

“助力乡村学校音体美课堂行动”官方合作图书
/ 研客及全国各大考研培训学校指定用书

金榜时代TM
GLIST 明德·弘毅·品质 03

金榜时代考研数学系列

数学基础过关 660题 答案册

(数学二)

2022

编著◎李永乐 王式安 刘喜波 宋浩 姜晓千 铁军 武忠祥 章纪民 李正元 蔡燧林 胡金德

主编建议 | 与《数学复习全书·基础篇》、《历年真题全精解析·基础篇》配合使用 ● 无基础 不数学!

通关攻略 | 赠送《通关攻略》，内含复习指导，量化题与知识点，记录练习成果，统计薄弱考点 ● 二刷三刷必备攻略

刷题绝配 | 微信扫右侧二维码即可 免费观看全部重点题、难题超精讲视频



中国农业出版社
CHINA AGRICULTURE PRESS



金榜图书用户

专享福利活动

赠送

¥1000

代金券

适用于：李永乐老师全套图书以及课程

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

1. 活动参与方式

关注公众号 金榜时代考研 ▶ 回复 “22考研上岸” 即可参与

2. 活动时间

2020年8月20日——2021年11月24日

3. 兑换方式

进群咨询管理员兑换千元代金券

QQ群: 1019913136

扫右侧二维码即可进群



“助力乡村学校音体美课堂行动”官方合作图书

V研客及全国考研培训学校指定用书

金榜时代TM
GLIST 明德·弘毅·品质 03

金榜时代 考研数学系列

数学基础过关

660题 答案册 (数学二)

2022

编著 © 李永乐 王式安 刘喜波 宋浩 姜晓千 铁军 武忠祥 章纪民 李正元 蔡燧林 胡金德

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

@考研路上刚刚启程的你

业精于勤，荒于嬉；行成于思，毁于随。

中国农业出版社
CHINA AGRICULTURE PRESS

·北京·

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

顶尖考研 公众号
(ID: djky66)

目录 Contents

基础过关 1 阶

高等数学

填空题	3
选择题	52

线性代数

填空题	121
选择题	140

基础过关 2 阶

高等数学

填空题	167
选择题	194

线性代数

填空题	229
选择题	235

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

顶尖考研公众号
(ID: djky66)

基础过关



微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

1 阶

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)

天 天 天 天



微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

顶尖考研公众号
(ID: djky66)

高等数学

填空题

1

【答案】

$$f(g(x)) = \begin{cases} -1, & x < \frac{1}{3} \\ 0, & x = \frac{1}{3} \\ 1, & x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

【分析】

$$g(x) = e^{2x-1} - e^{-x} = 0, x = \frac{1}{3}, \text{ 所以 } f(g(x)) = \begin{cases} -1, & x < \frac{1}{3} \\ 0, & x = \frac{1}{3} \\ 1, & x > \frac{1}{3} \end{cases}.$$

2

【答案】 -2

【分析】 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2,$

所以 $f(x) = x^2 - 2, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2.$

难吗? 不会做? 可以看
《数学复习全书·基础篇》
高数第一章
函数极限连续

3

【答案】 -1

【分析】
$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2} - 1) \frac{2x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}}{\ln(1-x^2) \sin \frac{x}{1+x}}$$

用等价无穷小因子替换: $x \rightarrow 0$ 时

$$e^{x^2} - 1 \sim x^2, \ln(1-x^2) \sim -x^2, \sin \frac{x}{1+x} \sim \frac{x}{1+x} \sim x$$

得

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 \cdot 2x}{-x^2 \cdot x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \right) = -1.$$

【评注】 在计算极限时, 正确利用等价无穷小因子的代换定理能简化计算. 常用到的等价无穷小有:

$$\text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } \sin x \sim x, \tan x \sim x, \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2,$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a (a > 0), \ln(1+x) \sim x.$$

4

【答案】 e^2

【分析】 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \sqrt{\frac{x+1}{x^2}} = \cos 0 = 1$, 所以只须求

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$J = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$$

方法 1 这是指数型(1^∞)极限,用求指数型极限的一般方法:

$$J = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)}$$

转化为求

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right) & \xrightarrow{t = \frac{1}{x}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin 2t + \cos t)}{t} \\ & \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2\cos 2t - \sin t}{\sin 2t + \cos t} = 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow J = e^2, I = (e^2)^1 = e^2.$$

方法 2 用求 1^∞ 型极限的方法:

$$\begin{aligned} J &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right) + 1 \right]^{\frac{1}{\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1} \cdot x \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{其中} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right) & \xrightarrow{t = \frac{1}{x}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2t + \cos t - 1}{t} \\ & \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{t \rightarrow 0^+} (2\cos 2t - \sin t) = 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow J = e^2, I = (e^2)^1 = e^2.$$

5 【答案】 $\frac{1}{3}$

【分析】 **方法 1** $\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5} = x \left(\sqrt[6]{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right) - x \left(\sqrt[6]{1 - \frac{1}{x}} - 1 \right)$

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt[6]{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right) - \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt[6]{1 - \frac{1}{x}} - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{x} \right) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \times \frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{x} \right) \right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

【评注】 这里先作恒等变形后利用了等价无穷小因子替换:

$$(1+t)^a - 1 \sim at \quad (t \rightarrow 0).$$

方法 2 这是求 $\infty - \infty$ 型的极限,先转化为 $\frac{0}{0}$ 型极限,然后再用洛必达法则.

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[6]{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt[6]{1 - \frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \\ & \xrightarrow{t = \frac{1}{x}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(1+t)^{\frac{1}{6}} - (1-t)^{\frac{1}{6}}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{6} (1+t)^{-\frac{5}{6}} + \frac{1}{6} (1-t)^{-\frac{5}{6}} \right) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

6

【答案】 0

【分析】 这是 $\frac{0}{0}$ 型极限, 先作如下变形:

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x^2 - 2 \sin x + \sin 2x}{x^4}$$

可用的方法是洛必达法则(计算较繁)与泰勒公式.

注意泰勒公式

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \quad (x \rightarrow 0) \quad (x^4 \text{ 项系数为 } 0)$$

$$\Rightarrow x \sin x^2 = x(x^2 + o(x^4)) = x^3 + o(x^4)$$

$$-2 \sin x = -2 \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \right) = -2x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$$

$$\sin 2x = 2x - \frac{1}{6}(2x)^3 + o(x^4) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^4)$$

相加得

$$x \sin x^2 - 2 \sin x + \sin 2x = 0 + o(x^4) \quad (x \rightarrow 0)$$

因此

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^4)}{x^4} = 0$$

【评注】 如果求

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x^2 - 2 \sin x + \sin 2x}{x^5}$$

就要把 $\sin x$ 展开到 x^5 项:

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5) \quad (x \rightarrow 0)$$

然后可得

$$x \sin x^2 - 2 \sin x + \sin 2x = \frac{1}{4}x^5 + o(x^5) \quad (x \rightarrow 0)$$

于是

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4}x^5 + o(x^5)}{x^5} = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}$$

7

【答案】 $\frac{1}{n!}$

【分析】 方法 1 用等价无穷小因子替换

$$\sqrt[m]{1+x} - 1 = (1+x)^{\frac{1}{m}} - 1 \sim \frac{x}{m} \quad (x \rightarrow 0)$$

得 $\sqrt[m]{\cos x} - 1 = \sqrt[m]{1 + \cos x - 1} - 1 \sim \frac{\cos x - 1}{m} \quad (x \rightarrow 0)$, 于是

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{(\cos x - 1) + 1})(1 - \sqrt[3]{(\cos x - 1) + 1}) \cdots (1 - \sqrt[n]{(\cos x - 1) + 1})}{(1 - \cos x)^{n-1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{(\cos x - 1) + 1} - 1}{\cos x - 1} \right) \times \left(\frac{\sqrt[3]{(\cos x - 1) + 1} - 1}{\cos x - 1} \right) \times \cdots \times \left(\frac{\sqrt[n]{(\cos x - 1) + 1} - 1}{\cos x - 1} \right)$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(\cos x - 1)}{\cos x - 1} \times \frac{\frac{1}{3}(\cos x - 1)}{\cos x - 1} \cdots \frac{\frac{1}{n}(\cos x - 1)}{\cos x - 1} \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \cdots \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}.
 \end{aligned}$$

方法2 用等价无穷小因子替换:

$$t \sim \ln(1+t) \quad (t \rightarrow 0)$$

$$(\cos x)^{\frac{1}{m}} - 1 \sim \ln[(\cos x)^{\frac{1}{m}} - 1 + 1] = \frac{1}{m} \ln \cos x \quad (x \rightarrow 0)$$

因此

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{\cos x} - 1)(\sqrt[3]{\cos x} - 1) \cdots (\sqrt[n]{\cos x} - 1)}{(\cos x - 1)^{n-1}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt{\cos x} \ln \sqrt[3]{\cos x} \cdots \ln \sqrt[n]{\cos x}}{(\cos x - 1)^{n-1}} \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \cdots \times \frac{1}{n} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^{n-1} \cos x}{(\cos x - 1)^{n-1}} \\
 &= \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln[(\cos x - 1) + 1]}{\cos x - 1} \right)^{n-1} = \frac{1}{n!}.
 \end{aligned}$$

方法3 用极限的四则运算法则,这是 $n-1$ 个极限的乘积,分别求每个 $\frac{0}{0}$ 型极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[m]{\cos x}}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{m}(\cos x)^{\frac{1}{m}-1} \sin x}{\sin x} = \frac{1}{m}, (m = 2, 3, \cdots, n).$$

于是

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{\cos x}}{1 - \cos x} \cdots \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[n]{\cos x}}{1 - \cos x} \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \cdots \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}.
 \end{aligned}$$

8

【答案】 e

【分析】 这是 ∞^0 型极限,先作恒等变形

$$I = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{x^2} \left(1 + \frac{x^3}{e^{x^2}} \right) \right)^{\frac{1}{x^2}} = e \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x^2} \ln \left(1 + \frac{x^3}{e^{x^2}} \right)}$$

又

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} \ln \left(1 + \frac{x^3}{e^{x^2}} \right)}{\frac{x^3}{e^{x^2}}} \xrightarrow[\text{洛必达法则}]{\text{等价无穷小 因子替换}} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^3}{e^{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{x^2}}$$

$$\xrightarrow[\text{洛必达法则}]{\frac{\infty}{\infty}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = 0$$

其中

$$\ln \left(1 + \frac{x^3}{e^{x^2}} \right) \sim \frac{x^3}{e^{x^2}} \quad (x \rightarrow \infty)$$

因此,

$$I = e \cdot e^0 = e$$

9 【答案】 1【分析】 $\int_x^x \frac{\sin(xt)}{t} dt \stackrel{xt=s}{=} \int_{x^3}^{x^2} \frac{\sin s}{s} ds$

$$\Rightarrow I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{x^3}^{x^2} \frac{\sin s}{s} ds}{x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{\text{洛必达法则}}{=}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x^2}{x^2} \times 2x - \frac{\sin x^3}{x^3} \times 3x^2}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2} \times \frac{\sin x^3}{x^3} \times x = 1 - \frac{3}{2} \times 1 \times 0 = 1.$$

10 【答案】 $\ln 2$

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (2^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x+1}}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{\frac{1}{x+1}} x^2 (2^{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}} - 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (2^{\frac{1}{x(x+1)}} - 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \frac{1}{x(x+1)} \ln 2 = \ln 2. \end{aligned}$$

11 【答案】 1

$$\text{【分析】 } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x^2 \ln(x^2 + x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x^2 + x)} = e^0 = 1.$$

12 【答案】 2【分析】 方法1 这是 $\infty \cdot 0$ 型的数列极限, 转化为求 $\frac{0}{0}$ 型的函数极限, 然后用洛必达法则.

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan \frac{2}{n} - \arctan \frac{2}{n(1 + \frac{1}{n})}}{\frac{1}{n^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan 2x - \arctan \frac{2x}{1+x}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2}{1+4x^2} - \frac{1}{1 + \frac{4x^2}{(1+x)^2}} \cdot \frac{2(1+x) - 2x}{(1+x)^2}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+x)^2 - 1}{x(1+4x^2)((1+x)^2 + 4x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2+x}{(1+4x^2)((1+x)^2 + 4x^2)} = 2. \end{aligned}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

方法2 这是 $\infty \cdot 0$ 型极限, 为简化计算设法寻求 $\arctan \frac{2}{n} - \arctan \frac{2}{n+1}$ 的等价无穷小,它是 $f(x) = \arctan x$ 的改变量 $f\left(\frac{2}{n}\right) - f\left(\frac{2}{n+1}\right)$. 由拉格朗日中值定理, 它可改写成

$$\begin{aligned}\arctan \frac{2}{n} - \arctan \frac{2}{n+1} &= f\left(\frac{2}{n}\right) - f\left(\frac{2}{n+1}\right) = f'(\xi)\left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{1+\xi^2} \cdot \frac{2}{n(n+1)} \sim \frac{2}{n(n+1)} \quad (n \rightarrow \infty)\end{aligned}$$

其中 $\frac{2}{n+1} < \xi < \frac{2}{n}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{1+\xi^2} \rightarrow 1$.

$$\text{因此, } I = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \frac{2}{n(n+1)} = 2.$$

【评注】 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$.

求形如

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n [f(y_n) - f(z_n)]$$

的数列极限($\infty \cdot 0$ 型), 可考虑用拉格朗日中值定理, 转化为求

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n (y_n - z_n) \cdot f'(\xi)$$

其中 ξ 在 y_n 与 z_n 之间.

13 【答案】 $-\frac{\sqrt{e}}{4}$

【分析】
$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} - \sqrt{e} \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} [e^{\frac{n}{2} \ln(1 + \frac{1}{n})} - e^{\frac{1}{2}}] \\ &= e^{\frac{1}{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} [e^{\frac{1}{2}(n \ln(1 + \frac{1}{n}) - 1)} - 1] \\ &= e^{\frac{1}{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{1}{2} [n \ln(1 + \frac{1}{n}) - 1] \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{e}}{4}\end{aligned}$$

14 【答案】 2

【分析】 由
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right)}{x} = 3$$

(1)

当 $x \rightarrow 0$ 时, 分母为无穷小, 所以分子也为无穷小, 进一步有 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \frac{f(x)}{x}\right) = 0$.

因此, 当 $x \rightarrow 0$ 时

$$\ln\left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right) \sim x + \frac{f(x)}{x}, \text{ 所以 (1) 可写为 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{f(x)}{x}}{x} = 3.$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 2.$$

15 【答案】 $\frac{1}{2}$

【分析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + xf(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1-x) + x}{x^2} + \frac{xf(x) - x}{x^2} \right] = 0,$
而 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + x}{x^2} = -\frac{1}{2}$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{1}{2}.$

16 【答案】 $\ln 3$

【分析】 先求出 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{x'}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}} = e^0 = 1$

由函数的连续性得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x^{\frac{1}{x}}) = f(1) = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln[2 + f(x^{\frac{1}{x}})] = \ln 3.$

17 【答案】 $-1, 0$

【分析】 由泰勒展开, 当 $x \rightarrow \infty$ 时,

$$\sqrt[3]{1-x^6} = -x^2 \left(1 - \frac{1}{x^6} \right)^{\frac{1}{3}} = -x^2 \left(1 - \frac{1}{3x^6} + o(x^{-6}) \right)$$

所以 $a = -1, b = 0.$

18 【答案】 $-p$

【分析】 因为 $|x|$ 是分段函数, 分界点是 $x = 0$, 又 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ 不存在, 但 $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$, 所以要分别求左、右极限.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a + be^{\frac{1}{x}}}{a - be^{\frac{1}{x}}} \cdot \frac{\sin px}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ae^{-\frac{1}{x}} + b}{ae^{-\frac{1}{x}} - b} \cdot \frac{px}{x} = \frac{0+b}{0-b} \cdot p = -p$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a + be^{\frac{1}{x}}}{a - be^{\frac{1}{x}}} \cdot \frac{\sin px}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a + be^{\frac{1}{x}}}{a - be^{\frac{1}{x}}} \cdot \frac{px}{-x} = \frac{a+0}{a-0} \cdot (-p) = -p$$

因此 $I = -p.$

19 【答案】 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

【分析】 显然

$$0 < x_n = \frac{2(1+x_{n-1})-1}{1+x_{n-1}} = 2 - \frac{1}{1+x_{n-1}} < 2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

即 x_n 有界.

令 $f(x) = 2 - \frac{1}{1+x} \Rightarrow f(x) \nearrow (x \geq 0) \Rightarrow x_{n+1} = f(x_n) (n = 1, 2, 3, \dots)$ 单调.

因此 x_n 收敛, 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

对递归方程 $x_n = \frac{1+2x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$ 两边取极限得

$$a = \frac{1+2a}{1+a}, \text{ 即 } a^2 - a - 1 = 0$$

解得 $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

【评注】也可按定义证明 x_n 单调. 考察

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \left(2 - \frac{1}{1+x_n}\right) - \left(2 - \frac{1}{1+x_{n-1}}\right) = \frac{1}{1+x_{n-1}} - \frac{1}{1+x_n} \\ &= \frac{x_n - x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

又 $x_1 = 1 < x_2 = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}$, 由归纳法可知 $x_n \nearrow$.

20 【答案】 $n+1$

【分析】已知 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = A \neq 0 (\exists)$, 求正数 k 使得 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\int_a^x f(t) dt}{(x-a)^k} \exists \neq 0$.

这是 $\frac{0}{0}$ 型极限, 用洛必达法则得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\int_a^x f(t) dt}{(x-a)^k} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{k(x-a)^{k-1}} \xrightarrow{\text{取 } k=n+1} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(n+1)(x-a)^n} \\ &= \frac{A}{n+1} \neq 0 (\exists) \Rightarrow \int_a^x f(t) dt \text{ 是 } (x-a) \text{ 的 } (n+1) \text{ 阶无穷小.} \end{aligned}$$

21 【答案】 6

【分析】确定 $n > 0$ 使得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x-\sin x} \ln(1+t) dt}{x^n} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+(x-\sin x))(1-\cos x)}{nx^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-\sin x) \frac{1}{2} x^2}{nx^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-\sin x}{nx^{n-3}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{n(n-3)x^{n-4}} \stackrel{\text{取 } n=6}{=} \frac{1}{72} \neq 0. \end{aligned}$$

其中

$$\ln(1+(x-\sin x)) \sim x-\sin x \quad (x \rightarrow 0)$$

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \quad (x \rightarrow 0)$$

应填 $n=6$.

22 【答案】 $-1, \frac{4}{3}$

【分析】 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{\ln(1+3x)} = \frac{1}{3}$

要使得函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点极限存在, 必须满足

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x (b \cos x - 1)}{e^x + a} = \frac{1}{3},$$

故 $a = -1$, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x (b \cos x - 1)}{e^x - 1} = b - 1 = \frac{1}{3},$$

$$b = \frac{4}{3}.$$

23 【答案】 $a = -1, b = \ln 2$

【分析】 先分别考察 $f(x), g(x)$ 的连续性.

对 $\forall a, x \neq 0$ 时 $f(x)$ 连续, $x = 0$ 时 $f(x)$ 左连续, $f(0) = 6$.

又

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax^3} - 1}{x - \arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax^3}{x - \arcsin x} \\ &\stackrel{t = \arcsin x}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{a \sin^3 t}{\sin t - t} = a \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^3}{\sin t - t} \\ &= a \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{3t^2}{\cos t - 1} = -6a \end{aligned}$$

仅当 $a = -1$ 时 $f(x)$ 在 $x = 0$ 右连续. 因此, 仅当 $a = -1$ 时 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续.

对 $\forall b, x \neq 1$ 时 $g(x)$ 连续, $x = 1$ 时 $g(x)$ 右连续, $g(1) = e^b + 1$, 又

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3 \sin(x-1)}{x-1} = 3,$$

仅当 $e^b + 1 = 3$, 即 $e^b = 2, b = \ln 2$ 时 $g(x)$ 在 $x = 1$ 左连续. 因此, 仅当 $b = \ln 2$ 时 $g(x)$ 在 $x = 1$ 连续.

现由连续性运算法则知, $b = \ln 2, a = -1$ 时 $f(x) + g(x)$ 处处连续.

$a \neq -1$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 不连续, $g(x)$ 在 $x = 0$ 连续

$\Rightarrow f(x) + g(x)$ 在 $x = 0$ 不连续.

$b \neq \ln 2$ 时, $f(x)$ 在 $x = 1$ 连续, $g(x)$ 在 $x = 1$ 不连续

$\Rightarrow f(x) + g(x)$ 在 $x = 1$ 不连续.

因此, 仅当 $a = -1, b = \ln 2$ 时 $f(x) + g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 处处连续.

24 【答案】 $(1, e)$

【分析】 $f(x)$ 只有间断点 $x = a, x = b$.

当 $a = 1, b = e$ 时

$$f(x) = \frac{e^x - e}{(x-1)(x-e)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{(x-1)(x-e)} = \frac{1}{1-e} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x-1} = \frac{e}{1-e},$$

$x = 1$ 为可去间断点.

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{e^x - e}{(x-1)(x-e)} = \infty$$

$x = e$ 为无穷间断点.

当 $a = e, b = 1$ 时

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{(x-e)(x-1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow e} f(x) = \infty.$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$x=1, x=e$ 均为无穷间断点. 因此, $(a, b) = (1, e)$.

25 【答案】 $(-\infty, +\infty)$.

【分析】 先求出 $f(x)$.

$$x < 0 \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}} = \frac{x+0}{1+0} = x,$$

$$x = 0 \text{ 时, } f(0) = 0,$$

$$x > 0 \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x e^{-nx} + x^2}{1 + e^{-nx}} = \frac{0 + x^2}{1 + 0} = x^2.$$

因此
$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$$

$f(x)$ 处处连续, 即连续区间是 $(-\infty, +\infty)$.

26 【答案】
$$\begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(2xe^{x^2-1} - 1), & x > 1 \end{cases}$$

【分析】 注意在 $x=1$ 处 $\arctan x = \frac{1}{2}(e^{x^2-1} - x) + \frac{\pi}{4}$. 易得

$$f'(x) = (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, x \leq 1$$

其中 $x=1$ 处是 $f'_-(1) = \frac{1}{1+x^2} \Big|_{x=1} = \frac{1}{2}$.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2}(e^{x^2-1} - x) + \frac{\pi}{4} \right)' = \frac{1}{2}(2xe^{x^2-1} - 1), x \geq 1$$

其中 $x=1$ 处是 $f'_+(1) = \frac{1}{2}(2xe^{x^2-1} - 1) \Big|_{x=1} = \frac{1}{2}$.

因为 $f'_+(1) = f'_-(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$.

因此
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(2xe^{x^2-1} - 1), & x > 1 \end{cases}$$

27 【答案】
$$\begin{cases} \frac{-x - (1-x)\ln(1-x)}{x^2(1-x)}, & -\infty < x < 1, x \neq 0 \\ -\frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

【分析】 首先由 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续确定 b 值:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+bx)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx}{x} = b = f(0) = -1$$

$\Rightarrow b = -1$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-x)}{x}, & -\infty < x < 1, x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$$

$x \neq 0$ 时

$$f'(x) = \frac{\frac{-x}{1-x} - \ln(1-x)}{x^2} = \frac{-x - (1-x)\ln(1-x)}{x^2(1-x)} \quad (-\infty < x < 1, x \neq 0)$$

下求 $f'(0)$.

方法 1 按定义求 $f'(0)$.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1-x)}{x} + 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1-x) + x}{x^2}}{\frac{0}{0}} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{1-x} + 1}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-1 + 1 - x}{2x} \cdot \frac{1}{1-x} \right) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

或用泰勒公式

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) + x}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

方法 2 在连续的条件下求 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$.

已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 在 $x=0$ 空心邻域可导, 于是

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - (1-x)\ln(1-x)}{x^2(1-x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - (1-x)\ln(1-x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \frac{1-x}{1-x} + \ln(1-x)}{2x} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

因此

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-x - (1-x)\ln(1-x)}{x^2(1-x)}, & -\infty < x < 1, x \neq 0 \\ -\frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

【评注】 求形如 $f(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq x_0 \\ A, & x = x_0 \end{cases}$ 分段函数在分段点处的导数时一般要用定义来求, 或函数在分段点连续的条件下求导数的极限. 即用下面定理求分段函数在分段点的导数: (1) $f(x)$ 在 x_0 处连续; (2) $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域内可导, (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ 存在, 则

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x).$$

28

【答案】 $\alpha > 1, \alpha > 2$

【分析】 只要考虑 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的情况.

若 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导, 则

$$f'(0) = f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} h = 0$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

所以 $f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^\alpha \sin \frac{1}{h}}{h} = 0, \alpha > 1$

若 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 点连续, 则当 $x > 0$ 时,

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x} \right) = f'(0) = 0$$

所以 $\alpha > 2$.

29 【答案】 $-\frac{1}{2}$

【分析】 $f'(x)$ 也以 3 为周期且是奇函数:

$$f'(5) = f'(2) = -f'(-2)$$

现按导数定义求此极限.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5-2\sin h) - f(5)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(5-2\sin h) - f(5)}{-2\sin h} \times \frac{-2\sin h}{h} \right] \\ &= -2f'(5) = -2 \times (-f'(-2)) \\ &= 2 \times (-1) = -2 \end{aligned}$$

因此, 原极限 $= -\frac{1}{2}$.

30 【答案】 e^6

【分析】 这是指数型的数列极限, 先化为

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\frac{1}{n} \ln f(\frac{1}{n})}{1 - \cos \frac{1}{n}}}$$

转化为求

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \ln f(\frac{1}{n})}{1 - \cos \frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2} \frac{1}{n^2}} \left[\ln f\left(\frac{1}{n}\right) - \ln f(0) \right] \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln f\left(\frac{1}{n}\right) - \ln f(0)}{\frac{1}{n}} = 2 \times (\ln f(x))' \Big|_{x=0} \\ &= 2 \times \frac{f'(0)}{f(0)} = 2 \times 3 = 6 \\ \Rightarrow I &= e^6. \end{aligned}$$

【评注】 下面方法是错误的.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln f\left(\frac{1}{n}\right) - \ln f(0)}{\frac{1}{n}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln f(t) - \ln f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{f'(t)}{f(t)}}{1} = \frac{f'(0)}{f(0)}$$

这是因为题设中没有假设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 邻域可导及 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 连续.

31 【答案】 $\frac{1}{2}f''(a)$

【分析】 方法 1 $I = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - hf'(a)}{h^2} \quad (1)$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{2h} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2}f''(a) \quad (3)$$

(1) 式到(2) 式用了洛必达法则, (2) 式到(3) 式利用了 $f'(x)$ 在 $x=a$ 处的导数定义.

【评注】 由于题设中没有 $f''(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内存在及 $f''(x)$ 在 $x=a$ 是连续的, 所以(2) 式到(3) 不能利用洛必达法则. 由 $f''(a) \exists \Rightarrow f'(x)$ 在 $x=a$ 某邻域可导, 对(1) 式可用洛必达法则.

方法 2 用泰勒公式.

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + o(h^2) \quad (h \rightarrow 0)$$

代入得

$$I = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + o(h^2)}{h} - f'(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}f''(a) + \frac{o(h^2)}{h^2} \right) = \frac{1}{2}f''(a).$$

32 【答案】 $x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$

【分析】 $f(x) = x^{\sin x} = e^{\sin x \cdot \ln x},$

$$f'(x) = e^{\sin x \cdot \ln x} (\sin x \cdot \ln x)' = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right).$$

33 【答案】 $2(n!)^2$

【分析】 记 $g(x) = (x+1)^2(x+2)^2 \cdots (x+n)^2$, 则

$$f(x) = x^2 g(x), f'(x) = 2xg(x) + x^2 g'(x)$$

$$f''(x) = 2g(x) + 4xg'(x) + x^2 g''(x)$$

因此, 令 $x=0$ 得

$$f''(0) = 2g(0) = 2(n!)^2$$

34 【答案】 $\frac{1}{t}; -\frac{1+t^2}{t^3}; \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

【分析】

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{t}} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dy}{dx} \right)'_t}{x'_t} = -\frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{t}} = -\frac{1+t^2}{t^3}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

知识点链接

《数学复习全书·基础篇》
高数第二章
导数与微分

$y = y(x)$ 的曲率

$$K = \frac{|y''(x)|}{(1+y'^2(x))^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1+t^2}{|t|^3}}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

【评注】(1) 通常将一阶导数化简后,再计算二阶导数会简单些.

(2) 注意 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'}{x'}$, 通常易犯的错误是 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)'$.

35

【答案】 $-\frac{y}{(1-\cos(x+y))^3}$

【分析】 将方程两边对 x 求导得

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x+y) \left(1 + \frac{dy}{dx}\right)$$

解出

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)} \quad \left(1 + \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-\cos(x+y)}\right)$$

再对 x 求导得

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-\cos(x+y)} \right) = -\frac{\sin(x+y)}{(1-\cos(x+y))^2} (1+y')$$

代入 $1+y'$ 的表达式得

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\sin(x+y)}{(1-\cos(x+y))^3} = -\frac{y}{(1-\cos(x+y))^3}$$

36

【答案】 $-\frac{e^x}{(1+e^x)^3}$

【分析】 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1+e^x}$

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{1+e^x} \right) = \frac{\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+e^x} \right)}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{e^x}{(1+e^x)^3}$$

37

【答案】 $\frac{\cos x}{1+\sin x}$

【分析】 $f'(x) = \ln(1+\sin x)$

$$f''(x) = \frac{\cos x}{1+\sin x}$$

38

【答案】 $-\frac{2x}{2+\sin y^2} dx$

【分析】 $2x + (2+\sin y^2) \frac{dy}{dx} = 0$, 所以 $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2+\sin y^2}$, $dy = -\frac{2x}{2+\sin y^2} dx$.

39

【答案】 $\frac{d^2 y}{dt^2} + a^2 y = 0$

【分析】 方法1 y 作为 t 的函数是 $y = y(x)$ 与 $x = \sin t$ 的复合函数, 由复合函数求导法得

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = \cos t \frac{dy}{dx}$$

再对 t 求导得

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\cos t \frac{dy}{dx} \right) = \cos t \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) - \sin t \frac{dy}{dx} \\ &= \cos t \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{dt} - \sin t \frac{dy}{dx} = \cos^2 t \frac{d^2 y}{dx^2} - \sin t \frac{dy}{dx} \\ &= (1 - \sin^2 t) \frac{d^2 y}{dx^2} - \sin t \frac{dy}{dx} = (1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

由原方程得

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a^2 y = 0.$$

方法2 $y = y(x)$ 也是 y 作为 t 的函数与 $t = \arcsin x$ 的复合函数, 由复合函数求导法得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{dt}, x \frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{dt}$$

再对 x 求导得

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{1}{(1-x^2)} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{dy}{dt} \\ (1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} + x \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

由原方程得

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a^2 y = 0.$$

40

【答案】 $(-1)^{n-1} (n-1)! [(-2)^n - 3^n]$

【分析】 方法1 $f(x) = \ln(1-2x) - \ln(1+3x)$

$$f^{(n)}(x) = (\ln(1-2x))^{(n)} - (\ln(1+3x))^{(n)}$$

由归纳法易得到

$$(\ln(1+ax))^{(n)} = (-1)^{n-1} a^n (n-1)! (1+ax)^{-n}$$

于是

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! [(-2)^n (1-2x)^{-n} - 3^n (1+3x)^{-n}]$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)! [(-2)^n - 3^n].$$

方法2 $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}t^n + o(t^n)$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^k + o(t^n) \quad (t \rightarrow 0)$$

$$\Rightarrow f(x) = \ln(1-2x) - \ln(1+3x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} (-2x)^k - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} (3x)^k + o(x^n)$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} [(-2)^k - 3^k] x^k + o(x^n)$$

$$\stackrel{\text{记}}{=} \sum_{k=1}^n a_k x^k + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0) = n! a_n = n! \frac{(-1)^{n-1}}{n} [(-2)^n - 3^n] = (-1)^{n-1} (n-1)! [(-2)^n - 3^n].$$

41

【答案】

$$\begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数} \\ 2^{n-1} \left[\left(\frac{n-1}{2} \right)! \right]^2, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

【分析】 $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}, f'(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \arcsin x + \frac{1}{1-x^2},$

$$(1-x^2)f'(x) - xf(x) - 1 = 0$$

$$[(1-x^2)f'(x) - xf(x) - 1]^{(n)} = 0$$

$$[(1-x^2)f'(x)]^{(n)} - [xf(x)]^{(n)} = 0$$

$$(1-x^2)f^{(n+1)}(x) - (2n+1)xf^{(n)}(x) - n^2f^{(n-1)}(x) = 0$$

令 $x=0$, 则 $f^{(n+1)}(0) - n^2f^{(n-1)}(0) = 0$. 而 $f'(0)=1, f''(0)=0$, 所以

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数} \\ 2^{n-1} \left[\left(\frac{n-1}{2} \right)! \right]^2, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

42

【答案】 $x=1$

【分析】 将方程 $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$ 两边对 x 求导, 得

$$6y^2y' - 4yy' + 2y + 2xy' - 2x = 0$$

整理得

$$y'(3y^2 - 2y + x) = x - y \quad (1)$$

令 $y'=0$, 有 $x=y$, 将其代入 $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$ 得

$2x^3 - x^2 - 1 = (x^3 - 1) + (x^3 - x^2) = 0$, 即 $(x-1)(2x^2 + x + 1) = 0$, 于是 $x=1$ 是唯一的驻点. 此时, $y=x=1$.

进一步判断 $x=1$ 是否极值点:

对(1)求导 $y''(3y^2 - 2y + x) + y'(3y^2 - 2y + x)'_x = 1 - y'$

把 $x=1, y=1, y'(1)=0$ 代入上式, 得 $y''(1) = \frac{1}{2} > 0$, 于是 $y(x)$ 只有极值点为 $x=1$,

它是极小值点.

43

【答案】 $(-\infty, -1], [3, +\infty)$ 是单调增区间; $[-1, 1), (1, 3]$ 是单调减区间;

$f(-1)=-2$ 是极大值, $f(3)=0$ 是极小值; $(1, +\infty)$ 是凹区间; $(-\infty, 1)$ 是凸区间

【分析】 $y = \frac{((x-1)+(-2))^2}{4(x-1)} = \frac{1}{4}(x-1) - 1 + \frac{1}{x-1}$

$$y' = \frac{1}{4} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 4}{4(x-1)^2} = \frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}$$

$$y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 3, x = -1, y'' \neq 0, x = 1$ 处 y 无定义. 现用 $x = -1, x = 1, x = 3$ 将定义域分成如下区间并列表:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	+	0	-	无定义	-	0	+
y''	-	-	-		+	+	+
y		-2				0	

44 【答案】 $-3, -9$

【分析】 求出 $y'' = 6x + 2a$.

$(1, 3)$ 为该曲线拐点 $\Rightarrow$

$$y(1) = 1 + a + b + 14 = 3$$

$$y''(1) = 6 + 2a = 0$$

$\Rightarrow a = -3, b = -9$. 又

$$y''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1) \begin{cases} > 0, & x > 1 \\ = 0, & x = 1 \\ < 0, & x < 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow a = -3, b = -9$ 时 $(1, 3)$ 确为该曲线的拐点.

因此, $a = -3, b = -9$.

45 【答案】 64

【分析】 为使 $f(x) \geq 20$, 只要 $3x^5 + A \geq 20x^3$ 即 $20x^3 - 3x^5 \leq A$. 设 $g(x) = 20x^3 - 3x^5$, 则 A 至少是 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内的最大值.

因

$$g'(x) = 60x^2 - 15x^4 = 15x^2(4 - x^2) \begin{cases} > 0, & 0 < x < 2 \\ = 0, & x = 2 \\ < 0, & x > 2 \end{cases},$$

所以 $x = 2$ 是 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 的最大值点, 所以 A 至少为 $g(2) = 64$, 有 $f(x) \geq 20$.

46 【答案】 $0; 27$

【分析】 设 $\varphi(x) = 4x^3 - 18x^2 + 27$, 则

$$\varphi'(x) = 12x(x - 3) \begin{cases} < 0, & 0 < x < 3 \\ = 0, & x = 3 \\ > 0, & x > 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow \varphi(x)$ 在 $[0, 2]$ 单调下降

$$\varphi(0) = 27, \quad \varphi(2) = -13$$

$\Rightarrow \exists$ 唯一 $x_0 \in (0, 2), \varphi(x_0) = 0$.

由于 $f(x) = |\varphi(x)| \Rightarrow$

$$f(0) = 27, \quad f(x_0) = 0, \quad f(2) = 13.$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

因此, $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 的最小值为 0, 最大值为 27.

【评注】(1) 若求 $f(x) = |\varphi(x)|$ 在 $[2, 4]$ 上的最大值与最小值, 除求出 $\varphi(2) = -13$ 外, 还须求出

$$\varphi(3) = -27, \varphi(4) = -5$$

由 $\varphi(x)$ 的单调性知, 在 $[2, 4]$ 上 $\varphi(x) \neq 0$.

由于 $f(x) = |\varphi(x)|$

$$f(2) = 13, f(3) = 27, f(4) = 5$$

因此, $f(x)$ 在 $[2, 4]$ 的最小值为 5, 最大值为 27.

(2) 求在 $[a, b]$ 上连续函数 $f(x)$ 的最值时, 只须求出 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内的驻点, 不可导点, 再将这些点处的函数值与端点的函数值比较, 挑出最大者和最小者, 不必判断驻点和不可导点是否为极值点.

47 【答案】 0

【分析】 方法 1 若知道以下事实: 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = b > 0 (< 0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty (-\infty)$, 立即可得 $b = 0$. 否则由 $b > 0$ (或 $b < 0$) $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty (-\infty)$ 与 $f(x)$ 在 $(c, +\infty)$ 有界矛盾.

【评注】 实质上就是用反证法证明 $b = 0$, 不妨设 $b > 0$, 取 a 满足 $0 < a < b$, 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = b > a$, 则存在 $x_0 > 0$.

当 $x \geq x_0$ 时 $f'(x) > a$, 在 $[x_0, x]$ 上用拉格朗日中值定理,

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) > a(x - x_0) \quad (\xi \in (x_0, x)),$$

即 $f(x) > a(x - x_0) + f(x_0)$, 因

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [a(x - x_0) + f(x_0)] = +\infty.$$

所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 从而 $f(x)$ 在 $(c, +\infty)$ 上无界, 这与 $f(x)$ 在 $(c, +\infty)$ 上是有界函数矛盾.

方法 2 因 $f(x)$ 在 $(c, +\infty)$ 可导, 有界.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = b \Rightarrow b = 0.$$

【评注】 事实上有如下结论: 设

(1) $f(x), g(x)$ 在 $(c, +\infty)$ 可导, 且 $g'(x) \neq 0$;

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \infty$; (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (A 为有限或 ∞);

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

也就是, 在上述情形下, 我们可不必验证分子 $f(x)$ 是否为无穷大量. 方法 2 中用到了这个结论.

48 【答案】 $x = -\frac{1}{2}, y = (2\ln 2)x + \frac{1}{4}\ln 2 + 1 (x \rightarrow +\infty),$

$$y = -(2\ln 2)x - \frac{1}{4}\ln 2 - 1 (x \rightarrow -\infty)$$

【分析】 函数的全部间断点是 $x=0, x=-\frac{1}{2}$.

$$\text{因 } \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\sqrt{4x^2 + x} \ln(2x+1) - \sqrt{4x+1} \sqrt{x} \ln x] = 0 - 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} y = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} \left(\sqrt{4x^2 + x} \ln \frac{2x+1}{x} \right) = \infty$$

于是垂直渐近线只有 $x = -\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x|}{x} \sqrt{4 + \frac{1}{x}} \ln \left(2 + \frac{1}{x} \right) = \pm 2 \ln 2,$$

$$\begin{aligned} \text{又 } \lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (2 \ln 2)x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{x}} \ln \left(2 + \frac{1}{x} \right) - 2 \ln 2}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{4+t} \ln(2+t) - 2 \ln 2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{4+t}}{2+t} + \frac{\ln(2+t)}{2\sqrt{4+t}} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{4} \ln 2. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (-2 \ln 2)x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \left[\sqrt{4 + \frac{1}{x}} \ln \left(2 + \frac{1}{x} \right) - 2 \ln 2 \right] = -1 - \frac{1}{4} \ln 2.$$

因此,全部渐近线是: $x = -\frac{1}{2}, y = (2 \ln 2)x + \frac{1}{4} \ln 2 + 1 (x \rightarrow +\infty),$

$y = -(2 \ln 2)x - \frac{1}{4} \ln 2 - 1, (x \rightarrow -\infty).$

49 【答案】 $y = -\frac{1}{2}x$

【分析】 由连续性, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, 又 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{e^x - 1} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 于是 $f(0) = 0$.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{e^x - 1} \cdot \frac{e^x - 1}{x} = 2 \times 1 = 2$$

$\Rightarrow$ 曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 0$ 处的法线斜率为 $-\frac{1}{2}$, 法线方程为 $y = -\frac{1}{2}x$.

50 【答案】 3

【分析】 由于 $y(x)$ 二阶可导, $(x_0, 3)$ 是拐点, 则 $y(x_0) = 3, y''(x_0) = 0$.

先求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = (4-y)\beta y^{\beta-1} \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} y^\beta = \frac{dy}{dx} y^{\beta-1} ((4-y)\beta - y)$$

$$\text{由 } \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=x_0} = 0, \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = (4-y(x_0))y(x_0)^\beta = 3^\beta \neq 0,$$

$$(4-y(x_0))\beta - y(x_0) = 0$$

$$\beta = \frac{3}{4-3} = 3.$$

51 【答案】 $\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} + C, C$ 为任意常数

【分析】 将 $\int f'(x^3)dx = x^3 + C$ 两边求导得

$$f'(x^3) = 3x^2$$

令 $t = x^3 (x = t^{\frac{1}{3}})$, 则 $f'(t) = 3t^{\frac{2}{3}}$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{9}{5}t^{\frac{5}{3}} + C$$

因此, $f(x) = \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} + C, C$ 为任意常数.

难吗? 不会做? 可以看
《数学复习全书·基础篇》
高数第四章
不定积分

52 【答案】 $\frac{3}{2}\arcsin \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}\sqrt{9-4x^2} + C, C$ 为任意常数

【分析】 方法 1 $I = \int \frac{3-2x}{\sqrt{9-4x^2}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{2}{3}x)^2}} + \frac{1}{4}\int \frac{d(9-4x^2)}{\sqrt{9-4x^2}}$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d(\frac{2}{3}x)}{\sqrt{1-(\frac{2}{3}x)^2}} + \frac{1}{4}\int \frac{d(9-4x^2)}{\sqrt{9-4x^2}}$$

$$= \frac{3}{2}\arcsin \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}\sqrt{9-4x^2} + C.$$

方法 2 令 $t = \sqrt{\frac{3-2x}{3+2x}}$, 解出 $x = \frac{3}{2}\frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{-6t}{(1+t^2)^2}dt$, 于是

$$I = \int \frac{-6t^2}{(1+t^2)^2}dt = \int 3td\left(\frac{1}{1+t^2}\right)$$

$$= \frac{3t}{1+t^2} - \int \frac{3tdt}{1+t^2} = \frac{3t}{1+t^2} - 3\arctan t + C$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{9-4x^2} - 3\arctan \sqrt{\frac{3-2x}{3+2x}} + C$$

53 【答案】 $\ln \left| \frac{x+2-2\sqrt{x+1}}{x+2+\sqrt{x+1}} \right| - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan \frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}} + C, C$ 为任意常数

【分析】 令 $\sqrt{x+1} = t$, 则 $x = t^2 - 1, dx = 2tdt$, 于是

$$I = \int \frac{t+2}{t^4-t}2tdt = 2\int \frac{t+2}{t^3-1}dt = 2\int \frac{(t^2+t+1)-(t^2-1)}{(t-1)(t^2+t+1)}dt$$

$$= 2\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{t+1}{t^2+t+1} \right)dt = 2\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{2} \frac{2t+1+1}{t^2+t+1} \right)dt$$

$$= 2\int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1} - \int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= 2\ln|t-1| - \ln|t^2+t+1| - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \ln \left| \frac{x+2-2\sqrt{x+1}}{x+2+\sqrt{x+1}} \right| - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}} + C$$

54 【答案】 $2x\sqrt{1+e^x} - 4\sqrt{1+e^x} - 2\ln \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + C$, C 为任意常数

【分析】 先用分部积分法.

$$I = \int 2x d\sqrt{1+e^x} = 2x\sqrt{1+e^x} - 2 \int \sqrt{1+e^x} dx$$

再作变量替换, 令 $\sqrt{1+e^x} = t$, 则 $x = \ln(t^2 - 1)$, $dx = \frac{2t}{t^2 - 1} dt$, 于是

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+e^x} dx &= \int \frac{2t^2}{t^2 - 1} dt = 2 \int \frac{t^2 - 1 + 1}{t^2 - 1} dt \\ &= 2 \left(t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) + C \\ &= 2\sqrt{1+e^x} + \ln \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + C \end{aligned}$$

因此, $I = 2x\sqrt{1+e^x} - 4\sqrt{1+e^x} - 2\ln \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + C$.

55 【答案】 $-\frac{1}{x} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - \frac{1}{2} \arctan x + C$, C 为任意常数

【分析】
$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} \right) dx = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{x^2-1+1}{(1-x^2)(1+x^2)} \right) dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx + \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= \int \frac{1}{x^2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-x^2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - \frac{1}{2} \arctan x + C. \end{aligned}$$

56 【答案】 $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \ln |1 + \sin 2x| + C$, C 为任意常数

【分析】 方法 1
$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin x (\cos x - \sin x)}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1 - \cos 2x}{\cos 2x} dx \\ &= -\frac{1}{4} \int \frac{1}{\cos 2x} d(\cos 2x) - \frac{1}{4} \int \frac{1}{\cos 2x} d(2x) + \frac{1}{2} \int dx \\ &= -\frac{1}{4} \ln |\cos 2x| - \frac{1}{4} \ln |\sec 2x + \tan 2x| + \frac{1}{2}x + C \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \ln |1 + \sin 2x| + C. \end{aligned}$$

方法 2 将 $\sin x$ 作如下分解

$$\sin x = \alpha(\sin x + \cos x) + \beta(\sin x - \cos x) = (\alpha - \beta)\sin x + (\alpha + \beta)\cos x$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

令 $\begin{cases} \alpha - \beta = 1 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$ 得 $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2}$. 于是

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{1}{2}(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{(\sin x + \cos x)'}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \ln |\sin x + \cos x| + C \end{aligned}$$

【评注】(1) 方法1中用到了 $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln |\sec x + \tan x| + C$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos x} &= \int \frac{d\sin x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1 + \sin x} + \frac{1}{1 - \sin x} \right) d\sin x \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + C = \frac{1}{2} \ln \frac{(1 + \sin x)^2}{\cos^2 x} + C \\ &= \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| + C \end{aligned}$$

(2) 方法2中的方法适用于求积分

$$\int \frac{\sin x}{a \sin x + b \cos x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{a \sin x + b \cos x} dx.$$

57

【答案】 $\frac{1}{2} \ln(\sqrt{1+x^4}-1) - \ln|x| + C, C$ 为任意常数

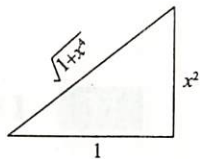
【分析】 方法1 先凑微分后作变量代换

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{1}{4} dx^4}{x^4 \sqrt{x^4+1}} \xrightarrow{t=x^4} \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t \sqrt{t+1}} \xrightarrow{u=\sqrt{t+1}} \frac{1}{4} \int \frac{2udu}{(u^2-1)u} \\ &= \frac{1}{4} \int \left[\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right] du = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{(u-1)^2}{u^2-1} + C = \frac{1}{2} \ln(\sqrt{1+x^4}-1) - \ln|x| + C. \end{aligned}$$

方法2 作三角函数代换

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{x^2 \sqrt{1+(x^2)^2}} \xrightarrow{x^2=\tan t} \frac{1}{2} \int \frac{1}{\tan t} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sin t} = -\frac{1}{2} \int \frac{d\cos t}{1-\cos^2 t} \\ &= -\frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{1-\cos t} + \frac{1}{1+\cos t} \right) d\cos t \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1-\cos t}{1+\cos t} \right| + C = \frac{1}{2} \ln(1-\cos t) - \frac{1}{2} \ln|\sin t| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \right) - \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}} + C \\ &= \frac{1}{2} \ln(\sqrt{1+x^4}-1) - \ln|x| + C. \end{aligned}$$

方法3 倒代换后套用公式:



$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2+a^2}| + C$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1+\frac{1}{x^4}}} = -\frac{1}{2} \int \left[1 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} d\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{x^2} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \right| + C = -\frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1+x^4}+1}{x^2} + C. \end{aligned}$$

58 【答案】 $f(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$

【分析】 设 $\int_0^1 f(x)dx = a, \int_0^2 f(x)dx = b$, 则

$$f(x) = x^2 - bx + 2a$$

对上式两边分别在 $[0, 1]$ 和 $[0, 2]$ 上作定积分

$$a = \int_0^1 f(x)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{bx^2}{2} + 2ax \right] \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{b}{2} + 2a$$

即 $a - \frac{1}{2}b = -\frac{1}{3}$ (1)

$$b = \int_0^2 f(x)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{bx^2}{2} + 2ax \right] \Big|_0^2 = \frac{8}{3} - 2b + 4a$$

即 $4a - 3b = -\frac{8}{3}$ (2)

由(1)式和(2)式得

$$a = \frac{1}{3}, b = \frac{4}{3}$$

于是 $f(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$.

【评注】 注意: $\int_a^b f(x)dx$ 是一个确定的数是解本题的关键.

59 【答案】 $-x\sin x + \cos x + C, C$ 为任意常数

【分析】 作变量替换 $tx = s$, 改写方程为

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(s)ds = f(x) + x\sin x \quad (x \neq 0)$$

$$\int_0^x f(s)ds = xf(x) + x^2 \sin x \quad (\forall x) \quad (1)$$

$$f(x) = xf'(x) + f(x) + (x^2 \sin x)' \quad (2)$$

(1) 式与(2) 式是等价的, (2) 式又可改写成

$$f'(x) = -\frac{(x^2 \sin x)'}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= -\int \frac{d(x^2 \sin x)}{x} = -x\sin x + \int x^2 \sin x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx \\ &= -x\sin x + \cos x + C \quad (\forall x). \end{aligned}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

60 【答案】 $\frac{\pi}{16}$

【分析】 $I = \int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx - \int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx$

$$\begin{aligned} \text{而 } \int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx &= \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2} dx \\ &\stackrel{\text{令 } x-1=t}{=} \int_{-1}^0 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{1}{4}\pi (\text{单位圆面积的 } \frac{1}{4}) \\ \int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx &\stackrel{\text{令 } x=\sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{3}{16}\pi \end{aligned}$$

因此, 原式 $= \frac{\pi}{4} - \frac{3}{16}\pi = \frac{\pi}{16}$.

【评注】 解答本题时, 要注意以下两条:

- (1) 有时需作定积分的换元法后再利用定积分的几何意义.
- (2) 记住结论:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3}, & n \text{ 为大于 } 1 \text{ 的奇数} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

有时对计算定积分很有用.

61 【答案】 2

【分析】 按题意的提示, 我们应把左端定积分变形并作变量替换得

$$\begin{aligned} I &\stackrel{\text{记}}{=} \int_0^{2\pi} f(a \cos x + b \sin x) dx = \int_0^{2\pi} f\left(\sqrt{a^2+b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin x\right)\right) dx \\ &= \int_0^{2\pi} f(\sqrt{a^2+b^2} \sin(x+\varphi)) dx \left(\cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\ &\stackrel{t=x+\varphi}{=} \int_{\varphi}^{2\pi+\varphi} f(\sqrt{a^2+b^2} \sin t) dt \end{aligned}$$

被积函数以 2π 为周期, 由周期函数的积分性质

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} f(\sqrt{a^2+b^2} \sin t) dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sqrt{a^2+b^2} \sin t) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} f(\sqrt{a^2+b^2} \sin t) dt \end{aligned}$$

现对第二个积分作变量替换 $t = \pi - s$, 转换为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的积分

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sqrt{a^2+b^2} \sin t) dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(\sqrt{a^2+b^2} \sin(\pi-s)) ds \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sqrt{a^2+b^2} \sin x) dx \end{aligned}$$

因此 $A = 2$.

62 【答案】 $\tan \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-4} + \frac{1}{2}$

【分析】 先对 $\int_1^4 f(x-2)dx$ 换元,再计算.

设 $x-2=t, dx=dt$, 当 $x=1$ 时 $t=-1$; 当 $x=4$ 时 $t=2$.

$$\begin{aligned}\int_1^4 f(x-2)dx &= \int_{-1}^2 f(t)dt = \int_{-1}^0 \frac{dt}{1+\cos t} + \int_0^2 te^{-t^2} dt \\&= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \sec^2 \frac{t}{2} dt - \frac{1}{2} \int_0^2 e^{-t^2} d(-t^2) \\&= \tan \frac{t}{2} \Big|_{-1}^0 - \frac{1}{2} e^{-t^2} \Big|_0^2 = \tan \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-4} + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

63 【答案】 2

【分析】 $F(x) = \left(\frac{2}{x} + \ln x\right) \int_1^x f(t)dt - \int_1^x \left(\frac{2}{t} + \ln t\right) f(t)dt$

$$\begin{aligned}\Rightarrow F'(x) &= \left(-\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}\right) \int_1^x f(t)dt + \left(\frac{2}{x} + \ln x\right) f(x) - \left(\frac{2}{x} + \ln x\right) f(x) \\&= \frac{x-2}{x^2} \int_1^x f(t)dt \begin{cases} < 0, & (1 < x < 2) \\ = 0, & (x = 2) \\ > 0, & (x > 2) \end{cases}\end{aligned}$$

$\Rightarrow x=2$ 是极小值点(也是最小值点).

64 【答案】 $\frac{1}{4}\pi^2$

【分析】 $I \stackrel{x=\pi-t}{=} - \int_{\pi}^0 \frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)} dt = \int_0^{\pi} \frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t} dt$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t} dt - I$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2} \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t} dt = -\frac{1}{2} \pi \int_0^{\pi} \frac{d\cos t}{1+\cos^2 t} \\&= -\frac{1}{2} \pi \arctan \cos t \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2} \pi \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} \pi^2.\end{aligned}$$

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)

【评注】 对某些积分 $I = \int_a^b f(x)dx$ 难以处理时,有时通过变形将 I 变为另一种形式

$I = \int_a^b g(x)dx$, 然后把两者结合在一起

$$2I = \int_a^b [f(x) + g(x)]dx$$

若该积分易处理,则问题就解决了. 以下两种情形是有用的.

$$(1) I = \int_0^b f(x)dx \stackrel{\text{令 } x=b-t}{=} \int_0^b f(b-t)dt = \int_0^b f(b-x)dx.$$

与原式相加得 $2I = \int_0^b [f(x) + f(b-x)]dx$.

(2) 由 $I = \int_{-a}^a f(x) dx \xrightarrow{x=-t} \int_{-a}^a f(-t) dt$ 得到

$$2I = \int_{-a}^a [f(x) + f(-x)] dx$$

本题属于情形(1), 又如 $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

令 $x = -t$,

$$I = - \int_1^{-1} \frac{dt}{1+e^{-\frac{1}{t}}} = \int_{-1}^1 \frac{e^{\frac{1}{t}}}{1+e^{\frac{1}{t}}} dt = \int_{-1}^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} dx$$

因此

$$2I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} dx + \int_{-1}^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} dx = \int_{-1}^1 dx = 2$$

于是 $I = 1$.

这就属于情形(2).

65

【答案】

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}, & x < -1 \\ x - 1, & -1 \leq x \leq 1. \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}, & x > 1 \end{cases}$$

【分析】方法1 因为

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < -1 \\ 1, & -1 \leq x \leq 1. \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$$

所以这是求分段函数的变限积分.

$$\begin{aligned} \text{当 } x < -1 \text{ 时, } \int_1^x f(t) dt &= \int_1^{-1} f(t) dt + \int_{-1}^x f(t) dt = \int_1^{-1} 1 dt + \int_{-1}^x t^2 dt \\ &= -2 + \frac{1}{3}t^3 \Big|_{-1}^x = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{当 } -1 \leq x \leq 1 \text{ 时, } \int_1^x f(t) dt = \int_1^x 1 dt = x - 1.$$

$$\text{当 } x > 1 \text{ 时, } \int_1^x f(t) dt = \int_1^x t^2 dt = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}.$$

因此,

$$\int_1^x f(t) dt = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}, & x < -1 \\ x - 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}, & x > 1 \end{cases}$$

方法2 $\int_1^x f(t) dt \stackrel{(\text{记})}{=} F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 满足 $F(1) = 0$. 因而, 也可用拼接法求得分段函数 $f(x)$ 的一个原函数, 记为 $F_0(x)$

$$F_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & x \leq -1 \\ x + C_1, & -1 \leq x \leq 1. \\ \frac{1}{3}x^3 + C_2, & x \geq 1 \end{cases}$$

其中 C_1, C_2 满足

$$\begin{aligned} \left. \frac{1}{3}x^3 \right|_{x=-1} &= \left. (x + C_1) \right|_{x=-1} \Rightarrow C_1 = \frac{2}{3}, \\ (x + C_1) \Big|_{x=1} &= \left(\frac{1}{3}x^3 + C_2 \right) \Big|_{x=1} \Rightarrow C_2 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = F_0(x) + C.$$

$$\text{现定出 } C \text{ 使得 } 0 = F_0(1) + C = 1 + \frac{2}{3} + C \Rightarrow C = -\frac{5}{3}.$$

因此

$$\int_1^x f(t) dt = F_0(x) - \frac{5}{3} = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}, & x \leq -1 \\ x - 1, & -1 \leq x \leq 1. \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}, & x \geq 1 \end{cases}$$

【评注】若求分段函数 $f(x) = \max\{1, x^2\}$ 的不定积分 $\int f(x) dx$, 或由变限积分法先求得一个原函数 $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ (这时要用分段积分法如方法 1), 然后就可得

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

或由方法 2 中的拼接法, 先求得一个原函数, 同样可得 $\int f(x) dx$. 对于多个连接点的分段函数, 也许拼接法更简便些.

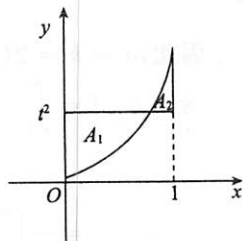
66

【答案】 $\frac{1}{2}$

【分析】 $A_1 = \int_0^t (t^2 - x^2) dx, A_2 = \int_t^1 (x^2 - t^2) dx$

$$\begin{aligned} A(t) &= A_1(t) + A_2(t) = 2 \int_0^t (t^2 - x^2) dx + \int_0^1 (x^2 - t^2) dx \\ &= \frac{4}{3}t^3 - t^2 + \frac{1}{3}, \quad (0 < t < 1), \end{aligned}$$

$$A'(t) = 2t(2t-1) \begin{cases} < 0, & 0 < t < \frac{1}{2} \\ = 0, & t = \frac{1}{2}. \\ > 0, & \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$$



微信扫码关注

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

因此, $t = \frac{1}{2}$ 时, $A = A_1 + A_2$ 取最小值.

67 【答案】 $\frac{\pi}{4}$

【分析】 方法 1
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-1}} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2}x^2\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}x}\right)^2}}$$
$$= \int_1^{+\infty} \frac{-d\frac{1}{\sqrt{2}x}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}x}\right)^2}} = -\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}x} \Big|_1^{+\infty}$$
$$= \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

方法 2
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-1}} \xrightarrow{x=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}} dt$$
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{4}.$$

68 【答案】 $a = b = 2(e-1)$

【分析】 $I = \int_1^{+\infty} \frac{2x^2 + bx + a - 2x^2 - ax}{x(2x+a)} dx = \int_1^{+\infty} \frac{(b-a)x + a}{x(2x+a)} dx$

积分 I 收敛, 则 $b = a$ (否则 I 发散). $\Rightarrow$

方法 1
$$I = \int_1^{+\infty} \frac{a}{x(2x+a)} dx = \int_1^{+\infty} \left[\frac{1}{x} - \frac{2}{2x+a} \right] dx$$
$$= \ln \frac{x}{2x+a} \Big|_1^{+\infty} = \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2+a}$$
$$= \ln(2+a) - \ln 2 = 1$$

$\Rightarrow \ln\left(1 + \frac{a}{2}\right) = 1, a = 2e - 2 = 2(e-1)$

因此, $a = b = 2(e-1)$.

方法 2
$$I = \int_1^{+\infty} \frac{a}{x(2x+a)} dx = \int_1^{+\infty} \frac{adx}{x^2\left(2 + \frac{a}{x}\right)}$$
$$= -\int_1^{+\infty} \frac{d\left(2 + \frac{a}{x}\right)}{2 + \frac{a}{x}} = -\ln\left(2 + \frac{a}{x}\right) \Big|_1^{+\infty}$$
$$= -\ln 2 + \ln(2+a)$$
$$= \ln\left(1 + \frac{a}{2}\right) = 1$$

同样得 $a = b = 2(e-1)$.

69 【答案】 $\ln 2$

【分析】 方法 1 $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x d\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{1+e^{-x}} \Big|_0^b - \int_0^b \frac{dx}{1+e^{-x}} \right]$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{b}{1+e^{-b}} - \ln(1+e^x) \Big|_0^b \right]$$

$$= \ln 2 + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{b}{1+e^{-b}} - \ln(e^b + 1) \right]$$

而 $\lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{b}{1+e^{-b}} - \ln(e^b + 1) \right] = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^{-b}} \left[b - (1+e^{-b}) \ln(e^b + 1) \right]$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\ln e^b - (1+e^{-b}) \frac{\ln(1+e^b)}{e^b} \right]$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\ln \frac{e^b}{e^b + 1} - \frac{\ln(1+e^b)}{e^b} \right]$$

$$= \ln 1 + 0 = 0$$

或 $\lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{b}{1+e^{-b}} - \ln(e^b + 1) \right] = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{b(1+e^{-b} - e^{-b})}{1+e^{-b}} - \ln[e^b(1+e^{-b})] \right]$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[b - \frac{be^{-b}}{1+e^{-b}} - b - \ln(1+e^{-b}) \right]$$

$$= 0 - \ln 1 = 0$$

因此 $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx = \ln 2$.

方法 2 作恒等变形后,对无穷积分作分部积分.

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{xe^x}{(e^x+1)^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x de^x}{(e^x+1)^2}$$

$$= - \int_0^{+\infty} x d\left(\frac{1}{e^x+1}\right) = - \frac{x}{e^x+1} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x+1}$$

$$= - \int_0^{+\infty} \frac{de^{-x}}{1+e^{-x}} = - \ln(1+e^{-x}) \Big|_0^{+\infty} = \ln 2.$$

【评注】 $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx = \int_0^{+\infty} x d\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$

但不可对它直接用分部积分公式,因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+e^{-x}} = +\infty, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+e^{-x}} \text{ 发散.}$$

因此方法 1 中,先对 $\int_0^b x d\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$ 用分部积分,然后再求

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x d\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right).$$

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)

70 【答案】 $7\pi^2 a^3$

【分析】 该曲线可表为 $y = y(x) (0 \leq x \leq 2\pi a)$.

先求出摆线和直线 $y = 2a, x = 0, x = 2\pi a$ 所围平面图形绕 $y = 2a$ 旋转一周所成旋转体的体积 V_1 .

任取 $[x, x+dx] \subset [0, 2\pi a]$, 对应的小窄条相应的体积微元

$$dV_1 = \pi[2a - y(x)]^2 dx$$

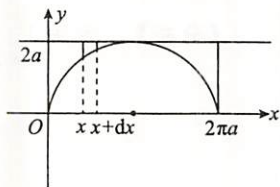
于是

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^{2\pi a} [2a - y]^2 dx \\ &\stackrel{x=a(t-\sin t)}{=} \pi \int_0^{2\pi} [2a - a(1 - \cos t)]^2 a(1 - \cos t) dt \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 + \cos t)^2 (1 - \cos t) dt \\ &= 8\pi a^3 \int_0^{2\pi} \cos^4 \frac{t}{2} \sin^2 \frac{t}{2} dt = 16\pi a^3 \int_0^{\pi} \cos^4 s (1 - \cos^2 s) ds \\ &= 16\pi a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 s (1 - \cos^2 s) ds \\ &= 32\pi a^3 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 s ds - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 s ds \right] \\ &= 32\pi a^3 \left[\frac{3 \times 1}{4 \times 2} - \frac{5 \times 3 \times 1}{6 \times 4 \times 2} \right] \times \frac{\pi}{2} = \pi^2 a^3 \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 t)(1 + \cos t) dt \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 + \cos t - \cos^2 t - \cos^3 t) dt \\ &= \pi a^3 \left[2\pi - \pi - \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t) d\sin t \right] = \pi^2 a^3 \end{aligned}$$

因此, $V = \pi(2a)^2 2\pi a - \pi^2 a^3 = 7\pi^2 a^3$.



71 【答案】 $\frac{3}{8}\pi a^2; 6a; \frac{32}{105}\pi a^3; \frac{12}{5}\pi a^2$

【分析】 星形线围成的图形关于 x, y 轴均对称.

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_0^a y dx = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 a \sin^3 t \cdot 3a \cos^2 t (-\sin t) dt \\ &= 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 (\sin^4 t - \sin^6 t) dt \\ &= 12a^2 \left[\frac{1 \times 3}{2 \times 4} - \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} \right] \frac{\pi}{2} = \frac{3}{8} \pi a^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3^2 a^2 (\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t)} dt \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a \cos t \sin t dt = 6a (\sin t)^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^a \pi y^2 dx = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \pi a^2 \sin^6 t \cdot 3a \cos^2 t (-\sin t) dt \\ &= 6\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t (1 - \sin^2 t) dt \end{aligned}$$

$$= 6\pi a^3 \left[\frac{6}{7} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \left(1 - \frac{8}{9} \right) \right] = \frac{32}{105} \pi a^3.$$

$$S = 2\pi \int_0^{\pi} a \sin^3 t \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} 3a^2 \sin^3 t \sqrt{\sin^2 t \cos^2 t} dt$$

$$= 6\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^4 t |\cos t| dt = 6\pi a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t dt$$

$$= 12\pi a^2 \cdot \frac{1}{5} \sin^5 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12}{5} \pi a^2.$$

知识点链接

《数学复习全书·基础篇》

高数第六章
定积分的应用

【评注】 (1) 星形线的参数方程等同于星形线的隐函数表示:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

若给出星形线的隐函数表示,由隐函数求导法得

$$\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}} y' = 0, y' = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} = \sqrt{\frac{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

由对称性用相应的侧面积公式,也可求得

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot 2\pi \int_0^a y \sqrt{1 + y'^2} dx = 4\pi \int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx \\ &= 4\pi \cdot \frac{3}{2} \int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{3}} dx^{\frac{2}{3}} = 6\pi a^{\frac{1}{3}} \left(-\frac{2}{5} \right) (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{2}} \Big|_0^a = \frac{12}{5} \pi a^2. \end{aligned}$$

(2) 若星形线由隐函数表示给出,可导出显式表示(上半平面部分):

$$y = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \quad (-a \leq x \leq a)$$

由此可得

$$A = 4 \int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} dx$$

现作三角函数代换 $x^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \cos t$ ($x = a \cos^3 t$) 得

$$A = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin^3 t \cdot a^3 \cos^2 t \sin t dt = 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 t - \sin^6 t) dt.$$

72 【答案】 $\frac{1}{6}(11\sqrt{5}-1)\pi$

【分析】 切点为 $(x_0, y_0) = (x_0, \sqrt{x_0-1})$, 切线方程为

$$y = \sqrt{x_0-1} + \frac{1}{2\sqrt{x_0-1}}(x-x_0)$$

令 $x=0, y=0$ 得 $\sqrt{x_0-1} - \frac{x_0}{2\sqrt{x_0-1}} = 0$, 解得 $x_0=2, y_0=1$. 所以切线方程为

$$y = 1 + \frac{1}{2}(x-2) \text{ 即 } y = \frac{1}{2}x$$

由切线 $y = \frac{1}{2}x$ ($0 \leq x \leq 2$) 绕 x 轴旋转一圈旋转体的侧面积为

$$S_1 = \int_0^2 2\pi y \sqrt{1+y'^2} dx = \int_0^2 2\pi \cdot \frac{1}{2}x \sqrt{1+\frac{1}{4}} dx = \sqrt{5}\pi$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

由曲线 $y = \sqrt{x-1} (1 \leq x \leq 2)$ 绕 x 轴旋转一圈旋转体的侧面积为

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_1^2 2\pi y \sqrt{1+y'^2} dx = \int_1^2 2\pi \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)^2} dx \\ &= \pi \int_1^2 \sqrt{4x-3} dx = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5}-1). \end{aligned}$$

所以,所求旋转体表面积为

$$S = S_1 + S_2 = \sqrt{5}\pi + \frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)\pi = \frac{1}{6}(11\sqrt{5}-1)\pi.$$

73 【答案】 $\frac{8}{5}\sqrt{3}; \left(\frac{9}{7}, 0\right)$

【分析】 (1) 由对称性,上半平面部分 $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x) (0 \leq x \leq 3)$ 与 x 轴围成的面积的两倍即是 M 的面积. 于是

$$A = 2 \int_0^3 \frac{1}{3} \sqrt{x}(3-x) dx = \frac{2}{3} \int_0^3 3\sqrt{x} dx - \frac{2}{3} \int_0^3 x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{8}{5} \sqrt{3}$$

$$(2) \text{ 由对称性, } \bar{y} = 0, \bar{x} = \frac{2 \int_0^3 xy dx}{A} = \frac{\frac{2}{3} \int_0^3 x(3-x)\sqrt{x} dx}{\frac{8}{5}\sqrt{3}} = \frac{9}{7}.$$

74 【答案】 $\left[8(\arcsin y + y\sqrt{1-y^2}) + 4\pi\right] (\text{m}^3); 0.01 (\text{m/min}); 8000g\pi (\text{J})$

【分析】 液体的体积

$$\begin{aligned} V &= 4 \times 2 \int_{-1}^y 2\sqrt{1-y^2} dy = 16 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin y} \cos^2 t dt \\ &= \left[8(\arcsin y + y\sqrt{1-y^2}) + 4\pi\right] (\text{m}^3) \end{aligned}$$

设液面下降的速度 $\frac{dy}{dt}$, 则

$$\frac{dV}{dt} = 16 \sqrt{1-y^2} \frac{dy}{dt}$$

所以

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{dV}{dt} \right|_{y=0} / 16 \sqrt{1-y^2} \Big|_{y=0} = \frac{0.16}{16} = 0.01 (\text{m/min})$$

抽出全部液体所作的功

$$\begin{aligned} W &= 4 \cdot 1000g \int_{-1}^1 4\sqrt{1-y^2} \cdot (1-y) dy \\ &= 4000g \int_{-1}^1 4\sqrt{1-y^2} dy = 8000g\pi (\text{J}) \end{aligned}$$

【评注】 因 $y\sqrt{1-y^2}$ 为奇函数, 所以 $\int_{-1}^1 y\sqrt{1-y^2} dy = 0$, 又因 $\int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy$ 表示 $\frac{1}{4}$ 单位圆面积, 所以 $\int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} dy = 2 \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy = 2 \times \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi$.

75

【答案】 $\frac{2k}{a}$

【分析】 取 L 为 x 轴, y 轴过 A 点, 如图所示. 在 L 上 $\forall$ 取小线段 $[x, x+dx]$, 它对点 A 的引力沿 y 轴方向分量为

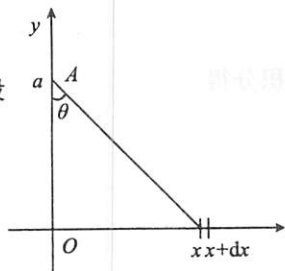
$$dF_y = \frac{kdx}{a^2 + x^2} \cos \theta$$

其中 $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$, 所以

$$dF_y = \frac{ka dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

于是 L 对质点 A 的引力

$$\begin{aligned} F_y &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ka dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{ka dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \stackrel{x = a \tan t}{=} 2ka \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{a}{\cos^2 t}}{a^3 (1 + \tan^2 t)^{\frac{3}{2}}} dt \\ &= \frac{2k}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = \frac{2k}{a}. \end{aligned}$$



76

【答案】 $(1+x)[\ln(1+x)+1]$

【分析】 本题实质上是解微分方程的初值问题. 首先, 将等式两边除以 Δx , 并令 $\Delta x \rightarrow 0$, 注意

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y', \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (1 + \Delta y) = 1 \text{ (可导必连续)}, \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\Delta x} = 1. \text{ 于是得}$$

$$\begin{cases} y' - \frac{y}{1+x} = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

这是一阶线性非齐次微分方程的初值问题, 两边乘 $\frac{1}{1+x}$ ($e^{-\int \frac{dx}{1+x}} = e^{-\ln|1+x|}$) 得

$$\left(\frac{y}{1+x} \right)' = \frac{1}{1+x} \quad (*)$$

积分得

$$\frac{y}{1+x} = \ln(1+x) + C$$

$y = (1+x)\ln(1+x) + C(1+x)$ ($x \geq 0$) 或代公式得其通解为

$$y = e^{\int \frac{dx}{1+x}} \left(\int e^{-\int \frac{dx}{1+x}} dx + C \right) = (1+x)[\ln(1+x) + C].$$

由 $y(0) = 1$ 得 $C = 1$, 所以 $y = (1+x)[\ln(1+x) + 1]$.

【评注】 我们也可将 $(*)$ 式从 0 到 x 积分, 并用初值 $y(0) = 1$ 得特解

$$\frac{y}{1+x} \Big|_0^x = \int_0^x \frac{dx}{1+x}, \frac{y}{1+x} - 1 = \ln(1+x)$$

即 $y = (1+x)[\ln(1+x) + 1]$.

77

【答案】 $\frac{b}{a}$

【分析】 先求出一阶线性微分方程的解, 用积分因子法, 方程两边同乘 $e^{\int adx} = e^{ax}$ 得

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$(e^{ax}y)' = e^{ax}f(x)$$

积分得

$$e^{ax}y(x) = y(0) + \int_0^x e^{at}f(t)dt$$

$$y(x) = y(0)e^{-ax} + \frac{\int_0^x e^{at}f(t)dt}{e^{ax}}$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} y(0)e^{-ax} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x e^{at}f(t)dt}{e^{ax}} \\ &= 0 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax}f(x)}{ae^{ax}} = \frac{b}{a}.\end{aligned}$$

78

【答案】 $y = x \tan(\ln x)$

【分析】 曲线 $y = y(x)$ 在点 (x, y) 处切线的斜率即函数 $y = y(x)$ 在点 x 处的导数 y' , 由题设知函数 $y(x)$ 是如下微分方程初值问题的特解:

$$\begin{cases} y' = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

这是齐次方程, 设 $u = \frac{y}{x}$ 即 $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = x \frac{du}{dx} + u$ 可将以上问题化为 $u(x)$ 满足的可分离变量类型的初值问题

$$\begin{cases} x \frac{du}{dx} + u = 1 + u + u^2 \\ u(1) = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow{\text{(分离变量)}} \begin{cases} \frac{du}{1+u^2} = \frac{dx}{x} \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

求积分即得方程的通解 $\arctan u = \ln x + C$, 由 $u(1) = 0$ 可确定常数 $C = 0$, 故上述初值问题的解是

$$\arctan u = \ln x \Leftrightarrow \arctan \frac{y}{x} = \ln x \Leftrightarrow y = x \tan(\ln x)$$

【评注】 严格地讲所求曲线的方程应是 $y = x \tan(\ln x) (e^{-\frac{\pi}{2}} < x < e^{\frac{\pi}{2}})$, 这是由于当 $x \in (e^{-\frac{\pi}{2}}, e^{\frac{\pi}{2}})$ 时 $y = x \tan(\ln x)$ 的图象才是一条通过点 $(1, 0)$ 的连续可微曲线.

79

【答案】 $x = y\left(\frac{1}{3}y^3 + C\right)$, C 为任意常数.

【分析】 在方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y^4}$ 中, 对 x 是一次的, 以 y 为自变量, x 为未知函数变形得

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x+y^4}{y}$$

$$\text{即 } \frac{dx}{dy} - x \cdot \frac{1}{y} = y^3.$$

这是一个线性方程. 两边乘 $\mu(y) = e^{-\int \frac{1}{y} dy} \stackrel{\text{(取)}}{=} \frac{1}{y}$ 得

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{x}{y}\right) = y^2$$

积分得通解 $x = y\left(\frac{1}{3}y^3 + C\right)$.

或代公式由线性方程通解公式得

$$x = e^{\int \frac{1}{y} dy} \left(\int y^3 \cdot e^{-\int \frac{1}{y} dy} dy + C \right) = y \left(\int y^2 dy + C \right) = y \left(\frac{1}{3}y^3 + C \right)$$

80 【答案】 $\sqrt[3]{1-3x}$

【分析】 这是可降阶的二阶的方程(方程不显含 x). 作变换 $p = y' = \frac{dy}{dx}$, 并以 y 为自变

量, 即令 $y' = p(y)$, 则 $y'' = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$, 代入方程得

$$yp \frac{dp}{dy} + 2p^2 = 0 \text{ 即 } y \frac{dp}{dy} + 2p = 0 \text{ 或 } p = 0.$$

由于 $p = 0$ 即 $y' = 0$ 不符合题目要求, 故只考虑方程 $y \frac{dp}{dy} + 2p = 0$.

分离变量得 $\frac{dp}{p} + 2 \frac{dy}{y} = 0$, 积分得 $\ln|p| + 2\ln|y| = \ln|C_1|$ 即 $p = \frac{C_1}{y^2}$.

由 $x = 0$ 时 $y = 1, p = y' = -1$ 可确定常数 $C_1 = -1$. 于是 $y' = p = -\frac{1}{y^2}$, 即 $y^2 dy + dx = 0$, 积分得 $y^3 + 3x = C_2$, 又由 $y(0) = 1$ 可确定 $C_2 = 1$, 故所求特解为 $y = \sqrt[3]{1-3x}$.

81 【答案】 $(x^2 + 2)e^x + e^{-2x}$

【分析】 题设二阶常系数线性微分方程的特征方程是 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, 特征根是 $\lambda_1 = 1$ 与 $\lambda_2 = -2$. 从而对应的齐次线性微分方程有线性无关的两个特解 e^x 与 e^{-2x} , 且对应于方程非齐次项 $f(x) = (6x + 2)e^x$, 可考虑非齐次微分方程具有形状为 $y^* = x(Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x$ 的特解.

把 $y^* = (Ax^2 + Bx)e^x, (y^*)' = (Ax^2 + Bx + 2Ax + B)e^x$ 与 $(y^*)'' = (Ax^2 + Bx + 4Ax + 2B + 2A)e^x$ 代入方程可得

$$(y^*)'' + (y^*)' - 2y^* = [3(2Ax + B) + 2A]e^x \stackrel{!}{=} (6x + 2)e^x$$

可确定常数 $A = 1, B = 0$, 故非齐次方程具有特解 $y^* = x^2 e^x$.

按通解结构定理, 应设通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + x^2 e^x$, 其中 C_1 与 C_2 是两个任意常数. 利用初值 $y(0) = 3$ 和 $y'(0) = 0$ 可得

$$\begin{cases} y(0) = (C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + x^2 e^x) \Big|_{x=0} = C_1 + C_2 = 3 \\ y'(0) = [C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x} + (x^2 + 2x)e^x] \Big|_{x=0} = C_1 - 2C_2 = 0 \end{cases}$$

解之即得 $C_1 = 2, C_2 = 1$. 故所求特解 $y^* = (x^2 + 2)e^x + e^{-2x}$.

82 【答案】 $\frac{3}{2}e^x + \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$

【分析】 为了用变限积分求导法将方程两边分别求导,转化为微分方程.

先把 $\int_0^x tf(x-t)dt$ 转化为如下形式:

$$\begin{aligned}\int_0^x tf(x-t)dt &\stackrel{x-t=u}{=} \int_x^0 (x-u)f(u)(-du) \\&= \int_0^x (x-u)f(u)du = x\int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du \\&= x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt.\end{aligned}$$

代入原方程得 $\int_0^x f(t)dt = x + \sin x + x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt. \quad (1)$

由 $f(x)$ 连续可知上式中各变限积分均可导,将方程两端对 x 求导有

$$f(x) = 1 + \cos x + \int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x)$$

即 $f(x) = 1 + \cos x + \int_0^x f(t)dt \quad (2)$

(在(1)式中令 $x=0$ 得 $0=0$,不必另加条件,(1)与(2)等价).

在(2)式中令 $x=0$ 可得 $f(0)=2$,由(2)式还可见 $f(x)$ 可导.于是将它的两端对 x 求导,又得

$$f'(x) = -\sin x + f(x).$$

故 $y=f(x)$ 是一阶线性微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' - y = -\sin x \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

的特解.解之可得 $y=f(x) = \frac{3}{2}e^x + \frac{1}{2}(\sin x + \cos x).$

83 【答案】 $\frac{1}{n^2}(2ma+b)$

【分析】 $y'' + 2my' + n^2y = 0$ 的特征方程 $\lambda^2 + 2m\lambda + n^2 = 0$ 的特征根是

$$\lambda_1 = -m + \sqrt{m^2 - n^2} = -(m - \sqrt{m^2 - n^2}) < 0, \lambda_2 = -m - \sqrt{m^2 - n^2} < 0.$$

由此可见微分方程的任何一个解 $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ 都满足 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$. 又因 $y' = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 x}$,从而又有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y' = 0$.

故对于特解 $y = y(x)$ 满足 $y(0) = a, y'(0) = b$,有

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^{+\infty} [y''(x) + 2my'(x) + n^2y(x)]dx \\&= y'(x) \Big|_0^{+\infty} + 2my(x) \Big|_0^{+\infty} + n^2 \int_0^{+\infty} y(x)dx \\&= -y'(0) - 2my(0) + n^2 \int_0^{+\infty} y(x)dx \\&= -(2ma + b) + n^2 \int_0^{+\infty} y(x)dx.\end{aligned}$$

即 $\int_0^{+\infty} y(x)dx = \frac{1}{n^2}(2ma + b).$

84 【答案】 $y'' - y' - 2y = (1 - 2x)e^x$

【分析】 $y_1 - y_3 = e^{-x}$ 与 $y_1 - y_2 = e^{2x} - e^{-x}$ 都是对应齐次方程的解, $(y_1 - y_3) + (y_1 - y_2) = e^{2x}$ 也是对应齐次方程的解, e^{-x} 与 e^{2x} 是对应齐次方程两个线性无关的特解; 而 $y_2 - e^{-x} = xe^x$ 是非齐次方程的解.

下面求该微分方程:

方法 1 由 e^{-x}, e^{2x} 是对应齐次方程线性无关二解知 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$ 是特征方程的两个根, 从而特征方程为 $(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$ 即 $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, 故对应齐次微分方程为

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

设所求非齐次方程为 $y'' - y' - 2y = f(x)$,

把非齐次解 xe^x 代入, 便得

$$f(x) = (xe^x)'' - (xe^x)' - 2(xe^x) = (1 - 2x)e^x.$$

于是所求方程为 $y'' - y' - 2y = (1 - 2x)e^x$.

方法 2 由前面求得该微分方程的一个特解 xe^x 及相应的齐次方程两个线性无关的解: e^{-x}, e^{2x} , 于是该微分方程的通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + xe^x$, 求出

$$y' = -C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{2x} + (x+1)e^x, y'' = C_1 e^{-x} + 4C_2 e^{2x} + (x+2)e^x$$

并消去 C_1, C_2

$$y'' - y' = 2(C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + xe^x) - 2xe^x + e^x = 2y + (1 - 2x)e^x$$

便得微分方程 $y'' - y' - 2y = (1 - 2x)e^x$.

85 【答案】 $C_1 \cos \sqrt{x^2 + y^2} + C_2 \sin \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2 - 2$ (C_1, C_2 均为任意常数)

【分析】 $u(\sqrt{x^2 + y^2})$ 是一元函数 $u = u(r)$ 与二元函数 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 的复合函数, 由复合函数求导法则得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{du}{dr}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 u}{dr^2} \frac{x^2}{r^2} + \frac{du}{dr} \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{d^2 u}{dr^2} \frac{y^2}{r^2} + \frac{du}{dr} \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right)$$

$$\frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{du}{dr}$$

于是原方程化为二阶线性常系数微分方程

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + u = r^2$$

即

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + u = r^2$$

通解为

$$u = C_1 \cos r + C_2 \sin r + r^2 - 2$$

因此

$$u(\sqrt{x^2 + y^2}) = C_1 \cos \sqrt{x^2 + y^2} + C_2 \sin \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2 - 2$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

86 【答案】 2

【分析】 由 $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{e^{xy} + xy \sqrt{x^2 + y^2}}$ 知, $f(x, 0) = x^2$, 则

$$f'_x(1, 0) = 2x|_{x=1} = 2$$

87 【答案】 $e^x + 3(x+y)^2 - e^{x+y}$

【分析】 在等式 $z = e^x + y^2 + f(x+y)$ 中令 $y = 0$, 得

$$x^3 = e^x + f(x)$$

则 $f(x) = x^3 - e^x, z = e^x + y^2 + (x+y)^3 - e^{x+y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x + 3(x+y)^2 - e^{x+y}$$

知识点链接

《数学复习全书·基础篇》
高数第八章
多元函数微分学

88 【答案】 -2

【分析】 在 $z = (x-2y)^{x-2y}$ 中令 $y = 0$, 得

$$z = x^{-2x}$$

$$z'_x = (e^{-2x \ln x})' = x^{-2x}(-2 \ln x - 2)$$

则 $z'_x|_{x=1} = -2$, 即 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{x=1, y=0} = -2$.

89 【答案】 $\frac{\pi(2+\pi)}{(1+\pi)^2}$

【分析】 按一、二阶偏导数的定义直接计算可得

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+y} - y \cos(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{(x+y)^2} - \cos(xy) + xy \sin(xy)$$

从而

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(1, \pi)} &= -\frac{1}{(1+\pi)^2} - \cos \pi + \pi \sin \pi \\ &= 1 - \frac{1}{(1+\pi)^2} = \frac{\pi(2+\pi)}{(1+\pi)^2} \end{aligned}$$

90 【答案】 $-yx^{y-1}f'_1 + 2 \ln y \cdot y^{2x}f'_2$

【分析】 由 $z = f(x^y, y^{2x})$ 知

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}f'_1 + 2y^{2x} \ln y \cdot f'_2.$$

91 【答案】 $e^{xy} + xye^{xy} + f''_{11} + (x+y)f''_{12} + xyf''_{22} + f'_2$

【分析】 由 $z = e^{xy} + f(x+y, xy)$ 知

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy} + f'_1 + yf'_2$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= e^{xy} + xye^{xy} + f''_{11} + xf''_{12} + f'_2 + yf''_{21} + xyf''_{22} \\ &= e^{xy} + xye^{xy} + f''_{11} + (x+y)f''_{12} + xyf''_{22} + f'_2\end{aligned}$$

92 【答案】 50

【分析】 引入函数 $\psi(x) = f(x, 2x)$, 则 $\varphi(x) = f(x, 2\psi(x))$, 从而

$$\varphi'(x) = f'_1(x, 2\psi(x)) + 2\psi'(x)f'_2(x, 2\psi(x))$$

令 $x = 1$ 得

$$\varphi'(1) = f'_1(1, 2\psi(1)) + 2\psi'(1)f'_2(1, 2\psi(1)) \quad (1)$$

可见为了求得 $\varphi'(1)$ 只需算出 $\psi(1)$ 与 $\psi'(1)$ 的值并代入上式. 由 $\psi(x)$ 的定义可得

$$\psi(1) = f(1, 2) = 1$$

又因

$$\psi'(x) = f'_1(x, 2x) + 2f'_2(x, 2x)$$

在上式中令 $x = 1$ 可得

$$\psi'(1) = f'_1(1, 2) + 2f'_2(1, 2) = f'_x(1, 2) + 2f'_y(1, 2) = 2 + 2 \times 3 = 8$$

把以上结果代入(1)式就有

$$\begin{aligned}\varphi'(1) &= f'_1(1, 2) + 2 \times 8 \times f'_2(1, 2) \\ &= f'_x(1, 2) + 16f'_y(1, 2) = 2 + 16 \times 3 = 50\end{aligned}$$

【评注】 本题是多元复合函数求导数问题. 在利用复合函数求导的链式法则时, 必须选用适当的记号, 这里我们用记号 f'_1 与 f'_2 分别表示二元函数 f 对其第一个变量与第二个变量的偏导数, 于是可不必再用字母表示中间变量了, 书写比较简便且不会产生混淆.

注意在本题求解过程中不宜采用记号 $f'_x(x, 2f(x, 2x))$, 原因在于它的含意不清楚, 这究竟是表示一元函数 $\varphi(x) = f(x, 2f(x, 2x))$ 对 x 的导数, 还是表示二元函数 $f(x, y)$ 对 x 求偏导数后再把 y 换为 $2f(x, 2x)$ 呢? 从这个记号本身无法区分开来.

93 【答案】 $x^2 - y^2$

【分析】 利用一阶全微分形式不变性可得复合函数 $g(x, y)$ 的一阶全微分

$$\begin{aligned}dg &= f'_u d(x^2 + y^2) + f'_v d(xy) \\ &= 2(xdx + ydy)f'_u + (ydx + xdy)f'_v \\ &= (2xf'_u + yf'_v)dx + (2yf'_u + xf'_v)dy\end{aligned}$$

从而 $g'_x = 2xf'_u + yf'_v$, $g'_y = 2yf'_u + xf'_v$. 继续求 $g(x, y)$ 的二阶偏导数, 又有

$$\begin{aligned}g''_{xx} &= 2f'_u + 2x(f'_u)'_x + y(f'_v)'_x \\ &= 2f'_u + 2x(2xf''_{uu} + yf''_{uv}) + y(2xf''_{vu} + yf''_{vv}) \\ &= 2f'_u + 4x^2 f''_{uu} + 4xy f''_{uv} + y^2 f''_{vv} \\ g''_{yy} &= 2f'_u + 2y(f'_u)'_y + x(f'_v)'_y \\ &= 2f'_u + 2y(2yf''_{uv} + xf''_{vv}) + x(2yf''_{vu} + xf''_{vv})\end{aligned}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$\begin{aligned}
 &= 2f'_u + 4y^2 f''_{uu} + 4xy f''_{uw} + x^2 f''_{ww} \\
 \text{故 } g''_{xx} - g''_{yy} &= 4(x^2 - y^2) f''_{uu} - (x^2 - y^2) f''_{ww} \\
 &= (x^2 - y^2)(4f''_{uu} - f''_{ww}) = x^2 - y^2.
 \end{aligned}$$

94 【答案】 $2(x^2 + y^2)f(xy)$

【分析】 $z = \int_0^1 |xy - t| f(t) dt$



微信扫码

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{xy} (xy - t) f(t) dt + \int_{xy}^1 (t - xy) f(t) dt \\
 &= xy \int_0^{xy} f(t) dt - \int_0^{xy} t f(t) dt + \int_{xy}^1 t f(t) dt - xy \int_{xy}^1 f(t) dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{则 } z'_x &= y \int_0^{xy} f(t) dt + xy^2 f(xy) - xy^2 f(xy) - xy^2 f(xy) - y \int_{xy}^1 f(t) dt + xy^2 f(xy) \\
 &= y \int_0^{xy} f(t) dt - y \int_{xy}^1 f(t) dt
 \end{aligned}$$

$$z''_{xx} = y^2 f(xy) + y^2 f(xy) = 2y^2 f(xy)$$

由变量对称性知

$$z''_{yy} = 2x^2 f(xy)$$

$$\text{则 } z''_{xx} + z''_{yy} = 2(x^2 + y^2)f(xy).$$

95 【答案】 $\frac{1}{2} \sin x + C$

【分析】 由 $u(x, y) = f(2x + 5y) + g(2x - 5y)$ 及 $u(x, 0) = \sin 2x$ 知

$$f(2x) + g(2x) = \sin 2x$$

$$u'_y(x, y) = 5f'(2x + 5y) - 5g'(2x - 5y)$$

$$u'_y(x, 0) = 5f'(2x) - 5g'(2x) = 0$$

即

$$f'(2x) - g'(2x) = 0 \quad (1)$$

又由 $f(2x) + g(2x) = \sin 2x$ 知

$$2f'(2x) + 2g'(2x) = 2\cos 2x \quad (2)$$

由以上(1)式和(2)式得

$$f'(2x) = \frac{1}{2} \cos 2x$$

即

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cos x$$

$$\text{故 } f(x) = \frac{1}{2} \sin x + C.$$

96 【答案】 $\frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + x + y^2$

【分析】 连续两次分别对 x 和 y 积分, 即可得到 $f(x, y)$ 的表达式.

$$\text{由 } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y, \text{ 有}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \int (x+y) dy = xy + \frac{1}{2}y^2 + C_1(x)$$

进一步有

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int \left(xy + \frac{1}{2}y^2 + C_1(x) \right) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + \int C_1(x) dx + C_2(y) \end{aligned}$$

又 $f(x, 0) = \int C_1(x) dx + C_2(0) = x$, 两边对 x 求导得, $C_1(x) = 1$, 于是

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + x + C_2(y)$$

再由

$$f(0, y) = C_2(y) = y^2$$

从而得

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + x + y^2$$

【评注】 要注意 $\int (x+y) dy = xy + \frac{1}{2}y^2 + C_1(x)$, 其中 $C_1(x)$ 是 x 的一个任意函数.

97

【答案】 $2dx - dy$

【分析】 由于 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x, y) - 2x + y - 2}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = 0$, 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 0$, 则

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} [f(x, y) - 2x + y - 2] = 0$$

又 $f(x, y)$ 连续, 则

$$f(0, 1) - 0 + 1 - 2 = 0$$

$$f(0, 1) = 1$$

从而有 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x, y) - f(0, 1) - 2x + (y-1)}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = 0$. 即

$$f(x, y) - f(0, 1) = 2x - (y-1) + o(\rho)$$

由微分定义知 $f(x, y)$ 在 $(0, 1)$ 处可微, 且

$$f'_x(0, 1) = 2, f'_y(0, 1) = -1$$

$$dz \Big|_{(0, 1)} = 2dx - dy$$

98

【答案】 $bdx + cdy$

【分析】 当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时, $\ln(1+x^2+y^2) \sim x^2+y^2$, 由求极限中等价无穷小因子替换得

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - a - bx - cy}{x^2 + y^2} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} [f(x, y) - a - bx - cy] = 0, \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = a$$

又由 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续即得 $f(0, 0) = a$. 再由极限与无穷小的关系可知

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - bx - cy}{x^2 + y^2} = 1 + o(1) \quad ((x,y) \rightarrow (0,0))$$

($o(1)$ 为当 $(x,y) \rightarrow (0,0)$ 时的无穷小量) $\Rightarrow$

$$f(x,y) - f(0,0) - bx - cy = x^2 + y^2 + (x^2 + y^2) \cdot o(1) = o(\rho)$$

($\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$) 即

$$f(x,y) - f(0,0) = bx + cy + o(\rho) \quad (\rho \rightarrow 0)$$

由可微性概念 $\Rightarrow$

$$df(x,y) \Big|_{(0,0)} = bdx + cdy$$

99 【答案】 $3, -2, x^3y^2 - x^2y^2 + y + C$

【分析】 方法1 若 $df(x,y) = (ax^2y^2 - 2xy^2)dx + (2x^3y + bx^2y + 1)dy$, 则

$$f'_x(x,y) = ax^2y^2 - 2xy^2, f'_y(x,y) = 2x^3y + bx^2y + 1$$

由于 f'_x 与 f'_y 仍然可微, 从而

$$f''_{xy}(x,y) = 2ax^2y - 4xy, f''_{yx}(x,y) = 6x^2y + 2bxy$$

由于对任何常数 a, b , f''_{xy} 与 f''_{yx} 都是连续的, 所以两者相等, 即

$$2ax^2y - 4xy = 6x^2y + 2bxy$$

比较同次幂系数, 得 $a = 3, b = -2$.

现由

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 - 2xy^2 \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y - 2x^2y + 1 \quad (2)$$

将(1)式对 x 积分得

$$f(x,y) = x^3y^2 - x^2y^2 + C(y)$$

对 y 求偏导数得

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y - 2x^2y + C'(y)$$

再由(2)式得 $C'(y) = 1, C(y) = y + C$.

因此

$$f(x,y) = x^3y^2 - x^2y^2 + y + C, (C \text{ 为任意常数})$$

方法2 由全微分运算法则得

$$\begin{aligned} & (ax^2y^2 - 2xy^2)dx + (2x^3y + bx^2y + 1)dy \\ &= \frac{a}{3}y^2dx^3 + x^3dy^2 - y^2dx^2 + \frac{b}{2}x^2dy^2 + dy \\ & \xrightarrow[b=-2]{a=3} d(x^3y^2 - x^2y^2 + y + C) \end{aligned}$$

因此 $a = 3, b = -2, f(x,y) = x^3y^2 - x^2y^2 + y + C, C$ 为任意常数.

【评注】 设 $P(x,y), Q(x,y)$ 具有连续的一阶偏导数, 则 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 为某函数的全微分的必要条件是 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

100 【答案】 1【分析】 由 $f(x, y, z) = e^x + y^2 z$ 知

$$f'_x(x, y, z) = e^x + y^2 z'_x$$

等式 $x + y + z + xyz = 0$ 两端对 x 求偏导得

$$1 + z'_x + yz + xyz'_x = 0$$

令 $x = 0, y = 1, z = -1$ 得 $z'_x = 0$.则 $f'_x(0, 1, -1) = e^0 = 1$.**101** 【答案】 $-\frac{1}{3}(dx + 2dy)$ 【分析】 方法 1 将 $x = 0, y = 0$ 代入 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 中, 得 $e^{3z} = 1$, 则 $z = 0$.
方程 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 两端微分得

$$e^{x+2y+3z}(dx + 2dy + 3dz) + yzdx + xzdy + xydz = 0$$

将 $x = 0, y = 0, z = 0$ 代入上式得

$$dx + 2dy + 3dz = 0$$

$$\text{则 } dz \Big|_{(0,0)} = -\frac{1}{3}(dx + 2dy).$$

方法 2 将 $x = 0, y = 0$ 代入 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 中, 得 $e^{3z} = 1$, 则 $z = 0$.
由隐函数求导公式得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{e^{x+2y+3z} + yz}{3e^{x+2y+3z} + xy}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2e^{x+2y+3z} + xz}{3e^{x+2y+3z} + xy}$$

$$\text{将 } x = 0, y = 0, z = 0 \text{ 代入上式得 } \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,0)} = -\frac{1}{3}, \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(0,0)} = -\frac{2}{3}.$$

$$\text{则 } dz \Big|_{(0,0)} = -\frac{1}{3}(dx + 2dy).$$

方法 3 将 $x = 0, y = 0$ 代入 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 中, 得 $e^{3z} = 1$ 则 $z = 0$.
将 $y = 0$ 代入 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 中, 得 $e^{x+3z} = 1$, 该式两端对 x 求导得

$$e^{x+3z}(1 + 3z'_x) = 0,$$

$$\text{将 } x = 0, z = 0 \text{ 代入上式得 } \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,0)} = -\frac{1}{3}, \text{ 同理可得 } \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(0,0)} = -\frac{2}{3}.$$

$$\text{则 } dz \Big|_{(0,0)} = -\frac{1}{3}(dx + 2dy).$$

【评注】 对于隐函数求具体点偏导数和全微分, 仍然可采用先代后求的方法, 即方法 3. 如果本题改为:

$$\text{若函数 } z = z(x, y) \text{ 由方程 } e^{x+2y+3z} + \frac{xyz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}} = 1 \text{ 确定, 则 } dz \Big|_{(0,0)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

此方法的优越性更加明显.

102 【答案】 $-dx + 2dy$ 【分析】 等式 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$ 两端微分, 得

$$(x+1)dz + zdx - 2ydy = x^2 df(x-z, y) + f(x-z, y)2xdx$$

当 $x=0, y=1$ 时, 由 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$ 知 $z=1$, 所以

$$dz|_{(0,1)} + dx - 2dy = 0$$

即 $dz|_{(0,1)} = -dx + 2dy$.

103 【答案】 $\frac{1}{2}[f(y) - f(x)] - (x+y)$

【分析】 将积分作变量替换, 令 $x+y-t=s$, 则

$$\int_x^y f(x+y-t)dt = -\int_y^x f(s)ds = \int_x^y f(s)ds$$

原方程化为

$$x^2 + y^2 + z^2 = \int_x^y f(s)ds$$

方法1 方程两边分别对 x, y 求偏导数, 得

$$2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} = -f(x)$$

$$2y + 2z \frac{\partial z}{\partial y} = f(y)$$

$$\Rightarrow z\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}[f(y) - f(x)] - (x+y).$$

方法2 将方程两边求全微分得

$$2xdx + 2ydy + 2zdz = f(y)dy - f(x)dx$$

移项, 得

$$zdz = -\left(x + \frac{1}{2}f(x)\right)dx + \left(-y + \frac{1}{2}f(y)\right)dy$$

于是

$$\begin{aligned} z\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right) &= -\left(x + \frac{1}{2}f(x)\right) + \left(-y + \frac{1}{2}f(y)\right) \\ &= \frac{1}{2}[f(y) - f(x)] - (x+y). \end{aligned}$$

104 【答案】 $-\frac{1}{e}$

【分析】 $f'_x = 2x(2+y^2), f'_y = 2x^2y + \ln y + 1$.

令 $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$, 解得驻点 $(0, \frac{1}{e})$.

$$A = f''_{xx}(0, \frac{1}{e}) = 2(2+y^2)\Big|_{(0, \frac{1}{e})} = 2(2 + \frac{1}{e^2})$$

$$B = f''_{xy}(0, \frac{1}{e}) = 4xy\Big|_{(0, \frac{1}{e})} = 0$$

$$C = f''_{yy}(0, \frac{1}{e}) = \left(2x^2 + \frac{1}{y}\right)\Big|_{(0, \frac{1}{e})} = e$$

所以 $B^2 - AC = -2e\left(2 + \frac{1}{e^2}\right) < 0, A > 0$, 则 $f(0, \frac{1}{e})$ 是 $f(x, y)$ 的极小值, 极小值为

$$f\left(0, \frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}.$$

105 【答案】 大, (1, 1), 6.

【分析】 按隐函数微分法求偏导数.

$$2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} - 2 - 4 \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1-x}{z-2} \quad (1)$$

由 x, y 的对称性知

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1-y}{z-2} \quad (2)$$

由 $\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ 得唯一驻点 $(x, y) = (1, 1)$.

将 $(x, y) = (1, 1)$ 代入方程中得到

$$z^2 - 4z - 12 = 0, (z-6)(z+2) = 0.$$

由于 $z > 0 \Rightarrow z(1, 1) = 6$.

为判断 $(1, 1)$ 是否极值点, 进一步求 $z(x, y)$ 在 $(1, 1)$ 处的二阶偏导数.

注意 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,1)} = \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(1,1)} = 0$. 由 (1) 式得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-(z-2) - (1-x) \frac{\partial z}{\partial x}}{(z-2)^2}, A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(1,1)} = -\frac{1}{z-2} \Big|_{(1,1)} = -\frac{1}{4}$$

同样由 (1) 式得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{(x-1) \frac{\partial z}{\partial y}}{(z-2)^2}, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1)} = 0$$

由 (2) 式得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-(z-2) - (1-y) \frac{\partial z}{\partial y}}{(z-2)^2}, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(1,1)} = -\frac{1}{z-2} \Big|_{(1,1)} = -\frac{1}{4}$$

于是在 $(1, 1)$ 处 $AC - B^2 = \frac{1}{16} > 0, A = -\frac{1}{4} < 0, (1, 1)$ 是 $z(x, y)$ 的极大值点, 相应的极大值是 6.

106 【答案】 $\int_0^a dx \int_{\frac{x}{2}}^{2a-x} f(x, y) dy$

107 【答案】 $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y) dx$

【分析】 由题设知对应的二重积分

$\iint_D f(x, y) d\sigma$ 的积分区域 $D = D_1 \cup D_2$, 且

$$D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\},$$

难吗? 不会做? 可以看
《数学复习全书·基础篇》
高数第九章
二重积分

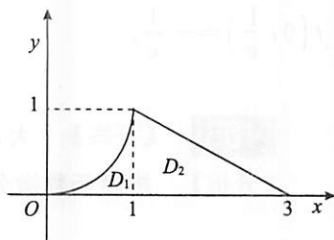
微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$D_2 = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \frac{1}{2}(3-x)\},$$

画出积分区域 D 如图所示. 由此可见在区域 D 中最高点的纵坐标为 1, 最低点的纵坐标为 0, 左边界的方程是 $x = \sqrt{y}$, 右边界的方程 $x = 3 - 2y$, 从而积分区域 D 又可表成

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, \sqrt{y} \leq x \leq 3 - 2y\}.$$

$$\text{故交换积分次序得 } I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y) dx.$$



【评注】 二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 可化为累次积分 $\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$ 或 $\int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$.

累次积分的基本特点是外层积分限为常数, 内层积分限为函数, 而且积分上限总是不小于积分下限.

108 【答案】 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{8}(1 - e^{-R^2})$

【分析】 I 是二重积分 $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} d\sigma$ 的累次积分, 其中

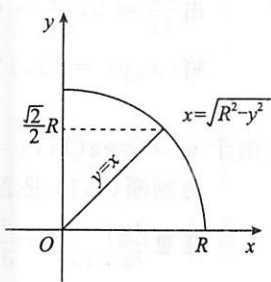
$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}R, 0 \leq x \leq y\} \cup \{(x, y) \mid \frac{\sqrt{2}}{2}R \leq y \leq R,$$

$0 \leq x \leq \sqrt{R^2 - y^2}\}, D$ 如图所示, 应作极坐标变换

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 可得

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq r \leq R, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

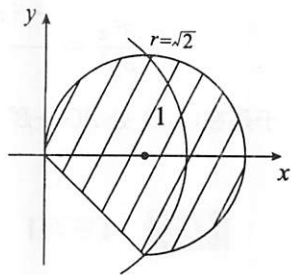
$$\text{于是 } I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R e^{-r^2} r dr = -\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} e^{-r^2} \Big|_0^R = \frac{\pi}{8}(1 - e^{-R^2}).$$



109 【答案】 $\int_0^{\sqrt{2}} r dr \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arccos \frac{r}{\sqrt{2}}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta + \int_{\sqrt{2}}^2 r dr \int_{-\arccos \frac{r}{\sqrt{2}}}^{\arccos \frac{r}{\sqrt{2}}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta$

【分析】 由原题知积分域如下图, 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^{\sqrt{2}} r dr \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arccos \frac{r}{\sqrt{2}}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta + \\ &\quad \int_{\sqrt{2}}^2 r dr \int_{-\arccos \frac{r}{\sqrt{2}}}^{\arccos \frac{r}{\sqrt{2}}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta \end{aligned}$$



110 【答案】 $2 - \frac{\pi}{2}$

【分析】 本题在直角坐标下不易计算, 利用极坐标计算.

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2} dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}}^1 (\cos \theta + \sin \theta) dr \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta + \sin \theta) d\theta - \frac{\pi}{2} = 2 - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

111 【答案】 $\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$

【分析】 交换积分次序得

$$\int_0^1 dx \int_x^1 \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}} dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{1+y^3}} dy = \frac{1}{3}(\sqrt{2}-1).$$

112 【答案】 $\frac{2}{3}$

【分析】 交换积分次序得

$$\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} \cos^2 x dx = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx \int_0^{\sin x} dy = \int_0^{\pi} \cos^2 x \sin x dx = \frac{2}{3}$$

113 【答案】 $\frac{\pi}{4}$

【分析】 由于 $2y$ 是 y 的奇函数, 而积分域 $x^2 + y^2 \leq 1$ 关于 x 轴对称, 则

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} 2y d\sigma = 0$$

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 d\sigma = \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) d\sigma \quad (\text{变量的对称性}) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{4}$$

114 【答案】 2π

【分析】 本题直接用直角坐标或极坐标都不易计算, 应考虑平移加极坐标, 或奇偶性的平移.

方法 1 令 $x = 1 + r\cos\theta, y = 1 + r\sin\theta$, 则

$$\begin{aligned} \iint_D xy dx dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (1 + r\cos\theta)(1 + r\sin\theta) r dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (1 + r\cos\theta + r\sin\theta + r^2 \sin\theta \cos\theta) r dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r dr = 2\pi \end{aligned}$$

方法 2 由于区域 D 关于 $x = 1, y = 1$ 都对称, 则

$$\begin{aligned} \iint_D xy dx dy &= \iint_D [(xy - x) + x] dx dy \\ &= \iint_D [x(y - 1) + (x - 1) + 1] dx dy \\ &= \iint_D 1 dx dy = 2\pi \end{aligned}$$

115 【答案】 $2\ln(1+\sqrt{2})$

【分析】 由于区域 D 关于直线 $y = x$ 对称, 则

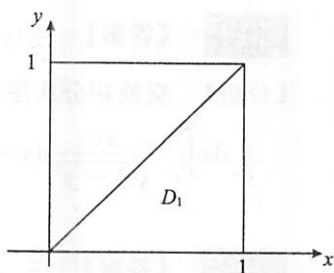
$$\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 2 \iint_{D_1} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

微信扫码

其中区域 D_1 如右图, 为下半三角形, 则

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} dr = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\cos \theta} \\ &= 2 \ln(\sec \theta + \tan \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 2 \ln(1 + \sqrt{2}).\end{aligned}$$



116 【答案】 $\frac{5}{3} + \frac{\pi}{2}$

【分析】 这是带有绝对值的二重积分, 可通过分割积分区域的办法去掉绝对值符号.

如图所示, 将区域 D 分成 D_1 和 D_2 两部分, 其中

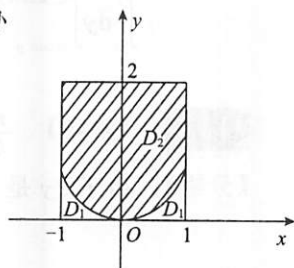
$$D_1 = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2\},$$

$$(x, y) \in D_1 \text{ 时, } \sqrt{|y - x^2|} = \sqrt{x^2 - y}.$$

$$(x, y) \in D_2 \text{ 时, } \sqrt{|y - x^2|} = \sqrt{y - x^2}.$$
 所以

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{|y - x^2|} dx dy &= \iint_{D_1} \sqrt{x^2 - y} dx dy + \iint_{D_2} \sqrt{y - x^2} dx dy \\ &= \int_{-1}^1 dx \int_0^{x^2} \sqrt{x^2 - y} dy + \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^2 \sqrt{y - x^2} dy \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_0^{x^2} \sqrt{x^2 - y} dy + 2 \int_0^1 dx \int_{x^2}^2 \sqrt{y - x^2} dy \\ &= -\frac{4}{3} \int_0^1 (x^2 - y)^{\frac{3}{2}} \Big|_{y=0}^{y=x^2} dx + \frac{4}{3} \int_0^1 (y - x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{y=x^2}^{y=2} dx \\ &= \frac{4}{3} \int_0^1 x^3 dx + \frac{4}{3} \int_0^1 (2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{3} + \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 t dt \\ &= \frac{5}{3} + \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\text{其中 } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 t dt &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right)^2 dt = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + 2\cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2}) dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2t + \frac{1}{2} \cos 4t \right) dt = \frac{3}{32} \pi + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

【评注】 在计算中利用了积分区域 D_1 与 D_2 关于 y 轴的对称性以及被积函数 $\sqrt{x^2 - y}$ 与 $\sqrt{y - x^2}$ 都是 x 的偶函数.

117 【答案】 $(x-1)f(x)$

【分析】 交换积分次序

$$F(x) = \int_1^x dv \int_v^x f(u) du = \int_1^x du \int_1^u f(u) dv = \int_1^x (u-1) f(u) du$$

所以

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_1^x (u-1) f(u) du = (x-1) f(x)$$

118 【答案】 $\frac{3}{4} \sqrt{x^2 + y^2} + y^2$ 【分析】 因 $f(x, y)$ 连续, 从而 $f(x, y)$ 在区域 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上可积, 设

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(x, y) d\sigma = A$$

则 $f(x, y) = \frac{A}{\pi} \sqrt{x^2 + y^2} + y^2$, 两边在 D 上积分得

$$\begin{aligned} A &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left(\frac{A}{\pi} \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 \right) d\sigma = \frac{A}{\pi} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma + \iint_{x^2+y^2 \leq 1} y^2 d\sigma \\ &= \frac{A}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 \sin^2 \theta dr \\ &= \frac{2}{3} A + 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{2}{3} A + \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

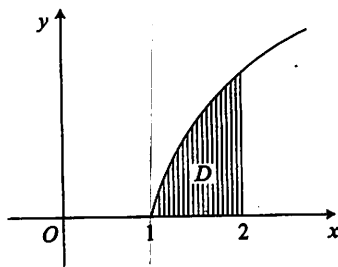
$$\Rightarrow A = \frac{3}{4} \pi. \text{ 故 } f(x, y) = \frac{3}{4} \sqrt{x^2 + y^2} + y^2.$$

119 【答案】 $\frac{\pi}{8} (3e^4 + 1)$ 【分析】 令 $I = \iint_D x^2 \ln(x^2 + y^2) d\sigma$, $J = \iint_D y^2 \ln(x^2 + y^2) d\sigma$, 由于积分区域 $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2\}$ 关于直线 $y = x$ 对称, 故

$$\begin{aligned} I &= J = \frac{1}{2} (I + J) = \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^e r^2 \ln(r^2) r dr = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^e r^2 \ln(r^2) d(r^2) \\ &= \frac{\pi}{2} \int_1^{e^2} t \ln t dt = \frac{\pi}{4} \int_1^{e^2} \ln t d(t^2) = \frac{\pi}{4} \left[t^2 \ln t \Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} t dt \right] \\ &= \frac{\pi}{4} \left[e^4 \ln(e^2) - \frac{1}{2} (e^4 - 1) \right] = \frac{\pi}{4} \left(\frac{3}{2} e^4 + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{8} (3e^4 + 1). \end{aligned}$$

120 【答案】 $\ln 2$ 【分析】 由题设知积分区域 $D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \ln x\}$, 从而

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{e^{xy}}{x^x - 1} d\sigma &= \int_1^2 dx \int_0^{\ln x} \frac{e^{xy}}{x^x - 1} dy \\ &= \int_1^2 \frac{dx}{x^x - 1} \int_0^{\ln x} e^{xy} dy \\ &= \int_1^2 \frac{dx}{x(x^x - 1)} \int_0^{\ln x} e^{xy} d(xy) \\ &= \int_1^2 \frac{e^{xy}}{x(x^x - 1)} \Big|_{y=0}^{y=\ln x} dx \\ &= \int_1^2 \frac{e^{x \ln x} - 1}{x(x^x - 1)} dx = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2. \end{aligned}$$



微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

选 择 题

121 【答案】 C

【分析】 若极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \exists$, 则 x_n 有界. 这是我们应熟悉的基本定理, 即 ① 正确. 关于 ②, ③ 的正确性, 从直观上理解即可.

$$x_n: x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

$$x_{n+l}: x_{1+l}, x_{2+l}, x_{3+l}, \dots, x_{n+l}, \dots$$

x_n 中去掉前 l 项即 x_{n+l} .

$$x_{2n-1}: x_1, x_3, x_5, \dots, x_{2n-1}, \dots$$

$$x_{2n}: x_2, x_4, x_6, \dots, x_{2n}, \dots$$

它们一起涵盖了 x_n 的所有项.

命题 ④ 是错的. 例如 $x_n = n, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$,

但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ (不 $\exists$ 极限).

因此选(C).

【评注】 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 若 $a \neq 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a}{a} = 1.$$

若 $a = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 可能存在, 也可能不存在.

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \stackrel{\text{记}}{=} C$ 存在, 则必有 $C \in [-1, 1]$ (因为若 $|C| > 1$, 必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$).

例如 $x_n = \frac{1}{l^n} (|l| > 1) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{l}$.

难吗? 不会做? 可以看
《数学复习全书·基础篇》
高数第一章
函数 极限 连续

122 【答案】 B

【分析】 因为 $a > 1$, 所以 $x_2 = a^{x_1} > a = x_1$.

设 $x_n > x_{n-1}$, 则 $x_{n+1} = a^{x_n} > a^{x_{n-1}} = x_n$, 所以数列 $\{x_n\}$ 单调增.

因为 $a \leq e^{\frac{1}{e}}$, 所以 $x_1 = a \leq e$.

设 $x_n < e$, 则 $x_{n+1} = a^{x_n} \leq e$. 所以数列 $\{x_n\}$ 有上界, 故数列 $\{x_n\}$ 有极限.

123 【答案】 B

【分析】 举反例说明 ①, ②, ③ 均错, 例如

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}, h(x) = \begin{cases} -1, & x > 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$$

则 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x), \lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ 均不 $\exists$, 但

$$\lim_{x \rightarrow 0} (g(x) + h(x)) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} (g(x) \cdot h(x)) = -1$$

故 ②, ③ 不正确.

若取 $f(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = 0$, 故 ① 也不正确.

按题设, 易知 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ 不 $\exists$. (否则, 若 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) \exists$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} [(f(x) + g(x)) - f(x)] \exists$, 矛盾). 故 ④ 正确. 选(B).

【评注】 (1) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 不 $\exists$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ 不 $\exists$, 当 $A \neq 0$ 时, 又有 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x))$ 不 $\exists$; 当 $A = 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x))$ 可能 $\exists$, 也可能不 $\exists$.

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 均不 $\exists$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)), \lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x))$ 可能 $\exists$, 也可能不 $\exists$.

124 【答案】 B

【分析】 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

所以 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 区间有界.

125 【答案】 D

【分析】 (D) 正确. (D) 正是极限的不等式性质中所述的结论.

(A) 的错误在于由 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 不能判断 x_0 附近 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小关系. 由(B) 的条件只能得 $A_0 \geq B_0$. 在(C) 中没假设极限存在. 选(D).



微信扫码

126 【答案】 A

【分析】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2[\pi(\sqrt{n^2 + n} - n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \frac{n\pi}{\sqrt{n^2 + n} + n} = 1$.

127 【答案】 B

【分析】 $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e - e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})} = e[1 - e^{n \ln(1 + \frac{1}{n}) - 1}]$.

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sim -e[n \ln(1 + \frac{1}{n}) - 1] \sim \frac{e}{2n}$.

所以 $A = \frac{e}{2}, p = 1$, (B) 选项正确.

128 【答案】 D

【分析】

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2 + n + n} + \frac{2}{n^2 + n + n} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} &\leq \frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \\ &\leq \frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 1} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + 1}, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2 + n + n} \leq \frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \leq \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2 + n + 1}.$$

$$\text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2 + n + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2 + n + n} = \frac{1}{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2 + n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2 + n + 1} = \frac{1}{2},$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

所以由夹逼定理, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right) = \frac{1}{2}$.

129 【答案】 D

【分析】 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin \pi x}{x-1} e^{\frac{1}{(x-1)^3}} = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin \pi x}{x-1} e^{\frac{1}{(x-1)^3}} = 0$$

其中 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \pi \cos \pi x = -\pi$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{(x-1)^3}} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{(x-1)^3}} = 0$.

所以选(D).

【评注】 注意 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{(x-1)^3}} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{(x-1)^3}} = 0$, 因而 $\lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{1}{(x-1)^3}}$ 不存在. 于是考察 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 时需要分别考察 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

130 【答案】 D

【分析】 先作如下变形

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - e^{-\frac{1}{2}(xe^x)^2}}{(xe^x)^4} \cdot e^{4x} \\ &\stackrel{t=xe^x}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - e^{-\frac{1}{2}t^2}}{t^4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} e^{4x} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - e^{-\frac{1}{2}t^2}}{t^4} \end{aligned}$$

方法1 用洛必达法则求这个极限

$$\begin{aligned} I &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t + te^{-\frac{1}{2}t^2}}{4t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\cos t + e^{-\frac{1}{2}t^2} - t^2 e^{-\frac{1}{2}t^2}}{12t^2} \\ &\stackrel{\text{分解法}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{12t^2} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{2}t^2} - 1}{12t^2} - \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{24} - \frac{1}{24} - \frac{1}{12} = -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

其中 $1 - \cos t \sim \frac{1}{2}t^2$, $e^{-\frac{1}{2}t^2} - 1 \sim -\frac{1}{2}t^2$ ($t \rightarrow 0$), 选(D).

方法2 用泰勒公式求这个极限

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + o(t^4) \quad (t \rightarrow 0)$$

$$e^{-\frac{1}{2}t^2} = 1 + \left(-\frac{t^2}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{t^2}{2}\right)^2 + o(t^4) \quad (t \rightarrow 0)$$

相减得

$$\cos t - e^{-\frac{1}{2}t^2} = \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{4}\right)t^4 + o(t^4) = -\frac{1}{12}t^4 + o(t^4)$$

因此 $I = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{12}t^4 + o(t^4)}{t^4} = -\frac{1}{12}.$

【评注】 求 $\frac{0}{0}$ 型极限常可用洛必达法则或泰勒公式,若需多次用洛必达法则,导致求导计算不方便,而又容易由间接法求得分子、分母的泰勒公式时,应该用泰勒公式求这类 $\frac{0}{0}$ 型极限.

131 【答案】 D

【分析】
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \sqrt{\cos 2x}}{x^k} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos 2x)^2 - \cos 2x}{x^k (\cos 2x + \sqrt{\cos 2x})} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x^k} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}(2x)^2}{x^k} = a \neq 0 \end{aligned}$$

所以 $k = 2, a = -1.$

132 【答案】 C

【分析】
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{(1 - \cos x) \sin^2 x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}.$$

由三角公式可知, $\cos(\sin x) - \cos x = 2 \sin \frac{x + \sin x}{2} \sin \frac{x - \sin x}{2}$, 所以当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\cos(\sin x) - \cos x \sim \frac{1}{2}(x + \sin x)(x - \sin x)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{(1 - \cos x) \sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \sin x)(x - \sin x)}{x^4} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \\ &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

133 【答案】 D

【分析】
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}) - x}.$$

而由泰勒展开, $x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x = x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o(x^{-2})\right) - x = -\frac{1}{2} + o(1), x \rightarrow +\infty,$

所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}}{e^x} = e^{-\frac{1}{2}}.$

134 【答案】 A

【分析】 将已知条件改写成



微信扫码

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$I = a + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx + 1 - e^{x^2-2x}}{x^2} = 2,$$

即

$$I_1 = 2 - a$$

其中

$$I_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx + 1 - e^{x^2-2x}}{x^2} \exists$$

由此定出参数 a 与 b .

方法1 用洛必达法则:

$$I_1 \xrightarrow[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b - (2x-2)e^{x^2-2x}}{2x}$$

分母极限为0,分子极限为 $b+2$,若 $b+2 \neq 0$,则极限 I_1 为 ∞ ,但极限 I_1 存在,故必有 $b+2=0$,即 $b=-2$,于是代入 $b=-2$ 后该极限为 $\frac{0}{0}$ 型,可用洛必达法则得

$$I_1 \xrightarrow{b=-2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(2x-2)^2 e^{x^2-2x} - 2e^{x^2-2x}}{2} \xrightarrow{\text{代入 } x=0} \frac{-6}{2} = -3$$

因此 $2-a=-3, b=-2$, 即 $a=5, b=-2$. 选(A).

方法2 用泰勒公式:

由极限与无穷小的关系

$$I_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx + 1 - e^{x^2-2x}}{x^2} = 2 - a$$

可写成

$$bx + 1 - e^{x^2-2x} = (2-a)x^2 + o(x^2)$$

由泰勒公式

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + o(t^2) (t \rightarrow 0)$$

令 $t = x^2 - 2x$, 则

$$t^2 = (x^2 - 2x)^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 4x^2 + o(x^2) (x \rightarrow 0)$$

$$o(t^2) = o(x^2) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$e^{x^2-2x} = 1 + (-2x + x^2) + \frac{1}{2}(4x^2) + o(x^2)$$

$$= 1 - 2x + 3x^2 + o(x^2)$$

于是

$$bx + 1 - e^{x^2-2x} = (b+2)x - 3x^2 + o(x^2) = (2-a)x^2 + o(x^2)$$

由此得

$$b+2=0, -3=2-a, \text{ 即 } a=5, b=-2. \text{ 选(A).}$$

135

【答案】 B

$$\text{【分析】 } \frac{\sin 6x - (\sin x)f(x)}{x^3} = \frac{\sin 6x - 6\sin x + (\sin x)(6-f(x))}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x - (\sin x)f(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x - 6\sin x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{6-f(x)}{x^2} \right] = 0,$$

$$\text{由 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow$$

$$I \xrightarrow{\text{记}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6-f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6\sin x - \sin 6x}{x^3} \xrightarrow{\text{记}} I_1$$

方法1 用洛必达法则求 I_1

$$I_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6\cos x - 6\cos 6x}{3x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + 6\sin 6x}{2x} = -1 + 36 = 35$$

因此 $I = 35$. 选(B).

方法2 用泰勒公式

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), 6\sin x = 6x - x^3 + o(x^3)$$

$$\sin 6x = 6x - \frac{1}{6}(6x)^3 + o(x^3), -\sin 6x = -6x + 36x^3 + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6\sin x - \sin 6x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{35x^3 + o(x^3)}{x^3} = 35.$$

因此 $I = 35$. 选(B).

136 【答案】 D

【分析】 方法1 (A) 是错的. 因为 n 是正整数, 对数列没有导数概念, 不能直接用洛必达法则.

(B) 是错的. 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi \cos \pi x}{6x - 2}$ 已不是未定式, 不能用洛必达法则.

(C) 也是错的. 用洛必达法则求 $\frac{0}{0}$ 型极限 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 时, 若 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在, 也不为 ∞ , 则法则失效, 不能推出原极限不存在, 事实上该极限是存在的. 因此选(D).

方法2 (D) 是正确的.

用洛必达法则求 $\frac{0}{0}$ 型极限 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 时,

若 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (有限数), 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

若 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, (D) 正是后一种情形.

【评注】 (A)、(B)、(C) 的正确解法是:

$$(A) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} \xrightarrow{\text{数列极限转化为函数极限}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \xrightarrow[\text{洛必达法则}]{\frac{\infty}{\infty}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$(B) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{3x^2 - 2x - 1} \xrightarrow[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi \cos \pi x}{6x - 2} = \frac{-\pi}{4}.$$

$$(C) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 1 \times 0 = 0.$$

$$(D) \text{ 的另一解法: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 - \frac{\sin x}{x}} = \infty \text{ (分子极限为 2, 分母极限为 0).}$$

137 【答案】 D

【分析】 该题就是要计算极限

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e}{\frac{1}{n}} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ 型数列极限}\right)$$

方法1 直接转化为求 $\frac{0}{0}$ 型函数极限, 然后用洛必达法则.

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} - e)'}{x'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x) \ln(1+x)}{x^2} \\ &= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\ln(1+x)}{2x} = -\frac{e}{2} \end{aligned}$$

因此, 选(D).

方法2 先用等价无穷小因子替换, 再转化为求 $\frac{0}{0}$ 型函数极限, 然后用洛必达法则

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e}{\frac{1}{n}} = e \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e} \right)}{\frac{1}{n}} \\ &= e \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1}{\frac{1}{n}} = e \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \\ &= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = -\frac{e}{2} \end{aligned}$$

其中 $\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e} - 1 \sim \ln \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e} - 1 + 1 \right] = n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1.$

因此选(D).

方法3 用泰勒公式.

转化为求

$$I = e \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1}{\frac{1}{n}}$$

后用泰勒公式: $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), (x \rightarrow 0)$

$$\begin{aligned} I &= e \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] - 1}{\frac{1}{n}} = e \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{2} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \\ &= -\frac{e}{2} \end{aligned}$$

因此选(D).

138 【答案】 C

【分析】 逐一分析它们的阶.

(A)(考察等价无穷小)

$(1+x)^{x^2} - 1 \sim \ln[(1+x)^{x^2} - 1 + 1] = x^2 \ln(1+x) \sim x^3 (x \rightarrow 0), \Rightarrow (1+x)^{x^2} - 1$ 是 x 的三阶无穷小.

(B)(考察等价无穷小)

$e^{x^4-2x} - 1 \sim x^4 - 2x \sim -2x (x \rightarrow 0) \Rightarrow e^{x^4-2x} - 1$ 是 x 的一阶无穷小.

(C)(待定阶数法)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin t^2 dt}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x^4}{kx^{k-1}} \stackrel{k=6}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin x^4}{3x \cdot x^4} = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow \int_0^{x^2} \sin t^2 dt$ 是 x 的六阶无穷小.

(D)(待定阶数法或泰勒公式法)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^{\frac{1}{2}} - (1+3x)^{\frac{1}{3}}}{x^k} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(1+2x)^{-\frac{1}{2}} \times 2 - \frac{1}{3}(1+3x)^{-\frac{2}{3}} \times 3}{kx^{k-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}(1+2x)^{-\frac{1}{2}} \times 2 + \frac{2}{3}(1+3x)^{-\frac{5}{3}} \times 3}{k(k-1)x^{k-2}} \stackrel{k=2}{=} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}$ 是 x 的二阶无穷小.

或用泰勒公式. 已知

$$(1+t)^a = 1 + at + \frac{1}{2}a(a-1)t^2 + o(t^2) (t \rightarrow 0)$$

$$\Rightarrow (1+2x)^{\frac{1}{2}} - (1+3x)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \times 2x + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) (2x)^2 - \left[1 + \frac{1}{3} \times 3x + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) (3x)^2 \right] + o(x^2)$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) x^2 + o(x^2) = \frac{1}{2} x^2 + o(x^2)$$

$\Rightarrow \sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}$ 是 x 的二阶无穷小. 因此选(C).

139 【答案】 C

【分析】 此类问题要逐一分析, 按无穷小阶的定义:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = A \neq 0 (\exists), \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{(x-a)^m} = B \neq 0 (\exists)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x)}{(x-a)^{n+m}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{(x-a)^m} = A \cdot B \neq 0 (\exists)$$

$\Rightarrow f(x)g(x)$ 是 $(x-a)$ 的 $n+m$ 阶无穷小;

又, 若 $n > m$,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot (x-a)^{n-m} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{(x-a)^m} = \frac{A}{B} \neq 0 (\exists)$$

$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ 是 $(x-a)$ 的 $n-m$ 阶无穷小;

因此 ①② 正确. 再考察

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + g(x)}{(x-a)^n} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{(x-a)^m} (x-a)^{m-n} \\ &= \begin{cases} A + B \cdot 0 = A \neq 0 (\exists) (n < m) \\ A + B & (n = m) \end{cases}\end{aligned}$$

由此得, 当 $n < m$ 时 $f(x) + g(x)$ 是 $x-a$ 的 n 阶无穷小.

当 $n = m$ 时 $f(x) + g(x)$ 是 $x-a$ 的 n 阶 ($A+B \neq 0$) 或高于 n 阶 ($A+B = 0$) 的无穷小.

例如, $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x$ 与 $-x$ 均是 x 的一阶无穷小, 但

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{6}$$

即 $\sin x + (-x)$ 是 x 的三阶无穷小; 因此 ③ 不正确.

最后考察

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\int_a^x f(t) dt}{(x-a)^{n+1}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(n+1)(x-a)^n} = \frac{A}{n+1} \neq 0 \Rightarrow \int_a^x f(t) dt \text{ 是 } x-a \text{ 的 } n+1 \text{ 阶无穷小.}$$

因此 ④ 正确. 选(C).

【评注】 本题是讨论无穷小阶的运算规律. 再补充一条:

设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处 n 阶可导, $x \rightarrow a$ 时 $f(x)$ 是 $x-a$ 的 n 阶无穷小 ($n \geq 2$), 则 $f'(x)$ 是 $x-a$ 的 $n-1$ 阶无穷小.

【证法一】 $f(x)$ 在 $x=a$ 有泰勒公式且为

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + o((x-a)^n) \quad (x \rightarrow a)$$

其中 $f^{(n)}(a) \neq 0, f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$.

记 $g(x) = f'(x)$ 在 $x=a$ 处 $n-1$ 阶可导, 有泰勒公式

$$g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} g^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + o((x-a)^{n-1})$$

即

$$f'(x) = \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(a)(x-a)^{n-1} + o((x-a)^{n-1}) \quad (x \rightarrow a)$$

因此, $x \rightarrow a$ 时 $f'(x)$ 是 $x-a$ 的 $n-1$ 阶无穷小.

【证法二】 连续用 $n-1$ 次洛必达法则.

$f(x)$ 在 $x=a$ 处 n 阶可导 ($n \geq 2$) $\Rightarrow f(x)$ 在 $x=a$ 邻域 $n-1$ 阶可导且 $f^{(n-1)}(x)$ 在 $x=a$ 连续.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{n(x-a)^{n-1}} \quad (\text{分子极限为 } f'(a) = 0, \text{ 否则该极限为 } \infty, \text{ 这不可能})$$

$$= \dots = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} \quad (\text{分子极限为 } f^{(n-1)}(a) = 0, \text{ 否则该极限为 } \infty, \text{ 不可能})$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{n!(x-a)} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \neq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{(x-a)^{n-1}} = \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(a) \neq 0$$

因此 $f'(x)$ 是 $x-a$ 的 $n-1$ 阶无穷小.

140 【答案】 B**【分析】** 当 $x \rightarrow 0$ 时, 设 $f(x)$ 为 x 的 p 阶无穷小, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^p} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t e^{\sin t} dt}{x^p} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{\sin x}}{p x^{p-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{p x^{p-2}}$$

当 $p = 2$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^p} = \frac{1}{2}$ 为非零常数, 所以当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 为 x 的 2 阶无穷小.

141 【答案】 D

【分析】 易知 (A), (B) 中 $f(u)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续, $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续 $\Rightarrow$ 复合函数 $f(g(x))$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续. 因此只须在 (C), (D) 中选择.

方法 1 考察 (C)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(g(x)) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(x + \frac{\pi^2}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \cos \sqrt{x + \frac{\pi^2}{4}}\right) \\ &= 1 - \cos \frac{\pi}{2} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(g(x)) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1-x^2)}{x} \sin \frac{1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2}{x} \sin \frac{1}{x} = 0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow x = 0$ 是 $f(g(x))$ 的第一类间断点. 选 (D).

方法 2 考察 (D)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\sin \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{\sin^2 \frac{1}{x}} + 1)$$

该极限不存在 $\Rightarrow x = 0$ 是 $f(g(x))$ 的第二类间断点. 选 (D).

或考察

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{\frac{1}{x^2}} + 1) = +\infty$$

$\Rightarrow x = 0$ 是 $f(g(x))$ 的第二类间断点. 选 (D).

142 【答案】 C

【分析】 $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{x-1}{x} = \mp \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \arctan \frac{x-1}{x} = \mp \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \mp \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

又 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \arctan \frac{x-1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$

$\Rightarrow x = 1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

因此选 (C).

143 【答案】 B**【分析】 方法 1** 若 $f(x) + \sin x$ 在 $x = x_0$ 连续 $\Rightarrow$

$$f(x) = (f(x) + \sin x) - \sin x$$

在 $x = x_0$ 连续, 与已知矛盾. 因此 $f(x) + \sin x$ 在 x_0 必间断. 选 (B).

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

【评注】 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 间断, $g(x)$ 在 $x = x_0$ 连续, 则 $f(x) \pm g(x)$ 在 $x = x_0$ 间断.

方法 2 举反例说明(A)、(C)、(D) 不对.

设 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 间断, $f(x) \cdot \sin x = 0 (\forall x)$ 在 $x = 0$ 连续.

设 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x)$ 在 $x = 0$ 间断, 但 $f^2(x) = 1 (\forall x)$,

$|f(x)| = 1 (\forall x)$ 在 $x = 0$ 均连续, 因此不选(A)、(C)、(D).

144 【答案】 A

【分析】 由“若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |a|$ ”可得“如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |f(x_0)|$ ”因此, $f(x)$ 在 x_0 连续, 则 $|f(x)|$ 在 x_0 连续, 但 $|f(x)|$ 在 x_0 处连续, $f(x)$ 在 x_0 处不一定连续.

如 $f(x) = \begin{cases} -1, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$, 在 $x = 0$ 不连续, 但 $|f(x)| = 1$ 在 $x = 0$ 处连续.

于是应选(A).

145 【答案】 C

【分析】 若 $\exists x_n \in [a, +\infty)$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$, 则 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 无界. 因为若 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 有界, 即 $|f(x)| \leq M (x \in [a, +\infty))$
 $\Rightarrow |f(x_n)| \leq M$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$ 矛盾.



微信扫码

若 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 无界 $\Rightarrow$ 对 $\forall$ 自然数 n , $f(x)$ 在 $[n, +\infty)$ 无界
 $\Rightarrow \exists x_n \in [n, +\infty)$, $|f(x_n)| > n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$.

因此选(C).

146 【答案】 C

【分析】 先分别考察左、右可导性.

显然, $f(0) = 0$.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^4}{x^4} = \frac{1}{2} (\Rightarrow f(x) \text{ 在 } x = 0 \text{ 右连续})$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) \frac{\arcsin^2 x}{x} \xrightarrow{\text{有界变量与无穷小之积}} 0 (\Rightarrow f(x) \text{ 在 } x = 0 \text{ 左连续})$$

$f'_+(0) \neq f'_-(0)$. 因此 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续, 但不可导. 选(C).

【评注】 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 左可导且右可导, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续, 从而它在 x_0 处的极限存在.

147 【答案】 A

【分析】 $|x| \neq 1$ 时显然可导. 由于 $f(x)$ 是偶函数, 故只须考察 $x = 1$.

首先要使 $f(x)$ 在 $x = 1$ 连续, 即 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$

即

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{x^2-1}} = 1 - b + c, 0 = 1 - b + c$$

$$\text{又 } f'_+(1) = (x^4 - bx^2 + c)' \Big|_{x=1} = 4 - 2b$$

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{\frac{1}{x^2-1}} - 0}{x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{\text{(洛必达法则)}}{=}} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2} e^{\frac{1}{x^2-1}} \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{\frac{1}{x^2-1}}}{(x^2 - 1)^2} \stackrel{t = \frac{1}{x^2-1}}{=} -2 \lim_{t \rightarrow -\infty} t^2 e^t = 0 \end{aligned}$$

现要求 $f'_+(1) = f'_-(1)$, 即 $4 - 2b = 0$.

因此, $b = 2, c = 1$. 选(A).

【评注】 有一类如下类型的分段函数:

设 $f(x) = \begin{cases} g(x), & x_0 - \delta < x \leq x_0 \\ h(x), & x_0 < x < x_0 + \delta \end{cases}$, δ 为大于零的常数, $h(x)$ 在 x_0 无定义, 又 $g'_-(x_0)$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} h(x) = a, \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{h(x) - a}{x - x_0} = b \text{ 均存在.}$$

现考察 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的可导性.

首先考察 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的连续性.

$$f(x) \text{ 在 } x = x_0 \text{ 连续} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = g(x_0) (g'_-(x_0) \exists, \text{ 则 } g(x) \text{ 在 } x = x_0 \text{ 左连续}).$$

$$\Leftrightarrow a = g(x_0). \text{ 补充定义 } h(x_0) = a, \text{ 则}$$

$$h'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{h(x) - a}{x - x_0} = b$$

当 $g(x_0) = a$ 时,

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x_0 - \delta < x \leq x_0 \\ h(x), & x_0 < x < x_0 + \delta \end{cases}$$

$$f'(x_0) \exists \Leftrightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0) \Leftrightarrow g'_-(x_0) = h'_+(x_0) = b.$$

因此在题设条件下, $f(x)$ 在 $x = x_0$ 可导 $\Leftrightarrow g(x_0) = a, g'_-(x_0) = b$.

148 **【答案】** A

【分析】 方法1 关于(A), 当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} \sin \frac{1}{x} - x^{-\frac{2}{3}} \cos \frac{1}{x}$

而 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ 不存在 $\Rightarrow f'(x)$ 在 $x = 0$ 不连续. 选(A).

【评注】 设 $f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 则

$f(x)$ 在 $x = 0$ 连续 $\Leftrightarrow \alpha > 0$; 在 $x = 0$ 可导 $\Leftrightarrow \alpha > 1$; 在 $x = 0$ 处 $f'(x)$ 连续 $\Leftrightarrow \alpha > 2$.

(A) 中 $\alpha = \frac{4}{3}, 1 < \alpha < 2, f'(x)$ 在 $x = 0$ 不连续.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

方法2 (B)、(C)、(D) 中的三个 $f(x)$ 在 $x=0$ 均连续, 直接求出

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \quad (x \neq 0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{2x} = 0$$

$\Rightarrow f'(0) = 0, f'(x)$ 在 $x=0$ 连续.

类似可证(C)、(D) 函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续. 因此选(A).

【评注】 (B)、(C)、(D) 中的函数均可表为幂级数.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (|x| < +\infty).$$

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} = 1 + \frac{1}{3!} x^2 + \dots$$

右端级数当 $x=0$ 时取值为 1, $\Rightarrow$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} \quad (|x| < +\infty)$$

由幂级数的性质 $\Rightarrow f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 任意阶可导.

其余类似.

149 【答案】 B

【分析】 当 $f(0) = 0$ 时,

$$f'(0) \exists \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \exists,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x^2} \exists \Leftrightarrow \lim_{t=x^2 \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t} \exists \Leftrightarrow f'_+(0) \exists.$$

若 $f'(0) \exists \Rightarrow f'_+(0) \exists \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x^2} \exists$. 反之, 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x^2} \exists \Rightarrow f'_+(0) \exists \nRightarrow f'(0) \exists$. 因此选(B).

【评注】 例 $f(x) = |x|, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x^2} = 1$, 但 $f(x)$ 在 $x=0$ 不可导.

150 【答案】 C

【分析】 $f'(x)$ 也以 3 为周期 $\Rightarrow f'(1) = f'(4)$, 我们可由 $f'(1)$ 求得极限值 I .

$$\begin{aligned} I &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(1+h) - f(1)] - [f(1-3\tan h) - f(1)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-3\tan h) - f(1)}{-3\tan h} \cdot \frac{3\tan h}{h} \\ &= (1+3)f'(1) = 4 \end{aligned}$$

应该选(C).



微信扫码

【评注】 设 $f'(a) \exists, \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(a + \varphi(x)) - f(a)}{\varphi(x)} \stackrel{t = \varphi(x)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t) - f(a)}{t} = f'(a).$$

本题就是利用 $f'(1)$ 来求

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + \varphi(h)) - f(1)}{\varphi(h)} = f'(1)$$

其中 $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$, 这里是 $\varphi(h) = h$ 或 $\varphi(h) = -3 \tan h$.

151 【答案】 C

【分析】 因为 $f(x) = |x - a| g(x)$ 在 $x = a$ 点处可导, 所以

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} g(a + h)$$

存在. 而函数 $g(x)$ 在 $x = a$ 点处连续, $\lim_{h \rightarrow 0} g(a + h) = g(a)$, $\lim_{h \rightarrow 0^{\pm}} \frac{|h|}{h} = \pm 1$, 所以 $g(a) = 0$.

152 【答案】 C

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } f(x) &= \begin{cases} x \sin^2 x, & x \geq 0 \\ -x \sin^2 x, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \sin^2 x + x \sin 2x, & x \geq 0 \\ -(\sin^2 x + x \sin 2x), & x < 0 \end{cases} \\ \Rightarrow f''(x) &= \begin{cases} 2 \sin 2x + 2x \cos 2x, & x \geq 0 \\ -(2 \sin 2x + 2x \cos 2x), & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$f_+^{(3)}(0) = (2 \sin 2x + 2x \cos 2x)' \Big|_{x=0} = 6$$

$$f_-^{(3)}(0) = (-(2 \sin 2x + 2x \cos 2x))' \Big|_{x=0} = -6$$

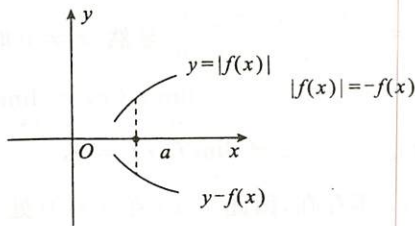
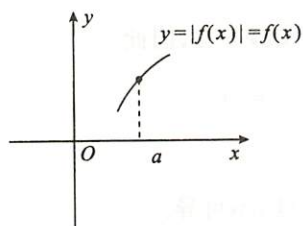
$\Rightarrow f^{(3)}(0)$ 不存在. 因此 $n = 2$. 选(C).

知识点链接

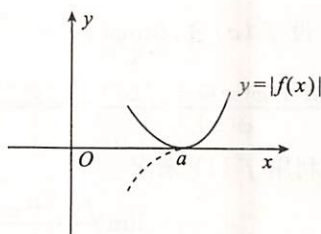
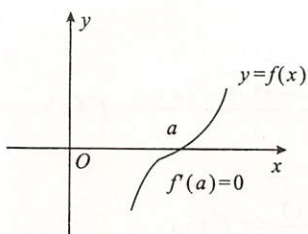
《数学复习全书·基础篇》
高数第二章
导数与微分

153 【答案】 B

【分析】 方法1 当 $f(a) \neq 0$ 时(不论 $f'(a)$ 是正值还是负值), 由连续性, 在 $x = a$ 附近或 $|f(x)| = f(x)$, 或 $|f(x)| = -f(x)$, 于是 $|f(x)|$ 与 $f(x)$ 在 $x = a$ 有相同的可导性. 由 $f'(a) \exists \Rightarrow |f(x)|' \Big|_{x=a} \exists$, (C)、(D) 被排除.



当 $f(a) = 0, f'(a) = 0$ 时曲线 $y = f(x)$ 在 $(a, 0)$ 点与 x 轴相切 $\Rightarrow y = |f(x)|$ 同样在 $(a, 0)$ 点与 x 轴相切 $\Rightarrow |f(x)|' \Big|_{x=a} \exists$ (且为零值). (A) 被排除.



因此选(B).

方法 2 $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, $|x|' = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} = \frac{x}{|x|}$, 所以, 当 $f(x) \neq 0$ 且

$f(x)$ 可导, 由复合函数的导数法则, 有 $(|f(x)|)' = \frac{f(x)}{|f(x)|} f'(x)$.

若 $f(a) \neq 0$, 则有 $[|f(x)|]' \Big|_{x=a} = \frac{f(x)}{|f(x)|} f'(x) \Big|_{x=a} = \frac{f(a)}{|f(a)|} f'(a)$, 因此不选(C) 和 (D). (当 $f(x)$ 在 $x=a$ 可导, 且 $f(a) \neq 0$ 时, $|f(x)|$ 在 $x=a$ 点可导).

当 $f(a) = 0$ 时

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{|f(x)| - |f(a)|}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a^+} \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| = |f'(a)| \\ \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{|f(x)| - |f(a)|}{x - a} &= - \lim_{x \rightarrow a^-} \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| = -|f'(a)| \end{aligned}$$

上两式分别是 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 点的右、左导数, 因此, 当 $f(a) = 0$ 时, $|f(x)|$ 在 $x=a$ 点不可导的充要条件是上两式不相等, 即 $f'(a) \neq 0$ 时, 于是选(B).

【评注】 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 可导, 关于 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 是否可导有如下结论:

若 $f(a) \neq 0$, 则 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 可导.

若 $f(a) = 0$, $\begin{cases} f'(a) = 0, & \text{则 } |f(x)| \text{ 在 } x=a \text{ 可导.} \\ f'(a) \neq 0, & \text{则 } |f(x)| \text{ 在 } x=a \text{ 不可导.} \end{cases}$

154 【答案】 D

【分析】 首先将 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的左右导数 $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ 与 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 处的左右极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$ 区分开来.

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = a$, 只能得出 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = a$, 但不能保证 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 以及在 $x=x_0$ 处连续和极限存在.

例如 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x > 0 \\ x, & x \leq 0 \end{cases}$. 显然, $x \neq 0$ 时, $f'(x) = 1$, 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 1$$

但 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$,

因而 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在, 因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续, 不可导.

因此选(D).

【评注】 (1) $f(x)$ 在 x_0 可导, 则 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ 存在, 不一定有 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

(2) 本题讨论的一个问题是, $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ 与 $f'(x_0)$ 的关系, 我们有如下结论:

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的空心邻域内可导

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = A \begin{cases} \text{若 } f(x) \text{ 在 } x = x_0 \text{ 不连续} \Rightarrow f'(x_0) \text{ 不 } \exists. \\ \text{若 } f(x) \text{ 在 } x = x_0 \text{ 连续} \Rightarrow f'(x_0) = A. \end{cases}$$

$$\text{(此时可用洛必达法则求得 } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = A)$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \infty \Rightarrow f'(x_0) \text{ 不 } \exists.$$

(此时若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 不连续, 当然也就不可导, 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续, 仍可用洛必达法则得

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \infty$$

即 $f'(x_0)$ 不 $\exists$.)

$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ 不 $\exists$, 也不为 ∞ , 此时 $f'(x_0)$ 是否存在要具体问题具体分析.

155

【答案】 A

【分析】 作变量代换 $u = x + t$, 则

$$g(x) = \int_{-x}^0 t f(x+t) dt = \int_0^x (u-x) f(u) du = \int_0^x u f(u) du - x \int_0^x f(u) du$$

$$g'(x) = x f(x) - \int_0^x f(u) du - x f(x) = - \int_0^x f(u) du$$

156

【答案】 B

【分析】 设切点为 (x_0, y_0) , 则因为 $y = x$ 为曲线 $y = a^x$ 的切线,

$$\begin{cases} a^{x_0} = x_0 \\ a^{x_0} \ln a = 1 \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} a^{x_0} \ln a - 1 = 0 \\ x_0 \ln a - 1 = 0 \end{cases}$$

$$x_0 = \frac{1}{\ln a} = \frac{\ln \frac{1}{\ln a}}{\ln a}$$

$$a = e^{\frac{1}{e}}, x_0 = y_0 = e$$

157

【答案】 D

【分析】

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2}$$

因为 $f(0) = 0$, 所以由中值定理知 $f(x) = x f'(\xi)$, 其中 $0 < \xi < x$. 所以

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x}$$

而 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 为严格单调增函数, 所以 $g'(x) < 0$, 函数 $g(x) = \frac{1-f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 为单调减函数.

158 【答案】 C

【分析】 由条件出发, 按导数定义

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

及极限的不等式性质可知, $\exists \delta > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$ 时,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

$\Rightarrow$ 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时 $f(x) - f(x_0) > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时 $f(x) - f(x_0) < 0$.
因此, 选(C).

【评注】 (1) 前面的分析方法, 给出了证明如下结论:

设 $f'(x_0) > 0$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时 $f(x) > f(x_0)$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时 $f(x) < f(x_0)$.

作为选择题, 有时我们可选用特殊选取法. 即特殊选取某具体的 $f(x)$ 满足题中的条件, 若四个选项中, 有三个选项不正确, 一个选项正确, 就选该项即可.

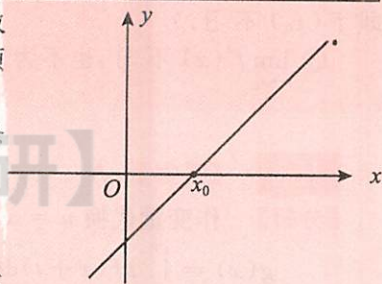
如取 $f(x) = x - x_0$ 如右图, 则 $f'(x) = 1 > 0$, 满足条件. 对此 $f(x)$, 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上单调上升, 且

$$f(x) > f(x_0) = 0 \quad (x \in (x_0, x_0 + \delta)),$$

$$f(x) < f(x_0) = 0 \quad (x \in (x_0 - \delta, x_0)).$$

于是选项(B)、(D) 不正确, 对此 $f(x)$, (A)、(C) 均正确. 但若(A) 正确, 则(C) 一定正确, 由“四选一”原则, (A) 一定不正确, 故选(C).

(2) 若 $f'(x_0) > 0$ 且 $f'(x)$ 在 $x = x_0$ 连续 $\Rightarrow \exists \delta > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时 $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 单调上升.



159 【答案】 A

【分析】 因 $f'(a) = 0$ 于是有 $(a-1)f''(a) = 1 - e^{1-a}$

显然

$$f''(a) = \frac{e^{1-a} - 1}{1-a} > 0$$

所以, $x = a$ 是极小值点. 选(A).

【评注】 对 $\forall x, e^x - 1 > x$, (令 $F(x) = e^x - 1 - x, F'(x) = e^x - 1$) $\begin{cases} < 0, & x < 0 \\ = 0, & x = 0 \\ > 0, & x > 0 \end{cases}$,
 $\Rightarrow F(x) > F(0) = 0 (x \neq 0)$.

160 【答案】 B

【分析】 方法1 因 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f''(x)}{(x-1)^2} = \frac{1}{2} > 0$, 由极限的保号性质, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x-1| < \delta$ 时 $\frac{f''(x)}{(x-1)^2} > 0$, 又因 $(x-1)^2 > 0 (x \neq 1)$, 所以当 $0 < |x-1| < \delta$ 时, $f''(x) > 0$.

0, 因此 $f'(x)$ 在 $(1-\delta, 1+\delta)$ 单调递增, 从而当 $1-\delta < x < 1$, $f'(x) < f'(1) = 0$, 当 $1 < x < 1+\delta$, $f'(x) > f'(1) = 0$, 由取得极值的充分条件, $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极小值. 因此选(B).

【评注】 由当 $0 < |x-1| < \delta$ 时, $f''(x) > 0$ 可以断定 $(1, f(1))$ 肯定不是曲线的拐点, 因 $f''(x)$ 在 $x=1$ 的两侧没有改变符号.

方法 2 由前面分析知, $f(x)$ 在 $(1-\delta, 1+\delta)$ 为凹函数, 直接由凹函数的特征知, $f(x) > f(1) + f'(1)(x-1) = f(1)$ ($x \in (1-\delta, 1+\delta), x \neq 1$). 选(B).

方法 3 特殊选取 $f(x)$ 满足: $f''(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2$.

取 $f(x) = \frac{1}{24}(x-1)^4$, 则 $f(x)$ 满足题中条件, $f(x)$ 在 $x=1$ 处取极小值, 而其余均不正确. 因此选(B).

161 【答案】 C

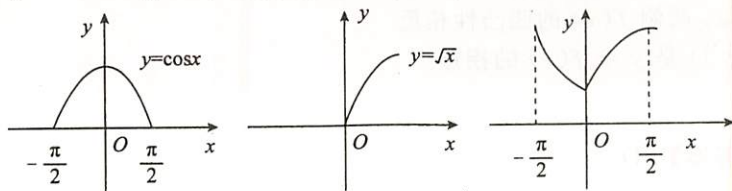
【分析】 方法 1 显然 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续. 只须考察 $f(x)$ 在 $x=0$ 某空心邻域如 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $x \neq 0$ 时 $f'(x)$ 与 $f''(x)$ 的变化.

$$f'(x) = \begin{cases} \sin x < 0, & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} > 0, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases},$$

$$f''(x) = \begin{cases} \cos x > 0, & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} < 0, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

由此可得 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 且 $(0, 1)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点. 因此选(C).

方法 2 由 $y = \cos x$, $y = \sqrt{x}$ 的图形可得 $y = f(x)$ 的图形.



因此选(C).

【评注】 (1) 只须考察 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的连续性及 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 两侧 $f'(x)$, $f''(x)$ 是否变号, 而不须考虑 $f'(x_0)$, $f''(x_0)$ 是否存在就可判定 $x=x_0$ 是否是 $f(x)$ 的极值点与拐点. 本题中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 $f'(0)$, $f''(0)$ 不 $\exists$. 但它们在 $x=1, x=0$ 分别均连续.

(2) $f(x)$ 在 $x=x_0$ 不可导, $x=x_0$ 与 $(x_0, f(x_0))$ 可以同时是 $y=f(x)$ 的极值点与拐点. 本题就是如此. 但对于可导函数, 可以证明: 若 $(x_0, f(x_0))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点, 则 $x=x_0$ 不可能是 $f(x)$ 的极值点.

162 【答案】 D

【分析】 方法 1 若在 $(-\infty, +\infty)$ 上 $f'(x) > 0$, 则一定有 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单

调增加,但可导函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调增加,只能有 $f'(x) \geq 0$ (即可能在某些点上 $f'(x) = 0$),例如 $f(x) = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加, $f'(0) = 0$. 因此不选(A).

$f(x)$ 若在 x_0 处取得极值,且 $f'(x_0)$ 存在,则有 $f'(x_0) = 0$,但当 $f(x)$ 在 x_0 处取得极值,在 x_0 处不可导,就得不到 $f'(x_0) = 0$,例如 $f(x) = |x|$ 在 $x_0 = 0$ 处取得极小值,它在 $x_0 = 0$ 处不可导,因此不选(B).

如果 $f(x)$ 在 x_0 处二阶导数存在,且 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线的拐点坐标,则 $f''(x_0) = 0$,反之不一定,例如 $f(x) = x^4$ 在 $x_0 = 0$ 处 $f''(0) = 0$,但 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 没有拐点,因此不选(C). 由上分析,应选(D).

方法2 可以证明(D)是正确的.

不妨设 $f'''(x_0) > 0$. 由带佩亚诺余项的泰勒公式得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + o((x - x_0)^3) \quad (x \rightarrow x_0)$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^3 \left[\frac{1}{3!}f'''(x_0) + o(1) \right]$$

当 $x \rightarrow x_0$ 时 $o(1)$ 为无穷小量.

由极限的保号性质 $\Rightarrow \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $\frac{1}{3!}f'''(x_0) + o(1) > 0$

$\Rightarrow x_0 - \delta < x < x_0$ 时 $f(x) - f(x_0) < 0$, $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时 $f(x) - f(x_0) > 0$. 因此 $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值.

【评注】 可以证明满足(D)的条件的点 $(x_0, f(x_0))$ 是 $y = f(x)$ 的拐点. 不妨设 $f'''(x_0) > 0$. 写出 $f''(x)$ 的带佩亚诺余项的泰勒公式

$$\begin{aligned} f''(x) &= f''(x_0) + f'''(x_0)(x - x_0) + o((x - x_0)) \\ &= (x - x_0)[f'''(x_0) + o(1)] \quad (x \rightarrow x_0) \end{aligned}$$

由极限的保号性质 $\Rightarrow \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $f'''(x_0) + o(1) > 0$

$\Rightarrow x_0 - \delta < x < x_0$ 时 $f''(x) < 0$, $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时 $f''(x) > 0$

$\Rightarrow$ 在 $x = x_0$ 两侧 $f(x)$ 的凹凸性相反

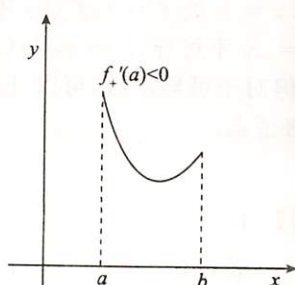
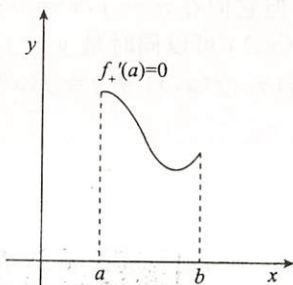
$\Rightarrow (x_0, f(x_0))$ 是 $y = f(x)$ 的拐点.

163 【答案】 D

【分析】 方法1 考察 $f'_+(a)$.

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0. \text{ 选(D).}$$

方法2



由 $f'_+(a)$ 的几何意义可知, 应选(D).

【评注】 最值点处的导数性质:

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可导, $f(c) = \max_{[a, b]} f(x)$ 或 $f(c) = \min_{[a, b]} f(x)$.

(1) 若 $c \in (a, b)$, 则 $f'(c) = 0$.

(2) 若 $c = a, f(a) = \max_{[a, b]} f(x)$, 则 $f'_+(a) \leq 0$,

$f(a) = \min_{[a, b]} f(x)$, 则 $f'_+(a) \geq 0$.

(3) 若 $c = b, f(b) = \max_{[a, b]} f(x)$, 则 $f'_-(b) \geq 0$,

$f(b) = \min_{[a, b]} f(x)$, 则 $f'_-(b) \leq 0$.

164 【答案】 B

【分析】 设 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}, x \geq 1$, 考察 $f(x)$ 的单调性并求 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 的最大值.

$$f'(x) = (e^{\frac{1}{x} \ln x})' = x^{\frac{1}{x}} \frac{1 - \ln x}{x^2} \begin{cases} > 0, 1 \leq x < e \\ = 0, x = e \\ < 0, x > e \end{cases}.$$

于是 $1 \leq x \leq e$ 时 $f(x) \nearrow$, 当 $x \geq e$ 时 $f(x) \searrow$. 因此在 $x = e$ 两侧的数列项是 $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt[3]{3}$, $x = e$ 是 $f(x)$ 的最大值点.

比较 $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt[3]{3}$ 的值 $\sqrt{2} = \sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9} = \sqrt[3]{3}$.

所以数列的最大项为 $\sqrt[3]{3}$. 选(B).

【评注】 不能对 $f(n) = n^{\frac{1}{n}} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 求导, 因为数列没有导数概念.

165 【答案】 C

【分析】 令 $f'(x) = 3ax^2 - 12ax = 3ax(x - 4) = 0$ 得 $x_1 = 0, x_2 = 4$ (不合题意舍去)
 $f(0) = b, f(-1) = -7a + b, f(2) = -16a + b$, 由于 $a > 0$; 所以, $f(0)$ 是最大值, $f(2)$ 是最小值.

$$\begin{cases} f(0) = b = 3 \\ f(2) = -16a + b = -29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 2 \end{cases}$$

所以选(C).

166 【答案】 D

【分析】 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$, 在参数 $t = \frac{\pi}{2}$ 对应的点处 $\frac{dy}{dx} = 1$;

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(\frac{\sin t}{1 - \cos t})}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2}$, 在参数 $t = \frac{\pi}{2}$ 对应的点处 $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{a}$;

曲率为 $\frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}a}$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

167 【答案】 C

【分析】 方法1 举例否定错误的命题.

$f(x) = \frac{1}{x-a}, f'(x) = -\frac{1}{(x-a)^2}$, 它们在 (a, b) 均连续且无界. (A)、(B) 不正确.

$f(x) = \sqrt{x-a}$ 在 (a, b) 有界, 但 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-a}}$ 在 (a, b) 无界. (D) 不正确. 应选(C).

方法2 联系 $f'(x)$ 与 $f(x)$ 的是拉格朗日中值定理. 取定 $x_0 \in (a, b)$, 则由拉格朗日中值定理知, 对 $\forall x \in (a, b), \exists \xi$ 在 x 与 x_0 之间使得

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$$

于是

$$|f(x)| \leq |f(x_0)| + |f'(\xi)| |x - x_0| \leq |f(x_0)| + M |b - a| \quad (x \in (a, b))$$

其中 $|f'(\xi)| \leq M (x \in (a, b))$. 因此 $f(x)$ 在 (a, b) 有界. 选(C).

168 【答案】 D

【分析】 设 $f(x) = x$, 则 $f'(x) = 1$ 在 $(a, +\infty)$ 有界, 但 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 无界.

设 $f(x) = \sin x^2$, 则 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 有界, 但 $f'(x) = 2x \cos x^2$ 在 $(a, +\infty)$ 无界.

$(x_n = \sqrt{n\pi})$ 时 $f'(x_n) = 2\sqrt{n\pi} \cos n\pi = (-1)^n 2\sqrt{n\pi} \rightarrow \infty$. 因此选(D).

【评注】 此题说明, 在无穷区间上可导函数 $f(x)$ 的有界性与 $f'(x)$ 的有界性无确定性的关系. 但在有界区间 (a, b) 上, 前题说明 $f'(x)$ 的有界性保证了 $f(x)$ 的有界性, 反之则不一定.

169 【答案】 C

【分析】 只须考察 $f''(x) = 0$ 的点与 $f''(x)$ 不存在的点.

$f''(x_1) = f''(x_4) = 0$, 在 $x = x_1, x_4$ 两侧 $f''(x)$ 变号, 故凹凸性相反, $\Rightarrow (x_1, f(x_1)), (x_4, f(x_4))$ 是 $y = f(x)$ 的拐点.

$x = 0$ 处 $f''(0)$ 不存在, 但 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续, 在 $x = 0$ 两侧 $f''(x)$ 变号, 因此 $(0, f(0))$ 也是 $y = f(x)$ 的拐点.

虽然 $f''(x_3) = 0$, 但在 $x = x_3$ 两侧 $f''(x) > 0, y = f(x)$ 是凹的. $(x_3, f(x_3))$ 不是 $y = f(x)$ 的拐点. 因此总共有三个拐点. 选(C).

170 【答案】 C

【分析】 只须考察 $f''(x) = 0$ 的点, 这里就是 $f'(x)$ 的驻点, 即 $x = x_1, x_3, x_6$, 与 $f''(x)$ 不 $\exists$ 的点, 这就是 $f'(x)$ 的尖点 x_4 .

在 $x = x_1, x_6$ 两侧 $f'(x)$ 的单调性相反, 故凹凸性相反 $\Rightarrow (x_1, f(x_1)), (x_6, f(x_6))$ 是 $y = f(x)$ 的拐点, 在 $x = x_3$ 处, 虽 $f''(x_3) = 0$, 但 $x = x_3$ 两侧 $f'(x)$ 均单调上升即 $x = x_3$ 两侧 $y = f(x)$ 均是凹的, $(x_3, f(x_3))$ 不是 $y = f(x)$ 的拐点. 虽然 $f''(x_4)$ 不 $\exists$, 但 $f(x)$ 在 $x = x_4$ 连续, 在 $x = x_4$ 两侧 $f'(x)$ 的单调性相反, 故凹凸性相反, $(x_4, f(x_4))$ 也是 $y = f(x)$ 的拐点. 因此共有三个拐点. 选(C).

171 【答案】 B

【分析】 $y' = \frac{1}{3}(x-4)^{-\frac{2}{3}}, y'' = -\frac{2}{9}(x-4)^{-\frac{5}{3}}$.

所以当 $y \in (-\infty, 4)$ 时, $y'' > 0$, 曲线凹; 当 $y \in (4, +\infty)$ 时, $y'' < 0$, 曲线凸.
(4, 0) 为拐点.

172 【答案】 C

【分析】 归结为求 $f'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3(1-4x^2)}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}} \\ &= 3 \frac{(1-4x^2)\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-(3x-4x^3)^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}} \quad \left(|x| < \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

考察 $f'(x)$ 的分子:

$$((1-4x^2)\sqrt{1-x^2})^2 = (1-8x^2+16x^4)(1-x^2) = 1-9x^2+24x^4-16x^6$$

$$(\sqrt{1-(3x-4x^3)^2})^2 = 1-9x^2+24x^4-16x^6$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \left(|x| < \frac{1}{2}\right), \text{ 又 } f(x) \text{ (初等函数) 在定义域 } \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \text{ 上连续.}$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ 在 } \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \text{ 为常数.}$$

选(C).

【评注】 (1) $g(x) \stackrel{\text{记}}{=} 3x-4x^3$ 是奇函数, $g'(x) = 3-12x^2 > 0 \left(0 < x < \frac{1}{2}\right) \Rightarrow g(x)$ 在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上 ↗, 又 $g(0) = 0, g\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow |x| \leq \frac{1}{2}$ 时 $|g(x)| \leq 1$, 从而 $\arccos(3x-4x^3)$ 在 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 有定义.

(2) $f(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 上为常数 $f(0) = \pi$.

173 【答案】 A

【分析】 方法 1 为考察 $f(x)$ 与 x 之间的关系, 设 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F'(x) = f'(x) - 1$, $F'(x)$ 在 $(1-\delta, 1+\delta)$ 单调减少, $F'(1) = 0, F(1) = 0$.

当 $x \in (1-\delta, 1)$ 时 $F'(x) > F'(1) = 0$, 因此 $F(x)$ 在 $(1-\delta, 1]$ 内单调递增, $F(x) < F(1) = 0$, 即在 $(1-\delta, 1), F(x) < 0$.

当 $x \in (1, 1+\delta)$ 时, $F'(x) < F'(1) = 0$, 因此 $F(x)$ 在 $[1, 1+\delta)$ 内单调递减, $F(x) < F(1) = 0$, 即在 $(1, 1+\delta)$ 内 $F(x) < 0$. 因此, 选(A).

方法 2 $f'(x)$ 在 $(1-\delta, 1+\delta)$ 严格单调减少 $\Rightarrow f(x)$ 在 $(1-\delta, 1+\delta)$ 是凸的 $\Rightarrow$ 在此区间上, $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 即 $(1, 1)$ 处的切线 $y-1 = f'(1)(x-1)$ 即 $y = x$ 在此曲线的上方(除切点外). 因此

$$f(x) < x \quad (x \in (1-\delta, 1+\delta), x \neq 1).$$

174 【答案】 D

【分析】 只有间断点 $x = \pm 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}} = +\infty$$

$\Rightarrow x = 1$ 与 $x = -1$ 为垂直渐近线.

因为

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \pm 1$$

又

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} - x + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) + 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 0$$

$$\text{同理 } \lim_{x \rightarrow -\infty} (y + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} + x + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \left(\left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) = 0$$

$\Rightarrow x \rightarrow +\infty$ 时有斜渐近线 $y = x$, $x \rightarrow -\infty$ 时有斜渐近线 $y = -x$.

因此选(D).

【评注】 同是 $x \rightarrow +\infty$ (或 $x \rightarrow -\infty$), 如果曲线有斜渐近线就不可能有水平渐近线, 如果曲线有水平渐近线, 就不可能有斜渐近线.

175 【答案】 D

【分析】 $f(x)$ 为连续的偶函数, $f(0) = 1$, 故只需讨论 $(0, 2\pi)$ 内零点的个数. 用单调性分析方法. 先考察

$$f'(x) = x \cos x \begin{cases} > 0 & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ = 0 & x = \frac{\pi}{2} \\ < 0 & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi \\ = 0 & x = \frac{3}{2}\pi \\ > 0 & \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上 $\nearrow$, 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$ 上 $\searrow$, 在 $\left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$ 上 $\nearrow$. 又

$$f(0) = 1, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -\frac{3}{2}\pi, f(2\pi) = 1,$$

由此可知, $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 无零点, 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$ 和 $\left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$ 均单调且端点函数值异号, 因而各

有唯一零点, 所以 $f(x)$ 在 $(-2\pi, 2\pi)$ 内共有 4 个零点.

176 【答案】 C

【分析】 方法 1 因 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 (a, b) 上的一个原函数, 所以 $F'(x) = f(x)$, 因此 $F(x)$ 在 (a, b) 上连续, 于是 $F(x)$ 在 (a, b) 上存在原函数, 从而 $f(x) + F(x)$ 在 (a, b) 上存在原函数. 因此选(C).

方法 2 函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上存在原函数, $f(x)$ 在 (a, b) 上可能不连续, 例如

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad F'(x) = f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续. 函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上存在原函数, 又因 $F(x)$ 在 (a, b) 上连续, 因此 $F(x) + f(x)$ 在 (a, b) 不连续, 所以不选(B) 从而也不选(A).

$f(x) + F(x)$ 不一定是初等函数, 例如 $f(x) = e^{x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在一个原函数 $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$, 它不是初等函数 $\Rightarrow F(x) + f(x)$ 不是初等函数, 因此不选(D).

【评注】 关于 $f(x)$ 在 (a, b) 上有原函数 $F(x)$, 要注意以下几点: 在 (a, b) 上

- (1) $f(x)$ 不一定连续;
- (2) $f(x)$ 不一定是初等函数;
- (3) $F(x)$ 不一定是初等函数;
- (4) 由原函数定义, $F'(x) = f(x)$, 因而 $F(x)$ 连续.

177 【答案】 B

【分析】 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 有界, 只有一个间断点 $x=0 \Rightarrow f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 可积 $\Rightarrow F(x)$ 在 $[-1, 1]$ 连续, 因而有界. 选(B).

178 【答案】 A

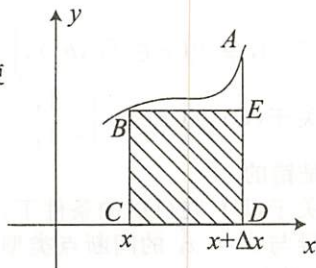
【分析】 方法 1 由积分中值定理 $\Rightarrow \exists \xi \in (x, x+\Delta x)$ 使得

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(\xi) \Delta x > f(x) \Delta x > 0$$

($f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ 是单调增加的).

因此选(A).

方法 2 由定积分的几何意义来分析, 曲线 $y = f(x)$ 在 x 轴上方且单调增加 $\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt$ 是曲边梯形 ABCD 的面积, $f(x) \Delta x$ 是矩形 BCDE 的面积, 因此 $\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt > f(x) \Delta x > 0$. 选(A).



179 【答案】 C

【分析】 由题目的设置可知, 这四个命题中有两个是正确的, 两个是错误的.

方法 1 由“若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |a|$ ”可得“若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则

$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |f(x_0)|$, 因此, 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续, 则 $|f(x)|$ 在 $x = x_0$ 连续, 即 ② 正确.

由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界, 只有有限个间断点, 则 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 也有界, 也只有有限个间断点(因 $f(x)$ 的连续点必是 $|f(x)|$ 的连续点), 因而 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 可积即 ④ 正确. 选(C).

方法2 ① 是不正确的, 例如, $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x \leq 0 \end{cases}$, 在 $x = 0$ 间断, 但 $f^2(x) = 1$ 在 $x = 0$ 连续. ③ 也是错的, 例如 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ -1, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$, 则 $\int_a^b f(x) dx$ 不存在(易构造两个积分和有不同极限), 但 $|f(x)| = 1$ 在 $[a, b]$ 可积. 因此, 只能是 ②, ④ 正确, 选(C).

180 【答案】 C

【分析】 方法1 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上定积分的必要条件是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界. 因此, 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 无界, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不定积分.

函数(C) 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 无界 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上不定积分. 选(C).

方法2 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积的充分条件是: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界, 至多有有限个间断点. $\Rightarrow$ (A)、(B)、(D) 函数在指定区间可积. 因此选(C).

181 【答案】 B

【分析】 方法1 (B) 正确.

这是线性性质的体现. 若 $f(x) + g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 因 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 由线性性质知, $g(x) = [f(x) + g(x)] - f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积, 与已知 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上不可积矛盾了. 因此 $f(x) + g(x)$ 在 $[a, b]$ 上不可积. 选(B).

方法2 (A)、(C)、(D) 是错的.

关于(A), $f(x) \geq 0, \neq 0 (x \in [a, b]) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0, \neq \int_a^b f(x) dx > 0$. 例如

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a, b] \setminus \{x_0\} \\ 1, & x = x_0 \end{cases}, \text{ 其中 } x_0 \in [a, b]$$

$f(x) \geq 0, \neq 0 (x \in [a, b]), \int_a^b f(x) dx = 0$. 因此(A) 是错的.

关于(C), $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为无理数} \\ -1, & x \text{ 为有理数} \end{cases}, f^2(x) = 1, \int_a^b f^2(x) dx \exists, \text{ 但 } \int_a^b f(x) dx \text{ 不 } \exists$. 因此(C) 是错的.

关于(D), 在(D) 的条件下, $F(x)$ 在 $[a, b]$ 处处连续, $x \neq x_0$ 时可导. $F(x)$ 在 $x = x_0$ 处是否可导与 $x = x_0$ 的间断点类型有关. 若 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点, 则 $F(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导. 因为

$$F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(F(x) - F(x_0))'}{(x - x_0)'} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) (\exists) \neq f(x_0)$$

因此(D) 不正确. 选(B).

【评注】 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续且 $f(x) \geq 0, \neq 0$, 则 $\int_a^b f(x) dx > 0$.

证明: 此时必存在 $x_0 \in (a, b), f(x_0) > 0$, 由连续函数的性质, 存在 $\delta > 0$, 在 $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ 上 $f(x) > 0$, 因此

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x) dx > 0$$

182 【答案】 C

【分析】 我们要逐一分析.

结论 ① 正确. 由条件 $\Rightarrow \int_a^x f(t)dt = 0 (\forall x \in [a, b])$

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x) = 0 (x \in [a, b])$$

结论 ② 正确. 由条件 $\Rightarrow$

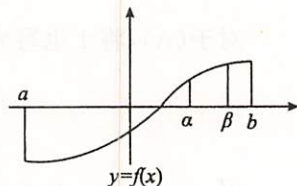
$$0 \leq \int_a^x f(t)dt \leq \int_a^b f(x)dx = 0 (\forall x \in [a, b])$$

$$\Rightarrow \int_a^x f(t)dt = 0 (x \in [a, b]) \Rightarrow f(x) = 0 (x \in [a, b]).$$

结论 ③ 错误, 如图所示, 由定积分几何意义知,

$$\int_a^\alpha f(x)dx < 0, \int_\beta^b f(x)dx > 0, \text{ 其中 } [\alpha, \beta] \subset [a, b].$$

因此选(C).



【评注】 结论 ①、② 的证明也可用反证法.

若 $f(x) \not\equiv 0 (x \in [a, b])$, 则 $\exists x_0 \in (a, b), f(x_0) \neq 0$, 不妨设 $f(x_0) > 0$, 由连续性 $\Rightarrow \exists \delta > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ 时 $f(x) > 0$

$$\Rightarrow \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx > 0$$

与 ① 中 $[a, b]$ 的 $\forall$ 子区间 $[\alpha, \beta]$ 上 $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$ 矛盾了, 因此只能是

$$f(x) = 0 (\forall x \in [a, b])$$

在 ② 中此时

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^{x_0-\delta} f(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + \int_{x_0+\delta}^b f(x)dx \\ &\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx > 0 \end{aligned}$$

与 $\int_a^b f(x)dx = 0$ 矛盾了. 因此 $f(x) = 0 (\forall x \in [a, b])$.

183 【答案】 C

【分析】 下面来证明(C) 不正确.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx + \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx,$$

对于第 2 个积分, 作变量变换, 命 $x = \pi + t$, 当 $x = \pi$ 时 $t = 0$; $x = 2\pi$ 时 $t = \pi$, 于是

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx + \int_0^\pi \frac{\sin(\pi+t)}{\pi+t} dt \\ &= \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx - \int_0^\pi \frac{\sin t}{\pi+t} dt \\ &= \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx - \int_0^\pi \frac{\sin x}{\pi+x} dx \\ &= \int_0^\pi \frac{\pi \sin x}{x(x+\pi)} dx > 0. \end{aligned}$$

【评注】(1) 考查积分 $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ 时, 在区间 $[0, 2\pi]$ 上, 被积函数 $\frac{\sin x}{x}$ 有正有负, 应将 $[0, 2\pi]$ 划分成两个区间, 使 $\frac{\sin x}{x}$ 正、负分清, 然后再用积分变量变换, 将两个积分的上、下限定成为相同, 然后合并考查被积函数的符号, 一般就可断定该积分的值的符号了, 这是处理积分不等式的一个常用办法, 如本题(C).

(2) 下面证明(A)、(B)、(D) 都正确.

对于(A), 将 1 也写为 0 到 $\frac{\pi}{4}$ 的一个积分 $1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4}{\pi} dx$, 于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} dx - 1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\tan x}{x} - \frac{4}{\pi} \right) dx.$$

记 $\varphi(x) = \frac{\tan x}{x} - \frac{4}{\pi}, x \in (0, \frac{\pi}{4})$. 有 $\varphi(\frac{\pi}{4}) = 0$,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{x \sec^2 x - \tan x}{x^2} = \frac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x} \\ &= \frac{2x - \sin 2x}{2x^2 \cos^2 x} > 0 \text{ (当 } 0 < x < \frac{\pi}{4} \text{)}. \end{aligned}$$

所以当 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时 $\varphi(x) < 0$, 从而 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} dx - 1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\tan x}{x} - \frac{4}{\pi} \right) dx < 0$, (A) 正确.

对于(B), 由于被积函数为以 2π 为周期的偶函数, 所以

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos x \cdot \ln(2 + \cos x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cdot \ln(2 + \cos x) dx \\ &= 2 \int_0^{\pi} \cos x \cdot \ln(2 + \cos x) dx \\ &= 2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \ln(2 + \cos x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \cdot \ln(2 + \cos x) dx \right]. \end{aligned}$$

对后一积分作积分变量变换 $x = \pi - t$, 于是当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时 $t = \frac{\pi}{2}$; $x = \pi$ 时 $t = 0$.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \cdot \ln(2 + \cos x) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos t \cdot \ln(2 - \cos t) dt,$$

于是 $\int_0^{2\pi} \cos x \cdot \ln(2 + \cos x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \ln \frac{2 + \cos x}{2 - \cos x} dx > 0$, (B) 正确.

对于(D), 将右边 1 也写成积分: $1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} dx$, 为证 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx > 1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} dx$, 只要证明在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上 $\frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi}$. 命

$$\varphi(x) = \frac{\sin x}{x} - \frac{2}{\pi}, x \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

有 $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 0, \varphi'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x \cdot (x - \tan x)}{x^2} < 0$, 所以当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$

时 $\varphi(x) > 0$. 于是 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx > 1$. 证毕.

以上证明中(A)与(D)用的是同一个方法, (B)与(C)是另一个方法, 这些方法希望读者掌握.

184 【答案】 C

【分析】 当 $1 < x \leq 2$ 时,

$$1+x < 1+x^2$$

$$\sqrt[3]{x} < \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow (1+x)\sqrt[3]{x} < (1+x^2)\sqrt[3]{x} < (1+x^2)\sqrt{x}$$

$$\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{x}} < \frac{1}{(1+x^2)\sqrt[3]{x}} < \frac{1}{(1+x)\sqrt[3]{x}} \quad (1 < x \leq 2)$$

而 $x=1$ 时它们相等. 于是

$$\int_1^2 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{x}} dx < \int_1^2 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt[3]{x}} dx < \int_1^2 \frac{1}{(1+x)\sqrt[3]{x}} dx$$

即 $K < J < I$

选(C).

185 【答案】 A

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } I_1 - I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+x^a} (\cos x - \sin x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^a} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+x^a} (\cos x - \sin x) dx. \end{aligned}$$

对于后者作积分变量变换, 命 $x = \frac{\pi}{2} - t$,

$$I_1 - I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^a} (\cos x - \sin x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+(\frac{\pi}{2}-t)^a} (\sin t - \cos t) dt.$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) \left(\frac{1}{1+x^a} - \frac{1}{1+(\frac{\pi}{2}-x)^a} \right) dx$$

当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 时, $\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \frac{\pi}{2}$. 有

$$\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2 > x^2, \quad (\text{当 } x \neq \frac{\pi}{4} \text{ 时}),$$

又当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 时, $\cos x - \sin x > 0$ (当 $x \neq \frac{\pi}{4}$). 所以

$$I_1 - I_2 > 0.$$

选(A).

【评注】 比较两个积分的大小, 其中一个办法是, 在同一区间比较而被积函数的大小. 若在该区间上, 两被积函数有时大有时小, 则划分区间使在小区间上能明确被积函数的大小.

186 【答案】 D

【分析】 必须逐一分析

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

(1) $\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}}x$ 仅在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是被积函数的原函数, 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上的原函数是 $-\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}}x$. 因此这里的做法是错误的.

(2) $\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 无定义, 在 $[-1, 1]$ 上无界, 不存在定积分, 这里错误地应用了牛顿-莱布尼茨公式.

(3) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}}$ 不是整个区间 $[0, \pi]$ 上的原函数, 它在 $x = \frac{\pi}{2}$ 无定义, 只是 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 与 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上的原函数, 不能在 $[0, \pi]$ 上用牛顿-莱布尼茨公式.

(4) $f(x) = \frac{d}{dx}\left(\arctan \frac{1}{x}\right)$ 在 $x=0$ 无定义, 可任意补充定义 $f(0)$ 后, $\arctan \frac{1}{x}$ 仍不是 $f(x)$ 在整个区间 $[-1, 1]$ 上的原函数, 因为它在 $x=0$ 无定义, 因此不能在 $[-1, 1]$ 上用牛顿-莱布尼茨公式.

因此选(D).

【评注】 改正错误.

$$\begin{aligned} (1) \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} dx &= \int_0^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x |\cos x| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x d\sin x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x d\sin x \\ &= \frac{2}{5} \sin^{\frac{5}{2}} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{5} \sin^{\frac{5}{2}} x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

(2) $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $[-1, 1]$ 上无界, 它在 $[-1, 1]$ 上不存在定积分(作为反常积分, 它也是发散的).

(3) 先分段积分, 然后用推广的牛顿-莱布尼茨公式.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{\sec^2 x}{2 + \tan^2 x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{2 + \tan^2 x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sec^2 x}{2 + \tan^2 x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}-} + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}} \Big|_{\frac{\pi}{2}+}^{\pi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi. \end{aligned}$$

另解. 被积函数以 π 为周期且为偶函数.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{\sec^2 x}{2 + \tan^2 x} dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{2 + \tan^2 x} dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{2 + \tan^2 x} dx \\ &= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}-} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\arctan \frac{1}{x} \right) dx &= \int_{-1}^0 \frac{d}{dx} \left(\arctan \frac{1}{x} \right) dx + \int_0^1 \frac{d}{dx} \left(\arctan \frac{1}{x} \right) dx \\
 &= \arctan \frac{1}{x} \Big|_{-1}^{0^-} + \arctan \frac{1}{x} \Big|_{0^+}^1 \\
 &= -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

187 【答案】 B

【分析】 方法 1

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^\pi x |\cos x| \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \sin x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi x \cos x \sin x dx \\
 &= -\frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d\cos 2x + \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi x d\cos 2x \\
 &= -\frac{1}{4} x \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx + \frac{1}{4} x \cos 2x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^\pi - \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos 2x dx \\
 &= \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

方法 2

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^\pi x \cos x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(t + \frac{\pi}{2} \right) \sqrt{\cos^2 \left(t + \frac{\pi}{2} \right) - \cos^4 \left(t + \frac{\pi}{2} \right)} dt \\
 &= 0 + \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t - \sin^4 t} dt \\
 &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = \pi \frac{1}{2} \sin^2 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

188 【答案】 B

【分析】 方法 1 分母先配方后再作平移变换

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t + \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4} - t^2}} dt \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{4} - t^2}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d(2t)}{\sqrt{1 - (2t)^2}} = \arcsin 2t \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

选(B).

方法 2 先改写成

$$I = \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$$

令 $\sqrt{\frac{x}{1-x}} = t$, 解出 $x = \frac{t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$, $dx = \frac{2t}{(1+t^2)^2} dt$

$$I = \int_0^{+\infty} t \cdot \frac{2t}{(1+t^2)^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt = - \int_0^{+\infty} t d \frac{1}{1+t^2}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$= -\frac{t}{1+t^2} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

选(B).

方法3 令 $x = \sin^2 t$, 则

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t \cdot 2 \sin t \cos t dt}{\sqrt{\sin^2 t (1 - \sin^2 t)}} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

选(B).

189 【答案】 B

【分析】 先改写成

$$I = \int_0^1 x^4 \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

再作三角函数代换 $x = \sin t$, 则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \frac{1+\sin t}{\cos t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t dt \\ &= \frac{3 \times 1}{4 \times 2} \times \frac{\pi}{2} + \frac{4 \times 2}{5 \times 3 \times 1} = \frac{3}{16} \pi + \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

选(B).

190 【答案】 B

【分析】 被积函数 $f(x) = x^n \ln^m x$ 虽在 $x=0$ 无定义, 但 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln^m x = 0$, 若补充定义 $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 因而 $\int_0^1 x^n \ln^m x dx$ 是定积分.

$$\begin{aligned} I_{n,m} &= \frac{1}{n+1} \int_0^1 \ln^m x dx^{n+1} = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln^m x \Big|_0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} m \ln^{m-1} x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= -\frac{m}{n+1} \int_0^1 x^n \ln^{m-1} x dx = -\frac{m}{n+1} I_{n,m-1} \end{aligned}$$

反复用此递推公式得

$$\begin{aligned} I_{n,m} &= \left(-\frac{m}{n+1}\right) \left(-\frac{m-1}{n+1}\right) I_{n,m-2} \\ &= \left(-\frac{m}{n+1}\right) \left(-\frac{m-1}{n+1}\right) \left(-\frac{m-2}{n+1}\right) \cdots \left(-\frac{1}{n+1}\right) I_{n,0} \\ &= (-1)^m \frac{m!}{(n+1)^{m+1}}, \text{ 其中 } I_{n,0} = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

因此选(B).

【评注】 对 $\forall$ 常数 $\alpha > 0$ 与 β

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln^\beta x = 0.$$

【证明】 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{-1}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0$

若 $\beta > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln^\beta x = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{\frac{\alpha}{\beta}} \ln x)^{\frac{1}{\beta}} = 0$

若 $\beta \leq 0$ 显然成立.

191 【答案】 B

$$\begin{aligned}
 \text{【分析】 } \int x f'(x) dx &= \int x df(x) = x f(x) - \int f(x) dx \\
 &= x(\sin x \ln |x|)' - \sin x \ln |x| + C \\
 &= x(\cos x \ln |x| + \frac{\sin x}{x}) - \sin x \ln |x| + C \\
 &= x \cos x \ln |x| + \sin x - \sin x \ln |x| + C
 \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \ln |x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases} \Rightarrow (\ln |x|)' = \frac{1}{x}$$

因此选(B).

【评注】 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则

$$F'(x) = f(x), \int f(x) dx = F(x) + C, C \text{ 为任意常数.}$$

192 【答案】 A

$$\begin{aligned}
 \text{【分析】 } \frac{d}{dx} \int_{2x}^{\ln x} \ln(1+t) dt &= \ln(1+\ln x) \cdot (\ln x)' - \ln(1+2x) \cdot (2x)' \\
 &= \ln(1+\ln x) \cdot \frac{1}{x} - \ln(1+2x) \cdot (2) \\
 &= \frac{1}{x} \ln(1+\ln x) - 2 \ln(1+2x)
 \end{aligned}$$

因此选(A).

193 【答案】 B

【分析】 先求

$$F'(x) = \int_0^{x^2} \ln(1+t^2) dt$$

再求

$$F''(x) = 2x \ln(1+x^4) \begin{cases} > 0, & x > 0 \\ = 0, & x = 0 \\ < 0, & x < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow y = F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 是凸的, 在 $(0, +\infty)$ 是凹的. 因此, 选(B).

194 【答案】 B

【分析】 方法1 先求出 $F(x)$, 再判断.

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } F(x) = \int_0^x \sqrt{4+t} dt = \frac{2}{3} [(4+x)^{\frac{3}{2}} - 8].$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } F(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0.$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } F(x) = \int_0^x \sqrt{1-t} dt = \frac{2}{3} [1 - (1-x)^{\frac{3}{2}}].$$

所以

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} [(4+x)^{\frac{3}{2}} - 8], & x \geq 0 \\ \frac{2}{3} [1 - (1-x)^{\frac{3}{2}}], & x \leq 0 \end{cases}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

(这里 $F(x)$ 在 $x=0$ 处自然连续拼接).

$$F'_+(0) = \left(\frac{2}{3} [(4+x)^{\frac{3}{2}} - 8] \right)' \Big|_{x=0} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} (4+x)^{\frac{1}{2}} \Big|_{x=0} = 2$$

$$F'_-(0) = \left(\frac{2}{3} [1 - (1-x)^{\frac{3}{2}}] \right)' \Big|_{x=0} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} (1-x)^{\frac{1}{2}} \Big|_{x=0} = 1$$

$F'_+(0) \neq F'_-(0)$, $F(x)$ 在 $x=0$ 不可导, 选(B).

方法2 不必求出 $F(x)$. 利用已知结论来判断: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 则 $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ 在 $[a, b]$ 可导且 $F'(x) = f(x)$ ($x \in [a, b]$), x_0 是 $[a, b]$ 某定点. (这里端点 a, b 当然是单侧导数, 即 $F'_+(a) = f(a)$, $F'_-(b) = f(b)$).

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{4+t} dt (x \geq 0), \sqrt{4+t} \text{ 在 } [0, +\infty) \text{ 连续} \Rightarrow F'_+(0) = \sqrt{4+x} \Big|_{x=0} = 2$$

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{1-t} dt (x \leq 0), \sqrt{1-t} \text{ 在 } (-\infty, 0] \text{ 连续} \Rightarrow F'_-(0) = \sqrt{1-x} \Big|_{x=0} = 1$$

$\Rightarrow F'_+(0) \neq F'_-(0)$, $F(x)$ 在 $x=0$ 不可导, 选(B).

方法3 按一般性结论: $x_0 \in (a, b)$, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 除 x_0 外连续且在 $[a, b]$ 有界, 考察 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, 则

(1) $F'(x) = f(x)$ ($x \in [a, b], x \neq x_0$).

(2) 若 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点, 则 $F'_\pm(x_0)$ 均存在但不相等. ($F'_\pm(x_0) = f(x_0^\pm)$).

(3) 若 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点, 则 $F'(x_0)$ 存在但 $F'(x_0) \neq f(x_0)$ 或 $f(x_0)$ 无定义.

该题中, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 除 $x=0$ 外连续, $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点 $\Rightarrow F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 在 $x=0$ 不可导 (因 $F'_+(0) \neq F'_-(0)$), 选(B).

【评注】 定积分的一个性质:

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积且除去有限个点外, $f(x) = g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$$

因此 $\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \sqrt{4+t} dt (x \geq 0)$, 这里 $f(x) = \sqrt{4+x} (x > 0)$, 但 $f(0) \neq \sqrt{4+0}$.

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \sqrt{1-t} dt (x \leq 0)$$

这里 $f(x) = \sqrt{1-x} (x < 0)$, 但 $f(0) \neq \sqrt{1-0}$.

195 【答案】 B

【分析】 方法1 因

$$\int f(x) dx = \int_0^x f(t) dt + C, C \text{ 为任意常数}$$

当 $f(x)$ 为偶函数时 $\int_0^x f(t) dt$ 为奇函数, 仅当 $C=0$ 时 $\int_0^x f(t) dt + C$ 才是奇函数.

因此, $f(x)$ 为偶函数时 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 只有唯一的一个原函数为奇函数即 $\int_0^x f(t) dt$. (B)

是错误的,选(B).

方法2 因

$$\int f(x)dx = \int_0^x f(t)dt + C, C \text{ 为任意常数}$$

当 $f(x)$ 为奇函数时 $\int_0^x f(x)dt$ 为偶函数 $\Rightarrow$ 对 $\forall$ 常数 C , $\int_0^x f(t)dt + C$ 也是偶函数 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[-a, a]$ 的全体原函数均是偶函数 $\Rightarrow$ (A) 正确.

当 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续, 以 T 为周期时,

$$\int_0^x f(t)dt \text{ 以 } T \text{ 为周期} \Leftrightarrow \int_0^T f(t)dt = 0$$

当 $f(x)$ 又是奇函数时

$$\int_0^T f(t)dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = 0$$

$\Rightarrow \int_0^x f(t)dt$ 以 T 为周期. (C) 是正确的.

现考察(D).

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛} &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t)dt \exists \Rightarrow \text{数列极限} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{nT} f(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \int_0^T f(t)dt \right) \exists \\ &\Rightarrow \int_0^T f(t)dt = 0 \Rightarrow \int_0^x f(t)dt \text{ 也以 } T \text{ 为周期. (D) 正确. 因此选(B).} \end{aligned}$$

196

【答案】A

【分析】

令 $g(t) = f(t) - f(-t)$, 则

$$g(-t) = f(-t) - f(t) = -g(t)$$

$$g(t+T) = f(t+T) - f(-(t+T)) = f(t) - f(-t) = g(t)$$

所以 $f(t) - f(-t)$ 是以 T 为周期的连续的奇函数, 考察 $\Phi(x) = \int_a^x [f(t) - f(-t)]dt$.

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \int_a^x [f(t) - f(-t)]dt \\ &= \int_a^0 [f(t) - f(-t)]dt + \int_0^x [f(t) - f(-t)]dt \\ &= C_0 + \int_0^x [f(t) - f(-t)]dt \end{aligned}$$

其中 C_0 为某常数, 它可以认为是以随便什么正数为周期的周期函数也是偶函数.

又 $\int_0^x [f(t) - f(-t)]dt$ 是偶函数, 所以 $\Phi(x)$ 是偶函数, 而 $[f(t) - f(-t)]$ 是以 T 为周期的

周期函数, $\int_0^x [f(t) - f(-t)]dt$ 有周期 $T \Leftrightarrow \int_0^T [f(t) - f(-t)]dt = 0$.

由周期函数的积分性质, 并注意到 $[f(t) - f(-t)]$ 为 t 的奇函数, 有

$$\int_0^T [f(t) - f(-t)]dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [f(t) - f(-t)]dt = 0$$

所以 $\Phi(x) = C_0 + \int_0^x [f(t) - f(-t)]dt$ 为 T 周期的偶函数, 选(A).

【评注】注意到 $[f(t) - f(-t)]$ 为 t 的奇函数是十分关键的一步.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

197 【答案】 A

【分析】 因被积函数是以 π 为周期的函数,它在每个周期上的积分值相等,因此,

$$\begin{aligned} F(x) &= F(0) = \int_0^{\pi} \ln(1 + \cos^2 t) \cos 2t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(1 + \cos^2 t) d\sin 2t \\ &= \frac{1}{2} \ln(1 + \cos^2 t) \sin 2t \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{2\cos t(-\sin t)}{1 + \cos^2 t} \sin 2t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 2t}{1 + \cos^2 t} dt > 0 \text{ (因被积函数连续且大于等于零,不恒为零)} \end{aligned}$$

所以选(A).

198 【答案】 B

【分析】 比较 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x \cos x) \cos x dx$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x \cos x) x \sin x dx$.

$$\begin{aligned} &\text{考察 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x \cos x) \cos x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x \cos x) x \sin x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x \cos x) [\cos x dx + x d\cos x] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x \cos x) d(x \cos x) \\ &= F(x \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = F(0) - F(0) = 0 \end{aligned}$$

其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数.

因此 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x \cos x) x \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x \cos x) \cos x dx = A$

选(B).

199 【答案】 D

【分析】 这是讨论原函数的存在性问题. 我们知道,若 $F(x)$ 在 (a, b) 连续,则 $F(x)$ 在 (a, b) 一定存在原函数,这里 $g(x)$ 在 $(-1, 1)$ 连续,所以 $g(x)$ 在 $(-1, 1)$ 存在原函数.

余下的是 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 是否存在原函数($x = 0$ 是 $f(x)$ 的间断点).

方法1 $f(x)$ 在 $[0, 1)$ 的原函数为 $\frac{1}{3}x^3 + C_1$, 在 $(-1, 0)$ 的原函数为 $\sin x + C_2$, 在 $x = 0$ 处该原函数必连续:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{3}x^3 + C_1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\sin x + C_2)$$

$\Rightarrow C_1 = C_2$. 若 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 存在原函数则应是

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + C_1, & 0 \leq x \leq 1 \\ \sin x + C_1, & -1 < x \leq 0 \end{cases}$$

但此 $F(x)$ 在 $x = 0$ 不可导,因为

$$\begin{aligned} F'_+(0) &= \left(\frac{1}{3}x^3 + C_1 \right)' \Big|_{x=0} = 0, F'_-(0) = (\sin x + C_1)' \Big|_{x=0} = 1, \\ F'_+(0) &\neq F'_-(0). \end{aligned}$$

因此 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 不存在原函数.

选(D).

方法2 因 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, 所以 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 有第一类间断点 $\Rightarrow f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 不存在原函数. 选(D).

【评注】 (1) 设 $f(x)$ 在 $(x_0, x_0 + \delta)$ (或 $(x_0 - \delta, x_0)$) 可导, 在 x_0 右(左)连续, 又 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = A$ ($\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = A$) $\Rightarrow f'_+(x_0) = A$ ($f'_-(x_0) = A$)

$$\text{证明: } f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = A.$$

(2) 设 $f(x)$ 在 (a, b) 可导, $x_0 \in (a, b)$ 是 $f'(x)$ 的间断点, 则 x_0 只能是 $f'(x)$ 的第二类间断点.

证明 若同时存在

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = A^+, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = A^- \Rightarrow f'_+(x_0) = A^+, f'_-(x_0) = A^-$$

由 $f'(x_0) \exists \Rightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0) \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0) \Rightarrow f'(x) \text{ 在 } x = x_0 \text{ 连续. 与已知条件矛盾.}$$

由导函数的这一性质立即得出, 若 $f(x)$ 在 (a, b) 上存在第一类间断点, 则它不存在原函数.

200 【答案】 C

【分析】
$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+4}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+16}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+4n^2}}$$

$$= \frac{1}{n} \left[\frac{1}{\sqrt{1+4\left(\frac{1}{n}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+4\left(\frac{2}{n}\right)^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+4\left(\frac{n}{n}\right)^2}} \right]$$

这是 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$ 在 $[0, 1]$ 区间上的一个积分和.

$$x_n = \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right] = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \frac{1}{n}$$

其中积分区间 $[0, 1]$ 是 n 等分后, 每个小区间是 $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ ($i=1, 2, 3, \cdots, n$), ξ_i 是小区间的右端点.

由于 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 可积, 因此

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}} = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \\ &= \frac{1}{2} \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{5}). \end{aligned}$$

201 【答案】 C

【分析】 $|\sin x|$ 以 π 为周期, 它在每个周期上的积分相等, 等于 $\int_0^\pi |\sin x| dx = 2$, 因此

$$\frac{\int_0^{n\pi} |\sin x| dx}{(n+1)\pi} = \frac{n \int_0^\pi |\sin x| dx}{(n+1)\pi} = \frac{2n}{(n+1)\pi}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{n\pi} |\sin x| dx}{(n+1)\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \cdot \frac{2}{\pi} \right) = \frac{2}{\pi}$$

选(C).

【评注】(1) 利用本题的方法,再结合适当放大缩小法可求得函数极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x |\sin t| dt}{x}$$

当 $n\pi \leq x \leq (n+1)\pi$

$$2n = \int_0^{n\pi} |\sin x| dx \leq \int_0^x |\sin x| dx \leq \int_0^{(n+1)\pi} |\sin x| dx = 2(n+1)$$

所以有

$$\frac{2n}{(n+1)\pi} \leq \frac{\int_0^x |\sin x| dx}{x} \leq \frac{2(n+1)}{n\pi}$$

注意, $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow n \rightarrow \infty$. 在上式中,令 $n \rightarrow \infty$,得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x |\sin x| dx}{x} = \frac{2}{\pi}$$

(2) 在本题的解答中,要注意以下两点:

如果 $f(x)$ 是以 T 为周期连续函数,则 $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$,

当 $f(x) \geq 0$ 时,当 $x > y > a$ 时就有 $\int_a^x f(t) dt \geq \int_a^y f(t) dt$.

202 【答案】 A

【分析】 方法1 $x=0$ 是(A)的瑕点.

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sin x} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sin x} dx + \int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx,$$

以 $\int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx$ 为例.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx &= \int_0^1 \frac{dx}{2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \int_0^1 \frac{d \tan \frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2}} \\ &= \ln \tan \frac{x}{2} \Big|_0^1 = \infty, \end{aligned}$$

所以 $\int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx$ 发散,从而知 $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sin x} dx$ 发散. 选(A).

方法2 (B) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{-1}^1 = \pi$.

$$(C) \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$$(D) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int_2^{+\infty} \frac{d \ln x}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} \Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2}.$$

因此(B),(C),(D)均收敛,选(A).

203 【答案】 C

【分析】 通过具体计算可知(C)收敛. 命 $x = \sec t$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec t \tan t}{\sec^2 t \tan t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 1.$$

或
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \int_1^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2} d\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} \Big|_1^{+\infty} = 1$$

可证(A),(B),(D)是发散的.

方法1 直接计算

(A) 令 $x = \frac{1}{\sin t}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1}} \cdot \frac{-\cos t}{\sin^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t} \text{ 发散(同题 202).}$$

$$(B) \sqrt{x^2-x} = \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{(2x-1)^2-1}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}} = 2 \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(2x-1)^2-1}} \stackrel{t=2x-1}{=} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} \text{ 发散(同(A)).}$$

$$(D) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2-1)} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = -\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{d\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2} \ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right) \Big|_1^{+\infty} \\ = +\infty, \text{ 发散.}$$

故选(C).

方法2 用适当放大缩小法

$x > 1$ 时

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} > \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{x}, \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} > \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = +\infty, (A) \text{ 发散.}$$

同理, 当 $x > 1$ 时

$$\frac{1}{\sqrt{x(x-1)}} > \frac{1}{x} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)}} = +\infty$$

(B) 发散.

当 $1 < x < 2$ 时

$$\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{1}{x(x+1)(x-1)} > \frac{1}{6(x-1)} \quad (1 < x < 2)$$

$$\int_x^2 \frac{dt}{t(t^2-1)} > \int_x^2 \frac{dt}{6(t-1)} = \frac{1}{6} \ln(t-1) \Big|_x^2$$

$$\text{由于 } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{6} \ln(t-1) \Big|_x^2 = +\infty \Rightarrow \int_1^2 \frac{dx}{x(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \int_x^2 \frac{dt}{t(t^2-1)} = +\infty$$

(D) 发散, 因此选(C).

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

204 【答案】 A

【分析】 我们要逐一分析各命题是否正确.

命题①是错的. 因为

$f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续 $\nRightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 如 $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$ 发散.

命题②也是错的. 如 $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$ 发散, 但 $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \sin x dx = 0$.

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x)dx \exists \nRightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \text{ 收敛}.$$

命题③是正确的.

命题④是错误的. 在④的条件下 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 是发散的.

总共只有一个正确, 选(A).

【评注】 (1) 若 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \begin{cases} 0, & f(x) \text{ 为奇函数} \\ 2 \int_0^{+\infty} f(x)dx, & f(x) \text{ 为偶函数} \end{cases}$$

$$(2) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ B \rightarrow -\infty}} \int_B^A f(x)dx \quad (\exists)$$

$$\downarrow \nearrow$$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x)dx \quad \exists$$

$$(3) \int_a^{+\infty} f(x)dx \quad \int_a^{+\infty} g(x)dx \quad \int_a^{+\infty} [f(x) + g(x)]dx$$

收敛

收敛

$\Rightarrow$ 收敛

收敛

发散

$\Rightarrow$ 发散

发散

发散

敛散性不确定, 要具体问题具体分析.

$$(4) \int_{-\infty}^0 f(x)dx \quad \int_0^{+\infty} f(x)dx \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

收敛

收敛

$\Rightarrow$ 收敛

收敛

发散

$\Rightarrow$ 发散

发散

收敛

$\Rightarrow$ 发散

发散

发散

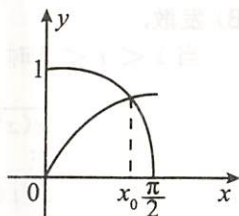
205 【答案】 C

【分析】 先求 $y = \cos x$ 与 $y = a \sin x$ 的交点的坐标 x_0 .

$$\text{由 } \cos x = a \sin x \Rightarrow \tan x_0 = \frac{1}{a}.$$

$$\text{因 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1, \text{ 故}$$

$$\int_0^{x_0} [\cos x - a \sin x] dx = [\sin x + a \cos x] \Big|_0^{x_0} = \sin x_0 + a \cos x_0 - a$$



$$\begin{aligned}
 &= (\tan x_0 + a) \cos x_0 - a = \left(\frac{1}{a} + a\right) \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x_0}} - a \\
 &= \frac{1 + a^2}{a} \cdot \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}} - a = \sqrt{1 + a^2} - a = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

由 $\sqrt{1 + a^2} - a = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{1 + a^2} + a = 2$ 相减得 $a = \frac{3}{4}$.

选(C).

知识点链接

《数学复习全书·基础篇》

高数第六章
定积分的应用

206 【答案】 D

【分析】 把曲线表成 $x = x(y)$, 要分成两条:

$$x = 1 \pm \sqrt{1 - y} \quad (0 \leq y \leq 1)$$

看成两个旋转体的体积之差:

$$V_1 = \pi \int_0^1 (1 + \sqrt{1 - y})^2 dy, \quad V_2 = \pi \int_0^1 (1 - \sqrt{1 - y})^2 dy.$$

$$\text{于是 } V = V_1 - V_2 = \pi \int_0^1 [(1 + \sqrt{1 - y})^2 - (1 - \sqrt{1 - y})^2] dy,$$

因此选(D).

【评注】 (1) 按公式计算得

$$V = \pi \int_0^1 4 \sqrt{1 - y} dy = 4\pi \left(-\frac{2}{3} (1 - y)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{3} \pi$$

(2) 也可利用另一旋转体体积公式

设 $b > a \geq 0$, 曲线 $y = f(x) (a \leq x \leq b)$ 与直线 $x = a, x = b$ 及 x 轴围成图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

我们也可求出

$$V = 2\pi \int_0^2 x [1 - (x - 1)^2] dx = 2\pi \int_0^2 x (2x - x^2) dx = 2\pi \left(\frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3} \pi$$

207 【答案】 A

【分析】 利用极坐标方程表示曲线的弧长公式,

$$s = \int_0^a \sqrt{r^2 + (r')^2} d\theta = \int_0^a \sqrt{(ae^{b\theta})^2 + (abe^{b\theta})^2} d\theta = \int_0^a ae^{b\theta} \sqrt{1 + b^2} d\theta$$

因此选(A).

【评注】 也可用参数方程的弧长公式来计算:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta = ae^{b\theta} \cos \theta \\ y = r \sin \theta = ae^{b\theta} \sin \theta \end{cases}$$

$$s = \int_0^a \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2} d\theta$$

$$= \int_0^a \sqrt{(abe^{b\theta} \cos \theta - ae^{b\theta} \sin \theta)^2 + (abe^{b\theta} \sin \theta + ae^{b\theta} \cos \theta)^2} d\theta$$

$$= \int_0^a ae^{b\theta} \sqrt{1 + b^2} d\theta.$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

208 【答案】 A

【分析】 先求弧微分

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt \\ &= a \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = 2a \sin \frac{t}{2} dt (0 \leq t \leq 2\pi) \end{aligned}$$

于是得弧长

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} dt = 4a \left(-\cos \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 8a$$

四个选项中,质心的横坐标均相同,所以只须求质心的纵坐标 $\bar{y}$. 为此,

$$\begin{aligned} \text{再求} \quad \int_0^{2\pi} y(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) 2a \sin \frac{t}{2} dt \\ &= 4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt = 8a^2 \int_0^{\pi} \sin^3 t dt \\ &= 16a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t dt = 16a^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{3} a^2 \end{aligned}$$

$$\text{因此代入公式得} \quad \bar{y} = \frac{\int_0^{2\pi} y(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt}{\int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt} = \frac{\frac{32}{3} a^2}{8a} = \frac{4}{3} a$$

因此选(A).

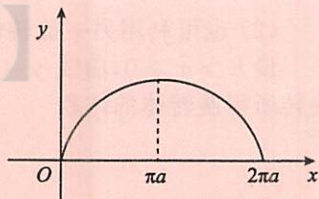
【评注】 这枝旋轮线关于直线 $x = \pi a$ 对称. 由对称性知 $\bar{x} = \pi a$.

或直接计算

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} x(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt &= \int_0^{2\pi} a(t - \sin t) 2a \sin \frac{t}{2} dt \\ &= -4a^2 \int_0^{2\pi} t \cos \frac{t}{2} - 4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} dt. \\ &= -4a^2 t \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} + 4a^2 \int_0^{2\pi} \cos \frac{t}{2} dt - 8a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{t}{2} d \sin \frac{t}{2} = 8a^2 \pi. \end{aligned}$$

因此代入公式得质心的横坐标:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{2\pi} x(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt}{\int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt} = \frac{8a^2 \pi}{8a} = \pi a$$

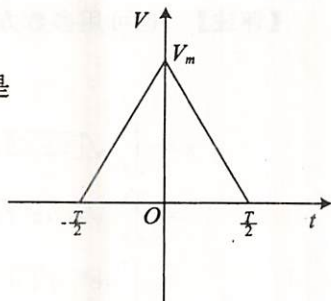


209 【答案】 A

【分析】 先写出三角形波电压函数 $V(t)$, 它在 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 上是偶函数.

$$V(t) = -\frac{V_m}{T} \left(t - \frac{T}{2} \right) = -\frac{2V_m}{T} \left(t - \frac{T}{2} \right) \left(0 \leq t \leq \frac{T}{2} \right).$$

$\Rightarrow$ 一个周期的平均电压



$$\begin{aligned}\bar{V} &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} V(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} -\frac{2V_m}{T} \left(t - \frac{T}{2}\right) dt \\ &= -\frac{4}{T^2} V_m \cdot \frac{1}{2} \left(t - \frac{T}{2}\right)^2 \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \frac{V_m}{2}.\end{aligned}$$

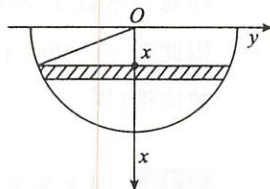
因此选(A).

210 【答案】 C

【分析】 如图所示,任取 $[x, x+dx] \subset [0, R]$, 相应的小横条所受压力微元

$$dp = x \cdot 2y dx = 2x \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

于是, 闸门所受压力 $p = \int_0^R 2x \sqrt{R^2 - x^2} dx$. 选(C).



211 【答案】 D

【分析】 由于 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是方程 $y' + p(x)y = 0$ 的两个不同的特解, 则 $y_1(x) - y_2(x)$ 为该方程的一个非零解, 则 $y = C(y_1(x) - y_2(x))$ 为该方程的通解.

【评注】 由于 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 都可能是原方程的零解, 则(A) 和(B) 都不正确.

212 【答案】 C

【分析】 先求题设一阶线性方程的全部解. 两边乘 $e^{\int_0^x P(t) dt}$ 得

$$(ye^{\int_0^x P(t) dt})' = 0$$

积分得

$$y = Ce^{-\int_0^x P(t) dt}, C \text{ 为任意常数.}$$

方法 1 方程的解 $y(x) \not\equiv 0$, 且以 T 为周期 $\Leftrightarrow y = Ce^{-\int_0^x P(t) dt}$ 且 $C \neq 0$,

$$\begin{aligned}y(x+T) - y(x) &= C[e^{-\int_0^{x+T} P(t) dt} - e^{-\int_0^x P(t) dt}] \\ &= Ce^{-\int_0^x P(t) dt} [e^{-\int_x^{x+T} P(t) dt} - 1] \\ &= Ce^{-\int_0^x P(t) dt} [e^{-\int_0^T P(t) dt} - 1] = 0\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^T P(t) dt = 0. \text{ 故选(C).}$$

方法 2 $y = Ce^{-\int_0^x P(t) dt}$, $C \neq 0$ 以 T 为周期 $\Leftrightarrow \int_0^x P(t) dt$ 以 T 为周期 $\Leftrightarrow \int_0^T P(t) dt = 0$. 故选(C).

【评注】 注意周期函数的积分性质: 设 $P(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续, 以 T 为周期, 则

$$(1) \int_x^{x+T} P(t) dt = \int_0^T P(t) dt \quad (\forall x)$$

$$(2) \int_0^x P(t) dt \text{ 以 } T \text{ 为周期} \Leftrightarrow \int_0^T P(t) dt = 0.$$

上述方法 1 中用到了性质(1), 方法 2 中用到了性质(2).

213 【答案】 B

【分析】 $y'' + by' + cy = 0$ 是二阶线性常系数齐次微分方程,其特征方程是

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \text{特征根为 } \lambda_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4c})/2.$$

它们或为相异实根,或为重实根,或为共轭复根.但不论哪种情形,在 b, c 为正数的条件下特征根的实部总是负的.

$$\text{注意当常数 } \alpha > 0 \text{ 时, } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\alpha x} = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-\alpha x} = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x = 0.$$

因此对 $y'' + by' + cy = 0$ 的任一解 $y = y(x)$ 均有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$.

故应选(B).

214 【答案】 A

【分析】 方法1 由二阶线性微分方程解的性质与结构知,相应的齐次方程 $y'' + ay' + by = 0$ 有两个线性无关的解: $y_1 = e^{-2x}, y_2 = e^x$, 于是相应的特征根是 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$, 特征方程是

$$(\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0, \text{即 } \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

故 $a = 1, b = -2, y^* = x^2 e^x$ 是方程

$$y'' + y' - 2y = (cx + d)e^x$$

的解, $y^{*'} = (x^2 + 2x)e^x, y^{*''} = (x^2 + 4x + 2)e^x$, 代入得

$$y^{*''} + y^{*'} - 2y^* = (6x + 2)e^x = (cx + d)e^x$$

$$\Rightarrow c = 6, d = 2.$$

因此选(A).

方法2 把 $y^* = e^{-2x} + (x^2 + 2)e^x, (y^*)' = -2e^{-2x} + (x^2 + 2x + 2)e^x, (y^*)'' = 4e^{-2x} + (x^2 + 4x + 4)e^x$ 代入微分方程可得

$$(y^*)'' + a(y^*)' + by^* = (4 - 2a + b)e^{-2x} + (1 + a + b)x^2 e^x + (4 + 2a)xe^x$$

$$+ (4 + 2a + 2b)e^x \stackrel{\text{令}}{=} (cx + d)e^x$$

就有

$$\begin{cases} 4 - 2a + b = 0 \\ 1 + a + b = 0 \\ 4 + 2a = c \\ 4 + 2a + 2b = d \end{cases}$$

不难由前两个方程求得 $a = 1, b = -2$, 把它们代入后两个方程又可得到 $c = 6, d = 2$, 故应选(A).

215 【答案】 C

【分析】 令 $tx = s$, 原方程变为

$$\int_0^x f(s) ds + 2 \int_0^x f(t) dt = xf(x) + x^3$$

即

$$3 \int_0^x f(t) dt = xf(x) + x^3$$

两边对 x 求导得

$$3f(x) = xf'(x) + f(x) + 3x^2$$

即

$$f'(x) - \frac{2}{x}f(x) = -3x \quad (x > 0)$$

(原方程中令 $x = 0$, 等式自然成立, 不必附加条件).

方程两边乘 $\mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = \frac{1}{x^2}$ 得

$$\left(\frac{1}{x^2}f(x)\right)' = -\frac{3}{x}$$

积分得

$$\frac{1}{x^2}f(x) = -3\ln x + C$$

由连续性

$$f(x) = Cx^2 - 3x^2 \ln x \quad (x > 0)$$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

因此求得

$$f(x) = \begin{cases} Cx^2 - 3x^2 \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

C 为任意常数, 选(C).

216 【答案】 C

【分析】 设 L 的方程为 $y = y(x)$, 由题设知 $y(0) = 1, y(1) = 0$. 又因 L 是连接 A, B 两点的凸弧, 从而当 $0 \leq x < 1$ 时 $y(x) > 0$ 成立.

设点 Q 是点 P 在 x 轴上的投影, 则点 Q 的坐标是 $(x, 0)$, 且曲边梯形 $OQPA$ 的面积为 $\int_0^x y(t) dt$, 梯形 $OQPA$ 的面积为 $\frac{x}{2}(1 + y(x))$, 于是凸弧 L 与弦 AP 围成的平面图形的面积

$$\int_0^x y(t) dt - \frac{x}{2}(1 + y(x)) = x^4 \quad (1)$$

因 $y(x)$ 连续, 于是 $\int_0^x y(t) dt$ 可导, 由上面等式知 $y(x)$ 当 $0 < x \leq 1$ 时可导. 将(1)式求导即得

$$y(x) - \frac{1}{2}(1 + y(x)) - \frac{x}{2}y'(x) = 4x^3$$

整理得 $y = y(x)$ 满足一阶线性微分方程

$$y' - \frac{y}{x} = -8x^2 - \frac{1}{x}$$

((1)式令 $x = 0$, 得 $0 = 0$ 自然成立, 不必另加条件).

用积分因子 $\frac{1}{x} (e^{-\int \frac{1}{x} dx} = \frac{1}{x})$ 同乘方程两端, 得

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = -8x - \frac{1}{x^2}$$

积分得方程的通解

$$y = x \left(C - \int \left(8x + \frac{1}{x^2} \right) dx \right) = 1 + Cx - 4x^3. \text{ 对 } \forall C, \text{ 总满足 } y(0) = 1.$$

令 $x = 1, y(1) = 0$ 可确定常数 $C = 3$, 故 L 的方程是 $y = 1 + 3x - 4x^3$. 应选(C).

【评注】 函数 $e^{\int p(x) dx}$ 称为一阶线性方程 $y' + p(x)y = Q(x)$ 的积分因子, 用它同乘方程的两端可得 $(ye^{\int p(x) dx})' = Q(x)e^{\int p(x) dx}$, 再积分一次就可求得方程的通解.

217 【答案】 D

【分析】 微分方程对应的齐次微分方程是: $y'' - 3y' + 2y = 0$, 其特征方程为 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, 其特征根为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

因此微分方程 $y'' - 3y' + 2y = -2e^x$ 有形如 $y_1^* = ce^x$ 的特解.

又微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 3x$ 有形如 $y_2^* = ax + b$ 的特解. 所以, 由迭加原理知, 原方程 $y'' - 3y' + 2y = 3x - 2e^x$ 有形如 $y^* = y_1^* + y_2^* = ce^x + (ax + b)$ 的特解, 应选(D).

【评注】 经计算可确定常数 $a = \frac{3}{2}, b = \frac{9}{4}, c = 2$.

218 【答案】 C

【分析】 由题设知 $y = y(x)$ 是 $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$ 满足 $y(0) = 0, y'(0) = 2$ 的特解. 对应的特征方程为 $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$, 特征根 $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. 从而对应的齐次微分方程的通解为 $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$. 因非齐次项 $f(x) = e^{3x}$, 从而可设非齐次微分方程 $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$ 具有形式为 $y^* = Ax^2 e^{3x}$ 的特解. 代入原方程可确定常数 $A = \frac{1}{2}$, 即原方程的通解为

$$y = \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{2} x^2 \right) e^{3x}$$

由 $y(0) = 0, y'(0) = 2$ 可确定 $C_1 = 0, C_2 = 2$. 故所求曲线的方程为

$$y = \left(2x + \frac{1}{2} x^2 \right) e^{3x} = \frac{x}{2} (x + 4) e^{3x}$$

应选(C).

【评注】 按选项特点((A)、(B)、(D)中均含三角函数), 求出特征根 $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, 写出通解形式 $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + Ax^2 e^{3x}$ 后不必再计算就可选(C).

219 【答案】 D

【分析】 由线性微分方程解的结构知 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 线性无关是 $C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$ 为方程通解的充分必要条件, 即 $f_1(x) \neq C f_2(x)$, 从而

$$\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right)' = \frac{f_1'(x) f_2(x) - f_1(x) f_2'(x)}{f_2^2(x)} \neq 0,$$

故应选(D).

【评注】 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的任二解 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 必满足恒等式

$$y_1' y_2 - y_1 y_2' = C e^{-\int p(x) dx} \quad (1)$$

其中 C 是一个常数. 由(1)式可见任二解 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 或者满足 $y_1' y_2 - y_1 y_2' \equiv 0$ 或者满足 $y_1' y_2 - y_1 y_2' \neq 0$. 前者对应 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 线性相关, 后者对应 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 线性无关.

(1)式的证明如下: 已知 $y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0$, (2)

$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0$, (3)

用 y_2 乘方程(2), 用 y_1 乘方程(3), 然后相减即得

$$(y_1' y_2 - y_1 y_2') + p(x)(y_1' y_2 - y_1 y_2') = 0,$$

即 $(y_1' y_2 - y_1 y_2')' + p(x)(y_1' y_2 - y_1 y_2') = 0$,

这表明 $y_1' y_2 - y_1 y_2'$ 是一阶线性齐次微分方程 $y' + p(x)y = 0$ 的一个解. 由通解公式即得存在一个常数 C 使得 $y_1' y_2 - y_1 y_2' = C e^{-\int p(x) dx}$, 常数 C 可用 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 在某点 $x = x_0$ 处的函数值与导数值确定.

220 【答案】 C

【分析】 由于齐次方程的通解为 $C_1 \cos kx + C_2 \sin kx$, 这样只需验证的就是在四个函数 $A \sin x + B \cos x, Ax \cos x, Ax \sin x$ 与 $Ax \sin x + Bx \cos x$ 中哪一个是非齐次方程的特解. 如果非齐次方程的特解形式为 $A \sin x + B \cos x$, 说明此时 $k \neq 1$, 经验证可知特解为 $\frac{1}{k^2-1} \cos x$, 即 $A = 0, B = \frac{1}{k^2-1}$. 而根据题设 A, B 均为非零常数, 说明它不符合题意, 故选项 (A) 是错误的. $k \neq 1$ 时通解的形式不可能是 (B)、(C)、(D), 所以只能是 $k = 1$.

如果 $k = 1$, 则特解应具有形式 $Ax \sin x + Bx \cos x$, 代入原方程可知: $A = \frac{1}{2}, B = 0$, 由此可见应选 (C).

221 【答案】 D

【分析】 微分方程 $y'' - 2y' + 5y = 0$ 的特征方程是 $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$, 特征根是 $\lambda_1 = 1 + 2i, \lambda_2 = 1 - 2i$, 方程的非齐次项 $f(x) = e^x \cos 2x = e^{\alpha x} \cos \beta x, \alpha \pm i\beta = 1 \pm 2i$ 是特征根.

按照选取特解的规则应设非齐次微分方程 $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$ 具有形式为 $y^* = xe^x(a \cos 2x + b \sin 2x)$ 的特解, 其中 a 与 b 是待定常数.

记 $y_1 = e^x \cos 2x, y_2 = e^x \sin 2x$, 则

$$y^* = x(ay_1 + by_2),$$

$$y^{*'} = x(ay_1' + by_2') + (ay_1 + by_2),$$

$$y^{*''} = x(ay_1'' + by_2'') + 2(ay_1' + by_2'),$$

从而

$$\begin{aligned} y^{*''} - 2y^{*'} + 5y^* &= x[a(y_1'' - 2y_1' + 5y_1) + b(y_2'' - 2y_2' + 5y_2)] + 2a(y_1' - y_1) + 2b(y_2' - y_2) \\ &= 2a(y_1' - y_1) + 2b(y_2' - y_2) \\ &= 2ae^x(\cos 2x - 2\sin 2x - \cos 2x) + 2be^x(\sin 2x + 2\cos 2x - \sin 2x) \\ &= -4ae^x \sin 2x + 4be^x \cos 2x. \end{aligned}$$

要使 y^* 是方程的特解, 待定系数应满足 $a = 0, b = \frac{1}{4}$, 即微分方程

$$y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$$

有特解

$$y^* = \frac{1}{4}xe^x \sin 2x,$$

故应选 (D).

222 【答案】 D

【分析】 方法 1 不论以 x 还是以 y 为自变量方程 ② 与 ③ 对未知函数都不是一次的, 即它们是非线性微分方程. 故选 (D).

方法 2 方程 ① 对未知函数 y 及其导数 $\frac{dy}{dx}$ 是一次的, 故 ① 是线性微分方程.

方程 ④ 可改写成 $\frac{dx}{dy} - \frac{1}{\cos y + 1}x = 0$, 它对未知函数 x 及其导数 $\frac{dx}{dy}$ 是一次的, 故 ④ 也是

线性微分方程. 选(D).

223 【答案】 B

【分析】 方法1 由 $du(x, y) = f(x)ydx + [\sin x - f(x)]dy$ 知

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x)y, \frac{\partial u}{\partial y} = \sin x - f(x)$$

再由 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, 得

$$f(x) = \cos x - f'(x)$$

即 $f'(x) + f(x) = \cos x$. 解此一阶线性微分方程得

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-\int dx} \left(\int \cos x e^{\int dx} dx + C \right) = e^{-x} \left(\int e^x \cos x dx + C \right) \\ &= \frac{e^{-x}}{2} (e^x \cos x + e^x \sin x + C) \end{aligned}$$

由 $f(0) = 0$ 知, $C = -1$, $f(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x - e^{-x})$.

故应选(B).

方法2 按题设,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x)y \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin x - f(x) \quad (2)$$

由(2)式对 y 积分得

$$u(x, y) = (\sin x - f(x))y + C(x)$$

再对 x 求导并由(1)式得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = [\cos x - f'(x)]y + C'(x) = f(x)y$$

于是得

$$[f'(x) + f(x) - \cos x]y - C'(x) = 0$$

由此得

$$f'(x) + f(x) = \cos x$$

$$C(x) = C (\forall \text{ 常数})$$

同前可求得 $f(x)$.

224 【答案】 A

【分析】 因方程不显含自变量 x , 可令 $p = y'$ 并以 y 为自变量, 于是

$$y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (p) = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$$

代入原方程得

$$2yp \frac{dp}{dy} = 1 + p^2 \xrightarrow{\text{分离变量}} \frac{2p dp}{1 + p^2} = \frac{dy}{y}$$

积分可得 $1 + p^2 = Cy$. 利用当 $y = 1$ 时 $p = -1$ 可确定常数 $C = 2$, 因而有 $p^2 = 2y - 1$, 即 $p = -\sqrt{2y - 1}$, 从而得方程 $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{2y - 1}$, 用分离变量法又可得 $\sqrt{2y - 1} = -x + C_1$. 利用初值 $y(1) = 1$ 可确定常数 $C_1 = 2$, 故所求特解为 $\sqrt{2y - 1} = 2 - x$,

即 $y = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 5)$, 应选(A).

225 【答案】 A

【分析】 在题设的积分等式中令 $x = 0$ 可得 $f(0) = 1$. 又题设积分等式可改写成

$$f(x) = \cos 2x - 4x \int_0^x f(t) dt + 4 \int_0^x t f(t) dt,$$

因 $f(x)$ 连续, 于是上式右端三项都可导, 即 $f(t)$ 可导, 将上式两端求导数, 得

$$f'(x) = -2\sin 2x - 4 \int_0^x f(t) dt - 4xf(x) + 4xf(x)$$

即 $f'(x) = -2\sin 2x - 4 \int_0^x f(t) dt$. 在所得等式中令 $x = 0$ 又得 $f'(0) = 0$. 不难发现所得等式右端两项还可导, 这表明 $f''(x)$ 存在, 且满足 $f''(x) = -4\cos 2x - 4f(x)$.

由此可见 $y = f(x)$ 是如下初值问题的特解:

$$\begin{cases} y'' + 4y = -4\cos 2x, \\ y(0) = 1, y'(0) = 0. \end{cases} \quad (*)$$

方程 $y'' + 4y = 0$ 对应的特征方程是 $\lambda^2 + 4 = 0$, 特征根是 $\lambda_1 = 2i$ 与 $\lambda_2 = -2i$, 从而可设方程 $y'' + 4y = -4\cos 2x$ 的特解形式为 $y^* = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$. 记 $\bar{y} = A\cos 2x + B\sin 2x$, 求导可得 $(y^*)' = x\bar{y}' + \bar{y}$, $(y^*)'' = x\bar{y}'' + 2\bar{y}'$, 于是

$$\begin{aligned} (y^*)'' + 4y^* &= x\bar{y}'' + 2\bar{y}' + 4x\bar{y} = x(\bar{y}'' + 4\bar{y}) + 2\bar{y}' = 2\bar{y}' \\ &= 2(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) \\ &= 4(-A\sin 2x + B\cos 2x) \stackrel{\text{令}}{=} -4\cos 2x, \end{aligned}$$

可确定常数 $A = 0, B = -1$. 综合即得 $(*)$ 方程的通解为 $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - x \sin 2x$. 利用初值 $y(0) = 1$ 可确定 $C_1 = 1$, 利用初值 $y'(0) = 0$ 可确定 $C_2 = 0$, 故所求函数 $f(x) = \cos 2x - x \sin 2x$. 应选(A).

226 【答案】 B

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } |f(x, y)| &\leq \left| \frac{x^2 y + y^4}{x^2 + y^2} \right| \\ &= \left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot y + \frac{y^2}{x^2 + y^2} \cdot y^2 \right| \leq |y| + y^2 \end{aligned}$$

$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} (|y| + y^2) = 0$. 因此 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$. 选(B).

227 【答案】 A

【分析】 由于

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{xy^2 \sin ky}{x^2 + y^4} \right| \leq \frac{\frac{1}{2}(x^2 + y^4)}{x^2 + y^4} |\sin ky| \\ &= \frac{1}{2} |\sin ky| \rightarrow 0 \quad (\text{当 } (x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ 时}) \end{aligned}$$

则 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy^2 \sin ky}{x^2 + y^4} = 0$, 故应选(A).

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

知识点链接

《数学复习全书·基础篇》
高数第八章
多元函数微分学

228 【答案】 A

【分析】 由于 $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{x^4+x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x^2+1} = 0$

而 $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x^2}} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^4}{x^4+x^4} = 1$

则极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在.

【评注】 事实上,当 (x,y) 沿过原点的任何直线趋于 $(0,0)$ 时,都有 $\frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ 趋于0,但极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ 仍然不存在,因为当 (x,y) 沿 $y=x^2$ 趋于 $(0,0)$ 时, $\frac{2x^2y}{x^4+y^2} \rightarrow 1$.

229 【答案】 C

【分析】 由于

$$0 \leq |xy \ln(x^2+y^2)| \leq -\frac{1}{2}(x^2+y^2) \ln(x^2+y^2) \quad (\text{当 } 0 < x^2+y^2 < 1 \text{ 时})$$

令 $x^2+y^2=r$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2+y^2) \ln(x^2+y^2) &= \lim_{r \rightarrow 0^+} r \ln r = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\ln r}{\frac{1}{r}} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{r}}{-\frac{1}{r^2}} \quad (\text{洛必达法则}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{则 } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} -\frac{1}{2}(x^2+y^2) \ln(x^2+y^2) = 0,$$

$$\text{故 } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \ln(x^2+y^2) = 0, \text{ 应选(C).}$$

230 【答案】 C

【分析】 由于 $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=kx}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}$

与 k 取值有关,则 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在,从而 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续,而

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

同理 $f'_y(0,0) = 0$.

故应选(C).

【评注】 本题中的函数给出了一个两个偏导数都存在但不连续的例子.

231 【答案】 C

【分析】 由于 $0 \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq |y| \rightarrow 0$, 则

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$

则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续, (A) 不正确.

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0$$

所以, $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处偏导数存在, (B) 不正确.

$$\text{又 } \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f'_x(0, 0)\Delta x - f'_y(0, 0)\Delta y}{\rho} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{3/2}}$$

由于 $\lim_{\substack{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0) \\ \Delta y = \Delta x}} \frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{3/2}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^3}{2\sqrt{2} |\Delta x|^3}$ 不存在, 则

$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{3/2}}$ 不存在, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点不可微, 故应选 (C).

【评注】 用定义判定 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 是否可微分以下两步进行:

(1) 用定义判断 $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ 是否都存在, 如果都存在则进行下一步, 否则, $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处不可微.

$$(2) \text{ 考察极限 } \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - [f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y]}{\rho}$$

是否为零. 如果此极限为零, 则函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微, 否则不可微.

232 【答案】 B

$$\text{【分析】 } f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

由对称性知, $f'_y(0, 0) = 0$

而

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) - [f'_x(0, 0)\Delta x + f'_y(0, 0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta x \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

不存在.

$$\text{事实上 } \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y = k\Delta x}} \frac{\Delta x \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2 + k^2(\Delta x)^2} = \frac{k}{1 + k^2}$$

故 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点不可微. 应选 (B).

【评注】 本题中的函数给出了一个偏导数存在但不可微的例子.

233 【答案】 D

$$\text{【分析】 } f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0, 0) = \Delta x \Delta y \sin \frac{1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

$$= \rho \cdot \rho \frac{\Delta x}{\rho} \frac{\Delta y}{\rho} \sin \frac{1}{\rho} = o(\rho) (\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \rightarrow 0)$$

其中 $\left| \frac{\Delta x}{\rho} \frac{\Delta y}{\rho} \sin \frac{1}{\rho} \right| \leq 1$, 所以 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 可微.

当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时,

$$f'_x(x, y) = y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{yx^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f'_y(x, y) = x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

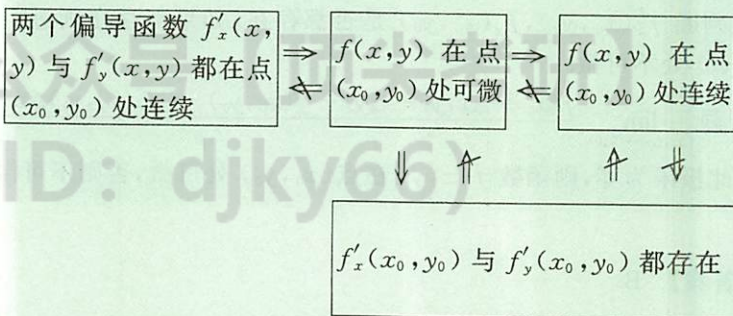
当 $x^2 + y^2 = 0$ 时, $f'_x(0, 0) = 0, f'_y(0, 0) = 0$.

当取路径 $y = x$ 时,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ y=x}} f'_x(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \sin \frac{1}{\sqrt{2}x} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos \frac{1}{\sqrt{2}x} \right)$$

不存在, 所以 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f'_x(x, y)$ 不存在, 故 $f'_x(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点不连续. 同理 $f'_y(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点不连续, 应选(D).

【评注】 (1) 二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的连续性, 偏导数的存在性, 可微性三者的相互关系. 如下:



(2) 按定义, $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 可微, 即

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), (\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \rightarrow 0)$$

其中 A, B 与 $\Delta x, \Delta y$ 无关为常数. 特别是, 若有 $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = o(\rho) (\rho \rightarrow 0)$, 则 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 可微, 且 $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = 0, \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = 0$.

234 【答案】 D

【分析】 先求 f'_x 和 f'_y .

$x^2 + y^2 \neq 0$ 时

$$f'_x = \frac{4x^3(x^2 + y^2) - 2x(x^4 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f'_y = \frac{-4y^3(x^2 + y^2) - 2y(x^4 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$$

由

$$f(x, 0) = x^2 (\forall x), f(0, y) = -y^2 (\forall y)$$

$\Rightarrow$

$$f'_x(0, 0) = 0, f'_y(0, 0) = 0$$

注意

$$\left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| \leq 1, \left| \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq 1$$

 $\Rightarrow$

$$|f'_x| \leq 4|x| + 2|x| + 2|x| = 8|x|$$

$$|f'_y| \leq 4|y| + 2|y| + 2|y| = 8|y|$$

 $\Rightarrow$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f'_x = 0 = f'_x(0,0), \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f'_y = 0 = f'_y(0,0)$$

因此 $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续, 从而 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微. 选(D)

235

【答案】 B

【分析】 直接法.

由 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) + 2x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1$, 且 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ 知

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} [f(x,y) - f(0,0) + 2x - y] = 0$$

则 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0)$, $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续, 又

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{f(x,y) - f(0,0) + 2x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0) + 2x}{\sqrt{x^2}} = 1$$

即 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0) + 2x}{|x|} = 1$

从而有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} + 2 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{-x} - 2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = -3$$

则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x}$ 不存在, 即 $f'_x(0,0)$ 不存在.

同理可得 $f'_y(0,0)$ 不存在, 故应选(B).

排除法.

令 $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} - 2x + y$. 显然 $f(x,y)$ 满足原题设的条件, 且 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续, 而

$$f(x,0) = \sqrt{x^2} - 2x = |x| - 2x$$

在 $x=0$ 处不可导 ($|x|$ 在 $x=0$ 处不可导, $2x$ 在 $x=0$ 处可导), 则 $f'_x(0,0)$ 不存在.

同理 $f'_y(0,0)$ 不存在, 从而(A)、(C)、(D) 均不正确, 故应选(B).

236

【答案】 D

【分析】 由已知条件 $\Rightarrow$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (f(x,y) - 1) = 0, \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 1.$$

再由极限与无穷小的关系得

$$\frac{f(x,y) - f(0,0)}{x^2 + y^2} = 2 + \alpha$$

其中 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \alpha = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(0,0) &= 2(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2) \cdot \alpha \\ &= o(\rho) \quad (\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0) \\ &= 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + o(\rho) \end{aligned}$$

由可微性概念知: $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微且 $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0, \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$. 选(D).

【评注】 此类选择题可用特殊选取法,即取满足条件的特殊的 $f(x,y)$,易看出其中某选项成立,而其余三项不成立,就可选出正确选项. 这里取

$$f(x,y) - 1 = 2(x^2 + y^2)$$

即

$$f(x,y) = 2(x^2 + y^2) + 1$$

满足题中条件,显然此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微且 $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$.

因此选(D).



微信扫码

237 【答案】 D

【分析】 由 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f'_x(x,y) = f'_x(0,0)$ 和 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f'_y(x,y) = f'_y(0,0)$ 可知 $f(x,y)$ 的两个一阶偏导数 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续,则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微,故应选(D).

238 【答案】 B

【分析】 方法1 由 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续可知,如果 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2}$ 存在,则必有

$$f(0,0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x,y) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

由于 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2}$ 存在, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \infty$, 则 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$, 或 $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$,

即

$$f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + o(\rho)$$

由微分的定义知 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

方法2 排除法: 取 $f(x,y) = |x| + |y|$, 显然 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)}{|x| + |y|}$ 存在, 但 $f(x,y) = |x| + |y|$ 在 $(0,0)$ 处不可微. 这是由于 $f(x,0) = |x|$ 在 $x=0$ 处不可导, 则 $f'_x(0,0)$ 不存在, 从而 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微, 排除(A).

取 $f(x,y) \equiv 1$, 显然 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微, 但 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)}{|x| + |y|} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2} = \infty$ 不存在, 则排除(C)和(D), 故应选(B).

239 【答案】 D

【分析】 由多元函数的连续、偏导数存在和可微之间的关系知,多元函数的连续既非两

个偏导数存在的必要条件,也非充分条件.

例如 $f(x, y) = |x| + |y|$ 在 $(0, 0)$ 点连续, 但 $(0, 0)$ 点两个偏导数 $f'_x(0, 0)$ 和 $f'_y(0, 0)$ 都不存在. 而

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

在 $(0, 0)$ 点的两个偏导数 $f'_x(0, 0)$ 和 $f'_y(0, 0)$ 都存在(可用定义验证), 但在 $(0, 0)$ 点不连续, 事实上极限

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ 不存在.}$$

故应选(D).

240 【答案】 C

【分析】 由于偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$ 就是一元函数 $f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 处的导数, 则由 $f'_x(x_0, y_0)$ 存在可知, 一元函数 $f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 从而 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0)$, 同理 $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x_0, y) = f(x_0, y_0)$. 故应选(C).

241 【答案】 A

【分析】 由二元函数 $f(x, y)$ 在某点 (x_0, y_0) 的可微性和它的偏导数的关系可知: 函数 $f(x, y)$ 的两个偏导数在点 (x_0, y_0) 处连续是函数 $f(x, y)$ 在该点处可微充分但非必要条件. 因此选(A).

【评注】 (1) 要熟悉基本定理. 若 $z = f(x, y)$ 的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0, y_0) 连续, 则 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 可微, 即 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0, y_0) 的连续性是 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 可微的充分条件, 但 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 可微不能保证 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0, y_0) 连续. 例如

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

易求

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} 2y \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $(0, 0)$ 不连续, 但

$$f(x, y) - f(0, 0) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = \rho \cdot \rho \sin \frac{1}{\rho^2} = o(\rho),$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

其中 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$, 即 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 可微.

(2) 若想通过考察 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0, y_0) 的连续性来讨论 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的可微性时, 只能由 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0, y_0) 连续时, 可知 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 可微, 但若 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0, y_0) 不连续时, 此时不足以判断 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 是否可微, 该方法失效.

242 【答案】 D

【分析】 由于偏导数本质上就是一元函数的导数, 则由 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0$ 可知, $f(x, y)$ 关于变量 x 是单调增加的, 而关于变量 y 是单调减的. 因此, 当 $x_1 < x_2, y_1 > y_2$ 时

$$f(x_1, y_1) < f(x_2, y_1), f(x_2, y_1) < f(x_2, y_2)$$

从而有

$$f(x_1, y_1) < f(x_2, y_2)$$

故应选(D).

243 【答案】 D

【分析】 $f(1, -1) = f(1, -1) - f(0, 0)$

$$= [f(1, -1) - f(0, -1)] + [f(0, -1) - f(0, 0)]$$

$$= f'_x(\xi, -1) + f'_y(0, \eta)(-1)$$

$$> 1 + (-1) \times (-1) = 2$$

故应选(D).

排除法, 令 $f(x, y) = 1.1x - 1.1y$.

显然 $\frac{\partial f}{\partial x} = 1.1 > 1, \frac{\partial f}{\partial y} = -1.1 < -1, f(0, 0) = 0$, 但

$$f(1, 1) = 1.1 - 1.1 = 0$$

则(A)不正确.

$$f(-1, 1) = -1.1 - 1.1 = -2.2 < -2$$

则(B)不正确.

$$f(-1, -1) = -1.1 + 1.1 = 0$$

则(C)不正确, 故应选(D).

244 【答案】 A

【分析】 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-\frac{y}{x^2}f'_1 - \frac{z}{x^2}f'_2}{\frac{1}{x}f'_2} = \frac{\frac{y}{x}f'_1 + \frac{z}{x}f'_2}{f'_2}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{1}{x}f'_1}{\frac{1}{x}f'_2} = -\frac{f'_1}{f'_2}$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{yf'_1 + zf'_2 - yf'_1}{f'_2} = z$$

245 【答案】 A

【分析】 设 $u(x, y)$ 满足

$$du = \frac{x+ay}{(x+y)^2}dx + \frac{y}{(x+y)^2}dy$$

由可微与可偏导的关系有:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x+ay}{(x+y)^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{(x+y)^2} \quad (1)$$

分别对 y, x 求偏导数有:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{a(x+y)^2 - (x+ay) \cdot 2(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{(a-2)x - ay}{(x+y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{-2y}{(x+y)^3}$$

由于 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ 与 $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ 连续, 从而 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, 即 $(a-2)x = (a-2)y$, 所以当 $a=2$ 时上式成立, 应选(A).

【评注】 由全微分与偏导数存在的关系及混合偏导数连续时与求导次序无关的性质可导出 $Pdx + Qdy$ 为某函数的全微分的必要条件.

设 $P(x, y), Q(x, y)$ 在区域 D 有连续偏导数. 若在 D 上存在 $u(x, y)$ 使得

$$du = Pdx + Qdy \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad ((x, y) \in D)$$

但反过来不一定成立. 本题是已知 $Pdx + Qdy$ 为某函数的全微分, 故只需利用这个必要条件定出 P 中的参数 a , 而不必去求出原函数.

若有 $u(x, y)$ 满足

$$du = \frac{(x+ay)dx + ydy}{(x+y)^2}$$

则充要条件是(1)式成立, 由此我们也可用如下方法定出 a 值并相应地求出 $u(x, y)$.

由 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x+ay}{(x+y)^2}$, 对 x 积分 (y 为任意固定常数)

$$\begin{aligned} \text{得} \quad u(x, y) &= \int \frac{x+ay}{(x+y)^2} dx = \int \frac{x+y+(a-1)y}{(x+y)^2} dx \\ &= \int \frac{dx}{x+y} + (a-1)y \int \frac{dx}{(x+y)^2} \\ &= \ln|x+y| - \frac{(a-1)y}{x+y} + C(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{再对 } y \text{ 求导得} \quad \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{x+y} - \frac{a-1}{x+y} + \frac{(a-1)y}{(x+y)^2} + C'(y) \\ &= \frac{y}{(x+y)^2} \quad (\text{用(1)式中另一条件}) \end{aligned}$$

因此得 $a=2, C'(y)=0$, 于是 $C(y)=C(\forall \text{ 常数})$

$$u(x, y) = \ln|x+y| - \frac{y}{x+y} + C$$

246 【答案】 C

【分析】 方法1 由题设知

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2 + 2xy + 3x^2, \frac{\partial f}{\partial y} = 4xy + x^2$$

由 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2 + 2xy + 3x^2$ 知

$$f(x, y) = \int (2y^2 + 2xy + 3x^2) dx = 2xy^2 + x^2y + x^3 + \varphi(y)$$

由 $\frac{\partial f}{\partial y} = 4xy + x^2$ 知, $4xy + x^2 = 4xy + x^2 + \varphi'(y)$, $\varphi'(y) = 0$, $\varphi(y) = C$,

则 $f(x, y) = 2xy^2 + x^2y + x^3 + C$.

$$\begin{aligned} \text{方法 2} \quad df(x, y) &= (2y^2 + 2xy + 3x^2)dx + (4xy + x^2)dy \\ &= (2y^2dx + 4xydy) + (2xydx + x^2dy) + 3x^2dx \\ &= d(2xy^2) + d(x^2y) + dx^3 \end{aligned}$$

则 $f(x, y) = 2xy^2 + x^2y + x^3 + C$.

【评注】 方法1是利用偏积分,方法2是利用凑微分.这两种方法是已知某个函数的全微分或两个一阶偏导数求原函数的两种常用方法.

247 【答案】 C

【分析】 方法1 由 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}} = -2$, 及 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的连续性知 $f(0, 0) = 0$.

由 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}} = -2 < 0$, 及极限的保号性知存在 $(0, 0)$ 点的某个去心邻域, 在此去心邻域内

$$\frac{f(x, y)}{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}} < 0$$

而 $1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2} > 0$, 则 $f(x, y) < 0$, 又 $f(0, 0) = 0$, 由极值定义知 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 取极大值, 故应选(C).

方法2 由于当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时, $1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2} \sim \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

取 $f(x, y) = -(x^2 + y^2)$, 显然满足题设条件, 但 $f'_x(0, 0) = 0$, 且由极值定义知 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 取极大值, 则排除(A)、(B)、(D), 故应选(C).

【评注】 方法1是利用极限的保号性和极值的定义, 方法2是利用排除法, 这是解决此类问题常用的两种方法.

248 【答案】 D

【分析】 由 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得极小值及极值的定义可知, $f(x, y_0)$ 在 $x = x_0$ 取极小值, $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处取极小值, 故应选(D).

【评注】 极值点不一定是驻点, 因为在该点处偏导数不一定存在, 例如 $f(x, y) = |x| + |y|$ 显然在 $(0, 0)$ 点取极小值, 但 $f'_x(0, 0)$ 和 $f'_y(0, 0)$ 都不存在, 则排除(A); 驻点不一定是极值点, 排除(B); (C) 选项的结论对一元函数是成立的, 但对二元函数不成立.

249 【答案】 B

【分析】

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

又 $F'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $y'(x_0) = 0$

$$y''(x) = -\frac{(F''_{xx} + F''_{xy}y')F'_y - (F''_{yx} + F''_{yy}y')F'_x}{(F'_y)^2}$$

$$y''(x_0) = -\frac{F''_{xx}(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

若 $F''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, 则 $y''(x_0) > 0$, x_0 是 $y = y(x)$ 的极小值点, 故应选(B).

250 【答案】 D

【分析】 $f'_x = 2kx$, $f'_y = 3y^2 - 3$, 显然

$$f'_x(0, 1) = 0, f'_y(0, 1) = 0$$

$$f''_{xx}(0, 1) = 2k, f''_{yy}(0, 1) = 6, f''_{xy}(0, 1) = 0$$

$AC - B^2 = 12k$, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 1)$ 处是否取得极值与 k 的取值有关.

251 【答案】 A

【分析】 显然 $f(x, y) = 1 + x + y$ 在区域 $x^2 + y^2 \leq 1$ 内无驻点, 令

$$F(x, y, \lambda) = 1 + x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\begin{cases} F'_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ F'_y = 1 + 2\lambda y = 0 \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{得 } x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + \sqrt{2}$ 为最大值, $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \sqrt{2}$ 为最小值, $(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -1$.

故应选(A).

252 【答案】 C

【分析】 令 $g(x, y) = xy$, 问题可转化为求函数 $g(x, y)$ 在区域 $D = \{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的最小值.

由于函数 $g(x, y)$ 在 D 内仅有唯一驻点 $(0, 0)$ 且 $g(0, 0) = 0$. 从而为求 $g(x, y)$ 在 D 上的最小值, 只需比较 $g(x, y)$ 在 D 的边界 $4x^2 + y^2 = 1$ 上的最小值与 $g(0, 0) = 0$ 的大小.

方法 1 求 $g(x, y) = xy$ 在 $4x^2 + y^2 = 1$ 上的最小值可用拉格朗日乘数法. 引入拉格朗日函数 $F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(4x^2 + y^2 - 1)$, 求 $F(x, y, \lambda)$ 的驻点, 解方程组

$$\begin{cases} F'_x = y + 8\lambda x = 0 & (1) \\ F'_y = x + 2\lambda y = 0 & (2) \\ F'_\lambda = 4x^2 + y^2 - 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

显然 $(x, y) = (0, 0)$ 不是解, 由(1), (2) 求它的非零解, 必须有 $\begin{vmatrix} 8\lambda & 1 \\ 1 & 2\lambda \end{vmatrix} = 0, \lambda = \pm \frac{1}{4}$,

即 $y = \pm 2x$, 代入(3) 得, $8x^2 = 1, x = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$, 于是可解得四个驻点 $P_1\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

$P_2\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), P_3\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 与 $P_4\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, 经计算知在 P_1 与 P_4 处 $g(x, y) = \frac{1}{4}$,

在 P_2 与 P_3 处 $g(x, y) = -\frac{1}{4}$.

比较即知函数 $f(x, y) = e^{-xy}$ 在 D 上的最大值在 P_2 与 P_3 处取得, 且最大值是 $e^{\frac{1}{4}}$.
应选(C).

方法 2 化为求一元函数的最小值问题.

由 $4x^2 + y^2 = 1$ 解出

$$y = \pm \sqrt{1 - 4x^2} \left(-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \right)$$

代入 $g(x, y)$ 中转化为求 $z(x) = \pm x \sqrt{1 - 4x^2} \left(-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \right)$ 的最小值.

$$z' = \pm \left(\sqrt{1 - 4x^2} - \frac{4x^2}{\sqrt{1 - 4x^2}} \right) = \pm \frac{1 - 8x^2}{\sqrt{1 - 4x^2}}$$

由 $z' = 0$ 得 $x = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

$$z\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{1}{4}, z\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \mp \frac{1}{4}$$

又 $z\left(\pm \frac{1}{2}\right) = 0$. 因此 $z(x) \left(-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \right)$ 的最小值是 $-\frac{1}{4}$. $f(x, y) = e^{-xy}$ 在 D 的最大值是 $e^{\frac{1}{4}}$.

【评注】 (1) 设函数 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续. 求其在 D 上的最大值或最小值的步骤如下:

① 求出函数 $z = f(x, y)$ 在 D 内的所有驻点处或至少一个偏导数不存在的点处的函数值.

② 设 D 是由边界曲线 $F_i(x, y) = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ 所围成, 求出函数 $z = f(x, y)$ 分别在约束条件 $F_i(x, y) = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ 下的所有可能的驻点, 并计算出其函数值.

③ 比较①, ②两组中已计算出的函数值, 其中最大者就是函数 $z = f(x, y)$ 在 D 上的最大值, 最小者就是函数 $z = f(x, y)$ 在 D 上的最小值.

(2) 条件极值应用问题的求解方法.

条件极值应用问题的求解常用拉格朗日乘数法.

例如, 求函数 $z = f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 之下的条件极值的程序为:

① 引入拉格朗日函数 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$.

② 求拉格朗日函数 $F(x, y, \lambda)$ 的驻点, 即解方程组

$$\begin{cases} F'_x = f'_x + \lambda\varphi'_x = 0 \\ F'_y = f'_y + \lambda\varphi'_y = 0 \\ F'_\lambda = \varphi = 0 \end{cases}$$

③ 在考研试题中通常是条件最大值或最小值的应用问题, 常由问题的实际意义可知存在最大值或最小值. 若驻点唯一即为所求.

又如, 求函数 $u = f(x, y, z)$ 在约束条件 $\varphi(x, y, z) = 0$ 与 $\psi(x, y, z) = 0$ 之下的条件极值的程序为:

① 引入拉格朗日函数 $F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z) + \mu\psi(x, y, z)$.

② 求拉格朗日函数 $F(x, y, z, \lambda, \mu)$ 的驻点, 即解方程组

$$\begin{cases} F'_x = f'_x + \lambda\varphi'_x + \mu\psi'_x = 0 \\ F'_y = f'_y + \lambda\varphi'_y + \mu\psi'_y = 0 \\ F'_z = f'_z + \lambda\varphi'_z + \mu\psi'_z = 0 \\ F'_\lambda = \varphi = 0 \\ F'_\mu = \psi = 0 \end{cases}$$

③ 判定各驻点是否为最大、小值点.

253

【答案】 B

【分析】 由于

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 8x + 2y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

的解为 $(0,0)$, $(2,2)$. 只有 $(0,0)$ 在 D 内.

又因为 $A = f''_{xx} = 6x - 8$, $B = f''_{xy} = 2$, $C = f''_{yy} = -2$, 可得在点 $(0,0)$ 处 $A = -8$, $AC - B^2 > 0$, 所以点 $(0,0)$ 是极大值点.

注意 $f(0,0) = 0$, 在 D 的边界上点 $(4,1)$ 处 $f(4,1) = 7 > f(0,0)$, 即 $f(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 在 D 的最大值, $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 在 D 的最大值点. 因此选(B).

【评注】 (1) 本题考察当二元函数的两个偏导数都存在的条件下取得极值的必要条件和充分条件.

(2) 该题表明了多元函数与一元函数的一个区别: 区域 D 上的连续的二元函数 $f(x,y)$ 在 D 内有唯一的极值点, 若是极小(大)值点, 不一定是 $f(x,y)$ 的最小(大)值点.

254

【答案】 A

【分析】 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某空心邻域中满足

$$\frac{f(x,y) + 4x^2 - y^2}{x^4 + x^2y^2 + y^4} \equiv 1$$

即

$$f(x,y) = -4x^2 + y^2 + x^4 + x^2y^2 + y^4$$

不难求得 $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, $f''_{xx}(0,0) = -8$, $f''_{xy}(0,0) = 0$, $f''_{yy}(0,0) = 2$. 于是点 $(0,0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的驻点, 且 $A = -8$, $B = 0$, $C = 2$ 满足 $AC - B^2 = -16 < 0$, 故点 $(0,0)$ 不是函数 $f(x,y)$ 的极值点.

【评注】 在求解选择题时常可利用满足全部题设条件的特例来确定正确的选项. 本题所选的函数 $f(x,y)$ 正是满足本题全部假设条件的一个特例.

这类题目的一般解法是利用极限的充分必要条件来给出函数 $f(x,y)$ 的一般表达式, 然后进行分析. 具体作法如下: 首先由题设的极限等式可知 $f(0,0) = 0$, 其次由极限与无穷小的关系知存在满足 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = 0$ 的 $g(x,y)$ 使得

$$\frac{f(x,y) + 4x^2 - y^2}{x^4 + x^2y^2 + y^4} = 1 + g(x,y)$$

$$\Leftrightarrow f(x,y) = y^2 - 4x^2 + (x^4 + x^2y^2 + y^4)[1 + g(x,y)]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{f(x,0)}{x^2} = -4 + x^2[1 + g(x,0)], & x \neq 0 \\ \frac{f(0,y)}{y^2} = 1 + y^2[1 + g(0,y)], & y \neq 0 \end{cases}$$

由 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = 0$ 知存在 $0 < \delta < 1$ 使得当 $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ 时 $|g(x,y)| < \frac{1}{2}$, 从而这时必有

$$\begin{cases} \frac{f(x,0)}{x^2} < -4 + 1 \times \frac{1}{2} = -\frac{7}{2} \\ \frac{f(0,y)}{y^2} > 1 - 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x,0) < 0 \\ f(0,y) > 0 \end{cases}$$

这表明 $f(0,0) = 0$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

255

【答案】 D

【分析】 此问题归结为求函数

$$u = xyz (x > 0, y > 0, z > 0)$$

在条件 $x + y + z = a$ 下的最大值.

方法1 用拉格朗日乘数法.

令

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(x + y + z - a)$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = yz + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = xz + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = xy + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y + z - a = 0 \end{cases}$$

用 x, y, z 分别乘第一、二、三个方程得 $x = y = z$, 再代入最后一个方程式得

$$x = y = z = \frac{a}{3}$$

由题意最大值一定存在, 因此当 $x = y = z = \frac{a}{3}$ 时 u 取最大值 $\left(\frac{a}{3}\right)^3 = \frac{a^3}{27}$.

方法2 化为简单最值问题.

从条件 $x + y + z = a$ 中解得 $z = a - x - y$, 代入 $u = xyz$ 得 $u = xy(a - x - y)$, 转化为求函数 $u = xy(a - x - y)$ 在开区域

$$D = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0, x + y < a\}$$

中的最大值. 这个最大值一定存在, 它在 D 内的驻点达到. 令

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = y(a - x - y) - xy = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = x(a - x - y) - xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x + y = a \end{cases}$$

解得

$$x = \frac{a}{3}, y = \frac{a}{3}$$

是唯一驻点, 也就是最大值点. 因此 u 的最大值是 $u = \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} \left(a - \frac{a}{3} - \frac{a}{3}\right) = \frac{a^3}{27}$.

256

【答案】 A

【分析】 连接 OB 将原积分域分为两部分,

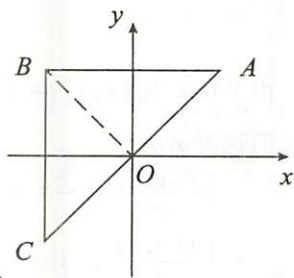
$\triangle CBO$, 记为 D_2 , $\triangle BOA$, 记为 D_3 .

由于 D_2 关于 x 轴对称, 而 $xy + \cos x \sin y$ 是 y 的奇函数, 则

$$\iint_{D_2} (xy + \cos x \sin y) d\sigma = 0$$

而 D_3 关于 y 轴对称, xy 是 x 的奇函数, $\cos x \sin y$ 是 x 的偶函数,

则



$$\iint_{D_3} xy d\sigma = 0, \iint_{D_3} \cos x \sin y d\sigma = 2 \iint_{D_1} \cos x \sin y d\sigma.$$

故应选(A).

257 【答案】 C

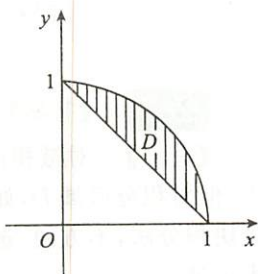
【分析】 原积分域为直线 $y = x, x + y = 2$, 与 y 轴围成的三角形区域, 故应选(C).

258 【答案】 B

【分析】 首先确定被积函数, 由于在极坐标系 (r, θ) 中面积元 $d\sigma = r dr d\theta$, 从而题设二重积分的被积函数应是 $\frac{1}{r} f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. 其次由题设知二重积分的积分区域 D 在极坐标系 (r, θ) 中的不等式表示是

$$D = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta} \leq r \leq 1 \right\}$$

这表明 D 在满足 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 的直角坐标系 Oxy 中位于第一象限, 且内外边界分别是 $r \cos \theta + r \sin \theta = 1$ 即 $x + y = 1$ 与 $r = 1$ 即 $x^2 + y^2 = 1$, 从而积分区域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 1 - x \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$, 如图所示. 故



$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}}^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr &= \iint_D f(x, y) \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\sigma \\ &= \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy \end{aligned}$$



微信扫码

应选(B).

259 【答案】 C

【分析】 原积分域应由 $x^2 + y^2 \leq 2y$ 与 $x \geq 0$ 所确定的右半圆, 故应选(C).

260 【答案】 B

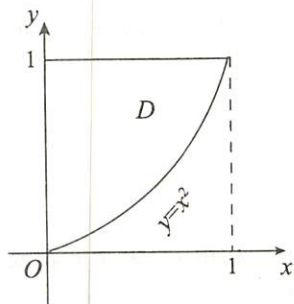
【分析】 方法1 直接计算不方便, 这是二重积分 $\iint_D \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}} d\sigma$ 的累次积分, 其中 $D: 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1$, 如图所示.

现改为先 x 后 y 的积分顺序:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}} dx = \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1+y^3}} \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^{\sqrt{y}} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{1+y^3}} dy = \frac{1}{6} \int_0^1 (1+y^3)^{-\frac{1}{2}} dy^3 \\ &= \frac{1}{6} \cdot 2(1+y^3)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}(\sqrt{2}-1) \end{aligned}$$

选(B).

方法2 用分部积分法简化计算.



微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

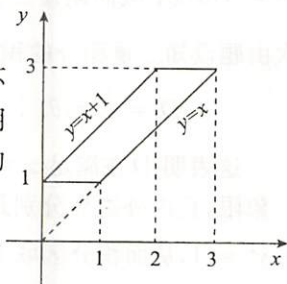
$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 \frac{y}{\sqrt{1+y^3}} dy \right) dx^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left(x^2 \int_{x^2}^1 \frac{y}{\sqrt{1+y^3}} dy \right) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 d \left(\int_{x^2}^1 \frac{y}{\sqrt{1+y^3}} dy \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \left(-\frac{x^2 \cdot 2x}{\sqrt{1+x^6}} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^5 dx}{\sqrt{1+x^6}} \\
 &= \frac{1}{6} \int_0^1 (1+x^6)^{-\frac{1}{2}} dx^6 = \frac{1}{6} \cdot 2(1+x^6)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^1 \\
 &= \frac{1}{3}(\sqrt{2}-1).
 \end{aligned}$$

261 【答案】 C

【分析】 对被积函数而言,先积 x 还是先积 y ,繁简程度差别不大.但对积分区域 D ,如右图,若先积 y 后积 x , D 的边界分段表示,要用分块积分法,不方便.选择先积 x 后积 y 的积分顺序则不必分块, D 的表示是:

$$1 \leq y \leq 3, y-1 \leq x \leq y$$

于是



$$\iint_D y d\sigma = \int_1^3 dy \int_{y-1}^y y dx = \int_1^3 y dy = \frac{1}{2} y^2 \Big|_1^3 = 4.$$

选(C).

262 【答案】 B

【分析】 因为 $x^2 + y^2 \leq 2x + 2y \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2$,从而可引入坐标轴的平移 $x-1=u, y-1=v$ 即 $x=u+1, y=v+1$,这时区域 $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 2x + 2y\}$ 变为区域 $D_1 = \{(u,v) | u^2 + v^2 \leq 2\}$.

二重积分

$$\begin{aligned}
 \iint_D (x^2 + xy + y^2) d\sigma &= \iint_{D_1} [(u+1)^2 + (u+1)(v+1) + (v+1)^2] dudv \\
 &= \iint_{D_1} [u^2 + uv + v^2 + 3(u+v) + 3] dudv \\
 &= \iint_{D_1} (u^2 + v^2) dudv + \iint_{D_1} [uv + 3(u+v)] dudv + 3 \iint_{D_1} dudv
 \end{aligned}$$

利用 D_1 关于 u 轴或 v 轴的对称性与函数 $uv + 3(u+v)$ 关于 v 或 u 是奇函数的性质可得 $\iint_{D_1} [uv + 3(u+v)] dudv = 0$,利用二重积分的几何意义可得 $\iint_{D_1} dudv = D_1$ 的面积 $= 2\pi$.

最后,在 D_1 中引入极坐标 $u = r \cos \theta, v = r \sin \theta$,则 $D_1 = \{(r,\theta) | 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \sqrt{2}\}$,于是 $\iint_{D_1} (u^2 + v^2) dudv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \cdot r dr = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r^3 dr = \frac{\pi}{2} (\sqrt{2})^4 = 2\pi$.

故 $\iint_{D_1} (x^2 + xy + y^2) d\sigma = 2\pi + 6\pi = 8\pi$. 故应选(B).

263 【答案】 D

【分析】 在二重积分 I 中积分区域 D 被直线 $y = x$ 分割成关于 $y = x$ 对称的两个部分区域 $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$, $D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\} = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$ (如图所示), 被积函数 $f(x, y)$ 关于变量 x, y 对称, 即 $f(x, y) = f(y, x)$, 从而

$$\iint_{D_1} \frac{d\sigma}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \iint_{D_2} \frac{d\sigma}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

故

$$I = \iint_D \frac{d\sigma}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 2 \iint_{D_1} \frac{d\sigma}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

设 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 在极坐标系 (r, θ) 中 D_1 可表示成 $\{(r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \theta}\}$,

所以

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} \frac{r dr}{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} \frac{d(1+r^2)}{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \Big|_0^{\frac{1}{\cos \theta}} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{\cos \theta}{\sqrt{1+\cos^2 \theta}}\right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\sin \theta)}{\sqrt{2-\sin^2 \theta}} = \frac{\pi}{2} - 2 \arcsin \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{2} - 2 \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

即应选(D).

【评注】 若区域 D 关于直线 $y = x$ 对称, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(y, x) d\sigma$.

264 【答案】 B

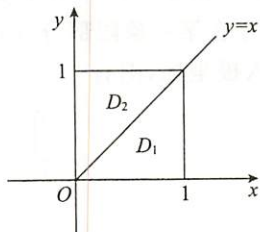
【分析】 因 $D = D_1 - D_2$, 且

$$D_1 = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\},$$

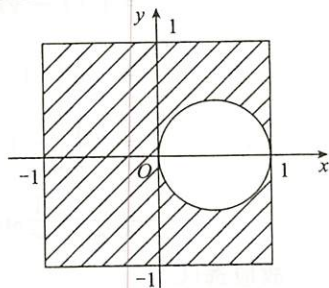
$$D_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\},$$

$$\text{于是 } \iint_D |xy| d\sigma = \iint_{D_1} |xy| d\sigma - \iint_{D_2} |xy| d\sigma.$$

由于 $|xy|$ 对于 x 或 y 都是偶函数, D_1 关于 x 轴或 y 轴都对称, 从而 $|xy|$ 在 D_1 上的积分可化简为区域 D_1 在第一象限部分 $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ 上的积分的四倍, 即



微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



$$\begin{aligned}\iint_{D_1} |xy| d\sigma &= 4 \int_0^1 dx \int_0^1 |xy| dy \\ &= 4 \int_0^1 dx \int_0^1 xy dy = 4 \int_0^1 x dx \int_0^1 y dy = 1\end{aligned}$$

由于 $|xy|$ 对于 y 是偶函数, D_2 关于 x 轴对称, 从而 $|xy|$ 在 D_2 上的积分可化简为区域 D_2 在第一象限部分 $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq x, y \geq 0\}$ 上的积分的两倍, 令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 引入极坐标, 则有

$$\begin{aligned}\iint_{D_2} |xy| d\sigma &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos \theta} r^3 \sin \theta \cos \theta dr = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{\cos \theta} r^3 dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos^5 \theta d\theta \stackrel{t = \cos \theta}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 t^5 dt = \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

故 $\iint_D |xy| d\sigma = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$. 应选(B).

265 【答案】 C

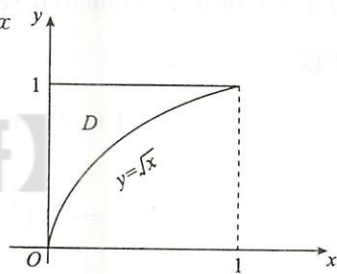
【分析】 积分区域 D 如右图. 由被积函数的特点, 应选择先 x 后 y 的积分顺序, D 表为

$$0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2$$

于是

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-y^2} dx dy &= \int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^{-y^2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^1 e^{-y^2} 2\sqrt{x} \Big|_{x=0}^{x=y^2} dy = \int_0^1 2ye^{-y^2} dy \\ &= -e^{-y^2} \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

应选(C).

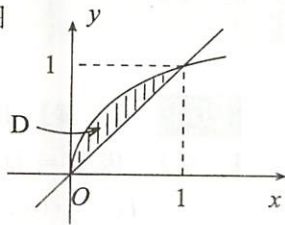


266 【答案】 C

【分析】 由题设知 $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq y\}$, 如图所示. 从而

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\sin \pi y}{y} d\sigma &= \int_0^1 dy \int_{y^2}^y \frac{\sin \pi y}{y} dx = \int_0^1 \frac{\sin \pi y}{y} dy \int_{y^2}^y dx \\ &= \int_0^1 (1-y) \sin \pi y dy = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 (1-y) d(\cos \pi y) \\ &= -\frac{1}{\pi} \left[(1-y) \cos \pi y \Big|_0^1 - \int_0^1 \cos \pi y d(1-y) \right] \\ &= -\frac{1}{\pi} \left[-1 + \int_0^1 \cos \pi y dy \right] = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \cos \pi y dy \\ &= \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi^2} \sin \pi y \Big|_0^1 = \frac{1}{\pi}.\end{aligned}$$

故应选(C).



267

【答案】C

【分析】 由于积分区域 D 分别关于 x 轴, y 轴对称, 而被积函数 $f(x, y) = \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}$ 分别是自变量 x 与 y 的偶函数. 若记 D_1 是 D 在第一象限的部分, 即

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} \leq 1\} \\ &= \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq (1 - \sqrt{x})^2\} \end{aligned}$$

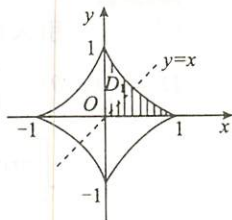
$$\text{则} \quad \iint_D (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}) d\sigma = 4 \iint_{D_1} (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}) d\sigma = 4 \iint_{D_1} (\sqrt{x} + \sqrt{y}) d\sigma.$$

又因积分区域 D_1 关于直线 $y = x$ 对称, 从而又有

$$\iint_{D_1} \sqrt{x} d\sigma = \iint_{D_1} \sqrt{y} d\sigma$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_D (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}) d\sigma &= 8 \iint_{D_1} \sqrt{x} d\sigma = 8 \int_0^1 dx \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} \sqrt{x} dy \\ &= 8 \int_0^1 \sqrt{x} (1 - \sqrt{x})^2 dx = 8 \int_0^1 \sqrt{x} (1 - 2\sqrt{x} + x) dx \\ &= 8 \int_0^1 (\sqrt{x} - 2x + x^{\frac{3}{2}}) dx = 8 \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - x^2 + \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right) \Big|_0^1 \\ &= 8 \left(\frac{2}{3} - 1 + \frac{2}{5} \right) = 8 \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{15} \end{aligned}$$



【评注】 (1) 在计算二重积分时, 要注意利用被积函数与积分区域的特点来简化计算:

① 若区域 D 关于 y 轴对称, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 0, & f(x, y) \text{ 是 } x \text{ 的奇函数} \\ 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma, & f(x, y) \text{ 是 } x \text{ 的偶函数} \end{cases}$$

其中 $D_1 = D \cap \{x \geq 0\}$.

② 若区域 D 关于 x 轴对称, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 0, & f(x, y) \text{ 是 } y \text{ 的奇函数} \\ 2 \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma, & f(x, y) \text{ 是 } y \text{ 的偶函数} \end{cases}$$

其中 $D_2 = D \cap \{y \geq 0\}$.

③ 若区域 D 关于直线 $y = x$ 对称, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(y, x) d\sigma = \frac{1}{2} \iint_D [f(x, y) + f(y, x)] d\sigma.$$

除此之外, 在计算二重积分时还要注意利用二重积分的几何意义: $\iint_D d\sigma = D$ 的面积.

(2) 我们也可利用三角函数替换来计算本题中的积分. 令 $x = \sin^4 t$, 则

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2 dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^4 t \cdot 4 \sin^3 t \cos t dt \\
 &= \frac{4}{2^5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 2t dt = \frac{1}{2^4} \int_0^{\pi} \sin^5 \theta d\theta = \frac{1}{2^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta d\theta \\
 &= \frac{1}{2^3} \times \frac{4 \times 2}{5 \times 3 \times 1} = \frac{1}{15}
 \end{aligned}$$

268 【答案】 B

【分析】 引入极坐标 (r, θ) 令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 则

$D = \left\{ (r, \theta) \mid \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, 1 \leq r \leq 3 \right\}$, 且 $\arctan \frac{y}{x} = \theta$, 故

$$\iint_D \arctan \frac{y}{x} d\sigma = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \theta d\theta \int_1^3 r dr = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{36} \right) \times \frac{1}{2} (9 - 1) = \frac{\pi^2}{6}$$

269 【答案】 C

【分析】 直接计算是不方便的, 这是二重积分

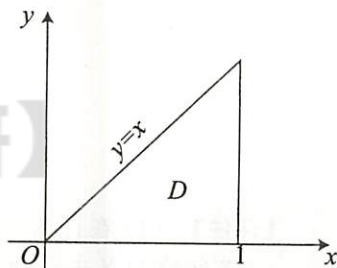
$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$ 的累次积分, 其中 $D: 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1$.

如图所示, 现改用极坐标变换, D 的极坐标表示

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \theta}$$

于是

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} r \cdot r dr = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 \theta} d\theta.$$



方法 1

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 \theta} d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d \sin \theta}{\cos^4 \theta} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d \sin \theta}{(1 - \sin^2 \theta)^2} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dt}{(1 - t^2)^2} \\
 &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right)^2 dt \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[\frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1+t)^2} \right] dt \\
 &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{1-t} + \ln \frac{1+t}{1-t} - \frac{1}{1+t} \right] \bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
 &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} + \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} \right] \\
 &= \frac{1}{4} [2\sqrt{2} + 2\ln(\sqrt{2}+1)].
 \end{aligned}$$

方法 2

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 \theta} d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos^3 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \sin \theta d \frac{1}{\cos^2 \theta} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos \theta} d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos \theta} d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos \theta} d\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d \sin \theta}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{1 - \sin \theta} + \frac{1}{1 + \sin \theta} \right) d \sin \theta \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \right| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2} + 1)
 \end{aligned}$$

因此

$$I = \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{1}{6} \ln(\sqrt{2} + 1)$$

应选(C).

270 【答案】 B

【分析】 同一积分域上二重积分大小的比较,只要比较被积函数的大小,而被积函数为同一函数 $\frac{x+y}{4}$ 的不同方幂,关键是要确定在 D 上 $\frac{x+y}{4}$ 是大于 1 还是小于 1.

由于直线 $\frac{x+y}{4} = 1$ (即 $x+y=4$) 与圆 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ 在点 $(2,2)$ 处相切,则在区域 $D: (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2$ 上, $\frac{x+y}{4} \leq 1$, 从而有

$$\frac{x+y}{4} \leq \sqrt{\frac{x+y}{4}} \leq \sqrt[3]{\frac{x+y}{4}}$$

则 $I_1 < I_2 < I_3$, 故应选(B).

271 【答案】 C

【分析】 显然在 D 上 $0 < x+y \leq 1$, 则

$$\ln(x+y)^3 \leq 0, 0 < \sin(x+y)^3 < (x+y)^3$$

$$\text{从而有} \quad \iint_D \ln(x+y)^3 dx dy < \iint_D \sin(x+y)^3 dx dy < \iint_D (x+y)^3 dx dy$$

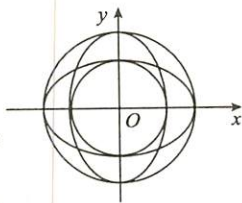
故应选(C).

【评注】 本题用到一个常用的不等式,即

$$\sin x < x < \tan x, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

272 【答案】 D

【分析】 $D_1: x^2 + y^2 \leq 1, D_2: x^2 + y^2 \leq (\sqrt{2})^2$ 为圆域,
 $D_3: \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} + y^2 \leq 1, D_4: x^2 + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} \leq 1$ 为椭圆域, 它们的关系如图所示.



被积函数 $f(x, y) = 1 - (x^2 + \frac{1}{2}y^2)$ 为连续函数, 在 D_4 上 $f(x, y) \geq 0, \neq 0$, 而在 D_4 之外 $f(x, y) \leq 0, \neq 0$.

因 $D_4 \supset D_1 \Rightarrow I_4 > I_1$, D_4 与 D_2 的公共部分是 D_4 , D_2 的其余部分 $f(x, y) \leq 0, \neq 0 \Rightarrow I_4 > I_2$. D_4 与 D_3 的公共部分记为 D^* , D_4 的其余部分 $f(x, y) \geq 0, \neq 0$, 而 D_3 的其余部分 $f(x, y) \leq 0, \neq 0 \Rightarrow I_4 > I_3$.

因此 $\max\{I_1, I_2, I_3, I_4\} = I_4$. 故选(D).

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

273 【答案】 C

【分析】 由积分中值定理知

$$\iint_{x^2+y^2 \leq r^2} f(x,y) dx dy = \pi r^2 f(\xi, \eta)$$

其中 (ξ, η) 为圆域 $x^2 + y^2 \leq r^2$ 上的一个点,则

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} f(\xi, \eta) = f(0,0)$$

$$\text{而 } \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^2}{g(r^2)} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{2r}{2rg'(r^2)} = \frac{1}{a}.$$

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\iint_{x^2+y^2 \leq r^2} f(x,y) dx dy}{g(r^2)} = \frac{\pi}{a} f(0,0)$$

274 【答案】 C

【分析】 等式 $f(x,y) = xy + \iint_D f(u,v) du dv$ 两端积分得

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_D xy dx dy + \iint_D f(u,v) du dv \cdot \iint_D dx dy$$

$$\iint_D xy dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} xy dy = \frac{1}{12}$$

$$\iint_D dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy = \frac{1}{3}$$

$$\text{则 } \iint_D f(x,y) dx dy = \frac{1}{8}$$

$$f(x,y) = xy + \frac{1}{8}.$$

275 【答案】 C

【分析】 $\int_0^1 dx \int_0^{f(x)} g(t) dt = \int_0^1 \left[\int_0^{f(x)} g(t) dt \right] dx$ (利用分部积分法)

$$= x \int_0^{f(x)} g(t) dt \Big|_0^1 - \int_0^1 xg[f(x)]f'(x) dx$$

$$= 0 - \int_0^1 x^2 f'(x) dx = - \int_0^1 x^2 df(x)$$

$$= -x^2 f(x) \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 xf(x) dx$$

$$= 2 \int_0^1 xf(x) dx = 2022.$$

难吗? 不会做? 可以看
《数学复习全书·基础篇》
高数第九章
二重积分

线性代数

填空题

276 【答案】 -15

【分析】 行列式结构上没有特殊规律,就用展开公式,但要先做0.可按第一行也可按第一列展开:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -15.$$

277 【答案】 -12

【分析】 先将第一行的-3倍加到第四行(或第四列的-2倍加到第一列)再注意公式

$$\begin{vmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} a_1 a_2 \cdots a_n.$$

278 【答案】 -3

【分析】 把每行都加到第一行,有

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ = 3 \cdot (-1)^{\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3} \cdot 1 \cdot (-1)^3 = -3$$

279 【答案】 -120

【分析】 把第一行加到第四行,提出公因数10,再把第四行逐行互换到第一行,由范德蒙行列式,得

$$D = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix} \\ = -10(2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3) \\ = -120.$$



微信扫码

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

280 【答案】 75

【分析】 按第一列展开

$$D = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 16 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 75$$

或利用拉普拉斯展开式

$$D = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 75$$

【评注】 拉普拉斯展开式的两种特殊情况应当会用

$$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A| |B|$$

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| |B| \quad (\text{这里 } A, B \text{ 分别是 } m \text{ 阶与 } n \text{ 阶方阶})$$

本题直接由一行(列)展开计算也不困难,但要注意,

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} \neq a_1 a_2 a_3 a_4 -$$

$b_1 b_2 b_3 b_4$, 勿犯此类低级错误.

281 【答案】 84

【分析】 除去主对角线,第二、三、四列元素一样是爪型行列式.把第一行的-1倍分别加到其它各行,有

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 84$$

【评注】 做完这6个小题,思考小结一下数字型行列式如何计算?

直接展开,做0后再展开;把每行都加到第一行;把第一行-1倍加其它各行;逐行相加;...
用过哪些公式: ∇ ; ∇ ; 拉普拉斯;范德蒙;...

282 【答案】 108

【分析】 因为

$$A + 2B = [\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4] + [2\beta, 2\gamma_2, 2\gamma_3, 2\gamma_4] = [\alpha + 2\beta, 3\gamma_2, 3\gamma_3, 3\gamma_4]$$

$$\text{故有 } |A + 2B| = |\alpha + 2\beta, 3\gamma_2, 3\gamma_3, 3\gamma_4| = 27 |\alpha + 2\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4|$$

$$= 27(|\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4| + 2|\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4|)$$

$$= 27(|A| + 2|B|) = 108$$

【评注】 矩阵行列式在考研中多次出现,当 A, B 均为 n 阶矩阵时,有 $|AB| = |A| \cdot |B|$, 但 $|A+B| \neq |A| + |B|$, 而 $|\alpha + \beta, \gamma, \delta| = |\alpha, \gamma, \delta| + |\beta, \gamma, \delta|$ 两者不要混淆.

又若三阶矩阵 $A = [\alpha, \beta, \gamma]$ 则 $kA = [k\alpha, k\beta, k\gamma]$ 那么 $|kA| = k^3 |A|$, 而 $|k\alpha, \beta, \gamma| = k |A|$ 两者也不要混淆.

283 【答案】 $(-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{3}$

【分析】 由 $|kA| = k^n |A|$, $|AB| = |A| \cdot |B|$, $|A^T| = |A|$, $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ 有

$$| -A^T B^{-1} | = (-1)^n |A^T B^{-1}| = (-1)^n |A^T| \cdot |B^{-1}|$$

$$= (-1)^n |A| \cdot \frac{1}{|B|} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{3}$$

284 【答案】 4

【分析】 因 $A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = B$, 于是 $A^* B = A^* A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, 故 $|A^* B| = 4$.

285 【答案】 132

【分析】 因 $|A| = \prod \lambda_i$, 现应求出矩阵 B 的特征值.

由 $A\alpha = \lambda\alpha$ 有 $A^2\alpha = \lambda^2\alpha$, 故 $B\alpha = (A^2 + 2A + 3E)\alpha = (\lambda^2 + 2\lambda + 3)\alpha$.

因 A 的特征值是 $1, 2, -1$, 故 B 的特征值为

$$1^2 + 2 + 3, 2^2 + 2 \times 2 + 3, (-1)^2 - 2 + 3$$

所以 $|B| = 6 \times 11 \times 2 = 132$.

286 【答案】 8

【分析】 由 $A \sim B$ 有 $A + kE \sim B + kE$, 进而 $|A + kE| = |B + kE|$, 故

$$|A + 2E| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 8$$

【评注】 这几个抽象行列式的题在提醒大家哪些构思?

287

【答案】

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & -18 \\ 14 & 24 & 0 \end{bmatrix}$$

【分析】

$$AA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 4 & 10 & -6 \\ 7 & 16 & -9 \end{bmatrix}$$

$$AA = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ -7 & -8 & -9 \end{bmatrix}$$

$$AA - \Lambda A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & -18 \\ 14 & 24 & 0 \end{bmatrix}$$

【评注】 由本题可引深到:

设 $A = [a_{ij}]$ 是 n 阶矩阵, $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$ 则, $\Lambda A = [\lambda_i a_{ij}]$, $A \Lambda = [\lambda_j a_{ij}]$.

288

【答案】

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 24 & 0 & 0 \\ -16 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

【分析】

因为 $A = \alpha \beta^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} [2, 0, 0] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

又因 $\beta^T \alpha = [2, 0, 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 2$, 所以

$$A^3 = (\alpha \beta^T)(\alpha \beta^T)(\alpha \beta^T) = \alpha(\beta^T \alpha)(\beta^T \alpha) \beta^T = 4 \alpha \beta^T = 4A$$

【评注】 矩阵的运算要正确熟练. 注意, 若 $\alpha = (a_1, a_2, a_3)^T$, $\beta = (b_1, b_2, b_3)^T$, 则

$$A = \alpha \beta^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} [b_1, b_2, b_3] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix}$$

$$B = \beta^T \alpha = [b_1, b_2, b_3] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

前者 $\alpha \beta^T$ 是秩为 1 的三阶矩阵, 而 $\beta^T \alpha$ 是一个数.

当秩 $r(A) = 1$ 时, $A^2 = lA$, 其中 $l = \beta^T \alpha = \alpha^T \beta = \sum a_{ii}$, 进而 $A^m = l^{m-1}A$.

289

【答案】 $-3^9 A$

【分析】

由 $r(A) = 1$, 有 $A^2 = lA$, 其中 $l = \sum a_{ii}$, 则 $A^n = l^{n-1}A$.

现 $l = 2 + (-2) + (-3) = -3$, 所以 $A^{10} = -3^9 A$.

290

【答案】

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^4 & -2^4 \\ 0 & 0 & -2^4 & 2^4 \end{bmatrix}$$

【分析】

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} A^n & O \\ O & B^n \end{bmatrix}$$

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 是两行互换的初等矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{2n} = E, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{2n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) 如 $r(A) = 1$, 则 $A^n = l^{n-1}A, l = \sum a_{ii}$.

291 【答案】 E

【分析】 因为矩阵 P 可逆, 由 $PA = BP$ 得 $A = P^{-1}BP$, 那么

$$A^2 = (P^{-1}BP)(P^{-1}BP) = P^{-1}B^2P$$

$$A^{100} = P^{-1}B^{100}P = P^{-1}EP = E$$

归纳地

注意 $\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_1^n & & \\ & a_2^n & \\ & & a_3^n \end{bmatrix}.$

292 【答案】

$$\begin{bmatrix} 20 & -10 & 0 \\ -15 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

【分析】 按定义, 求出行列式 $|A|$ 的代数余子式, 有

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 20, A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -15, A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \dots$$

$$\text{所以 } A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -10 & 0 \\ -15 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

或者, 由 $A^* = |A|A^{-1}$, 现在 $|A| = -10, A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$

$$\text{而得 } A^* = -10 \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -10 & 0 \\ -15 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

【评注】 用定义法求伴随矩阵时, 要防止两种错误: 求代数余子式不要丢掉正负号 $(-1)^{i+j}$; 组装伴随矩阵时不要排错位置.

本题 $A^{-1}, |A|$ 均好计算, 所以用 $A^* = |A|A^{-1}$ 求 A^* 是较方便的. 求伴随矩阵的这两种方法都要掌握.

293 【答案】

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

【分析】 因为 $AA^* = |A|E$, 故 $A = |A|(A^*)^{-1}$, 由已知得 $|A^*| = -8$, 又 $|A^*| = |A|^3$, 得 $|A| = -2$.

$$\text{又 } (A^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{所以 } A = |A|(A^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

【评注】 由 A 可求 A^* , 由 A^* 也应会求 A . 本题求 $(A^*)^{-1}$ 时, 既可用初等行变换也可用分块矩阵求逆公式.

294

【答案】

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

【分析】 由 $AA^* = |A|E$, 有

$$(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A = |A^{-1}|A$$

因为 $(A^{-1})^{-1} = A$, 求出 A^{-1} 的逆矩阵就是求出矩阵 A .

$$\begin{aligned} (A^{-1} | E) &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$= (E | A) \text{ 可知 } A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

又因 $|A^{-1}| = 2$. 故

$$(A^*)^{-1} = |A^{-1}|A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

295

【答案】

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

【分析】 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}, (ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}.$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1} &= 3A^{-1} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

记住初等矩阵逆矩阵的 3 个公式, 以及左乘行变换右乘列变换的法则.

296 【答案】 $E - A$

【分析】 由 $A^3 + 3A^2 + 3A + E = A^3 - 6A^2 + 12A - 8E$
 $\Rightarrow A^2 - A = -E$
 $\Rightarrow A(E - A) = E$

297

【答案】

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

【分析】 由 $AB = A + B$ 有 $AB - A - B + E = E$.
 即 $A(B - E) - (B - E) = E$, 即 $(A - E)(B - E) = E$,

$$\therefore (A - E)^{-1} = B - E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

298

【答案】

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 13 \\ 1 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

【分析】 利用分块矩阵, 有

$$A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

其中 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 可逆. 上式两边右乘 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^{-1}$.

$$\begin{aligned}\text{那么 } A &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 13 \\ 1 & -3 & -6 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

【评注】 当 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 0$, $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 不可逆时, 你能求出 A 来吗?

299

【答案】

$$\begin{bmatrix} 2-t & 3-u \\ t & u \end{bmatrix}, t, u \text{ 为任意实数}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

【分析】 由于矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ 不可逆,故可设 $A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$,于是

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

得方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 = 4 \\ y_1 + y_2 = 3 \\ 2y_1 + 2y_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - t \\ x_2 = t \\ y_1 = 3 - u \\ y_2 = u \end{cases}$$

所以 $A = \begin{bmatrix} 2-t & 3-u \\ t & u \end{bmatrix}$, t, u 是任意常数.

【评注】 由于方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} y_1 + y_2 = 3 \\ 2y_1 + 2y_2 = 6 \end{cases}$ 的系数矩阵完全一样,区别仅在常数项,所以解这一类方程组可以合并在一起加减消元. 即

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

由 $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$ 可得 $\begin{cases} x_1 = 2 - t \\ x_2 = t \end{cases}$ 由 $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$ 可得 $\begin{cases} y_1 = 3 - u \\ y_2 = u \end{cases}$

请你用这种方法判断矩阵方程

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a+2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ a+3 & a+6 & a+4 \end{bmatrix}$$

无解的条件.(答案 $a = -1$)

300

【答案】

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

【分析】 因 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, 矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ 可逆,记其为 B , 记 $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

对已知条件 $AB = C$, 右乘 B^{-1} 有

$$\begin{aligned} A = CB^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

有同学得 $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -2 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$?

301

【答案】

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

【分析】 由 $BA = A + 2B$ 有 $B(A - 2E) = A$,

因 $A - 2E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 可逆, 故

$$B = A(A - 2E)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

注意 $A - 2E$ 是初等矩阵.

302

【答案】

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

【分析】 化简矩阵方程, 矩阵方程两边左乘 A^{-1} 、右乘 A 有
 $2B = BA + 6E$

于是 $B(2E - A) = 6E$

$$\text{所以 } B = 6(2E - A)^{-1} = 6 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= 6 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

【评注】 二阶矩阵的伴随矩阵有规律: 主对角线对调, 副对角线变号, 即

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

因此二阶矩阵求逆用 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$ 是简捷的.

对于分块矩阵, 要会用两个公式

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}.$$

另外 $kA = [ka_{ij}]$ 不要出错. 不要与行列式性质混淆.

这 4 个求矩阵 A 和 B 的题目是不是有两种思路:

(1) 求逆矩阵和矩阵运算得到矩阵 A ; (2) 解方程组, 用方程组的解构造矩阵 A .

303

【答案】 $a \neq 3$

【分析】 经初等变换矩阵秩不变

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 4 \\ 0 & 1 & a-2 & 4-a \\ 0 & 0 & (a+1)(3-a) & a(a-3) \end{bmatrix}$$

$r(A) = 3 \Leftrightarrow (a+1)(3-a)$ 与 $a(a-3)$ 不全为 0 $\Leftrightarrow a \neq 3$.

304 【答案】 2

【分析】 由 $AB + 2A = A(B + 2E)$, 而

$$B + 2E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

是可逆矩阵, 故 $r(AB + 2A) = r(A(B + 2E)) = r(A)$

经初等变换矩阵的秩不变, 易见

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $r(AB + 2A) = 2$.

305 【答案】 2

【分析】 因 $r(A) = A$ 的列秩.

由 α_1, α_2 坐标不成比例知 α_1, α_2 线性无关, 于是 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \geq 2$, 又三维向量 α_4 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 必有 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 有 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) < 3$.

从而有 $r(A) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$.

306 【答案】 2

【分析】 $r(A^T) = r(A)$, 又齐次方程组 $Ax = 0$ 的基础解系中, 解向量的个数为 $n - r(A)$. 因 $n - r(A) = 4 - r(A) = 2$ 知 $r(A) = 2$, 故 $r(A^T) = 2$.

307 【答案】 4

【分析】 由 $A \sim B$ 有 $A + kE \sim B + kE$, 进而 $r(A + kE) = r(B + kE)$.

$$\text{于是 } A - E \sim B - E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, A + E \sim B + E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

从而 $r(A - E) + r(A + E) = r(B - E) + r(B + E) = 2 + 2 = 4$.

【评注】 建议你把这 5 个与矩阵秩相关的小题目串联思考一下.

308 【答案】 -3

【分析】 $A_{3 \times 3} \cong B_{3 \times 3} \Leftrightarrow r(A) = r(B)$

$$\text{其中 } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, r(B) = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & a+3 \end{bmatrix}, r(A) = 2 \Leftrightarrow a = -3.$$

故 $A \cong B \Leftrightarrow a = -3$.

309 【答案】 3 或 4

【分析】 矩阵 A 和 B 等价 $\Leftrightarrow r(A) = r(B)$. 由

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{vmatrix} = -(a+1)(a-3)$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (a+1)(4-a)$$

当 $a = 3$ 时, $r(A) = 2, r(B) = 3$; 当 $a = 4$ 时, $r(A) = 3, r(B) = 2$, 所以 $a = 3$ 或 $a = 4$ 时, 矩阵 A 和 B 不等价.

310 【答案】 5

【分析】 n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = 0$.

$$|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & -7 & t-6 \end{vmatrix} = -7(t-5)$$

$\therefore t = 5$.

311 【答案】 $(-\infty, +\infty)$

【分析】 由于本题向量的个数与维数不一样, 不能用行列式去分析, 而要用齐次方程组只有零解, 或矩阵的秩等于 n 来进行分析.

$$A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & t & 5 \\ 1 & 0 & t \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & t+2 & 5 \\ 0 & -2 & t \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3-t \\ 0 & 0 & t+2 \end{bmatrix}$$

由于 $\forall t$, 恒有 $r(A) = 3$, 所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 必线性无关.

【评注】 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s \Leftrightarrow$ 方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_s\alpha_s = 0$ 只有零解.

n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| \neq 0$.

312 【答案】 -1 或 -2

【分析】 n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = 0$.

$$|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} a+1 & a & a-1 \\ 1 & -2 & -3 \\ a & 2-a & 4-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a+2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \\ a & 2-a & 4-a \end{vmatrix} = -2(a+1)(a+2)$$

本题把每行都加到第 1 行略简便.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

313 【答案】 -1

【分析】 因为 $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + a\alpha_2, 3\alpha_2 + \alpha_3$ 线性相关, 故有不全为 0 的 x_1, x_2, x_3 使

$$x_1(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3) + x_2(\alpha_1 + a\alpha_2) + x_3(3\alpha_2 + \alpha_3) = 0$$

即 $(x_1 + x_2)\alpha_1 + (2x_1 + ax_2 + 3x_3)\alpha_2 + (x_1 + x_3)\alpha_3 = 0$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 故必有

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + ax_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

因为 x_1, x_2, x_3 不全为 0, 所以上述齐次方程组有非零解. 系数行列式必为 0, 于是

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & a & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & a-2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a+1 = 0$$

从而 $a = -1$.

【评注】 若看清行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & a & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 的书写规律, 这一类填空题就很容易计算了.

另外 $[\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + a\alpha_2, 3\alpha_2 + \alpha_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & a & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$, 下面如何处理?

314 【答案】 $a \neq \frac{1}{9}$

【分析】 由于

$$[\alpha_1 - 3\alpha_3, a\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

那么 $\alpha_1 - 3\alpha_3, a\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3$ 线性无关 $\Leftrightarrow$

$$r[\alpha_1 - 3\alpha_3, a\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3] = 3$$

因 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$.

所以 $r[\alpha_1 - 3\alpha_3, a\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3] = 3$

$$\Leftrightarrow \text{矩阵} \begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{可逆} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 9a \neq 0.$$

315 【答案】 3

【分析】 设 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$, 由题意

β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示且表示法不唯一 $\Leftrightarrow$ 方程组 $Ax = \beta$ 有 ∞ 解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) < 3$

$$\bar{A} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 | \beta] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 3 \\ 1 & a & -2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a^2 - 2a - 3 & a - 3 \end{bmatrix}$$

可见 $r(A) = r(\bar{A}) < 3 \Leftrightarrow a = 3$.

316 【答案】 $a \neq 0$ 【分析】 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示 $\Leftrightarrow$ 方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$ 无解.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 1 & a \\ 2 & 4 & 6 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -14 & a-21 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

317 【答案】 $a \neq 1$ 【分析】 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可表示任一个三维向量 $\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)^T, \varepsilon_2 = (0, 1, 0)^T, \varepsilon_3 = (0, 0, 1)^T$ 等价 $\Leftrightarrow$ 秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$ $\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| \neq 0$

$$\text{由 } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & a \end{vmatrix} = 1 - a \neq 0, \text{ 所以 } a \neq 1.$$

【评注】 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 可以表示任一个 n 维向量, 那么 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 可以表示

$$\varepsilon_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)^T, \varepsilon_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)^T, \dots, \varepsilon_n = (0, 0, 0, \dots, 1)^T$$

显然, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 亦可表示 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. 于是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 可互相线性表出. 从而它们有相同的秩. 故

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = r(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = n$$

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关.反之, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 则因 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ 是 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关.从而 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出.即 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 可表示任一个 n 维向量.318 【答案】 $-\frac{1}{2}$ 【分析】 秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$ 说明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

$$\text{由 } |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} a & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a+1 & 2a+1 & 2a+1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & a \end{vmatrix} \\ = -(2a+1)(a-1)^2 = 0$$

如 $a = 1$ 时, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, 秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$ 不合题意 $\therefore a = -\frac{1}{2}$ 时 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 秩为 2.

或者, 经初等变换向量组的秩不变, 有

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} a & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1-a^2 & a-a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a \end{bmatrix}$$

如 $a = 1$, 秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$.

下设 $a \neq 1$, 有

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1+a & a \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2a+1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

319 【答案】 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$

【分析】 对 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5]$ 作初等行变换, 有

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 8 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 8 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第一, 二, 五列三阶子式不为 0, 故极大无关组可以是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$.

320 【答案】 1 或 -3

【分析】 α_1, α_2 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的极大线性无关组, 意味着秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$ 且 α_3 可由 α_1, α_2 线性表示.

因 α_1, α_2 坐标不成比例, $\forall a, \alpha_1, \alpha_2$ 必线性无关, 下面只需检查 a 为何值时 α_3 可由 α_1, α_2 线性表示.

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a+1 \\ 4 & a & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & a+1 \\ 0 & 7 & 3a+2 \\ 0 & 0 & a^2+2a-3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore a = -3 \text{ 或 } a = 1.$$

321 【答案】 $(-1, -1, 1, 0)^T, (1, -1, 0, 1)^T$

【分析】 对系数矩阵加减消元, 有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$n - r(A) = 4 - 2 = 2$$

令 $x_3 = 1, x_4 = 0$ 得 $x_2 = -1, x_1 = -1$.

令 $x_3 = 0, x_4 = 1$ 得 $x_2 = -1, x_1 = 1$.

所以基础解系为 $(-1, -1, 1, 0)^T, (1, -1, 0, 1)^T$.

322 【答案】 $(0, 2, 1, 0)^T$

【分析】 对系数矩阵作初等行变换, 化为行最简, 有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -7 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由 $r(A) = 3, n - r(A) = 4 - 3 = 1$, 基础解系由 1 个解向量构成, x_3 为自由变量, 令 $x_3 = 1$, 解出 $(0, 2, 1, 0)^T$ 为基础解系.

323 【答案】 -5 或 -6

【分析】 齐次方程组 $Ax = 0$ 有无穷多解的充分必要条件是 $r(A) < n$ (n 是未知量的个数). 现在是三个未知数三个方程的齐次方程组, 故可以用系数行列式 $|A| = 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -3 & 3 \\ 1 & a+2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ 1 & a+5 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ = (a+5) \begin{vmatrix} a & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (a+5)(-a-6) = 0$$

故 $a = -5$ 或 $a = -6$.

【评注】 对 n 个未知数 n 个方程的齐次线性方程组作是否有非零解的判定时, 既可以用秩也可以用行列式. 如果方程个数与未知数个数不相等, 那么一定用秩.

324 【答案】 $a = 1$

【分析】 $Ax = b$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) < n$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a-3 \\ 1 & a & 1 & -2 \\ 1 & 1 & a & -2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a-3 \\ 1-a & a-1 & 0 & 1-a \\ 1-a & 0 & a-1 & 1-a \end{array} \right]$$

如 $a = 1, r(A) = r(\bar{A}) = 1 < 3$, 方程组有无穷多解,

如 $a \neq 1$

$$\bar{A} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a-3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} a+2 & 0 & 0 & a-1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

此时方程组可能唯一解, 可能无解, 不存在无穷多解.

从而仅 $a = 1$, 方程组有无穷多解.

或者 $|A| = (a+2)(a-1)^2$, 方程组有无穷多解的必要条件 $|A| = 0$.

然后按 $a = 1, a = -2$ 分别讨论 $Ax = b$ 解的情况亦可.

325 【答案】 4

【分析】 基础考题, 由特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ -2 & \lambda-2 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ -2 & \lambda-2 & 2 \\ 0 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -2 & \lambda-4 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-4)$$

326 【答案】 5,0,0

【分析】

$$A = \alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} [1, 0, 2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

是秩为1的矩阵,其特征值为 $\sum a_{ii}, 0, 0$ 即5,0,0.

【注意】 $\alpha^T\alpha = [1, 0, 2] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 + 0 + 4 = \sum a_{ii}.$

327 【答案】 -5

【分析】 设 α 是矩阵 A^{-1} 属于特征值 λ_0 的特征向量,按定义有 $A^{-1}\alpha = \lambda_0\alpha$,于是 $\alpha = \lambda_0 A\alpha$. 即

$$\begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_0 \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & a & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{cases} \lambda_0(-a+2+2) = a & (1) \\ \lambda_0(2a+a-2) = 1 & (2) \\ \lambda_0(2a-2-1) = 1 & (3) \end{cases}$$

由(2)或(3)知 $\lambda_0 \neq 0$, (2)-(3)易见 $a = -1$, 那么 $\lambda_0 = -\frac{1}{5}$. 因为 A 和 A^{-1} 的同一个特征向量对应的特征值互为倒数,故 α 是矩阵 A 中 $\lambda = -5$ 所对应的特征向量.

【评注】 若已知 A 的特征向量,通常可用定义法,由 $A\alpha = \lambda\alpha$ 建立方程组来求参数. 本题不要去求 A^{-1} ,而要通过转换.

328 【答案】 $k(0, 2, 1)^T, k \neq 0$

【分析】 由特征多项式

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & -2 \\ 0 & \lambda+1 & -4 \\ 1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 2\lambda-2 \\ 1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & 0 \\ -2 & \lambda+1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda+5) \end{aligned}$$

对 $\lambda = 1$, 由 $(E-A)x = 0$

$$E - A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得基础解系 $\alpha = (0, 2, 1)^T$.

所有特征向量为: $k(0, 2, 1)^T, k \neq 0$.

329 【答案】 $k(1,1,1)^T, k \neq 0$.

【分析】 矩阵 A 各行元素之和均为 5, 即

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + a_{13} = 5 \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} = 5 \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} = 5 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{即} \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

330 【答案】 $k(0,1,1)^T$ (k 是非零的任意常数)

【分析】 因为 A 是实对称矩阵, 不同特征值的特征向量相互正交, 设 $\lambda = -2$ 的特征向量是 $\alpha_3 = (x_1, x_2, x_3)^T$, 那么

$$\begin{cases} \alpha_1^T \alpha_2 = 4 - 2 - 2a = 0 \\ \alpha_3^T \alpha_1 = x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ \alpha_3^T \alpha_2 = 4x_1 - x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$$

可先求出 $a = 1$, 再由

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

得到基础解系 $(0,1,1)^T$, 所以 $\alpha_3 = (0, k, k)^T, k \neq 0$.

331 【答案】 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, k_1, k_2$ 不全为 0

【分析】 因 $P^{-1}AP = \Lambda$, 知 Λ 是 A 的特征值, 故 A 的特征值为 $1, 1, -1$.

当 $P^{-1}AP = \Lambda$ 时, $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 是 A 的相应的特征向量, 从而 $\lambda = 1$ 的特征向量为 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, k_1, k_2$ 不全为 0.

332 【答案】 2

【分析】 由相似的性质: $\sum a_{ii} = \sum b_{ii}$ 及 $|A| = |B|$, 有

$$\begin{cases} 3 + a + 3 = 3 + 4 + (-1) \\ 3(3a - 2b) = -12 \end{cases}$$

可解出 $b = 2$.

333 【答案】 -2

【分析】 因为 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & -a \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 3)^2$

所以矩阵 A 的特征值为 $2, 3, 3$. 因为矩阵 A 的特征值有二重根, 所以

$A \sim \Lambda \Leftrightarrow \lambda = 3$ 有两个线性无关的特征向量

$\Leftrightarrow (3E - A)x = 0$ 有两个线性无关的解

$\Leftrightarrow r(3E - A) = 1$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$\text{那么 } 3E - A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -a-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{可见 } a = -2.$$

【评注】 A 是上三角阵,可直接得出其对角元素即是其特征值.

334 【答案】 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

【分析】 据已知条件,有

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{记 } P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三维线性无关的列向量知 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| \neq 0$, 故 P 是可逆矩阵, 于是由

$$AP = PB \Rightarrow P^{-1}AP = B$$

故和矩阵 A 相似的矩阵是 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

【评注】 希望你还能求出矩阵 A 的特征值和特征向量.

提示:特征值为 $2, -1, -1$, 相应的特征向量: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3; \alpha_2 - \alpha_1, \alpha_3 - \alpha_1$.

335 【答案】 $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

【分析】 因为实对称矩阵特征值不同特征向量相互正交.

设 $\alpha_3 = (x_1, x_2, x_3)^T$ 是矩阵 A 属于 $\lambda = 6$ 的特征向量. 则

$$\begin{cases} \alpha_3^T \alpha_1 = x_1 - x_3 = 0 \\ \alpha_3^T \alpha_2 = x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_3 = (1, -1, 1)^T$$

由于 $\lambda = 3$ 的特征向量 α_1, α_2 不正交, 故需正交化处理

$$\text{令 } \beta_1 = \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

再单位化得

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

那么 $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ 为所求.

336 【答案】 $x_1^2 + 3x_2^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$

【分析】 二次型矩阵是唯一的, a_{ii} 是平方项 x_i^2 的系数, a_{ij} 是混合项 $x_i x_j$ 的系数的一半.
故 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = x_1^2 + 3x_2^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$

注意: $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1x_2,$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1x_2,$$

矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ 都不是对称矩阵, 虽都能表示二次型 $x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1x_2$, 但都不是二次型的矩阵.

二次型 $x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1x_2$ 的矩阵是 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

337 【答案】 0 或 5

【分析】 二次型矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$$

二次型的秩为 2, 即矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩 $r(\mathbf{A}) = 2$.

由 $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a^2 - 10a$, 且 $\mathbf{A}$ 中有二阶子式 $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

$\therefore a = 0$ 或 $a = 5$ 时, 二次型的秩为 2.

338 【答案】 $6y_1^2$

【分析】 二次型矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -1 \\ -2 & \lambda - 4 & -2 \\ -1 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 6)$$

矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值为 6, 0, 0, 故正交变换标准形为 $6y_1^2$.

339

【答案】

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$$

【分析】二次型 $f = 3x_1^2 - 5x_2^2$ 是标准形,故 $p = 1, q = 1$,所以规范形是 $y_1^2 - y_2^2$.

于是规范形矩阵是 $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$.

【评注】

若回答为 $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$ 也是正确的.

340

【答案】 $a > \frac{5}{2}$

【分析】二次型 f 的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} a & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$, 因为 f 正定 $\Leftrightarrow A$ 的顺序主子式全大于零,即

$$\Delta_1 = a > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4a - 9 > 0,$$

$$\Delta_3 = |A| = 4a^2 - 10a > 0,$$

故 f 正定 $\Leftrightarrow a > \frac{5}{2}$.

【评注】二次型 $x^T A x$ 正定 $\Leftrightarrow \forall x \neq 0$, 恒有 $x^T A x > 0 \Leftrightarrow A$ 的特征值全大于 0 $\Leftrightarrow$ 二次型的正惯性指数 $p = n \Leftrightarrow A$ 与 E 合同, 即有可逆矩阵 C 使 $A = C^T C \Leftrightarrow A$ 的顺序主子式全大于 0.

二次型 $x^T A x$ 正定的必要条件: $a_{ii} > 0$ 与 $|A| > 0$.

选 择 题

341

【答案】 B

【分析】

$$\begin{aligned} |B| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ 2a_{11} + a_{12} & 2a_{21} + a_{22} & 2a_{31} + a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & 2a_{11} + a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & 2a_{21} + a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & 2a_{31} + a_{32} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

342

【答案】 D

【分析】直接按第一列展开

$$D = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 24 - 24 = 0$$

343 【答案】 D

【分析】 $|B| = (-1)^{\frac{1}{2} \cdot 3} 4! = 24$

$$|C| = 4(-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 24$$

$$|D| = 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -24$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

344 【答案】 C

【分析】 因 $(\alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 故

$$|B| = |A| \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6|A| = 12$$

或者, 用行列式性质

$$\begin{aligned} |B| &= |\alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_2| = 3|\alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2| \\ &= 3|\alpha_3, 2\alpha_1, \alpha_2| = 6|\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2| \\ &= 6|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 6|A| = 12 \end{aligned}$$

345 【答案】 C

【分析】 本题考查行列式的性质, 分别对每个行列式作适当的列变换, 向 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3|$ 靠拢.

$$(A) |\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1| = |0, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1| = 0.$$

$$\begin{aligned} (B) |\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1| &= |2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1| \\ &= 2|\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1| \\ &= 2|\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1| \\ &= 2|\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3| = 2|A|. \end{aligned}$$

$$(C) |\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2| = |\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2| = |\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1| = |A|.$$

$$(D) |\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2| = |\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2| = |\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2| = -|A|.$$

请说出每个等号成立的理由, 作的什么变换, 用的什么性质?

或对(C) 如上题有 $(\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

则 $|C| = |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = |A| \cdot 1 = |A|$

故应选(C).

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

346 【答案】 C

【分析】 $|\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1 + 2\beta_2| = |\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1| + |\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, 2\beta_2|$
 $= -|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1| + 2|\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_2|$
 $= -a - 2|\alpha_3, \alpha_2, \beta_2, \alpha_1|$
 $= -a + 2|\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3|$
 $= -a + 2b$

347 【答案】 A

【分析】 由 $AA^* = |A|E$, 有 $|AA^*| = ||A|E|$, 即
 $|A| \cdot |A^*| = |A|^n |E|$
 即 A 可逆有 $|A| \neq 0$, 故 $|A^*| = |A|^{n-1}$.

348 【答案】 B

【分析】 由 $|kA| = k^n |A|$, $|A^*| = |A|^{n-1}$.
 $|\frac{1}{3}A^*| = (\frac{1}{3})^3 |A^*| = \frac{1}{27}(|A|)^2 = \frac{4}{27}$.

349 【答案】 B

【分析】 因 $(A-E)^{-1} = A^2 + A + E$. 有
 $(A-E)(A^2 + A + E) = E$, 即 $A^3 = 2E$

那么 $|A|^3 = |A^3| = |2E| = 2^3 |E| = 2^3$,
 故 $|A| = 2$.

350 【答案】 A

【分析】 简单的矩阵 J 在右边, 故可对 A 按列分块. 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则

$$AJ = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}).$$

故应选(A).

【评注】 希望你再计算 JA , 看看是什么情况?

351 【答案】 B

【分析】 设 $\alpha = (a_1, a_2, a_3)^T$, $\beta = (b_1, b_2, b_3)^T$,

$$\alpha^T \beta = (a_1 \ a_2 \ a_3) \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

$$\beta^T \alpha = (b_1 \ b_2 \ b_3) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

所以(B)正确.

注意: $A = \alpha\beta^T, B = \beta\alpha^T$ 都是 n 阶矩阵, $A^T = B$, 故(A)不正确. (C) 中一个是矩阵, 一个是数不可能相等. (D) 中其实是 $k\alpha^T$ 与 $k\beta^T$ 也不相同.

352 【答案】 C

【分析】 利用行列式代数余子式的定理有 $AA^* = A^*A = |A|E$,

按矩阵乘法定义, 有

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 b_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}$$

因为矩阵乘法有结合律: $A^m A^t = A^{m+t} = A^t \cdot A^m$. 又

$$(A+E)(A-E) = A^2 - E = (A-E)(A+E)$$

请你举例说明 AA^T 与 $A^T A, AA_1$ 与 $A_1 A$ 可以不相等.

353 【答案】 C

【分析】 由 $AA^* = |A|E$, 有 $(kA)(kA)^* = |kA|E$, 于是

$$(kA)^* = |kA|(kA)^{-1} = k^n |A| \cdot \frac{1}{k} A^{-1} = k^{n-1} A^*$$

所以 $(2A)^* = 2^{n-1} A^*$.

注意, $(AB)^T = B^T A^T$ 知(B)正确.

$(AB)^* = B^* A^*$ 知(D)正确.

$(kA)^T = kA^T$ 与 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$ 不要混.

354 【答案】 D

【分析】 由 $r(A^T A) = r(A)$, 因 $A^T A = O$, 有 $r(A) = r(A^T A) = 0$, 故必有 $A = O$. 即(D)正确.

若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 有 $A^2 = E$. 但 $A \neq E$ 且 $A \neq -E$,

若 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 有 $A^2 = O$, 但 $A \neq O$,

若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 有 $A^2 = A$ 且 $A \neq O$, 但 $A \neq E$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

355 【答案】 C

【分析】 由行列式乘法公式 $|AB| = |A||B|$.

当 $AB = O$ 时, 有 $|A||B| = 0$ 所以 $|A|$ 和 $|B|$ 至少有一个为 0, 即(C)正确.

令 $A = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & \\ & 1 \end{bmatrix}$, 则 $AB = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \\ & 1 \end{bmatrix} = O$,

可知(A)(B)均不正确.

令 $A = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & \\ & 0 \end{bmatrix}$, 则 $AB = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \\ & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \\ & 0 \end{bmatrix} = B$.

但 $A \neq E$, 知(D)不正确.

356 【答案】 A

【分析】 $A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$, 而 $A_{11} = (-1)^{1+1}d = d, A_{12} = (-1)^{1+2}c = -c$,

$A_{21} = (-1)^{2+1}b = -b, A_{22} = (-1)^{2+2}a = a$, 故应是(A).

二阶矩阵的伴随矩阵:主对角线互换,副对角线变号.

357 【答案】 B

【分析】 按 $A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$ 本题只要计算出 A_{31}, A_{22}, A_{13} 中两个代数余子式的值即可.

因 $A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{vmatrix} = -ab$ 可排除(A)(C). 再由 $A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0 & a \\ c & 0 \end{vmatrix} = -ac$ 可知选(B).

或者作为选择题增强条件假设 A 是可逆的. 有



微信扫码

$A^* = |A| A^{-1} = -abc \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{c} \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

亦知选(B).

358 【答案】 D

【分析】 (A)(B)(C)是基本公式. 关于(D)

$$\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB & O \\ O & BA \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} AB & O \\ O & BA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & ABA \\ BAB & O \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} AB & O \\ O & BA \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} (AB)^2 & O \\ O & (BA)^2 \end{bmatrix}$$

.....

359 【答案】 B

【分析】 本题考查分块求逆及二阶求逆, 注意

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix},$$

再根据 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$, 用二阶矩阵的伴随矩阵是主对角线对调副对角线变号, 很容易看出

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = -\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

所以应选(B).

【评注】 设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 则 $A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

360 【答案】 B

【分析】 由 $BA = B + 2E$ 有 $B(A - E) = 2E$,

$$\text{于是 } B = 2(A - E)^{-1} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2 阶矩阵求逆, 用 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$.

361 【答案】 C

【分析】 $XA + 2E = X + B$ 有 $X(A - E) = B - 2E$, 于是

$$\begin{aligned} X &= (B - 2E)(A - E)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

如果你选的是(A), 检查一下是哪里出错了? 注意矩阵乘法! 如果你选的(B) 或(D) 又是哪的问题?

362 【答案】 D

【分析】 矩阵的乘法没有交换律, A, B 可逆不能保证 $AB = BA$, 例如

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{有 } AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ 而 } BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

可知(A)(C) 均不正确.

A, B 可逆时, $A + B$ 不一定可逆, 即使 $A + B$ 可逆, 其逆一般也不等于 $A^{-1} + B^{-1}$. 例如

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ 有 } (A + B)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\text{而 } A^{-1} + B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \text{ 所以(B) 不正确.}$$

因为 A 可逆时, $A^* = |A|A^{-1}$, 故

$$(AB)^* = |AB|(AB)^{-1} = |A||B|B^{-1}A^{-1} = (|B||B^{-1}|)(|A||A^{-1}|) = B^*A^*,$$

即(D)正确.

【评注】 因为矩阵乘法没有交换律,所以中学代数的乘法公式不能用,但 $(A+E)^n$ 可用乘法公式展开.

363 【答案】 C

【分析】 $(A+A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A + A^T$

$$(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$$

$$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$$

又 $AA^* = |A|E$,所以①③④⑤均是对称矩阵.

而 $(A-A^T)^T = A^T - (A^T)^T = -(A-A^T)$ 是反对称矩阵.

364 【答案】 B

【分析】 由于 $(A+B)^T = A^T + B^T = A+B$

(A)正确.

关于(C),由 $(C^T AC)^T = C^T A^T (C^T)^T = C^T AC$ 知(C)正确.

又 $(ABA)^T = A^T B^T A^T = ABA$, (D)正确.

由于 $(AB)^T = B^T A^T = BA$,从而(B)选项的结论不正确.

注意,当 A, B 均为对称矩阵时, AB 为对称矩阵的充要条件是 $AB = BA$.

365 【答案】 C

【分析】 (A)中零行(第二行)不在矩阵的最下面.

(B)中主元所在的列(第四列)其余元素不全为0.

(D)中非0行的第1个非零元(第二行)不是1.

366 【答案】 D

【分析】 单位矩阵经过一次初等变换所得到的矩阵是初等矩阵,而(A)(B)(C)均需要单位矩阵作两次初等变换才能得到.

367 【答案】 C

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } P_2 A P_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & -3 \\ 7 & -1 & 9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

注意(A)是 $P_1 A P_2$, (B)是 $P_2 P_1 A$, (D)是 $A P_2 P_1$.

368 【答案】 B

【分析】 观察 A, B 之间的关系, 矩阵 A 的第一列加到第三列, 并再把 A 的一、三两行互换就可得到 B . (先将 A 的一、三两行互换, 再将第一列加到第三列也是一样的) 故 $B = P_2 A P_1$.

369 【答案】 B

【分析】 矩阵 A 作两次行变换可得到矩阵 B , 而 $A P_3 P_2, A P_1 P_3$ 描述的是矩阵 A 作列变换, 故应排除.

或者把矩阵 A 第一行的 2 倍加至第三行后, 再一、二两行互换可得到 B .

或者把矩阵 A 的一、二两行互换后, 再把第二行的 2 倍加至第三行亦可得到 B , 而 $P_2 P_3 A$ 正是后者. 所以应选 (B).

【评注】 本题考查行变换是左乘初等矩阵, 列变换是右乘初等矩阵. 希望能看清楚

$$P_1 P_3 A = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} + 2a_{21} & a_{32} + 2a_{22} & a_{33} + 2a_{23} \end{bmatrix},$$

$$A P_3 P_2 = A P_1 P_3 = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} + 2a_{13} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} + 2a_{23} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} + 2a_{33} & a_{33} \end{bmatrix},$$

$$A P_3 P_1 = A P_2 P_3 = \begin{bmatrix} a_{12} + 2a_{13} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} + 2a_{23} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} + 2a_{33} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

370 【答案】 A

【分析】 按已知条件, 有

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = B, B \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E, \text{ 即 } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$

$$\text{故 } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

371 【答案】 B

【分析】 由已知条件, 有

$$\begin{bmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} A = B$$

$$\text{那么 } B^{-1} = \left[\begin{bmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} A \right]^{-1} = A^{-1} \begin{bmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}^{-1} = A^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

所以 A^{-1} 的第一列乘以 $-\frac{1}{2}$ 得矩阵 B^{-1} . 故应选 B.

372 【答案】 C

【分析】 因 A 中有 2 阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$.

故 $r(A) = 2 \Leftrightarrow |A| = 0$,

$$\text{又 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & a-1 & 10 \end{vmatrix} = 15 - 5a.$$

373 【答案】 D

【分析】 注意对矩阵秩概念的理解. 当 $r(A) = r$ 时:

A 中一定有 r 阶子式不为 0, 但并不要求所有的 r 阶子式都不为 0.

A 中 $r-1$ 阶子式一定有不为 0 的, 也不要求所有的 $r-1$ 阶子式全不为 0.

而 $r+1$ 阶子式则必须全为 0.

374 【答案】 D

【分析】 (A) 中三阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, 且没有四阶子式, 其秩必为 3.

(B) 中 $\forall a$ 由于 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = a+1$ 至少有 1 个三阶子式不为 0, 其秩

必为 3.

类似地 (C) 中 a 和 $a+1$ 不可能同时为 0, 必有三阶子式不为 0, 而四阶子式一定为 0, 故其秩必为 3.

当 $a+1 = 0$ 时, 可见 (D) 的秩为 2.

375 【答案】 C

【分析】 因 A, B 均四阶非零矩阵, 那么 $1 \leq r(A) \leq 4, 1 \leq r(B) \leq 4$.

又 $AB = O$, 有 $r(A) + r(B) \leq 4$.

所以 $r(A) = 3$ 时, 必有 $r(B) = 1$, 即 (C) 正确.

当 $r(A) = 4$ 时, 只有 $r(B) = 0$, (D) 一定不可能.

而 $r(A) = 1$ 时, $r(B)$ 可能为 1, 可能为 2, 也可能为 3.

即 (A) 不一定必成立.

例如 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, B 可以是

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \dots$$

同理(B)也不是必然的.

【评注】 本题考查矩阵秩的概念以及 $AB=O$ 中关于秩的信息.

若 $AB=O$, 将 B 按列分块, $B=[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]$, 有

$$AB=A[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]=[A\beta_1, A\beta_2, \dots, A\beta_n]=[0, 0, \dots, 0].$$

从而 $A\beta_i=0 (i=1, 2, \dots, n)$, 即 β_i 是方程组 $Ax=0$ 的解. 这样向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 可由 $Ax=0$ 的基础解系线性表出, 从而 $r([\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]) \leq n-r(A)$. 故有 $r(A)+r(B) \leq n$. 以上得到的命题“若 $AB=O$, 则 $r(A)+r(B) \leq n$ ”在考试中可直接使用. 由这一命题及 $r(A) > 0, r(B) > 0$, 立刻可得出 A 与 B 的秩均小于 n .

376 【答案】 A

【分析】 因 $B \neq O$, 必有 $r(B) \geq 1$.

又 A 中有二阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, 知 $r(A) \geq 2$.

由 $AB=O$ 有 $r(A)+r(B) \leq 3$, 故必有 $r(A)=2, r(B)=1$.

377 【答案】 A

【分析】 因 A 中有二阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, 故 $r(A)=2 \Leftrightarrow |A|=0$.

$$\text{而 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & a & 2 \\ a & 4 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & a-6 & 2 \\ a & 4-2a & a \end{vmatrix} = a^2 - 2a - 8 = (a-4)(a+2)$$

当 $a=-2$ 时, $|A|=0$ 知 $r(A)=2$, 但 $a=4$ 时, 仍有 $|A|=0$, 得 $r(A)=2$, 所以 $a=-2$ 是 $r(A)=2$ 的充分而非必要条件.

378 【答案】 D

【分析】 A 是四阶矩阵, 那么由伴随矩阵秩的公式

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & \text{若 } r(A) = n \\ 1, & \text{若 } r(A) = n-1 \\ 0, & \text{若 } r(A) < n-1 \end{cases}$$

可见 $r(A^*)=1 \Leftrightarrow r(A)=3$.

对矩阵 A 作初等变换, 有

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 2 & 3 & a & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & a-2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & a-1 & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & 6-2a \end{bmatrix}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$\text{若 } a=3, \text{ 则 } A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & -1 & 1 \\ & & 2 & -1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \text{ 秩 } r(A) = 3.$$

$$\text{若 } a=2, \text{ 则 } A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & -1 & 2 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 2 \end{bmatrix}, \text{ 秩 } r(A) = 4.$$

$$\text{若 } a=1, \text{ 则 } A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & -1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & -1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \text{ 秩 } r(A) = 3.$$

所以, $a=1$ 或 $a=3$ 时均有 $r(A^*) = 1$. 应选(D).

379 【答案】 D

【分析】 向量组①是四个三维向量, 从而线性相关, 可排除(B).

由于 $(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3)$ 线性无关, 添上两个分量就可得向量组②, 故向量组②线性无关. 所以应排除(C). 向量组③中前两个向量之差与最后一个向量对应分量成比例, 于是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性相关, 那么添加 α_3 后, 故向量组③必线性相关. 应排除(A), 由排除法, 应选(D).

【评注】 关于向量组④亦可直接计算行列式, 由

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 & 14 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

而知其线性相关.

380 【答案】 D

【分析】 按定义, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, $\Leftrightarrow \exists$ 不全为 0 的 $k_1, k_2, \dots, k_s$

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

$\Leftrightarrow \exists$ 不全为 0 的 $k_1, k_2, \dots, k_s$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix} = 0 \text{ 有非零解}$$

线性相关时, 可以有某些 $k_i = 0$. (A) 不正确.

$$k_1, k_2, \dots, k_s \text{ 是齐次方程组 } (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix} = 0 \text{ 的非零解. 故(B)、(C) 均不正确.}$$

381 【答案】 C

【分析】 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 相关 $\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(t+2)(t-1)^2$$

 $t = 1$ 或 -2 . $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 无关 $\Leftrightarrow |\beta_1, \beta_2, \beta_3| \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & t+2 \\ 2 & t+4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & t+2 \\ 2 & t & 3 \end{vmatrix} = -(t+3)(t-1) \neq 0$$

 $t \neq -3$ 且 $t \neq 1$.

382 【答案】 C

【分析】 n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = 0$.

$$\text{由 } |\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{一、二两行成比例}).$$

注意 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = -c_1$, $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4| = c_1$, $|\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4| = c_3 + c_4$.

383 【答案】 A

【分析】 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)x = 0$ 有非零解

$$\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = 0$$

故(A)正确, (C)(D)均充分条件, 不是必要的.

384 【答案】 D

【分析】 必要性(反证法) 如果 $\alpha_i = k_1\alpha_1 + \dots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \dots + k_s\alpha_s$, 则 $k_1\alpha_1 + \dots + k_{i-1}\alpha_{i-1} - \alpha_i + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \dots + k_s\alpha_s = 0$.因为 $k_1, \dots, k_{i-1}, -1, k_{i+1}, \dots, k_s$ 不全为 0. 于是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关. 矛盾.充分性(反证法) 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性相关, 则有不全为 0 的 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$, 不妨设 $k_s \neq 0$, 则有 $\alpha_s = -\frac{1}{k_s}(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_{s-1}\alpha_{s-1})$. 矛盾.

注意(A)、(B)都是必要条件, 不是充分条件.

例如 $(1, 0), (0, 1), (1, 1)$.

而(C)是充分条件.

由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$ 线性无关 $\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关,但由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关 $\nRightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$ 线性无关.

385 【答案】 B

【分析】 由于(A)、(C)两个命题互为逆否命题, 一个命题与它的逆否命题要正确就全正

确,要错误就全错误.按本题的要求仅有一个命题是正确的,所以(A)、(C)均谬误.其实亦可考查下面的例子:

$\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (0, 1, 0), \alpha_3 = (0, 0, 0)$ 与 $\beta_1 = (1, 0, 0, 0), \beta_2 = (0, 1, 0, 0), \beta_3 = (0, 0, 0, 1)$.

显然 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2, r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 3$. 即当 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关时,其延伸组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可以线性无关. 所以(A)、(C)错误.

如果 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关,即有不全为0的 x_1, x_2, x_3 使 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = 0$, 即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 = 0 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \\ a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解,那么齐次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 = 0 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

必有非零解,即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关. 所以(D)错误.

【评注】 要会用定理若(I)无关,则(II)无关,即若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关,则其延伸组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 必线性无关.

386 【答案】 D

【分析】 若 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (0, 1, 0)^T$, 则 α_1, α_2 线性无关.

当 $\alpha_3 = (1, 1, 0)^T$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关;当 $\alpha_3 = (0, 0, 1)^T$ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

可知当(I)线性无关时,(II)既可能线性无关亦可能线性相关,所以(A)、(B)均错误.(C)是(A)的逆否命题,当然是错误的.

【评注】 要区分本题的(D)与上一题的(B),一个是向量个数的增减,一个是向量分量的增减两者不要混淆.

387 【答案】 B

【分析】 (III)线性相关 $\Leftrightarrow |AB| = 0 \Leftrightarrow |A| = 0$ 或 $|B| = 0$

可见应选(B).

【评注】 本题选项中,若(A)或(C)或(D)成立,则(B)成立.因是四选一的选择题,只能有一个选项正确.故(A)、(C)、(D)均可排除,应选(B).

388 【答案】 D

【分析】 用观察法

$$(A)(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_3 + \alpha_4) - (\alpha_4 + \alpha_1) = 0$$

$$(B)(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_4) + (\alpha_4 - \alpha_1) = 0$$

$$(C)(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_2 - \alpha_3) - (\alpha_3 - \alpha_4) - (\alpha_4 + \alpha_1) = 0$$

知(A)(B)(C) 均线性相关,故应选(D).

或者

$$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{由} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$\text{故 } r(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 4.$$

故(D) 必线性无关.

389 【答案】 A

【分析】 因 $(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_1) = 0$,

$$(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_2 - \alpha_3) - (\alpha_3 + \alpha_1) = 0,$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_2 + \alpha_3) - (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3) = 0,$$

知 (B)、(C)、(D) 都线性相关.

$$\text{或者 } (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{由于} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{是可逆矩阵,那么}$$

$$r(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3,$$

亦知(A) 正确.

390 【答案】 C

$$\text{【分析】 } k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = (k_1, 0, 5k_2)^T$$

若 β 是 α_1, α_2 的线性组合,则 β 的第2个坐标必须是0,而第1、第3坐标是独立的,故选(C).

391 【答案】 A

【分析】 β_1, β_2 可由 α_1, α_2 线性表示

$$\Leftrightarrow x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = \beta_1, y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 = \beta_2 \text{ 都有解.}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & -2 & b \\ 3 & -1 & a & 4 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & -10 & b-14 \\ 0 & 5 & a-12 & -17 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & -10 & b-14 \\ 0 & 0 & a-2 & -b-3 \end{array} \right]$$

$$\therefore a = 2, b = -3.$$



微信扫码

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

392 【答案】 D

【分析】 由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 知 α_1, α_2 必线性无关, 又因 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性相关, 故 α_4 必可由 α_1, α_2 线性表示. 因此 α_4 必可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示. 故应选(D).

如 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (0, 1, 0)^T, \alpha_3 = (0, 0, 1)^T, \alpha_4 = (0, 0, 0)^T$,
可知(A)(B)(C) 均不正确.

393 【答案】 B

【分析】 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, β_2 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2$ 线性无关, 从而部分组 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2$ 线性无关, 故应选(B).

取 $\alpha_1 = (1, 0, 0, 0)^T, \alpha_2 = (0, 1, 0, 0)^T, \alpha_3 = (0, 0, 1, 0)^T, \beta_2 = (0, 0, 0, 1)^T, \beta_1 = \alpha_1$, 知(A) 与(C) 选项错误.

关于选项(D), 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + \beta_2$ 线性相关, 则 $\beta_1 + \beta_2$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 而 β_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 从而 β_2 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 与假设矛盾, 从而(D) 错误.

【评注】 若仅 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出是不能推导出 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ 线性无关的, 请考查 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T, \alpha_2 = (2, 0, 0)^T, \alpha_3 = (3, 0, 0)^T, \beta = (0, 1, 0)^T$.

394 【答案】 D

【分析】 按向量组秩的定义

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \text{ 的极大线性无关组有 } r \text{ 个向量} \\ \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \text{ 中存在 } r \text{ 个向量线性无关而任意 } r+1 \text{ 个必线性相关,}$$

故应选(D).

例如向量组 $(0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)$ 的秩为 3, 包含零向量的两个或三个向量组成的向量组线性相关, (A)、(B) 都不正确.

又如向量组 $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 0)$ 的秩为 3, 任何两个向量都线性无关, (C) 不正确.

395 【答案】 C

【分析】 列向量作行变换, 有

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 7 & 2 \\ 5 & -3 & 4 & 9 & 2 \\ -1 & 4 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & -7 & -14 & -14 & -7 \\ 0 & -13 & -26 & -26 & -13 \\ 0 & 6 & 12 & 8 & 6 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可见秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = 3$.

因为三阶子式

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

所以 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是极大线性无关组, 故选 (C).

【评注】 多数情况下向量组的极大线性无关组是不唯一的. 例如, 本题中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 与 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 及 $\alpha_1, \alpha_4, \alpha_5$ 和 $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$ 等. 通常对列向量作初等行变换在将矩阵化成阶梯形矩阵之后, 选每行第一个非 0 的数所在的列 (本题是一、二、四列) 为极大线性无关组较简便. 可略去行列式为不为 0 的思考.

396 【答案】 B

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 1 & a & 1 & -2 \\ a & 1 & 1 & a+6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 3a+6 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & 3a+6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

当 $a=1$ 时, 秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)=2$,

而当 $a=-2$ 时亦有秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)=2$,

所以 $a=1$ 是秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)=2$ 的充分而非必要条件.

397 【答案】 C

【分析】 将表出关系合并成矩阵形式有

$$[\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{\text{记}}{=} [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] C = AC$$

因四个四维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 故 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4| \neq 0$. $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$ 是可逆矩阵, AC , 即对 C 作若干次初等行变换, 故有 $r(C) = r(AC) = r(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5)$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

故知 $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5) = r(C) = 3$, 故应选 (C).

398 【答案】 C

【分析】 因 $r(A) = 3, n - r(A) = 5 - 3 = 2$, 知未知数有 2 个自由变量.



微信扫码

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

去掉第三和第五列的三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$, 故 x_3, x_5 不能是自由变量.

而 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, 说明 x_2, x_5 或 x_1, x_5 或 x_2, x_3 都可

以为自由变量.

399 【答案】 B

【分析】 由于 $A\alpha_1 = b, A\alpha_2 = b$, 那么

$$A(3\alpha_1 - 2\alpha_2) = 3A\alpha_1 - 2A\alpha_2 = 3b - 2b = b,$$

$$A\left[\frac{1}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2)\right] = \frac{1}{3}A\alpha_1 + \frac{2}{3}A\alpha_2 = \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}b = b,$$

$$A\left[\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)\right] = \frac{1}{2}A\alpha_1 + \frac{1}{2}A\alpha_2 = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b = b,$$

可知 $3\alpha_1 - 2\alpha_2, \frac{1}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2), \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$ 均是 $Ax = b$ 的解.

而 $A(\alpha_1 - \alpha_2) = A\alpha_1 - A\alpha_2 = b - b = 0$, 所以 $\alpha_1 - \alpha_2$ 是 $Ax = 0$ 的解, 不是 $Ax = b$ 的解, 故应选(B).

【评注】 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 是 $Ax = b$ 的解, $k_1 + k_2 + \dots + k_t = 1$, 则 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_t\alpha_t$ 仍是 $Ax = b$ 的解. 知道这一点, $3\alpha_1 - 2\alpha_2, \frac{1}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2), \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$ 是 $Ax = b$ 的解也就一目了然了.

400 【答案】 A

【分析】 由 $A\alpha_i = b (i = 1, 2, 3)$ 有

$$A(\alpha_1 - \alpha_2) = A\alpha_1 - A\alpha_2 = b - b = 0,$$

$$A(\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3) = A\alpha_1 + A\alpha_2 - 2A\alpha_3 = b + b - 2b = 0,$$

$$A\left[\frac{2}{3}(\alpha_2 - \alpha_1)\right] = \frac{2}{3}A\alpha_2 - \frac{2}{3}A\alpha_1 = \frac{2}{3}b - \frac{2}{3}b = 0,$$

$$A(\alpha_1 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3) = A\alpha_1 - 3A\alpha_2 + 2A\alpha_3 = b - 3b + 2b = 0,$$

所以, $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3, \frac{2}{3}(\alpha_2 - \alpha_1), \alpha_1 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3$ 均是齐次方程组 $Ax = 0$ 的解.

【评注】 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解, 若 $k_1 + k_2 + \dots + k_t = 0$, 则 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_t\alpha_t$ 仍是导出组 $Ax = 0$ 的解. 知道这一关系式立即可看出本题应当选(A).

401 【答案】 C

【分析】 $Ax = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow |A| = 0$. 现

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & a \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & a-1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5(a-1)$$

$\therefore a = 1.$

402 【答案】 C

【分析】 齐次方程组 $Ax = 0$ 的基础解系有 3 层含义: (1) 齐次方程组的解; (2) 线性无关; (3) 解向量个数为 $n - r(A)$.

观察 4 个选项, 本题 (B) 中两个向量线性相关, 肯定不是基础解系, 要排除. 易见本题秩 $r(A) = 2$, 那么 $n - r(A) = 4 - 2 = 2$, 即解向量个数应为 2, 故要排除 (D). 至于 (A) 和 (C) 必有一个正确, 因此 $(-2, 2, 1, 0)^T$ 肯定是解. 那么 $(1, 2, 0, 1)^T$ 与 $(2, 2, -3, -4)^T$ 中必有一个不是解, 故要从解的角度来分析判断. 将 (A) 中的 $(1, 2, 0, 1)^T$ 代入方程, 知不是方程组的解, 故去除 (A), (或将 (C) 的 $(2, 2, -3, -4)^T$ 代入方程, 满足方程知) 所以要选 (C).

403 【答案】 B

【分析】 如果 (A) 是 $Ax = 0$ 的解, 则 (D) 必是 $Ax = 0$ 的解. 因此 (A) (D) 均不是 $Ax = 0$ 的解.

由于 α_1, α_2 是 $Ax = 0$ 的基础解系, 那么 α_1, α_2 可表示 $Ax = 0$ 的任何一个解 η , 亦即方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = \eta$ 必有解. 因为

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 & -5 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right]$$

可见第 2 个方程组无解, 即 $(2, 2, -5)^T$ 不能由 α_1, α_2 线性表示, 故 (C) 不成立, 应选 (B).

【评注】 本题知道正确的选项必在 (B) 和 (C) 中, 其实只要解其中的一个方程组就可以了, 是没有必要像现在这样解两个方程组的, 但如果有的题目确实需要解两个系数矩阵一样的方程组时, 用本题的方法是简捷可取的.

404 【答案】 C

【分析】 由于 A 是 $m \times n$ 矩阵, 知 A^T 是 $n \times m$ 矩阵, 那么 $A^T x = 0$ 是 n 个方程 m 个未知数的齐次线性方程组, 从而 $m - r(A^T) = t$.

又因 $r(A) = r(A^T)$, 所以 $r(A) = m - t$, 即应当选 (C).

【评注】 要搞清楚齐次方程组基础解系中解向量的个数与系数矩阵秩之间的关系. 对于用矩阵形式给出的方程组要看清方程的个数以及未知数的个数 (即若 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则 $Ax = 0$ 是 m 个方程 n 个未知数的方程组), 本题还涉及 $r(A) = r(A^T)$ 这一关系式.

405 【答案】 B

【分析】 因为 α_1, α_2 线性无关, 所以 $Ax = 0$ 至少有两个线性无关的解, 故

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$n - r(A) \geq 2, \quad \text{即 } r(A) \leq 3 - 2 = 1$$

因此排除(A)(C).

对于(B)和(D),因为 α_2 不是方程组(D)的解,因此排除(D).

【评注】 先利用秩来排除,再利用解的概念来选择比较方便. 如果每个都直接代入验算是不是解会比较麻烦.

406 【答案】 D

【分析】 由已知条件知 $Ax = 0$ 的基础解系是 $Ax = 0$ 的3个线性无关的解向量所构成, 现 $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 都是 $Ax = 0$ 的解, 且

$$(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 可逆, 知 $r(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$,

即 $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 线性无关.

那 $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 是 $Ax = 0$ 的3个线性无关的解向量. 从而也是 $Ax = 0$ 的基础解系, 故应选(D).

(A)中等价向量组的向量个数不一定是3. 例如 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 就是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的等价向量组.

(B)中的解向量 $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$ 线性相关.

(C)等秩的向量组不一定是 $Ax = 0$ 的解.

407 【答案】 D

【分析】 因 η_1, η_2 是 $Ax = 0$ 的基础解系, 有 $n - r(A) = 2$.

又 A 是4阶矩阵, 故 $r(A) = 2$.

于是(A)、(C)均不正确.

$$\text{由 } A\eta_2 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = 0, \text{ 有 } \alpha_2 = 2\alpha_1,$$

排除(B), 故应选(D).

直接地, 由 $A\eta_1 = 0, A\eta_2 = 0$ 得

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 - 2\alpha_1 = 0 \end{cases}$$

如 α_3, α_4 线性相关, 不妨设 $\alpha_3 = k\alpha_4$, 则 $\alpha_1 = (3 - 3k)\alpha_4, \alpha_2 = 2\alpha_1, \alpha_3 = k\alpha_4$, 与 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 2$ 相矛盾.

408 【答案】 D

【分析】 由特征值的性质: $\sum \lambda_i = \sum a_{ii}$.

现在

$$\sum a_{ii} = 1 + (-3) + 1 = -1$$

故可排除(C).

显然, 矩阵 A 中第 2、第 3 两列成比例, 易知行列式 $|A| = 0$, 故 $\lambda = 0$ 必是 A 的特征值, 因此可排除(B).

对于(A) 和(D) 的选择, 我们可以用特殊值法, 由于

$$|E - A| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -4 & 4 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

说明 $\lambda = 1$ 不是矩阵 A 的特征值, 故可排除(A).【评注】 这一类题目最直接方法是计算 A 的特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 2 \\ -4 & \lambda + 3 & -3 \\ -2 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 2 \\ -4 & \lambda & -3 \\ -2 & \lambda & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \dots$$

另一个方法是验算, 代入 λ 值. 看那个选项中 λ 满足 $|\lambda E - A| = 0$.但是应当会用: $\sum \lambda_i = \sum a_{ii}$, $\prod \lambda_i = |A|$, 及特殊值法来排除. 也许会更方便.

409 【答案】 A

【分析】 由 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$ 可得到:

$$A^2\alpha = \lambda^2\alpha, \quad A^{-1}\alpha = \frac{1}{\lambda}\alpha, \quad (A - E)\alpha = (\lambda - 1)\alpha.$$

说明 $A^2, A^{-1}, A - E$ 与 A 的特征值是不一样的(但 A 的特征向量也是它们的特征向量). 由排除法应选(A).

或由于 $|\lambda E - A^T| = |(\lambda E - A)^T| = |\lambda E - A|$, A 与 A^T 有相同的特征多项式, 所以 A 与 A^T 有相同的特征值.

410 【答案】 D

【分析】 由 $A\alpha = \lambda\alpha$ 有 $(A + kE)\alpha = A\alpha + k\alpha = \lambda\alpha + k\alpha = (\lambda + k)\alpha$,那么当 A 的特征值为 $1, 2, -1$ 时, $A - E$ 的特征值为 $0, 1, -2$. $A + E$ 的特征值为 $2, 3, 0$. $A - 2E$ 的特征值为 $-1, 0, -3$. $A + 2E$ 的特征值为 $3, 4, 1$.又 $|A| = \prod \lambda_i$, 所以仅(D) $A + 2E$ 为可逆矩阵.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

411 【答案】 C

【分析】 若 α 是 A 的特征向量, 那么 $k\alpha$ ($k \neq 0$) 仍是 A 的特征向量. 因此, 如果 (B) 正确, 必有 (D) 正确. 所以 (B)、(D) 均不正确, 故排除 (B) 和 (D). 由 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$ 知 α 与 $A\alpha$ 的对应分量应当成比例. 对于 (A), 因



微信扫码

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

因为 $(1, 0, -1)^T$ 与 $(7, 0, 5)^T$ 坐标不成比例, 所以 $(1, 0, -1)^T$ 不是 A 的特征向量, 故 (A) 不正确, 用排除法可知应选 (C), 或直接逐项验算, 其中 (C)

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

知 $(4, -1, 2)^T$ 是 A 的对应于 $\lambda = 2$ 的特征向量, 故应选 (C).

【评注】 本题考查用定义法解题, 不要去求特征值再解方程组来判断那一个特征是特征向量.

412 【答案】 A

【分析】 设 α 是矩阵 A 属于特征值 λ 的特征向量, 按定义有

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

对应分量相等, 即有

$$\begin{cases} 3 - 4 - 3 = \lambda \\ a + 4 + 6 = -2\lambda \\ 3 - 2b - 3 = 3\lambda \end{cases}$$

可见 $\lambda = -4, a = -2, b = 6$, 所以应选 (A).

【评注】 利用特征值、特征向量的定义建立方程组, 然后求出参数的值. 这种方法是基本的, 也是重要的.

413 【答案】 D

【分析】 若 α 是 $2A$ 的特征向量, 即 $(2A)\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$.

那么 $A\alpha = \frac{\lambda}{2}\alpha$, 所以 α 是矩阵 A 属于特征值 $\frac{\lambda}{2}$ 的特征向量. 即 D 正确.

由于方程组 $(\lambda E - A^T)x = 0, (\lambda E - A^*)x = 0, (\lambda E - A^2)x = 0$ 与 $(\lambda E - A)x = 0$ 不一定同解, 所以 α 不一定是 A 的特征向量.

如 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的特征向量是 $(1, 0, 0)^T$, 而 $A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 有 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$A^2 = A^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 有 $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, 均不是 A 的特征向量.

414 【答案】 A

【分析】 方法1 由 $A\alpha_2 = 3\alpha_2$, 有 $A(-\alpha_2) = 3(-\alpha_2)$, 即当 α_2 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda = 3$ 的特征向量时, $-\alpha_2$ 仍是矩阵 A 属于特征值 $\lambda = 3$ 的特征向量. 同理 $2\alpha_3$ 仍是矩阵 A 属于特征值 $\lambda = -2$ 的特征向量.

当 $P^{-1}AP = \Lambda$ 时, P 由 A 的特征向量所构成, Λ 由 A 的特征值所构成, 且 P 与 Λ 的位置是对应一致的. 现在, 矩阵 A 的特征值是 $1, 3, -2$, 故对角矩阵 Λ 应当由 $1, 3, -2$ 构成, 因此排除 (B)、(C). 由于 $2\alpha_3$ 是属于 $\lambda = -2$ 的特征向量, 所以 -2 在对角矩阵 Λ 中应当是第二列, 故应选 (A).

方法2 由题设条件知, 若取 $Q = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, 则有

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{现取 } P = [\alpha_1, 2\alpha_3, -\alpha_2] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{\text{记}}{=} QC$$

$$\text{则 } P^{-1}AP = (QC)^{-1}AQC = C^{-1}(Q^{-1}AQ)C$$

$$= C^{-1} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & -2 \end{bmatrix} C,$$

$$\text{其中 } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{得 } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}.$$

故应选 (A).

【评注】 当 $P^{-1}AP = B$ 时, P 中列向量不是矩阵 A 的特征向量. 当 $P^{-1}AP = \Lambda$ 时, P 中列向量是矩阵 A 的特征向量, Λ 是矩阵 A 的特征值, 且 P 与 Λ 中特征向量与特征值位置要对应正确.

415 【答案】 D

【分析】 由 α_2, α_3 是 A 不同特征值的特征向量, 于是 $\alpha_2 + \alpha_3$ 不是 A 的特征向量. 所以不能是 (D).

如 α_1, α_2 是 A 关于 λ 的特征向量, 则 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \neq 0$ 仍是 A 关于 λ 的特征向量. 故 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2, -\alpha_1, 5\alpha_1$ 仍是 A 关于 $\lambda = 2$ 的特征向量. 又因 α_1, α_2 线性无关, 保证 $\alpha_2, -\alpha_1$ 线性无关, $\alpha_1 + \alpha_2, 5\alpha_1$ 线性无关, $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2$ 亦线性无关, 即 (A), (B), (C) 均可逆.

416 【答案】 B

【分析】 (A) 有 3 个不同的特征值必和对角矩阵相似. (D) 是对称矩阵必和对角矩阵相似. (B)、(C) 特征值都是 1, 1, -1, 特征值 $\lambda = 1$ 是 2 重根.

对于矩阵 B

$$E - B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{有 } r(E - B) = 2, n - r(E - B) = 3 - 2 = 1$$

即齐次方程组 $(E - B)x = 0$ 只有 1 个线性无关的解, 亦 $\lambda = 1$ 只有 1 个线性无关的特征向量, 所以 B 不能对角化.

而对于 C

$$E - C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 2 \end{bmatrix}, r(E - C) = 1, n - r(E - C) = 2$$

故 $\lambda = 1$ 有 2 个线性无关的特征向量, 可以相似对角化.

417 【答案】 B

【分析】 相似的必要条件:

$$|A| = |B|, \lambda_A = \lambda_B, r(A) = r(B), \sum a_{ii} = \sum b_{ii}$$

(A) 中, $r(A) \neq r(B)$. (C) 中 $\sum a_{ii} \neq \sum b_{ii}$, 所以排除 (A)(C).

(B) 中, 矩阵 A, B 的特征值都是 1, 2, 有两个不同的特征值

那么 $A \sim \begin{bmatrix} 1 & \\ & 2 \end{bmatrix}, B \sim \begin{bmatrix} 1 & \\ & 2 \end{bmatrix}$, 故 $A \sim B$.

(D) 中, 矩阵 A, B 特征值都是 3, 3, 二重根.

而 $3E - B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, r(3E - B) = 1, n - r(3E - B) = 2 - 1 = 1.$

即 $\lambda = 3$ 只有 1 个线性无关的特征向量, 所以 B 不能对角化, 故 A 和 B 不相似.

418 【答案】 A

【分析】 由于矩阵 A 可逆, 有

$$A^{-1}(AB)A = BA$$

按相似定义知 $AB \sim BA$. 即命题 ① 正确.

因为 $A \sim B$, 故存在可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP = B$, 那么

$$B^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^2P$$

$$B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$$

$$B^T = (P^{-1}AP)^T = P^T A^T (P^{-1})^T = [(P^{-1})^T]^{-1} A^T (P^{-1})^T$$

按相似定义知命题 ②③④ 也均正确. 故应选 (A).

【评注】 要会用定义法来分析问题.

419 【答案】 B

【分析】 由于“ k 重特征值最多有 k 个线性无关的特征向量”，那么当 $r(A_{3 \times 3}) = 1$ 时， $(0E - A)x = 0$ 必有两个线性无关特征向量. 故 $\lambda = 0$ 的重数 ≥ 2 ，即 $\lambda = 0$ 至少是二重特征值.

当然也可能三重. 例 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $r(A) = 1$, 但 $\lambda = 0$ 是三重特征值.

故应选(B).

420 【答案】 A

【分析】 (A) 中矩阵不是对称矩阵, 也就不是二次型的矩阵表示, 但主对角线 1, 3, 5 是二次型中 x_1^2, x_2^2, x_3^2 的系数且 $[(-1) + (-3)] = 2a_{12}$, $[2 + (-2)] = 2a_{13}$, $(6 + 2) = 2a_{23}$, 所以 (A) 中矩阵乘法得到的是题中的二次型.

(B)(C)(D) 虽都是对称的, 或因主对角线, 或因混合项与二次型不匹配, 都不是二次型的矩阵表示, 本题二次型矩阵应该是

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

421 【答案】 D

【分析】 二次型经正交变换标准形为 $y_1^2 + 3y_2^2 - y_3^2$.

说明二次型矩阵 A 的特征值是: 1, 3, -1.

分别求每个矩阵的特征值

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

可知应选(D).

422 【答案】 A

【分析】 (1) 用特征值

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 1 - \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1)$$

二次型经正交变换标准形是 $y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2$, 故规范形是 $z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$.

(2) 用配方法

$$\begin{aligned} f &= (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) - x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 \\ &= (x_1 - x_2)^2 - (x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2) + 2x_3^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 - (x_2 + x_3)^2 + 2x_3^2 \end{aligned}$$

亦知 $p = 2, q = 1$, 规范形为 $z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$.

423 【答案】 A

【分析】 二次型矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & -2 \\ 0 & -2 & a \end{bmatrix}$, 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - a & 2 \\ 0 & 2 & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - a - 2)(\lambda - a + 2)$$

矩阵 A 的特征值为: $2, a+2, a-2$.

又规范形为 $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 故 $a+2$ 与 $a-2$ 必一正一负.

$$\begin{cases} a+2 > 0 \\ a-2 < 0 \end{cases}$$

得 $a \in (-2, 2)$.

424 【答案】 C

【分析】 二次型正定的必要条件是: $a_{ii} > 0$.

在(D)中, 由于 $a_{33} = 0$, 易知 $f(0, 0, 1) = 0$, 与 $x \neq 0, x^T A x > 0$ 相矛盾.

二次型正定的充分必要条件是顺序主子式全大于零. 在(A)中, 二阶主子式

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

在(B)中, 三阶主子式 $\Delta_3 = |A| = -1$.

因此(A)、(B)、(D)均不是正定矩阵. 故应选(C).

对(C), 因 $D_1 = 2 > 0, D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6 > 0$,

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 10 > 0$$

故(C)是正定二次型.

【评注】 利用正定的必要条件, 先排除不正定的矩阵是方便的. 关于(C), 用顺序主子式判别最简捷. 当然, 利用特征值或配方化标准形来看正惯性指数是否为 n 也是可以的.

425 【答案】 B

【分析】 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1)$$

知矩阵 A 的特征值为 $1, 1, -1$.

$A + kE$ 的特征值为: $k+1, k+1, k-1$.

$$\begin{cases} k+1 > 0 \\ k-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow k > 1$$

基础过关



微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

2阶

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

关 键 词



微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

微信公众号：顶尖考研
(ID: djky66)

高等数学

填空题

426 【答案】 2

【分析】 这里

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ -x, & x \geq 0 \end{cases}, (\text{即 } x=0 \text{ 处左、右两侧连续地相接})$$

$g(x)$ 在 $x=0$ 连续, $g(0)=0$. 又

$$f(u) = \begin{cases} 2-u, & -1 \leq u \leq 0 \\ 2+u, & u \geq 0 \end{cases}, f(0)=2$$

$f(u)$ 在 $u=0$ 也连续, 于是复合函数 $f(g(x))$ 在 $x=0$ 连续. 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = f(g(0)) = f(0) = 2.$$

427 【答案】 0

【分析】 当 $x \in [0, 1]$ 时, $\sqrt{3}x^n \leq x^n \sqrt{x+3} \leq 2x^n$, 所以

$$\int_0^1 \sqrt{3}x^n dx \leq \int_0^1 x^n \sqrt{x+3} dx \leq \int_0^1 2x^n dx$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sqrt{3}x^n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 2x^n dx = 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n \sqrt{x+3} dx = 0$.

428 【答案】 4

【分析】 直接用等价无穷小因子替换:

$$e^t - 1 \sim t (t \rightarrow 0), 1 - \cos t \sim \frac{1}{2}t^2 (t \rightarrow 0)$$

$\Rightarrow$

$$I = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{\frac{1}{2}x(1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{\frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2}x^2} = 4.$$

429 【答案】 0

【分析】 用相消法结合洛必达法则求这个 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限, 分子、分母同除以 $(e^x)^3$.

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 e^{-x} (3 + e^{-x})}{[e^{-2x} + (1 + e^{-x})^2](e^{-x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + e^{-x}}{[e^{-2x} + (1 + e^{-x})^2](e^{-x} + 1)} \\ &= 0 \times 3 = 0 \end{aligned}$$

其中用洛必达法则易知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$.

【评注】 求 $\frac{\infty}{\infty}$ (或 $\frac{0}{0}$) 型极限的一个重要方法是: 先约去分子、分母中极限为 ∞ (或 0) 的因子, 然后可用四则运算法则.

430 【答案】 $8e$

【分析】
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left[\int_{2x-1}^{2x+1} e^{t^2} dt - \int_{-1}^1 e^{t^2} dt \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{2x-1}^{2x+1} e^{t^2} dt - \int_{-1}^1 e^{t^2} dt}{x^2}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{(2x+1)^2} - 2e^{(2x-1)^2}}{2x}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{4x^2+1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{-4x}}{x} = 8e$$

431 【答案】 $\frac{1}{10}$

【分析】 $\sin^{10} x \sim x^{10} (x \rightarrow 0)$, 用等价无穷小因子替换得

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \int_0^{x^2} \cos t^2 dt}{x^{10}}$$

再作变量替换: $u = x^2$ 得

$$I = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{u - \int_0^u \cos t^2 dt}{u^5} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos u^2}{5u^4}$$
$$= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}u^4}{5u^4} = \frac{1}{10}$$

其中 $1 - \cos u^2 \sim \frac{1}{2}u^4 (u \rightarrow 0)$.

432 【答案】 2

【分析】 将数列极限转化为函数极限, 然后用洛必达法则

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_1^n \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}} \right) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}} \right) dt$$
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_1^x \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}} \right) dt \right)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \cdot 2x}{1}$$
$$= 2$$

其中 $\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \sim \frac{1}{x} (x \rightarrow +\infty)$.

【评注】 (1) 设 $f(x), g(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 可导且 $g'(x) \neq 0$, 又 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \infty$, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A (\text{有限或 } \infty) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

即此时不必验证 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$, 就可用洛必达法则.

(2) $\ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \sim \frac{1}{\sqrt{x}} (x \rightarrow +\infty) \Rightarrow \exists x_0 > 0$, 当 $x \geq x_0$ 时

$$\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) > \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^x \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt > \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{x} - \sqrt{x_0} \quad (x > x_0)$$

$$\text{又} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x_0}) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt = +\infty.$$

433 【答案】 12

【分析】 分式极限存在, 分母的极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x^3} - 1) = 0$, $\Rightarrow$ 分子极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1 + f(x)} \ln(1 + x) - 1) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \ln(1 + x) = 0$, 又 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x| < \delta$ 时 $f(x) \neq 0$.

用等价无穷小因子替换 $\left(\begin{matrix} (1+t)^a - 1 \sim at \\ e^t - 1 \sim t \end{matrix} \right) (t \rightarrow 0)$

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} f(x) \ln(1+x)}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x^2} \cdot \frac{\ln(1+x)}{4x} \right) = 3 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \cdot \frac{\ln(1+x)}{4x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\ln(1+x)} = 3 \times 4 = 12. \end{aligned}$$

434

【答案】 $\frac{1}{6}$

【分析】 注意到 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1$.
 $\arctan x \sim x, \ln(1+x) \sim x \quad (x \rightarrow 0)$.

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^x \left(\left(\frac{\sin x}{x} \right)^x - 1 \right)}{x^3} \quad (\text{等价无穷小因子替换}) \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left(\frac{\sin x}{x} \right)^x}{x^3} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left(\frac{\sin x}{x} - 1 + 1 \right)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad (\text{等价无穷小因子替换}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

435 【答案】 $\frac{\pi}{2}$

【分析】 $I \stackrel{\text{周期性}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} n \tan(\pi \sqrt{n^2 + 1} - n\pi)$

$$\stackrel{\text{恒等变形}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} n \tan \left(n\pi \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - n\pi \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \tan \left(n\pi \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1} \right)$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$\frac{\text{等价无穷小}}{\text{因子替换}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \frac{\frac{\pi}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + 1}} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

436 【答案】 $\frac{1}{e}$

【分析】 先化简 x_n

$$\begin{aligned} x_n &= \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \right)^n = \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \right)^n \\ &= \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{-(n+1) \cdot \frac{-n}{n+1}} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= e^{-1}. \end{aligned}$$

437 【答案】 $\max\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$

【分析】 方法1 恒等变形后用幂指数运算法则. 不妨设 a_1 为最大值

$$I = a_1 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^n + \dots + \left(\frac{a_m}{a_1} \right)^n \right)^{\frac{1}{n}} = a_1 \cdot 1 = a_1.$$

方法2 用适当放大缩小法. 不妨设 $\max\{a_1, a_2, \dots, a_m\} = a_1$

则 $a_1 \leq (a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n)^{\frac{1}{n}} \leq a_1 m^{\frac{1}{n}}$

令 $n \rightarrow \infty, m^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$, 由夹逼定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n)^{\frac{1}{n}} = a_1 \text{ (即 } \max\{a_1, a_2, \dots, a_m\} \text{)}.$$

438

【答案】

$$\begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{x^2}{2}, & x \geq 2 \end{cases}$$

【分析】 当 $0 \leq x < 1$ 时, $\max\left\{1, x^n, \left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right\} = 1$;

当 $1 \leq x < 2$ 时, $\max\left\{1, x^n, \left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right\} = x^n$;

当 $x \geq 2$ 时, $\max\left\{1, x^n, \left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right\} = \left(\frac{x^2}{2}\right)^n$.

所以

当 $0 \leq x < 1$ 时, $1 \leq \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} \leq \sqrt[n]{3}$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} = 1$;

当 $1 \leq x < 2$ 时, $x \leq \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} \leq \sqrt[n]{3}x$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} = x$;

当 $x \geq 2$ 时, $\frac{x^2}{2} \leq \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} = \frac{x^2}{2}$.

$$\text{综上, } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{x^2}{2}, & x \geq 2 \end{cases}.$$

439 【答案】 $+\infty$

【分析】 显然 $a_n > 0 \Rightarrow a_n = a_{n-1}(a_{n-1} + 1) > a_{n-1} \Rightarrow a_n$ 单调上升.
若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 为有限值 $\Rightarrow a > 0$

$$\Rightarrow a = a(a+1)$$

$$\Rightarrow 1 = a+1 \Rightarrow a = 0$$

矛盾了. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

440 【答案】 $(-1, -\frac{1}{6})$

【分析】 $I = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x^3} + \frac{a}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + ax}{x^3}$

$$\frac{0}{0} \quad \text{洛必达法则} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + a}{3x^2}$$

若 $a \neq -1$, 则 $I = \infty$, 不合题意, 于是 $a = -1$ 且 $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{6}$

因此, $(a, b) = (-1, -\frac{1}{6})$.

441 【答案】 $(\frac{8}{3}, 3)$

【分析】 确定 a 与 n 使得

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x \cos x \cos 2x}{ax^n} = 1$$

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{4} \sin 4x}{ax^n} \quad \frac{0}{0} \quad \text{洛必达法则} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{anx^{n-1}}$$

$$\xrightarrow{\text{取 } n=3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(4x)^2}{a \cdot 3x^2} = \frac{8}{3a}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{3a} = 1, a = \frac{8}{3}.$$

因此 $(a, n) = (\frac{8}{3}, 3)$.

442 【答案】 $\frac{1}{2}$

【分析】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x} + \sqrt{x}}}} = \frac{1}{2}.$

443 【答案】 $(2, -3)$

【分析】 这实质上是由极限

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

确定参数 a 与 b .

首先必须有

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^4 + ax + b) = 1 + a + b = 0,$$

于是

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + ax + b}{(x-1)(x+2)} \xrightarrow[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}} \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 1} (4x^3 + a) = \frac{1}{3}(4+a) = 2$$

$\Rightarrow$

$$a = 2,$$

于是

$$b = -3$$

$$(a, b) = (2, -3).$$

444 【答案】 $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

【分析】 当 $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ 时

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1} = x^2$$

$$\begin{aligned} \text{否则 } f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{n} + x(1-x)\sin^2 \pi x}{\frac{1}{n} + \sin^2 \pi x} = \frac{x(1-x)\sin^2 \pi x}{\sin^2 \pi x} \\ &= x(1-x) \end{aligned}$$

即

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \\ x(1-x), & x \text{ 为其他值} \end{cases}$$

由此可知, $f(x)$ 在每个区间 $(k, k+1)$ 内连续, 其中 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 要进一步考察: 因

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x(1-x) = 0 = f(0)$$

即 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的连续点.

$$\lim_{x \rightarrow k} f(x) = \lim_{x \rightarrow k} x(1-x) = k(1-k) \neq f(k) = k^2 \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

因此 $f(x)$ 的间断点是 $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$.

445 【答案】 1

【分析】 $0, 1, \pi$ 是 $f(x)$ 的三个间断点.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\sin x|}{x} \cdot \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x-\pi} = -\frac{1}{\pi e}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x|}{x} \cdot \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x-\pi} = \frac{1}{\pi e}$$

所以 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|\sin x|}{x^2 - \pi x} \cdot e^{\frac{1}{x-1}} = -\infty$$

所以 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{|\sin x|}{x-\pi} \cdot \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x} = \frac{e^{\frac{1}{\pi-1}}}{\pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{|\sin x|}{x-\pi} \cdot \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x} = -\frac{e^{\frac{1}{\pi-1}}}{\pi}$$

所以 $x = \pi$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

故 $f(x)$ 的第二类间断点只有一个.

446

【答案】

$$\begin{cases} \frac{x - (1+x^2)\arctan x}{x^2(1+x^2)}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

【分析】 当 $x \neq 0$ 时, 由求导法则得

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2}x - \arctan x}{x^2} = \frac{x - (1+x^2)\arctan x}{x^2(1+x^2)}$$

当 $x = 0$ 时

方法 1 按定义

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\arctan x}{x} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{2x(1+x^2)} = 0. \end{aligned}$$

方法 2 易知 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1 = f(0)$, $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续, 又

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x^2)\arctan x}{x^2(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x^2)\arctan x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 - 2x\arctan x}{2x} = 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(0) = 0.$$

447

【答案】

$$\begin{cases} f'\left(x^2 \arctan \frac{1}{x}\right) \cdot \left(2x \arctan \frac{1}{x} - \frac{x^2}{1+x^2}\right), & x < 0 \\ f'(\ln(1+x^2)) \cdot \frac{2x}{1+x^2}, & x \geq 0 \end{cases}$$

【分析】 先考察 $\varphi(x)$ 的可导性并求导. 因 $\varphi(x)$ 在分段点 $x = 0$ 的两侧表达式不同, 因此, 要分别求出 $x = 0$ 处的左右导数以及 $x > 0$ 和 $x < 0$ 时的导数. $x = 0$ 时, 按定义求 $\varphi(x)$ 在 $x = 0$ 处的左导数为:

$$\varphi'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 \arctan \frac{1}{x}}{x} = 0$$

 $\varphi(x)$ 在 $x = 0$ 处的右导数为 $\ln(1+x^2)$ 在 $x = 0$ 的右导数:

$$\varphi'_+(0) = \left. \frac{2x}{1+x^2} \right|_{x=0} = 0$$

于是 $\varphi'(0) = 0$.

$$x > 0 \text{ 时, } \varphi'(x) = (\ln(1+x^2))' = \frac{2x}{1+x^2};$$

$$x < 0 \text{ 时, } \varphi'(x) = \left(x^2 \arctan \frac{1}{x}\right)' = 2x \arctan \frac{1}{x} - \frac{x^2}{1+x^2}.$$

因此, 由复合函数求导法得

$$\frac{d}{dx} f(\varphi(x)) = f'(\varphi(x)) \varphi'(x)$$

$$= \begin{cases} f'\left(x^2 \arctan \frac{1}{x}\right) \cdot \left(2x \arctan \frac{1}{x} - \frac{x^2}{1+x^2}\right), & x < 0 \\ f'(\ln(1+x^2)) \cdot \frac{2x}{1+x^2}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

448 【答案】 $(\sin x)^{\cos x} \left(-\sin x \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right)$

【分析】 $f(x) = e^{\cos x \ln \sin x}, f'(x) = e^{\cos x \ln \sin x} \left(-\sin x \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right)$.

449 【答案】 $-2xe^{-8x^2}, 0$

【分析】 由变限积分求导法先求得

$$\frac{dy}{dx} = 2e^{4x^2}$$

再由反函数求导法得

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{2} e^{-4x^2}$$

最后由复合函数求导法得

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} e^{-4x^2} \right) \frac{dx}{dy} = -4xe^{-4x^2} \cdot \frac{1}{2} e^{-4x^2} = -2xe^{-8x^2}$$

由原方程知, $y = 1 \Leftrightarrow x = 0, \Rightarrow \left. \frac{d^2 x}{dy^2} \right|_{y=1} = -2xe^{-8x^2} \Big|_{x=0} = 0$.

450 【答案】 $\frac{1}{2\pi}$

【分析】 当 $t \geq 0$ 时, 由 $x = 0$ 对应 $t = 0$, 相应的 $y = \frac{\pi}{2}$.

由第一个方程得

$$e^x \frac{dx}{dt} = 6t + 2\pi \Rightarrow \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 2\pi$$

再由第二个方程得

$$\sin y + t \cos y \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 1$$

因此,

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \Big|_{t=0} = \frac{1}{2\pi}.$$

451 【答案】 $\sin 2(x-y) \cos^2(x-y)$.

【分析】 这是方程式确定的隐函数 $y = y(x)$. 方程式中又含变限积分. 用隐函数求导法及变限积分求导法求解.

两边对 x 求导得

$$\begin{aligned} 2 - \sec^2(x-y)(1-y') &= \sec^2(x-y)(1-y') \\ (1-y')\sec^2(x-y) &= 1, 1-y' = \cos^2(x-y) \\ y' &= \sin^2(x-y) \end{aligned}$$

再对 x 求导得

$$\begin{aligned} y'' &= 2\sin(x-y)\cos(x-y)(1-y') \\ &= \sin 2(x-y) \cos^2(x-y) \end{aligned}$$

452 【答案】 $2x \frac{\sin x^2}{1+x^4}$

【分析】 被积函数还是变限积分

$$f(y) = \int_0^{y^2} \frac{\sin t}{t^2 + 1} dt$$

$$F(x) = \int_0^x f(y) dy$$

因此要连续用两次变限积分求导法得

$$F'(x) = f(x) = \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{1+t^2} dt$$

$$F''(x) = f'(x) = 2x \frac{\sin x^2}{1+x^4}$$

453 【答案】 $xe^{\frac{x^2}{4}} \int_0^{\frac{x}{2}} e^{-u^2} du + 1$

【分析】 被积函数含参变量 x , 先配方后再作变量替换, 化为纯变限积分函数

$$F(x) = \int_0^x e^{\frac{x^2}{4} - (\frac{x}{2} - t)^2} dt = e^{\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{-(\frac{x}{2} - t)^2} dt$$

$$\underline{u = \frac{x}{2} - t} \quad -e^{\frac{x^2}{4}} \int_{\frac{x}{2}}^{-\frac{x}{2}} e^{-u^2} du = 2e^{\frac{x^2}{4}} \int_0^{\frac{x}{2}} e^{-u^2} du$$

$$F'(x) = 2e^{\frac{x^2}{4}} \cdot \frac{1}{2}x \int_0^{\frac{x}{2}} e^{-u^2} du + 2e^{\frac{x^2}{4}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= xe^{\frac{x^2}{4}} \int_0^{\frac{x}{2}} e^{-u^2} du + 1$$

454 【答案】 $a \frac{d^2 y}{dt^2} + (b-a) \frac{dy}{dt} + cy = 0$

【分析】 由 $x = e^t$, 得 $t = \ln x$, 于是

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \right) = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x} \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) \frac{dt}{dx}$$

$$= -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2} \frac{d^2 y}{dt^2}$$

代入原方程得

$$ax^2 \left(-\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2} \frac{d^2 y}{dt^2} \right) + bx \left(\frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \right) + cy = 0$$

即

$$a \frac{d^2 y}{dt^2} + (b-a) \frac{dy}{dt} + cy = 0$$

【评注】 当 $x < 0$ 时, 作变量替换 $x = -e^t$, 即 $t = \ln(-x) = \ln|x|$, 得同样结论.

455 【答案】 $\frac{200!}{50!}$

【分析】 先写出 $f(x)$ 的麦克劳林公式

$$f(x) = x^{100} \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{k!} + o(x^{2n}) \right) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+100}}{k!} + o(x^{2n+100})$$

取 $n = 50$, 展开式中 x^{200} 项的系数是 $\frac{1}{50!} \Rightarrow f^{(200)}(0) = 200! \cdot \frac{1}{50!}$.

【评注】 由泰勒公式的唯一性知,若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处 n 阶可导,又知 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的泰勒公式

$$f(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + \cdots + A_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) \quad (x \rightarrow x_0)$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(x_0) = n!A_n.$$

456 【答案】 $y = \sqrt[3]{3}e^{\frac{1}{3}}x$

【分析】 显然 $(0,0)$ 不在曲线上,因此要先求出切点坐标,设切点坐标为 $(x_0, e^{x_0^3})$.

$y' = (e^{x^3})' = 3x^2 e^{x^3}$, 因此,切线方程为:

$$y - e^{x_0^3} = 3x_0^2 e^{x_0^3}(x - x_0)$$

把 $(0,0)$ 代入上式得 $e^{x_0^3} = 3x_0^3 e^{x_0^3}, x_0^3 = \frac{1}{3}$.

因此切线斜率为 $k = 3x_0^2 e^{x_0^3} = \sqrt[3]{3}e^{\frac{1}{3}}$

于是切线方程为

$$y = \sqrt[3]{3}e^{\frac{1}{3}}x$$

【评注】 求曲线过一已知点 (x_0, y_0) 的切线方程时,一定要考查 (x_0, y_0) 是否在曲线上,若 (x_0, y_0) 不在曲线上,则先求切点坐标,再求切线方程.

457 【答案】 $\left[\frac{2}{\pi}, 1\right)$

【分析】 先考察 $f(x)$ 的单调性.

$$f'(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \sin \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^3} \sin \frac{1}{x}$$

$$< 0 \quad (x \in \left[\frac{2}{\pi}, +\infty\right))$$

$\Rightarrow f'(x)$ 在 $\left[\frac{2}{\pi}, +\infty\right)$ 上,又

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \right) = 0$$

$\Rightarrow f'(x) > 0 \quad (x \in \left[\frac{2}{\pi}, +\infty\right)) \Rightarrow f(x)$ 在 $\left[\frac{2}{\pi}, +\infty\right)$ 上, ↗,

$$f\left(\frac{2}{\pi}\right) = \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi}, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1.$$

因此, $f(x) \quad (x \in \left[\frac{2}{\pi}, +\infty\right))$ 的值域是 $\left[\frac{2}{\pi}, 1\right)$.

458 【答案】 $-(n+1); -\frac{1}{e^{n+1}}$

【分析】 先用归纳法求 $f^{(n)}(x)$.

$$f'(x) = (x+1)e^x, f''(x) = (x+2)e^x, \dots$$

易归纳证明

$$f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$$

再求 $f^{(n)}(x)$ 的驻点. 由 $(f^{(n)}(x))' = (x+n+1)e^x = 0$ 解得 $x = -(n+1)$

$$(f^{(n)}(x))'' \Big|_{x=-(n+1)} = (x+n+2)e^x \Big|_{x=-(n+1)} > 0 \Rightarrow f^{(n)}(x) \Big|_{x=-(n+1)} = -e^{-(n+1)} \text{ 为极小值.}$$

459 【答案】 $x = 1$

【分析】 将方程 $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$ 两边对 x 求导, 得

$$6y^2 y' - 4yy' + 2y + 2xy' - 2x = 0$$

整理得

$$y'(3y^2 - 2y + x) = x - y$$

①

令 $y' = 0$, 有 $x = y$, 将其代入 $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$ 得

$$2x^3 - x^2 - 1 = (x^3 - 1) + (x^3 - x^2) = 0$$

即 $(x-1)(2x^2+x+1) = 0$, 于是 $x = 1$ 是唯一的驻点. 此时, $y = x = 1$.

进一步判断 $x = 1$ 是否极值点:

对 ① 求导 $y''(3y^2 - 2y + x) + y'(3y^2 - 2y + x)' = 1 - y'$

把 $x = 1, y = 1, y'(1) = 0$ 代入上式, 得 $y''(1) = \frac{1}{2} > 0$, 于是 $y(x)$ 只有极值点为 $x = 1$,

它是极小值点.

460 【答案】 $(-\infty, -\frac{1}{5}), -\frac{1}{5}$

【分析】 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续, 下面求 $f'(x)$ 与 $f''(x)$.

$$f'(x) = x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-1) = \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(5x-2) \quad (x \neq 0)$$

$$f''(x) = \frac{1}{3} \left[5x^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}(5x-2) \right] = \frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}} \left[x + \frac{1}{5} \right]$$

$$\begin{cases} < 0, & -\infty < x < -\frac{1}{5} \\ = 0, & x = -\frac{1}{5} \\ > 0, & -\frac{1}{5} < x < 0 \\ > 0, & 0 < x < +\infty \end{cases}$$

因此 $f(x)$ 的凸区间是 $(-\infty, -\frac{1}{5})$, 拐点的横坐标是 $x = -\frac{1}{5}$.

461 【答案】 $\frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(-2)^{n+1} n!}{(2x+1)^{n+1}}$

【分析】

$$f(x) = \frac{4x-3}{2x^2-3x-2} = \frac{1}{x-2} + \frac{2}{2x+1}$$

所以

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(-2)^{n+1} n!}{(2x+1)^{n+1}}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

462 【答案】 $y = 2x - 12$

【分析】 由连续性,

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x)] = -2f(1) = \lim_{x \rightarrow 0} [8x + \alpha(x)] = 0$$

所以 $f(1) = 0$.

由周期性, $f(6) = f(1) = 0$.

由可导性, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x)}{\sin x} = 4f'(1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x + \alpha(x)}{\sin x} = 8$, 所以 $f'(1) = 2$.

再由周期性, $f'(6) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(6+t) - f(6)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t) - f(1)}{t} = f'(1) = 2$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程为 $y = 2(x-6)$.

463 【答案】 $\left[0, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right]$

【分析】 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 连续, 求 $f(x)$ 的值域区间, 归结为分析 $f(x)$ 的单调性并求最值与 $f(0)$ 及 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$f'(x) = \frac{(1+x^2)^{3/2} - x \cdot \frac{3}{2}(1+x^2)^{1/2} \cdot 2x}{(1+x^2)^3} = \frac{1+x^2-3x^2}{(1+x^2)^{5/2}}$$

$$= \frac{1-2x^2}{(1+x^2)^{5/2}} \begin{cases} > 0, & 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ = 0, & x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ < 0, & x > \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ 上 $\nearrow$, 在 $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ 上 $\searrow$.

$\Rightarrow f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的最大值是 $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^{3/2}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$. 又

$$f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} = 0$$

因此, $f(x) (x \in [0, +\infty))$ 的值域是 $\left[0, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right]$.

464 【答案】 $y = ax + b$

【分析】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F'(x)}{x'} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x [f(t) - a] dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x g(t) dt = b$$

因此, $x \rightarrow +\infty$ 时 $y = F(x)$ 有渐近线 $y = ax + b$.

465 【答案】 $\frac{1}{3}$

$$\text{【分析】 } e^\theta = \left[\frac{2(e^x - 1 - x)}{x^2} \right]^{\frac{1}{x}} = \left[1 + \frac{2(e^x - 1 - x) - x^2}{x^2} \right]^{\frac{x^2}{2(e^x - 1 - x) - x^2} \cdot \frac{2(e^x - 1 - x) - x^2}{x^3}}$$

由洛必达法则, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^x - 1 - x) - x^2}{x^3} = \frac{1}{3}$, 于是 $\lim_{x \rightarrow 0} e^\theta = e^{\frac{1}{3}}$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{3}$.

466 【答案】 -1

【分析】 用待定系数法将被积函数分解

$$\begin{aligned}\frac{x^2+ax+2}{(x+1)(x^2+1)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2+1} = \frac{Ax^2+A+Mx^2+Mx+Nx+N}{(x+1)(x^2+1)} \\ &= \frac{(A+M)x^2+(M+N)x+(A+N)}{(x+1)(x^2+1)}\end{aligned}$$

为了不含反正切函数, 必须 $N=0$, 令 $N=0$ 并比较系数得

$$A+M=1, M=a, A=2$$

因此 $a=-1$.

467 【答案】 $\frac{1}{4}\ln(2x^2+x+1) + \frac{\sqrt{7}}{2}\arctan \frac{4x+1}{\sqrt{7}} + C$

【分析】 注意 $d(2x^2+x+1) = (4x+1)dx$, 先分解如下

$$I = \frac{1}{4} \int \frac{(4x+1)+7}{2x^2+x+1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{d(2x^2+x+1)}{2x^2+x+1} + \frac{1}{4} \int \frac{7}{2x^2+x+1} dx$$

$$\begin{aligned}\text{又 } 2x^2+x+1 &= 2\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right) = 2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} = \left(\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} \\ &= \frac{7}{8} \left[\frac{8}{7} \left(\sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 + 1 \right] = \frac{7}{8} \left[\left(\frac{4x+1}{\sqrt{7}} \right)^2 + 1 \right]\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{4} \ln(2x^2+x+1) + \frac{1}{4} \int \frac{7}{\frac{7}{8} \left[\left(\frac{4x+1}{\sqrt{7}} \right)^2 + 1 \right]} dx \\ &= \frac{1}{4} \ln(2x^2+x+1) + 2 \int \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\left(\frac{4x+1}{\sqrt{7}} \right)^2 + 1} d \frac{4x+1}{\sqrt{7}} \\ &= \frac{1}{4} \ln(2x^2+x+1) + \frac{\sqrt{7}}{2} \arctan \frac{4x+1}{\sqrt{7}} + C.\end{aligned}$$

难吗? 不会做? 可以看
《数学复习全书·基础篇》
高数第四章
不定积分

468 【答案】 $\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)$

$$\begin{aligned}\text{【分析】 } I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\cos^2 x} dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x}{1+\cos^2 x} dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \sin x}{2-\sin^2 x} + 0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sin x} + \frac{1}{\sqrt{2}-\sin x} \right) d \sin x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+\sin x}{\sqrt{2}-\sin x} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} \ln(\sqrt{2}+1).\end{aligned}$$

469 【答案】 $-\frac{\pi}{2}a^2 \ln 3$

【分析】 $I = \int_{-a}^a \sqrt{a^2-x^2} \ln(x+\sqrt{1+x^2}) dx - \int_{-a}^a \sqrt{a^2-x^2} \ln 3 dx$

由于 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数, 所以

$$\int_{-a}^a \sqrt{a^2-x^2} \ln(x+\sqrt{1+x^2}) dx = 0$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

由定积分的几何意义 $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi}{2} a^2$ (半径为 a 的半圆的面积),

$$\text{所以 } \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \ln \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{3} dx = -\frac{1}{2} \pi a^2 \ln 3.$$

【评注】 计算在对称区间上的定积分时,要注意被积函数的奇偶性. 利用 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ 是圆面积的 $\frac{1}{4}$ 的几何意义会迅速得出正确答案.

470 【答案】 $2A$

【分析】
$$\begin{aligned} \int_0^{2T} f(3x+T) dx &= \int_0^{2T} f(3x) dx \stackrel{t=3x}{=} \frac{1}{3} \int_0^{6T} f(t) dt \\ &= \frac{1}{3} \cdot 6 \int_0^T f(t) dt = 2A. \end{aligned}$$

471 【答案】 aA .

【分析】 先转化

$$\begin{aligned} \int_0^a x f(\varphi(x)) dx &\stackrel{x=a-t}{=} - \int_a^0 (a-t) f(\varphi(a-t)) dt \\ &= a \int_0^a f(\varphi(a-x)) dx - \int_0^a x f(\varphi(a-x)) dx \end{aligned}$$

代入得

$$\begin{aligned} I &= a \int_0^a f(\varphi(a-x)) dx - \int_0^a x f(\varphi(a-x)) dx + \int_0^a x f(\varphi(a-x)) dx \\ &= a \int_0^a f(\varphi(a-x)) dx = aA. \end{aligned}$$

472 【答案】 $2\arctan \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} + C$ 或 $2\arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C$ 或 $\arcsin \frac{2x-(a+b)}{b-a} + C$

【分析】 方法1 转化为被积函数中含有形如 $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ 的根式的积分

$$I = \int \frac{1}{(x-a)} \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx$$

$$\text{令 } t = \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}, \text{ 则 } x = \frac{a+bt^2}{1+t^2}, x-a = \frac{(b-a)t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2(b-a)t}{(1+t^2)^2} dt$$

于是

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{t(1+t^2)}{(b-a)t^2} \cdot \frac{2(b-a)t}{(1+t^2)^2} dt = 2 \int \frac{dt}{1+t^2} \\ &= 2\arctan \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} + C \end{aligned}$$

方法2 凑微分法

$$I = \int \frac{2d\sqrt{x-a}}{\sqrt{b-x}} = 2 \int \frac{d\sqrt{x-a}}{\sqrt{(\sqrt{b-a})^2 - (\sqrt{x-a})^2}}$$

$$= 2 \int \frac{d\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}\right)^2}} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C$$

方法3 先配方

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + (a+b)x - ab}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}} \\ &= \int \frac{d\frac{x - \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x - \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right)^2}} = \arcsin \frac{2x - (a+b)}{b-a} + C \end{aligned}$$

473 【答案】 $1 - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$

【分析】 方法1 $I = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -2 \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x d\sqrt{1-x^2}$

$$= -2 \left[\sqrt{1-x^2} \arcsin x \right]_0^{\frac{1}{2}} + 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\pi}{6} + 1 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi.$$

方法2 令 $x = \sin t$,

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{t \sin t \cos t}{\cos t} dt \\ &= -2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} t d\cos t = -2t \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos t dt = -\frac{\sqrt{3}}{6}\pi + 1. \end{aligned}$$

【评注】 计算对称区间上的定积分时,要考查被积函数的奇偶性,根据

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 0, & f(x) \text{ 为奇函数} \\ 2 \int_0^a f(x) dx, & f(x) \text{ 为偶函数} \end{cases}, \text{ 的结论来计算,可以简化计算.}$$

474 【答案】 $\frac{2}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{8}$

【分析】 这是反常积分,可以像定积分那样作积分变量变换处理.

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^4 \sqrt{x^2-2x}} = \int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^4 \sqrt{(x-1)^2-1}}$$

为消除根号,命 $x-1 = \sec t, (x-1)^2-1 = \sec^2 t-1 = \tan^2 t$. 当 $x=3$ 时, $\sec t=2, t=\frac{\pi}{3}$;

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $t \rightarrow \frac{\pi}{2}$. 从而

$$\begin{aligned}
 \int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^4 \sqrt{(x-1)^2-1}} &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec t \tan t dt}{\sec^4 t |\tan t|} \\
 &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) \cos t dt \\
 &= \left[\sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t \right] \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{3} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) \\
 &= \frac{2}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{8}
 \end{aligned}$$

475 【答案】 $-\frac{\sqrt{2}}{3}\pi + \frac{16}{9}$

【分析】 $I \stackrel{\text{分部积分}}{=} 2 \int_0^1 x \arcsin x d\sqrt{1+x}$

$$= (2x \sqrt{1+x} \arcsin x) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 \sqrt{1+x} \arcsin x dx - 2 \int_0^1 \frac{x \sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

对第二项再分部积分,对第三项化简得

$$\begin{aligned}
 I &= \sqrt{2}\pi - \frac{4}{3} \int_0^1 \arcsin x d(1+x)^{\frac{3}{2}} - 2 \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx \\
 &= \sqrt{2}\pi - \left(\frac{4}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}} \arcsin x \right) \Big|_0^1 + \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-x^2}} dx - 2 \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x}} \\
 &= \sqrt{2}\pi - \frac{4}{3} \sqrt{2}\pi + \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{1-x}} dx - \frac{6}{3} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx \\
 &= -\frac{\sqrt{2}}{3}\pi + \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{1-x+1}{\sqrt{1-x}} dx \\
 &= -\frac{\sqrt{2}}{3}\pi + \frac{2}{3} \left[-\frac{2}{3} (1-x)^{\frac{3}{2}} - 2(1-x)^{\frac{1}{2}} \right] \Big|_0^1 \\
 &= -\frac{\sqrt{2}}{3}\pi + \frac{16}{9}.
 \end{aligned}$$

476 【答案】 $\pi^2 - 2$

【分析】 方法 1

$$\begin{aligned}
 \int_{\pi}^{3\pi} f(x) dx &= \int_{\pi}^{3\pi} [f(x-\pi) + \sin x] dx = \int_{\pi}^{3\pi} f(x-\pi) dx \stackrel{t=x-\pi}{=} \int_0^{2\pi} f(t) dt \\
 &= \int_0^{\pi} f(t) dt + \int_{\pi}^{2\pi} f(t) dt = \int_0^{\pi} f(t) dt + \int_{\pi}^{2\pi} [f(t-\pi) + \sin t] dt \\
 &= \int_0^{\pi} t dt + \int_{\pi}^{2\pi} \sin t dt + \int_{\pi}^{2\pi} f(t-\pi) dt \\
 &= \frac{\pi^2}{2} - 2 + \int_0^{\pi} f(u) du = \frac{\pi^2}{2} - 2 + \frac{\pi^2}{2} = \pi^2 - 2
 \end{aligned}$$

方法 2 写出 $f(x)$ 的分段表达式:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \begin{cases} x - \pi + \sin x, & x \in [\pi, 2\pi) \\ x - 2\pi, & x \in [2\pi, 3\pi) \end{cases} \\
 \int_{\pi}^{3\pi} f(x) dx &= \int_{\pi}^{2\pi} f(x) dx + \int_{2\pi}^{3\pi} f(x) dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\pi}^{2\pi} (x - \pi + \sin x) dx + \int_{2\pi}^{3\pi} (x - 2\pi) dx \\
 &= \pi^2 - 2
 \end{aligned}$$

477 【答案】 $2e^y - ey - \frac{y+2}{e}$

【分析】 被积函数分段表示

$$f(x) = |x - y| e^x = \begin{cases} (y - x)e^x, & x \leq y \\ (x - y)e^x, & x > y \end{cases}$$

于是,以 $y (y \in (-1, 1))$ 为分界点用分段积分法得

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^y (y - x)e^x dx + \int_y^1 (x - y)e^x dx \\
 &= \int_{-1}^y (y - x) de^x + \int_y^1 (x - y) de^x \\
 &= (y - x)e^x \Big|_{-1}^y + \int_{-1}^y e^x dx + (x - y)e^x \Big|_y^1 - \int_y^1 e^x dx \\
 &= \frac{-(y+1)}{e} + e^y - \frac{1}{e} + (1 - y)e - (e - e^y) = 2e^y - ey - \frac{y+2}{e}.
 \end{aligned}$$

478 【答案】 $e^{-1} - 1$

【分析】 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^1 f(x) d\sqrt{x} = 2\sqrt{x}f(x) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 \sqrt{x}f'(x) dx.$

而 $2\sqrt{x}f(x) \Big|_0^1 = 0, \int_0^1 \sqrt{x}f'(x) dx = \int_0^1 \sqrt{x}e^{-x} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-x} dx = \frac{1}{2}(1 - e^{-1}).$

479 【答案】 $\frac{(x+1)e^{\frac{x}{2}}}{2(x+2)^{\frac{3}{2}}}$

【分析】 两边直接对 x 求导会带来复杂的运算. 命 $F(x) = \int_0^x f(t) dt + \frac{1}{\sqrt{2}}$, 以化简原式. 有

$F'(x) = f(x)$, 原式简化为

$$2F'(x)F(x) = \frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2},$$

两边积分, 得

$$\begin{aligned}
 F^2(x) &= \int \frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2} dx = - \int (x+1)e^x d\left(\frac{1}{x+2}\right) \\
 &= - \left[\frac{(x+1)e^x}{x+2} - \int \frac{1}{x+2} d(x+1)e^x \right] \\
 &= - \left[\frac{(x+1)e^x}{x+2} - \int \frac{x+2}{x+2} e^x dx \right] \\
 &= - \left[\frac{(x+1)e^x}{x+2} - e^x \right] + C = \frac{e^x}{x+2} + C.
 \end{aligned}$$

由 $F(x) = \int_0^x f(t) dt + \frac{1}{\sqrt{2}}$ 有 $F(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 代入上式得 $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} + C$, 所以 $C = 0$. 从而

$$F(x) = \sqrt{\frac{e^x}{x+2}},$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

这里开方前取“+”的原因是 $F(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$. 于是

$$f(x) = \left(\int_0^x f(t) dt + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)' = F'(x) = \frac{(x+1)e^{\frac{x}{2}}}{2(x+2)^{\frac{3}{2}}}.$$

【评注】 本题是未知函数含于变限积分中,原则上要采用两边求导以去掉变限积分,这是基本点,许多情形是这样,但对本题技巧有二点:①不直接对原题设的方程两边 x 求导;②不直接命 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 而是命 $F(x) = \int_0^x f(t) dt + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

可见读者在解题时不仅要掌握共性(这是基本之点),必要时也会利用其特殊性(这就是所谓技巧).

480 【答案】 $F(x) + C, C$ 为任意常数

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x) - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & x = \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x) + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

【分析】 $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x} dx}{\frac{1}{\cos^2 x} + \tan^2 x} = \int \frac{d \tan x}{1 + 2 \tan^2 x}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2} \tan x)}{1 + (\sqrt{2} \tan x)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x) + C$$

令

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x) - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & x = \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x) + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases},$$

则 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的全体原函数是

$$\int f(x) dx = F(x) + C, C \text{ 为任意常数}$$

【评注】 $f(x) = \frac{1}{1 + \sin^2 x}$ 在 $[0, \pi]$ 上连续,它一定存在原函数,因为 $\arctan(\sqrt{2} \tan x)$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 无定义,所以我们用不定积分法只是分别求得 $x \in [0, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上的原函数,我们只要在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处将它们连续地拼接起来就得到 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的原函数.

481 【答案】 $1 - \ln 2$

【分析】 $I = \int_1^{+\infty} \frac{(x+1) - x}{x^2(x+1)} dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} - \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$

$$= -\frac{1}{x} \Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)} = 1 - \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$$

下求 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)}$.

方法1
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = - \int_1^{+\infty} \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{1 + \frac{1}{x}}$$

$$= - \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \Big|_1^{+\infty} = \ln 2.$$

方法2
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right) dx = \ln \frac{x}{1+x} \Big|_1^{+\infty} = \ln 2.$$

因此, $I = 1 - \ln 2$.

482 【答案】 -2

【分析】 $\frac{d}{dx} f(1-x) = f'(1-x)(1-x)' = -f'(1-x)$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} f'(1-x) dx = - \int_1^{+\infty} \frac{d}{dx} f(1-x) dx = - f(1-x) \Big|_{x=1}^{x=+\infty}$$

$$= - [\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) - f(0)] = -(2-0) = -2.$$

483 【答案】 $n!$

【分析】 用分部积分法得递推公式

$$I_n = - \int_0^{+\infty} x^n de^{-x} = - x^n e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} nx^{n-1} e^{-x} dx = nI_{n-1}.$$

由递推公式导出结果

$$I_n = n(n-1)I_{n-2} = \cdots = n(n-1)\cdots 2I_1 = n!I_0 = n!$$

其中 $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1.$

484 【答案】 $\frac{\pi}{3} - \frac{7}{9}$

【分析】
$$I \stackrel{x = \tan t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{(1 + \tan^2 t)^{5/2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos^3 t dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t(1 - \sin^2 t) d\sin t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t d\left(\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t\right)$$

$$= t\left(\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t\right] dt$$

$$= \frac{1}{3}\pi - 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3 \cdot 1} = \frac{\pi}{3} - \frac{7}{9}.$$

485 【答案】 $1 - \ln 2$

【分析】
$$I = \int_1^{+\infty} \left[\ln(1+x) - \ln x - \frac{1}{1+x} \right] dx.$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$\begin{aligned}
 & \int \left(\ln(1+x) - \ln x - \frac{1}{1+x} \right) dx \\
 &= \int (\ln(1+x) - \ln x) dx - \int \frac{dx}{1+x} \\
 &= x(\ln(1+x) - \ln x) - \int x \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{x} \right) dx - \int \frac{dx}{1+x} \\
 &= x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) + \int \frac{1}{1+x} dx - \int \frac{dx}{1+x} = x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) + C \\
 \Rightarrow I &= x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^{+\infty} = 1 - \ln 2.
 \end{aligned}$$

486 【答案】 $\frac{35}{128}\pi a^4$

【分析】 方法1 这是瑕积分.

$$\begin{aligned}
 \text{令 } t &= \sqrt{\frac{x}{a-x}} \text{ 去根号 } \Rightarrow t^2(a-x) = x, x = \frac{at^2}{1+t^2} = a - \frac{a}{1+t^2}, \\
 I &= \int_0^{+\infty} \frac{a^3 t^6}{(1+t^2)^3} \cdot t \cdot \frac{2at}{(1+t^2)^2} dt = 2a^4 \int_0^{+\infty} \frac{t^8}{(1+t^2)^5} dt
 \end{aligned}$$

再令 $t = \tan \theta$,

$$I = 2a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^8 \theta}{(1+\tan^2 \theta)^5} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = 2a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^8 \theta / \cos^{10} \theta}{1/\cos^{10} \theta} d\theta$$

$$= 2a^4 \cdot \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{35}{128}\pi a^4$$

方法2 $I = \int_0^a \frac{x^4}{\sqrt{x(a-x)}} dx = \int_0^a \frac{x^4}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}} dx$

令 $x - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \sin t$,

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^4 (1 + \sin t)^4}{\frac{a}{2} \cos t} \cdot \frac{a}{2} \cos t dt = \frac{a^4}{16} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)]^4 dt$$

$$= \frac{a^4}{16} \int_0^{\pi} (1 + \cos s)^4 ds = a^4 \int_0^{\pi} \cos^8 \frac{s}{2} ds = 2a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 t dt$$

$$= 2a^4 \cdot \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{35}{128}\pi a^4.$$

487 【答案】 $-\frac{9}{4}$

【分析】 这是瑕积分,瑕点 $x = -1$. 作变量替换 $t = \sqrt[3]{1+x}$ 去根号,即 $x = t^3 - 1$.

$$I = \int_0^1 \frac{\ln t^3}{t} 3t^2 dt = 9 \int_0^1 t \ln t dt$$

$$\text{分部积分} \quad \frac{9}{2} \int_0^1 \ln t dt^2 = \frac{9}{2} t^2 \ln t \Big|_0^1 - \frac{9}{2} \int_0^1 t^2 \cdot \frac{1}{t} dt$$

$$= -\frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^1 = -\frac{9}{4}.$$

应填 $-\frac{9}{4}$.

488 【答案】 $\frac{\pi}{12}a^2$

【分析】 由极坐标系中平面图形的面积公式得

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} a^2 \sin^2 3\theta d\theta \\ &= \frac{a^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos 6\theta) d\theta = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{a^2}{4} \cdot \frac{1}{6} \sin 6\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\pi}{12} a^2. \end{aligned}$$

489 【答案】 $4\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) a^2$

【分析】 图形关于 x, y 轴对称, 只须考察第一象限部分.

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

按极坐标情形旋转面的侧面积公式

$$A = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\pi r(\theta) \sin \theta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta$$

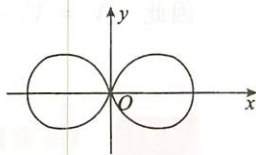
由 $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ 得

$$2r(\theta)r'(\theta) = -2a^2 \sin 2\theta, r'(\theta) = -\frac{a^2 \sin 2\theta}{r(\theta)}$$

$$\Rightarrow r^2(\theta) + r'^2(\theta) = \frac{a^4 (\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta)}{r^2(\theta)} = \frac{a^4}{r^2(\theta)}$$

代入公式得

$$A = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \sin \theta d\theta = 4\pi a^2 (-\cos \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 4\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) a^2$$



490 【答案】 $\frac{11}{6}\pi$

【分析】 转化为直角坐标系 xOy 中的情形, 套公式写出 V 的定积分表达式, 然后作变量替换求出积分值.

直线 $r = \frac{2}{2\sin \theta + \cos \theta}$ 即 $2r\sin \theta + r\cos \theta = 2$, 即 $2y + x = 2$ 与

x 轴交于 $(2, 0)$, 与 y 轴交于 $(0, 1)$, 它与心脏线在 $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 的部分如图所示.

$$V = V_1 - V_2$$

V_1 是心脏线 $r = 1 + \cos \theta \left(\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ 与 x, y 轴所围平面图形绕 x 轴旋转一周的旋转体体积.

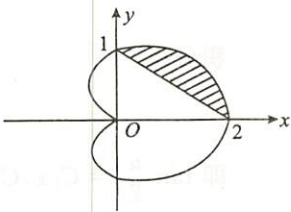
V_2 是直线段 $2y + x = 2 (0 \leq x \leq 2)$ 与 x, y 轴所围平面图形绕 x 轴旋转一周的旋转体体积 (锥体的体积).

按公式得

$$V_1 = \pi \int_0^2 y^2(x) dx$$

令 $x = r\cos \theta = (1 + \cos \theta)\cos \theta, \Rightarrow dx = (-\sin \theta - 2\sin \theta \cos \theta) d\theta$

$y = r\sin \theta = (1 + \cos \theta)\sin \theta$, 代入公式得



$$\begin{aligned}
 V_1 &= \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1 + \cos \theta)^2 \sin^2 \theta \cdot (-1) (\sin \theta (1 + 2 \cos \theta)) d\theta \\
 &= -\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos \theta)^2 (1 - \cos^2 \theta) (1 + 2 \cos \theta) d\cos \theta \\
 &\stackrel{t = \cos \theta}{=} \pi \int_0^1 (1 + t)^2 (1 - t^2) (1 + 2t) dt \\
 &= \pi \int_0^1 (1 + 4t + 4t^2 - 2t^3 - 5t^4 - 2t^5) dt \\
 &= \pi \left(1 + 2 + \frac{4}{3} - \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{2} \pi
 \end{aligned}$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi \cdot 2 = \frac{2}{3} \pi$$

$$\text{因此 } V = V_1 - V_2 = \frac{5}{2} \pi - \frac{2}{3} \pi = \frac{11}{6} \pi.$$

491

【答案】

$$\begin{cases} y = x^2 \arctan C_1 x - \frac{x}{C_1} + \frac{x}{C_1^2} \arctan C_1 x + C_2, & C_1 \neq 0, \\ y = C_2, & C_1 = 0 \end{cases} \quad C_1, C_2 \text{ 是两}$$

个任意常数.

【分析】这是二阶微分方程,先求 $P = y'$, 它就是 P 的一阶微分方程: $x \frac{dP}{dx} = P + x \sin \frac{P}{x}$,

$$\text{即 } \frac{dP}{dx} = \frac{P}{x} + \sin \frac{P}{x}.$$

这是齐次方程,令 $u = \frac{P}{x}$ ($P = ux$), 则方程化成

$$x \frac{du}{dx} = \sin u$$

分离变量得

$$\frac{du}{\sin u} = \frac{dx}{x}, \quad \frac{du}{2 \tan \frac{u}{2} \cos^2 \frac{u}{2}} = \frac{dx}{x}$$

积分得

$$\ln \left| \tan \frac{u}{2} \right| = \ln |x| + C_1$$

即 $\tan \frac{u}{2} = C_1 x$, C_1 为任意常数.

解出

$$\frac{dy}{dx} = P = 2x \arctan C_1 x$$

再积分得

$$\begin{aligned}
 y &= \int 2x \arctan C_1 x dx + C_2 = \int \arctan C_1 x dx^2 + C_2 \\
 &= x^2 \arctan C_1 x - \frac{1}{C_1} \int \frac{C_1^2 x^2 + 1 - 1}{1 + (C_1 x)^2} dx + C_2 \\
 &= x^2 \arctan C_1 x - \frac{x}{C_1} + \frac{1}{C_1^2} \arctan C_1 x + C_2 \quad (C_1 \neq 0)
 \end{aligned}$$

$$y = C_2 \quad (C_1 = 0).$$

492 【答案】 $y = \frac{x}{4} \sin 2x + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$, C_1, C_2 是两个任意常数

【分析】 $y'' + 4y = \cos 2x$ 对应的齐次方程的特征方程是 $\lambda^2 + 4 = 0$. 它的两个特征根为 $\lambda_{1,2} = \pm 2i$.

因此对应的齐次方程的通解为 $Y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

又因 $\pm \omega i = \pm 2i$ 是特征方程的根, 所以, 应设非齐次方程的特解为

$$y^* = x(A \cos 2x + B \sin 2x)$$

则 $(y^*)' = x(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) + A \cos 2x + B \sin 2x$,

$$(y^*)'' = -x(4A \cos 2x + 4B \sin 2x) - 4A \sin 2x + 4B \cos 2x.$$

将上两式代入方程 $y'' + 4y = \cos 2x$ 得

$$-4A \sin 2x + 4B \cos 2x = \cos 2x$$

比较系数得 $A = 0, B = \frac{1}{4}$. 因此通解为 $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{x}{4} \sin 2x$.

【评注】 这是一个二阶常系数线性非齐次方程的求解问题, 容易犯的错误是将非齐次方程的特解设为 $y^* = xA \cos 2x$. 注意, 当二阶方程具有 $y'' + 4y = p \cos 2x$ 或 $y'' + 4y = q \sin 2x$ 或 $y'' + 4y = p \cos 2x + q \sin 2x$ 等形式, 且其中 p, q 是不等于零的常数时, 其特解都应设为 $y^* = x(A \cos 2x + B \sin 2x)$.

493 【答案】 $y'' + 4y = \sin 2x$

【分析】 由二阶线性微分方程解的叠加原理可知, $y_1 - y_2 = \cos 2x - \sin 2x$ 是该方程对应的齐次方程(记为(*))的一个解, 于是 $\cos 2x - (\cos 2x - \sin 2x) = \sin 2x$ 也是方程(*)的解, 即(*)有两个线性无关的解 $\cos 2x$ 和 $\sin 2x$, 由此可见方程的特征根为 $\pm 2i$, 特征方程为 $\lambda^2 + 4 = 0$, 从而知原方程为 $y'' + 4y = f(x)$.

注意到 $-\frac{x}{4} \cos 2x$ 是这个方程的一个解, 从而 $f(x) = (-\frac{1}{4}x \cos 2x)'' + 4(-\frac{1}{4}x \cos 2x) = \sin 2x$ 因此, 该方程为 $y'' + 4y = \sin 2x$.

【评注】 原题中给出某二阶线性常系数非齐次方程有两个特解 y_1 与 y_2 , 其实只要给出其中的一个, 其余条件不变, 仍可求出同样的结果.

由所求的二阶线性常系数非齐次方程相应的齐次方程有特解 $y_3 = \cos 2x$, 相应的特征根一定是 $\lambda = \pm 2i$ (还有另一线性无关解 $y_4 = \sin 2x$), 于是相应的特征方程是 $\lambda^2 + 4 = 0$, 从而原方程为

$$y'' + 4y = f(x).$$

再由叠加原理知, $y^* = -\frac{1}{4}x \cos 2x$ 是原方程的特解, 将它代入上述方程就可求出 $f(x) = \sin 2x$.

494 【答案】 $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$

【分析】 由 $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0$ 可改写成 $(\frac{y}{x} + \frac{1}{x} \sqrt{x^2 + y^2}) - \frac{dy}{dx} = 0$, 当 $x > 0$ 时即

$$(\frac{y}{x} + \sqrt{1 + (\frac{y}{x})^2}) - \frac{dy}{dx} = 0 \text{ (齐次方程)}$$

令 $\frac{y}{x} = u$, 则 $y = xu$, $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$ 代入上述方程化为可分离变量型的

$$(u + \sqrt{1 + u^2}) - u - x \frac{du}{dx} = 0$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

分离变量得

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{x}$$

积分得

$$\ln(u + \sqrt{1+u^2}) = \ln x + \ln C$$

$$u + \sqrt{1+u^2} = Cx$$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = Cx, \text{ 即 } y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$$

由 $y|_{x=1} = 0$ 知 $C = 1$, 则 $y + \sqrt{x^2 + y^2} = x^2$, 又可改写成 $\sqrt{x^2 + y^2} - y = 1$, 因此 $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$.

【评注】 $x < 0$ 时得同样结果.

495 【答案】 $4x - 5x^2$

【分析】 一阶线性微分方程 $xy' - 2y = -4x$ 可化为标准形式 $y' - \frac{2}{x}y = -4$, 方程两边

同乘 $e^{\int -\frac{2}{x}dx} = \frac{1}{x^2}$ 得 $\left(\frac{1}{x^2}y\right)' = -\frac{4}{x^2}$, 积分得

$$\frac{1}{x^2}y = \frac{4}{x} + C$$

于是得通解为 $y = Cx^2 + 4x$. 由于对任何常数 C 都有 $y(0) = 0$, 从而由曲线 $y = Cx^2 + 4x$ 与直线 $x = 1$ 以及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积

$$\begin{aligned} V(C) &= \pi \int_0^1 y^2 dx = \pi \int_0^1 (Cx^2 + 4x)^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 (C^2 x^4 + 8Cx^3 + 16x^2) dx = \pi \left(\frac{C^2}{5} + 2C + \frac{16}{3} \right). \end{aligned}$$

由于

$$V'(C) = \pi \left(\frac{2C}{5} + 2 \right) \begin{cases} < 0, & C < -5 \\ = 0, & C = -5 \\ > 0, & C > -5 \end{cases}$$

可见当 $C = -5$ 时 $V(C)$ 最小, 即函数 $f(x) = 4x - 5x^2$.

496 【答案】 $xy = 2(x+y)^3$

【分析】 题设的方程是齐次微分方程. 令 $y = xu$ 代入可得

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{du}{dx} + u = \frac{x^2(2u - u^2)}{x^2(1 - 2u)},$$

$$\begin{aligned} \text{即 } x \frac{du}{dx} + u &= \frac{2u - u^2}{1 - 2u} \Leftrightarrow x \frac{du}{dx} = \frac{u + u^2}{1 - 2u} \\ &\Leftrightarrow \frac{(1 - 2u)du}{u(1 + u)} = \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

两边积分得

$$\int \frac{(1 - 2u)du}{u(1 + u)} = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{3}{1 + u} \right) du = \int \frac{dx}{x},$$

$$\text{即 } \ln |u| - 3 \ln |1 + u| = \ln |Cx|$$

$$\Leftrightarrow \frac{u}{(1 + u)^3} = Cx$$

$$\Leftrightarrow xy = C(x + y)^3.$$

把 $x = 1, y(1) = -2$ 代入可确定常数 $C = 2$, 从而所求特解为 $xy = 2(x + y)^3$.

497 【答案】 $x^2 = Cy^6 + y^4$, C 为任意常数

【分析】 将方程改写为

$$\begin{aligned} 2(y^4 - 3x^2)dy + ydx^2 &= 0 \\ \frac{dx^2}{dy} - \frac{6}{y}x^2 &= -2y^3 \end{aligned}$$

把 x^2 看成 y 的函数, 它是一阶线性微分方程. 两边乘 $\mu(y) = e^{-\int \frac{6}{y} dy} = \frac{1}{y^6}$ 得

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{1}{y^6} x^2 \right) = -\frac{2}{y^3}$$

积分得

$$\frac{1}{y^6} x^2 = \frac{1}{y^2} + C$$

通解为

$$x^2 = Cy^6 + y^4, C \text{ 为任意常数.}$$

498 【答案】 $\frac{1}{\pi}(e^{\pi^2} - 1)$

【分析】 由于等式两边都含有未知函数 $f(t)$, 要求出 $f(t)$ 的表达式, 必须对等式两边求导数得到一个微分方程, 再解此微分方程即可得到 $f(t)$ 的表达式.

注意等式右侧含有二重积分, 积分区域 D 是以原点为中心, 半径为 t 的圆域 $x^2 + y^2 \leq t^2$, 被积函数 $f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 是以 $x^2 + y^2$ 为变量的函数, 可化为极坐标系下的二重积分来计算.

令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 则

$$\iint_{x^2+y^2 \leq t^2} f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t f(r) r dr = 2\pi \int_0^t r f(r) dr$$

于是 $f(t) = t^2 + 2\pi \int_0^t r f(r) dr$, 两边对 t 求导得一阶线性微分方程 $f'(t) = 2t + 2\pi t f(t)$, 可解得

$$f(t) = C e^{\pi t^2} - \frac{1}{\pi}$$

又由原方程得 $f(0) = 0$, 由此可确定常数 $C = \frac{1}{\pi}$.

于是 $f(t) = \frac{1}{\pi}(e^{\pi t^2} - 1)$.

499 【答案】 $e^{C_1 x}$, C_1 为任意常数

【分析】 等式 $f(x+y) = f(x)f(y)$ 两端对 y 求导得

$$f'(x+y) = f(x)f'(y)$$

令 $y = 0$ 得, $f'(x) = f(x)f'(0)$.

由此可得 $f(x) = C e^{C_1 x}$ ($C_1 = f'(0)$), 因为不恒为零, 所以 $C \neq 0$.

将 $f(x) = C e^{C_1 x}$ 代入原恒等式得

$$C e^{C_1(x+y)} = C e^{C_1 x} \cdot C e^{C_1 y}$$

由此知, $C = 1$, 即 $f(x) = e^{C_1 x}$, C_1 为任意常数.

500 【答案】 $3e^x + e^{-x} + 2xe^{-x}$

【分析】 题设方程对应的特征方程是 $\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, 由此可得特征根为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, 故微分方程有三个线性无关的特解 e^x, e^{-x} 与 xe^{-x} , 从而其通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x}$ (其中 C_1, C_2, C_3 是三个任意常数).

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

由题设的初值可得

$$y(0) = C_1 + C_2 = 4,$$

$$y'(0) = [C_1 e^x - C_2 e^{-x} + C_3(1-x)e^{-x}] \Big|_{x=0} = C_1 - C_2 + C_3 = 4,$$

$$y''(0) = [C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3(x-2)e^{-x}] \Big|_{x=0} = C_1 + C_2 - 2C_3 = 0.$$

于是 $C_1 = 3, C_2 = 1, C_3 = 2$. 故所求特解是 $y^*(x) = 3e^x + e^{-x} + 2xe^{-x}$.

501 【答案】 $e^2 \left(\frac{e^2}{2} - 1 \right)$

【分析】 方法 1 直接计算可得

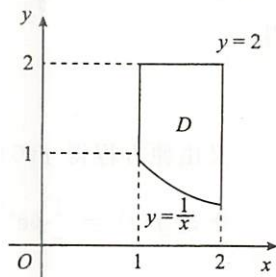
$$\begin{aligned} \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 y e^{xy} dy &= \int_1^2 \frac{dx}{x^2} \int_{\frac{1}{x}}^2 xy e^{xy} d(xy) \stackrel{xy=u}{=} \int_1^2 \frac{dx}{x^2} \int_1^{2x} u e^u du \\ &= \int_1^2 \frac{1}{x^2} (u-1) e^u \Big|_{u=1}^{u=2x} dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2} (2x-1) e^{2x} dx \\ &= \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) e^{2x} dx = 2 \int_1^2 \frac{1}{x} e^{2x} dx - \int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{2x} dx \\ &= \int_1^2 \frac{1}{x} d(e^{2x}) - \int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{x} e^{2x} \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{2x} dx - \int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{2x} dx \\ &= \frac{e^4}{2} - e^2 = e^2 \left(\frac{e^2}{2} - 1 \right). \end{aligned}$$

方法 2 记原累次积分为 I , 则 I 可表成

$$I = \iint_D y e^{xy} d\sigma$$

其中 $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq 2\}$ 如右图, 然后改成先 x 后 y 的积分顺序, 虽要分块积分, 但每个积分易求.

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 dy \int_1^2 y e^{xy} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{1}{y}}^2 y e^{xy} dx \\ &= \int_1^2 e^{xy} \Big|_{x=1}^{x=2} dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{xy} \Big|_{x=\frac{1}{y}}^{x=2} dy \\ &= \int_1^2 (e^{2y} - e^y) dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 (e^{2y} - e) dy \\ &= \frac{1}{2} e^{2y} \Big|_{\frac{1}{2}}^2 - e^y \Big|_{\frac{1}{2}}^2 - \frac{1}{2} e = \frac{1}{2} e^4 - e^2 = e^2 \left(\frac{1}{2} e^2 - 1 \right). \end{aligned}$$



502 【答案】 $\frac{1}{32} \pi^2$

【分析】 这是直角坐标系 Oxy 中的一个累次积分, 直接求很复杂, 先表成

$$I = \iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2} \sqrt{4-x^2-y^2}}$$

确定积分区域 D :

$$-1 \leq x \leq 0, 1 - \sqrt{1-x^2} \leq y \leq -x$$

如右图所示, 圆域的一部分

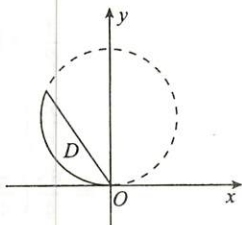
交换积分顺序达不到简化计算的目的. 从积分区域与被积函数的特点, 应改用极坐标变换, D 的极坐标表示:

$$\frac{3}{4}\pi \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq 2\sin\theta$$

(D 的圆边界 $x^2 + (y-1)^2 = 1$, 即 $x^2 + y^2 = 2y$, 极坐标方程是 $r = 2\sin\theta$)

因此

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} \frac{r}{r\sqrt{4-r^2}} dr = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} \arcsin \frac{r}{2} \Big|_0^{2\sin\theta} d\theta \\ &= \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} \arcsin(\sin\theta) d\theta = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} (\pi - \theta) d\theta = \frac{1}{32}\pi^2. \end{aligned}$$



503

【答案】 $\frac{9}{64}\pi$

【分析】 引入极坐标 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 则

$$D = \left\{ (r, \theta) \mid -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \cos\theta \right\}$$

故

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} (r\cos\theta + r^2\sin^2\theta) r dr \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^3}{3} \cos\theta + \frac{r^4}{4} \sin^2\theta \right) \Big|_{r=0}^{r=\cos\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta + \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \cos^4\theta d\theta \\ &= \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2\theta) \cos^4\theta d\theta \\ &= \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\theta d\theta \\ &= \frac{7}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{9}{64}\pi \end{aligned}$$

【评注】 在二重积分的计算中有时需要用到公式

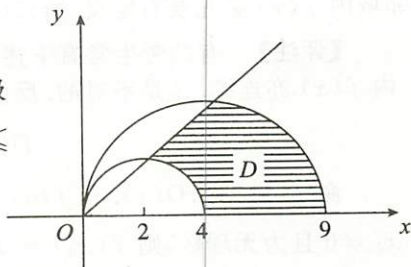
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1, n \geq 1 \text{ 是奇数} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, n \geq 2 \text{ 是偶数} \end{cases}$$

504

【答案】 $\frac{65}{16}(\pi - 2)$

【分析】 令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 引入极坐标系, 在极坐标系 (r, θ) 中积分区域 $D = \{(r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 4\cos\theta \leq r \leq 9\cos\theta\}$, 从而

$$\iint_D \frac{y^2}{x^2} d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{4\cos\theta}^{9\cos\theta} r \tan^2\theta dr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\theta d\theta \int_{4\cos\theta}^{9\cos\theta} r dr$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2}(81-16) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{65}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 \theta d\theta \\
 &= \frac{65}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2\theta) d\theta = \frac{65}{4} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= \frac{65}{4} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{65}{16}(\pi - 2).
 \end{aligned}$$

505 【答案】 $\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)$

【分析】 令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 在极坐标系 (r, θ) 中积分区域

$$D = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta} \leq r \leq \frac{2}{\cos\theta + \sin\theta} \right\}$$

从而

$$\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}} dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos\theta + \sin\theta}.$$

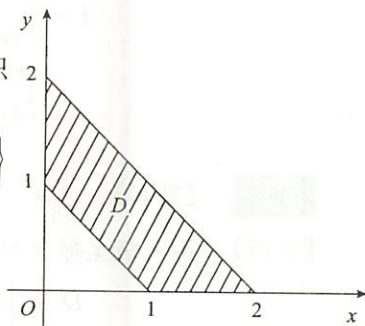
为计算所得的定积分, 可作变换 $\tan \frac{\theta}{2} = t$, 于是 $\theta = 2\arctan t$,

从而 $d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, 且 $\theta: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t: 0 \rightarrow 1$, 代入即得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos\theta + \sin\theta} = \int_0^1 \frac{2dt}{1+2t-t^2} = \int_0^1 \frac{2dt}{2-(1-t)^2}.$$

再令 $1-t = u$, 即得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos\theta + \sin\theta} = \int_0^1 \frac{2du}{2-u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u} \Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} \ln(\sqrt{2}+1).$$



选 择 题

506 【答案】 D

【分析】 当 $B = 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ 不成立.

507 【答案】 A

【分析】 由 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的定义中的要求知, 凡讲到 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, 那么在 $x = x_0$ 的某去心邻域内 $f(x)$ 必先要有定义, 所以(A)正确.

【评注】 有的考生常有下述误解, 认为 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 则必存在 $\delta > 0$, 在 $\dot{U}_\delta(x_0)$ 内 $f(x)$ 亦连续. 这是不对的. 反例如下: 设 $D(x)$ 为狄利克雷函数:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数时,} \\ 0, & x \text{ 为无理数时,} \end{cases}$$

命 $f(x) = xD(x)$. 有 $f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ (无穷小乘有界函数的仍为无穷小). 若 $x_0 \neq 0$ 且为无理数, 则 $f(x_0) = x_0 \cdot 0 = 0$, 当 x 沿有理数趋于 x_0 时, $f(x) = xD(x) \rightarrow x_0 \neq 0, f(x)$ 在 x_0 处不连续, $f(x)$ 在 $\dot{U}_\delta(0)$ 内的任意无理数 x_0 处均不连续.

所以(B)不正确. 这里并不要求读者掌握这个例子, 而只要求知道(B)不正确. (C)的反例: 设 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点, 而 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 是存在的.

(D)的反例: 函数值存在与否与该处极限值存在与否各不相干, 所以(D)不正确. 本题的核心是理解极限的定义, 连续与间断的定义.

508 【答案】 C

【分析】 方法1 (A) 不正确.

$$\beta(x) = \alpha(x)\beta(x) \cdot \frac{1}{\alpha(x)}, \frac{1}{\alpha(x)} \text{ 不一定有界.}$$

$$\text{例如 } \alpha(x) = (x - x_0)^2, \beta(x) = \frac{1}{x - x_0}, \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x)\beta(x) = 0, \text{ 但 } \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = \infty.$$

(B) 不正确. 因为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \cdot \alpha(x) \right) = \frac{1}{a} \cdot 0 = 0.$$

(D) 不正确.

$$\beta(x) = (\alpha(x)\beta(x)) \cdot \frac{1}{\alpha(x)}, \frac{1}{\alpha(x)} \text{ 不一定有界.}$$

例如,

$$\alpha(x) = \begin{cases} (x - x_0)^2, & x > x_0 \\ \frac{1}{x - x_0}, & x < x_0 \end{cases}, \beta(x) = \begin{cases} \frac{1}{x - x_0}, & x > x_0 \\ (x - x_0)^2, & x < x_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 在 $x = x_0$ 空心邻域 $\alpha(x)$ 无界, $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x)\beta(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = 0$, 且在 $x = x_0$ 空心邻域 $\beta(x)$ 也是无界的.

因此选(C).

方法2 (C) 是正确的.

$$\beta(x) = \frac{\alpha(x)\beta(x)}{\alpha(x)}, \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha(x)\beta(x)) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\alpha(x)} = a \cdot 0 = 0.$$

509 【答案】 C

【分析】 要逐一分析.

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow \infty} (5x^5 - 3x^2 + 2) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^5 \left(5 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^5} \right) = \infty$$

$$\text{其中 } \lim_{x \rightarrow \infty} x^5 = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^5} \right) = 5.$$

该极限不 $\exists$.

$$\textcircled{2} f(x) \stackrel{\text{记}}{=} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$$

$$\text{取 } x_n = \frac{1}{n\pi} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty), f(x_n) = n^2 \pi^2 \sin n\pi = 0.$$

$$\text{再取 } y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty), f(y_n) = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2} \right)^2 \sin \left(2n\pi + \frac{\pi}{2} \right) = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2} \right)^2 \rightarrow +\infty$$

该极限也不 $\exists$, (也不为 ∞).

$\textcircled{3}$ 由已知极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 (|q| < 1)$, 及幂指数运算法则

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} a \left(\frac{1}{1+a^n} \right)^{\frac{1}{n}} = a \cdot 1^0 = a \quad (0 < a < 1)$$

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{a} \right)^n} \right]^{\frac{1}{n}} = 1^0 = 1 \quad (a > 1)$$

$$I \stackrel{a=1}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2}} = 1.$$

因此极限 $\exists, I = \begin{cases} a, & 0 < a < 1 \\ 1, & a \geq 1 \end{cases}$.

④ 由推广的幂指数运算法则知,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right)^x = +\infty,$$

其中 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e > 1$

该极限不 $\exists$.

因此共有三个极限不 $\exists$, 选(C).

510 【答案】 C

【分析】 方法1 (C) 成立.

若右端极限存在, 则由极限运算法则知

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x) + f_2(x)}{h(x)g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{h(x)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x) + f_2(x)}{g(x)} \\ &= \frac{1}{A} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x) + f_2(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

若左端极限存在, 由

$$\frac{f_1(x) + f_2(x)}{g(x)} = h(x) \frac{f_1(x) + f_2(x)}{h(x)g(x)}$$

同样可证右端极限存在且等式成立.

选(C).

方法2 (A), (B), (D) 错.

(A) 不成立. 例如, $J = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^4}{\frac{\sin x}{x} + x^3 - 1}$.

若以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 代入则得

$$J = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^4}{1 + x^3 - 1} = 1$$

但是 $J = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^4}{\frac{\sin x - x}{x} + x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2}{\frac{\sin x - x}{x^3} + x} = \frac{0+0}{-\frac{1}{6}+0} = 0$

其中 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$.

因此 * 不成立.

(B) 不成立. 这里没假定 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在. 例如,

$$h(x) = x - a, \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{(x-a)^n} \quad (n = 1, 2)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \left(h(x) \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left((x-a) \cdot \frac{1}{(x-a)^n} \right) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ \infty, & n=2 \end{cases}$$

(D) 不成立. 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} = \infty$.

因此选(C).

511 【答案】 A

【分析】 按照①做下去,只说明分母方次越来越大,但分子仍趋于0,得不出结果,不满足洛必达法则条件的第(3)条,洛必达法则不能用,而不能说趋于 ∞ .

同样,按②做下去也做不出结果,不能说极限为 ∞ 或存在.此题不能用洛必达法则.对于③,事实上 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\cos x}{1-\sin x}$ 不存在,也不为 ∞ ,所以不满足洛必达法则的第(3)个条件,不能用洛必达法则.结论没有一个是正确的.

【评注】 一般教科书上都讲到使用洛必达法则应满足3个条件,以 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ 的“ $\frac{0}{0}$ 型”为例,设(1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$; (2) 存在 $\delta > 0$, 当 $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均可导,且 $g'(x) \neq 0$; (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为 ∞ , 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (*)$$

其中条件(1)一般都知道去检查,但条件(2)就不那么注意了.在此特别提醒,若仅设 $f'(x_0)$ 与 $g'(x_0)$ 存在而未设在 $\dot{U}_\delta(x_0)$ 中 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均可导,是不能用洛必达法则的,此时要凑成导数的定义式去处理.至于条件(3),就是本题③中讲到的,当 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在也不为 ∞ 时,是不能用洛必达法则的.洛必达法则只能由(*)的右边存在或为 ∞ 推得左边相应地为存在或为 ∞ ,而不能由左边存在或为 ∞ 推得右边相应地为存在或为 ∞ .

512 【答案】 B

【分析】 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \geq x \tan e^{-1} \rightarrow +\infty$, 所以 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 的无界函数. $f(-\pi) = -\pi \tan 1, f(\pi) = \pi \tan 1, f(-\pi) \neq f(\pi), f(x)$ 不是偶函数.

既然 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, f(x)$ 不是周期函数.

$$f'(x) = \tan e^{\sin x} + x \sec^2 e^{\sin x} \cdot e^{\sin x} \cdot \cos x,$$

$$f'(0) = \tan 1 > 0,$$

$$f'(\pi) = \tan 1 - \pi \sec^2 1 = \frac{1}{\cos 1} \left(\sin 1 - \frac{\pi}{\cos 1} \right) < 0,$$

所以 $f(x)$ 不是单调函数.

513 【答案】 C

【分析】 证明(C)正确. 由于 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 所以存在 $\dot{U}_\delta(x_0)$, 当 $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ 时 $f(x) \neq 0$, 从而 $|f(x) + h(x)| = \left| f(x) \left(1 + \frac{h(x)}{f(x)} \right) \right|$. 因 $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + \frac{h(x)}{f(x)} \right) = 1$, 故知存在 $\dot{U}_\eta(x_0)$, 当 $x \in \dot{U}_\eta(x_0)$ 时 $1 + \frac{h(x)}{f(x)} > \frac{1}{2}$. 于是在 x_0 的去心邻域内,

$$|f(x) + h(x)| = \left| f(x) \left(1 + \frac{h(x)}{f(x)} \right) \right| > \frac{1}{2} |f(x)|.$$

因 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + h(x)) = \infty$. 证毕.

容易举出例子说明(A)、(B)、(D) 都不正确(例略).

514 【答案】 D

【分析】 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^{x^2} - a} (\cos x - b) = A$, 则分母 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{x^2} - a) = 0, a = 1$;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^{x^2} - a} (\cos x - b) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^{x^2} - 1} (\cos x - b) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - b}{x} = A$$

所以分子 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - b) = 0, b = 1$;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^{x^2} - a} (\cos x - b) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

即 $A = 0$.

515 【答案】 A

【分析】 $f(x) \stackrel{\text{记}}{=} \frac{(e^x - 1) \arctan \frac{1}{x}}{\sqrt{\cos x - \cos^3 x}} \stackrel{\text{化简}}{=} \frac{(e^x - 1) \arctan \frac{1}{x}}{\sqrt{\cos x} |\sin x|}$

$|\sin x|$ 是分段函数, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan \frac{1}{x}$ 不相等, 故要分别求 $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x)$. 注意 $e^x - 1 \sim x \ (x \rightarrow 0)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{\cos x}} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \arctan \frac{1}{x} \right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{\sqrt{\cos x}} \cdot \frac{x}{-\sin x} \cdot \arctan \frac{1}{x} \right) = 1 \times (-1) \times \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2}$$

因此 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\pi}{2}$.

选(A).

516 【答案】 B

【分析】 将已知条件改写成

$$I = a + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx - \ln(1-x)^2}{x^2} = a + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx - 2\ln(1-x)}{x^2} = 5,$$

即

$$I_1 = 5 - a$$

其中

$$I_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx - 2\ln(1-x)}{x^2}$$

方法1 用洛必达法则

$$I_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b + \frac{2}{1-x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(b+2) - bx}{2x(1-x)} \stackrel{b=-2}{=} 1 \ (b \neq -2 \text{ 时 } I_1 = \infty)$$

$\Rightarrow$

$$1 = 5 - a, a = 4.$$

选(B).

方法2 用泰勒公式:

$$\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$$

令 $t = -x$, 得

$$bx - 2\ln(1-x) = bx - 2(-x - \frac{1}{2}x^2) + o(x^2) = (b+2)x + x^2 + o(x^2)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(b+2)x + x^2 + o(x^2)}{x^2} = 5 - a \\ \Rightarrow b &= -2 \text{ (否则 } I_1 = \infty), 1 = 5 - a, \\ \Rightarrow a &= 4. \end{aligned}$$

选(B).

517 【答案】 B

【分析】 $\frac{(n+1)^a - n^a}{n^\beta} = \frac{1}{n^{\beta-a}} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^a - 1 \right] \sim \frac{1}{n^{\beta-a}} \frac{a}{n} = \frac{a}{n^{\beta-a+1}} \quad (n \rightarrow \infty)$

$\Rightarrow \frac{(n+1)^a - n^a}{n^\beta}$ 是 $\frac{1}{n}$ 的 $\beta - a + 1$ 阶无穷小.

应选(B).

518 【答案】 C

【分析】 逐个考查之. 以(C)为例.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\gamma(x)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\ln(1+x)} (e^t - 1) dt}{x^3} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\ln^2(1+x)} - 1) \frac{1}{1+x}}{3x^2} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+x)}{x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

所以当 $x \rightarrow 0$ 时 $\gamma(x)$ 与 x^3 为同阶无穷小, (C) 正确. 其中第 2 个等式使用洛必达法则时用到变上限求导定理; 第 3 个等式用到等价无穷小替换: 当 $u \rightarrow 0$ 时 $e^u - 1 \sim u$; 第 4 个等式用等价无穷小替换, 当 $u \rightarrow 0$ 时, $\ln^2(1+u) \sim u^2$.

【评注】 其它几个(A)、(B)、(D)考查如下.

(A) 当 $x \rightarrow 0$ 时 $\alpha(x) = x^3 + x^2 \sim x^2$. 一般, 设 $\alpha(x) = x^m + x^n, m > n$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时 $x^m + x^n \sim x^n$ (方次低的那个, 与方次低的那个等价).

$$(B) \beta(x) = \frac{1 - \cos x}{x} \sim \frac{\frac{1}{2}x^2}{x} = \frac{1}{2}x, \text{ (当 } x \rightarrow 0, x \neq 0 \text{ 时).}$$

$$(D) \delta(x) = (1 + \sin x)^{\ln(1+x)} - 1 = e^{\ln(1+x) \ln(1+\sin x)} - 1 \sim \ln(1+x) \ln(1+\sin x) \sim x \sin x \sim x^2 \text{ (当 } x \rightarrow 0, x \neq 0 \text{ 时).}$$

519 【答案】 B

【分析】 命 $w(x) = f(x) + g(x)$. 设 $w(x)$ 在 $x = x_1$ 处连续, 由 $f(x) = w(x) - g(x)$ 及题设 $g(x)$ 仅在 $x = x_2$ 处间断, 其它处均连续, 于是推知 $f(x)$ 在 $x = x_1$ 处亦应连续矛盾. 故 $w(x)$ 在 $x = x_1$ 处间断. 同理可推知 $w(x)$ 在 $x = x_2$ 亦间断.

【评注】 (A) 的反例: $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \\ -1, & \text{当 } x \leq 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} -1, & \text{当 } x > 0 \\ 1, & \text{当 } x \leq 0 \end{cases}, x_1 = x_2 = 0, w(x) = f(x) + g(x) \equiv 0, w(x)$ 无间断点.

(C) 的反例: $f(x)$ 与 $g(x)$ 同(A)的反例, $w(x) = f(x)g(x) \equiv -1, w(x)$ 无间断点.

(D) 的反例: $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \\ 0, & \text{当 } x \leq 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x > -1 \\ 1, & \text{当 } x \leq -1 \end{cases}, w(x) = f(x)g(x) \equiv 0$ 无间断点.

关键之点是, “和”的反面是“差”, 关于连续函数的运算性质是一样的. 而“积”的反面是“商”, 关于连续函数的运算性质是不一样的 (“商”要求分母不为零).

520 【答案】 B

【分析】 分别就 $|x|=1$, $|x|<1$, $|x|>1$ 时求极限

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$, 得出 $f(x)$ 的分段表达式:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| > 1 \\ 0, & |x| = 1 \\ -1, & |x| < 1 \end{cases}$$

在 $|x|=1$ 处, 因 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1 \neq \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1$$

所以, $x=\pm 1$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点. 选(B).

521 【答案】 D

【分析】 $f(x) = |x(x+2)(x-2)| \sqrt[3]{(x-4)(x+2)}$.

$f(x)$ 的不可导的点首先应从 $|x(x+2)(x-2)|=0$ 的点去考虑. 取 $x=0, 2, -2$ 逐个讨论之.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x(x+2)(x-2)| \sqrt[3]{(x-4)(x+2)}}{x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| |x+2| |x-2| \sqrt[3]{(x-4)(x+2)}}{|x|} = -8,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| |x+2| |x-2| \sqrt[3]{(x-4)(x+2)}}{-|x|} = 8,$$

所以 $f'(0)$ 不存在. 同理 $f'(2)$ 也不存在.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x| |x+2| |x-2| \sqrt[3]{(x-4)(x+2)}}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2^\pm} \frac{|x| |x+2| |x-2| \sqrt[3]{(x-4)(x+2)}}{\pm |x+2|} \\ &= \pm \lim_{x \rightarrow -2^\pm} |x| |x-2| \sqrt[3]{(x-4)(x+2)} = 0. \end{aligned}$$

$f'(-2)$ 存在. 再考虑 $\sqrt[3]{(x-4)(x+2)}$ 内为零即 $x=4$ 处.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{|x(x+2)(x-2)| \sqrt[3]{(x-4)(x+2)}}{x-4} = \infty$$

$f'(4)$ 不存在. 共有 3 处 $f'(x)$ 不存在. 选(D).

522 【答案】 D

【分析】 由 $f(x+1) = af(x)$, 有

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{af(\Delta x) - af(0)}{\Delta x} = af'(0) = ab. \text{ 选(D).}$$

523 【答案】 A

【分析】 若 $g(x_0) = 0$, 由假设条件:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0) = 0, \varphi(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 邻域 } U \text{ 有界} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (g(x)\varphi(x)) = 0 = f(x_0)$$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续.

若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续, 可证 $g(x_0) = 0$, 若 $g(x_0) \neq 0$,

$$\Rightarrow \varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

在 $x = x_0$ 连续, 与已知矛盾. 因此 $g(x_0) = 0$. 选(A).

524 【答案】 D

【分析】 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$, 所以存在 $x = 0$ 的一个去心 δ 邻域 $\dot{U}_\delta(0)$, 当 $x \in \dot{U}_\delta(0)$ 时 $f(x)$ 有界. 又当 $x \rightarrow \infty$ 时 $\frac{x^3 - 1}{(x^2 + 1)x} \rightarrow 1$, 所以存在 $X > 0$, 当 $|x| > X$ 时 $\frac{x^3 - 1}{(x^2 + 1)x}$ 有界. 又 $\sin x$ 有界. 有界函数乘有界函数仍有界. 又连续函数在闭区间上有界. 综合以上各点, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

【评注】 掌握判别函数关于有界、无界的若干充分条件.

525 【答案】 A

【分析】 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 记作 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 则由极限定义, 取 $\varepsilon = 1$, $\exists M > a, \forall x > M, |f(x) - A| < 1$, 即 $|f(x)| \leq |A| + 1, x \in (M, +\infty)$, $f(x)$ 在 $(M, +\infty)$ 有界. 而由条件 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 在 $[a, M]$ 上连续, $f(x)$ 在 $[a, M]$ 有界. 所以 $f(x)$ 为 $[a, +\infty)$ 上的有界函数.

反之, 若 $f(x)$ 为 $[a, +\infty)$ 上的有界函数, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 未必存在, 例如 $f(x) = \sin x$.

526 【答案】 B

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{\ln(1+h)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{h} \cdot \frac{h}{\ln(1+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+(-h)) - f(a)}{-h} \cdot \frac{h}{\ln(1+h)} \end{aligned}$$

而 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\ln(1+h)} = 1$, 所以“ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{\ln(1+h)}$ 存在” $\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+(-h)) - f(a)}{-h}$ 存在, 即“函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 点处可导”.

(A) “ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h^2) - f(a)}{h^2}$ 存在” $\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}$ 存在, 即“函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 点处右可导”.

(C) 反例: $f(x) = |x|, a = 0$.

(D) “ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h^2) - f(a)}{h^2}$ 存在” $\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}$ 存在, 即“函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 点处左可导”.

527 【答案】 D

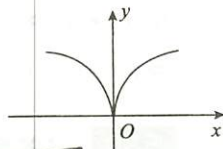
【分析】 方法 1 $y = f(x)$ 的图形如右图, 选(D).

方法 2 显然

$$\lim_{x \rightarrow \pm 0} f(x) = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sqrt{-x}}{-x} = -\infty.$$



微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$\Rightarrow f'(0)$ 不 $\exists$, 但 $\exists$ 切线. 选(D).

528 【答案】 C

【分析】 这是讨论分段函数 $f(x)$ 在分界点 $x=0$ 处的连续性, 可导性与导函数的连续性问题.

先讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性. 按定义先分别求出 $f'_+(0), f'_-(0)$.

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \ln(1+x^3) \sin \frac{1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} x^3 \sin \frac{1}{x} = 0 \end{aligned}$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} \int_0^{x^2} \sin t dt = \frac{(\sin x^2) 2x}{2x} = 0$$

$\Rightarrow f'(0) = 0$.

再求 $f'(x)$,

$$x > 0 \text{ 时 } f'(x) = -\frac{1}{x^2} \ln(1+x^3) \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \frac{3x^2}{1+x^3} \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \ln(1+x^3) \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

易知 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ 不存在, 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{x^2} \ln(1+x^3) \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \frac{3x^2}{1+x^3} \sin \frac{1}{x} \right) = 0 + 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \ln(1+x^3) \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x^3)}{x^3} \cos \frac{1}{x} \text{ 不存在.}$$

因此 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续. 选(C).

【评注】 (1) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \exists, \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) \text{ 不 } \exists \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) + h(x)) \text{ 不 } \exists$. 若又有 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)h(x) \text{ 不 } \exists$.

(2) 若先考察 $x < 0$ 时,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_0^{x^2} \sin t dt + \frac{1}{x} \sin x^2 \cdot 2x$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{x^2} \sin x^2 \cdot 2x + \lim_{x \rightarrow 0^-} 2 \sin x^2 = 0 + 0 = 0 = f'(0)$$

为判断 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性还需考察 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$.

529 【答案】 D

【分析】 对 $\forall x, x_0 \in (a, b)$ 有

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq K |x - x_0|.$$

$$\text{令 } x \rightarrow x_0 \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \quad (\forall x_0 \in (a, b))$$

$\Rightarrow f'(x) \equiv 0 (\forall x \in (a, b))$. 选(D).

530 【答案】 C

【分析】 设 $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)g(x)$, 其中 $g(x)$ 在 $x = x_0$ 连续,

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = g(x_0).$$

现设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 可导 $\Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

令

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & (x \neq x_0) \\ f'(x_0) & (x = x_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = (x - x_0)g(x) \quad (\text{在 } x_0 \text{ 某邻域})$$

显然, $g(x)$ 在 $x = x_0$ 连续, 因为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = g(x_0)$$

因此选(C).

531 【答案】 C

【分析】 分别考察

$$\begin{aligned} F'_+(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) \frac{|f(x)|}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} = g(x_0) |f'(x_0)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F'_-(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) \frac{|f(x)|}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) \lim_{x \rightarrow x_0^-} \left(- \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \right) = -g(x_0) |f'(x_0)| \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} F'(x_0) \exists &\Leftrightarrow F'_+(x_0) = F'_-(x_0) \Leftrightarrow g(x_0) |f'(x_0)| = -g(x_0) |f'(x_0)| \\ &\Leftrightarrow g(x_0) |f'(x_0)| = 0. \end{aligned}$$

选(C).

532 【答案】 A

【分析】 因 $\varphi(x)$ 在 $x = a$ 不可导, 所以不能对 $F(x)$ 用乘积的求导法则, 用定义求 $F'(a)$.

题设 $\varphi(x)$ 以 $x = a$ 为跳跃间断点, 则存在 $\lim_{x \rightarrow a \pm 0} \varphi(x) \stackrel{\text{记}}{=} A_{\pm}, A_+ \neq A_-$.

当 $g(a) = 0$ 时

$$\begin{aligned} F'_{\pm}(a) &= \lim_{x \rightarrow a \pm 0} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a \pm 0} \frac{g(x)\varphi(x) - g(a)\varphi(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a \pm 0} \frac{g(x)\varphi(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a \pm 0} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \cdot \varphi(x) \\ &= g'(a)A_{\pm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{这表明, } g(a) = 0 \text{ 时, } F'(a) \text{ 存在} &\Leftrightarrow F'_+(a) = F'_-(a) \\ &\Leftrightarrow g'(a)(A_+ - A_-) = 0 \\ &\Leftrightarrow g'(a) = 0. \end{aligned}$$

下面证明若 $F'(a)$ 存在则 $g(a) = 0$.

反证法, 若 $g(a) \neq 0, \varphi(x) = \frac{F(x)}{g(x)}$, 由商的求导法则, $\varphi(x)$ 在 $x = a$ 处可导, 这与题设矛盾, 所以选(A).

【评注】 类似可证:若 $g(x)$ 在 $x=a$ 处可导, $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续但不可导, 则当 $g(a) \neq 0$ 时 $g(x)\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处不可导, 当 $g(a)=0$ 时, $g(x)\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 且 $(g(x)\varphi(x))' \Big|_{x=a} = g'(a)\varphi(a)$.

533 【答案】 B

【分析】 按定义分析, 即分析 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ 的存在性, 并要逐一分析.

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x^{\frac{2}{3}} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}(x^{\frac{2}{3}})^2}{x} = 0$$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 可导.

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^{\frac{2}{3}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} = \infty$$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 不可导.

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^{\frac{2}{3}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{2}{3}}}{x} = 0$$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 可导.

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x^2)^{\frac{1}{3}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2)^{\frac{1}{3}}}{x} = \infty$$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $x=0$ 不可导.

因此选(B).

【评注】 ① 以上的极限运算中利用了等价无穷小因子替换: $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 (x \rightarrow 0)$, $\sin x \sim x (x \rightarrow 0)$.

② 这几个函数作为复合函数是可导函数与不可导函数的复合, 或不可导函数与可导函数的复合, 因此不能用复合函数求导法则来讨论. 如 ① 中, $g(u) = \cos u$ 与 $u = x^{\frac{2}{3}}$ 的复合, $u = x^{\frac{2}{3}}$ 在 $x=0$ 处不可导, $g(u)$ 在 $u = x^{\frac{2}{3}} \Big|_{x=0}$ 可导, 复合结果 $f(x) = g(x^{\frac{2}{3}})$ 在 $x=0$ 处可导. $g(u) = \sin u$ 与 $u = x^{\frac{2}{3}}$ 复合结果 $g(x^{\frac{2}{3}})$ 在 $x=0$ 处不可导.

534 【答案】 C

【分析】 方法 1 已知 $|x|, \sqrt{|x|}$ 在 $x=0$ 处不可导. 又 $x \rightarrow 0$ 时,

$$e^{|x|} - 1 \sim |x|, \arctan |x| \sim |x|, \arcsin \sqrt{|x|} \sim \sqrt{|x|}$$

对(A)、(B)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \text{ 不 } \exists$$

对(D)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|x|}}{x} \text{ 不 } \exists$$

即(A)、(B)、(D) 在 $x=0$ 处不可导.

选(C).

方法 2 按导数定义, 对(C) 直接计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{4}{3}} \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^{\frac{1}{3}} \sin \frac{1}{x} \right) = 0 \Rightarrow f'(0) = 0.$$

选(C).

535 【答案】 C

【分析】 由条件 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 又 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Rightarrow f(0) = 0$.

$$\text{由 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{|x|} = 1 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1 \Rightarrow f'_+(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{-x} = 1 \Rightarrow f'_-(0) = -1$$

因此选(C).

【评注】 特殊选取 $f(x) = |x|$, 满足题中条件, (A)、(B)、(D) 不对, (C) 对. 因此选(C).

536 【答案】 C

$$\text{【分析】 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x)}{x - a} - f'(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f'(a)(x - a)}{(x - a)^2}.$$

因为函数 $f(x)$ 有二阶连续导数,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2!} f''(\xi)(x - a)^2$$

其中 ξ 在 a 与 x 之间.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f'(a)(x - a)}{(x - a)^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{2!} f''(\xi) = \frac{1}{2} f''(a)$$

$$\text{即 } g'(a) = \frac{1}{2} f''(a).$$

537 【答案】 B

【分析】 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$f(\cos x) = f(1 + (\cos x - 1)) = f(1) + f'(1)(\cos x - 1) + o(x^4)$$

$$f\left(\frac{2}{2-x^2}\right) = f\left(1 + \frac{x^2}{2-x^2}\right) = f(1) + f'(1)\left(\frac{x^2}{2-x^2}\right) + o(x^4)$$

$$\text{所以 } f(\cos x) - f\left(\frac{2}{2-x^2}\right) = (\cos x - 1) - \frac{x^2}{2-x^2} + o(x^4) = -x^2 + o(x^4),$$

故函数 $f(\cos x) - f\left(\frac{2}{2-x^2}\right)$ 为 x 的 2 阶无穷小.

538 【答案】 B

【分析】 设 $\varphi(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$, $f(x) = |\varphi(x)|$, 使 $\varphi(x) = 0$ 的点 $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ 可能是 $f(x)$ 的不可导点, 还需考虑 $\varphi'(x)$ 在这些点的值,

$$\varphi'(x) = (x-2)^2(x-3)^3 + 2(x-1)(x-2)(x-3)^3 + 3(x-1)(x-2)^2(x-3)^2$$

显然, $\varphi'(1) \neq 0$, $\varphi'(2) = 0$, $\varphi'(3) = 0$, 所以只有一个不可导点 $x = 1$. 选(B).

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

【评注】 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 可导, 关于 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 是否可导已得如下结论:
若 $f(a) \neq 0$, 则 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 可导.

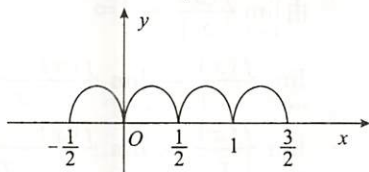
若 $f(a) = 0 \begin{cases} f'(a) = 0, \text{则 } |f(x)| \text{ 在 } x=a \text{ 可导.} \\ f'(a) \neq 0, \text{则 } |f(x)| \text{ 在 } x=a \text{ 不可导.} \end{cases}$

539 【答案】 B

【分析】 设 $g(x) = x^2 + x - 2$, $\varphi(x) = |\sin 2\pi x|$, 显然 $g(x)$ 处处可导, $\varphi(x)$ 处处连续, 有不可导点.

只须考查 $\varphi(x)$ 不可导点处 $g(x)$ 是否为零.

$\varphi(x) = |\sin 2\pi x|$ 的图形如图所示, 在 $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ 内只有不可导点 $x = 0, \frac{1}{2}, 1$, 其余均可导.



因为 $g(0) = -2 \neq 0$, $g(\frac{1}{2}) \neq 0$, $g(1) = 0$.

所以 $f(x) = g(x)\varphi(x)$ 在 $x = 0, \frac{1}{2}$ 处不可导, 在 $x = 1$ 可导, 其余点均可导. 因此选(B).

540 【答案】 B

【分析】 显然, $x < 0$ 与 $x > 0$ 时对 $\forall a, b$ 之值 $f(x)$ 均可导. 关键是在 $x = 0$ 处.

注意 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \sqrt{1-x}}, & x < 0 \\ a + bx, & x \geq 0 \end{cases}$

首先要使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$

得 $a = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + \sqrt{1-x}} = \frac{1}{2}$

此时 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \sqrt{1-x}}, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2} + bx, & x \geq 0 \end{cases}$

再定 b 使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.

$f'_-(0) = \left(\frac{1}{1 + \sqrt{1-x}} \right)' \Big|_{x=0} = -\frac{1}{(1 + \sqrt{1-x})^2} \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right) \Big|_{x=0} = \frac{1}{8}.$

$f'_+(0) = \left(\frac{1}{2} + bx \right)' \Big|_{x=0} = b.$

由 $f'_+(0) = f'_-(0)$ 得 $b = \frac{1}{8}$. 因此选(B).

541 【答案】 B

【分析】 注意 $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \arctan \frac{1}{x} = \pm \frac{\pi}{2}.$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x|^\alpha \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} 0 & (\alpha > 0) \\ \infty & (\alpha < 0) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x|^\alpha \arctan \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \arctan \frac{1}{x} \quad \text{不} \exists \quad (\alpha = 0).$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x|^\alpha \arctan \frac{1}{x} \begin{cases} = 0 = f(0) & (\alpha > 0) \\ \text{不} \exists & (\alpha \leq 0) \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha > 0$ 时 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, $\alpha \leq 0$ 时 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续. 对 $\alpha > 0$, 再考察

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^\alpha \arctan \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^{\alpha-1} |x| \arctan \frac{1}{x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} |x|^{\alpha-1} \cdot \operatorname{sgn} x \cdot \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} 0, & \alpha > 1 \\ \frac{\pi}{2}, & \alpha = 1. \\ \infty, & \alpha < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$\alpha = 1 \text{ 时, } \lim_{x \rightarrow 0^+} |x|^{\alpha-1} \cdot \operatorname{sgn} x \cdot \arctan \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn} x \cdot \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x|^{\alpha-1} \cdot \operatorname{sgn} x \cdot \arctan \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\Rightarrow f'(0) = 0 (\alpha > 1), f'(0) = \frac{\pi}{2} (\alpha = 1), f'(0) \text{ 不} \exists (\alpha < 1).$$

因此, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 但不可导, 则 $\alpha \in (0, 1)$, 反之亦然.

542 【答案】 C

【分析】 对 $\forall$ 常数 a, b, c , 均有

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 \left[1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} \right] = \pm\infty.$$

方法 1 由于 $x_1 < x_2 < x_3$ 是 $p(x)$ 的三个相异的零点, 于是 $y = p(x)$ 的示意图如右图, 由导数的几何意义知

$$p'(x_1) > 0, p'(x_2) < 0, p'(x_3) > 0$$

因此选(C).

方法 2 按题设应有

$$p(x) < 0 (x < x_1), p(x) > 0 (x \in (x_1, x_2))$$

$$p(x) < 0 (x \in (x_2, x_3)), p(x) > 0 (x > x_3)$$

现按导数定义及极限的不等式性质 $\Rightarrow$

$$p'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{p(x) - p(x_1)}{x - x_1} = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{p(x)}{x - x_1} \geq 0.$$

因 $x = x_1$ 不是 $p(x) = 0$ 的重根 $\Rightarrow p'(x_1) \neq 0 \Rightarrow p'(x_1) > 0$.

同理可知, $p'(x_2) < 0, p'(x_3) > 0$.

应选(C).

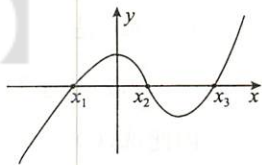
543 【答案】 B

【分析】 考虑例 1: $f(x) = e^{-x}, g(x) = -e^{-x}$, 显然 $f(x) > g(x)$, 但

$$f'(x) = -e^{-x}, g'(x) = e^{-x}$$

此时, $f'(x) < g'(x)$, 所以 ① 不正确.

考虑例 2: $f(x) = -e^{-x}, g(x) = e^{-x}, f'(x) = e^{-x}, g'(x) = -e^{-x}, f'(x) > g'(x)$, 但



$f(x) < g(x)$. 所以 ② 不正确. 因此选(B).

【评注】 函数 $f(x)$ 的导数是描述函数的变化率, 在 (a, b) 上 $f'(x) > 0$ 表示 $f(x)$ 在 (a, b) 上单调递增, 不能保证 $f(x) > 0$, 同样在 (a, b) 上 $f(x) > 0$, 如果它是可导单调减函数, 则在 (a, b) 上 $f'(x) < 0$.

544 【答案】 C

【分析】 由 $f(x) = f(-x)$ 可知 $f(x)$ 为偶函数, 因偶函数的导数是奇函数, 奇函数的导数是偶函数, 即 $f'(x)$ 为奇函数, $f''(x)$ 为偶函数, 因此当 $x < 0$ 时有 $f'(x) < 0, f''(x) > 0$, 则当 $x > 0$ 时有 $f'(x) > 0, f''(x) > 0$. 选(C).

【评注】 要明确以下几条 $f'(x)$ 的性质:

- (1) 可导奇函数的导函数是偶函数.
- (2) 可导偶函数的导函数是奇函数.
- (3) 以 T 为周期的可导函数的导函数仍然以 T 为周期.

545 【答案】 C

【分析】 $y = e^{x^2}$ 上 $\forall$ 点 $(x_0, e^{x_0^2})$ 处的切线方程是

$$y = e^{x_0^2} + 2x_0 e^{x_0^2} (x - x_0)$$

即 $y = e^{x_0^2} (1 - 2x_0^2) + 2x_0 e^{x_0^2} x$.

$y = mx$ 是 $y = e^{x^2}$ 的切线 $\Rightarrow e^{x_0^2} (1 - 2x_0^2) = 0, m = 2x_0 e^{x_0^2}$
 $\Rightarrow x_0^2 = \frac{1}{2}, x_0 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, m = \pm \sqrt{2} e^{\frac{1}{2}}$.

因此选(C).

546 【答案】 D

【分析】 由题设知, (x_0, y_0) 同时满足

$$y_0 = \ln x_0 = k \sqrt{x_0} \quad (1)$$

与

$$y'(x_0) = \frac{1}{x_0} = \frac{k}{2\sqrt{x_0}} \quad (2)$$

由(2)得 $k = \frac{2}{\sqrt{x_0}}$, 代入(1)得 $y_0 = \ln x_0 = 2 \Rightarrow (x_0, y_0) = (e^2, 2), k = \frac{2}{e}$.

因此选(D).

547 【答案】 B

【分析】 任取 $x_0 \neq 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 x_0 处的切线方程为

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

令 $y = 0$ 得它在 x 轴上截距为: $\frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{f'(x_0)}$. 因此, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x, f(x))$ 的

切线在 x 轴上的截距为 $u(x) = \frac{x f'(x) - f(x)}{f'(x)} (x \neq 0)$, 下求

$$J \stackrel{\text{记}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{u(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f'(x)}{x f'(x) - f(x)}$$

方法 1

$$J = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \frac{f(x)}{xf'(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \frac{f(x)/x^2}{f'(x)/x}}$$

由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = f''(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = \frac{1}{2} f''(0)$$

于是

$$J = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \frac{\frac{1}{2} f''(0)}{f''(0)}} = 2.$$

方法 2 直接用洛必达法则求这个 $\frac{0}{0}$ 型极限

$$\begin{aligned} J &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(xf'(x))'}{(xf'(x) - f(x))'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf''(x) + f'(x)}{xf''(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{f'(x)}{xf''(x)} \right] = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f'(x) - f'(0)}{x} \cdot \frac{1}{f''(x)} \right] \\ &= 1 + \frac{f''(0)}{f''(0)} = 2. \end{aligned}$$

因此选(B).

方法 3 用泰勒公式

$$\begin{aligned} xf'(x) &= x[f'(0) + f''(0)x + o(x)] = f''(0)x^2 + o(x^2) \quad (x \rightarrow 0) \\ f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2) \\ &= \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2) \quad (x \rightarrow 0) \end{aligned}$$

代入得

$$J = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(0)x^2 + o(x^2)}{f''(0)x^2 - \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2)} = 2.$$

因此选(B).

548 【答案】 C

【分析】 方法 1 (C) 是正确的.

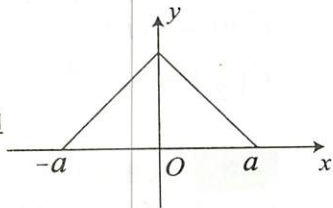
设 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 是奇函数 $\Rightarrow f(0) = 0$. 因存在

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-f(-x)}{x} \stackrel{\text{令 } t = -x}{=} \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(t) - f(0)}{t} = f'_-(0) \end{aligned}$$

 $\Rightarrow f'_+(0) \exists$. 选(C).

方法 2 (A)、(B)、(D) 不正确.

如图所示, $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 是偶函数, $f'_+(0), f'_-(0)$ 均 $\exists$, 但 $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, 故 $f'(0)$ 不存在.



如 $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 在 $[-a, a]$ 是偶函数, 但 $x = 0$ 不是极值点.

$y = f(x) = \sqrt{x}$ 在 $x = 0$ 有垂直于 x 轴的切线, $y = \sqrt{x}$ 在 $x = 0$ 不可导. 因此, (A)、(B)、(D) 不正确, 选(C).

549 【答案】 C

【分析】 $f(x) = \begin{cases} \ln x - x, & x \geq 1 \\ x^2 - 2x, & x < 1 \end{cases}$, 显然 $f(x)$ 处处连续.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 1, & x > 1 \\ 2(x-1), & x < 1 \end{cases} < 0$$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调下降.

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} < 0, & x > 1 \\ 2 > 0, & x < 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow (1, f(1))$ 是 $y = f(x)$ 的拐点. 选(C).

550 【答案】 D

【分析】 因为 $f''(a) = 0, f'''(a) > 0$, 所以函数 $f'(x)$ 在 $x = a$ 取到极小值 $f'(a)$. A 错误. 因为 $f'(a) = f''(a) = 0, f'''(a) \neq 0$, 所以 $x = a$ 不是函数 $f(x)$ 的极值点, B, C 均错误. 因为 $f'''(a) > 0$, 所以存在 $\delta > 0$, 使得对于任意的 $x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$, 都有 $\frac{f''(x) - f''(a)}{x - a} > 0$, 所以当 $x \in (a - \delta, a)$ 时, $f''(x) < 0$; 当 $x \in (a, a + \delta)$ 时, $f''(x) > 0$, 故 $(a, f(a))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

551 【答案】 B

【分析】 方法 1 用极值的第一充分判别法

$$f'(x) = x \cos x + \sin x - \sin x = x \cos x$$

取 $\delta > 0$ 充分小.

$$f'(x) \begin{cases} < 0, & -\delta < x < 0 \\ > 0, & 0 < x < \delta \end{cases} \Rightarrow f(0) \text{ 为极小值.}$$

$$f'(x) \begin{cases} > 0, & \frac{\pi}{2} - \delta < x < \frac{\pi}{2} \\ < 0, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} + \delta \end{cases} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ 为极大值.}$$

选(B).

方法 2 用极值的第二充分判别法.

$$f'(x) = x \cos x, f''(x) = \cos x - x \sin x$$

$$f'(0) = 0, f''(0) = 1 > 0 \Rightarrow f(0) \text{ 为极小值.}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ 为极大值. 选(B).}$$

552 【答案】 C

【分析】 在 $y(x)$ 满足的方程中, 令 $x = 0 \Rightarrow y'(0) = 0$. 又

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} y'' &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-y'^2}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan^2 x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -2y'y'' + 0 = 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow y''(0) = 0$.
再求 $y^{(3)}(0)$.

$$\begin{aligned}y^{(3)}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y''(x) - y''(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y''}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y'^2}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan^2 x}{x^2} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{y'(x) - y'(0)}{x} \right)^2 + 1 = -(y''(0))^2 + 1 = 1\end{aligned}$$

因此,选(C).

553 【答案】 B

【分析】 方法1 $(x_0, f(x_0))$ 是 $y = f(x)$ 的拐点, $f''(x_0)$ 不一定存在, 所以不选(A).

拐点是函数的局部性质, $(x_0, f(x_0))$ 是 $y = f(x)$ 的拐点, 只能保证在 x_0 的一个邻域内, $y = f(x)$ 的凹凸性相反, 所以不选(D).

曲线 $y = -f(x)$ 与 $y = f(x)$ 关于 x 轴对称, $(x_0, f(x_0))$ 是 $y = f(x)$ 的拐点, 不能保证 $(-x_0, -f(-x_0))$ 是 $y = -f(x)$ 的拐点. 例如 $y = f(x) = (x-1)^3$, 只有拐点 $(1, 0)$, 但 $(-1, -f(-1))$ 不是 $y = -f(x) = -(x-1)^3$ 的拐点. 所以不选(C). 因此选(B).

方法2 从几何上分析也很简单, $y = f(x)$ 与 $y = -f(-x)$ 的图形关于原点对称. $x_0 \neq 0, (x_0, f(x_0))$ 是 $y = f(x)$ 的拐点 $\Rightarrow (-x_0, -f(x_0))$ 是 $y = -f(-x)$ 的拐点. 因此选(B).

554 【答案】 A

【分析】 $y' = \frac{1}{x}, y'' = -\frac{1}{x^2}$, 曲率为

$$\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{\frac{1}{x^2}}{(1+x^2)^{3/2}/x^3} = \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$$

记 $f(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^3}$, 则

$$f'(x) = \frac{2x(1+x^2)^3 - x^2 \cdot 3(1+x^2)^2 \cdot 2x}{(1+x^2)^6} = \frac{2x(1-2x^2)}{(1+x^2)^4}$$

$$\begin{cases} > 0, & 0 < x^2 < \frac{1}{2} \\ = 0, & x^2 = \frac{1}{2} \\ < 0, & x^2 > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \text{ 时 } f(x) \text{ 取最大值: } f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{2^2}{3^3}$$

$$\Rightarrow \text{曲率的最大值为 } \left(\frac{2^2}{3^3}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{9}\sqrt{3}.$$

因此选(A).

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

555 【答案】 D

【分析】 考察间断点 $x=0, \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+2)e^{\frac{x-1}{x}} = +\infty$, 所以 $x=0$ 为曲线的垂直渐近线.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)e^{\frac{x-1}{x}}}{x} &= e \\ \lim_{x \rightarrow \infty} [(x+2)e^{\frac{x-1}{x}} - ex] &= \lim_{x \rightarrow \infty} [e(x+2)e^{-\frac{1}{x}} - ex] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} + 2 \cdot e^{-\frac{1}{x}} \right] \\ &= e(-1+2) = e\end{aligned}$$

所以, $y = e(x+1)$ 为曲线的斜渐近线, 于是选(D).

【评注】 同是 $x \rightarrow +\infty$ (或 $x \rightarrow -\infty$), 如果曲线有斜渐近线就不可能有水平渐近线, 如果曲线有水平渐近线, 就不可能有斜渐近线.

556 【答案】 B

【分析】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2-1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}} = 0$$

$x \rightarrow +\infty$ 时的斜渐近线为 $y = x$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} \right) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (y-3x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x - \sqrt{x^2-1}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x + \sqrt{x^2-1}} = 0$$

$x \rightarrow -\infty$ 时的斜渐近线为 $y = 3x$. 选(B).

557 【答案】 C

【分析】
$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2-2x^2)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1+x^2}{\sqrt{(x^2-1)^2}} \cdot \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 (x > 1)\end{aligned}$$

又 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 为常数.
选(C).

558 【答案】 C

【分析】 由 $y''(x)$ 与 $y(x)$ 的关系:

$$y''(x) = -cy(x)$$

可知 $y(x)$ 的极值点有如下特性: 若 $x_0 \in (a, b)$ 是 $y(x)$ 的极大值点, $\Rightarrow y''(x_0) \leq 0 \Rightarrow y(x_0) \leq 0$. 若 $x_0 \in (a, b)$ 是 $y(x)$ 的极小值点, $\Rightarrow y''(x_0) \geq 0 \Rightarrow y(x_0) \geq 0$. 因此 $y(x)$ 在 (a, b) 不能有取正值的极大值点, 与取负值的极小值点.

再由 $y(a) = y(b) = 0$ 可知,若 $y(x)$ 在 (a, b) 不恒为零,则 $y(x)$ 在 (a, b) 必有取正值的极大值点或取负值的极小值点,但这都不可能. 因此只能在 (a, b) 上 $y(x)$ 恒为零. 选(C).

559 【答案】 A

【分析】 记 $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - x\ln x$, 则 $f'(x) = \ln(x+1) - \ln x > 0$, 所以 $f(x)$ 严格单调增, 而 $f(1) = 2\ln 2 > 0$, 所以 $f(x) > 0, x \in (1, +\infty)$, 即 $\frac{\ln(1+x)}{\ln x} > \frac{x}{x+1}$.

560 【答案】 C

【分析】 考察 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, 则 $F(a) = F(b) = 0$, 且所给条件用 $F(x)$ 表示即

$$F''(x) + (F'(x))^2 - F(x) = 0 \quad (*)$$

若 $F(x)$ 在 (a, b) 恒正, 则 $F(x)$ 在 (a, b) 取正最大值即 $\max_{[a, b]} F(x) = F(x_0) > 0, x_0 \in (a, b)$. 由极大值点的性质 $\Rightarrow F'(x_0) = 0, F''(x_0) \leq 0$.

但由 $(*)$ 式得 $F''(x_0) = F(x_0) > 0$, 这便矛盾.

若 $F(x)$ 在 (a, b) 恒负, 则 $\min_{[a, b]} F(x) = F(x_1) < 0 (x_1 \in (a, b))$, 于是同样得矛盾.

因此, (A)、(B) 不对, 同样 (D) 也不对. 选(C).

561 【答案】 A

【分析】 考察

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = -\frac{1}{g^2(x)} \left| \begin{array}{cc} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{array} \right| \\ \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' &> 0 \quad (x \in [a, b]) \\ \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} &\text{在 } [a, b] \text{ 单调上升, } \frac{f(x)}{g(x)} \Big|_{x=a} > \frac{f(x)}{g(x)} \Big|_{x=b} = 0 \quad (x \in (a, b)). \end{aligned}$$

因此应选(A).

562 【答案】 C

【分析】 $y = x^3 - 3x, y' = 3x^2 - 3 = 0, x = \pm 1$.

当 $x = -1$ 时, $y'' = -6 < 0$, 所以 $y = x^3 - 3x$ 在 $x = -1$ 取到极大值 $y_{\max} = 2$;

当 $x = 1$ 时, $y'' = 6 > 0$, 所以 $y = x^3 - 3x$ 在 $x = 1$ 取到极小值 $y_{\min} = -2$.

当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $y' = 3x^2 - 3 > 0, y = x^3 - 3x$ 单调增, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$;

当 $x \in (-1, 1)$ 时, $y' = 3x^2 - 3 < 0, y = x^3 - 3x$ 单调减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $y' = 3x^2 - 3 > 0, y = x^3 - 3x$ 单调增, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$, 所以当且仅

当 $-2 < A < 2$ 时, 曲线 $y = x^3 - 3x$ 与直线 $y = A$ 有 3 个不同的交点.

563 【答案】 C

【分析】 (1) 求 $f(x)$ 的单调性区间:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - bx^{b-1} = \frac{b}{x} \left[\frac{1}{b} - x^b \right] \begin{cases} > 0, 0 < x < x_0 \\ = 0, x = x_0 \\ < 0, x > x_0 \end{cases},$$

其中 $x_0 = \left(\frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{b}} \Rightarrow$

$f(x)$ 在 $(0, x_0]$ ↗, 在 $[x_0, +\infty)$ ↘, $f(x) < f(x_0)$ ($x \in (0, +\infty), x \neq x_0$)

(2) 考察极值的符号:

$$f(x_0) = \ln\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{b}} - \left[\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{b}}\right]^b = \frac{1}{b} \ln \frac{1}{b} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} \left(\ln \frac{1}{b} - 1\right) > \frac{1}{b} (\ln e - 1) = 0$$

(3) 求边界处极限值:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - x^b) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^b \left[\frac{\ln x}{x^b} - 1 \right] = -\infty$. 因此 $f(x)$ 在 $(0, x_0]$ 连续, ↗, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 与 $f(x_0)$ 异号 $\Rightarrow f(x)$ 在 $(0, x_0) \ni$ 唯一零点.

同理, $f(x)$ 在 $[x_0, +\infty)$ 连续 ↘, $f(x_0)$ 与 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 异号 $\Rightarrow f(x)$ 在 $(x_0, +\infty) \ni$ 唯一零点. 综合起来, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有且仅有 2 个零点. 选(C).

564 【答案】 C

【分析】 设 $f(x) = x^2 - x \sin x - \cos x$, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 为偶函数, 因此只须讨论 $x \geq 0$ 时的情形, $f(0) = -1 < 0$, $f(\pi) = \pi^2 + 1 > 0$, 且 $x \in (0, +\infty)$ 时 $f'(x) = x(2 - \cos x) > 0$, 从而 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 只有一个唯一实根, 于是 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有且仅有两个实根. 选(C).

565 【答案】 C

【分析】 方法 1 由罗尔定理 $\Rightarrow \exists \xi_0 \in (a, b)$, $f'(\xi_0) = 0$. 现对 $f'(x)$ 在 $[a, \xi_0]$ 上用拉格朗日中值定理 $\Rightarrow \exists \xi \in (a, \xi_0) \subset (a, b)$,

$$\frac{-f'_+(a)}{\xi_0 - a} = \frac{f'(\xi_0) - f'_+(a)}{\xi_0 - a} = f''(\xi) > 0$$

因此选(C).

方法 2 特取 $f(x) = -x(1-x) = -x + x^2$ ($x \in [0, 1]$)

$\Rightarrow f'(x) = -1 + 2x$, $f'(0) = -1 < 0$, $f(0) = f(1) = 0$, $f''(x) = 2$, $f(x) < 0 = f(0)$ ($x \in (0, 1)$)

因此, (A)、(B)、(D) 不对, 选(C).

566 【答案】 B

【分析】 注意 $f(x) + f'(x)$ 与 $e^x(f(x) + f'(x)) = (e^x f(x))'$ 有相同的零点.

$f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 可导且有 n 个不同的零点 $\Rightarrow e^x f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 可导且有 n 个不同的零点.

由罗尔定理知, $e^x f(x)$ 的两个零点之间一定有 $(e^x f(x))'$ 的一个零点. 因此 $(e^x f(x))'$ 至少有 $n-1$ 个零点, 即 $e^x(f(x) + f'(x))$ 也就是 $f(x) + f'(x)$ 至少有 $n-1$ 个零点.

选(B).

【评注】 我们知道: 常用罗尔定理证明导函数存在零点. 若要证明 $f(x)$ 的 n 阶导数在 (a, b) 至少存在 n 个零点, 只须证明 $f(x)$ 在 (a, b) 有 $n+1$ 个点取相同的函数值.

这里已知 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 有 n 个不同的零点, 但讨论的不是 $f'(x)$, 而是 $f(x) + f'(x)$ 的零点个数问题, 用到了一个技巧: $f(x) + f'(x)$ 与 $(e^x f(x))' = e^x(f(x) + f'(x))$ 有相同的零点, $f(x)$ 与 $e^x f(x)$ 有相同的零点, 问题就转化为由 $e^x f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 有 n 个不同的零点, 就易得到 $(e^x f(x))'$ 在 $[0, +\infty)$ 至少有多少个零点.

567 【答案】 B

【分析】 $F(x)$ 在 $[1, 2]$ 上连续, $(1, 2)$ 内可导且 $F(1) = F(2)$, 由罗尔定理, 至少存在一点 $x_0 \in (1, 2)$ 使 $F'(x_0) = 0$, 又 $F'(x) = 2(x-1)f(x) + (x-1)^2 f'(x) \Rightarrow F'(x_0) = F'(1)$

$\Rightarrow F'(x)$ 在 $[1, x_0]$ 上满足罗尔定理条件, 所以, 至少存在 $\xi \in (1, x_0) \subset (1, 2)$ 上使 $F''(\xi) = 0$. 因此选(B).

由题设, 无法判断 $F'(x)$ 的单调性, 也无法判定除 $x_0, x = 1$ 以外 $F'(x)$ 是否还有零点, 因此不选(C) 和(D).

【评注】 关于判断导函数零点的问题, 常常利用罗尔定理.

568 【答案】 D

【分析】 判断 $f'(x)$ 的间断点 x_0 的类型就要考查 $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f'(x)$.

若 $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f'(x) = A_\pm$ 均存在 $\Rightarrow$

$$f'_\pm(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f'(x) = A_\pm$$

由于 $f'(x_0) \exists \Rightarrow f'_\pm(x_0) = f'(x_0) \Rightarrow A_\pm = f'(x_0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0) \Rightarrow f'(x)$ 在 $x = x_0$ 连续, 与已知矛盾 $\Rightarrow$ (A)、(B) 不正确.

若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = \infty \Rightarrow f'_+(x_0)$ 不 $\exists$, 与 $f'(x_0) \exists$ 矛盾. 同理, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = \infty \Rightarrow f'_-(x_0)$ 不 $\exists$, 与 $f'(x_0) \exists$ 矛盾. 因此(C) 不正确. 选(D).

【评注】 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 易求得 $f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
 $x = 0$ 是 $f'(x)$ 的非 ∞ 型第二类间断点.

569 【答案】 C

【分析】 方法 1 分别在 $[a, c], [c, b]$ 上用拉格朗日中值定理, $\exists \xi_1 \in (a, c), \xi_2 \in (c, b)$ 使得

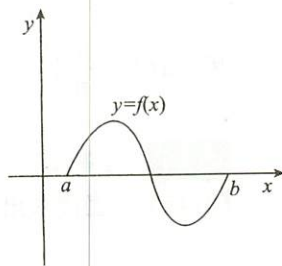
$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = f'(\xi_1) > 0, \frac{f(b) - f(c)}{b - c} = f'(\xi_2) < 0$$

在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上再对 $f'(x)$ 用拉格朗日中值定理 $\Rightarrow \exists \xi \in (\xi_1, \xi_2)$ 使得

$$f''(\xi) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} < 0$$

即(C) 成立. 选(C).

方法 2 取 $f(x) = x(1-x), x \in [0, 1] \Rightarrow f(0) = f(1) = 0$,
 $f(x) > 0 (x \in (0, 1)), f''(x) = -2$. 由此知(A)、(B) 不正确. 若取 $f(x)$ 如图所示, 则知(D) 不对. 因此, 选(C).



570 【答案】 C

【分析】 前三个选项涉及 $f'(x)$ 在 (a, b) 有无零点, 若有零点, 它是唯一的, 还是至少两个. 题中相关条件及 $f(a) = f(b)$, 由罗尔定理知, $\exists \xi \in (a, b), f'(\xi) = 0$. 又 $f''(x) \neq 0 (x \in (a, b)) \Rightarrow f''(x)$ 在 (a, b) 恒正或恒负 $\Rightarrow f'(x)$ 在 (a, b) 单调, $\Rightarrow f'(x)$ 在 (a, b) 的零点是唯一的.

选(C).

【评注】 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 是凸或凹函数, 又 $f(a) = f(b) = 0$, 则 $x \in (a, b)$ 时 $f(x) > 0$ 或 $f(x) < 0$.

571 【答案】 B

【分析】 定积分有下述性质: 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) \leq g(x)$, 并设至少有一点 $x_1 \in [a, b]$ 使 $f(x_1) < g(x_1)$, 则

$$\int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx.$$

此定理中有 3 点应注意: ① $a < b$; ② $f(x)$ 与 $g(x)$ 均连续; ③ $f(x) \leq g(x)$ 且至少有一点 $x_1 \in [a, b]$ 使 $f(x_1) < g(x_1)$ (即真正成为不等).

由上述定理立即可知答案(B).

【评注】 因不知道 $x < 0$ 还是 $x > 0$, 故不能选(A). 因不知积分 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 与 $\int_0^{+\infty} g(x) dx$ 收敛, 所以不选(C). 而(D) 更成问题了, 因为由 $f(x) < g(x)$ 推不出 $|f(x)| < |g(x)|$.

572 【答案】 B

【分析】 先求出 $\int_0^{a_n} x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^{a_n} = \frac{a_n^{n+1}}{n+1} \stackrel{\text{记}}{=} y_n$

$$\Rightarrow a_n = (n+1)^{\frac{1}{n+1}} y_n^{\frac{1}{n+1}}$$

$$\text{又 } \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^{\frac{1}{n+1}} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n^{\frac{1}{n+1}} = 2^0 = 1$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$. 故应选(B).

573 【答案】 B

$$\begin{aligned} \text{【分析】 } a_n &= 3 \cdot \frac{1}{2n} \int_0^{\frac{n+1}{n}} (1+x^{2n})^{\frac{1}{2}} d(1+x^{2n}) = 3 \cdot \frac{1}{2n} \cdot \frac{2}{3} (1+x^{2n})^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{n+1}{n}} \\ &= \frac{1}{n} \left[\left(1 + \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{2n} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] \end{aligned}$$

因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = (1+e^2)^{\frac{3}{2}} - 1$. 因此选(B).

574 【答案】 B

【分析】 直接求出定积分办不到. 我们用适当放大缩小法.

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} \leq \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx \leq 3^{\frac{1}{2}} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$$

注意 $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^{\frac{1}{2n}} = 1$, 由夹逼定理 $\Rightarrow$

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt[n]{x} dx}{1+x^2} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

选(B).

575 【答案】 B

【分析】 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, 而题设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left[\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt + a \right] = b$ 存在, 又

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt + a \right] = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt + a = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + a$$

故必有 $\frac{\sqrt{\pi}}{2} + a = 0$, 即 $a = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (否则 $b = \infty$, 不合题意).

(反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 非常重要, 要求读者记住这个结果). 由洛必达法则,

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left[\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt - \frac{\sqrt{\pi}}{2}}{e^{-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{-e^{-x}} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \end{aligned}$$

选(B).

576 【答案】 D

【分析】 先改写 $F(x) = -\frac{1}{3} \int_0^x f(x^3 - t^3) d(x^3 - t^3) \xrightarrow{s=x^3-t^3} -\frac{1}{3} \int_{x^3}^0 f(s) ds$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{x^3} f(s) ds$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} \int_0^{x^3} f(s) ds}{\frac{1}{6} x^6} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3) 3x^2}{6x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3)}{x^3} = f'(0) = 2$$

其中

$$g(x) \sim \frac{1}{6} x^6 \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0).$$

因此, 选(D).

577 【答案】 B

【分析】 先求出 $f(x)$ 的表达式. 当 $x \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 \ln \sqrt{x^2 + t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(x^2 + t^2) dt \\ &= \frac{1}{2} t \ln(x^2 + t^2) \Big|_{t=0}^{t=1} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2t^2}{x^2 + t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - 1 + x^2 \int_0^1 \frac{1}{x^2 + t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - 1 + x \arctan \frac{t}{x} \Big|_{t=0}^{t=1} \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - 1 + x \arctan \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } f(0) = \int_0^1 \ln t dt = -1.$$

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 1 + x\arctan \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 = f(0)$, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处连续.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{2x} \ln(x^2+1) + \arctan \frac{1}{x} \right] = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{1}{2x} \ln(x^2+1) + \arctan \frac{1}{x} \right] = -\frac{\pi}{2}$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处不可导.

578 【答案】 C

【分析】 这是讨论分段函数 $f(x)$ 在分界点 $x=0$ 处的连续性, 可导性与导函数的连续性问题.

先讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性. 按定义先分别求出 $f'_+(0), f'_-(0)$.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \ln(1+x^3) \sin \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} x^3 \sin \frac{1}{x} = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} \int_0^{x^2} \sin t dt = \frac{(\sin x^2) 2x}{2x} = 0$$

$$\Rightarrow f'(0) = 0.$$

再求 $f'(x)$,

$$x > 0 \text{ 时 } f'(x) = -\frac{1}{x^2} \ln(1+x^3) \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \frac{3x^2}{1+x^3} \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \ln(1+x^3) \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

易知 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ 不存在, 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{x^2} \ln(1+x^3) \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \frac{3x^2}{1+x^3} \sin \frac{1}{x} \right) = 0 + 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \ln(1+x^3) \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\ln(1+x^3)}{x^3} \cos \frac{1}{x} \text{ 不存在.}$$

因此 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续. 选(C).

【评注】 (1) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \exists, \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) \text{ 不 } \exists \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) + h(x)) \text{ 不 } \exists$. 若又有 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)h(x) \text{ 不 } \exists$.

(2) 若先考察 $x < 0$ 时,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_0^{x^2} \sin t dt + \frac{1}{x} \sin x^2 \cdot 2x$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{2x} \sin x^2 \cdot 2x + \lim_{x \rightarrow 0^-} 2 \sin x^2 = 0 + 0 = 0 = f'(0)$$

为判断 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性还需考察 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$.

579 【答案】 D

【分析】 讨论 $F(x)$ 的极值与曲线 $y = F(x)$ 的凹向, 要求 $F'(x)$ 与 $F''(x)$. 变限求导应先将 $f(x-t)$ 中的 x 变换到 f 的外边然后再到积分号外边. 为此, 对于积分, 令 $x-t = u, t=0$ 时 $u = x; t = x$ 时 $u = 0$, 于是

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_0^x (x-2t)f(x-t)dt = \int_x^0 (2u-x)f(u)(-du) \\
 &= \int_0^x 2uf(u)du - x \int_0^x f(u)du
 \end{aligned}$$

$$F'(x) = 2xf(x) - xf(x) - \int_0^x f(u)du = xf(x) - \int_0^x f(u)du,$$

$$F''(x) = xf'(x)$$

$F'(0) = 0, F''(0) = 0$, 当 $x < 0$ 时 $F''(x) > 0$; 当 $x > 0$ 时 $F''(x) < 0$.

故曲线 $y = F(x)$ 在点 $(0, 0)$ 的左侧是凹的, 右侧是凸的, 选(D).

【评注】 (1) 为什么不选(A)或(B)?按照单选题的规则, 选了(D), 就不必再考虑其它. 但为了说明问题, 下面再来证明(A)与(B)都不对. 事实上, 由已证 $x < 0$ 时 $F''(x) > 0$, 且 $F'(0) = 0$, 故知当 $x < 0$ 时 $F'(x) - F'(0) = F''(\xi)(x-0) < 0$, 即 $F'(x) < 0$, $F(x)$ 严格单调减少; 当 $x > 0$ 时 $F''(x) < 0$, 从而知当 $x > 0$ 时 $F'(x) - F'(0) = F''(\xi)(x-0) < 0$, 即 $F'(x) < 0$, $F(x)$ 亦严格单调减少. $F(0)$ 不是极值.

(2) 这里 $(0, F(0)) = (0, 0)$ 是 $y = F(x)$ 的拐点. 有一般性结论: 设 $f(x)$ 可导, $(x_0, f(x_0))$ 是 $y = f(x)$ 的拐点, 则 $x = x_0$ 不是 $f(x)$ 的极值点.

580 【答案】 B

【分析】 变限积分函数 $F(t) = \int_1^t [f(y) \int_y^t f(x)dx]dy$, y 是积分变量, 被积函数 $f(y) \int_y^t f(x)dx$ 又含变限积分函数 $\int_y^t f(x)dx$, 作为 y 的函数.

$$\left(\int_y^t f(x)dx \right)' = -f(y)$$

于是

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \int_1^t [f(y) \int_y^t f(x)dx]dy = - \int_1^t \left(\int_y^t f(x)dx \right) d \left(\int_y^t f(x)dx \right) \\
 &= - \frac{1}{2} \left(\int_y^t f(x)dx \right)^2 \Big|_{y=1}^{y=t} = \frac{1}{2} \left(\int_1^t f(x)dx \right)^2
 \end{aligned}$$

$$F'(t) = f(t) \int_1^t f(y)dy,$$

$$F'(2) = f(2) \int_1^2 f(y)dy = f(2), \text{选(B).}$$

在后面的二重积分中, 还有其它办法.

581 【答案】 C

【分析】 考察 $g(x)$ 的奇偶性.

$$\begin{aligned}
 g(-x) &= \int_{-a}^a |-x-t| f(t)dt = \int_{-a}^a |x+t| f(t)dt \\
 &\stackrel{\text{令 } t=-u}{=} \int_a^{-a} |x-u| f(-u)d(-u) = \int_{-a}^a |x-u| f(u)du = g(x)
 \end{aligned}$$

因此 $g(x)$ 是偶函数. 选(C).

582 【答案】 C

【分析】 证明(C)正确. $f(t)$ 为偶函数, 故 $tf(t)$ 为奇函数, $\int_a^u tf(t)dt = \int_a^0 tf(t)dt + \int_0^u tf(t)dt$ 为 u 的偶函数, 所以 $\int_0^x \left[\int_a^u tf(t)dt \right]du$ 是 x 的奇函数, (C) 正确.

【评注】 易知(D)是偶函数,(A)未必是奇函数,(B)未必是偶函数,也未必是奇函数.

583 【答案】 B

【分析】 作积分变量变换,令 $\frac{t}{s}x = u$,于是 $dx = \frac{s}{t}du$, $x = 0$ 时 $u = 0$; $x = \frac{s}{t}$ 时 $u = 1$.

$$\int_0^{\frac{s}{t}} tf\left(\frac{t}{s}x\right)dx = \int_0^1 sf(u)du$$

所以仅与 s 有关,与 t 无关.选(B).

584 【答案】 C

【分析】 用微分学方法对 $F(x)$ 求导有困难,应该用积分学方法.

$$\begin{aligned} \int_1^x g\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right) \frac{dt}{t} &= \frac{1}{2} \int_1^x g\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right) \frac{dt^2}{t^2} \stackrel{t^2=u}{=} \frac{1}{2} \int_1^{x^2} g\left(u + \frac{x^2}{u}\right) \frac{du}{u} \\ &= \frac{1}{2} \int_1^x g\left(u + \frac{x^2}{u}\right) \frac{du}{u} + \frac{1}{2} \int_x^{x^2} g\left(u + \frac{x^2}{u}\right) \frac{du}{u} \\ &\stackrel{\text{对第二个积分}}{\substack{\text{令 } v = \frac{x^2}{u} \\ \frac{du}{u} = -\frac{dv}{v}}}} \frac{1}{2} \int_1^x g\left(u + \frac{x^2}{u}\right) \frac{du}{u} + \frac{1}{2} \int_x^1 g\left(v + \frac{x^2}{v}\right) \frac{v}{x^2} \left(-\frac{x^2}{v^2}\right) dv \\ &= \frac{1}{2} \int_1^x g\left(u + \frac{x^2}{u}\right) \frac{du}{u} + \frac{1}{2} \int_1^x g\left(v + \frac{x^2}{v}\right) \frac{dv}{v} \\ &= \int_1^x g\left(t + \frac{x^2}{t}\right) \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

因此 $F(x) = 0$, 选(C).

585 【答案】 C

【分析】 $\int_1^2 xf(x)dx = \int_0^2 xf(x)dx - \int_0^1 xf(x)dx$

现通过变量替换将 $\int_0^2 xf(x)dx$ 转化为 $\int_0^1 xf(x)dx$.

$$\int_0^2 xf(x)dx \stackrel{x=2t}{=} \int_0^1 2tf(2t)2dt \stackrel{\text{条件}}{=} 8 \int_0^1 tf(t)dt$$

$$\int_1^2 xf(x)dx = 8 \int_0^1 xf(x)dx - \int_0^1 xf(x)dx = 7 \int_0^1 xf(x)dx$$

因此选(C).

586 【答案】 C

【分析】
$$\begin{aligned} F(2a) - 2F(a) &= \int_0^{2a} f(t)f'(2a-t)dt - 2 \int_0^a f(t)f'(2a-t)dt \\ &= \int_a^{2a} f(t)f'(2a-t)dt - \int_0^a f(t)f'(2a-t)dt \\ &\stackrel{\text{对第一个积分}}{\substack{\text{令 } 2a-t=u \\ dt=-du}} \int_0^a f(2a-u)f'(u)du - \int_0^a f(t)f'(2a-t)dt \\ &\stackrel{\text{对第一个积分}}{\substack{\text{作分部积分}}}} f(2a-u)f(u) \Big|_0^a + \int_0^a f(u)f'(2a-u)du \\ &\quad - \int_0^a f(u)f'(2a-u)du \\ &= f^2(a) - f(2a)f(0) = 1 \end{aligned}$$

选(C).

587 【答案】 C

【分析】 已知: $g(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导, 则 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 单调增加 $\Leftrightarrow g'(x) \geq 0$ ($x \in (a, b)$), 在 (a, b) 的任意子区间内 $g'(x) \not\equiv 0$.

因此 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ (它在 $[a, b]$ 可导) 在 $[a, b]$ 单调增加 $\Leftrightarrow F'(x) = f(x) \geq 0$ ($x \in (a, b)$) 且在 (a, b) 的任意子区间内 $F'(x) = f(x) \not\equiv 0$. 因此选(C).

588 【答案】 B

【分析】 方法1
$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{1+t} dt \stackrel{\substack{u=\frac{1}{t} \\ (t=\frac{1}{u})}}{=} \int_1^x \frac{\ln \frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u}} \left(-\frac{1}{u^2}\right) du$$

$$= \int_1^x \frac{\ln u}{u(u+1)} du = \int_1^x \ln u \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du$$

$$= \int_1^x \frac{\ln u}{u} du - \int_1^x \frac{\ln u}{u+1} du = \frac{1}{2} \ln^2 u \Big|_1^x - f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} \ln^2 x. \text{ 选(B).}$$

方法2 记 $F(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$, 则

$$F'(x) = f'(x) + f'\left(\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{\ln x}{1+x} + \frac{\ln \frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{\ln x}{1+x} + \frac{\ln x}{x(1+x)} = \frac{\ln x}{x}$$

$$\Rightarrow F(x) - F(1) = \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt = \frac{1}{2} \ln^2 x$$

因 $F(1) = 0 \Rightarrow$

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x. \text{ 选(B).}$$

589 【答案】 A

【分析】 $I = \int_0^{100\pi} \sqrt{2\cos^2 x} dx = \sqrt{2} \int_0^{100\pi} |\cos x| dx$, 被积函数以 π 为周期, 由周期函数的积分性质 $\Rightarrow$

$$I = \sqrt{2} \cdot 100 \int_0^{\pi} |\cos x| dx = \sqrt{2} \cdot 100 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos x| dx$$

$$= 200 \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 200 \sqrt{2}.$$

因此选(A).

590 【答案】 A

【分析】 考察 $f(x+2\pi) - f(x) = \int_x^{x+2\pi} [e^{\cos t} - e^{-\cos t}] dt$ 被积函数以 2π 为周期且为偶函

数,由周期函数的积分性质得

$$f(x+2\pi) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} [e^{\cos t} - e^{-\cos t}] dt = 2 \int_0^{\pi} [e^{\cos t} - e^{-\cos t}] dt$$

$$\stackrel{t=\pi-u}{=} -2 \int_0^{\pi} e^{\cos u} - e^{-\cos u} du$$

因此, $f(x+2\pi) - f(x) = 0$, 选(A).

【评注】 相似的方法是:

$g(t) = e^{\cos t} - e^{-\cos t}$ 是以 2π 为周期的连续函数, $f(x) = \int_0^x g(t) dt$, 考察

$$f(2\pi) = \int_0^{2\pi} g(t) dt = \int_0^{2\pi} e^{\cos t} dt + \int_0^{2\pi} e^{\cos(\pi-t)} d(\pi-t)$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{\cos t} dt - \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos u} du = 0$$

于是 $f(x) = \int_0^x g(t) dt$ 是以 2π 为周期的周期函数, 即 $f(x) = f(x+2\pi)$. 选(A).

周期函数的积分性质:

$g(t)$ 是以 T 为周期的连续函数, 则 $f(x) = \int_0^x g(t) dt$ 是 T 为周期的充要条件是

$$\int_0^T g(t) dt = 0$$

591 【答案】 B

【分析】 由 $\sin x \leq x \Rightarrow \sin(\sin x) \leq \sin x (x \in [0, \frac{\pi}{2}])$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x) dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1, \text{ 即 } I < 1.$$

又

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\cos x) dx \stackrel{x=\frac{\pi}{2}-t}{=} - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos(\cos(\frac{\pi}{2}-t)) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin t) dt > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 1, \text{ 即 } J > 1.$$

因此 $I < 1 < J$.

选(B).

592 【答案】 A

【分析】 考察 $F(x) \stackrel{\text{记}}{=} \int_0^x f(t) dt - \int_0^1 x f(t) dt \Rightarrow$

$F'(x) = f(x) - \int_0^1 f(t) dt$ 在 $[0, 1]$ 上连续且

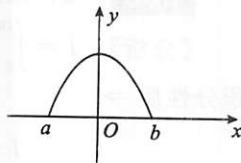
$$F''(x) = f'(x) < 0 (x \in (0, 1))$$

$\Rightarrow F'(x)$ 在 $[0, 1]$ 单调下降.

又 $F(0) = F(1) = 0$, 由罗尔定理 $\Rightarrow \exists \xi \in (0, 1), F'(\xi) = 0 \Rightarrow$

$$F'(x) \begin{cases} > 0, & 0 < x < \xi \\ = 0, & x = \xi \\ < 0, & \xi < x < 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow F(x) > F(0) = 0 (x \in (0, \xi])$



$$F(x) > F(1) = 0 (x \in [\xi, 1)) \\ \Rightarrow F(x) > 0 (x \in (0, 1)). \text{ 选(A).}$$

【评注】 该题的分析中,实质上已证明了如下结论:

设 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,在 (a, b) 内可导, $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上为凸函数,且 $F(a) = F(b) = 0$, 则 $F(x) > 0 (x \in (a, b))$.

593 【答案】 B

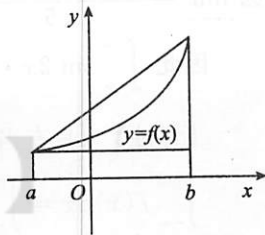
【分析】 方法1 本题的关键是判断 $f(x)$ 在 $(-\delta, \delta)$ 上的符号. 由 $f'(0) = 0$ 又因 $f''(x) > 0$, 所以 $f'(x)$ 单调增加, 因此在 $(-\delta, 0)$ 和 $(0, \delta)$ 上分别有 $f'(x) < 0$ 和 $f'(x) > 0$, 从而 $f(x)$ 在 $(-\delta, 0)$ 上单调减少, 在 $(0, \delta)$ 上单调增加, 由于 $f(0) = 0$, 于是有在 $(-\delta, \delta)$ 上除 $f(0) = 0$ 外, 其他点 x 有 $f(x) > 0$, 从而 $\int_{-\delta}^{\delta} f(x) dx > 0$, 因此选(B).

方法2 由条件知, $f(x)$ 在 $(-\delta, \delta)$ 是凹的 $\Rightarrow f(x) > f(0) + f'(0)x = 0, x \in (-\delta, \delta), x \neq 0 \Rightarrow I = \int_{-\delta}^{\delta} f(x) dx > 0$, 选(B).

594 【答案】 C

【分析】 题设不等式的几何意义是: 矩形面积 $<$ 曲边梯形面积 $<$ 梯形面积, 要使上面不等式成立, 需要过点 $(a, f(a))$ 平行于 x 轴的直线在曲线 $y = f(x)$ 的下方, 连结点 $(a, f(a))$ 和点 $(b, f(b))$ 的直线在曲线 $y = f(x)$ 上方. 当曲线 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是单调上升且是凹时有此性质.

于是当 $f'(x) > 0, f''(x) > 0$ 成立时, 上述条件成立, 因此选(C).



595 【答案】 C

【分析】 为了用 $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$ 时 $f(x)$ 的条件, 将积分 $\int_0^a f(x) dx$ 分段积分:

$$I = \int_0^a f(x) dx = \int_0^{\frac{a}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{a}{2}}^a f(x) dx$$

对第二个定积分作变量替换 $t = a - x (x = a - t)$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{a}{2}}^a f(x) dx &= - \int_{\frac{a}{2}}^0 f(a-t) dt = \int_0^{\frac{a}{2}} f(a-t) dt \\ &= \int_0^{\frac{a}{2}} f(a-x) dx \end{aligned}$$

因此

$$I = \int_0^{\frac{a}{2}} [f(x) + f(a-x)] dx = 0$$

选(C).

596 【答案】 B

【分析】 为了利用 $f'(0)$ 来求 $\lim_{x \rightarrow 0} \theta$, 将已知等式改写成

$$\int_0^x f(t) dt - f(0)x = x^2 \frac{[f(\theta x) - f(0)]}{\theta x} \cdot \theta$$

$\Rightarrow$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \theta = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x f(t) dt - f(0)x \right) / x^2}{\frac{f(\theta x) - f(0)}{\theta x}} = \frac{1}{f'(0)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{2x} = \frac{1}{2} \frac{f'(0)}{f'(0)} = \frac{1}{2}$$

选(B).

597 【答案】 C

【分析】 曲线 $y = x^2 \sin x (0 \leq x \leq 2\pi)$ 与 x 轴所围成区域的面积

$$S = \int_0^{2\pi} |x^2 \sin x| dx,$$

而 $|x^2 \sin x| = \begin{cases} x^2 \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ -x^2 \sin x, & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$, 所以 C 正确.

598 【答案】 C

$$\text{【分析】 } \int_0^{+\infty} \sin 2x \cdot e^{|x|} dx = \int_0^{+\infty} e^x \sin 2x dx = \left. \frac{e^x (\sin 2x - 2\cos 2x)}{5} \right|_0^{+\infty}$$

因 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x (\sin 2x - 2\cos 2x)}{5}$ 不存在, 所以 $\int_0^{+\infty} \sin 2x \cdot e^{|x|} dx$ 发散.

因此, $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin 2x \cdot e^{|x|} dx$ 发散.

【评注】 只有当 $\int_0^{+\infty} f(x) dx, \int_{-\infty}^0 f(x) dx$ 都收敛时, 才有 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx$; 否则, 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 发散.

此处要与连续奇函数在有限的对称区间上的积分 $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ 区分开来.

599 【答案】 C

【分析】 直接分部积分并注意

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi b}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{b}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-(\frac{t}{\sqrt{b}})^2} d \frac{t}{\sqrt{b}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \varphi(x)) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \varphi(x)}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{2}{\sqrt{\pi b}} e^{-\frac{x^2}{b}}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi b}} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{b}} = 0 \end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= x(1 - \varphi(x)) \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x d(1 - \varphi(x)) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi b}} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{b}} dx = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{b}} d \frac{x^2}{b} \\ &= -\sqrt{\frac{b}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{b}} \Big|_0^{+\infty} = \sqrt{\frac{b}{\pi}} \end{aligned}$$

选(C).

600 【答案】 A

【分析】 将等式两边积分,并注意 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 为常数得

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^x}dx \cdot \int_0^{+\infty} f(x)dx$$

又

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan x \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} \\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^x}dx &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^x+1} \right) dx \\ &= -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = 1 + \ln(1+e^{-x}) \Big|_0^{+\infty} \\ &= 1 - \ln 2 \end{aligned}$$

代入得 $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{\pi}{2} - (1 - \ln 2) \int_0^{+\infty} f(x)dx$

解得 $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{\pi}{2(2 - \ln 2)}$

选(A).

601 【答案】 D

【分析】 方法1 曲线位于第一象限,如图所示.

写出曲线的参数方程.

$$\begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{2}\cos^2 t, \\ \sqrt{y} = \sqrt{2}\sin^2 t \end{cases} \quad (t \text{ 从 } \frac{\pi}{2} \text{ 到 } 0).$$

即 $\begin{cases} x = 2\cos^4 t, \\ y = 2\sin^4 t \end{cases} (t \text{ 从 } \frac{\pi}{2} \text{ 到 } 0).$

于是该图形的面积

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 y(x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 2\sin^4 t \cdot 2 \cdot 4\cos^3 t(-\sin t)dt \\ &= 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t(1 - \sin^2 t)dsin t = 16 \left(\frac{1}{6}\sin^6 t - \frac{1}{8}\sin^8 t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 16 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) = \frac{2}{3}. \text{ 选(D).} \end{aligned}$$

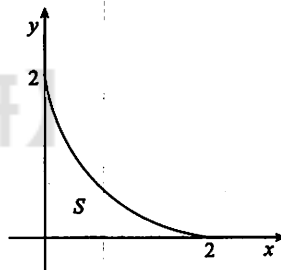
方法2 写出曲线的显式表示

$$y = (\sqrt{2} - \sqrt{x})^2 \quad (0 \leq x \leq 2)$$

⇒ 该图形的面积

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 ydx = \int_0^2 (2 - 2\sqrt{2}\sqrt{x} + x)dx \\ &= 4 - 2\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 + \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^2 \\ &= 4 - \frac{4\sqrt{2}}{3} \times 2\sqrt{2} + \frac{1}{2} \times 4 = 6 - \frac{16}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

选(D).



602 【答案】 C

【分析】 设在区间 $[x_1, x_2]$ 上 $f(x) \geq g(x)$, 则在该区间上所对应的旋转体体积

$$V_1 = \int_{x_1}^{x_2} \pi [f^2(x) - g^2(x)] dx$$

若在 $[x_1, x_2]$ 上 $f(x) \leq g(x)$, 则

$$V_1 = \int_{x_1}^{x_2} \pi [g^2(x) - f^2(x)] dx$$

于是不论是哪种情况, 总有

$$V_1 = \int_{x_1}^{x_2} \pi |f^2(x) - g^2(x)| dx$$

同理, 区间 $[x_2, x_3]$ 上对应的旋转体体积

$$V_2 = \int_{x_2}^{x_3} \pi |f^2(x) - g^2(x)| dx$$

所以 $[x_1, x_3]$ 上对应的旋转体体积

$$V_1 + V_2 = \int_{x_1}^{x_3} \pi |f^2(x) - g^2(x)| dx$$

603 【答案】 B

【分析】 由于 $y = \operatorname{ch} x$ 是偶函数, 只须考察 $x \in [0, 1]$ 部分. 按绕 y 轴旋转的旋转体的体积公式得

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 x \operatorname{ch} x dx = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 x(e^x + e^{-x}) dx \\ &= \pi \left[\int_0^1 x de^x - \int_0^1 x de^{-x} \right] = \pi \left[x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx - x e^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx \right] \\ &= \pi \left[e - e^x \Big|_0^1 - e^{-1} - e^{-x} \Big|_0^1 \right] = 2\pi \left(1 - \frac{1}{e} \right). \end{aligned}$$

选(B).

604 【答案】 B

【分析】 先求

$$\begin{aligned} \int_0^a xy(x) dx &= \int_0^a xb \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = -\frac{a^2 b}{2} \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} d \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \\ &= -\frac{a^2 b}{2} \cdot \frac{2}{3} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a = \frac{1}{3} a^2 b \\ \int_0^a y^2(x) dx &= \int_0^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = b^2 \left(a - \frac{1}{3} a \right) = \frac{2}{3} ab^2. \end{aligned}$$

又图形的面积 $S = \frac{1}{4} \pi ab$, 于是按平面图形质心公式

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \int_0^a xy dx / S = \frac{1}{3} a^2 b / \frac{1}{4} \pi ab = \frac{4a}{3\pi} \\ \bar{y} &= \frac{1}{2} \int_0^a y^2(x) dx / S = \frac{1}{3} ab^2 / \frac{1}{4} \pi ab = \frac{4b}{3\pi} \end{aligned}$$

因此 $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi} \right)$, 选(B).

605 【答案】 C

【分析】 用 x 表示铁钉击入木板的深度, 相应的铁钉的阻力是 kx (k 是阻力系数).

第一次打击做的功 $w_1 = \int_0^1 kx dx = \frac{1}{2}k$

第二次打击后的深度为 h , 相应的功

$$w_2 = \int_1^h kx dx = \frac{1}{2}kx^2 \Big|_1^h = \frac{1}{2}k(h^2 - 1)$$

由 $w_1 = w_2 \Rightarrow \frac{1}{2}k = \frac{1}{2}k(h^2 - 1) \Rightarrow h = \sqrt{2}$.

因此第二次能把铁钉击入 $\sqrt{2} - 1$ cm, 选(C).

606 【答案】 C

【分析】 原方程的特征方程为 $\lambda^2 + q = 0$.

当 $q < 0$ 时, $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-q}$, 通解为 $y = C_1 e^{\sqrt{-q}x} + C_2 e^{-\sqrt{-q}x}$,

当 $C_1 = 0, C_2 \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = C_2 \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\sqrt{-q}x} = 0$.

当 $q = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = 0$, 原方程通解为 $y = C_1 x + C_2$.

当 $q > 0$ 时, $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-q}i$, 原方程通解为 $y = C_1 \cos \sqrt{q}x + C_2 \sin \sqrt{q}x$.

显然, 只有 $q < 0$ 时, 原方程存在当 $x \rightarrow +\infty$ 时趋于零的非零解, 故应选(C).

607 【答案】 B

【分析】 由二阶线性微分方程通解的结构及题设知所求的二阶线性常系数非齐次方程相应的齐次方程有两个线性无关解 $y_1 = e^{2x}, y_2 = e^{-x}$, 该微分方程的特征根分别是 $\lambda_1 = 2$ 与 $\lambda_2 = -1$, 从而特征方程是 $(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$, 即 $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$. 由此可见所求方程的形状是 $y'' - y' - 2y = f(x)$.

因此只能在(B)与(D)中选择.

方法1 由于 $-2xe^{-x}$ 是该方程的一个特解, 又由于 $\lambda = -1$ 是单特征根, 故只能是 $f(x) = 6e^{-x}$. ($f(x) = 3xe^{-x}$ 时, 它的特解类型是 $(ax + b)xe^{-x}$). 选(B).

方法2 记 $\bar{y} = -2xe^{-x}$, 则方程的右端项 $f(x) = \bar{y}'' - \bar{y}' - 2\bar{y}$.

由于 $\bar{y}' = 2(x-1)e^{-x}, \bar{y}'' = 2(2-x)e^{-x}$, 故

$$f(x) = 2(2-x)e^{-x} - 2(x-1)e^{-x} + 4xe^{-x} = 6e^{-x}$$

代入即得相应的微分方程是 $y'' - y' - 2y = 6e^{-x}$.

608 【答案】 C

【分析】 若 $y = y(x)$ 以 T 为周期, 显然有 $y(0) = y(T)$. 反之, 若 $y(0) = y(T)$, 考察 $\Phi(x) = y(x+T) - y(x)$, 则

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(x)}{dx} &= y'(x+T) - y'(x) \\ &= [-P(x+T)y(x+T) + Q(x+T)] - [-P(x)y(x) + Q(x)] \\ &= -P(x)(y(x+T) - y(x)) \end{aligned}$$

(其中 $P(x+T) = P(x), Q(x+T) = Q(x)$),

即 $\frac{d\Phi(x)}{dx} + P(x)\Phi(x) = 0$

两边乘 $e^{\int_0^x P(u)du}$ 得

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$\frac{d}{dx}(\Phi(x)e^{\int_0^x P(t)dt}) = 0$$

$$\Rightarrow \Phi(x)e^{\int_0^x P(t)dt} = C \quad (x \in (-\infty, +\infty))$$

由 $\Phi(0) = y(T) - y(0) = 0 \Rightarrow C = 0$, 即

$$\Phi(x) = 0 \quad (x \in (-\infty, +\infty))$$

即 $y(x)$ 以 T 为周期. 因此选(C).

609 【答案】 D

【分析】 由通解 $y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$ 的形式可知所求方程的特征根: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2i, \lambda_3 = -2i$, 相应的特征方程为

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2i)(\lambda + 2i) = 0, (\lambda - 1)(\lambda^2 + 4) = 0$$

$$\text{即} \quad \lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0$$

$$\text{则对应的方程为} \quad y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$$

故应选(D).

610 【答案】 C

【分析】 设子弹在时刻 t 进入的深度为 $s(t)$, 则其速度与加速度分别为 $\frac{ds}{dt}$ 与 $\frac{d^2s}{dt^2}$. 根据牛顿第二定律可得子弹在沙箱中运动时满足

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = -k \frac{ds}{dt} \quad (1)$$

其中 m 是子弹的质量, $k > 0$ 是阻力与子弹速度成正比的比例系数. 这是可降阶的; 记 $v = \frac{ds}{dt}$ (速度), 得

$$m \frac{dv}{dt} = -kv \quad (2)$$

$$\text{初值 } v(t) \Big|_{t=0} = v_0.$$

为了求出 $v = v(s)$, 由

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds}$$

转化为求

$$m \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = -kv$$

即

$$dv = -\frac{k}{m} ds$$

并利用 $v \Big|_{s=0} = v_0$, 积分得

$$v = -\frac{k}{m}s + v_0$$

由 $v = 0$ 得 $s = \frac{m}{k}v_0$.

因此能打的深度是 $\frac{m}{k}v_0$. 选(C).

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

线性代数

填空题

611 【答案】 $E - A$

【分析】 用定义法, 因

$$(E - A)(E + A + A^2) = E - A^3 = E$$

612

【答案】

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

【分析】 记 $B = \alpha\beta^T$, 则 $B^2 = (\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T) = \alpha(\beta^T\alpha)\beta^T = 2B$, 于是

$$(A - E)^2 = 2(A - E) \Rightarrow A^2 - 4A + 3E = O \Rightarrow (A - 2E)^2 = E$$

故

$$(A - 2E)^{-1} = A - 2E = \alpha\beta^T - E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

【评注】

本题直接求出 $A - 2E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, 然后用行变换求其逆也是简捷的.

613

【答案】

$$\begin{bmatrix} 3^4 & 3^4 & 0 & 0 \\ 2 \cdot 3^4 & 2 \cdot 3^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^5 \end{bmatrix}$$

【分析】 3 个公式:

$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} A^n & O \\ O & B^n \end{bmatrix}$; 若 $r(A) = 1$, 则 $A^n = l^{n-1}A$, 其中 $l = \sum a_{ii}$; 对角矩阵 n 次方公式

$$\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_1^n & & \\ & a_2^n & \\ & & a_3^n \end{bmatrix}$$

614

【答案】

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

【分析】

$E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $E_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 都是初等矩阵且是两行(列)互换的初等矩阵. 那么

$$E_{12}^{2n} = E, E_{12}^{2n+1} = E_{12}, E_{13}^{2n} = E, E_{13}^{2n+1} = E_{13}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

于是

$$E_{12}^{99}A = E_{12}A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

又 $AE_{13}^{27} = AE = A$.

615

【答案】

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

【分析】初等行变换相当于左乘初等阵,将题设初等行变换的过程用左乘初等阵表出即可

$$B = E_2\left(\frac{1}{3}\right)E_{12}(-2)E_{12}A$$

$$\text{故 } P = E_2\left(\frac{1}{3}\right)E_{12}(-2)E_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

【评注】为保证计算的正确,应验算 $PA = B$ 是否成立.可逆阵可分解成若干个初等阵的乘积,初等行变换化 A 为阶梯形,实际上在左乘若干个初等阵,即左乘可逆阵.

616

【答案】 3 或 -5

【分析】本题 A 中有 2 阶子式 $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} \neq 0$, 故

$$r(A) = 2 \Leftrightarrow |A| = 0$$

而

$$|A| = a^2 + 2a - 15$$

也可用经初等变换矩阵的秩不变来求 a .

617

【答案】 3

【分析】本题没有要求出 A^2 , 由于 A 是可逆矩阵, 又

$$A^2 - 2A = A(A - 2E)$$

故 $r(A^2 - 2A) = r(A - 2E)$, 而

$$A - 2E = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

618

【答案】 3 或 -4

【分析】因为对任何 a, α_1, α_2 分量不成比例, 故线性无关, 所以 β 可由 α_1, α_2 线性表出的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ 线性相关. 又因 $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ 是 3 个三维向量. 故 $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ 线性相关的充分必要条件是行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \beta| = 0$.

由于

$$|\alpha_1, \alpha_2, \beta| = \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & a \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a+2 & -2a-3 & a+3 \\ 7 & -15 & a+7 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2(a^2 + a - 12)$$

所以 $a = 3$ 或 $a = -4$.

【评注】 通常线性表出的问题,应转换为非齐次方程组求解的问题.

设 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = \beta$. 按分量写出,有

$$\begin{cases} (a+2)x_1 + x_2 = 1 \\ 7x_1 - x_2 = a \\ -x_1 + 2x_2 = -1 \end{cases}$$

然后对增广矩阵作初等行变换来求解.

注意,若仅知 $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ 线性相关,并不能保证 β 可以由 α_1, α_2 线性表出,本题能用行列式来计算是与判断出 α_1, α_2 线性无关联结在一起的.

619 【答案】 0

【分析】 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 齐次方程组 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)x = 0$ 有非零解

$$\Leftrightarrow \text{秩 } r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) < 3$$

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & a \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

620 【答案】 2

【分析】 由

$$(\alpha_1 + \alpha_2, a\alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

因 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关,秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$.

$$\text{故 } r(\alpha_1 + \alpha_2, a\alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

621 【答案】 $\neq 5$

【分析】 n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| \neq 0$.

$$|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & a \end{vmatrix} = -7(a-5)$$

622 【答案】 6

【分析】

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & a & 6 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 12-2a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

623 【答案】 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 中任意两个向量

【分析】 由于

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可知向量组的秩为 2. 又因任两个向量坐标不成比例, 任两个向量均线性无关, 都可是极大线性无关组.

624 【答案】 $(0, 1, 0, 0)^T, (-2, 0, 3, 1)^T$

【分析】 由齐次方程组的系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

易见秩 $r(A) = 2$, 那么 $n - r(A) = 4 - 2 = 2$, 故基础解系由两个线性无关的解向量所构成, 且每个解中有两个自由变量. 由于 1, 3 两列所构成的二阶子式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

故可取 x_2, x_4 为自由变量.

令 $x_2 = 1, x_4 = 0$, 由第二个方程 $x_3 - 3x_4 = 0$ 求出 $x_3 = 0$. 再把 $x_2 = 1, x_4 = 0, x_3 = 0$ 代入第一个方程 $x_1 + 2x_4 = 0$ 求出 $x_1 = 0$, 于是得到解 $\eta_1 = (0, 1, 0, 0)^T$.

令 $x_2 = 0, x_4 = 1$, 由第二个方程 $x_3 - 3x_4 = 0$ 求出 $x_3 = 3$, 再将 $x_2 = 0, x_4 = 1, x_3 = 3$ 代入第一个方程 $x_1 + 2x_4 = 0$ 求出 $x_1 = -2$, 于是得到解 $\eta_2 = (-2, 0, 3, 1)^T$.

所以 $Ax = 0$ 的基础解系是 η_1, η_2 .

【评注】 方程组中没有出现 x_2 , 因其系数均为 0, 系数矩阵中应补上 0, 本题考查齐次线性方程组基础解系的求法, 先由 $n - r(A)$ 明确基础解系中解向量的个数, 要求不多也不缺. 要会确定自由变量, 要会给自由变量赋值(若有 3 个自由变量, 则赋三次值, 通常每次给 1 个自由变量赋值为 1, 另两个自由变量赋值为 0. 若只有一个自由变量, 你应如何赋值?) 并求解. 本题中 x_1, x_2 能是自由变量吗? 为什么?

625 【答案】 $\lambda \neq 1$

【分析】 $Ax = 0$ 只有零解 $\Leftrightarrow r(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 \neq 0$$

即 $\lambda \neq 1$.

626 【答案】 -5

【分析】 $Ax = b$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) < n$.

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & a-2 & a \\ 3 & a & 5 & 16 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & a-2 & a \\ 0 & 0 & a^2+a-20 & a^2+3a-10 \end{array} \right]$$

于是 $r(A) = r(\bar{A}) < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + a - 20 = 0 \\ a^2 + 3a - 10 = 0 \end{cases}$

627

【答案】 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -\frac{4}{5}$

【分析】 任意 $b = (b_1, b_2, b_3)^T$ 方程组 $Ax = b$ 总有解 $\Leftrightarrow A$ 的列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可以表示任一个 $b \Leftrightarrow r(A) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$.

$$\text{由 } |A| = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & \lambda-1 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(5\lambda+4).$$

628

【答案】 $\begin{bmatrix} t & u \\ 0 & t \end{bmatrix}, t, u$ 任意常数

【分析】 设 $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ 与 A 可交换, 则

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1+x_3 & x_2+x_4 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_1+x_2 \\ x_3 & x_3+x_4 \end{bmatrix}$$

即

即

$$\begin{cases} x_1+x_3 = x_1 \\ x_2+x_4 = x_1+x_2 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_3+x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

629

【答案】 -4

【分析】 因 -2 是矩阵 A 的特征值, 所以

$$|-2E - A| = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -2 & -2-x & 2 \\ 2 & -2 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & -x-4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

630

【答案】 $\frac{|A|^2}{\lambda^2} + 1$

【分析】 A 有特征值 $\lambda \Rightarrow A^*$ 有特征值 $\frac{|A|}{\lambda} \Rightarrow (A^*)^2$ 有特征值 $\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2 \Rightarrow (A^*)^2 + E$ 有特征值 $\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2 + 1$.

631

【答案】 4

【分析】 设 $A\alpha = \lambda\alpha$ 即

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 7+4+1 = \lambda \\ 4+7+1 = \lambda \\ -4-4-x = -\lambda \end{cases}$$

632

【答案】

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

【分析】 由特征多项式

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & -3 \\ 0 & -4 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda - 10)$$

知矩阵 A 有 3 个不同的特征值 $1, 5, -2$.

故 A 必与对角矩阵 $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 5 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$ 相似.

633 【答案】 2

【分析】 因为二次型矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

有 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$

特征值为 $1, 1, -1$, 故 $p = 2$.

或令 (I) $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_1 - y_3 \end{cases}$, 因 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ 知 (I) 是坐标变换, 有

$$f = y_2^2 + 2(y_1 + y_3)(y_1 - y_3) = 2y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2$$

634 【答案】 ± 1

【分析】 二次型矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & t \\ 0 & t & 2 \end{bmatrix}$$

因 A 中有 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, 故 $r(A) = 2 \Leftrightarrow |A| = 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & t \\ 0 & t & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -t \\ 1 & 1 & t \\ 0 & t & 2 \end{vmatrix} = 2(1 - t^2)$$

635 【答案】 0

【分析】 二次型 $x^T A x$ 经正交变换化为标准形 $3y_1^2 - y_3^2$. 说明矩阵 A 的特征值为 $3, -1, 0$. 因 $\lambda = 0$ 是 A 的特征值, 于是

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & a & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2a(a - 1) = 0, \text{ 得 } a = 0 \text{ 或 } a = 1.$$

又 $\sum a_{ii} = \sum \lambda_i = 3 + (-1) + 0 = 2$. 故 $a = 1$ 舍去, 从而 $a = 0$.

选 择 题

636 【答案】 D

【分析】 矩阵加法有交换律、结合律, (A) 正确.

矩阵乘法有结合律, (B) 正确.

矩阵加法乘法有分配律, (C) 正确.

矩阵乘法没有交换律, (D) 错误.

637 【答案】 B

【分析】 $AA^T \neq A^TA$, (如取 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 则

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}).$$

故 $(A + A^T)^2 = A^2 + AA^T + A^TA + A^{T^2} \neq A^2 + 2AA^T + A^{T^2}$, 应选(B).其余由于 $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, $AA^* = A^*A = |A|E$, $AE = EA = A$, 即 A 分别与 A^{-1} 、 A^* 、 E 都可交换, 故(A)、(C)、(D) 均成立.

【评注】 因矩阵乘法没有交换律, 即 $AB \neq BA$. 故作乘法运算时, 应区别是左乘还是右乘, 运算中左边的始终在左边, 右边的始终在右边. 如 $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$, 除非相互可交换.

638 【答案】 D

【分析】 $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2$
 $\Leftrightarrow -AB + BA = O \Leftrightarrow AB = BA$

所以应选 D.

当 $A = E$ 时, $(E+B)(E-B) = E - B^2$, 关系式 $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ (*) 成立, 但(*) 成立时不能保证必有 $A = E$, 例如 $A = O$ 时 (*) 仍成立, 故(A) 是充分而非必要的.

同理(B) 也是充分而非必要的.

639 【答案】 C

【分析】 由行列式乘法公式, 当 $AB = O$ 有

$$|AB| = |A| \cdot |B| = 0$$

知必有 $|A| = 0$ 或 $|B| = 0$, 即(C) 正确.如 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 知(A)(B) 均不正确.如 $A = E$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 有 $AB \neq O$, 知(D) 不正确.

640 【答案】 D

【分析】 $(3A + 5B)^T = (3A)^T + (5B)^T = 3A^T + 5B^T$, 知(D) 正确.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

注意 $(3AB)^T = 3(AB)^T = 3B^T A^T, (5AB)^{-1} = \frac{1}{5}(AB)^{-1} = \frac{1}{5}B^{-1}A^{-1}$.

641 【答案】 D

【分析】 $(kA)(kA)^* = |kA|E$

$$(kA)^* = |kA| \cdot (kA)^{-1} = k^n |A| \cdot \frac{1}{k} A^{-1} = k^{n-1} A^*.$$

642 【答案】 C

【分析】 由 A 到 B 经过两次行变换, 排除 (A)(B).

P_1 表示一、二两行互换, P_2 表示第 1 行加到第 3 行. 矩阵 A 的第 1 行加到第 3 行, 再一、二两行互换得到 B, 故应 $P_1 P_2 A = B$.

$$\text{注意 } P_2 P_1 A = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} + a_{21} & a_{32} + a_{22} & a_{33} + a_{23} \end{bmatrix}.$$

643 【答案】 C

【分析】 n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| \neq 0$.

(C) 中

$$|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 6 & 9 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$$

所以 (C) 必线性无关.

其实 (A) 中 3 个 2 维向量必相关, (B) 中有向量坐标成比例, 必相关, (D) 中有零向量必线性相关, 一排除就知应选 (C).

644 【答案】 B

【分析】 n 个 n 维向量线性相关的判定一般用行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = 0$ 较方便.

$$|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & a & 3 \\ 1 & -1 & 6 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & a-6 & 3 \\ 0 & -4 & 4 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & a-8 & 2 \\ 0 & 0 & a-2 \end{vmatrix}.$$

当 $a=8$ 时, 行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4| = 0$, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 但 $a=2$ 时仍有行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4| = 0$, 所以 $a=8$ 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关的充分而非必要条件.

【评注】 思考一下当已知向量的分量时, 如何判断向量组的线性相关性, 都有哪些方法?

645 【答案】 C

【分析】 由观察法, 有

$$(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_1) = 0$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_1) = 0$$

$$(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 + \alpha_3) - (\alpha_3 + \alpha_1) = 0$$

知(A), (B), (D) 必线性相关.

关于(C),

$$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

因 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 可逆, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$, 有

$$r(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$$

646 【答案】 B

【分析】 由 $3(\alpha_2 - 2\alpha_3) + 2(3\alpha_3 - \alpha_1) + (2\alpha_1 - 3\alpha_2) = 0$

或 $(\alpha_2 - 2\alpha_3, 3\alpha_3 - \alpha_1, 2\alpha_1 - 3\alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

而 $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$ 知(B) 必线性相关.

647 【答案】 C

【分析】 经初等变换矩阵的秩不变

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & a \\ 2 & 7 & a & 3 \\ 0 & a & 5 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & a \\ 0 & 1 & a-4 & 3-2a \\ 0 & 0 & 5+4a-a^2 & 2a^2-3a-5 \end{bmatrix}$$

又 $5+4a-a^2 = (a+1)(5-a), 2a^2-3a-5 = (2a-5)(a+1)$

当且仅当 $a = -1$ 时

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

有 $r(A) = 2$.

648 【答案】 C

【分析】 秩的公式, 如果 A 可逆则 $r(AB) = r(B), r(BA) = r(B)$.

$$r_1 = r(B) = r(AC) = r(A) = r$$

649 【答案】 A

【分析】 由公式
$$r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n-1 \\ 0, & r(A) < n-1 \end{cases}$$

现在 $n = 4, r(A) = 3 \Rightarrow r(A^*) = 1$.

于是 A^* 的代数余子式全为 0, 即 $(A^*)^* = O$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

650 【答案】 C

【分析】 若 $A = B$ 知(B) 不正确.

若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 知(A)(D) 均不正确.

设 $r(A) = r(B) = r$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 分别是 A 和 B 列向量的极大线性无关组, 于是

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 必可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 线性表出, 那么

$$\begin{aligned} r(A, B) &= r(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n) \leq r(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_r) \\ &\leq 2r = 2r(A) \end{aligned}$$

651 【答案】 B

【分析】 因 $r(A) = 3$, 去掉第 2 列、5 列后

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

所以 x_2, x_5 不能是自由变量.

652 【答案】 C

【分析】 注意定理:

$Ax = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow r(A) < n \Leftrightarrow A$ 的列向量线性相关

而 A 的行向量组线性相关或线性无关对于齐次方程组 $Ax = 0$ 是否有非零解没有必然的联系.

653 【答案】 C

【分析】 因为 $Ax = 0$ 已经有 2 个无关的解 η_1, η_2 , 知

$$n - r(A) = 3 - r(A) \geq 2$$

从而 $r(A) \leq 1$. 可排除(B)、(D).

又因 η_2 不是(A) 中方程组的解, 排除(A).

654 【答案】 B

【分析】 若 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$, 则 $A^2\alpha = \lambda^2\alpha$.

$$\text{故 } \left(\frac{1}{3}A^2 - 2E\right)\alpha = \frac{1}{3}(\lambda^2 - 6)\alpha.$$

655 【答案】 C

【分析】 因(A) 和(D) 的向量成比例. 如果(A) 中 $(-1, 1, 0)^T$ 不是矩阵 A 的特征向量, 则(D) 中的 $(3, -3, 0)^T$ 亦肯定不是矩阵 A 的特征向量, 而选项唯一, 所以(A)、(D) 均是矩阵 A 的特征向量.

$$\text{由 } \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -12 \\ 18 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

所以(B) 是矩阵 A 的特征向量. 故应选(C).

其实 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 12 \\ -14 \end{bmatrix} \neq \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, 故(C)不是A的特征向量.

【评注】 本题用定义 $A\alpha = \lambda\alpha$ 来判断.

656 【答案】 A

【分析】 α_1, α_2 是矩阵A关于 $\lambda = 3$ 的线性无关的特征向量, 故 $\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_2$ 仍是A关于 $\lambda = 3$ 的线性无关的特征向量, α_3 是矩阵A关于 $\lambda = 0$ 的特征向量, 那么 $-3\alpha_3$ 仍是A关于 $\lambda =$

0 的特征向量, 所以 $P = [\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_2, -3\alpha_3]$ 时, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$.

(B) 中 $\alpha_2 + \alpha_3$ 不是A的特征向量.

(C) 中 $\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + 2\alpha_2$ 线性相关.

(D) 中 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1$ 依次为特征值 3, 0, 3 的特征向量, 与对角矩阵中特征值的次序不协调.

657 【答案】 D

【分析】 (A) 是实对称矩阵, 实对称矩阵必可以相似对角化.

(B) 是下三角矩阵, 主对角线元素就是矩阵的特征值, 因而矩阵有三个不同的特征值, 所以矩阵必可以相似对角化.

(C) 是秩为1的矩阵, $Ax = 0$ 有二个线性无关解, 是A的对应于 $\lambda = 0$ 特征向量. $\lambda = 0$ 至少是A的二重特征值, 又 $\lambda_3 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i = \sum_{i=1}^3 a_{ii} = 4$, 故 $\lambda = 0$ 是二重特征值. A相似于对角阵或由 $|\lambda E - A| = \lambda^3 - 4\lambda^2$, 知矩阵的特征值是 4, 0, 0. 对于二重根 $\lambda = 0$, 由秩

$$r(0E - A) = r(A) = 1$$

知齐次方程组 $(0E - A)x = 0$ 的基础解系有 $3 - 1 = 2$ 个线性无关的解向量, 即 $\lambda = 0$ 有两个线性无关的特征向量. 从而矩阵必可以相似对角化. 由排除法, 知应选(D). 或

(D) 是上三角矩阵, 主对角线上的元素 1, 1, -1 就是矩阵的特征值, 对于二重特征值 $\lambda = 1$, 由秩

$$r(E - A) = r \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2$$

知齐次方程组 $(E - A)x = 0$ 只有 $3 - 2 = 1$ 个线性无关的解, 亦即 $\lambda = 1$ 只有一个线性无关的特征向量, 故矩阵必不能相似对角化. 所以应当选(D).

【评注】 (A) 实对称阵与(B) 主对角元互不相等的上(下)三角阵是矩阵可相似对角化的充分条件. 当特征值有 r 重根时, 有些矩阵能相似对角化, 有些矩阵不能相似对角化, 这时关键是通过检查特征矩阵秩, 查清矩阵是否对应有 r 个线性无关的特征向量, A 线性无关特征向量的总数是否等于A的阶数 n .

658 【答案】 C

【分析】 根据A和B相似的必要条件

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$(1)r(A) = r(B) \quad (2)|A| = |B| \quad (3)\lambda_A = \lambda_B \quad (4)\sum a_{ii} = \sum b_{ii}$$

易见(A)秩不等、(B)主对角线之和不等、(D)行列式、或主对角线之和或特征值不等,均不相似,所以应选(C).实际上,对于(C)由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 2)$$

知矩阵A的特征值为2,0,0.又因秩 $r(0E - A) = 1$,有 $n - r(0E - A) = 2$.齐次方程组 $(0E - A)x = 0$ 有2个线性无关的解,即 $\lambda = 0$ 有两个线性无关的特征向量.从而

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

类似地

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

因此

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

659 【答案】 C

【分析】 正定的必要条件 $a_{ii} > 0$,排除(A)、(D).

正定的充分必要条件是顺序主子式全大于0.而(B)中, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$,排除(B).

660 【答案】 B

【分析】 A和B合同 $\Leftrightarrow p_A = p_B, q_A = q_B$ (正、负惯性指数).

由于

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 3 & -4 \\ 0 & -4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 7)(\lambda + 1)$$

矩阵A的特征值是:2,7,-1,即 $p = 2, q = 1$.

所以应选(B).

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

如果一个人以种种肯定的立论开始,他必将终止于各种怀疑;但如果他愿意抱着怀疑的态度开始,那么他必将获得肯定的结论.

——培根

金榜时代图书·书目

考研数学系列

书名	作者	出版时间
数学复习全书·基础篇(数学一、二、三通用)	李永乐 王式安 武忠祥	2020年6月
数学基础过关660题(数学一/数学二/数学三)	李永乐 王式安 武忠祥	2020年9月
数学复习全书(数学一/数学二/数学三)	李永乐 王式安 武忠祥	2020年12月
数学历年真题全精解析·强化篇(2009-2021年)(数学一/数学二/数学三)	李永乐 王式安 武忠祥	2021年1月
数学公式的奥秘	武忠祥 姜晓千	2021年3月
高等数学辅导讲义	武忠祥	2021年3月
线性代数辅导讲义	李永乐	2021年3月
概率论与数理统计辅导讲义	王式安	2021年3月
高等数学(微积分)辅导讲义	曹显兵 刘喜波	2021年4月
概率论与数理统计辅导讲义	曹显兵	2021年4月
数学强化通关330题(数学一/数学二/数学三)	李永乐 王式安 武忠祥	2021年5月
数学历年真题全精解析·基础篇(1987-2008年)(数学一/数学二/数学三)	李永乐 王式安 武忠祥	2021年8月
数学决胜冲刺6套卷(数学一/数学二/数学三)	李永乐 王式安 武忠祥	2021年10月
数学临阵磨枪(数学一/数学二/数学三)	李永乐 刘喜波 章纪民	2021年10月
经济类联考数学复习全书	李永乐 王式安 章纪民	2021年4月
农学门类联考数学复习全书	李永乐 王式安 章纪民	2021年4月

大学数学系列

书名	作者	出版时间
大学数学线性代数辅导	李永乐	2018年12月
大学数学高等数学辅导	武忠祥 章纪民	2021年5月
大学数学概率论与数理统计辅导	刘喜波	2020年7月

考研政治系列

书名	作者	出版时间
思想政治理论大纲命题解析	米鹏	2021年5月
思想政治理论精雕细刻1000题	米鹏	2021年5月
思想政治理论大串讲	米鹏	2021年10月
思想政治理论最后20天必背20题	米鹏	2021年10月

考研政治复习手账	张纹	2021 年 5 月
考研政治时政与大题	张纹	2021 年 10 月
考研政治冲刺预测 5 套卷	张纹	2021 年 10 月

考研英语系列

书名	作者	出版时间
考研词汇源来如此	全国考研英语金榜命题研究中心	2019 年 1 月
考研英语生猛海词	赵亮	2019 年 1 月
词维风暴	姜晗	2019 年 9 月
词法风暴	姜晗	2020 年 3 月
考研英语长难句核心语法	高维	2020 年 3 月

医师资格考试系列

书名	作者	出版时间
贺银成国家临床执业医师资格考试辅导讲义(上册)	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业医师资格考试辅导讲义(下册)	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业医师资格考试辅导讲义同步练习	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业医师资格考试全真模拟试卷及精析	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业及助理医师资格考试历年考点精析(上册)试题	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业及助理医师资格考试历年考点精析(下册)答案及精析	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业及助理医师资格考试实践技能应试指南	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试辅导讲义(上、下册)	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试辅导讲义同步练习	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试全真模拟试卷及精析	贺银成	2020 年 12 月
乡村全科执业助理医师资格考试考点精编	高鑫	2020 年 12 月
乡村全科执业助理医师资格考试实践技能应试指南	高鑫	2020 年 12 月
乡村全科执业助理医师资格考试习题精练精析	王大群 李慧婷	2020 年 12 月

考研西医系列

书名	作者	出版时间
贺银成考研西医临床医学综合能力辅导讲义(上、下册)	贺银成	2021 年 2 月
贺银成考研西医临床医学综合能力辅导讲义同步练习	贺银成	2021 年 3 月
贺银成考研西医临床医学综合能力全真模拟试卷及精析	贺银成	2021 年 3 月

贺银成考研西医临床医学综合能力历年真题精析	贺银成	2021 年 3 月
-----------------------	-----	------------

中外名著系列

书名	作者	出版时间
小王子	[法]安托万·德·圣-埃克苏佩里	2018 年 12 月
飞鸟集	[印]泰戈尔	2018 年 12 月
瓦尔登湖	[美]亨利·戴维·梭罗	2018 年 12 月
了不起的盖茨比	[美]弗·司各特·菲茨杰拉德	2018 年 12 月
简·爱	[英]夏洛蒂·勃朗特	2018 年 12 月
老人与海	[美]海明威	2018 年 12 月
月亮和六便士	[英]威廉·萨默塞特·毛姆	2018 年 12 月
呼啸山庄	[英]艾米莉·简·勃朗特	2018 年 12 月
傲慢与偏见	[英]简·奥斯丁	2018 年 12 月
双城记	[英]查尔斯·狄更斯	2019 年 3 月
朝花夕拾·呐喊	鲁迅	2018 年 4 月
呼兰河传	萧红	2018 年 4 月
骆驼祥子	老舍	2018 年 4 月
我这一辈子	老舍	2018 年 4 月
茶馆	老舍	2018 年 4 月

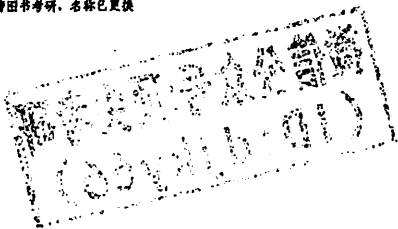
以上图书书名及出版时间仅供参考,以实际出版物为准,均属金榜时代(北京)教育科技有限公司!

微信公众号:金榜时代

原公众号:金榜图书考研,名称已更换

@金榜时代官方微博

时代巨流图书专营店



微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)

常用公式简表

三角关系式

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x},$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

常用的等价无穷小 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\sin x \sim x, \tan x \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, e^x - 1 \sim x, \ln(1+x) \sim x,$$

$$(1+x)^a - 1 \sim ax, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x, a^x - 1 \sim x \ln a (a > 0, a \neq 1),$$

$$x^m + x^k \sim x^m (k > m > 0), x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}, \tan x - x \sim \frac{x^3}{3}, \tan x - \sin x \sim \frac{x^3}{2}.$$

常用极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 (|q| < 1), \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty (|q| > 1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0 (k > 0), \lim_{n \rightarrow \infty} n^k = \infty (k > 0)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0), \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 (a > 1, k > 0), \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 (a > 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

积分公式

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C (a \neq -1),$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1),$$

$$\int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C,$$

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + C,$$

$$\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C,$$

$$\int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + C,$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C,$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C,$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

常见的初等函数的 n 阶导数公式

$$(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}.$$

$$(\sin ax)^{(n)} = a^n \sin \left(\frac{n\pi}{2} + ax \right).$$

$$(\cos ax)^{(n)} = a^n \cos \left(\frac{n\pi}{2} + ax \right).$$

$$(\ln(1+x))^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x)^n}.$$

$$((1+x)^a)^{(n)} = a(a-1)\cdots(a-n+1)(1+x)^{a-n}.$$

若 a 为某一正整数 n , 则 $((1+x)^n)^{(n)} = n!$, $((1+x)^n)^{(n+j)} = 0, j = 1, 2, \dots$.

微信公众号: 顶尖考研
 (ID: djky66)



乡村艺术 Ke 梦想社

音体美教师 志愿者招募

不要被摩天大厦挡个正着

去青瓦淡墨乡间

用我们的方式热爱这个时代



TEACH FOR CHINA

招募：乡村小学音体美青年教师志愿者

项目 简介

乡村艺术Ke梦想社创办于2017年，旨在改善乡村音体美教师紧缺现状，让乡村儿童感受音体美艺术之美，让更多的孩子，无论出身，都能获得同等的优质教育。梦想社创立之初，便启动了“助力乡村学校音体美课堂”行动计划，截止目前，该计划已牵手近300余名青年志愿者，落地学校已达10所。（详情敬请关注公众号“乡村艺术ke梦想社”）为善益众，求贤若渴，我们，正在远方，等着如诗般的你！

成为志愿者你将获得

- 服务学校包吃包住
- 每月1500元补助
- 志愿者服务期间的短期保障保险
- 方寸天地得享人生意趣，大美原乡遍寻香径落花

我们希望你

- 品行端正，有爱心，有耐心
- 身体健康，能适应艰苦乡村环境
- 受过良好教育且有音体美专业特长
- 认真负责，充满正能量，支教有清晰规划
- 吃苦耐劳，乐于助人，有良好的团队合作精神

报名方式

Step 1.

请以“**报名2020乡村艺术Ke梦想社音体美教师志愿者**”为邮件标题，发送邮件至：
CountryClass@126.com

Step 2.

邮件内容：正文简要介绍你

对社会公益的理解，参加本次活动的原
因及您的一技之长；

附件1：支教课程设计（包括
3节课以上的教案或
课件）

附件2：个人简历（Word格式）



书名	出版时间	适用阶段
数学公式的奥秘	2020年3月	全程复习
数学复习全书·基础篇	2020年6月	夯实基础
数学基础过关660题	2020年8月	夯实基础
数学历年真题全精解析·基础篇	2020年8月	夯实基础
数学复习全书	2020年12月	全程复习
数学历年真题全精解析	2021年1月	全程复习
高等数学辅导讲义	2021年3月	强化提高
线性代数辅导讲义	2021年3月	强化提高
概率论与数理统计辅导讲义	2021年3月	强化提高
数学强化通关330题	2021年4月	强化提高
数学决胜冲刺6套卷	2021年10月	冲刺预测
数学临阵磨枪	2021年10月	冲刺预测

G20210003



图书售后答疑群
你问我答 全程服务



作者团队微博
定期在线答疑



ISBN 978-7-109-27184-5



9 787109 271845 >

定价：99.80元（全2册）