 = (0, 0, 0, 1)^T, \beta_1 = \alpha_1$, 知(A)与(C)选项错误.

关于选项(D), 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + \beta_2$ 线性相关, 则 $\beta_1 + \beta_2$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 而 β_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 从而 β_2 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 与假设矛盾, 从而(D)错误.

【评注】 若仅 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出是不能推导出 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ 线性无关的, 请考查 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (2, 0, 0)^T, \alpha_3 = (3, 0, 0)^T, \beta = (0, 1, 0)^T$

394 【答案】 D

【分析】 按向量组秩的定义

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \text{ 的极大线性无关组有 } r \text{ 个向量}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \text{ 中存在 } r \text{ 个向量线性无关而任意 } r+1 \text{ 个线性相关,}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

故应选(D).

例如向量组 $(0,0,0,0), (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0)$ 的秩为3,包含零向量的两个或三个向量组成的向量组线性相关,(A)、(B)都不正确.

又如向量组 $(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (1,1,1,0)$ 的秩为3,任何两个向量都线性无关,(C)不正确.

395 【答案】 C

【分析】 列向量作行变换,有

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 7 & 2 \\ 5 & -3 & 4 & 9 & 2 \\ -1 & 4 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & -7 & -14 & -14 & -7 \\ 0 & -13 & -26 & -26 & -13 \\ 0 & 6 & 12 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可见秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = 3$.

因为三阶子式

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

所以 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是极大线性无关组,故选(C).

【评注】 多数情况下向量组的极大线性无关组是不唯一的. 例如,本题中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 与 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 及 $\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5$ 和 $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$ 等. 通常对列向量作初等行变换在将矩阵化成阶梯形矩阵之后,选每行第一个非0的数所在的列(本题是一、二、四列)为极大线性无关组较简便. 可略去行列式不为0的思考.

396 【答案】 B

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 1 & a & 1 & -2 \\ a & 1 & 1 & a+6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 3a+6 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & 3a+6 \end{bmatrix}$$

当 $a=1$ 时,秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 2$,

而当 $a=-2$ 时亦有秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 2$,

所以 $a=1$ 是秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 2$ 的充分而非必要条件.

397 【答案】 C

【分析】 将表出关系合并成矩阵形式有

$$[\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{\text{记}}{=} [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] C = AC$$

因四个四维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 故 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4| \neq 0$. $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$ 是可逆矩阵, AC , 即对 C 作若干次初等行变换, 故有 $r(C) = r(AC) = r(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5)$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

故知 $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5) = r(C) = 3$, 故应选(C).

398 【答案】 C

【分析】 因 $r(A) = 3, n - r(A) = 5 - 3 = 2$, 知未知数有 2 个自由变量. 去掉第三和第五

列的三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$, 故 x_3, x_5 不能是自由变量.



微信扫码

而 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, 说明 x_2, x_5 或 x_1, x_5 或 x_2, x_3 都可

以为自由变量.

399 【答案】 B

【分析】 由于 $A\alpha_1 = b, A\alpha_2 = b$, 那么

$$A(3\alpha_1 - 2\alpha_2) = 3A\alpha_1 - 2A\alpha_2 = 3b - 2b = b,$$

$$A\left[\frac{1}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2)\right] = \frac{1}{3}A\alpha_1 + \frac{2}{3}A\alpha_2 = \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}b = b,$$

$$A\left[\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)\right] = \frac{1}{2}A\alpha_1 + \frac{1}{2}A\alpha_2 = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b = b,$$

可知 $3\alpha_1 - 2\alpha_2, \frac{1}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2), \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$ 均是 $Ax = b$ 的解.

而 $A(\alpha_1 - \alpha_2) = A\alpha_1 - A\alpha_2 = b - b = 0$, 所以 $\alpha_1 - \alpha_2$ 是 $Ax = 0$ 的解, 不是 $Ax = b$ 的解, 故应选(B).

【评注】 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 是 $Ax = b$ 的解, $k_1 + k_2 + \dots + k_t = 1$, 则 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_t\alpha_t$ 仍是 $Ax = b$ 的解. 知道这一点, $3\alpha_1 - 2\alpha_2, \frac{1}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2), \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$ 是 $Ax = b$ 的解也就一目了然了.

400 【答案】 A

【分析】 由 $A\alpha_i = b (i = 1, 2, 3)$ 有

$$A(\alpha_1 - \alpha_2) = A\alpha_1 - A\alpha_2 = b - b = 0,$$

$$A(\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3) = A\alpha_1 + A\alpha_2 - 2A\alpha_3 = b + b - 2b = 0,$$

$$A\left[\frac{2}{3}(\alpha_2 - \alpha_1)\right] = \frac{2}{3}A\alpha_2 - \frac{2}{3}A\alpha_1 = \frac{2}{3}b - \frac{2}{3}b = 0,$$

$$A(\alpha_1 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3) = A\alpha_1 - 3A\alpha_2 + 2A\alpha_3 = b - 3b + 2b = 0,$$

所以, $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3, \frac{2}{3}(\alpha_2 - \alpha_1), \alpha_1 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3$ 均是齐次方程组 $Ax = 0$ 的解.

【评注】 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解, 若 $k_1 + k_2 + \dots + k_t = 0$, 则 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_t\alpha_t$ 仍是导出组 $Ax = 0$ 的解. 知道这一关系式立即可看出本题应当选(A).

401 【答案】 C

【分析】 $Ax = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow |A| = 0$. 现

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & a \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & a-1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5(a-1)$$

$$\therefore a = 1.$$

402 【答案】 C

【分析】 齐次方程组 $Ax = 0$ 的基础解系有3层含义:(1)齐次方程组的解;(2)线性无关;(3)解向量个数为 $n - r(A)$.

观察4个选项, 本题(B)中两个向量线性相关, 肯定不是基础解系, 要排除. 易见本题秩 $r(A) = 2$, 那么 $n - r(A) = 4 - 2 = 2$, 即解向量个数应为2, 故要排除(D). 至于(A)和(C)必有一个正确, 因此 $(-2, 2, 1, 0)^T$ 肯定是解. 那么 $(1, 2, 0, 1)^T$ 与 $(2, 2, -3, -4)^T$ 中必有一个不是解, 故要从解的角度来分析判断. 将(A)中的 $(1, 2, 0, 1)^T$ 代入方程, 知不是方程组的解, 故去除(A), (或将(C)的 $(2, 2, -3, -4)^T$ 代入方程, 满足方程知) 所以要选(C).

403 【答案】 B

【分析】 如果(A)是 $Ax = 0$ 的解, 则(D)必是 $Ax = 0$ 的解. 因此(A)(D)均不是 $Ax = 0$ 的解.

由于 α_1, α_2 是 $Ax = 0$ 的基础解系, 那么 α_1, α_2 可表示 $Ax = 0$ 的任何一个解 η , 亦即方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = \eta$ 必有解. 因为

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 & -5 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right]$$

可见第2个方程组无解, 即 $(2, 2, -5)^T$ 不能由 α_1, α_2 线性表示, 故(C)不成立, 应选(B).

【评注】 本题知道正确的选项必在(B)和(C)中, 其实只要解其中的一个方程组就可以了, 是没有必要像现在这样解两个方程组的, 但如果有的题目确实需要解两个系数矩阵一样的方程组时, 用本题的方法是简捷可取的.

404 【答案】 C

【分析】 由于 A 是 $m \times n$ 矩阵, 知 A^T 是 $n \times m$ 矩阵, 那么 $A^T x = 0$ 是 n 个方程 m 个未知数的齐次线性方程组, 从而 $m - r(A^T) = t$.

又因 $r(A) = r(A^T)$, 所以 $r(A) = m - t$, 即应当选(C).

【评注】 要搞清楚齐次方程组基础解系中解向量的个数与系数矩阵秩之间的关系. 对于用矩阵形式给出的方程组要看清方程的个数以及未知数的个数(即若 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则 $Ax = 0$ 是 m 个方程 n 个未知数的方程组), 本题还涉及 $r(A) = r(A^T)$ 这一关系式.

405 【答案】 B

【分析】 因为 α_1, α_2 线性无关, 所以 $Ax = 0$ 至少有两个线性无关的解, 故

$$n - r(A) \geq 2, \quad \text{即 } r(A) \leq 3 - 2 = 1$$

因此排除(A)(C).

对于(B)和(D), 因为 α_2 不是方程组(D)的解, 因此排除(D).

【评注】 先利用秩来排除, 再利用解的概念来选择比较方便. 如果每个都直接代入验算是不是解会比较麻烦.

406 【答案】 D

【分析】 由已知条件知 $Ax = 0$ 的基础解系是 $Ax = 0$ 的 3 个线性无关的解向量所构成, 现 $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 都是 $Ax = 0$ 的解, 且

$$(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 可逆, 知 $r(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$,

即 $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 线性无关.

那 $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 是 $Ax = 0$ 的 3 个线性无关的解向量. 从而也是 $Ax = 0$ 的基础解系, 故应选(D).

(A) 中等价向量组的向量个数不一定是 3. 例如 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 就是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的等价向量组.

(B) 中的解向量 $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$ 线性相关.

(C) 等秩的向量组不一定是 $Ax = 0$ 的解.

407 【答案】 D

【分析】 因 η_1, η_2 是 $Ax = 0$ 的基础解系, 有 $n - r(A) = 2$.

又 A 是 4 阶矩阵, 故 $r(A) = 2$.

于是(A)、(C)均不正确.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$\text{由 } A\eta_2 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = 0, \text{ 有 } \alpha_2 = 2\alpha_4,$$

排除(B), 故应选(D).

直接地, 由 $A\eta_1 = 0, A\eta_2 = 0$ 得

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 - 2\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

如 α_3, α_4 线性相关, 不妨设 $\alpha_3 = k\alpha_4$, 则 $\alpha_1 = (3-3k)\alpha_4, \alpha_2 = 2\alpha_4, \alpha_3 = k\alpha_4$, 与 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 2$ 相矛盾.

408 【答案】 D

【分析】 由特征值的性质: $\sum \lambda_i = \sum a_{ii}$.

现在

$$\sum a_{ii} = 1 + (-3) + 1 = -1$$

故可排除(C).

显然, 矩阵 A 中第2、第3两列成比例, 易知行列式 $|A| = 0$, 故 $\lambda = 0$ 必是 A 的特征值, 因此可排除(B).

对于(A)和(D)的选择, 我们可以用特殊值法, 由于

$$|E - A| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -4 & 4 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

说明 $\lambda = 1$ 不是矩阵 A 的特征值, 故可排除(A).

【评注】 这一类题目最直接方法是计算 A 的特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 2 \\ -4 & \lambda + 3 & -3 \\ -2 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 2 \\ -4 & \lambda & -3 \\ -2 & \lambda & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \dots$$

另一个方法是验算, 代入 λ 值. 看那个选项中 λ 满足 $|\lambda E - A| = 0$.

但是应当会用: $\sum \lambda_i = \sum a_{ii}, \prod \lambda_i = |A|$, 及特殊值法来排除. 也许会更方便.

409 【答案】 A

【分析】 由 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$ 可得到:

$$A^2\alpha = \lambda^2\alpha, \quad A^{-1}\alpha = \frac{1}{\lambda}\alpha, \quad (A - E)\alpha = (\lambda - 1)\alpha.$$

说明 $A^2, A^{-1}, A - E$ 与 A 的特征值是不一样的(但 A 的特征向量也是它们的特征向量). 由排除法应选(A).

或由于 $|\lambda E - A^T| = |(\lambda E - A)^T| = |\lambda E - A|$,

A 与 A^T 有相同的特征多项式, 所以 A 与 A^T 有相同的特征值.

410 【答案】 D

【分析】 由 $A\alpha = \lambda\alpha$ 有 $(A+kE)\alpha = A\alpha + k\alpha = \lambda\alpha + k\alpha = (\lambda+k)\alpha$, 那么当 A 的特征值为 $1, 2, -1$ 时,

$A-E$ 的特征值为 $0, 1, -2$.

$A+E$ 的特征值为 $2, 3, 0$.

$A-2E$ 的特征值为 $-1, 0, -3$.

$A+2E$ 的特征值为 $3, 4, 1$.

又 $|A| = \prod \lambda_i$, 所以仅 (D) $A+2E$ 为可逆矩阵.

411 【答案】 C

【分析】 若 α 是 A 的特征向量, 那么 $k\alpha (k \neq 0)$ 仍是 A 的特征向量. 因此, 如果 (B) 正确, 必有 (D) 正确. 所以 (B)、(D) 均不正确, 故排除 (B) 和 (D). 由 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$ 知 α 与 $A\alpha$ 的对应分量应当成比例. 对于 (A), 因

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

因为 $(1, 0, -1)^T$ 与 $(7, 0, 5)^T$ 坐标不成比例, 所以 $(1, 0, -1)^T$ 不是 A 的特征向量, 故 (A) 不正确, 用排除法可知应选 (C), 或直接逐项验算, 其中 (C)

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

知 $(4, -1, 2)^T$ 是 A 的对应于 $\lambda = 2$ 的特征向量. 故应选 (C).



微信扫码

【评注】 本题考查用定义法解题, 不要去求特征值再解方程组来判断那一个是特征向量.

412 【答案】 A

【分析】 设 α 是矩阵 A 属于特征值 λ 的特征向量, 按定义有

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

对应分量相等, 即有

$$\begin{cases} 3-4-3=\lambda \\ a+4+6=-2\lambda \\ 3-2b-3=3\lambda \end{cases}$$

可见 $\lambda = -4, a = -2, b = 6$, 所以应选 (A).

【评注】 利用特征值、特征向量的定义建立方程组, 然后求出参数的值. 这种方法是基本的, 也是重要的.

413 【答案】 D

【分析】 若 α 是 $2A$ 的特征向量. 即 $(2A)\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$.

那么 $A\alpha = \frac{\lambda}{2}\alpha$, 所以 α 是矩阵 A 属于特征值 $\frac{\lambda}{2}$ 的特征向量. 即 D 正确.

由于方程组 $(\lambda E - A^T)x = 0, (\lambda E - A^*)x = 0, (\lambda E - A^2)x = 0$ 与 $(\lambda E - A)x = 0$ 不一定同解, 所以 α 不一定是 A 的特征向量.

如 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的特征向量是 $(1, 0, 0)^T$, 而 $A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 有 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$A^2 = A^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 有 $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, 均不是 A 的特征向量.

414 【答案】 A

【分析】 方法1 由 $A\alpha_2 = 3\alpha_2$, 有 $A(-\alpha_2) = 3(-\alpha_2)$, 即当 α_2 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda = 3$ 的特征向量时, $-\alpha_2$ 仍是矩阵 A 属于特征值 $\lambda = 3$ 的特征向量. 同理 $2\alpha_3$ 仍是矩阵 A 属于特征值 $\lambda = -2$ 的特征向量.

当 $P^{-1}AP = \Lambda$ 时, P 由 A 的特征向量所构成, Λ 由 A 的特征值所构成, 且 P 与 Λ 的位置是对应一致的. 现在, 矩阵 A 的特征值是 $1, 3, -2$, 故对角矩阵 Λ 应当由 $1, 3, -2$ 构成, 因此排除 (B)、(C). 由于 $2\alpha_3$ 是属于 $\lambda = -2$ 的特征向量, 所以 -2 在对角矩阵 Λ 中应当是第二列, 故应选 (A).

方法2 由题设条件知, 若取 $Q = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, 则有

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{现取 } P = [\alpha_1, 2\alpha_3, -\alpha_2] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{\text{记}}{=} QC$$

$$\text{则 } P^{-1}AP = (QC)^{-1}AQC = C^{-1}(Q^{-1}AQ)C$$

$$= C^{-1} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & -2 \end{bmatrix} C,$$

$$\text{其中 } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{得 } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}.$$

故应选 (A).

【评注】 当 $P^{-1}AP = B$ 时, P 中列向量不是矩阵 A 的特征向量. 当 $P^{-1}AP = \Lambda$ 时, P 中列向量是矩阵 A 的特征向量, Λ 是矩阵 A 的特征值, 且 P 与 Λ 中特征向量与特征值位置要对应正确.

415 【答案】 D

【分析】 由 α_2, α_3 是 A 不同特征值的特征向量, 于是 $\alpha_2 + \alpha_3$ 不是 A 的特征向量. 所以不能是(D).

如 α_1, α_2 是 A 关于 λ 的特征向量, 则 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \neq 0$ 仍是 A 关于 λ 的特征向量. 故 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2, -\alpha_1, 5\alpha_1$ 仍是 A 关于 $\lambda = 2$ 的特征向量. 又因 α_1, α_2 线性无关, 保证 $\alpha_2, -\alpha_1$ 线性无关, $\alpha_1 + \alpha_2, 5\alpha_1$ 线性无关, $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2$ 亦线性无关, 即(A), (B), (C) 均可逆.

416 【答案】 B

【分析】 (A) 有 3 个不同的特征值必和对角矩阵相似. (D) 是对称矩阵必和对角矩阵相似. (B)、(C) 特征值都是 1, 1, -1, 特征值 $\lambda = 1$ 是 2 重根.

对于矩阵 B

$$E - B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ 有 } r(E - B) = 2, n - r(E - B) = 3 - 2 = 1$$

即齐次方程组 $(E - B)x = 0$ 只有 1 个线性无关的解, 亦 $\lambda = 1$ 只有 1 个线性无关的特征向量, 所以 B 不能对角化.

而对于 C

$$E - C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 2 \end{bmatrix}, r(E - C) = 1, n - r(E - C) = 2$$

故 $\lambda = 1$ 有 2 个线性无关的特征向量, 可以相似对角化.

417 【答案】 B

【分析】 相似的必要条件:

$$|A| = |B|, \lambda_A = \lambda_B, r(A) = r(B), \sum a_{ii} = \sum b_{ii}$$

(A) 中, $r(A) \neq r(B)$. (C) 中 $\sum a_{ii} \neq \sum b_{ii}$, 所以排除(A)(C).

(B) 中, 矩阵 A, B 的特征值都是 1, 2, 有两个不同的特征值

那么 $A \sim \begin{bmatrix} 1 & \\ & 2 \end{bmatrix}, B \sim \begin{bmatrix} 1 & \\ & 2 \end{bmatrix}$, 故 $A \sim B$.

(D) 中, 矩阵 A, B 特征值都是 3, 3, 二重根.

而 $3E - B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, r(3E - B) = 1, n - r(3E - B) = 2 - 1 = 1.$

即 $\lambda = 3$ 只有 1 个线性无关的特征向量, 所以 B 不能对角化, 故 A 和 B 不相似.

418 【答案】 A

【分析】 由于矩阵 A 可逆, 有

$$A^{-1}(AB)A = BA$$

按相似定义知 $AB \sim BA$. 即命题 ① 正确.

因为 $A \sim B$, 故存在可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP = B$, 那么

$$B^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^2P$$

$$B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$$

$$B^T = (P^{-1}AP)^T = P^T A^T (P^{-1})^T = [(P^{-1})^T]^{-1} A^T (P^{-1})^T$$

按相似定义知命题②③④也均正确.故应选(A).

【评注】 要会用定义法来分析问题.

419 【答案】 B

【分析】 由于“ k 重特征值最多有 k 个线性无关的特征向量”,那么当 $r(A_{3 \times 3}) = 1$ 时, $(0E - A)x = 0$ 必有两个线性无关特征向量.故 $\lambda = 0$ 的重数 ≥ 2 ,即 $\lambda = 0$ 至少是二重特征值.当

然也可能三重.例 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $r(A) = 1$,但 $\lambda = 0$ 是三重特征值.

故应选(B).

420 【答案】 A

【分析】 (A)中矩阵不是对称矩阵,也就不是二次型的矩阵表示,但主对角线1,3,5是二次型中 x_1^2, x_2^2, x_3^2 的系数且 $[(-1) + (-3)] = 2a_{12}$, $[2 + (-2)] = 2a_{13}$, $(6 + 2) = 2a_{23}$,所以(A)中矩阵乘法得到的是题中的二次型.

(B)(C)(D)虽都是对称的,或因主对角线,或因混合项与二次型不匹配,都不是二次型的矩阵表示,本题二次型矩阵应该是

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

421 【答案】 D

【分析】 二次型经正交变换标准形为 $y_1^2 + 3y_2^2 - y_3^2$.

说明二次型矩阵A的特征值是:1,3,-1.

分别求每个矩阵的特征值

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

可知应选(D).

422 【答案】 A

【分析】 (1)用特征值

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 1 - \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1)$$

二次型经正交变换标准形是 $y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2$,故规范形是 $z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$.

(2)用配方法

$$\begin{aligned} f &= (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) - x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2)^2 - (x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2) + 2x_3^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 2x_3^2 \end{aligned}$$

亦知 $p=2, q=1$, 规范形为 $z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$.

423 【答案】 A

【分析】 二次型矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & -2 \\ 0 & -2 & a \end{bmatrix}$, 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - a & 2 \\ 0 & 2 & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - a - 2)(\lambda - a + 2)$$

矩阵 A 的特征值为: $2, a+2, a-2$.

又规范形为 $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 故 $a+2$ 与 $a-2$ 必一正一负.

$$\begin{cases} a+2 > 0 \\ a-2 < 0 \end{cases}$$

得 $a \in (-2, 2)$.

424 【答案】 C

【分析】 二次型正定的必要条件是: $a_{ii} > 0$.

在(D)中, 由于 $a_{33} = 0$, 易知 $f(0, 0, 1) = 0$, 与 $x \neq 0, x^T A x > 0$ 相矛盾.

二次型正定的充分必要条件是顺序主子式全大于零. 在(A)中, 二阶主子式

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

在(B)中, 三阶主子式 $\Delta_3 = |A| = -1$.

因此(A)、(B)、(D)均不是正定矩阵. 故应选(C).

对(C). 因 $D_1 = 2 > 0, D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6 > 0$,

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 10 > 0$$

故(C)是正定二次型.

【评注】 利用正定的必要条件, 先排除不正定的矩阵是方便的. 关于(C), 用顺序主子式判别最简捷. 当然, 利用特征值或配方法标准形来看正惯性指数是否为 n 也是可以的.

425 【答案】 B

【分析】 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1)$$

知矩阵 A 的特征值为 $1, 1, -1$.

$A + kE$ 的特征值为: $k+1, k+1, k-1$.

$$\begin{cases} k+1 > 0 \\ k-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow k > 1$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

概率论与数理统计

填空题

426 【答案】 $(1-a)(1-b)$

【分析】 所求的概率为 $P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})$, 已知“事件 C 发生必导致 A, B 同时发生”, 显然是用于化简 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 的. 事实上已知 $C \subset AB$, 故 $\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{C}$, 由吸收律知, $\overline{A}\overline{B}\overline{C} = \overline{A}\overline{B}$, 又 A 与 B 独立, 故所求的概率为 $P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = (1-a)(1-b)$.

427 【答案】 0.9

【分析】 由题设 $P(A\overline{B} \cup \overline{A}B) = 0.3$, 又 $A\overline{B}$ 与 $\overline{A}B$ 互斥, 所以

$$P(A\overline{B} \cup \overline{A}B) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) = P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB)$$

$$= P(A) + P(B) - 2P(AB) = 0.3,$$
 又 $P(A) + P(B) = 0.5$, 于是 $P(AB) = 0.1$, 那么所求的概率为

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - 0.1 = 0.9.$$

428 【答案】 $\frac{1}{4}$

【分析】
$$P(\overline{A} \cup \overline{B} | C) = 1 - P(AB | C) = 1 - \frac{P(ABC)}{P(C)} = 1 - \frac{P(AB)}{\frac{2}{3}}$$

$$= 1 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

429 【答案】 0.3

【分析】 $P(A\overline{B}) = P(A - B) = P(A) - P(AB)$.
 而 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.4 + 0.3 - P(AB) = 0.6$
 所以, $P(AB) = 0.1$.
 总之 $P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = 0.4 - 0.1 = 0.3$.

430 【答案】 $\frac{8}{15}$

【分析】 记 $A =$ “经过两次交换, 甲袋中白球数不变”, $B =$ “从甲袋中取出的放入乙袋的球为白球”, $C =$ “从乙袋中取出放入甲袋的球为白球”, 则 $A = BC \cup \overline{B}\overline{C}$,
 那么, $P(A) = P(BC) + P(\overline{B}\overline{C}) = P(B)P(C|B) + P(\overline{B})P(\overline{C}|\overline{B})$

$$= \frac{3}{9} \times \frac{6}{10} + \frac{6}{9} \times \frac{5}{10} = \frac{8}{15}.$$

【评注】 (1) 如果题目有“随机试验”, 我们首先要分析该试验所对应的概型: 是古典概型, 还是几何概型、独立试验序列概型. 在此基础上应用相应公式、概率性质及其他有关公式计算所求的概率.

(2) 如果要计算某个结果——事件 A 的概率, 而当 A 的发生总是与某些前提条件或原因相联系, 这时我们总是将 A 对其前提条件作全集分解, 应用全概公式计算 $P(A)$.

431 【答案】 $\frac{15}{16}$

【分析】 可以把射击看成独立重复试验, 设每次射击命中率为 p , 则不中率为 $1-p$. 记 A = “四次中至少命中一次”, B = “四次中至少没中一次”.

则 $\bar{A}$ = “四次中一次都没中”, 显然 $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16}$.

独立射击四次都没中, $P(\bar{A}) = (1-p)^4$, 即 $(1-p)^4 = \frac{1}{16}$, 解得 $p = 1 - p = \frac{1}{2}$.

现求 $P(B)$, $P(B) = 1 - P(\bar{B})$, $P(\bar{B})$ 为四次都中的概率.

$P(\bar{B}) = p^4 = \frac{1}{16}$, 故 $P(B) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

【评注】 从 $P(A) = \frac{15}{16}$ 求得 $p = 1 - p = \frac{1}{2}$, 即中与不中的概率一样, 按对称性可以马上得出 $P(B) = P(A) = \frac{15}{16}$.

432 【答案】 $\frac{5}{8}$

【分析】 我们的试验是独立重复试验序列概型, 如果记 A = “正、反面都至少出现二次”, X 为将硬币掷五次正面出现的次数, 则 $X \sim B\left(5, \frac{1}{2}\right)$, 而 $Y = 5 - X$ 为 5 次投掷中反面出现的次数, 那么, 事件 $A = \{2 \leq X \leq 5, 2 \leq Y \leq 5\} = \{2 \leq X \leq 5, 2 \leq 5 - X \leq 5\}$
 $= \{2 \leq X \leq 5, 0 \leq X \leq 3\} = \{X = 2\} \cup \{X = 3\}$,

所以 $P(A) = P\{X = 2\} + P\{X = 3\} = C_5^2 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{8}$.

433 【答案】 0.81

【分析】 如果用 X 表示两次调整之间生产的产品件数, 则 $P\{X = k\} = P\{\text{前 } k-1 \text{ 个产品合格, 第 } k \text{ 个产品不合格}\} = 0.9^{k-1} \times 0.1$ ($p = 0.1$ 的几何分布), $k = 1, 2, \dots$ 所求概率为 $P\{X \geq 3\} = 1 - P\{X < 3\} = 1 - P\{X = 1\} - P\{X = 2\} = 1 - 0.1 - 0.9 \times 0.1 = 0.9 - 0.9 \times 0.1 = 0.81$.

【评注】 若记 A = “两次调整之间至少生产 3 件产品”. 将 A 用简单事件运算表示, 从而用概率性质计算 $P(A)$. 事实上, 令 A_i = “第 i 次生产的产品为合格品”, 则 A_i 独立. $A = A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 A_2 A_3 \bar{A}_4 + \dots$, $P(A) = 0.9^2 \times 0.1 + 0.9^3 \times 0.1 + 0.9^4 \times 0.1 + \dots = 0.81$.

434 【答案】 $\left(\frac{4}{7}\right)^{k-1} \frac{3}{7}$

【分析】 若记 A_i = “第 i 次取出 4 个球为 2 白 2 黑”, 由于是有放回取球, 因而 A_i 相互独立, 根据超几何分布知 $P(A_i) = \frac{C_3^2 C_5^2}{C_8^4} = \frac{3}{7}$, 所以

$$P\{X = k\} = P(\bar{A}_1 \cdots \bar{A}_{k-1} A_k) = \left(1 - \frac{3}{7}\right)^{k-1} \cdot \frac{3}{7} = \left(\frac{4}{7}\right)^{k-1} \cdot \frac{3}{7} (k = 1, 2, \cdots).$$

435 【答案】 $\frac{1}{2} \ln 2$

【分析】 应用独立试验序列概型, 可求得结果. 事实上已知

$$X \sim f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \text{ 记 } A = \{X > 2\}, Y \text{ 为对 } X \text{ 作三次独立重复观察事件 } A \text{ 发}$$

生的次数, 则 $Y \sim B(3, p)$, 其中 $p = P\{X > 2\} = \int_2^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-2\lambda}$,

$$\text{依题意 } P\{Y \geq 1\} = 1 - P\{Y = 0\} = 1 - (1 - p)^3 = \frac{7}{8}, \text{ 故 } 1 - p = \frac{1}{2}, p = \frac{1}{2}, \text{ 又}$$

$$p = e^{-2\lambda}, \text{ 由 } \frac{1}{2} = e^{-2\lambda} \text{ 解得 } \lambda = \frac{1}{2} \ln 2.$$

436 【答案】 $\frac{11}{24}$

【分析】 $X = 2$, 就由两个合格品, 一个不合格品组成, 有三种情况

第一个为次品 $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$, 第二个为次品 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}$, 第三个为次品 $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$

$$P\{X = 2\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{11}{24}.$$

437 【答案】 $e^{-1} - e^{-2}$

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } P\{3 > X > 2 \mid X > 1\} &= P\{X > 2 \mid X > 1\} - P\{X \geq 3 \mid X > 1\} \\ &= P\{X > 1\} - P\{X > 3 \mid X > 1\} = e^{-1} - P\{X > 2\} = e^{-1} - e^{-2}. \end{aligned}$$

【评注】 本题求解直接应用了指数分布两个常用的公式:

$$\text{当 } X \sim E(\lambda) \text{ 时, ① } P\{X > t\} = \int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda t}, t > 0;$$

$$\begin{aligned} \text{② } P\{X > t+s \mid X > s\} &= \frac{P\{X > t+s, X > s\}}{P\{X > s\}} = \frac{P\{X > t+s\}}{P\{X > s\}} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} \\ &= e^{-\lambda t} = P\{X > t\}. t, s > 0. \end{aligned}$$

438 【答案】 $\frac{1}{4}$

【分析】 本题为古典概型, 用概率公式 $P(A) = \frac{m}{n}$.

n 计算: 恰好取 3 次停止, 每次有 2 种不同颜色, 又有放回的, 所以总的情况 $n = 2^3 = 8$.

m 计算: 第 3 次取得颜色一定不同前 2 种颜色, 这样第 3 次颜色有 2 种可能, 而前 2 次必同色且与第 3 次不同色, 共有 2 种.

$$P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

439 【答案】 $\frac{19}{27}$

【分析】 $P\{X_1 \geq 1\} = 1 - P\{X_1 < 1\} = 1 - P\{X_1 = 0\} = 1 - (1-p)^2 = \frac{5}{9}$

解得 $(1-p)^2 = \frac{4}{9}, (1-p) = \frac{2}{3}$.

$$P\{X_2 \geq 1\} = 1 - P\{X_2 < 1\} = 1 - P\{X_2 = 0\} = 1 - (1-p)^3 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}.$$

440 【答案】 $\frac{1}{4\sqrt{y}}$

【分析】 先求出在 $(0, 4)$ 上 Y 的分布函数 $F_Y(y)$. 当 $0 < y < 4$ 时,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\} = P\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\} = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x) dx \\ &= \int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{2} dx = \frac{\sqrt{y}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{故 } f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{1}{4\sqrt{y}}.$$

441 【答案】 1

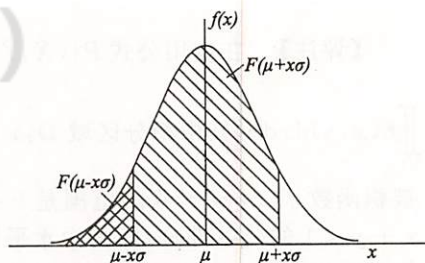
【分析】 方法 1

$$\begin{aligned} &F(\mu+x\sigma) + F(\mu-x\sigma) \\ &= P\{X \leq \mu+x\sigma\} + P\{X \leq \mu-x\sigma\} \\ &= P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leq x\right\} + P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leq -x\right\} \\ &= \Phi(x) + \Phi(-x) \\ &= \Phi(x) + [1 - \Phi(x)] = 1. \end{aligned}$$

方法 2 由正态分布密度对称性, 如图显示,
 $F(\mu+x\sigma) + F(\mu-x\sigma) = 1$.



微信扫码



442 【答案】 $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } F_Y\left(\frac{1}{2}\right) &= P\left\{Y \leq \frac{1}{2}\right\} = P\left\{1 - e^{-X} \leq \frac{1}{2}\right\} \\ &= P\left\{e^{-X} \geq \frac{1}{2}\right\} = P\{e^X \leq 2\} \\ &= P\{X \leq \ln 2\} = \int_{-\infty}^{\ln 2} f_X(x) dx \\ &= \int_0^{\ln 2} e^{-x} dx = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

微信公众号: 顶尖考研
 (ID: djky66)

【评注】 $P\{X \leq \ln 2\} = 1 - P\{X > \ln 2\} = 1 - e^{-1 \cdot \ln 2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

443 【答案】 e^{-2}

【分析】 $P\{\min(X, Y) \geq 1\} = P\{X \geq 1, Y \geq 1\} = P\{X \geq 1\}P\{Y \geq 1\}$
 $= e^{-1} \cdot e^{-1} = e^{-2}.$

444 【答案】 -1

【分析】 由题设 X 与 Y 独立得 $X - Y \sim N(-\mu, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$, 即随机变量 $X - Y$ 的密度的对称中心 $x = -\mu$.

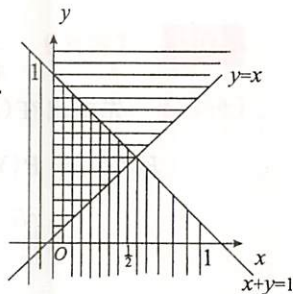
现 $P\{X - Y \geq 1\} = \frac{1}{2}$, 即对称中心在 $x = 1$ 处, $-\mu = 1$, 就有 $\mu = -1$.

445 【答案】 $1 + e^{-1} - 2e^{-\frac{1}{2}}$

【分析】 应用公式 $P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f(x, y) dx dy$ 即可求得结果.

事实上,

$$\begin{aligned} P\{X + Y \leq 1\} &= \iint_{x+y \leq 1} f(x, y) dx dy \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{1-x} e^{-y} dy \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (e^{-x} - e^{-1}) dx \\ &= 1 + e^{-1} - 2e^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$



【评注】 在应用公式 $P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f(x, y) dx dy$ 计算概率时, 实际上就是求积分

$\iint_D f(x, y) dx dy$, 其中积分区域 $D: x + y \leq 1$ 就是由随机变量的范围 $X + Y \leq 1$ 而来的. 由于被积函数 $f(x, y) \neq 0$ 的范围是 $0 < x < y$, 因此实际要积分的区域应该是 $0 < x < y$ 与 $x + y \leq 1$ 的公共部分, 即图中水平阴影线与垂直阴影线的交集, 这种计算方法在计算概率和求随机变量函数分布时是经常要遇到的.

446 【答案】 $\frac{17}{18}$

【分析】 由题设知 $\sum_{k=1}^3 P\{X = k\} = 1, P\{X = k\} = \frac{1}{3},$

根据全概公式得

$$\begin{aligned} P\{Y \leq 2.5\} &= \sum_{k=1}^3 P\{Y \leq 2.5, X = k\} \\ &= \sum_{k=1}^3 P\{X = k\} P\{Y \leq 2.5 | X = k\} \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + 1 + \frac{2.5}{3} \right) = \frac{8.5}{9} = \frac{17}{18}. \end{aligned}$$

447 【答案】 $\frac{1}{4}F(y) + \frac{3}{4}F(y-1)$

【分析】 $X_1 \sim B(1, \frac{3}{4})$ 即

X_1	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

由全概率公式

$$\begin{aligned}
 F_Y(y) &= P\{X_1 + X_2 \leq y\} \\
 &= P\{X_1 = 0\}P\{X_1 + X_2 \leq y \mid X_1 = 0\} + P\{X_1 = 1\}P\{X_1 + X_2 \leq y \mid X_1 = 1\} \\
 &= \frac{1}{4}P\{X_2 \leq y \mid X_1 = 0\} + \frac{3}{4}P\{1 + X_2 \leq y \mid X_1 = 1\} \\
 &= \frac{1}{4}P\{X_2 \leq y\} + \frac{3}{4}P\{X_2 \leq y - 1\} \\
 &= \frac{1}{4}F(y) + \frac{3}{4}F(y-1)
 \end{aligned}$$

【评注】 如果 $X_1 + X_2$ 中有一个是离散型的随机变量, 则一般对离散型的随机变量可能取值用全概率公式来求解, 就如本题所用的方法。

448 【答案】 $\frac{1}{2}$

【分析】 由分布函数定义得

$$F\left(\frac{1}{2}, 1\right) = P\left\{X \leq \frac{1}{2}, Y \leq 1\right\} = P\{X=0, Y=0\} + P\{X=0, Y=1\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

449 【答案】 0.3

【分析】 由于 $0.1 + 0.2 + \alpha + \beta + 0.1 + 0.2 = 0.6 + \alpha + \beta = 1$, 即 $\alpha + \beta = 0.4$,
 又 $0.5 = P\{X^2 + Y^2 = 1\} = P\{X^2 = 0, Y^2 = 1\} + P\{X^2 = 1, Y^2 = 0\}$
 $= P\{X = 0, Y = 1\} + P\{X = 0, Y = -1\} + P\{X = 1, Y = 0\}$
 $= \alpha + 0.1 + 0.1 = \alpha + 0.2$.

故 $\alpha = 0.3$ 也就有 $\beta = 0.1$;

$$P\{X^2 Y^2 = 1\} = P\{X^2 = 1, Y^2 = 1\} = P\{X = 1, Y = 1\} + P\{X = 1, Y = -1\} = 0.2 + \beta = 0.3.$$

本题所给条件 X^2, Y^2 , 所以也可以转换成

		Y^2		
		0	1	
已知	X^2			
	0	0.2	$\alpha + 0.1$	, 且 $P\{X^2 + Y^2 = 1\} = 0.5$, 求 $P\{X^2 Y^2 = 1\}$.
	1	0.1	$\beta + 0.2$	

显然 $\alpha + 0.1 + \beta + 0.2 = 0.7$, $\alpha + \beta = 0.4$ 又 $P\{X^2 + Y^2 = 1\} = \alpha + 0.1 + 0.1 = 0.5$,
 即 $\alpha = 0$, 则 $P\{X^2 Y^2 = 1\} = \beta + 0.2 = 0.3$.

450 【答案】 0

【分析】 $P\{\max(X, Y) > \mu\} - P\{\min(X, Y) < \mu\}$

$$\begin{aligned}
 &= 1 - P\{\max(X, Y) \leq \mu\} - [1 - P\{\min(X, Y) \geq \mu\}] \\
 &= -P\{\max(X, Y) \leq \mu\} + P\{\min(X, Y) \geq \mu\} \\
 &= -P\{X \leq \mu, Y \leq \mu\} + P\{X \geq \mu, Y \geq \mu\} \\
 &= -P\{X \leq \mu\}P\{Y \leq \mu\} + P\{X \geq \mu\}P\{Y \geq \mu\} \\
 &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0
 \end{aligned}$$

【评注】 如果本题 X 与 Y 不相互独立, 结论也一样, 推导稍烦些.

451 【答案】 $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$

【分析】 $X - Y \sim N(0, 2)$, 其概率密度函数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{2 \cdot 2}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$f(x)$ 的最大值在 $x = 0$ 处, 最大值为 $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$.

452 【答案】 μ_2

【分析】 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; 0)$, 所以 X, Y 相互独立.

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y), \quad X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), \quad Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2).$$

由正态分布密度函数对称性, $F_X(\mu_1) = P\{X \leq \mu_1\} = \frac{1}{2}$.

$$F(\mu_1, y) = F_X(\mu_1)F_Y(y) = \frac{1}{2}F_Y(y) = \frac{1}{4}, \text{ 就有 } F_Y(y) = \frac{1}{2}, \text{ 即 } y = \mu_2.$$

453 【答案】 $N\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{4}, \frac{1}{4}; 0\right)$

【分析】 (X, Y) 的分布函数为 $\Phi(2x+1)\Phi(2y-1)$ 可知 X, Y 必独立.



微信扫码

$$\Phi(2x+1)\Phi(2y-1) = \Phi\left[\frac{x - (-\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}}\right]\Phi\left[\frac{y - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right] = F_X(x)F_Y(y)$$

由正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的标准化可知

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right),$$

$$\text{现 } F_X(x) = \Phi\left[\frac{x - (-\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}}\right], \text{ 所以 } X \sim N\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

$$\text{同理 } Y \sim N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \text{ 总之 } (X, Y) \sim N\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{4}, \frac{1}{4}; 0\right).$$

454 【答案】 $\Phi(x)$

【分析】 将事件“ $Y = -1$ ”和“ $Y = 1$ ”看成一完备事件组, 则由全概率公式

$$\begin{aligned}
 F(x) &= P\{Z \leq x\} = P\{XY \leq x\} = P\{Y = -1\}P\{XY \leq x | Y = -1\} + \\
 &\quad P\{Y = 1\}P\{XY \leq x | Y = 1\} \\
 &= \frac{1}{2}P\{-X \leq x | Y = -1\} + \frac{1}{2}P\{X \leq x | Y = 1\} \\
 &= \frac{1}{2}P\{-X \leq x\} + \frac{1}{2}P\{X \leq x\} = \frac{1}{2}P\{X \geq -x\} + \frac{1}{2}\Phi(x) \\
 &= \frac{1}{2}[1 - P\{X < -x\}] + \frac{1}{2}\Phi(x) = \frac{1}{2}[1 - P\{X \leq -x\}] + \frac{1}{2}\Phi(x) \\
 &= \frac{1}{2}[1 - \Phi(-x)] + \frac{1}{2}\Phi(x) \\
 &= \frac{1}{2}\Phi(x) + \frac{1}{2}\Phi(x) = \Phi(x).
 \end{aligned}$$

【评注】 本题解法常用于两独立随机变量其中一个为离散型的情况,一般先处理离散用全概率公式.

455 【答案】 $\frac{1}{2}$

【分析】 首先要求出 $f(x)$ 中的未知参数 a, b ; 而后由 $P\{|X| < \sqrt{2}\} = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f(x) dx$ 求得概率.

$$\text{因为 } 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2} \quad (1)$$

$$\text{又 } 2 = EX^2 = \int_a^b x^3 dx = \frac{b^4 - a^4}{4} = \frac{b^2 + a^2}{2} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{b^2 + a^2}{2} \quad (2)$$

由(1)(2)求得 $a = 1, b = \sqrt{3}$. 所以 $f(x) = \begin{cases} x, & 1 < x < \sqrt{3} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$.

$$P\{|X| < \sqrt{2}\} = P\{-\sqrt{2} < X < \sqrt{2}\} = \int_1^{\sqrt{2}} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

456 【答案】 2

【分析】 已知 $X_i \sim P(\lambda_i)$ 且 X_1 与 X_2 相互独立, 所以 $EX_i = DX_i = \lambda_i (i = 1, 2)$.

$$\begin{aligned}
 E(X_1 + X_2)^2 &= E(X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2) = EX_1^2 + 2EX_1EX_2 + EX_2^2 \\
 &= \lambda_1 + \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2 + \lambda_2^2 = \lambda_1 + \lambda_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)^2
 \end{aligned}$$

为求得最终结果我们需要由已知条件计算出 $\lambda_1 + \lambda_2$.

$$\begin{aligned}
 \text{因为 } P\{X_1 + X_2 > 0\} &= 1 - P\{X_1 + X_2 \leq 0\} = 1 - P\{X_1 + X_2 = 0\} \\
 &= 1 - P\{X_1 = 0, X_2 = 0\} = 1 - P\{X_1 = 0\}P\{X_2 = 0\} \\
 &= 1 - e^{-\lambda_1} \cdot e^{-\lambda_2} = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} = 1 - e^{-1}
 \end{aligned}$$

所以 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

$$\text{故 } E(X_1 + X_2)^2 = (\lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_1 + \lambda_2)^2 = 2.$$

457 【答案】 $\sigma^2(\sigma^2 + 2\mu^2)$

【分析】 $D(X_1X_2) = E(X_1X_2)^2 - [E(X_1X_2)]^2 = E(X_1^2X_2^2) - [EX_1EX_2]^2$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

显然 X_1^2 与 X_2^2 也相互独立. $EX_1 = EX_2 = \mu$, 所以

$$D(X_1 X_2) = EX_1^2 \cdot EX_2^2 - \mu^4 = (\sigma^2 + \mu^2)^2 - \mu^4 = \sigma^4 + 2\sigma^2\mu^2 = \sigma^2(\sigma^2 + 2\mu^2).$$

【评注】 X_1 与 X_2 独立 $E(X_1 X_2) = EX_1 \cdot EX_2$, 而 $D(X_1 X_2) \neq DX_1 \cdot DX_2$.

458 【答案】 $\frac{\sqrt{e}}{2(\sqrt{e}-1)}$

【分析】 记 $c = \frac{1}{\sqrt{e}-1}$, $\lambda = \frac{1}{2}$, 则 $P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!}c, k=1,2,\dots$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{c\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{c\lambda^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right) e^{\lambda} \cdot c = \lambda \cdot e^{\lambda} \cdot c \\ &= \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{e}-1} = \frac{\sqrt{e}}{2(\sqrt{e}-1)}. \end{aligned}$$

这里用到泊松分布的期望公式 $\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda$.

459 【答案】 $\frac{n-1}{n}\sigma^2$

【分析】 $D(X_1 - \bar{X}) = D\left(X_1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = D\left(\frac{n-1}{n}X_1 - \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i\right)$

$$= \frac{(n-1)^2}{n^2} DX_1 + \frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^n DX_i = \frac{(n-1)^2}{n^2} \sigma^2 + (n-1) \frac{\sigma^2}{n^2} = \frac{n-1}{n} \sigma^2.$$

【评注】 本题计算 $D(X_i - \bar{X})$ 充分利用 $X_1, \dots, X_n$ 的相互独立性, 计算量较小, 如果用其他方法会加大计算量, 例如:

$$D(X_1 - \bar{X}) = DX_1 + D\bar{X} - 2\text{Cov}(X_1, \bar{X}) = \dots;$$

$$D(X_1 - \bar{X}) = E(X_1 - \bar{X})^2 - [E(X_1 - \bar{X})]^2 = \dots.$$

所以本题的方法应作为基本方法加以掌握.

460 【答案】 1

【分析】 $DX = DY = \frac{1}{4},$

$$1 = D(X+Y) = DX + DY + 2\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 2\text{Cov}(X, Y)$$

$$\text{解得 } \text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{4}, \rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{1}{4}}} = 1.$$

461 【答案】 $1 - e^{-1}$

【分析】 如果把 Y 看成 X 的函数, 先求出 Y 的概率密度, 然后求 $E(Y)$ 会较麻烦. 可以直接用公式:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx, \text{ 其中 } f(x) \text{ 为 } X \text{ 的密度函数.}$$

$$\begin{aligned}
 \text{现 } E(Y) &= E(\min\{|X|, 1\}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \min(|x|, 1) f(x) dx \\
 &= \int_0^{+\infty} \min(x, 1) e^{-x} dx = \int_0^1 x e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} 1 \cdot e^{-x} dx \\
 &= 1 - 2e^{-1} + e^{-1} = 1 - e^{-1}.
 \end{aligned}$$

462 【答案】 1

【分析】 $F(x) = \begin{cases} a - e^{-bx}, & x > 0 \\ c, & x \leq 0 \end{cases}$, 则 $f(x) = F'(x) = \begin{cases} be^{-bx}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$.

对比指数分布的概率密度函数 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$, $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

得 $\lambda = 1 = b$. $D(X) = \frac{1}{\lambda^2} = 1$.

463 【答案】 $1 - \frac{2}{\pi}$

【分析】 X_1 与 X_2 独立均服从 $N(0, \frac{1}{2})$, 记 $Z = X_1 - X_2$, 则 $Z \sim N(0, 1)$, 有概率密度函数 $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$.

$$\begin{aligned}
 D(|X_1 - X_2|) &= D(|Z|) = E(|Z|^2) - (E|Z|)^2 = E(Z^2) - (E|Z|)^2 \\
 &= D(Z) + [E(Z)]^2 - (E|Z|)^2
 \end{aligned}$$

显然, $D(Z) = 1, E(Z) = 0$,

$$\begin{aligned}
 E|Z| &= \int_{-\infty}^{+\infty} |z| \varphi(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} |z| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} d\left(\frac{z^2}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.
 \end{aligned}$$

因此, $D(|X_1 - X_2|) = 1 + 0 - \frac{2}{\pi} = 1 - \frac{2}{\pi}$.

464 【答案】 $N(0, \mu_2; 1, \sigma_2^2; \rho)$

【分析】 显然 $(\frac{X - \mu_1}{\sigma_1}, Y)$ 也服从二维正态.

由于 $E(\frac{X - \mu_1}{\sigma_1}) = 0, D(\frac{X - \mu_1}{\sigma_1}) = 1$. 故 $(\frac{X - \mu_1}{\sigma_1}, Y) \sim N(0, \mu_2; 1, \sigma_2^2; \rho_1)$,

其中 ρ_1 是 $\frac{X - \mu_1}{\sigma_1}$ 与 Y 的相关系数.

$$\rho_1 = \frac{\text{Cov}(\frac{X - \mu_1}{\sigma_1}, Y)}{\sqrt{D(\frac{X - \mu_1}{\sigma_1})} \sqrt{DY}} = \frac{\text{Cov}(X - \mu_1, Y)}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_1 \sigma_2} = \rho.$$

465 【答案】 1

【分析】 $E[(X-1)(X-2)] = E[X^2 - 3X + 2] = E(X^2) - 3E(X) + 2$
 $= D(X) + (EX)^2 - 3\lambda + 2$
 $= \lambda + \lambda^2 - 3\lambda + 2 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 1$
 即 $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0, (\lambda - 1)^2 = 0, \lambda = 1$.

466 【答案】 $(n-2)\sigma^2$

【分析】 $\text{Cov}(Y_1, Y_n) = \text{Cov}(\sum_{i=2}^n X_i, \sum_{j=1}^{n-1} X_j) = \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{n-1} \text{Cov}(X_i, X_j)$
 $= \sum_{j=1}^{n-1} \text{Cov}(X_n, X_j) + \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=2}^{n-1} \text{Cov}(X_i, X_j) + \sum_{i=2}^n \text{Cov}(X_i, X_1)$
 $= 0 + \sum_{k=2}^{n-1} \text{Cov}(X_k, X_k) + 0 = (n-2)\sigma^2$.

467 【答案】 2

【分析】 切比雪夫不等式为 $P\{|X - EX| \geq \epsilon\} \leq \frac{DX}{\epsilon^2}$, 现 $EX = \frac{b-1}{2} = 1$, 即 $b = 3$
 所以 $X \sim U[-1, 3]$. 故 $DX = \frac{(3+1)^2}{12} = \frac{4}{3}$. 现 $\frac{DX}{\epsilon^2} = \frac{1}{3}$. 即 $\frac{4}{3\epsilon^2} = \frac{1}{3}, \epsilon = 2$.

468 【答案】 $\frac{7}{2}$

【分析】 题目要求我们计算 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} ?$ 为此我们需要应用大数定律或依概率收敛的定义与性质来计算. 由题设知 $X_1, \dots, X_n$ 独立同分布:

$$X_i \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

且 $EX_i = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$.

根据辛钦大数定律: $\bar{X} \xrightarrow{P} \frac{7}{2} \quad (n \rightarrow \infty)$.

469 【答案】 $N(0, \frac{2n}{\lambda^2})$

【分析】 显然 $Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots$ 独立同分布. $EZ_i = E(X_{2i} - X_{2i-1}) = 0$,
 $DZ_i = D(X_{2i} - X_{2i-1}) = DX_{2i} + DX_{2i-1} = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$.

根据中心极限定理, 当 n 充分大时, $\sum_{i=1}^n Z_i$ 近似服从 $N(0, \frac{2n}{\lambda^2})$.

470 【答案】 $N(0, \frac{n-1}{n})$

$$\text{【分析】 } X_1 - \bar{X} = X_1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = X_1 - \frac{1}{n} X_1 - \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i = \frac{n-1}{n} X_1 - \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i$$

所以 $X_1 - \bar{X}$ 是相互独立的 n 个标准正态分布随机变量的线性组合, $X_1 - \bar{X}$ 必服从正态分布, $N(*, *)$

$$E(X_1 - \bar{X}) = \frac{n-1}{n} EX_1 - \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n EX_i = 0;$$

$$D(X_1 - \bar{X}) = \frac{(n-1)^2}{n^2} DX_1 + \frac{1}{n^2} \sum_{i=2}^n DX_i = \frac{(n-1)^2}{n^2} + \frac{n-1}{n^2} = \frac{n^2 - n}{n^2},$$

$$\text{所以 } (X_1 - \bar{X}) \sim N\left(0, \frac{n-1}{n}\right).$$

471 【答案】 $F^n(y)$

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq y\} \\ &= P\{X_1 \leq y, X_2 \leq y, \dots, X_n \leq y\} \\ &= P\{X_1 \leq y\} P\{X_2 \leq y\} \cdots P\{X_n \leq y\} \\ &= F(y) F(y) \cdots F(y) = [F(y)]^n \end{aligned}$$

472 【答案】 $F(1, 1)$

【分析】 由题设知 (X, Y) 的密度

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}[x^2 + (y-1)^2]} \sim N(0, 1; 1, 1; 0)$$

故 $X \sim N(0, 1), Y \sim N(1, 1)$, 且 X, Y 独立, X 与 $(Y-1)$ 为两相互独立的标准正态.

$$\frac{X^2/1}{(Y-1)^2/1} = \frac{X^2}{(Y-1)^2} \text{ 服从 } F(1, 1).$$

473 【答案】 $C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n$

【分析】 $X_i \sim B\left(1, \frac{1}{2}\right)$, X_i 为一次伯努利试验的结果, X_i 相互独立.

所以 $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 可以看成 n 次独立重复试验. 即 $\sum_{i=1}^n X_i \sim B\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

$$P\left\{\bar{X} = \frac{k}{n}\right\} = P\{n\bar{X} = k\} = P\left\{\sum_{i=1}^n X_i = k\right\} = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

474 【答案】 2

【分析】 显然 $E(S^2) = D(X)$, 而 $DX = E(X - EX)^2$.

$$\begin{aligned} \text{现求 } EX &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{2} e^{-|x-\mu|} dx = \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\mu} x \cdot e^{-x-\mu} dx + \int_{\mu}^{+\infty} x e^{\mu-x} dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[e^{-\mu} (xe^x - e^x) \Big|_{-\infty}^{\mu} + e^{-\mu} (-xe^{-x} - e^{-x}) \Big|_{\mu}^{+\infty} \right] = \end{aligned}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot \frac{1}{2} e^{-|x-\mu|} dx = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt = 2 \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = 2.$$

【评注】 EX 可以由 $f(x)$ 在 $x = \mu$ 处对称性, 直接得出 $EX = \mu$.

475 【答案】 0.8

【分析】 $X \sim t(n)$, 所以根据 $t(n)$ 分布随机变量的典型模式, 可以表示

$$X = \frac{X_1}{\sqrt{Y_1/n}} \sim t(n) \text{ 其中 } ① X_1 \sim N(0, 1); ② Y_1 \sim \chi^2(n); ③ X_1, Y_1 \text{ 相互独立.}$$

现来考虑 $X^2 = \frac{X_1^2}{Y_1/n} = \frac{X_1^2/1}{Y_1/n} \sim F(1, n)$, 其中 ① $X_1^2 \sim \chi^2(1)$; ② $Y_1 \sim \chi^2(n)$; ③ X_1^2, Y_1 相互独立.

由于 $t(n)$ 的概率密度是偶函数, 故 $P\{X > C\} = 0.6$, 可知 $C < 0$.

$$\begin{aligned} P\{Y > C^2\} &= P\{X^2 > C^2\} = P\{X > -C\} + P\{X < C\} = 2P\{X < C\} \\ &= 2[1 - P\{X \geq C\}] = 2[1 - P\{X > C\}] = 2[1 - 0.6] = 0.8. \end{aligned}$$

476 【答案】 2 和 4

$$\left(\frac{X_1}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_2}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(2), \left(\frac{X_3}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_4}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_5}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_6}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(4),$$

且它们是相互独立的.

$$\text{故 } \frac{\left(\frac{X_1}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_2}{\sigma}\right)^2}{2} \bigg/ \frac{\left(\frac{X_3}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_4}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_5}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_6}{\sigma}\right)^2}{4} = 2 \frac{X_1^2 + X_2^2}{X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 + X_6^2} \sim F(2, 4).$$

477 【答案】 $\frac{2}{\lambda^2}$

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } ET &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [DX_i + (EX_i)^2] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} \right] = \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

478 【答案】 $\frac{\lambda-1}{\lambda^2}$

【分析】 总体 $X \sim E(\lambda)$, $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

$$\begin{aligned} ET &= E(\bar{X} - S^2) = E(\bar{X}) - E(S^2) \\ &= E(X) - D(X) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{\lambda-1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

479 【答案】 $\frac{9}{20}$

【分析】 就有一个参数 θ , 矩估计量用 $EX = \bar{X}$.

$$EX = 0 \cdot \theta^2 + 1 \cdot 2\theta(1-\theta) + 2 \cdot (1-\theta)^2 = 2(1-\theta)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{1}{10}(5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0) = \frac{11}{10}$$

$$\text{总之, } 2(1-\theta) = \frac{11}{10}, \hat{\theta} = \frac{9}{20}.$$

480 【答案】 10.2

【分析】 由于 μ 的双侧置信区间的上、下限, 无论 σ^2 已知或者 σ^2 未知, 都关于样本值平均 $\bar{x}$ 是对称的, 现置信下限为 0.78, 则置信上限应为 $\bar{x} + (\bar{x} - 7.8) = 9.0 + (9.0 - 7.8) = 10.2$, 故置信上限应填 10.2.

481 【答案】 $\sqrt{\frac{3}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}$

【分析】 由于 $EX = 0$, 总体一阶矩没有包含未知参数 a , 故采用二阶矩.

总体二阶矩 $EX^2 = DX + (EX)^2 = \frac{(2a)^2}{12} = \frac{a^2}{3}$, 样本二阶矩为 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$,

$$EX^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2, \text{ 即 } \frac{a^2}{3} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2, a = \sqrt{\frac{3}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}.$$

482 【答案】 $\max_{1 \leq i \leq n} X_i$

【分析】 $X \sim f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 \leq x \leq \theta, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 似然函数 $L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \begin{cases} \theta^{-n}, & 0 \leq \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \leq \theta, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

要使 $L(\theta)$ 最大, 只有使 θ 最小, 但由于 $x_i \leq \theta, i = 1, 2, \dots$.

所以, 取 $\theta = \max_{1 \leq i \leq n} x_i$ 最小了, 即最大似然估计量 $\hat{\theta} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$.

或者 $\hat{\theta} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

483 【答案】 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|$

【分析】 似然函数 $L = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^n e^{-\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n |x_i|}$

两端取对数 $\ln L = -n \ln 2 - n \ln \lambda - \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n |x_i|$,

$$\frac{d \ln L}{d \lambda} = -\frac{n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^n |x_i| = 0,$$

解得 $\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|$, 所以 $\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|$.

484 【答案】 大

【分析】 检验水平 α 为检验犯第一类错误的概率,即 H_0 为真的条件下,拒绝 H_0 而犯错误的概率,显然 α 变大时,拒绝 H_0 的范围变大.

485 【答案】 0.5548

【分析】 当 H_0 成立时, $X \sim N(0.5, 0.04)$

$$\bar{X} \sim N\left(0.5, \frac{0.04}{36}\right) = N\left(0.5, \left(\frac{0.1}{3}\right)^2\right)$$

$$\alpha = 0.05 = P\{\text{拒绝 } H_0 \mid H_0 \text{ 成立}\} = P\{\bar{X} > C\}$$

$$= 1 - P\{\bar{X} \leq C\} = 1 - \Phi\left[\frac{C - 0.5}{\frac{0.1}{3}}\right] = 1 - \Phi(30C - 15).$$

所以 $\Phi(30C - 15) = 0.95 = \Phi(1.645)$, 即 $30C - 15 = 1.645$

$$C = \frac{16.645}{30} = 0.5548.$$

选 择 题

486 【答案】 B

【分析】 因为 $A \cup B = \bar{A} \cup \bar{B}$, 所以 $A \cup (A \cup B) = A \cup (\bar{A} \cup \bar{B})$.

即 $A \cup B = \Omega \cup \bar{B} = \Omega$, 因而 $\bar{A} \cup \bar{B} = A \cup B = \Omega$, $\bar{A} \cup \bar{B} = \Omega$.

故 $\overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = \bar{\Omega}$, 即 $AB = \emptyset$. 答案应选(B).

487 【答案】 B

【分析】 A, B 独立, 则 $A, \bar{B}$ 相互独立, $\bar{A}, B$ 也相互独立.

$$0.3 = P(A - B) = P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B}) = P(A)[1 - P(B)] = 0.6 \cdot P(A),$$

所以 $P(A) = 0.5$.

$$P(B - A) = P(B\bar{A}) = P(B)P(\bar{A}) = 0.4 \cdot [1 - P(A)] = 0.4 \cdot 0.5 = 0.2.$$

答案应选(B).

488 【答案】 B

【分析】 由题设知, 试验的基本事件共有 4 个:

$w_1 = \text{“正, 正”}, w_2 = \text{“正, 反”}, w_3 = \text{“反, 正”}, w_4 = \text{“反, 反”},$

所以 $A = \{w_1, w_2\}, B = \{w_2, w_4\}, C = \{w_2, w_3, w_4\}, P(A) = P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, P(C) =$

$\frac{3}{4}$, 显然 A 与 B 独立, $B \subset C$, 故 B, C 不独立, 选项(A)不成立.

又 $BC = B, ABC = AB, P(ABC) = P(AB) = P(A)P(B) = P(A)P(BC)$, 即 A 与 BC 独立, 选项(B)正确.

而 $P(ABC) = P(A)P(B) = \frac{1}{4} \neq P(B)P(AC) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$, $P(ABC) = \frac{1}{4} \neq P(C)P(AB) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}$, 故选项(C)、(D) 不正确.

489 【答案】 C

【分析】 已知 $P(\bar{A} | B) = P(B | \bar{A})$, $\frac{P(\bar{A}B)}{P(B)} = \frac{P(B\bar{A})}{P(\bar{A})}$, 即 $P(B) = P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, 所以 $P(A) + P(B) = 1$. 选项(A)、(B) 是 A 与 B 独立的充要条件, 因此不能选. 由“对称性”知选项(C) 正确, 应选(C).

事实上, $P(\bar{B} | A) = P(A | \bar{B})$, $\frac{P(\bar{B}A)}{P(A)} = \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}$, 即 $P(A) = P(\bar{B}) = 1 - P(B)$, 所以 $P(A) + P(B) = 1$.

选项(D) 未必成立, 这是因为 $P(A | B) = P(\bar{A} | B) = 1 - P(A | B) \Leftrightarrow P(A | B) = \frac{1}{2}$ 即 $\frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1}{2}$, $P(AB) = \frac{1}{2}P(B)$, 此与 $P(\bar{A} | B) = P(B | \bar{A})$ 不等价.

490 【答案】 C

【分析】 A, B, C 两两独立, 只要满足 $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ 就有 A, B, C 相互独立. 现 $A - B$ 和 C 独立, 即有 $P(A\bar{B}C) = P(A\bar{B})P(C)$. 又因为 A, B 独立, $A, \bar{B}$ 也独立. $P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B})$. 所以 $P(A\bar{B}C) = P(A)P(\bar{B})P(C)$. A, B, C 两两独立, 即有 $A, \bar{B}, C$ 两两独立, 所以 $A, \bar{B}, C$ 相互独立. 也就有 A, B, C 相互独立. 答案应选(C).

491 【答案】 D

【分析】 已知 $AB = \emptyset$, 我们无法断言 $\bar{A}\bar{B} = \emptyset$ 或 $\neq \emptyset$, 因此(A)、(B) 不能选. 由于 $AB = \emptyset \Leftrightarrow A \subset \bar{B}$ 所以 $A \cup \bar{B} = \bar{B}$, 选择(D).

【评注】 $P(\bar{A}\bar{B}) = 0$ 与 $P(\bar{A}\bar{B}) \neq 0$, 并非是逻辑关系中的“非此即彼”, 因为 A, B 并不是事先给出的确定的事件, 而是满足条件“ $AB = \emptyset$ ”的无穷多个事件, 所以 $P(\bar{A}\bar{B}) = 0$ 有时成立, 有时不成立. 例如 $A = \bar{B}$, 则 $AB = \bar{B}B = \emptyset$, $\bar{A}\bar{B} = \bar{B}\bar{B} = \emptyset$, 所以 $P(\bar{A}\bar{B}) = 0$; 又如事件 $A = \{0 \leq X \leq \frac{1}{2}\}$, $B = \{\frac{3}{4} \leq X \leq 1\}$, 其中随机变量 X 在 $[0, 1]$ 上服从均匀分布, 则 $AB = \emptyset$, 而 $\bar{A}\bar{B} = \{-\infty < X < 0\} \cup \{\frac{1}{2} < X < \frac{3}{4}\} \cup \{1 < X < +\infty\}$, $P(\bar{A}\bar{B}) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} dx = \frac{1}{4} \neq 0$.

492 【答案】 C

【分析】 由于 $AB = \emptyset$, 就有 $A \subset \bar{B}$, 也就有 $P(A) \leq P(\bar{B})$. 如果 $P(A) = 1$, 则 $P(\bar{B}) \geq P(A) = 1$. $P(\bar{B}) = 1$, 即有 $P(B) = 0$, 选择(C).



微信扫码

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

如果 $P(A) = 0$, 只能得到 $P(\bar{B}) \geq 0$.

493 【答案】 B

【分析】 这是一道考查概率性质的选择题, 应用概率运算性质知, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \leq P(A) + P(B)$, 选项(A) 不成立. $P(A - B) = P(A) - P(AB) \geq P(A) - P(B)$, 故正确选项为(B). 而 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \leq \frac{P(A)}{P(B)}$, 所以(D) 不成立. 至于选项(C), 它可能成立也可能不成立, 例如 $AB = \emptyset, P(A) > 0, P(B) > 0$, 则 $P(AB) = 0 < P(A)P(B)$; 如果 $A \subset B$, 则 $P(AB) = P(A) \geq P(A)P(B)$.

494 【答案】 C

【分析】 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = 1$, 即 $P(AB) = P(A)$, 所以

$$P(A - B) = P(A) - P(AB) = 0$$

答案应选(C).

495 【答案】 B

【分析】 $P[(A_1 \cup A_2) | B] = \frac{P[(A_1 \cup A_2)B]}{P(B)} = \frac{P(A_1B \cup A_2B)}{P(B)}$
 而 $P(A_1 | B) + P(A_2 | B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} + \frac{P(A_2B)}{P(B)}$
 故 $P(A_1 \cup A_2 | B) = P(A_1 | B) + P(A_2 | B)$, 就有 $P(A_1B \cup A_2B) = P(A_1B) + P(A_2B)$.
 答案应选(B).

496 【答案】 D

【分析】 $P(AB) \geq \frac{P(A) + P(B)}{2}$, 即 $2P(AB) \geq P(A) + P(B)$,
 也就有 $P(AB) \geq P(A) + P(B) - P(AB) = P(A \cup B)$. 显然 $P(AB) \leq P(A \cup B)$
 所以必有 $P(AB) = P(A \cup B)$, 也必有 $P(AB) = P(A) = P(B) = P(A \cup B)$.
 $P(A - B) = P(A) - P(AB) = 0$. 答案应选(D).

497 【答案】 B

【分析】 分布律必定成立 $\sum_{k=0}^{\infty} P\{X = k\} = 1$, 即 $1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C}{k!} e^{-2} = C e^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = C \cdot e^{-1}$,
 所以 $C = e$. 这里用到了公式 $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, -\infty < x < +\infty$,

本题也可对比泊松分布 $P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \dots$.

可以看出当 $\lambda = 1$ 时, 就有 $P\{X = k\} = \frac{1}{k!} e^{-1}, k = 0, 1, 2, \dots$, 即 $C = e$, 选(B).

498 【答案】 D

【分析】 由图形立即得到正确选项为(D),事实上,由题设知

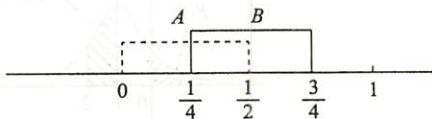
$$X \sim f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

$$\text{所以 } P(A) = P\left\{0 \leq X \leq \frac{1}{2}\right\} = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \frac{1}{2},$$

$$P(B) = P\left\{\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4}\right\} = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(x) dx = \frac{1}{2},$$

$$P(AB) = P\left\{\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{1}{2}\right\} = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \frac{1}{4},$$

因此成立 $P(AB) = P(A)P(B)$, 即 A 与 B 相互独立.



499 【答案】 C

【分析】 由于 $F(x)$ 是单调不减的非负函数, 所以(A)、(B) 不成立. 已知 $f(x)$ 是偶函数, 因此有 $F(-x) = \int_{-\infty}^{-x} f(t) dt = \int_x^{+\infty} f(t) dt$, $F(x) + F(-x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt + \int_x^{+\infty} f(t) dt = 1$, 选择(C).

而 $2F(x) - F(-x) = 2 \int_{-\infty}^x f(t) dt - \int_x^{+\infty} f(t) dt = 2 - 3 \int_x^{+\infty} f(t) dt \neq 1$, 选项(D) 不成立.

500 【答案】 D

【分析】 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = a \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) dx + b \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x) dx = a + b = 1$, 知四个选项均符合这个要求, 因此只好通过 $F(0) = \frac{1}{8}$ 确定正确选项.

$$\begin{aligned} \text{由于 } F(0) &= \int_{-\infty}^0 f(x) dx = a \int_{-\infty}^0 f_1(x) dx + b \int_{-\infty}^0 f_2(x) dx \\ &= \frac{a}{2} + 0 = \frac{a}{2} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

所以 $a = \frac{1}{4}$, 正确选项为(D).

501 【答案】 B

【分析】 由于 $F(x)$ 是右连续函数, 故 $F(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} 1 = 1$.

所以应选(B).

$F(x)$ 不一定左连续所以当 $x < a$ 时 $F(x) = 0$ 不能推出 $F(a) = 0$. (A) 不正确.

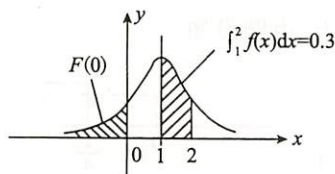
因 $F(a) = P\{X \leq a\} = P\{X < a\} + P\{X = a\} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$. 故(C) 不正确.

$P\{X \geq a\} = \frac{1}{2}$ 即 $P\{X < a\} = \frac{1}{2}$. 同(C). 故(D) 也不正确.

502 【答案】 A

【分析】 $f(1+x) = f(1-x)$, 即密度函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处对称.

方法 1



$$F(0) = P\{X \leq 0\} = \int_{-\infty}^0 f(x) dx = \frac{1}{2} - 0.3 = 0.2$$

方法 2 $F(0) = P\{X \leq 0\} = \int_{-\infty}^0 f(x) dx = 1 - \int_0^{+\infty} f(x) dx$

$$= 1 - \int_0^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx - \int_2^{+\infty} f(x) dx$$

$$= 1 - \int_0^1 f(1-t) d(1-t) - \int_1^{+\infty} f(x) dx$$

$$= 1 - \int_0^1 f(1-t) dt - \int_1^{+\infty} f(x) dx$$

$$= 1 - \int_0^1 f(1+t) dt - \int_1^{+\infty} f(x) dx$$

$$= 1 - \int_1^2 f(x) dx - \int_1^{+\infty} f(x) dx = 1 - 0.3 - 0.5 = 0.2.$$

答案应为(A).

503 【答案】 C

【分析】 函数 $F(x)$ 成为分布函数的充要条件为:

① $F(x)$ 单调不减; ② $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$; ③ $F(x)$ 右连续.

(A) $F(ax)$ 当 $a < 0$ 时, ①, ②, ③ 都不满足, 故 $F(ax)$ 不是分布函数.

(B) $F(x^2 + 1)$ 不满足条件 $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, 不是分布函数.

(C) $F(x^3 - 1)$ 条件 ①, ②, ③ 均成立, 是分布函数.

(D) $F(|x|)$ 不满足条件 $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, 不是分布函数.

504 【答案】 B

【分析】 函数 $f(x)$ 为概率密度函数的充要条件为 ① $f(x) \geq 0$, ② $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

(A) $f(2x)$ 不是概率密度函数. 因 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(2x) d(2x) = \frac{1}{2} \neq 1$.

(B) $f(2-x)$ 是概率密度函数. 因 $f(2-x) \geq 0$, 且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(2-x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(2-x) d(2-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1.$$

对(C)、(D) 容易举出反例, 使 $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x^2) dx$ 均不为 1.

例如 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 是概率密度函数.

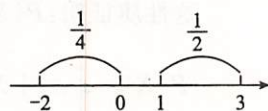
但 $f^2(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 和 $f(x^2) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$,

显然都不是概率密度函数.

505 【答案】 C

【分析】 $P\{-2 < X < 0\} = \frac{1}{4}$ 和 $P\{1 < X < 3\} = \frac{1}{2}$, 则

$$0 < P\{0 < X < 1\} \leq 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$



从 $\begin{cases} P\{1 < X < 3\} = \frac{1}{2} \\ 0 < P\{0 < X < 1\} \leq \frac{1}{4} \end{cases}$, 得到 $P\{0 < X < 1\} = \frac{1}{4}$. 进一步有 $P\{-1 < X < 0\} = \frac{1}{4}$,

即 $\begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$. 答案应选(C).

506 【答案】 C

【分析】 记 $-X$ 的分布函数和概率密度分别为 $F_1(x)$ 和 $f_1(x)$.

则 $F_1(x) = P\{-X \leq x\} = P\{X \geq -x\} = 1 - P\{X < -x\}$
 $= 1 - P\{X \leq -x\} = 1 - F(-x)$

$$f_1(x) = F_1'(x) = [1 - F(-x)]' = f(-x)$$

故答案选(C).

【评注】 X 为连续型随机变量, 必有 $F_1'(x) = f_1(x)$, 只有(C) 满足此条件.

507 【答案】 B

【分析】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$, 所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a + be^{-x}) = a = 1$. $F(x)$ 为连续型 X 的分布, 故 $F(x)$ 必连续, $F(x)$ 在 $x = 0$ 连续. 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0$, 即 $a + b = 0, b = -1$.

508 【答案】 D

【分析】 方法 1 $P\{X \leq 2 | X \geq 1\} = \frac{P\{X \geq 1, X \leq 2\}}{P\{X \geq 1\}} = \frac{P\{1 \leq X \leq 2\}}{\int_1^{+\infty} e^{-x} dx}$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$= \frac{\int_1^2 e^{-x} dx}{\int_1^{+\infty} e^{-x} dx} = \frac{e^{-1} - e^{-2}}{e^{-1}} = 1 - e^{-1}.$$

方法 2 $P\{X \leq 2 | X \geq 1\} = 1 - P\{X > 2 | X \geq 1\} = 1 - P\{X \geq 2 | X \geq 1\}$
 $= 1 - P\{X \geq 1\} = 1 - e^{-1}.$

【评注】 当随机变量 X 服从指数分布 $E(\lambda)$ 时, 必具有性质: 无记忆性, 即
 $P\{X \geq s+t | X \geq t\} = P\{X \geq s\}$, 其中 $s, t \geq 0$.

方法 2 就用了这性质.

这性质证明: $P\{X \geq t\} = \int_t^{+\infty} f(x) dx = \int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda t}, t \geq 0$

$$P\{X \geq s+t | X \geq t\} = \frac{P\{X \geq s+t\}}{P\{X \geq t\}} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P\{X \geq s\}, s, t \geq 0.$$

509 【答案】 C

【分析】 X 落入 $(-\infty, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, +\infty)$ 的概率应为 $\frac{7}{100}, \frac{24}{100},$

$\frac{38}{100}, \frac{24}{100}, \frac{7}{100}$, 即 0.07, 0.24, 0.38, 0.24, 0.07.

$$P\{X \leq x_4\} = 1 - P\{X > x_4\} = 1 - 0.07 = 0.93 = \Phi(1.5).$$

而 $X \sim N(15, 4)$, 所以 $\frac{X-15}{2} \sim N(0, 1)$.

$$P\{X \leq x_4\} = P\left\{\frac{X-15}{2} \leq \frac{x_4-15}{2}\right\} = \Phi\left(\frac{x_4-15}{2}\right).$$

所以 $\frac{x_4-15}{2} = 1.5$, 解得 $x_4 = 18$.

又 $P\{X \leq x_3\} = 1 - P\{X > x_3\} = 1 - 0.24 - 0.07 = 0.69 = \Phi(0.5),$

$$P\{X \leq x_3\} = P\left\{\frac{X-15}{2} \leq \frac{x_3-15}{2}\right\} = \Phi\left(\frac{x_3-15}{2}\right), \text{得 } \frac{x_3-15}{2} = 0.5,$$

故 $x_3 = 16$.

由对称性 x_1 与 x_4, x_2 与 x_3 都关于 15 对称.

所以

$$x_1 = 15 - (x_4 - 15) = 12, x_2 = 15 - (x_3 - 15) = 14.$$

510 【答案】 A

【分析】 设 $Y = 2X + 3$, 则 Y 的分布函数 $F_Y(y)$ 为

$$F_Y(x) = P\{Y \leq x\} = P\{2X + 3 \leq x\} = P\left\{X \leq \frac{x-3}{2}\right\} = \int_{-\infty}^{\frac{x-3}{2}} f(x) dx$$

$Y = 2X + 3$ 的概率密度

$$f_Y(x) = F'_Y(x) = \left(\int_{-\infty}^{\frac{x-3}{2}} f(x) dx\right)' = f\left(\frac{x-3}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} f\left(\frac{x-3}{2}\right)$$

答案应选(A).

511 【答案】 A

【分析】 如果 $F_Z(z)$ 在 $z=a$ 有间断点, 即 $F_Z(a) - F_Z(a-0) > 0$, 也就有 $P\{Z=a\} = F_Z(a) - F_Z(a-0) > 0$.

由全概率公式知, 对任意实数 a

$$\begin{aligned} P\{X+Y=a\} &= P\{X+Y=a, Y=1\} + P\{X+Y=a, Y=-1\} \\ &= P\{X=a-1, Y=1\} + P\{X=a+1, Y=-1\} \\ &= P\{X=a-1\}P\{Y=1\} + P\{X=a+1\}P\{Y=-1\} \\ &= \frac{1}{2}[P\{X=a-1\} + P\{X=a+1\}] = \frac{1}{2}(0+0) = 0 \end{aligned}$$

所以 $X+Y=Z$ 的分布函数 $F_Z(z)$ 是连续函数. 选择(A).

【评注】 本题也可用直接求出 $F_Z(z)$ 来判断 $F_Z(z)$ 是连续函数.

512 【答案】 C

【分析】 记事件 $A = \{X \leq x\}, B = \{Y \leq y\}$, 则

$$\begin{aligned} P\{X > x, Y > y\} &= P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) \\ &= 1 - P\{X \leq x\} - P\{Y \leq y\} + P\{X \leq x, Y \leq y\} \\ &= 1 - F_X(x) - F_Y(y) + F(x, y). \end{aligned}$$

513 【答案】 D

【分析】 记 $Y = \max(X_1, X_2)$ 的分布为 $F_Y(x)$, 概率密度为 $f_Y(x)$, 则

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P\{Y \leq x\} = P\{\max(X_1, X_2) \leq x\} = P\{X_1 \leq x, X_2 \leq x\} \\ &= P\{X_1 \leq x\}P\{X_2 \leq x\} = F_1(x)F_2(x) \end{aligned}$$

$$f_Y(x) = F'_Y(x) = [F_1(x)F_2(x)]' = f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$$

答案选(D).

514 【答案】 D

【分析】 显然我们可以通过计算每个选项中的随机变量的分布来确定正确选项, 这样会有大量计算. 我们也可以利用指数分布的一些性质来判断.

如果 $X \sim E(\lambda)$ 则 $EX = \frac{1}{\lambda}$.

$$E(X+Y) = EX + EY = \frac{2}{\lambda} \neq \frac{1}{2\lambda},$$

$$E(X-Y) = EX - EY = 0 \neq \frac{1}{2\lambda},$$

所以(A)不对, (B)也不对; 当 X, Y 独立时, $\max(X, Y)$ 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} (1 - e^{-\lambda x})^2, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

显然不等于 $E(2\lambda)$ 的分布函数 $F_1(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$, 所以选择(D).

事实上, $\min(X, Y)$ 的分布函数

$$\begin{aligned} P\{\min(X, Y) \leq x\} &= 1 - P\{\min(X, Y) > x\} \\ &= 1 - P\{X > x, Y > x\} = 1 - P\{X > x\}P\{Y > x\} \\ &= 1 - [1 - F(x)]^2 = \begin{cases} 1 - e^{-2\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

即 $\min(X, Y) \sim E(2\lambda)$.

【评注】 应用数字特征可以判断随机变量不服从某种分布.

515 【答案】 A

【分析】
$$\begin{aligned} P\{X = Y\} &= \sum_{k=1}^{\infty} P\{X = Y = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{X = k, Y = k\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\{X = k\}P\{Y = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} p^2 q^{2(k-1)} \\ &= p^2 \sum_{k=1}^{\infty} (q^2)^{k-1} = p^2 \cdot \frac{1}{1 - q^2} = \frac{p^2}{(1+q)(1-q)} \\ &= \frac{p}{1+q} = \frac{p}{2-p}. \end{aligned}$$

516 【答案】 C

【分析】 显然, 我们需由等式 $P\{X+Y \leq 1\} = \frac{1}{2}$ 确定 μ , 为此需要知道 $X+Y$ 的分布. 由题设 X 与 Y 独立知 $X+Y \sim N(2\mu, 1)$, 所以由正态分布概率密度对称性知 $P\{X+Y \leq 2\mu\} = \frac{1}{2}$, 得到 $2\mu = 1, \mu = \frac{1}{2}$, 选择(C).

517 【答案】 A

【分析】 $(X, Y) \sim f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$

可以看出 $X \sim N(0, 1), Y \sim N(0, 1)$, 且 X 与 Y 相互独立.



微信扫码

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x)f_Y(y)}{f_Y(y)} = f_X(x)$$

显然 $f_Y(y) > 0$. 答案应选(A).

518 【答案】 B

【分析】 两个随机变量即使是独立同分布,也不能认为是相同的 $X = Y$,所以不能选(A).

$$\begin{aligned} \text{事实上, } P\{X = Y\} &= P\{X = Y = 1\} + P\{X = Y = 0\} \\ &= P\{X = 1, Y = 1\} + P\{X = 0, Y = 0\} \\ &= P\{X = 1\}P\{Y = 1\} + P\{X = 0\}P\{Y = 0\} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

519 【答案】 C

【分析】 由题设知 $P\{X_1 + X_2 \neq 0\} = 0$, 而
 $P\{X_1 + X_2 \neq 0\} = P\{X_1 = -1, X_2 = -1\} +$
 $P\{X_1 = -1, X_2 = 0\} + P\{X_1 = 0, X_2 = -1\} +$
 $P\{X_1 = 0, X_2 = 1\} + P\{X_1 = 1, X_2 = 0\} +$
 $P\{X_1 = 1, X_2 = 1\},$

所以等式中的各加项概率都等于零,据此可求得
 (X_1, X_2) 的联合分布表,并算得

$$\begin{aligned} P\{X_1 = X_2\} &= P\{X_1 = -1, X_2 = -1\} + P\{X_1 = \\ 0, X_2 = 0\} &+ P\{X_1 = 1, X_2 = 1\} = \frac{1}{2}, \text{选择(C)}. \end{aligned}$$

$X_1 \backslash X_2$	-1	0	1	
-1	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

520 【答案】 D

【分析】 二维正态分布应具有密度函数

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

其中 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1$ 均为常数,记作 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$.

显然本题的 $f(x, y)$ 不具这种形式,因此 (X, Y) 不服从二维正态,所以(A)、(B)不正确.

由于 $\sin x e^{-\frac{x^2}{2}}$ 是奇函数,因此 $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin y e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 0$.

$$\begin{aligned} \text{而 } f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \sin x \sin y}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \sin y e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \sqrt{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \end{aligned}$$

即 $X \sim N(0, 1)$, 同理可证 $Y \sim N(0, 1)$. 由此可知,虽然联合分布 (X, Y) 不服从二维正态分布,但其边缘分布 X 与 Y 均为正态分布. 故选(D).

521 【答案】 B

【分析】 方法1 由于联合分布决定边缘分布,但边缘分布不能决定联合分布. 因此(A)不成立,由(A)不成立,可以推知(C)、(D)不一定成立,所以选择(B).

方法2 也可以举例给以说明. 例如

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$(X,Y) \sim$$

$X \backslash Y$	0	1	
0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

$$\text{和}(U,V) \sim$$

$U \backslash V$	0	1	
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

显然, (X,Y) 与 (U,V) 具有相同的边缘分布, 均服从 $B(1, \frac{1}{2})$, 但联合分布不同. 且

$X+Y$	0	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

,

$U+V$	1
P	1

以及

$X-Y$	0
P	1

,

$U-V$	-1	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

.

522 【答案】 C

【分析】 设事件 $A = \{X \leq a\}, B = \{Y \leq b\}$, 则

$$P\{X > a, Y > b\} = P(\overline{A}\overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB)$$

$$= 1 - P\{X \leq a\} - P\{Y \leq b\} + P\{X \leq a, Y \leq b\}$$

$$= 1 - F(a, +\infty) - F(+\infty, b) + F(a, b).$$

【评注】 本题也可以直接用平面区域图来求解.

523 【答案】 A

【分析】 $X \sim B(1, \frac{1}{2})$, X 取值只能 $X = 0$ 或 $X = 1$, 将 $X = 0$ 和 $X = 1$ 看成完备事件组, 用全概率公式有

$$\begin{aligned}
 P\{X+Y \leq \frac{1}{3}\} &= P\{X=0\}P\{X+Y \leq \frac{1}{3} | X=0\} + P\{X=1\}P\{X+Y \leq \frac{1}{3} | X=1\} \\
 &= \frac{1}{2}P\{Y \leq \frac{1}{3} | X=0\} + \frac{1}{2}P\{1+Y \leq \frac{1}{3} | X=1\} \\
 &= \frac{1}{2}P\{Y \leq \frac{1}{3}\} + \frac{1}{2}P\{Y \leq -\frac{2}{3}\} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

524 【答案】 D

【分析】 $P\{X \leq 2Y\} = P\{X=0\} + P\{X=1, Y=1\}$

$$= \frac{2}{3} + P\{X=1\}P\{Y=1\} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{9}.$$

525 【答案】 C

【分析】 $F_Z(x) = P\{Z \leq x\} = P\{\min(X,Y) \leq x\} = 1 - P\{\min(X,Y) > x\}$

$$\begin{aligned}
 &= 1 - P\{X > x, Y > x\} = 1 - P\{X > x\}P\{Y > x\} \\
 &= 1 - [1 - P\{X \leq x\}][1 - P\{Y \leq x\}] \\
 &= 1 - [1 - F(x)][1 - F(x)] \\
 &= 1 - [1 - F(x)]^2.
 \end{aligned}$$

答案应选(C).

【评注】 可以验证(A) $F^2(x)$ 是 $Z = \max(X, Y)$ 的分布函数.

(B) $F(x)F(y)$ 是 (X, Y) 的分布函数, 而(D) $[1 - F(x)][1 - F(y)]$ 不是分布函数, 因为它不满足分布函数的充要条件.

526 【答案】 B

【分析】 设 (X_1, X_2) 的分布为 $F_1(x_1, x_2)$, (Y_1, Y_2) 的分布为 $F_2(y_1, y_2)$.

$$\begin{aligned}
 F_2(y_1, y_2) &= P\{Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2\} = P\{2X_1 \leq y_1, \frac{1}{3}X_2 \leq y_2\} \\
 &= P\{X_1 \leq \frac{y_1}{2}, X_2 \leq 3y_2\} = F_1(\frac{y_1}{2}, 3y_2).
 \end{aligned}$$

所以 $f_2(y_1, y_2) = \frac{3}{2}f_1(\frac{y_1}{2}, 3y_2)$.

527 【答案】 C

$$\begin{aligned}
 \text{【分析】 } P\{1 < \max(X, Y) \leq 2\} &= P\{\max(X, Y) \leq 2\} - P\{\max(X, Y) \leq 1\} \\
 &= P\{X \leq 2, Y \leq 2\} - P\{X \leq 1, Y \leq 1\} \\
 &= P\{X \leq 2\}P\{Y \leq 2\} - P\{X \leq 1\}P\{Y \leq 1\} \\
 &= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

528 【答案】 C

$$\begin{aligned}
 \text{【分析】 } P\{\min(X, Y) > 1\} &= P\{X > 1, Y > 1\} = P\{X > 1\}P\{Y > 1\} \\
 &= e^{-\lambda} \cdot e^{-(\lambda+2)} = e^{-2(\lambda+1)}.
 \end{aligned}$$

【评注】 利用公式: $X \sim E(\lambda)$ 时, $P\{X > t\} = e^{-\lambda t}$, ($t > 0$).

529 【答案】 C

$$\begin{aligned}
 \text{【分析】 } E(X)E\left(\frac{1}{1+X}\right) &= \lambda \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k+1)!} e^{-\lambda} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} - \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = 1 - e^{-\lambda}
 \end{aligned}$$

答案选(C).

530 【答案】 D

【分析】 $E[X(X+Y-2)] = E[X^2 + XY - 2X] = E(X^2) + E(XY) - E(2X)$
 $= DX + (EX)^2 + EX \cdot EY - 2EX = 3 + 4 + 2 - 4 = 5.$

531 【答案】 D

【分析】 由于 $DX = EX^2 - (EX)^2 \geq 0$, 故 $EX^2 \geq (EX)^2$, 选择(D). 选项(A)、(B) 对某些随机变量可能成立, 对某些随机变量可能不成立. 例如, 随机变量 X 在区间 $[0, 1]$ 上服从均匀分布, 则 $EX = \frac{1}{2}, DX = \frac{1}{12}, EX^2 = DX + (EX)^2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3} < \frac{1}{2} = EX$, 选项(A) 成立. 此时(B) 不成立. 又如 $X \sim N(\mu, \sigma^2), EX = \mu, DX = \sigma^2, EX^2 = \sigma^2 + \mu^2$, 取 $\sigma \geq \mu = \frac{1}{2}$, 则 $EX^2 \geq 2\mu^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = EX$, 即选项(B) 成立. 此时(A) 不成立.

532 【答案】 C

【分析】 由于 $DX = D(X-c) = E(X-c)^2 - [E(X-c)]^2$,
 所以 $E(X-c)^2 = DX + [E(X-c)]^2$,

选择(C).

或者是, 由于

$$E(X-c)^2 = E(X^2 - 2cX + c^2) = E(X^2) - 2cEX + c^2,$$

$$[E(X-c)]^2 = (EX-c)^2 = (EX)^2 - 2cEX + c^2,$$

故 $E(X-c)^2 - [E(X-c)]^2 = E(X^2) - (EX)^2 = DX, E(X-c)^2 = DX + [E(X-c)]^2$
 选择(C).

533 【答案】 B

【分析】 当(B) 成立时, 即 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x+a)dx = 0$.

令 $x+a=t$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x+a)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} (t-a)f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt - a \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \\ &= E(X) - a = 0 \quad \text{即 } E(X) = a. \end{aligned}$$

534 【答案】 D

【分析】 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = 2$, 令 $t = \frac{x}{2}$, 则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 2tf(2t)d(2t) = 4 \int_{-\infty}^{+\infty} tf(2t)dt = 2,$$

即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(2x)dx = \frac{1}{2}.$$

535 【答案】 C

【分析】 $F(x) = 0.4\Phi\left(\frac{x-5}{2}\right) + 0.6\Phi\left(\frac{x+1}{3}\right)$, 故

$$f(x) = F'(x) = 0.4\varphi\left(\frac{x-5}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + 0.6\varphi\left(\frac{x+1}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = 0.2\varphi\left(\frac{x-5}{2}\right) + 0.2\varphi\left(\frac{x+1}{3}\right),$$

其中 $\varphi(x)$ 为标准正态分布的概率密度.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 0.2x\varphi\left(\frac{x-5}{2}\right)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} 0.2x\varphi\left(\frac{x+1}{3}\right)dx \\ &= 0.4 \int_{-\infty}^{+\infty} (2t+5)\varphi(t)dt + 0.6 \int_{-\infty}^{+\infty} (3t-1)\varphi(t)dt \\ &= 0.4 \cdot 5 + 0.6 \cdot (-1) = 2.0 - 0.6 = 1.4. \end{aligned}$$

答案应选(C).

【评注】 当随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 时, $(\sigma > 0)$, 其分布函数

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

$$E(X) = \mu.$$

所以, 当 X 的分布函数为 $\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, 则 $E(X) = \mu$.

进一步推广: 当 $F(x) = c_1\Phi\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right) + c_2\Phi\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)$ 时, $(c_1 + c_2 = 1)$

则必有 $E(X) = c_1\mu_1 + c_2\mu_2$.

$$\text{本题 } F(x) = 0.4\Phi\left(\frac{x-5}{2}\right) + 0.6\Phi\left(\frac{x+1}{3}\right).$$

$$\text{则 } E(X) = 0.4 \cdot 5 + 0.6 \cdot (-1) = 1.4.$$

536 【答案】 A

【分析】 $D(X^2) = E(X^4) - (EX^2)^2$.

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = 2 \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = 2!,$$

$$EX^4 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 f(x)dx = 2 \int_0^{+\infty} x^4 \cdot \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \int_0^{+\infty} x^4 e^{-x} dx = 4!,$$

$$D(X^2) = 4! - (2!)^2 = 24 - 4 = 20.$$

【评注】 利用 $f(x)$ 是偶函数, 具有对称性, 可以简化计算. 记住公式 $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$.

537 【答案】 C

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } E[(X-2)^2 e^{2X}] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-2)^2 e^{2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (x-2)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}} dx = e^2, \end{aligned}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

所以选择(C). 上式最后一步是因为 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}$ 是正态 $N(2,1)$ 的概率密度,

而 $\int_{-\infty}^{+\infty} (x-2)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}} dx$ 恰是它的方差, 等于 1.

538 【答案】 C

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } D(XY) &= E(XY)^2 - (EXY)^2 \\ &= E(X^2Y^2) - (EXEY)^2 \\ &= EX^2 \cdot EY^2 - (1 \cdot 1)^2 \\ &= [DX + (EX)^2][DY + (EY)^2] - 1 \\ &= (2 + 1^2)(2 + 1^2) - 1 \\ &= 8. \end{aligned}$$

故应选(C).

539 【答案】 B

【分析】 直接计算 Y 与 Z 相关系数 ρ_{YZ} 来确定正确选项. 由于

$$\text{Cov}(Y, Z) = \text{Cov}(Y, aX + b) = a\text{Cov}(X, Y), \quad DZ = D(aX + b) = a^2 DX,$$

$$\rho_{YZ} = \frac{\text{Cov}(Y, Z)}{\sqrt{DY} \sqrt{DZ}} = \frac{a\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DY} \sqrt{a^2 DX}} = \frac{a}{|a|} \rho_{XY}, \quad \rho_{YZ} = \rho_{XY} \text{ 就有 } \frac{a}{|a|} = 1, \text{ 即 } a > 0. \text{ 选择(B).}$$

540 【答案】 D

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} &= \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}\sigma_{21} \\ &= \text{Cov}(X_1, X_1)\text{Cov}(X_2, X_2) - \text{Cov}(X_1, X_2)\text{Cov}(X_2, X_1) \\ &= DX_1 DX_2 - [\text{Cov}(X_1, X_2)]^2 = 0 \\ \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} = 0 \text{ 等价 } &\left[\frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{DX_1} \sqrt{DX_2}} \right]^2 = \rho^2 = 1, \text{ 即 } |\rho| = 1, \text{ 选择(D).} \end{aligned}$$

541 【答案】 D

【分析】 直接用定义通过计算确定正确选项, 已知 $DX = DY$, 故

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Cov}(X, X)} = 1,$$

即 $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(X, X)$, 所以 $\text{Cov}(X, X - Y) = \text{Cov}(X, X) - \text{Cov}(X, Y) = 0$, 即 $\text{Cov}(X - Y, X) = 0$,

选择(D). 其余选项均不正确, 这是因为当 $DX = DY$ 时必有

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X + Y, X - Y) &= \text{Cov}(X, X) - \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(Y, X) - \text{Cov}(Y, Y) \\ &= DX - DY = 0, \end{aligned}$$

选项(C)成立, 不能推出 $\rho = 1$. 选项(A)、(B)可推出

$$\text{Cov}(X, Y) = -\text{Cov}(X, X) = -DX \text{ 或 } \text{Cov}(X, Y) = -\text{Cov}(Y, Y) = -DY,$$

由此得

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = \frac{-DX}{DX} = -1.$$

542 【答案】 D

【分析】 应用公式 $D(X \pm Y) = DX + DY \pm 2\text{Cov}(X, Y)$ 确定正确选项.

由于 X 与 Y 的相关系数 $\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}}$, 故 $\rho > 0$ 就是 $\text{Cov}(X, Y) > 0$. 所以

$$D(X + Y) = DX + DY + 2\text{Cov}(X, Y) > DX + DY.$$

$$D(X - Y) = DX + DY - 2\text{Cov}(X, Y) < DX + DY. \text{ 选择(D).}$$

543 【答案】 A

【分析】 直接通过计算协方差来判断,

已知 X 与 Y 独立, 故 $\text{Cov}(X, Y) = 0$,

$$\text{Cov}(X, X + Y) = \text{Cov}(X, X) + \text{Cov}(X, Y) = DX > 0.$$

所以 X 与 $X + Y$ 一定相关, 选择(A).

又由于

$$\text{Cov}(X, XY) = EX^2Y - EX \cdot EXY = EX^2 \cdot EY - (EX)^2 \cdot EY$$

$$= [EX^2 - (EX)^2]EY = DXEY \begin{cases} = 0, & \text{若 } EY = 0 \\ \neq 0, & \text{若 } EY \neq 0 \end{cases}$$

故选项(C)、(D) 有时成立, 有时不成立.

【评注】 如果将选项中的“相关”改为独立, “不相关”改为不独立, 那么正确选项应该是().

由原题计算知 X 与 $X + Y$ 一定相关, 从而推知 X 与 $X + Y$ 一定不独立, 选择(B).

544 【答案】 D

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } E(X - c)^2 &= E[(X - \mu) + (\mu - c)]^2 \\ &= E[(X - \mu)^2 + 2(X - \mu)(\mu - c) + (\mu - c)^2] \\ &= E(X - \mu)^2 + 2(\mu - c)E(X - \mu) + E(\mu - c)^2 \\ &= E(X - \mu)^2 + 2(\mu - c) \cdot 0 + E(\mu - c)^2 \\ &\geq E(X - \mu)^2 \end{aligned}$$

答案应选(D).

545 【答案】 B

【分析】 根据分布函数的充要条件 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$. 所以, 常数 b 必不可能小于 0, b 也不可能为 0, 因为 $b = 0$ 就不可能 $D(X) = 4$.

由此得到 $a = 1, b > 0$.

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-bx}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \text{ 即有 } f(x) = F'(x) = \begin{cases} be^{-bx}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

因此 $X \sim E(\lambda)$, $DX = \frac{1}{\lambda^2} = 4$, 即 $\lambda = \frac{1}{2}$, 也就有 $b = \frac{1}{2}$.

答案应选(B).

546 【答案】 D

【分析】 通过计算协方差来确定正确选项. 由于 X_i 相互独立, 故

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = 0 \ (i \neq j), \text{Cov}(\bar{X}, \bar{X}) = D\bar{X} = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i = \frac{\sigma^2}{n}.$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_1 - \bar{X}, X_2 - \bar{X}) &= \text{Cov}(X_1, X_2) - \text{Cov}(X_1, \bar{X}) - \text{Cov}(\bar{X}, X_2) + \text{Cov}(\bar{X}, \bar{X}) \\ &= -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Cov}(X_1, X_i) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Cov}(X_i, X_2) + D\bar{X} \\ &= -\frac{1}{n} \sigma^2 - \frac{1}{n} \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} \neq 0. \end{aligned}$$

所以 $X_1 - \bar{X}$ 与 $X_2 - \bar{X}$ 相关. 因此 $X_1 - \bar{X}$ 与 $X_2 - \bar{X}$ 不独立, 选择(D).

547 【答案】 D

【分析】 由于 X 与 Y 相互独立, 故 e^X 与 $2Y+1$ 相互独立, 选择(D).

事实上, 当 $x > 0$ 时,

$$\begin{aligned} P\{e^X \leq x, 2Y+1 \leq y\} &= P\left\{X \leq \ln x, Y \leq \frac{y-1}{2}\right\} \\ &= P\{X \leq \ln x\} \cdot P\left\{Y \leq \frac{y-1}{2}\right\} = P\{e^X \leq x\} \cdot P\{2Y+1 \leq y\}. \end{aligned}$$

而当 $x \leq 0$ 时, $P\{e^X \leq x\} = 0$,

所以 $P\{e^X \leq x, 2Y+1 \leq y\} = 0 = P\{e^X \leq x\} \cdot P\{2Y+1 \leq y\}$, 由此可知 e^X 与 $2Y+1$ 相互独立.

选项(A)、(B)、(C) 不成立, 是由于 $\text{Cov}(3X+1, 4Y-2) = 12\text{Cov}(X, Y) = 0$, 所以 $3X+1$ 与 $4Y-2$ 不相关; $\text{Cov}(X+Y, X-Y) = \text{Cov}(X, X) - \text{Cov}(Y, Y) = DX - DY \neq 0$ 得出 $X+Y$ 与 $X-Y$ 并非不相关; $\text{Cov}(X+Y, 2Y+1) = 2\text{Cov}(X, Y) + 2\text{Cov}(Y, Y) = 2DY \neq 0$ 得出 $X+Y$ 与 $2Y+1$ 并非不相关, 也就有 $X+Y$ 与 $2Y+1$ 不相互独立.

548 【答案】 C

【分析】 由题设知 $XY \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-P\{X=1, Y=1\} & P\{X=1, Y=1\} \end{pmatrix}$, 所以

$$EXY = P\{X=1, Y=1\} = \frac{5}{8},$$

$$P\{X+Y \leq 1\} = 1 - P\{X+Y > 1\} = 1 - P\{X=1, Y=1\} = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8},$$

故选择(C).

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

549 【答案】 A

【分析】 X_1 分布律有对称性, 所以 $EX_1 = (n+1)$.

$$\begin{aligned} D(X_1) &= E[X_1 - (n+1)]^2 \\ &= [n - (n+1)]^2 \cdot 0.3 + [(n+1) - (n+1)]^2 \cdot 0.4 + [(n+2) - (n+1)]^2 \cdot 0.3 \\ &= 0.3 + 0 + 0.3 = 0.6 \end{aligned}$$

答案选(A).

550 【答案】 A

【分析】 $\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = \frac{E(XY) - EX \cdot EY}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}}, X + Y = 2$.

X, Y 均服从 $B\left(2, \frac{1}{2}\right)$ 分布, $EX = EY = 1, DX = DY = \frac{1}{2}$.

$$XY \text{ 的分布为 } \begin{array}{c|cc} & XY & \\ \hline p & 0 & 1 \\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}, E(XY) = \frac{1}{2}$$

$$\text{总之, } \rho_{XY} = \frac{\frac{1}{2} - 1 \cdot 1}{\sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}}} = -1. \text{ 答案选(A).}$$

【评注】 本题也可以更简单解为 $X + Y = 2, Y = 2 - X$.

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = \frac{\text{Cov}(X, 2 - X)}{\sqrt{DX} \sqrt{D(2 - X)}} = \frac{\text{Cov}(X, 2) - \text{Cov}(X, X)}{DX} = \frac{-DX}{DX} = -1.$$

如果对相关系数性质了解, 由 $Y = 2 - X$ 可以直接得出 $\rho_{XY} = -1$.

551 【答案】 B

【分析】 显然, $EX = 1, DX = 1$.

$$\begin{aligned} P\{X \geq 3\} &= P\{X - 1 \geq 2\} = P\{|X - 1| \geq 2\} - P\{X - 1 \leq -2\} \\ &= P\{|X - 1| \geq 2\} + 0 = P\{|X - EX| \geq 2\} \leq \frac{DX}{2^2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

答案应选(B).

【评注】 如果直接计算 $P\{X \geq 3\}$, 就有 $P\{X \geq 3\} = \int_3^{+\infty} f(x) dx = e^{-3}$. 比用切比雪夫不等式的估计要更精确, 但切比雪夫不等式不用涉及 X 的分布, 较简单.

552 【答案】 C

【分析】 直接应用辛钦大数定律的条件进行判断, 选择(C). 事实上, 应用辛钦大数定律, 随机变量序列 $X_1, \dots, X_n, \dots$ 必须是: “独立同分布且数学期望存在”, 选项(A) 缺少同分布条件, 选项(B)、(D) 虽然服从同一分布但不能保证期望存在. 因此选择(C).

553 【答案】 D

【分析】 切比雪夫大数定律为: $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 两两不相关, 存在常数 c , 使 $D(X_i) \leq c$, ($i = 1, 2, \dots$), 则对任意 $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) \right| < \epsilon \right\} = 1$$

现 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 两两独立推出不相关, 但从(A), (B), (C) 得不出 $D(X_i) \leq c$, 甚至 $D(X_i)$ 可能不存在.

当(D) 成立时, $D(X_{2i}) = \lambda_2, D(X_{2i-1}) = \lambda_1$, 显然 $D(X_i) \leq \lambda_1 + \lambda_2 = c$. 答案选(D).

554 【答案】 C

【分析】 由题设知 $X_n \sim B(n, \frac{1}{2})$, 根据“二项分布以正态分布为其极限分布”定理得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{X_n - \frac{1}{2}n}{\sqrt{\frac{1}{4}n}} \leq x \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{2X_n - n}{\sqrt{n}} \leq x \right\} = \Phi(x). \text{ 选择(C).}$$

555 【答案】 B.

【分析】 由于 $X_i \sim N(\mu, 1), i = 1, 2, \dots, n$ 相互独立.

$$(X_n - X_1) \sim N(0, 2), \quad \frac{X_n - X_1}{\sqrt{2}} \sim N(0, 1), \quad \frac{(X_n - X_1)^2}{2} \sim \chi^2(1).$$

显然, $2(X_n - X_1)^2$ 并不服从 χ^2 分布, 答案应选(B).

556 【答案】 A

【分析】 由题设知, $X_i \sim N(0, \sigma^2), \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim N(0, \frac{\sigma^2}{n}), \frac{\sqrt{n}\bar{X}}{\sigma} \sim N(0, 1),$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), \bar{X} \text{ 与 } S^2 \text{ 独立, 所以 } \frac{\frac{\sqrt{n}\bar{X}}{\sigma}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/n-1}} = \frac{\sqrt{n}\bar{X}}{S} \sim t(n-1).$$

选择(A).

557 【答案】 C

【分析】 由题设知, $X_i \sim N(0, \sigma^2), \frac{X_i}{\sigma} \sim N(0, 1)$, 且相互独立, $i = 1, 2, \dots, 11$.

由 χ^2 分布, t 分布, F 分布的典型模式知, $\frac{X_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$, 所以, (A) 不成立.

$$\frac{10Y^2}{\sigma^2} = \sum_{i=2}^{11} \left(\frac{X_i}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(10), \text{ 所以, (B) 不成立.}$$

$$\frac{\frac{X_1}{\sigma}}{\sqrt{\frac{10Y^2}{\sigma^2}/10}} = \frac{X_1}{Y} \sim t(10), \text{故(C) 成立.}$$

$$\text{而 } \frac{\frac{X_1^2}{\sigma^2}/1}{\frac{10Y^2}{\sigma^2}/10} = \frac{X_1^2}{Y^2} \sim F(1, 10), \text{(D) 不成立. 所以选择(C).}$$

558 【答案】 C

【分析】 由题设得 $\bar{X} \sim N(0, \frac{\sigma^2}{n})$, $\frac{\sqrt{n}\bar{X}}{\sigma} \sim N(0, 1)$, $\frac{n\bar{X}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$, $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, $\bar{X}$

与 S^2 相互独立, 所以 $\frac{\frac{n\bar{X}^2}{\sigma^2}/1}{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/(n-1)} = \frac{n\bar{X}^2}{S^2} \sim F(1, n-1)$. 选择(C).

559 【答案】 B

【分析】 $X_1 - X_2$ 和 $X_1 + X_2$ 均服从 $N(0, 2\sigma^2)$.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_1 + X_2, X_1 - X_2) &= \text{Cov}(X_1, X_1) + \text{Cov}(X_2, X_1) - \text{Cov}(X_1, X_2) - \text{Cov}(X_2, X_2) \\ &= D(X_1) - D(X_2) = \sigma^2 - \sigma^2 = 0 \end{aligned}$$

所以 $X_1 - X_2$ 与 $X_1 + X_2$ 相互独立且同服从 $N(0, 2\sigma^2)$.

同理 $X_3 - X_4$ 和 $X_3 + X_4$ 也相互独立且均服从 $N(0, 2\sigma^2)$.

显然 $X_1 - X_2, X_1 + X_2, X_3 - X_4, X_3 + X_4$ 相互独立均服从 $N(0, 2\sigma^2)$.

$$Y = \frac{(X_1 - X_2)^2 + (X_3 - X_4)^2}{(X_1 + X_2)^2 + (X_3 + X_4)^2} = \frac{\left[\frac{(X_1 - X_2)^2}{2\sigma^2} + \frac{(X_3 - X_4)^2}{2\sigma^2} \right] / 2}{\left[\frac{(X_1 + X_2)^2}{2\sigma^2} + \frac{(X_3 + X_4)^2}{2\sigma^2} \right] / 2} \sim F(2, 2)$$

答案应选(B).

560 【答案】 D

【分析】 应用 t 分布典型模式来确定正确选项. 由于 $\sum_{i=1}^m X_i \sim N(0, m\sigma^2)$, $U = \frac{\sum_{i=1}^m X_i}{\sqrt{m}\sigma} \sim N(0, 1)$,

而 $\frac{Y_i}{\sigma} \sim N(0, 1)$ 且相互独立, 所以 $V = \sum_{i=1}^n \left(\frac{Y_i}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n)$, U 与 V 相互独立, 根据 t 分布典型

模式知, $\frac{U}{\sqrt{V/n}} = \sqrt{\frac{n}{m}} \frac{\sum_{i=1}^m X_i}{\sqrt{Y_1^2 + \dots + Y_n^2}} \sim t(n)$, 依题设知 $\sqrt{\frac{n}{m}} = 2$, 即 $\frac{m}{n} = \frac{1}{4}$, 选择(D).

561 【答案】 B

【分析】 $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, 所以 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$.

$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 已知 S^2 与 $\bar{X}$ 相互独立, 且 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.

根据 t 分布典型模式: $\frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/(n-1)}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} \sim t(n-1)$.

答案选(B).

【评注】 本题应该直接背出选(B).

562 【答案】 B

【分析】 因为 $X \sim F(n, n)$, 所以 $\frac{1}{X} \sim F(n, n)$, 即 X 与 $\frac{1}{X}$ 具有相同的分布, 因此有

$$p_1 = P\{X \geq 1\} = P\left\{\frac{1}{X} \leq 1\right\} = P\{X \leq 1\} = p_2 \text{ 选择(B).}$$

563 【答案】 C

【分析】 我们要通过 $P\{|X-\mu| < a\} = P\{|\bar{X}-\mu| < b\}$ 来确定正确选项, 为此需要求出 $X-\mu$ 与 $\bar{X}-\mu$ 的分布.

依题设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ 标准化得 $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$, $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0, 1)$,

由此可知: 如果 $P\{|X-\mu| < a\} = P\{|\bar{X}-\mu| < b\}$, 则有

$$P\left\{\frac{|X-\mu|}{\sigma} < \frac{a}{\sigma}\right\} = P\left\{\frac{\sqrt{n}|\bar{X}-\mu|}{\sigma} < \frac{\sqrt{nb}}{\sigma}\right\},$$

所以 $\frac{a}{\sigma} = \frac{\sqrt{nb}}{\sigma}$, 即 $\frac{a}{b} = \sqrt{n}$, 比值 $\frac{a}{b}$ 与 σ 无关, 与 n 有关, 选择(C).

564 【答案】 B

【分析】 应用已知性质 $E\bar{X}^2 = D\bar{X} + (E\bar{X})^2 = \frac{\sigma^2}{n} + 0 = \frac{\sigma^2}{n}$, $ES^2 = D(X) = \sigma^2$, 即可计算得正确选项.

由于 $ET_k = \frac{n}{k}E\bar{X}^2 + \frac{1}{k}ES^2 = \frac{n}{k} \cdot \frac{\sigma^2}{n} + \frac{1}{k}\sigma^2 = \frac{2}{k}\sigma^2$, 故 $ET_k = \frac{2}{k}\sigma^2 = \sigma^2$, 即 $k=2$. 选择(B).

565 【答案】 A

【分析】 $E\left\{\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)\left[\sum_{j=1}^n (nX_j - \sum_{k=1}^n X_k)^2\right]\right\} = E[n\bar{X} \cdot n^2(n-1)S^2]$
 $= n^3(n-1)E(\bar{X} \cdot S^2) = n^3(n-1)\mu \cdot \sigma^2.$

因 $\bar{X}, S^2$ 是相互独立的.

566 【答案】 D

【分析】 $\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), \frac{(n-1)S_Y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 且它们相互独立, 所以

$$\begin{aligned} DT &= \sigma^4 D\left[\frac{n-1}{\sigma^2}(S_X^2 + S_Y^2)\right] = \sigma^4 \left[D\left(\frac{n-1}{\sigma^2}S_X^2\right) + D\left(\frac{n-1}{\sigma^2}S_Y^2\right)\right] \\ &= \sigma^4 [2(n-1) + 2(n-1)] = 4(n-1)\sigma^4. \end{aligned}$$

567 【答案】 C

【分析】 依题意有 $E\hat{\lambda} = \lambda$, 由此计算出 a 值, 从而确定正确选项.

由于总体 $X \sim P(\lambda)$, 所以 $EX = DX = \lambda, E\bar{X} = EX = \lambda, ES^2 = DX = \lambda$,

又 $E\hat{\lambda} = \lambda$, 所以 $a\lambda + (2-3a)\lambda = \lambda, a + 2 - 3a = 1$, 解得 $a = \frac{1}{2}$, 选择(C).

568 【答案】 D

【分析】 由于 $E(X) = (-1) \cdot \theta + 0 \cdot (1-2\theta) + 1 \cdot \theta = 0$, 不包含未知参数 θ .
没法用 $EX = \bar{X}$ 来估计 θ .

考虑用二阶矩. $E(X^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 来求解未知参数 θ .

由于 $E(X^2) = (-1)^2 \cdot \theta + 0^2 \cdot (1-2\theta) + 1^2 \cdot \theta = 2\theta$.

故 $E(X^2) = 2\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$, 解得 $\hat{\theta} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2$.

569 【答案】 B

【分析】 似然函数 $L = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \frac{1}{(2\sigma)^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n |x_i|}{\sigma}}$,

$$\ln L = -n \ln 2 - n \ln \sigma - \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|}{\sigma},$$

$$\text{令 } \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = 0 - \frac{n}{\sigma} + \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|}{\sigma^2} = 0, \text{ 解得 } \sigma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|$$

所以 σ 最大似然估计量 $\hat{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|$. 答案选(B).



微信扫码

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

570 【答案】 D

【分析】 根据矩估计量的定义确定选项, 由于 $EX^2 = DX + (EX)^2$, 而 DX 与 EX 矩估计

量分别为 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{n-1}{n} S^2$ 与 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 所以 EX^2 的矩估计量为 $\frac{n-1}{n} S^2 + \bar{X}^2$. 选择(D).

【评注】 $\frac{n-1}{n} S^2 + \bar{X}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + \bar{X}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$, 按定义, 此即为 EX^2 的矩估计量.

571 【答案】 C

【分析】 应用置信区间的概念, 选择(C). 均值 μ 是一个客观存在的数, 说“ μ 以 95% 的概率落入区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ ” 是不妥的, 因此不选(A), 而(B)、(D) 均与 μ 无关, 无法由它确定 μ 的置信区间.

572 【答案】 A

【分析】 首先要求出 L , 进而推断 L 与 $1-\alpha$ 的关系. 当总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 已知时, μ 的置信区间为 $(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\frac{\alpha}{2}})$, 其中 $u_{\frac{\alpha}{2}}$ 是标准正态分布上 $\frac{\alpha}{2}$ 分位数, 由 $\Phi(u_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + (1-\alpha)}{2}$ 确定, 其中 $\Phi(x)$ 是 x 单调增函数, 因此置信区间的长度 $L = \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} u_{\frac{\alpha}{2}}$, 当样本容量 n 固定时, 随 $u_{\frac{\alpha}{2}}$ 的减小而变小, 即随 $1-\alpha$ 的减小而变小. 所以选择(A).

573 【答案】 C

【分析】 正态总体方差已知($\sigma = 2$), 关于期望值 μ 的置信区间公式为

$$\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \mu_{\alpha/2}, \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \mu_{\alpha/2} \right)$$

其中, $\mu_{\alpha/2}$ 满足 $P\{|U| \geq \mu_{\alpha/2}\} = \alpha, U \sim N(0, 1)$.

本题 $n = 9, \bar{x} = 10, \alpha = 1 - 0.90 = 0.10, \mu_{\alpha/2} = \mu_{0.05}$.

答案应为 $\left(10 - \frac{2}{3} \mu_{0.05}, 10 + \frac{2}{3} \mu_{0.05} \right)$, 选(C).

574 【答案】 A

【分析】 检验水平 α 为检验犯第一类错误的概率, 即 H_0 为真的条件下, 拒绝 H_0 而犯错误的概率. 显然, 当 α 变大时, 拒绝 H_0 的范围应变大, 接受 H_0 的范围应变小. 所以 $\alpha = 0.01$ 条件下拒绝 H_0 , 则在 $\alpha = 0.05$ 条件下必拒绝, 答案应选(A).

575 【答案】 B

【分析】 直接应用“犯第二类错误” = “取伪” = “ H_0 不成立, 接受 H_0 ” 的定义, 选择(B).

基础过关



微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

顶尖考研公众号
(ID: djky66)

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)

高等数学

填空题

576 【答案】 ③

【分析】 要分别考察每个级数的敛散性.

对级数 ① 易求它的部分和

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$, 即级数 ① 收敛. 或考察它的一般项 $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 即级数 ① 收敛.

对级数 ② 的部分和 S_n 有

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = 1$, 又 $S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{n+1}$ 也满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = 1$, 这表明 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$, 级数 ② 也收敛.

对级数 ④ 也有部分和

$$S_n = \left(2 - \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{n+1}{n} - \frac{n+2}{n+1}\right) = 2 - \frac{n+2}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$$

可见级数 ④ 也收敛. 或同样考察它的一般项 $a_n = \frac{n+1}{n} - \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$ 也可知 ④ 收敛.

对级数 ③ 的部分和 S_n 有

$$S_{2n} = 2 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - \frac{4}{3} + \cdots + \frac{n+1}{n} - \frac{n+2}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$$

但 $S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{n+2}{n+1} \rightarrow 2$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在, 故级数 ③ 发散. 或考察它的一般项 a_n , 其中 $a_{2n-1} = \frac{n+1}{n}$, $a_{2n} = -\frac{n+2}{n+1}$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 不存在. 于是 ③ 是发散的. 因此应填 ③.

577 【答案】 $\alpha > \frac{3}{2}$

【分析】 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{n+1}}{n^\alpha}}{\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = 1 \neq 0,$$

则原级数与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$ 同敛散, 而当且仅当 $\alpha > \frac{3}{2}$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$ 才收敛.

578 【答案】 $(-1, 1)$

【分析】 a_n 单调下降有下界 $0 \Rightarrow \exists$ 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \geq 0$. 因交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 发散, 由

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

莱布尼茨法则知, $a > 0$.

$$\text{现记 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{na_n}{a_{n+1}} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n+1)a_{n+1}}{a_{n+2}} \cdot \frac{a_{n+1}}{na_n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}^2}{a_{n+2}a_n} = 1 \cdot \frac{a^2}{a \cdot a} = 1$$

因此收敛区间为 $(-1, 1)$.

579 【答案】 1

【分析】 由于幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=1$ 处条件收敛, 则 $x=1$ 为该幂级数收敛区间的端点, 则其收敛半径为 1, 而幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 收敛半径也为 1.

【评注】 (1) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 有相同的收敛半径 R . 由 $-R < x-x_0 < R$ 得 $-R+x_0 < x < R+x_0$, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ 的收敛区间是 $(-R+x_0, R+x_0)$. 因此题中幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 的收敛区间是 $(0, 2)$.

(2) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=x_0 \neq 0$ 条件收敛, 则 $x=x_0$ 不在该幂级数的收敛区间内(幂级数在收敛区间内绝对收敛). $x=x_0$ 也不能在收敛区间外部(不含端点), 在这些点幂级数必发散. 因此 $x=x_0$ 必是收敛区间的端点. 该幂级数的收敛半径是 $|x_0|$, 收敛区间是 $(-|x_0|, |x_0|)$. 此时 $x=-x_0$ 时该幂级数的敛散性还不能确定, 所以不能确定该幂级数的收敛域.

580 【答案】 $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

【分析】 由 $a_n > 0 (n=1, 2, \dots)$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 条件收敛, 即幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ 在 $t=-1$ 处条件收敛, 则 $t=-1$ 为该幂级数收敛区间的端点, 则该幂级数的收敛半径为 1, 作变量替换原幂级数可改写成

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^n x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (2x^2)^n \xrightarrow{t=2x^2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$$

因此幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^n x^{2n}$ 当 $|2x^2| < 1$ 即 $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时收敛, 当 $|2x^2| > 1$ 即 $|x| >$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时发散, 则其收敛半径为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 收敛区间为 $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

当 $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^n x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^n x^{2n}$ 的收敛域为 $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

581

【答案】 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

【分析】 令 $x - \frac{1}{2} = t$, 由题设知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ 在 $t = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ 处发散, 在 $t = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$ 处收敛, 故其收敛半径 R 同时满足 $R \geq \frac{3}{2}$ 与 $R \leq \frac{3}{2}$, 即 $R = \frac{3}{2}$. 进而可得幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ 的收敛域为 $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

令 $t = x - 1$ 代入即得幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 的收敛域为 $x-1 \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 即

$$-\frac{1}{2} \leq x < \frac{5}{2}$$

【评注】 设有幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 其收敛半径为 R . 若在 $x = x_0$ 或 $-x_0$ 处收敛(发散), 则可知 $R \geq |x_0|$ ($R \leq |x_0|$). 因此若在 $x = x_0$ 与 $-x_0$ 处, 该幂级数一个收敛, 一个发散, 则必有 $R = |x_0|$.

582

【答案】 $4; [-4, 4)$

【分析】 把幂级数中 x^n 项的系数 $\frac{1}{n[4^n + (-3)^n]}$ 记为 a_n , 其中 $n = 1, 2, 3, \dots$ 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n[4^n + (-3)^n]}{(n+1)[4^{n+1} + (-3)^{n+1}]} = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^n}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^{n+1}} = \frac{1}{4}$$

故幂级数的收敛半径 $R = 4$.

当 $x = 4$ 时幂级数成为正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n[4^n + (-3)^n]} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left[1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^n\right]} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$. 由

于 $u_n \sim \frac{1}{n}$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^n} = 1$, 按正项级数比较判别法的极限形式及调和级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散可知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 即幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n + (-3)^n} \cdot \frac{x^n}{n}$ 在点 $x = 4$ 处发散.

当 $x = -4$ 时幂级数成为交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{n[4^n + (-3)^n]}$, 其一般项可分解为

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n 4^n}{n[4^n + (-3)^n]} &= \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{4^n + (-3)^n - (-3)^n}{4^n + (-3)^n} = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{3^n}{n[4^n + (-3)^n]} \\ &= \frac{(-1)^n}{n} - \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n\left[1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^n\right]} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

由于交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 与正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n \left[1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^n\right]}$ 都收敛, 所以幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n + (-3)^n} \cdot \frac{x^n}{n}$

在点 $x = -4$ 处收敛.

综合即知题设幂级数的收敛域为 $[-4, 4)$.

【评注】(1) 因为

$$\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n \left[1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^n\right]} \sim \frac{1}{n} \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

所以正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{n \left[1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^n\right]}$ 收敛.

(2) 本题主要考察求幂级数收敛域的方法. 先求收敛半径 R , 若 $0 < R < +\infty$, 再讨论在收敛区间两端点处幂级数的敛散性.

(3) 判别 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{n[4^n + (-3)^n]}$ 的敛散性时, 常见的错误解法是:

$$\left[\begin{array}{l} \text{因 } \frac{(-1)^n 4^n}{n[4^n + (-3)^n]} = \frac{(-1)^n}{n \left[1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^n\right]} \sim \frac{(-1)^n}{n} (n \rightarrow \infty) \text{ 又 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ 收敛, 所以} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{n[4^n + (-3)^n]} \text{ 收敛.} \end{array} \right]$$

因为对于变号级数来说, 若无穷小 $a_n \sim b_n (n \rightarrow \infty)$, 又 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\nRightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. (见选择题 622)

因此 [] 中的解法是错误的.

583 【答案】 $[-1, 1), S(x) = \frac{x}{2-x} - \ln(1-x)$

【分析】 分为两个幂级数分别考虑, 分别利用公式

$$\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n} \quad (-1 < t \leq 1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t} \quad (-1 < t < 1)$$

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (-x)^n}{n} = -\ln(1-x) \quad (-1 \leq x < 1)$, 收敛域为 $[-1, 1)$.

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} = \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{x}{2} \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{x}{2-x} \quad (-2 < x < 2)$, 收敛

域为 $(-2, 2)$.

因此幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2^n}\right) x^n$ 的收敛域为 $[-1, 1)$, 和函数 $S(x) = \frac{x}{2-x} - \ln(1-x)$.

584 【答案】 $\cos x - 1 - x \sin x \quad (x \in (-\infty, +\infty))$

【分析】 方法 1 分解法并用公式

$$\begin{aligned}\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad (|x| < +\infty) \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (|x| < +\infty) \\ S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{(2n)!} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} - 1 \\ &= -x \sin x + \cos x - 1 \quad (|x| < +\infty)\end{aligned}\tag{1}$$

方法 2 逐项积分法并用公式(1)

$$\begin{aligned}S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n)!} x^{2n} \\ \int_0^x S(t) dt &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n)!} \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n)!} \frac{1}{2n+1} t^{2n+1} \Big|_0^x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n)!} = x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} - 1 \right] = x(\cos x - 1)\end{aligned}$$

求导得

$$S(x) = [x(\cos x - 1)]' = \cos x - 1 - x \sin x \quad (|x| < +\infty)$$

585 【答案】 $e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (|x| < +\infty)$

【分析】 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!!} \quad (|x| < +\infty)$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2(n-1)} \cdot x}{(2n-2)!!} = -x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!!} = -xS(x)$$

$$S(0) = 1$$

解初值问题 $\begin{cases} S'(x) + xS(x) = 0 \\ S(0) = 1 \end{cases}$

两边乘 $e^{\int x dx} = e^{\frac{1}{2}x^2}$ 得

$$(e^{\frac{1}{2}x^2} S(x))' = 0, S(x) = Ce^{-\frac{1}{2}x^2}$$

由 $S(0) = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow S(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

586 【答案】 $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad (-\infty < x < +\infty)$

【分析】 方法 1 已知 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad (n \text{ 为偶数})$$

$$-\frac{x^n}{n!} = \frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad (n \text{ 为奇数})$$

故上面两式相减除 2 得

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

方法2 易知该幂级数收敛半径 $R = +\infty$, 逐项求导两次得

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$S''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2(n-1)+1}}{(2(n-1)+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = S(x)$$

又 $S(0) = 0, S'(0) = 1$, 求 $S(x)$ 转化为求解初值问题

$$\begin{cases} S''(x) - S(x) = 0, \\ S(0) = 0, S'(0) = 1. \end{cases}$$

$$\text{易解得 } S(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

587 【答案】 $\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} - \frac{1}{3^{n+1}} \right] x^n, (-1 < x < 1)$

【分析】 用分解法转化为用公式 $\frac{1}{1-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} (ax)^n (|ax| < 1)$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(x+1) - (x-3)}{(x-3)(x+1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$= -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{1+x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{3}} \right]$$

$$= -\frac{1}{4} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3} \right)^n \right]$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} - \frac{1}{3^{n+1}} \right] x^n, (-1 < x < 1).$$

【评注】 必须写出幂级数展开式成立的区间. 在本题中是开区间 $(-1, 1)$.

588 【答案】 $\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[(-1)^{n-1} \frac{3^n}{2^n} - 1 \right] x^n \quad \left(-\frac{2}{3} < x \leq \frac{2}{3} \right)$

【分析】 令 $f(x) = \ln[(1-x)(2+3x)] = \ln(1-x) + \ln(2+3x)$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + \ln 2 + \ln \left(1 + \frac{3}{2}x \right)$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n}{2^n} \frac{x^n}{n}$$

$$= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[(-1)^{n-1} \frac{3^n}{2^n} - 1 \right] x^n, \quad \left(-\frac{2}{3} < x \leq \frac{2}{3} \right).$$

589 【答案】 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2(n+1)}}{(2n+1)(2n+2)}, x \in [-1, 1]$

【分析】 设 $g(x) = \arctan x$, 则 $g'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, x \in (-1, 1)$.

$$\text{于是 } \arctan x = g(x) - g(0) = \int_0^x g'(t) dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

在 $x = \pm 1$ 处级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ 收敛, 又函数 $\arctan x$ 在 $x = \pm 1$ 处连续, 所以

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, (-1 \leq x \leq 1)$$

由 $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, (-1 < x \leq 1)$ 得 $\ln(1+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n},$
 $(-1 < x^2 \leq 1, \text{即 } -1 \leq x \leq 1)$ 故

$$\begin{aligned} f(x) &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2(n+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} \quad (-1 \leq x \leq 1). \end{aligned}$$

【评注】 为了求反三角函数或对数函数的幂级数展开式, 一般先求它们的导函数的展开式, 然后再进行逐项积分; 逐项积分时要注意不能忘记积分常数.

590 【答案】 $\frac{1}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1] \quad (n = 1, 2, \cdots)$

【分析】 这是求傅里叶系数的问题, 按公式,

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx$$

取 $l = 1$, 得

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^1 f(x) \cos n\pi x dx = \int_0^2 f(x) \cos n\pi x dx \quad (\text{周期函数积分性质}) \\ &= \int_0^1 f(x) \cos n\pi x dx + \int_1^2 f(x) \cos n\pi x dx \\ &= \int_0^1 x \cos n\pi x dx = \frac{1}{n\pi} \int_0^1 x d \sin n\pi x \\ &= -\frac{1}{n\pi} \int_0^1 \sin n\pi x dx = \frac{1}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1] \quad (n = 1, 2, \cdots) \end{aligned}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

591 【答案】 3

【分析】 $a = b \times c \Rightarrow a \perp b, a \perp c; b = c \times a \Rightarrow b \perp a, b \perp c.$

$\Rightarrow$

$$|a| = |b \times c| = |b| |c| \sin \langle b, c \rangle = |b| |c| \quad (1)$$

$$|b| = |c \times a| = |c| |a| \sin \langle c, a \rangle = |c| |a| \quad (2)$$

$$|c| = |a \times b| = |a| |b| \sin \langle a, b \rangle = |a| |b| \quad (3)$$

由(1),(2)式 $\Rightarrow |c|=1, |a|=|b|$, 再由(3)式 $\Rightarrow |a|=|b|=1$.
因此, $|a|+|b|+|c|=3$.

592 【答案】 $\frac{x+1}{16} = \frac{y}{19} = \frac{z-4}{28}$

【分析】 方法1 过点 $P(-1,0,4)$ 且与平面 $3x-4y+z+10=0$ 平行的平面方程是
 $3(x+1)-4(y-0)+(z-4)=0$

即 $3x-4y+z-1=0$.

此平面与直线 $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$ 的交点为 $(15,19,32)$, 所求的直线过点 $P(-1,0,4)$ 和 $(15,19,32)$, 因此所求直线方程为

$$\frac{x+1}{16} = \frac{y}{19} = \frac{z-4}{28}$$

方法2 求空间直线方程一般有两种思路, 一种是像上面的解答过程, 关键求出直线的方向向量和直线上的一点坐标 $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

另一种思路是求出过所求直线的两个平面方程, 它们的交线即为所求, 本题也可如下解法:
过点 $P(-1,0,4)$ 且平行于平面 $3x-4y+z+10=0$ 的平面方程为 $3x-4y+z-1=0$.

过直线 $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$ 的平面束方程为

$$2x-z+2+\lambda(2y-z-6)=0$$

把 $P(-1,0,4)$ 的坐标代入上式得 $\lambda = -\frac{2}{5}$, 因此过 P 点和直线 L 的平面方程为

$$10x-4y-3z+22=0$$

则 $\begin{cases} 3x-4y+z-1=0 \\ 10x-4y-3z+22=0 \end{cases}$ 为所求直线方程.

593 【答案】 $\begin{cases} x-y+3z+8=0 \\ x-2y-z+7=0 \end{cases}$

【分析】 方法1 先求出一平面 Π_1 , 使它过 L 且垂直于平面 Π , 设 L 的方向向量为 s , Π 的法向量为 $n, n=(1,-1,3)$.

$$s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 4i + 3j - 2k$$

在 L 的方程 $\begin{cases} 2y+3z-5=0 \\ x-2y-z+7=0 \end{cases}$ 中令 $x=0$ 得 $y=4, z=-1$.

则 Π_1 是过 $M_0(0,4,-1)$ 与 s, n 平行的平面, 于是 Π_1 的方程为 $\begin{vmatrix} x & y-4 & z+1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$, 即

$$\Pi_1: x-2y-z+7=0.$$

L 在 Π 上的投影既在平面 Π 上又在平面 Π_1 上, 即它们的交线, 因此 $\begin{cases} x-y+3z+8=0 \\ x-2y-z+7=0 \end{cases}$ 为所求.

方法2 也可用平面束方程来求平面 Π_1 (过直线 L 且与平面 Π 垂直) 的方程.

L 是平面 $2y+3z-5=0$ 与 $x-2y-z+7=0$ 的交线, L 的平面束方程是

$$\lambda(2y+3z-5)+\mu(x-2y-z+7)=0$$

即

$$\mu x+2(\lambda-\mu)y+(3\lambda-\mu)z-5\lambda+7\mu=0 \quad (1)$$

Π_1 含在此平面束中,它与 Π 垂直,于是它们的法向量点乘为零,即

$$\mu-2(\lambda-\mu)+3(3\lambda-\mu)=0$$

取 $\mu=1$,得 $\lambda=0$,代入(1)式得平面 Π_1 的方程

$$x-2y-z+7=0$$

因此 L 在平面 Π 的投影线方程是

$$\begin{cases} x-y+3z+8=0 \\ x-2y-z+7=0 \end{cases}$$

594 【答案】 $x^2+y^2-13z^2-4x-6y-18z+3=0$

【分析】 设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 是 L 上的一点,当 L 绕 L_1 旋转时, M_0 旋转到 $M(x, y, z)$, 此时有:

$$\begin{cases} z=z_0 \\ (x-2)^2+(y-3)^2=(x_0-2)^2+(y_0-3)^2 \end{cases} \quad (1)$$

又因 $\frac{x_0-3}{2}=\frac{y_0-1}{3}=z_0+1$ 即 $\begin{cases} x_0=2z_0+5 \\ y_0=3z_0+4 \end{cases}$. 由此式得

$$\begin{cases} (x_0-2)^2=(2z_0+3)^2 \\ (y_0-3)^2=(3z_0+1)^2 \end{cases} \quad (2)$$

(2) 式代入(1)式中,得

$$(x-2)^2+(y-3)^2=(2z+3)^2+(3z+1)^2$$

即 $x^2+y^2-13z^2-4x-6y-18z+3=0$.

595 【答案】 $(x-2)^2+y^2+(z+1)^2=9$

【分析】 关键是求出球面的半径,它就是点 M_0 与 Π 的距离

$$d=\frac{|x-2y+2z+9|_{(2,0,-1)}}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{9}{3}=3$$

因此该球面的方程是

$$(x-2)^2+y^2+(z+1)^2=9$$

596 【答案】 $\frac{28}{45}\pi$

【分析】 利用直角坐标下先重积分后单积分的方法计算. 用平面 $Z=z(0<z<1)$ 去截积分域得一椭圆

$$\frac{x^2}{\left(1-\frac{z^2}{3^2}\right)}+\frac{y^2}{2^2\left(1-\frac{z^2}{3^2}\right)}=1$$

它所围的面积为

$$S(z)=\pi\sqrt{1-\frac{z^2}{3^2}}\times 2\sqrt{1-\frac{z^2}{3^2}}=2\pi\left(1-\frac{z^2}{3^2}\right)$$

故 $\iiint_{\Omega} z^2 dv = \int_0^1 z^2 \left[\iint_{D_z} dx dy \right] dz = \int_0^1 z^2 \times 2\pi \left(1-\frac{z^2}{3^2}\right) dz = \frac{28}{45}\pi$.

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)

597 【答案】 336π

【分析】 用直角坐标下先重积分后单积分的方法计算.

旋转面方程为: $2z = x^2 + y^2$ 则

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv &= \int_2^8 \left[\iint_{x^2+y^2 \leq 2z} (x^2 + y^2) dx dy \right] dz \\ &= \int_2^8 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2z}} r^3 dr = 336\pi\end{aligned}$$

598 【答案】 $\frac{\pi}{8}$

【分析】 x 是 x 的奇函数, 积分域 Ω 关于 yOz 坐标面对称, 则 $\iiint_{\Omega} x dv = 0$.

$$I = \iiint_{\Omega} z dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr = \frac{\pi}{8}$$

599 【答案】 $\frac{5}{8}$

【分析】 由质心计算公式知

$$\bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z(x^2 + y^2 + z^2) dv}{\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv} = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\cos \varphi} r \cos \varphi \cdot r^4 dr}{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\cos \varphi} r^2 \cdot r^2 dr} = \frac{5}{8}$$

600 【答案】 $8\pi a^4$

【分析】 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS = \iint_{\Sigma} 2ax dS = 2a \iint_{\Sigma} x dS = 2a \bar{x} S$.

其中 $\bar{x}$ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$ 的形心的 x 坐标, 则 $\bar{x} = a$.

S 为该球面的面积, 则 $S = 4\pi a^2$, 故 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS = 8\pi a^4$.

601 【答案】 $4\pi R^4$

【分析】 $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

由于球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 关于三个坐标面都对称, 而 $2xy, 2yz, 2zx$ 至少关于 x, y, z 某个变量是奇函数, 则

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} (2xy + 2yz + 2zx) dS &= 0 \\ \iint_{\Sigma} (x + y + z)^2 dS &= \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS = \iint_{\Sigma} R^2 dS = 4\pi R^4\end{aligned}$$

602 【答案】 $2\pi R^3$

【分析】 $\oint_C 2xy ds = 0$ (奇偶性, 对称性)

$$\oint_C (x^2 + y^2 + 2xy) ds = \oint_C (x^2 + y^2) ds = \oint_C R^2 ds = R^2 \times 2\pi R = 2\pi R^3$$

603 【答案】 2π

【分析】

$$\begin{aligned}\oint_L (x+2y)^2 ds &= \oint_L (x^2 + 4xy + 4y^2) ds \\ &= \oint_L (x^2 + 4y^2) ds + 4 \oint_L xy ds\end{aligned}$$

由变量对称性知 $\oint_L x^2 ds = \oint_L y^2 ds = \oint_L z^2 ds$ 且 $\oint_L xy ds = \oint_L yz ds = \oint_L xz ds$ 则

$$\begin{aligned}\oint_L (x^2 + 4y^2) ds &= \oint_L (x^2 + 4x^2) ds = 5 \oint_L x^2 ds \\ &= \frac{5}{3} \oint_L (x^2 + y^2 + z^2) ds \\ &= \frac{5}{3} \oint_L ds = \frac{5}{3} \times 2\pi = \frac{10\pi}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\oint_L xy ds &= \frac{1}{3} \oint_L (xy + yz + xz) ds \\ &= \frac{1}{6} \oint_L (2xy + 2yz + 2xz) ds \\ &= \frac{1}{6} \oint_L [(x+y+z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)] ds \\ &= \frac{1}{6} \oint_L [0^2 - 1] ds = -\frac{1}{6} \times 2\pi = -\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

故原式 $= \frac{10\pi}{3} + 4\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2\pi$.

604 【答案】 $\frac{\pi}{4}$

【分析】 将 $x^2 + y^2 = 1$ 代入 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$, 得 $z = 1$, 则曲线 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\oint_L x^2 y^2 z^2 ds &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 0^2} dt \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^2 t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) \sin^2 t dt \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t - \sin^4 t) dt \\ &= 4 \left(\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

605 【答案】 -1

【分析】 方法1 由曲线积分 $\int_L \frac{x dx - y dy}{x^2 + y^2 - 1}$ 在单连通区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$

内与路径无关可知

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x^2 + y^2 - 1} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-ay}{x^2 + y^2 - 1} \right)$$

即

$$-\frac{2xy}{(x^2 + y^2 - 1)^2} = \frac{2axy}{(x^2 + y^2 - 1)^2}$$

则 $a = -1$.

方法 2 曲线积分 $\int_L \frac{x dx - ay dy}{x^2 + y^2 - 1}$ 在区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ 内与路径无关等价于 $\frac{x dx - ay dy}{x^2 + y^2 - 1}$ 是某一函数的全微分, 而

$$\frac{x dx - ay dy}{x^2 + y^2 - 1} = \frac{\frac{1}{2}(dx^2 - a dy^2)}{x^2 + y^2 - 1}$$

$$\begin{aligned} \text{若 } a = -1, \text{ 则 } \frac{\frac{1}{2}(dx^2 - a dy^2)}{x^2 + y^2 - 1} &= \frac{\frac{1}{2}(dx^2 + dy^2)}{x^2 + y^2 - 1} = \frac{\frac{1}{2}d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 - 1} \\ &= d \frac{1}{2} \ln |x^2 + y^2 - 1| \end{aligned}$$

则应填 $a = -1$.

606

【答案】 4

【分析】 将 $|x| + |y| = 1$ 代入被积函数的分母得

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{x dy - y dx}{|x| + |y|} &= \oint_C x dy - y dx \\ &= \iint_D (1 + 1) d\sigma \quad (\text{格林公式}) \\ &= 2(\sqrt{2})^2 = 4 \end{aligned}$$

607

【答案】 $2 - \pi$

【分析】 补线段 $\overline{AO}$, 则

$$\begin{aligned} &\int_C (xe^{y^2} - 2y) dx + (x^2 - 1)ye^{y^2} dy \\ &= \oint_{C+\overline{AO}} (xe^{y^2} - 2y) dx + (x^2 - 1)ye^{y^2} dy - \int_{\overline{AO}} (xe^{y^2} - 2y) dx + (x^2 - 1)ye^{y^2} dy \\ &= -\iint_D 2d\sigma - \int_2^0 x dx = 2 - \pi. \end{aligned}$$

608

【答案】 -1

【分析】 **方法 1** 由于 $\frac{\partial}{\partial y} \cos y^2 = \frac{\partial}{\partial x} (-2xy \sin y^2) = -2y \sin y^2$ 则该线积分与路径无关, 又

$$\cos y^2 dx - 2xy \sin y^2 dy = d(x \cos y^2)$$

$$\text{则 } \int_C \cos y^2 dx - 2xy \sin y^2 dy = x \cos y^2 \Big|_{(0,0)}^{(1,\sqrt{\pi})} = -1.$$

方法 2 由以上分析知该线积分与路径无关, 改换积分路径, 从 $(0,0)$ 到 $(0,\sqrt{\pi})$ 再到 $(1,\sqrt{\pi})$, 则

$$\int_C \cos y^2 dx - 2xy \sin y^2 dy = \int_0^1 (-1) dx = -1$$

【评注】 以上两种方法是计算与路径无关的线积分常用的两种方法.

609 【答案】 -2π

【分析】 方法 1 用斯托克斯公式计算, 取 Σ 为平面 $x-y+z=2$ 上包含在 Γ 内的部分, 按右手法则 Σ 取下侧

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\Gamma} (z-y)dx + (x-z)dy + (x-y)dz \\ &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z-y & x-z & x-y \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma} 2dxdy \\ &= - \iint_{D_{xy}} 2d\sigma = -2\pi \end{aligned}$$

方法 2 写出曲线参数方程化为定积分计算, 由 $x-y+z=2$ 知, $z=2-x+y$, 则原曲线参数方程为

$$x = \cos t, y = \sin t, z = 2 - \cos t + \sin t$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{2\pi}^0 [(2-\cos t)(-\sin t) + (2\cos t-2-\sin t)\cos t + (\cos t-\sin t)(\sin t+\cos t)] dt \\ &= -2\pi. \end{aligned}$$

方法 3 将空间线积分为平面线积分, 然后用格林公式.

设 C 为圆 $x^2+y^2=1$ 顺时针方向, 由 $x-y+z=2$ 知 $z=2-x+y$, 将其代入

$$I = \oint_{\Gamma} (z-y)dx + (x-z)dy + (x-y)dz$$

得

$$\begin{aligned} I &= \oint_C (2-x)dx + (2x-2-y)dy + (x-y)(dy-dx) \\ &= \oint_C (2+y-2x)dx + (3x-2-2y)dy \\ &= - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (3-1)d\sigma \quad (\text{格林公式}) \\ &= -2\pi \end{aligned}$$

610 【答案】 $(2-\sqrt{2})\pi R^3$

【分析】 由高斯公式得

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma} x dydz + y dzdx + z dxdy &= \iiint_{\Omega} (1+1+1)dv \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^R r^2 \sin \varphi dr = (2-\sqrt{2})\pi R^3. \end{aligned}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

611 【答案】 $-\frac{1}{15}$

【分析】
$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} xyz dx dy &= - \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^2 \cos \theta \sin \theta \sqrt{1-r^2} r dr \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^1 r^3 \sqrt{1-r^2} dr \\ &= -\frac{1}{15}.\end{aligned}$$

612 【答案】 $\frac{4}{3\pi}a$

【分析】
$$\bar{y} = \frac{\iint_D y dx dy}{\iint_D dx dy} = \frac{\int_0^{\pi} d\theta \int_0^a r^2 \sin \theta dr}{\frac{\pi}{2} a^2} = \frac{\frac{2}{3} a^3}{\frac{\pi}{2} a^2} = \frac{4}{3\pi} a.$$

613 【答案】 $\frac{\pi}{2}\rho$

【分析】
$$\begin{aligned}I_x &= \int_V \rho y^2 ds = \rho \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta = 2\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \\ &= 2\rho \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\rho.\end{aligned}$$

614 【答案】 $\frac{2}{3}$

【分析】 令 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则 $\text{grad } f = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$.

$$\begin{aligned}\text{div}(\text{grad } f) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r}\right) \\ &= \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right) + \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}\right) + \left(\frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}\right) \\ &= \frac{3}{r} - \frac{1}{r} = \frac{2}{r}\end{aligned}$$

$$\text{div}(\text{grad } f) \Big|_{(1,-2,2)} = \frac{2}{3}.$$

615 【答案】 $j + (y-1)k$

【分析】
$$\text{rot } A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+y+z & xy & z \end{vmatrix} = j + (y-1)k.$$

选 择 题

616 【答案】 B

【分析】 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛但 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散. 又

$$u_n = \frac{1}{2}[(u_n + |u_n|) + (u_n - |u_n|)], \quad |u_n| = \frac{1}{2}[(u_n + |u_n|) - (u_n - |u_n|)],$$

再按级数的运算即知, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + |u_n|)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - |u_n|)$ 都收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛,

若其中一个收敛, 另一个发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 均与已知矛盾, 因此它们都发散. 即应选(B).

若熟悉评注中的结论, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 即可知 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm |u_n|)$ 均发散.

【评注】 利用级数的性质判断敛散性, 最常用的是通项分解法. 即利用级数的线性性质, 并利用下表中的结论:

假设

结论

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

收敛

收敛

 $\Rightarrow$

收敛

收敛

发散

 $\Rightarrow$

发散

发散

发散

 $\Rightarrow$

不确定

绝对收敛

绝对收敛

 $\Rightarrow$

绝对收敛

绝对收敛

条件收敛

 $\Rightarrow$

条件收敛

条件收敛

条件收敛

 $\Rightarrow$

收敛(是条件收敛还是绝对收敛与具体级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 有关)

617 【答案】 A

【分析】 方法 1 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛, 可见级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n^2 + v_n^2)$ 收敛.

由不等式 $2|u_n v_n| \leq u_n^2 + v_n^2$ 及正项级数的比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2|u_n v_n|$ 收敛, 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2u_n v_n \text{ 收敛.}$$

又因 $(u_n + v_n)^2 = u_n^2 + v_n^2 + 2u_n v_n$, 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 收敛, 故应选(A).

方法 2 设 $u_n = \frac{1}{n^2}$, $v_n = 1$ ($n = 1, 2, \dots$), 则可知(B) 不正确.

设 $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$ ($n = 1, 2, \dots$), 则可知(C) 不正确.

设 $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $v_n = -\frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$), 则可知(D) 不正确.

故应选(A).

【评注】 在本题中命题(D)“若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 且 $u_n \geq v_n$ ($n = 1, 2, \dots$), 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也收敛”不正确, 这表明: 比较判别法(将一个级数与另一级数作比较) 虽然适用于正项级数收敛(或级数绝对收敛) 的判别, 但对任意项级数一般是不适用的. 这是任意项级数与正项级数收敛性判别中的一个根本区别. 但对一般项级数有如下判别法: 若 $U_n \leq u_n \leq W_n$ ($n = 1, 2, \dots$), 又级数 $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} W_n$ 均收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛.

618 【答案】 D

【分析】 应熟悉正项级数的比值判别法: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$, $\rho < 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\rho > 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, $\rho = 1$ 时判别法则失败. ② 中正是比值判别法中的一种情形 $\rho > 1$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. 结论 ② 正确.

另外 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ (或 > 1) 只能保证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ (或 ≥ 1) 不能保证不带等号, 此时不能用比值判别法. 例如 $a_n = \frac{1}{n}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散. 结论 ① 不正确.

由选项的设置知, 这四个结论中两个正确, 两个错误, 那么 ③, ④ 中一个正确, 一个错误, 因而只能是结论 ④ 正确. 因此选(D).

【评注】 (1) 结论 ④ 正确. 因为 $a_n > 0$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lambda$, 于是 λ 只有两种可能性, 其一是 $\lambda > 0$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lambda > 0$. 由正项级数比较判别法的极限形式与调和级数发散可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 这与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛矛盾. 从而只能是第二种可能性 $\lambda = 0$, 即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0.$$

(2) 结论 ③ 不正确. 收敛级数有结合律, 即可以添加括号, 但反过来添加括号的级数收敛, 原级数可能不收敛. 例如: 设 $a_n = (-1)^{n-1}$ ($n = 1, 2, \dots$), 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^{2n-2} + (-1)^{2n-1}] = \sum_{n=1}^{\infty} 0$$

收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ 显然发散.

(3) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛 $\nRightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. 但是, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛, 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 或 $u_n > 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

619 【答案】 B

【分析】 这是正项级数敛散性的判别问题,四个结论中有两个正确,两个错误.按选项的设置,只须对①、②或③、④作出判断就可做出选择.

方法1 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则部分和 S_n 有界: $|S_n| = S_n \leq M (n=1,2,3,\dots) \Rightarrow 0 < S_n a_n \leq M a_n$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} S_n a_n$ 收敛,即结论①错误.

同时因 S_n 单调上升 $\Rightarrow S_n \geq S_1 = a_1 > 0 (n=1,2,\dots)$

$$\Rightarrow 0 < \frac{a_n}{S_n} \leq \frac{a_n}{S_1}$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 收敛,即结论②正确.

现按选项的设置,③、④中只能是③正确,因此选(B).

方法2 若 $\{na_n\}$ 是有界数列,即 $0 < na_n < M (n=1,2,3,\dots)$

$$\Rightarrow 0 < a_n^2 = n^2 a_n^2 \cdot \frac{1}{n^2} \leq \frac{M^2}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \text{ 收敛,即 } \textcircled{3} \text{ 正确.}$$

关于结论④,由例子: $a_n = \frac{1}{n}$,满足条件:

$a_n > a_{n+1} (n=1,2,3,\dots)$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$,但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散,可知④是错误的.

现按选项设置可知,①、②中只能是②正确.因此选(B).

620 【答案】 A

【分析】 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 条件收敛,即 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛,而

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n-1} u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + u_{2n-1} - u_{2n} + \dots$$

$$\frac{\text{收敛级数}}{\text{的结合律}} \sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n}) \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}, \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n} \text{ 均发散} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} [2u_{2n-1} + (u_{2n-1} - u_{2n})].$$

由级数的线性运算性质 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.选(A).

【评注】 (1) 上述讨论中说明了:若 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛,则

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$$

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)

由此知,四个级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$ 中,只要分别知道其中两个级数各自的和,就可分别求得另外两个级数的和.

如,已知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1} = S_1$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n} = S_2$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n} = S_1 - S_2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n} = S_1 + S_2$$

又如,已知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = S'$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1} = S_1$, 则由

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n} = S_1 - S'$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n} = S_1 + (S_1 - S') = 2S_1 - S'$$

(2) 在题设条件下(即 $u_n > 0, n = 1, 2, 3, \dots$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 条件收敛),若正项级数

$\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$ 均收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散矛盾了,若这两级数

中有一个收敛,另一发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n = -\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 发散与 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 收敛矛盾

了.因此只能是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$ 均发散.

621 【答案】 C

【分析】 方法1 取 $a_n = -\frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$, 则排除(A)、(B)、(D). 因此选(C).

方法2 直接证(C)成立.

若 $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ 收敛. 由于 $|a_n| \leq |a_n| + |b_n| \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,与已知矛盾. 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ 发散.

622 【答案】 D

【分析】 关于命题①与②是考察考生对正项级数与变号级数之间差别的了解.

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数且收敛,则 n 充分大后 $0 \leq a_n \leq 1 \Rightarrow 0 \leq a_n^2 \leq a_n$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛,即对

正项级数而言命题①是正确的,但对变号级数而言,命题①是不正确的. 如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛,

但 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

对于正项级数, 命题 ② 则是比较判别法极限形式的推论, 但命题 ② 对变号级数也是不正确的. 如 $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$, 则 $\frac{b_n}{a_n} = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$, 即当 $n \rightarrow \infty$ 时 a_n 与 b_n 是等价无穷小, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛而 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

关于命题 ③, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则必有 a_n 为无穷小, 这里要考察 a_n 与 $\frac{1}{n}$ 的阶的关系. 命题 ③ 是不正确的. 如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛, 但 $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \neq o\left(\frac{1}{n}\right) (n \rightarrow \infty)$.

命题 ④ 是正确的. 因 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Rightarrow a_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \Rightarrow a_n$ 有界即 $\exists$ 常数 M 使得 $|a_n| \leq M (n = 1, 2, \dots) \Rightarrow |a_n b_n| \leq M |b_n|$. 由 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 收敛 $\Rightarrow$ ④ 成立.

【评注】 (1) 从选择正确答案的角度来看, 如果你能证明 ④ 正确, 则自然就不必再考察 ①、② 与 ③. 或者你能通过举反例判定 ①、②、③ 不正确, 则 ④ 就自然入选.

(2) 要注意正项级数与变号级数间的差别.

(3) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}}$ 不可能为 ∞ , 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} \exists$, 则必取零值.

623 【答案】 B

【分析】 正项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 也收敛.
 $|b_n| = \ln(1 + a_{2n}) \sim a_{2n} \quad (n \rightarrow \infty)$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛. 因此选(B).

【评注】 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Rightarrow$ 部分和 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 有界, 即 $0 \leq S_n \leq M (n = 1, 2, 3, \dots) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 的部分和 $T_n = a_2 + a_4 + \dots + a_{2n} \leq S_{2n} \leq M (n = 1, 2, 3, \dots)$ 即 T_n 有界 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛. (正项级数收敛的充要条件是部分和有界.) 同理 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 也收敛.

624 【答案】 A

【分析】 (1) 是交错级数, 易知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1+\frac{\alpha}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\frac{n}{n})^\alpha} = 0 \times 1 = 0$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

为考查 $\frac{1}{n^{1+\frac{a}{x}}}$ 的单调性, 令

$$f(x) = x^{1+\frac{a}{x}} = e^{(1+\frac{a}{x})\ln x}, g(x) = \left(1 + \frac{a}{x}\right)\ln x$$

$$\text{则 } g'(x) = -\frac{a}{x^2}\ln x + \left(1 + \frac{a}{x}\right)\frac{1}{x} = \frac{1}{x}\left[1 + \frac{a}{x}(1 - \ln x)\right] > 0 \text{ (当 } x \text{ 充分大时)}$$

$$\Rightarrow \text{当 } x \text{ 充分大时 } g(x) \nearrow \Rightarrow f(x) \nearrow \Rightarrow f(n) = \frac{1}{n^{1+\frac{a}{n}}} \searrow \text{ (当 } n \text{ 充分大时).}$$

因改变有限项不改变级数的敛散性, 由莱布尼茨法则 $\Rightarrow$ 级数(1) 是收敛的.
改写级数(2) 的通项可得

$$\begin{aligned}\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) &= \sin[(\sqrt{n^2+1}-n)\pi + n\pi] \\ &= \sin(\sqrt{n^2+1}-n)\pi \cdot \cos n\pi + \cos(\sqrt{n^2+1}-n)\pi \cdot \sin n\pi \\ &= (-1)^n \sin(\sqrt{n^2+1}-n)\pi \\ &= (-1)^n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n},\end{aligned}$$

由此即知级数(2) 是交错级数, 由莱布尼茨判别法可知级数(2) 收敛.
综合知应选(A).

625 【答案】 B

【分析】 这里级数的一般项中含有三种类型的无穷大量.

$$n^\mu (\mu > 0), q^n (q > 1), \ln^\delta n (\delta > 0)$$

其中 $n \rightarrow \infty$, 它们的关系是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\mu}{q^n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^\delta n}{n^\mu} = 0$$

现考察此正项级数的一般项:

$$\frac{n^\gamma + a^n}{n^\alpha + \ln^\beta n + \gamma^n} = \frac{\alpha^n \left(1 + \frac{n^\gamma}{\alpha^n}\right)}{\gamma^n \left(1 + \frac{\ln^\beta n}{\gamma^n} + \frac{n^\alpha}{\gamma^n}\right)} \sim \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^n \quad (n \rightarrow \infty)$$

这里 $a_n \sim b_n (n \rightarrow \infty)$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^n \text{ 收敛} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} < 1 \text{ 即 } \alpha < \gamma.$$

因此, 原级数收敛 $\Leftrightarrow \alpha < \gamma$. 故应选(B).

626 【答案】 A

【分析】 若 $q > 1$, 取 $q^*, q > q^* > 1$, 由极限的不等式性质 $\Rightarrow n > N$ 时

$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} > q^*, \ln \frac{1}{a_n} > q^* \ln n$$

$$\frac{1}{a_n} > n^{q^*}, \text{ 即 } a_n < \frac{1}{n^{q^*}}.$$

$\Rightarrow n > N$ 时

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

同理, 若 $q < 1$, 取 $q_0, q < q_0 < 1, \Rightarrow$

$$n > N \text{ 时} \quad \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} < q_0, \ln \frac{1}{a_n} < q_0 \ln n$$

$$\Rightarrow n > N \text{ 时} \quad a_n > \frac{1}{n^{q_0}}$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

因此选(A).

【评注】 取特殊情形 $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = q$, 即 $\frac{\ln a_n}{\ln \frac{1}{n^q}} = 1$, 即 $a_n = \frac{1}{n^q}$, 故选(A).

上述分析中是利用极限的不等式性质论证了在所设条件下, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Rightarrow q > 1$.

627 【答案】 D

【分析】 方法1 因当 $n \geq 3$ 时, $\left| (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} \right| \geq \frac{1}{n}$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 从而级数①非绝对收敛;

令 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 于是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$ 当 $x > e$ 时成立, 这表明 $\left\{ \frac{\ln n}{n} \right\}$ 当 $n \geq 3$ 时单调减少且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} =$

0. 由莱布尼茨判别法知级数①收敛. 综合即知级数①条件收敛.

因 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 条件收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ 绝对收敛, 从而它们的和 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n^2} \right)$ 条件收敛. 即级数④条件收敛. 故选(D).

方法2 因 $\left| \frac{(\sin n^2) \ln^3 n}{\sqrt{n^4 + 1}} \right| \leq \frac{(\ln n)^3}{n^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}} \cdot \frac{\ln^3 n}{n^{\frac{1}{6}}} < \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}} (n \text{ 充分大时}),$ 其中 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^3 n}{n^{\frac{1}{6}}} = 0$ 故

$\frac{\ln^3 n}{n^{\frac{1}{6}}} < 1 (n \text{ 充分大}),$ 因此级数②绝对收敛.

$$\begin{aligned} \text{因} \quad \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n} - (-1)^n} &= (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{n-1} = (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}-1+1}{n-1} - \frac{1}{n-1} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n-1} - \frac{1}{n-1} \end{aligned}$$

而级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-1}$ 均收敛, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$ 发散, 故级数③发散.

从上面讨论可得(A)、(B)、(C) 不正确, 应选(D).

【评注】(1) 用莱布尼茨法则证明交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n (a_n > 0)$ 收敛时, 要证明数列 a_n 单调下降且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 常用的一种方法是, 引进一个辅助函数 $f(x)$, 使得 $f(n) = a_n$, 然后求出导数 $f'(x)$. 证明 $f(x)$ 单调下降 (x 充分大即可) 就可得 a_n 单调下降. 还可能用洛必达法则. 求出 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 即得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 级数 ① 就是如此.

(2) 对 $\forall$ 常数 $\alpha > 0$ 与 β , 均有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^{\beta} x}{x^{\alpha}} = 0$, 故 $\exists X > 0$, 当 $x > X$ 时有 $0 < \frac{\ln^{\beta} x}{x^{\alpha}} < 1$. 特别有 $\frac{\ln^3 n}{n^{\frac{1}{6}}} < 1 (n > N \text{ 时})$.

(3) 这四个级数中两个是条件收敛, 两个非条件收敛. 如果我们按顺序证明了级数 ① 条件收敛, 级数 ② 绝对收敛后, (A), (B) 被排除, 按选项的设置, 只能选 (D).

628 【答案】 A

【分析】 方法 1 (A) 之 $u_n = (\ln n)^{-\ln n} = e^{-(\ln n) \ln n}$, 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = 0 \Rightarrow x$ 充分大时 $\frac{\ln^2 x}{x} < 1$, 即 $\ln^2 x < x \Rightarrow$ 当 n 充分大时 $(\ln \ln n)^2 < \ln n$ 即 $u_n > e^{-\ln n} = \frac{1}{n}$. 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散. 故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散. 因此选 (A).

方法 2 (用排除法.

(B) 用比值判别法. 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{\pi} = \frac{e}{\pi} < 1$, 故级数收敛.

(C) 因为 $\frac{3 + (-2)^n}{3^n} = \frac{1}{3^{n-1}} + \left(-\frac{2}{3}\right)^n$, 可看成级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$ 的和级数, 由于这两个级数都收敛 (它们都是几何级数, $\sum_{n=1}^{\infty} q^n, |q| < 1$ 时收敛), 于是级数 (C) 收敛.

(D) 因 $u_n = \sin n\pi \cos \frac{\pi}{\ln n} + \cos n\pi \sin \frac{\pi}{\ln n} = (-1)^n \sin \frac{\pi}{\ln n}$ 是交错级数一般项, 由莱布尼茨法则知级数收敛.

因此选 (A).

629 【答案】 B

【分析】 设 $a_n = \frac{\ln(n!)}{n^p}$.

当 $p \leq 0$ 时 $a_n \not\rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

当 $0 < p \leq 2$ 时

$$a_n = \frac{\ln(1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n)}{n^p} = \frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n^p} \geq \frac{n-2}{n^p} \sim \frac{1}{n^{p-1}} (n \rightarrow +\infty)$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 其中 $\ln k > 1 (k \geq 3)$.

当 $p > 2$ 时

$$0 < a_n = \frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n^p} \leq \frac{n \ln n}{n^p} = \frac{\ln n}{n^{p-1}}$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{p-1}}$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

因此, $p \in (2, +\infty)$, 选(B).

【评注】 设 $\alpha > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\alpha}}$ 收敛.

可取 $\epsilon > 0$ 使得 $\alpha - \epsilon > 1$,

$$\frac{\ln n}{n^{\alpha}} = \frac{1}{n^{\alpha-\epsilon}} \cdot \frac{\ln n}{n^{\epsilon}}$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^{\epsilon}} = 0$, 于是当 n 充分大时

$$0 < \frac{\ln n}{n^{\epsilon}} < 1$$

也就有

$$\frac{\ln n}{n^{\alpha}} < \frac{1}{n^{\alpha-\epsilon}}$$

再由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-\epsilon}}$ 收敛, $\Rightarrow \alpha > 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\alpha}}$ 收敛.

630 【答案】 C

【分析】 按题意要考察 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right) \right|$ 是否收敛.

先判断是否 $f\left(\frac{1}{n}\right) > 0$ 且单调下降 (n 充分大) 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = a > 0$ 及 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$.

再由可导性 $\Rightarrow$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = a > 0$$

由 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 连续 $\Rightarrow \exists \delta > 0$, 当 $x \in (-\delta, \delta)$ 时 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(-\delta, \delta)$ 上 $\nearrow \Rightarrow n$ 充分大后, $\frac{1}{n} \in (-\delta, \delta)$, $f\left(\frac{1}{n}\right) > f(0) = 0$, $f\left(\frac{1}{n}\right)$ 随 n 单调下降.

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \Rightarrow$ 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$ 收敛. 又

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = a > 0$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 发散. 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$ 条件收敛. 应选(C).

【评注】 取特殊情形 $f(x) = ax$ 满足条件, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a}{n}$, 它条件收敛, 故选(C).

上述分析中利用了极限性质, 导数定义, 连续函数的局部保号性等, 论证了 $f\left(\frac{1}{n}\right)$ 单调下降, 并求出 $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

631 【答案】 A

【分析】 由 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域是 $(-8, 8]$ 可知, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径是 8, 从而幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^{n-2}$ 的收敛半径也是 8. 又因幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n(n-1)}$ 是幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^{n-2}$ 两次逐项求积分所得(或 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n(n-1)}$ 两次求导得幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-2}$), 由幂级数和函数的性质可得, 幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n(n-1)}$ 的收敛半径也是 8. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^3)^n$ 的收敛域是 $-8 < x^3 \leq 8$ 即 $-2 < x \leq 2$.

【评注】 (1) 应掌握幂级数收敛性的如下特点: 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与其逐项求导或逐项求积分后的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

有相同的收敛半径.

本题还考察间接求幂级数的收敛域的方法.

(2) 求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n(n-1)}$ 的收敛半径时, 以下解法虽可选出正确选项, 但理论根据却是错误的:

由 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域是 $(-8, 8]$ 可知, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径是 8, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{8}$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)na_{n+1}}{n(n-1)a_n} \right| = \frac{1}{8}$, 于是幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n(n-1)}$ 的收敛半径是 8. 错误之处在于:

因为已知的定理是:若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R = \frac{1}{\rho}$, 但反过来不一定对, 即若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , 则不一定有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{R}$. 因为极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ 可能不存在, 因此前面的解法是加强了条件即假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ 存在的前提下获得结果.

632 【答案】 B

【分析】 方法 1 按定义求数值级数的和 S 就是求它的部分和的极限

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$\text{其中 } S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} k}{3^k}.$$

现用分解法

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} [(k-1) + 1]}{3^k} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (k-1)}{3 \cdot 3^{k-1}} - \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{3}\right)^k \\ &= -\frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1} k}{3^k} - \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{3}\right)^k \\ &= -\frac{1}{3} S_n + \frac{1}{3} \cdot \frac{(-1)^{n-1} n}{3^n} - \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{3}\right)^k \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$ 得

$$\frac{4}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0 - \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k + 1 = 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$S = \frac{3}{16}, \text{选(B).}$$

方法 2 把数值级数求和转化为幂级数求和. 引入 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, 则

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{3^n} = \frac{1}{3} S\left(-\frac{1}{3}\right).$$

现求 $S(x)$, 由逐项求导法得

$$S(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \quad (|x| < 1)$$

$$\text{而 } \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1) \Rightarrow$$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1)$$

因此

$$S = \frac{1}{3} S\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{16}$$

应选(B).

633 【答案】 C

【分析】 方法1 分解法,转化为用公式 $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} (-1 < x \leq 1)$.

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) x^n \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (-x)^n}{n} = -\ln(1-x) \quad (-1 \leq x < 1) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} &= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - x \right) \\ &= -\frac{1}{x} \ln(1-x) - 1 \quad (-1 \leq x < 1, x \neq 0) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$S(x) = -\ln(1-x) + \frac{1}{x} \ln(1-x) + 1 \quad (-1 \leq x < 1, x \neq 0)$$

应选(C).

方法2 逐项求导两次,转化为几何级数求和

$$xS(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \Rightarrow (xS(x))'' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1).$$

$$(xS(x))' = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x)$$

$$\begin{aligned} xS(x) &= - \int_0^x \ln(1-t) dt = -t \ln(1-t) \Big|_0^x + \int_0^x \frac{-t+1-1}{1-t} dt \\ &= -x \ln(1-x) + x + \ln(1-x) \quad (|x| < 1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$S(x) = -\ln(1-x) + \frac{1}{x} \ln(1-x) + 1 \quad (-1 \leq x < 1, x \neq 0).$$

(右端函数在 $x=-1$ 右连续,左端级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ 在 $x=-1$ 收敛,故 $x=-1$ 时等式也成立.)

【评注】 (1) $S(0) = 0$.

$$(2) S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = -\ln(1-x) + \frac{1}{x} \ln(1-x) + 1 \quad (-1 \leq x < 1, x \neq 0)$$

左端级数在 $x=1$ 收敛,

$$S(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [-\ln(1-x) + \frac{1}{x} \ln(1-x) + 1] = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x} (1-x) \ln(1-x) + 1 = 1$$

因此

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} (1-x) \ln(1-x) + 1, & -1 \leq x < 1, x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

634 【答案】 D

【分析】 当 $x \neq 0$ 时

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1 - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots}{x^2}$$

所以

$$f(x) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{4!}x^2 + \frac{1}{6!}x^4 - \frac{1}{8!}x^6 + \dots$$

在这个表达式中令 $x = 0$ 也可得 $f(0) = \frac{1}{2}$, 从而这个表达式对 $x \in (-\infty, +\infty)$ 成立. 又因

为 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, 令 $n = 6$, 由函数幂级数展开式的唯一性可得:

$$\frac{f^{(6)}(0)}{6!} = -\frac{1}{8!}, \text{ 所以 } f^{(6)}(0) = -\frac{6!}{8!} = -\frac{1}{56}.$$

【评注】 (1) 上式用到了 $\cos x$ 的幂级数展开式 $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, x \in (-\infty, +\infty)$.

(2) 若用间接法已求得 $f(x)$ 的幂级数展开式 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n (|x - x_0| < R)$, 由于 $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, 于是由幂级数展式的系数可求得 $f^{(n)}(x_0) = n! a_n$.

635 【答案】 B

【分析】 题中给出 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 中的值, 由于和函数 $S(x)$ 是周期为 2 的奇函数, 可将求 $S(-\frac{5}{2})$ 转化为求 $S(x)$ 在 $[0, 1]$ 中的某点的值

$$\begin{aligned} S(-\frac{5}{2}) &= S(-\frac{5}{2} + 2) = S(-\frac{1}{2}) = -S(\frac{1}{2}) = -\frac{f(\frac{1}{2} - 0) + f(\frac{1}{2} + 0)}{2} \\ &= -\frac{\frac{3}{2} + (-\frac{1}{2})}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

故应选(B).

636 【答案】 A

【分析】 方法 1 投影柱面方程是一个三元方程, (C)(D) 表示的是曲线. (B) 中的方程中含 z , 不可能是 L 在 xOy 面上的投影柱面方程, 因此选(A).

方法 2 由曲线 L 方程第二式得

$$z = \frac{x+3}{2}$$

代入第一式化简得

$$x^2 + 20y^2 - 24x - 116 = 0$$

即为 L 在 xOy 面上的投影柱面方程.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

【评注】(1) 在空间解析几何中, $F(x, y) = 0$ 表示是以 $\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 为准线, 母线平行于 z 轴的柱面方程. 而 $\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 表示是柱面 $F(x, y) = 0$ 与 xOy 面的交线. 因此要注意空间的曲线、曲面的正确表示方法.

(2) 求两曲面的交线 $\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 在 xOy 平面上的投影曲线 L 的方法是: 消去联立方程

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

中的 z 得

$$H(x, y) = 0$$

Γ 在 xOy 平面上的投影曲线 L 的方程就是

$$\begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

以 Γ 为准线, 母线平行于 z 轴的柱面方程就是

$$H(x, y) = 0.$$

637 【答案】 C

【分析】 由题设直线 L 的方向向量 $s = (2, 1, 1)$, 平面 Π 的法向量 $n = (1, -1, 2)$, 设直线 L 与平面 Π 的夹角为 φ , 则

$$\sin \varphi = \frac{|s \cdot n|}{|s||n|} = \frac{|2 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{1}{2}$$

所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$. 选(C).

【评注】 直线与平面夹角 φ 的计算公式应是 $\sin \varphi = \frac{|s \cdot n|}{|s||n|}$, 而不是 $\cos \varphi = \frac{|s \cdot n|}{|s||n|}$.

638 【答案】 C

【分析】 求出直线 L 的方向向量 s

$$s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -10 \end{vmatrix} = -7(4i - 2j + k)$$

平面 Π 的法向量 $n = 4i - 2j + k$, 所以 $s \parallel n$, 即直线 L 垂直于平面 Π . 因此选(C).

639 【答案】 C

【分析】 方法1 L 过点 $M_0(1, 0, -1)$, 以 $l = (1, -2, 1)$ 为方向向量, 则

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times l|}{|l|}$$

$$\text{而 } \overrightarrow{M_0M_1} \times l = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = i + j + k, |\overrightarrow{M_0M_1} \times l| = \sqrt{3}.$$

于是

$$d = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

方法2 过 $M_1(0, 1, -1)$ 与 L 垂直的平面的平面方程是

$$x - 2(y - 1) + (z + 1) = 0$$

即

$$x - 2y + z + 3 = 0$$

L 的参数方程是

$$x = 1 + t, y = -2t, z = -1 + t$$

将它代入平面方程得

$$(1 + t) - 2(-2t) + (-1 + t) + 3 = 0$$

解得 $t = -\frac{1}{2}$.

相应的交点 $M_2\left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{3}{2}\right)$. 于是

$$d = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

方法3 L 的参数方程是

$$x = 1 + t, y = -2t, z = -1 + t$$

点 M_1 到 L 上 $\forall$ 点 (x, y, z) 的距离平方是

$$\begin{aligned} f(t) &= d^2(t) = (1+t)^2 + (1-(-2t))^2 + (-1-(-1+t))^2 \\ &= (1+t)^2 + (1+2t)^2 + t^2 \end{aligned}$$

点 M_1 到 L 的距离 d 是点 M_1 到 L 上 $\forall$ 点距离的最小值.

由 $f'(t) = 2(1+t) + 4(1+2t) + 2t = 12t + 6 = 0$.

得 $t = -\frac{1}{2}$, 又

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = +\infty$$

于是 $f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 的最小值是 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

因此 $d = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 选(C).

【分析】 设 $M_1(a_1, b_1, c_1), M_3(a_3, b_3, c_3)$, 显然, M_1, M_3 分别在两已知的直线 L_1 与 L_3 上, $\overrightarrow{M_1M_3} = (a_3 - a_1, b_3 - b_1, c_3 - c_1)$, L_1 与 L_3 的方向量 $s_1 = (a_2 - a_3, b_2 - b_3, c_2 - c_3), s_3 = (a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2)$, L_1 与 L_3 共面的充要条件是 $(s_1 s_3 \overrightarrow{M_1M_3}) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{又}(s_3 s_1 \overrightarrow{M_1M_3}) &= (s_3 \times s_1) \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_2 - a_3 & b_2 - b_3 & c_2 - c_3 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 & c_3 - c_1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_2 - a_3 & b_2 - b_3 & c_2 - c_3 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 & c_3 - c_1 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

所以 $\overrightarrow{M_1M_3}$ 与两直线共面, 因此, 两已知直线共面.

$$\text{由} \quad 0 \neq \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_2 - a_3 & b_2 - b_3 & c_2 - c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

可知上式第二个行列式的第一、二两行不成比例, 因此, 两已知直线不平行也不重合, 所以选(A).

641 【答案】 C

【分析】 由于 Ω_1 关于 xOz 面和 yOz 面对称, 而 $f(x, y, z) = z$ 既是 y 的偶函数, 也是 x 的偶函数, 则

$$\iiint_{\Omega_1} z dv = 4 \iiint_{\Omega_2} z dv$$

故应选(C).

642 【答案】 D

【分析】 Ω 在 xOy 面上的投影是由 $x^2 + y^2 = 1, y = 0, y = x$ 在第一象限围成的 $\frac{1}{8}$ 圆域, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} dx \int_{x^2+y^2}^1 f(x, y, z) dz$$

故应选(D).

643 【答案】 D

$$\begin{aligned} \text{【分析】} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\iiint_{\Omega} f(x^2 + y^2) dv}{t^4} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t f(r^2) r dr \int_0^1 dz}{t^4} = 2\pi \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^t f(r^2) r dr}{t^4} \\ &= 2\pi \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t^2)t}{4t^3} = \frac{\pi}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t^2)}{t^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'(t^2) \cdot 2t}{2t} = \frac{\pi}{2} f'(0)$$

故应选(D).

644 【答案】 B

【分析】 ① 和 ③ 是正确的, ② 和 ④ 是错误的.

① 和 ③ 分别是第一类线(面)积分, 积分是沿曲线(面)积, 被积函数可用曲线(面)方程代入.

② 和 ④ 分别是二重积分和三重积分, 积分分别是在圆域 $x^2 + y^2 \leq a^2$ 和球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 上积, 被积函数不能用积分域的边界曲线 $x^2 + y^2 = a^2$ 和边界曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 代入.

645 【答案】 C

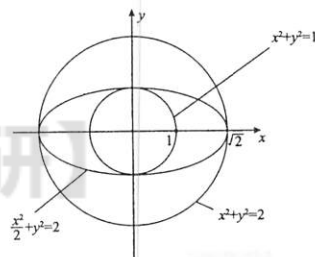
【分析】 由格林公式得

$$I_1 = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (3 - 3x^2 - 3y^2) d\sigma$$

$$= 3 \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (1 - x^2 - y^2) d\sigma.$$

$$I_2 = 3 \iint_{\frac{x^2}{2} + y^2 \leq 1} (1 - x^2 - y^2) d\sigma.$$

$$I_3 = 3 \iint_{x^2+y^2 \leq 2} (1 - x^2 - y^2) d\sigma.$$



注意到在圆 $x^2 + y^2 \leq 1$ 之外, 以上三个二重积分的被积函数 $(1 - x^2 - y^2)$ 为负, 由上图可

知

$$I_3 < I_2 < I_1$$

故应选(C).

646 【答案】 C

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } \oint_L (bx + ay)^2 ds &= \oint_L (b^2 x^2 + 2abxy + a^2 y^2) ds \\ &= \oint_L (b^2 x^2 + a^2 y^2) ds = a^2 b^2 \oint_L \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) ds \\ &= a^2 b^2 \oint_L ds = a^2 b^2 l. \end{aligned}$$

故应选(C).

647 【答案】 A

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

【分析】 曲线 L 的方程为 $|x| + |y| = 1$, 该曲线关于 y 轴和 x 轴都对称, $\frac{x}{|x| + |y|}$,

$\frac{y}{|x| + |y|}$ 分别关于 x 和 y 是奇函数, 则

$$\oint_L \frac{x}{|x| + |y|} ds = \oint_L \frac{y}{|x| + |y|} ds = 0$$

$$\oint_L \frac{x+y+1}{|x| + |y|} ds = \oint_L \frac{ds}{|x| + |y|} = \oint_L ds = 4\sqrt{2}$$

故应选(A).

648 【答案】 D

【分析】 所求功为

$$W = \oint_{x^2+y^2=1} \frac{y^3 dx - x^3 dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \oint_{x^2+y^2=1} y^3 dx - x^3 dy$$

$$= -3 \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy \quad (\text{格林公式})$$

$$= -3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = -\frac{3\pi}{2}$$

649 【答案】 B

【分析】 $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n, y)$

这里的 $\cos(n, x), \cos(n, y)$ 为曲线 L 的外法线向量的方向余弦, 设 τ 为 L 的沿逆时针方向的切线向量, 则

$$\cos(n, x) = \cos(\tau, y), \cos(n, y) = -\cos(\tau, x)$$

则

$$\oint_L \frac{\partial u}{\partial n} ds = \oint_L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos(\tau, y) - \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\tau, x) \right) ds$$

$$= \oint_L \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy \quad (\text{格林公式})$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

650 【答案】 D

【分析】
$$\begin{aligned} & \oiint_{\Sigma} (x^3 \cos \alpha + y^3 \cos \beta + z^3 \cos \gamma) dS \\ &= \oiint_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy \\ &= 3 \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} (x^2 + y^2 + z^2) dv \quad (\text{高斯公式}) \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R r^4 \sin \varphi dr \\ &= \frac{12\pi R^5}{5} \end{aligned}$$

651 【答案】 B

【分析】 对于 $\int_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ 在 D 内虽有 $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$ 成立, 但不能断定该线积分在 D 内与路径无关. 因为 D 不是单连通域, 而

$$\oint_{x^2+y^2=1} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \oint_{x^2+y^2=1} xdy - ydx = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (1+1) dxdy = 2\pi \neq 0$$

则线积分 $\int_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ 在 D 上与路径有关.

对于 ② 和 ③, 由于

$$\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = d \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2), \quad \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = d \sqrt{x^2 + y^2}$$

即其被积式在 D 上是某个二元函数的全微分, 则线积分 $\int_L \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}, \int_L \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 在 D 上与路径无关.

而对线积分 $\int_L \frac{xdy + ydx}{x^2 + y^2}$, 由于

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) &= \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) &= \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

即 $\frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}$, 则线积分 $\int_L \frac{xdy + ydx}{x^2 + y^2}$ 在 D 上与路径有关.

故应选 (B).

652 【答案】 B

【分析】 在 Γ 上 $f(x, y) = 1$, M 在第 II 象限, N 在第 IV 象限, 因此 M 点的纵坐标 y_M 大于 N 点的纵坐标 y_N , 因此

$$\int_{\Gamma} f(x, y) dy = \int_{\Gamma} dy = y_N - y_M < 0$$

故应选(B).

653 【答案】 B

【分析】 对于第二类面积分,若曲面 Σ (包含侧) 关于 $x=0$ (即 yOz 坐标面) 对称,则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dydz = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(x, y, z) \text{ 关于 } x \text{ 是偶函数} \\ 2 \iint_{\Sigma_{x \geq 0}} f(x, y, z) dydz, & \text{当 } f(x, y, z) \text{ 关于 } x \text{ 是奇函数} \end{cases}$$

这里曲面 Σ 关于 $x=0$ 对称,而选项(A)、(C)、(D)中的被积函数 x^2, y^2, y , 关于 x 都是偶函数,则其积分为零,而(B)选项中的被积函数 x 为 x 的奇函数,则

$$\iint_{\Sigma} x dydz = 2 \iint_{\Sigma_{x \geq 0}} x dydz > 0$$

【评注】 (1) 第二类线(面)积分的奇偶性、对称性的结论与第一类线(面)积分及重积分的结论正好相反.

(2) 对第二类线(面)积分只能分项利用奇偶性,如对 $dydz$ 的项要求积分曲面关于 $x=0$ 对称,而被积函数关于 x 有奇偶性;而对 $dx dy$ 的项就要求积分曲面关于 $z=0$ 对称,被积函数关于 z 有奇偶性,其余类似.

654 【答案】 C

【分析】 取 Σ 为平面 $x+y+z=0$ 包含在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内的部分,法线方向按右手法则取,由斯托克斯公式得

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma} y dx + z dy + x dz &= \iint_{\Sigma} (0-1) dydz + (0-1) dz dx + (0-1) dx dy \\ &= - \iint_{\Sigma} (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) ds \end{aligned}$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为平面 $x+y+z=0$ 法线向量的方向余弦.

$$\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

则

$$\oint_{\Sigma} y dx + z dy + x dz = - \frac{3}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} ds = - \sqrt{3} \pi a^2$$

故应选(C).

655 【答案】 B

【分析】 函数 $f(x, y, z) = x^2 y^3 + 3 y^2 z^3$ 在点 $(0, 1, 1)$ 处方向导数的最大值等于 $f(x, y, z)$ 在点 $(0, 1, 1)$ 处梯度向量的模.

$$\text{grad} f(0, 1, 1) = (0, 6, 9)$$

$$\|g\| = \sqrt{117}$$

微信公众号【顶尖考研】

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)

故应选(B).

656 【答案】 D

【分析】 $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}$

则

$$\text{grad} f \Big|_{(1,0)} = j$$

故应选(D).

【评注】 本题可做的更简单, 由于

$$f'_x(1,0) = \frac{d}{dx} f(x,0) \Big|_{x=0} = 0$$

$$f'_y(1,0) = \frac{d}{dy} f(1,y) \Big|_{y=0} = \frac{1}{1+y^2} \Big|_{y=0} = 1$$

则 $\text{grad} f \Big|_{(1,0)} = j$.

657 【答案】 B

【分析】 设 l 的方向余弦为 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$, 则

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial l} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} &= f'_x(x_0, y_0, z_0) \cos \alpha + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cos \beta + f'_z(x_0, y_0, z_0) \cos \gamma \\ &= \frac{\mathbf{g} \cdot \mathbf{l}}{\|\mathbf{l}\|} = \frac{1}{\sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

故应选(B).

658 【答案】 B

【分析】 方法1 排除法.

显然点 $(1,0,0)$ 不满足方程 $x=y$, 则(C)(D) 都不正确.

平面 $x+y-z=1$ 的法线向量为 $\mathbf{n}_1 = (1,1,-1)$, 曲面 $z=x^2+y^2$ 在点 (x,y,z) 处的法线向量为 $\mathbf{n}_2 = (2x, 2y, -1)$. 则

$$\frac{2x}{1} = \frac{2y}{1} = \frac{-1}{-1}$$

$$x = y = \frac{1}{2}$$

代入 $z = x^2 + y^2$ 得

$$z = \frac{1}{2}$$

但 $x = y = z = \frac{1}{2}$ 不满足方程

$$x + y - z = 1$$

则(A) 不正确, 故应选(B).

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

方法2 直接法.

过点 $(1,0,0), (0,1,0)$ 的直线方程为 $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{0}$

$$\text{即} \quad \begin{cases} x+y-1=0 \\ z=0 \end{cases}$$

过该直线的平面束方程为 $\lambda(x+y-1)+z=0$

$$\text{即} \quad \lambda x + \lambda y + z - \lambda = 0$$

法线向量为 $n_1 = (\lambda, \lambda, 1)$.

曲面 $z = x^2 + y^2$ 在点 (x, y, z) 处的法线向量为 $n_2 = (2x, 2y, -1)$.

$$\text{则} \quad \frac{2x}{\lambda} = \frac{2y}{\lambda} = \frac{-1}{1}$$

$$\text{即} \quad x = y = -\frac{\lambda}{2}$$

将其代入 $z = x^2 + y^2$ 及 $\lambda x + \lambda y + z - \lambda = 0$ 得 $\frac{\lambda^2}{2} + \lambda = 0$ 解得 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2$, 代入 $\lambda x + \lambda y + z - \lambda = 0$ 得

$$z = 0, 2x + 2y - z = 2$$

故应选(B).

659 【答案】 D

【分析】 曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 在点 $(1, -1, 0)$ 处的法线向量为 $n_1 = (2, -2, 0)$.

平面 $x + y + z = 0$ 在点 $(1, -1, 0)$ 处的法线向量为 $n_2 = (1, 1, 1)$.

曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, -1, 0)$ 处的切向量为

$$\tau = n_1 \times n_2 = (-2, -2, 4)$$

则所求切线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-2}$$

故应选(D).

660 【答案】 C

【分析】 曲线 $x = t, y = -t^2, z = t^3$ 在点 $(1, -1, 1)$ 处切线向量为

$$\tau = (1, -2, 3)$$

而指向 x 轴负向一侧的切向量为

$$(-1, 2, -3)$$

则所求的方向导数为

$$2 \times \frac{-1}{\sqrt{14}} + (-2) \times \frac{2}{\sqrt{14}} + 2 \times \frac{-3}{\sqrt{14}} = -\frac{12}{\sqrt{14}}$$

故应选(C).

金榜时代图书·书目

考研数学系列

书名	作者	出版时间
数学复习全书·基础篇(数学一、二、三通用)	李永乐 王式安 武忠祥	2020 年 6 月
数学基础过关 660 题(数学一/数学二/数学三)	李永乐 王式安 武忠祥	2020 年 9 月
数学复习全书(数学一/数学二/数学三)	李永乐 王式安 武忠祥	2020 年 12 月
数学历年真题全精解析·强化篇(2009-2021 年)(数学一/数学二/数学三)	李永乐 王式安 武忠祥	2021 年 1 月
数学公式的奥秘	武忠祥 姜晓千	2021 年 3 月
高等数学辅导讲义	武忠祥	2021 年 3 月
线性代数辅导讲义	李永乐	2021 年 3 月
概率论与数理统计辅导讲义	王式安	2021 年 3 月
高等数学(微积分)辅导讲义	曹显兵 刘喜波	2021 年 4 月
概率论与数理统计辅导讲义	曹显兵	2021 年 4 月
数学强化通关 330 题(数学一/数学二/数学三)	李永乐 王式安 武忠祥	2021 年 5 月
数学历年真题全精解析·基础篇(1987-2008 年)(数学一/数学二/数学三)	李永乐 王式安 武忠祥	2021 年 8 月
数学决胜冲刺 6 套卷(数学一/数学二/数学三)	李永乐 王式安 武忠祥	2021 年 10 月
数学临阵磨枪(数学一/数学二/数学三)	李永乐 刘喜波 章纪民	2021 年 10 月
经济类联考数学复习全书	李永乐 王式安 章纪民	2021 年 4 月
农学门类联考数学复习全书	李永乐 王式安 章纪民	2021 年 4 月

大学数学系列

书名	作者	出版时间
大学数学线性代数辅导	李永乐	2018 年 12 月
大学数学高等数学辅导	武忠祥 章纪民	2021 年 5 月
大学数学概率论与数理统计辅导	刘喜波	2020 年 7 月

考研政治系列

书名	作者	出版时间
思想政治理论大纲命题解析	米鹏	2021 年 5 月
思想政治理论精雕细刻 1000 题	米鹏	2021 年 5 月
思想政治理论大串讲	米鹏	2021 年 10 月
思想政治理论最后 20 天必背 20 题	米鹏	2021 年 10 月

考研政治复习手账	张纹	2021 年 5 月
考研政治时政与大题	张纹	2021 年 10 月
考研政治冲刺预测 5 套卷	张纹	2021 年 10 月

考研英语系列

书名	作者	出版时间
考研词汇源来如此	全国考研英语金榜命题研究中心	2019 年 1 月
考研英语生猛海词	赵亮	2019 年 1 月
词维风暴	姜晗	2019 年 9 月
词法风暴	姜晗	2020 年 3 月
考研英语长难句核心语法	高维	2020 年 3 月

医师资格考试系列

书名	作者	出版时间
贺银成国家临床执业医师资格考试辅导讲义(上册)	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业医师资格考试辅导讲义(下册)	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业医师资格考试辅导讲义同步练习	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业医师资格考试全真模拟试卷及精析	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业及助理医师资格考试历年考点精析(上册)试题	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业及助理医师资格考试历年考点精析(下册)答案及精析	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业及助理医师资格考试实践技能应试指南	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试辅导讲义(上、下册)	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试辅导讲义同步练习	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试全真模拟试卷及精析	贺银成	2020 年 12 月
乡村全科执业助理医师资格考试考点精编	高鑫	2020 年 12 月
乡村全科执业助理医师资格考试实践技能应试指南	高鑫	2020 年 12 月
乡村全科执业助理医师资格考试习题精练精析	王大群 李慧婷	2020 年 12 月

考研西医系列

书名	作者	出版时间
贺银成考研西医临床医学综合能力辅导讲义(上、下册)	贺银成	2021 年 2 月
贺银成考研西医临床医学综合能力辅导讲义同步练习	贺银成	2021 年 3 月
贺银成考研西医临床医学综合能力全真模拟试卷及精析	贺银成	2021 年 3 月

贺银成考研西医临床医学综合能力历年真题精析	贺银成	2021 年 3 月
-----------------------	-----	------------

中外名著系列

书名	作者	出版时间
小王子	[法]安托万·德·圣-埃克苏佩里	2018 年 12 月
飞鸟集	[印]泰戈尔	2018 年 12 月
瓦尔登湖	[美]亨利·戴维·梭罗	2018 年 12 月
了不起的盖茨比	[美]弗·司各特·菲茨杰拉德	2018 年 12 月
简·爱	[英]夏洛蒂·勃朗特	2018 年 12 月
老人与海	[美]海明威	2018 年 12 月
月亮和六便士	[英]威廉·萨默塞特·毛姆	2018 年 12 月
呼啸山庄	[英]艾米莉·简·勃朗特	2018 年 12 月
傲慢与偏见	[英]简·奥斯丁	2018 年 12 月
双城记	[英]查尔斯·狄更斯	2019 年 3 月
朝花夕拾·呐喊	鲁迅	2018 年 4 月
呼兰河传	萧红	2018 年 4 月
骆驼祥子	老舍	2018 年 4 月
我这一辈子	老舍	2018 年 4 月
茶馆	老舍	2018 年 4 月

以上图书书名及出版时间仅供参考,以实际出版物为准,均属金榜时代(北京)教育科技有限公司!

微信公众号:金榜时代



原公众号:金榜图书考研,名称已更换

@金榜时代官方微博



天猫时代巨流图书专营店



微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

常用公式简表

三角关系式

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x},$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

常用的等价无穷小 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\sin x \sim x, \tan x \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, e^x - 1 \sim x, \ln(1+x) \sim x,$$

$$(1+x)^a - 1 \sim ax, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x, a^x - 1 \sim x \ln a (a > 0, a \neq 1),$$

$$x^m + x^k \sim x^m (k > m > 0), x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}, \tan x - x \sim \frac{x^3}{3}, \tan x - \sin x \sim \frac{x^3}{2}.$$

常用极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 (|q| < 1), \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty (|q| > 1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0 (k > 0), \lim_{n \rightarrow \infty} n^k = \infty (k > 0)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0), \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 (a > 1, k > 0), \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 (a > 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

积分公式

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1),$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1),$$

$$\int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C,$$

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + C,$$

$$\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C,$$

$$\int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + C,$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C,$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C,$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

常见的初等函数的 n 阶导数公式

$$(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}.$$

$$(\sin ax)^{(n)} = a^n \sin \left(\frac{n\pi}{2} + ax \right).$$

$$(\cos ax)^{(n)} = a^n \cos \left(\frac{n\pi}{2} + ax \right).$$

$$(\ln(1+x))^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x)^n}.$$

$$((1+x)^a)^{(n)} = a(a-1)\cdots(a-n+1)(1+x)^{a-n}.$$

若 a 为某一正整数 n , 则 $((1+x)^n)^{(n)} = n!, ((1+x)^n)^{(n+j)} = 0, j = 1, 2, \dots$.

微信公众号: 顶尖考研
 (ID: djky66)



乡村艺术Ke梦想社

音体美教师 志愿者招募

不要被摩天大厦挡个正着

去青瓦淡墨乡间

用我们的方式热爱这个时代



TEACH FOR CHINA

招募：乡村小学音体美青年教师志愿者

项目 简介

乡村艺术Ke梦想社创办于2017年，旨在改善乡村音体美教师紧缺现状，让乡村儿童感受音体美艺术之美，让更多的孩子，无论出身，都能获得同等的优质教育。梦想社创立之初，便启动了“助力乡村学校音体美课堂”行动计划，截止目前，该计划已牵手近300余名青年志愿者，落地学校已达10所。（详情敬请关注公众号“乡村艺术ke梦想社”）为善益众，求贤若渴，我们，正在远方，等着如诗般的你！

成为志愿者你将获得

- 服务学校包吃包住
- 每月1500元补助
- 志愿者服务期间的短期保障保险
- 方寸天地得享人生意趣，大美原乡遍寻香径落花

我们希望你

- 品行端正，有爱心，有耐心
- 身体健康，能适应艰苦乡村环境
- 受过良好教育且有音体美专业特长
- 认真负责，充满正能量，支教有清晰规划
- 吃苦耐劳，乐于助人，有良好的团队合作精神

报名方式

Step 1.

请以“**报名2020乡村艺术Ke梦想社音体美教师志愿者**”为邮件标题，发送邮件至：

CountryClass@126.com

Step 2.

邮件内容：正文简要介绍你

对社会公益的理解，参加本次活动的原因及您的一技之长；

附件1：支教课程设计（包括3节课以上的教案或课件）

附件2：个人简历（Word格式）



书名	出版时间	适用阶段
数学公式的奥秘	2020年3月	全程复习
数学复习全书·基础篇	2020年6月	夯实基础
数学基础过关660题	2020年8月	夯实基础
数学历年真题全精解析·基础篇	2020年8月	夯实基础
数学复习全书	2020年12月	全程复习
数学历年真题全精解析	2021年1月	全程复习
高等数学辅导讲义	2021年3月	强化提高
线性代数辅导讲义	2021年3月	强化提高
概率论与数理统计辅导讲义	2021年3月	强化提高
数学强化通关330题	2021年4月	强化提高
数学决胜冲刺6套卷	2021年10月	冲刺预测
数学临阵磨枪	2021年10月	冲刺预测

G20210002



图书售后答疑群
你问我答 全程服务



作者团队微博
定期在线答疑



ISBN 978-7-109-27183-8



9 787109 271838 >

定价：99.80元（全2册）