“助力乡村学校音体美课堂行动”官方合作图书

V研客及全国各大考研培训学校指定用书

金榜時代™

GLIST 明德·弘毅·品质 14

金榜时代考研数学系列

数学历年真题（数学一）全精解析·基础篇

1987—2008

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

主编◎李永乐 王式安

编委◎李永乐 王式安 刘喜波 宋浩 姜晓千 铁军 李正元 蔡燧林 胡金德

基础阶段 | 要更注重对基本概念的识记，而真题是最好的检验资料

历年真题 | 是题题高标准、道道严要求，高度覆盖考试必备知识点

多练真题 | 做到“自身硬”，才能从容面对新变化、新题型、新调整

无基础不数学

本书配套精讲课

扫一扫，码上学习

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

金榜时代考研数学名师团队

线代王 · 李永乐

@清华李永乐考研数学辅导团队　微信公众号：永乐讲线代　B站：李永乐考研团队

· 原清华大学应用数学系教授　· 北京高教学会数学研究会副理事长
· 广受学生信赖的“线代王”　· 曾任全国硕士研究生入学考试北京地区数学阅卷组组长
· 百万畅销书《线性代数辅导讲义》《考研数学复习全书》主编

李老师作为全国著名的考研数学线性代数辅导专家，对考研数学出题形式、考试重点了如指掌，解题思路极其灵活，辅导针对性极强，效果优良，成绩显著，受到广大学员的交口称赞。其主编的《线性代数辅导讲义》《数学复习全书》《数学基础过关660题》等已被历届考生公认为复习首选辅导书。

前命题组组长 · 王式安

@清华李永乐考研数学辅导团队　B站：李永乐考研团队

· 原北京理工大学研究生院院长、应用数学系主任、教授
· 享受国务院特殊津贴的数学专家
· 美国哥伦比亚大学、南佛罗里达大学、纽约大学等大学的客座教授
· 1987-2001年间担任全国硕士研究生入学考试数学命题组组长
· 百万畅销书《概率论与数理统计辅导讲义》《考研数学复习全书》主编

王老师凭借多年参加考研数学命题工作的深厚经验，对考研数学的命题思路和命题方向了如指掌。其主编的《概率论与数理统计辅导讲义》《数学复习全书》《数学基础过关660题》等已被历届考生公认为复习首选辅导书。

考研高数“三巨头”—— 宋浩（考研数学阅卷人）

@宋浩老师　B站：宋浩老师官方

· 山东大学数学院本科研究生、中国科学院博士、副教授、考研数学阅卷人
· 英国Queen Mary University of London访问学者

宋老师上课风趣幽默、由浅入深，能把复杂抽象的数学讲的诙谐有趣，上传至B站的数学视频《线性代数》《微积分》《概率论与数理统计》《高等数学》帮助了全国无数的大学生，总播放量近2000万次。

微信公众号（ID：djky66）

考研高数“三巨头”—— 姜晓千（全能名师）

@晓千老师　微信公众号：晓千老师

· 中国人民大学金融数学博士
· 全国各大省市考研辅导机构全程主讲
· 新浪、搜狐、腾讯、网易、中国教育在线等各大门户网站特邀访谈嘉宾

姜老师对考研数学历年真题有着极其深入的研究，深受考研学子喜爱。

考研高数“三巨头”—— 刘喜波（高数波叔）

@清华李永乐考研数学辅导团队

· 中国科学院数学博士　· 北方工业大学理学院统计学系系主任、教授

长期从事本科生的教育教学工作，曾荣获学校师德先进个人、十佳班导师等称号，是北京市中青年骨干教师、北京市公共数学优秀教学团队主要成员，主编教材1部、教学参考书3部、教育教学论文集1部、译著2部，参编教学参考书10余部。

金榜图书用户专享福利活动　适用于：李永乐老师系列课程

赠送 ¥100 代金券　¥200 代金券　¥500 代金券　¥1000 代金券

1.活动参与方式　关注公众号 金榜时代考研 ▶ 回复 “22考研上岸” 即可参与

2.活动时间　即日起——2021年11月24日　3.兑换方式　扫右侧二维码进群咨询管理员领取代金券

"助力乡村学校音体美课堂行动"官方合作图书
V研客及全国考研培训学校指定用书

金榜時代
GLIST 明德·弘毅·品质

金 榜 时 代 考 研 数 学 系 列

数学历年真题（数学一）全精解析·基础篇

1987—2008

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

主编 ◎ 李永乐 王式安

编委 ◎ 李永乐 王式安 刘喜波 宋浩 姜晓千 铁军 李正元 蔡燧林 胡金德

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

@考研路上刚刚启程的你

勿谓今日不学而有来日，勿谓今年不学而有来年。日月逝矣，岁不我延。

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

书名	本书特点	本书使用说明
《数学复习全书》	**系统全面·深入细致·结构科学**（推荐使用时间：2021年2月—2021年7月）	
	本书为作者团队扛鼎之作，常年稳居各大平台考研图书畅销榜前列，主编之一的李永乐老师更是入选2019年“当当20周年白金作家”，考研界仅两位作者获此殊荣。 本书从基本理论、基础知识、基本方法出发，全面、深入、细致地讲解考研数学大纲要求的所有考点，不提供花拳绣腿的不实用技巧，也不提倡误人子弟的费时背书法，而是扎扎实实地带同学们深入每一个考点背后，找到它们之间的关联、逻辑，让同学们从知识点零碎、概念不清楚、期末考试过后即忘的“低级”水平，提升到考研必需的高度。	利用《数学复习全书·基础篇》把基本知识“捡”起来之后，再使用本书。本书有知识点的详细讲解和相应的练习题，有利于同学们建立考研知识体系和框架，打好基础。 在《数学基础过关660题》中若遇到不会做的题，可以放到这里来做。以章或节为单位，学习新内容前要复习前面的内容，按照一定的规律来复习。基础薄弱或中等偏下的考生，务必要利用考研当年上半年的时间，整体吃透书中的理论知识，摸清例题设置的原理和必要性，特别是对大纲中要求的基本概念、理论、方法要系统地理解和掌握。
《数学历年真题全精解析》	**真题真练·总结规律·提升技巧**（推荐使用时间：2021年7月—2021年11月）	
	本书完整收录2009—2021年考研数学的全部试题，将真题按考点分类，还精选了其他卷的试题作为练习题。力争做到考点全覆盖，题型多样，重点突出，不简单重复。书中的每道题给出的参考答案有常用、典型的解法，也有技巧性强的特殊解法。分析过程逻辑严谨、思路清晰，具有很强的可操作性。通过学习本书，考生可以独立完成对同类题的解答。	边做题、边总结，遇到“卡壳”的知识点、题目，回到《数学复习全书》和之前听过的基础课、强化课中去补，争取把每个真题知识点吃透、搞懂，不留死角。 通过做真题，进一步提高解题能力和技巧，满足实际考试的要求。第一阶段，浏览每年真题，熟悉题型和常考点。第二阶段，进行专项复习。
《高等数学辅导讲义》 《线性代数辅导讲义》 《概率论与数理统计辅导讲义》	**经典讲义·专项突破·强化提高**（推荐使用时间：2021年7月—2021年10月）	
	三本讲义分别由作者的教学讲稿改编而成，系统阐述了考研数学的基础知识。书中例题都经过严格筛选、归纳，是多年经验的总结，对同学们的重点、难点的把握准确，有针对性。适合认真研读，做到举一反三。	哪科较薄弱，精研哪本。搭配《数学强化通关330题》一起使用，先复习讲义上的知识点，做章节例题、练习，再去听相关章节的强化课，做《数学强化通关330题》的相关习题，更有利于知识的巩固和提高。
《数学强化通关330题》	**综合训练·突破重点·强化提高**（推荐使用时间：2021年5月—2021年10月）	
	本书为强化阶段的练习题，综合训练必备。具有典型性、针对性、技巧性、综合性等特点，可以帮助同学们突破重点、难点，熟悉解题思路和方法，增强应试能力。	本书与《数学基础过关660题》互为补充，包含选择题、填空题和解答题。搭配《高等数学辅导讲义》《线性代数辅导讲义》《概率论与数理统计辅导讲义》使用，效果更佳。
《数学决胜冲刺6套卷》	**冲刺模拟·有的放矢·高效提分**（推荐使用时间：2021年11月—2021年12月）	
	通过整套题的训练，对所学知识进行系统总结和梳理。不同于重点题型的练习，套卷练习需要考生调用全部知识，并综合应用。必要时应复习基本概念、公式、定理，做到准确记忆。	在精研真题之后，用模拟卷练习，找漏洞，保持手感。不要掐时间、估分，遇到不会的题目，回归基础，翻看以前的学习笔记，把每道题吃透。
《数学临阵磨枪》	**查漏补缺·问题清零·从容应战**（推荐使用时间：考前20天）	
	本书是常用定理公式、基础知识的清单。最后阶段，大部分考生缺乏信心，感觉没复习完，本来会做的题目，因为紧张、压力，也容易出错。本书能帮助考生在考前查漏补缺，确保基础知识不丢分。	本书搭配《数学决胜冲刺6套卷》使用。上考场前，可以再次回忆、翻看本书。

微信公众号【硕士考研】

“助力乡村学校音体美课堂行动”官方合作图书
V研客及全国考研培训学校指定用书

金榜時代™
GLIST 明德·弘毅·品质

金 榜 时 代 考 研 数 学 系 列

数学历年真题（数学一）全精解析·基础篇

1987—2008

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

主编 ◎ 李永乐 王式安

编委 ◎ 李永乐 王式安 刘喜波 宋浩 姜晓千 铁军 李正元 蔡燧林 胡金德

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

@考研路上刚刚启程的你

勿谓今日不学而有来日，勿谓今年不学而有来年。日月逝矣，岁不我延。

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

书名	本书特点	本书使用说明
《数学复习全书》	**系统全面·深入细致·结构科学**（推荐使用时间：2021年2月—2021年7月）	
	本书为作者团队扛鼎之作，常年稳居各大平台考研图书畅销榜前列，主编之一的李永乐老师更是入选2019年“当当20周年白金作家”，考研界仅两位作者获此殊荣。 本书从基本理论、基础知识、基本方法出发，全面、深入、细致地讲解考研数学大纲要求的所有考点，不提供花拳绣腿的不实用技巧，也不提倡误人子弟的费时背书法，而是扎扎实实地带同学们深入每一个考点背后，找到它们之间的关联、逻辑，让同学们从知识点零碎、概念不清楚、期末考试过后即忘的“低级”水平，提升到考研必需的高度。	利用《数学复习全书·基础篇》把基本知识“捡”起来之后，再使用本书。本书有知识点的详细讲解和相应的练习题，有利于同学们建立考研知识体系和框架，打好基础。 在《数学基础过关660题》中若遇到不会做的题，可以放到这里来做。以章或节为单位，学习新内容前要复习前面的内容，按照一定的规律来复习。基础薄弱或中等偏下的考生，务必要利用考研当年上半年的时间，整体吃透书中的理论知识，摸清例题设置的原理和必要性，特别是对大纲中要求的基本概念、理论、方法要系统地理解和掌握。
《数学历年真题全精解析》	**真题真练·总结规律·提升技巧**（推荐使用时间：2021年7月—2021年11月）	
	本书完整收录2009—2021年考研数学的全部试题，将真题按考点分类，还精选了其他卷的试题作为练习题。力争做到考点全覆盖，题型多样，重点突出，不简单重复。书中的每道题给出的参考答案有常用、典型的解法，也有技巧性强的特殊解法。分析过程逻辑严谨、思路清晰，具有很强的可操作性。通过学习本书，考生可以独立完成对同类题的解答。	边做题、边总结，遇到“卡壳”的知识点、题目，回到《数学复习全书》和之前听过的基础课、强化课中去补，争取把每个真题知识点吃透、搞懂，不留死角。 通过做真题，进一步提高解题能力和技巧，满足实际考试的要求。第一阶段，浏览每年真题，熟悉题型和常考点。第二阶段，进行专项复习。
《高等数学辅导讲义》 《线性代数辅导讲义》 《概率论与数理统计辅导讲义》	**经典讲义·专项突破·强化提高**（推荐使用时间：2021年7月—2021年10月）	
	三本讲义分别由作者的教学讲稿改编而成，系统阐述了考研数学的基础知识。书中例题都经过严格筛选、归纳，是多年经验的总结，对同学们的重点、难点的把握准确，有针对性。适合认真研读，做到举一反三。	哪科较薄弱，精研哪本。搭配《数学强化通关330题》一起使用，先复习讲义上的知识点，做章节例题、练习，再去听相关章节的强化课，做《数学强化通关330题》的相关习题，更有利于知识的巩固和提高。
《数学强化通关330题》	**综合训练·突破重点·强化提高**（推荐使用时间：2021年5月—2021年10月）	
	本书为强化阶段的练习题，综合训练必备。具有典型性、针对性、技巧性、综合性等特点，可以帮助同学们突破重点、难点，熟悉解题思路和方法，增强应试能力。	本书与《数学基础过关660题》互为补充，包含选择题、填空题和解答题。搭配《高等数学辅导讲义》《线性代数辅导讲义》《概率论与数理统计辅导讲义》使用，效果更佳。
《数学决胜冲刺6套卷》	**冲刺模拟·有的放矢·高效提分**（推荐使用时间：2021年11月—2021年12月）	
	通过整套题的训练，对所学知识进行系统总结和梳理。不同于重点题型的练习，套卷练习需要考生调用全部知识，并综合应用。必要时应复习基本概念、公式、定理，做到准确记忆。	在精研真题之后，用模拟卷练习，找漏洞，保持手感。不要掐时间、估分，遇到不会的题目，回归基础，翻看以前的学习笔记，把每道题吃透。
《数学临阵磨枪》	**查漏补缺·问题清零·从容应战**（推荐使用时间：考前20天）	
	本书是常用定理公式、基础知识的清单。最后阶段，大部分考生缺乏信心，感觉没复习完，本来会做的题目，因为紧张、压力，也容易出错。本书能帮助考生在考前查漏补缺，确保基础知识不丢分。	本书搭配《数学决胜冲刺6套卷》使用。上考场前，可以再次回忆、翻看本书。

微信公众号（ID：liwei66）

“助力乡村学校音体美课堂行动”官方合作图书

V研客及全国考研培训学校指定用书

金榜時代™
GLIST 明德·弘毅·品质

金 榜 时 代 考 研 数 学 系 列

数学历年真题（数学一）全精解析·基础篇

1987—2008

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

主编 ◎ 李永乐 王式安

编委 ◎ 李永乐 王式安 刘喜波 宋浩 姜晓千 铁军 李正元 蔡燧林 胡金德

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

@考研路上刚刚启程的你

勿谓今日不学而有来日，勿谓今年不学而有来年。日月逝矣，岁不我延。

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学历年真题全精解析. 基础篇. 数学一/李永乐,王式安主编. —西安:西安交通大学出版社,2020.10

ISBN 978-7-5693-1823-4

Ⅰ.①数… Ⅱ.①李… ②王… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2020)第 189419 号

微信公众号【顶尖考研】
(ID: diky66)

书　　名　数学历年真题全精解析·基础篇·数学一
主　　编　李永乐　王式安
责任编辑　张梁

出版发行　西安交通大学出版社
　　(西安市兴庆南路 1 号　邮政编码 710048)
网　　址　http://www.xjtupress.com
电　　话　(029)82668357　82667874(发行中心)
　　(029)82668315(总编办)
传　　真　(029)82668280
印　　刷　天津市蓟县宏图印务有限公司

开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张　21.5　字数　510 千字
版次印次　2020 年 10 月第 1 版　2020 年 10 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5693-1823-4
定　　价　69.80 元

如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系调换。
　　版权所有　侵权必究

金榜时代™考研数学系列图书
内容简介及使用说明

考研数学满分150分，在考研成绩中的比重很大；同时又因数学学科本身的特点，考生的成绩历年来千差万别，数学成绩好在考研中很占优势，因此有“得数学者考研成”之说。既然数学对考研成绩如此重要，那么就有必要探讨一下影响数学成绩的主要因素。

本系列图书作者根据多年的命题经验和阅卷经验，发现考研数学命题的灵活性非常大，不仅表现在一个知识点与多个知识点的考查难度不同，更表现在对多个知识点的综合考查上，这些题目在表达上多一个字或多一句话，难度都会变得截然不同。正是这些综合型题目拉开了考试成绩的距离，而构成这些难点的主要因素，实际上是最基础的基本概念、定理和公式的综合。同时，从阅卷反映的情况来看，考生答错题目的主要原因也是对基本概念、定理和公式记忆和掌握得不够熟练。总结为一句话，那就是：要想数学拿高分，就必须熟练掌握、灵活运用基本概念、定理和公式。

基于此，李永乐考研数学辅导团队结合多年的考研辅导和研究经验，精心编写了本系列图书，目的在于帮助考生有计划、有步骤地完成数学复习，从基本概念、定理和公式的记忆，到对其的熟练运用，循序渐进。以下介绍本系列图书的主要特点和使用说明，供考生复习时参考。

书名	本书特点	本书使用说明
《数学复习全书·基础篇》	**内容基础·提炼精准·易学易懂**（推荐使用时间：2020年6月—2020年12月）	
	本书根据大纲的考试范围将考研所需复习内容提炼出来，形成考研数学的基础内容和复习逻辑，实现大学数学同考研数学之间的顺利过渡，开启考研复习第一篇章。	考生复习过本校大学数学教材后，即可使用本书。如果大学没学过数学或者本校课本是自编教材，与考研大纲差别较大，也可使用本书替代大学数学教材。
《数学基础过关660题》	**题目经典·体系完备·逻辑清晰**（推荐使用时间：2020年9月—2021年4月）	
	本书是主编团队20年的经典之作，一直被模仿，从未被超越。年销量达百万余册，是当之无愧的考研数学头号畅销书，拥有无数甘当“自来水”的粉丝读者，口碑爆棚，考研数学不可不入！“660”也早已成为考研数学的年度关键词。 本书重基础，重概念，重理论，一旦你拥有了《数学复习全书》《数学基础过关660题》教你的思维方式、知识逻辑、做题方法，你就能基础稳固、思维灵活，对知识、定理、公式的理解提升到新的高度，避免陷入复习中后期“基础不牢，地动山摇”的窘境。	本书与《数学复习全书·基础篇》搭配使用，在完成对基础知识的学习后，有针对性地做一些练习。帮助考生熟练掌握定理、公式和解题技巧，加强知识点的前后联系，将之体系化、系统化，分清重难点，让复习周期尽量缩短。 虽说书中都是选择题和填空题，同学们不要轻视，也不要一开始就盲目做题。看到一道题，要能分辨出是考哪个知识点，考什么，然后在做题过程中看看自己是否掌握了这个知识点，应用的定理、公式的条件是否熟悉，这样才算真正做好了一道题。
《数学历年真题全精解析·基础篇》	**分类详解·注重基础·突出重点**（推荐使用时间：2020年6月—2020年12月）	
	本书精选精析1987—2008年考研数学真题，帮助考生提前了解大学水平考试与硕士研究生选拔考试的差别，不会盲目自信，也不会妄自菲薄，真正跨入考研的门槛。	本书与《数学复习全书·基础篇》《数学基础过关660题》搭配使用，复习完一章，即可做相应的章节真题。不会做的题目做好笔记，二轮复习时的继续练习。

微信公众号【阅卷考研】

书名	本书特点	本书使用说明
《数学复习全书》	**系统全面·深入细致·结构科学**（推荐使用时间：2021年2月—2021年7月）	
	本书为作者团队扛鼎之作，常年稳居各大平台考研图书畅销榜前列，主编之一的李永乐老师更是入选2019年“当当20周年白金作家”，考研界仅两位作者获此殊荣。 本书从基本理论、基础知识、基本方法出发，全面、深入、细致地讲解考研数学大纲要求的所有考点，不提供花拳绣腿的不实用技巧，也不提倡误人子弟的费时背书法，而是扎扎实实地带同学们深入每一个考点背后，找到它们之间的关联、逻辑，让同学们从知识点零碎、概念不清楚、期末考试过后即忘的“低级”水平，提升到考研必需的高度。	利用《数学复习全书·基础篇》把基本知识“捡”起来之后，再使用本书。本书有知识点的详细讲解和相应的练习题，有利于同学们建立考研知识体系和框架，打好基础。 在《数学基础过关660题》中若遇到不会做的题，可以放到这里来做。以章或节为单位，学习新内容前要复习前面的内容，按照一定的规律来复习。基础薄弱或中等偏下的考生，务必要利用考研当年上半年的时间，整体吃透书中的理论知识，摸清例题设置的原理和必要性，特别是对大纲中要求的基本概念、理论、方法要系统地理解和掌握。
《数学历年真题全精解析》	**真题真练·总结规律·提升技巧**（推荐使用时间：2021年7月—2021年11月）	
	本书完整收录2009—2021年考研数学的全部试题，将真题按考点分类，还精选了其他卷的试题作为练习题。力争做到考点全覆盖，题型多样，重点突出，不简单重复。书中的每道题给出的参考答案有常用、典型的解法，也有技巧性强的特殊解法。分析过程逻辑严谨、思路清晰，具有很强的可操作性。通过学习本书，考生可以独立完成对同类题的解答。	边做题、边总结，遇到“卡壳”的知识点、题目，回到《数学复习全书》和之前听过的基础课、强化课中去补，争取把每个真题知识点吃透、搞懂，不留死角。 通过做真题，进一步提高解题能力和技巧，满足实际考试的要求。第一阶段，浏览每年真题，熟悉题型和常考点。第二阶段，进行专项复习。
《高等数学辅导讲义》 《线性代数辅导讲义》 《概率论与数理统计辅导讲义》	**经典讲义·专项突破·强化提高**（推荐使用时间：2021年7月—2021年10月）	
	三本讲义分别由作者的教学讲稿改编而成，系统阐述了考研数学的基础知识。书中例题都经过严格筛选、归纳，是多年经验的总结，对同学们的重点、难点的把握准确，有针对性。适合认真研读，做到举一反三。	哪科较薄弱，精研哪本。搭配《数学强化通关330题》一起使用，先复习讲义上的知识点，做章节例题、练习，再去听相关章节的强化课，做《数学强化通关330题》的相关习题，更有利于知识的巩固和提高。
《数学强化通关330题》	**综合训练·突破重点·强化提高**（推荐使用时间：2021年5月—2021年10月）	
	本书为强化阶段的练习题，综合训练必备。具有典型性、针对性、技巧性、综合性等特点，可以帮助同学们突破重点、难点，熟悉解题思路和方法，增强应试能力。	本书与《数学基础过关660题》互为补充，包含选择题、填空题和解答题。搭配《高等数学辅导讲义》《线性代数辅导讲义》《概率论与数理统计辅导讲义》使用，效果更佳。
《数学决胜冲刺6套卷》	**冲刺模拟·有的放矢·高效提分**（推荐使用时间：2021年11月—2021年12月）	
	通过整套题的训练，对所学知识进行系统总结和梳理。不同于重点题型的练习，套卷练习需要考生调用全部知识，并综合应用。必要时应复习基本概念、公式、定理，做到准确记忆。	在精研真题之后，用模拟卷练习，找漏洞，保持手感。不要掐时间、估分，遇到不会的题目，回归基础，翻看以前的学习笔记，把每道题吃透。
《数学临阵磨枪》	**查漏补缺·问题清零·从容应战**（推荐使用时间：考前20天）	
	本书是常用定理公式、基础知识的清单。最后阶段，大部分考生缺乏信心，感觉没复习完，本来会做的题目，因为紧张、压力，也容易出错。本书能帮助考生在考前查漏补缺，确保基础知识不丢分。	本书搭配《数学决胜冲刺6套卷》使用。上考场前，可以再次回忆、翻看本书。

微信公众号：顾朝林考研

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

前　言

本书是考研数学基础阶段的复习用书，和《数学复习全书(基础篇)》《数学基础过关660题》组成一个完备的学习环，从“学”到“练”再到“测”，一环扣一环，循环往复，螺旋进步。本书的一个重要作用就是检测复习的效果，找准复习方向。

本书的编写团队在近几年的教学过程中发现，许多同学开始复习都挺早，但复习的效果却没有明显的提高。综合分析发现，考生盲目复习，没有目的，东一榔头西一棒子，到后期强化阶段，做题有思路没办法，一些基础的计算做不出，简单的概念也没有记住，导致不能再进一步。

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

如果能在基础阶段就做做真题，看看自己复习的程度与考试程度之间的差距，会让同学们更清醒地认识到自己的不足。同学们要明确，研究生招生是为高校选拔人才，相应的招生考试也是选拔性的考试，就是通过考试成绩来区分考生层次。考题的命制就很讲究，要体现题目的区分度，要在众多的考生中筛选出优秀的同学。命题老师研究的是考生群体，往往抓住大多数考生容易出错的点，理解不到位的点，通过综合几个“基础概念”来出题，能比较准确地考出同学们的真实能力。考试大纲上规定的考点，这些内容在各版教材、辅导书上都是一样的。那么如何选取具体考点，以及针对具体考点如何出题，才是关键。通过真题研究与练习，在做题过程中不断体会和总结，就能大致知道命题老师是怎样设置“陷阱”的。虽然考过的题大多不会再考，但“重者恒重”，也就是说考试的核心内容是基本固定的，每年考查形式虽有变化，但涉及的主要知识点却是不变的，少数情况下还有重复的原题。所以，从某种程度来讲，真题的作用真的很大。

全书共分两篇。第一篇按年份给出1987—2008年的真题，可以宏观地看出试卷的结构、考题的分配比例；第二篇是将真题按考点所属内容分类并进行解析，是本书的精华部分。第二篇有如下主要编排：

1. 本章导读

设置本部分的目的是使考生明白此章的考试内容和考试重点，从而在复习时目标明确。

2. 试题特点

本部分总结了本章知识点的历年考试出题规律，并分析可能的出题点。

3. 考题详析

本部分对历年真题的题型进行归纳分类，总结各种题型的解题方法。这些解法均来自各位专家多年教学实践总结和长期命题阅卷经验。针对以往考生在解题过程中普遍存在的问题及常犯的错误，我们给出相应的注意事项，对每一道真题都给出解题思路分析，以便考生真正地理解和掌握解题方法。

4. 练习题

为了使考生更好地巩固所学知识，提高实际解题能力，本书作者从1987—2008年的真题其他卷别的试题中精心选取同类考题作为练习题，供考生练习，使考生在熟练掌握基本知识的基础上，能够有所巩固。同时，每道练习题都配备了详细的参考答案和解析，以便考生解答疑难问题时能及时得到详尽的指导。

再唠叨一下，本书虽然定位是基础复习阶段使用，但并不是让同学们一上来就做真题，特别是基础不好的同学，一定要先过一遍知识点，再通过做题加深理解。书中对考题做了分类，总有些类型的题目特别多，几乎是年年都要考查的，对于这样的内容，一定要多练多做，并且熟记涉及的基础知识、基本概念、基本原理或定理。

做题时，不能先看答案，一定要自己动手写，再比较自己写出来的答案和参考答案，看基本思路是否相符，方法是否一致。如果自己做的答案和参考答案相差甚远，一定要搞清问题出在哪里，是审题错误还是知识理解错误，是题型特点没掌握还是答题方法不熟悉。弄清问题症结所在，然后下功夫解决这个问题，千万不能只满足于知道这个题目答案，只关注做了多少道题，而忽视自己做题的质量和目的。

另外，为了更好地帮助同学们进行复习，“李永乐考研数学辅导团队”特在新浪微博上开设答疑专区，同学们在考研数学复习中，遇到问题，均可在线留言，团队老师将尽心为你解答。

对于本书可能存在的不足与问题，恳请读者批评指正。

在计划出版本书之后，就一直有同学在关心这本书的进度。现在终于要和大家见面了，衷心希望这本书能帮到同学们。祝同学们复习顺利，心想事成，考研成功！

编　者

2020年10月

目录 Contents

第一篇　历年真题

1987 年全国硕士研究生招生考试数学(一)试题 …… 3
1988 年全国硕士研究生招生考试数学(一)试题 …… 6
1989 年全国硕士研究生招生考试数学(一)试题 …… 9
1990 年全国硕士研究生招生考试数学(一)试题 …… 12
1991 年全国硕士研究生招生考试数学(一)试题 …… 15
1992 年全国硕士研究生招生考试数学(一)试题 …… 18
1993 年全国硕士研究生招生考试数学(一)试题 …… 21
1994 年全国硕士研究生招生考试数学(一)试题 …… 24
1995 年全国硕士研究生招生考试数学(一)试题 …… 27
1996 年全国硕士研究生招生考试数学(一)试题 …… 30
1997 年全国硕士研究生招生考试数学(一)试题 …… 33
1998 年全国硕士研究生招生考试数学(一)试题 …… 36
1999 年全国硕士研究生招生考试数学(一)试题 …… 39
2000 年全国硕士研究生招生考试数学(一)试题 …… 42
2001 年全国硕士研究生招生考试数学(一)试题 …… 45
2002 年全国硕士研究生招生考试数学(一)试题 …… 48
2003 年全国硕士研究生招生考试数学(一)试题 …… 51
2004 年全国硕士研究生招生考试数学(一)试题 …… 54
2005 年全国硕士研究生招生考试数学(一)试题 …… 57
2006 年全国硕士研究生招生考试数学(一)试题 …… 60
2007 年全国硕士研究生招生考试数学(一)试题 …… 63
2008 年全国硕士研究生招生考试数学(一)试题 …… 66

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

第二篇　真题解析

第一部分　高等数学 …… 71

第一章　函数、极限、连续 …… 71

第二章　一元函数微分学 …… 83

第三章　一元函数积分学 …… 104

第四章　向量代数和空间解析几何 …… 121

第五章　多元函数的微分学 …… 126

第六章　重积分 …… 144

第七章　曲线、曲面积分 …… 155

第八章　无穷级数 …… 177

第九章　常微分方程 …… 197

第二部分　线性代数 …… 210

第一章　行列式 …… 210

第二章　矩阵 …… 217

第三章　向量 …… 234

第四章　线性方程组 …… 247

第五章　特征值与特征向量 …… 263

第六章　二次型 …… 279

第三部分　概率论与数理统计 …… 289

第一章　随机事件和概率 …… 289

第二章　随机变量及其分布 …… 296

第三章　多维随机变量及其分布 …… 299

第四章　随机变量的数字特征 …… 312

第五章　大数定律和中心极限定理 …… 322

第六章　数理统计的基本概念 …… 323

第七章　参数估计 …… 325

第八章　假设检验 …… 332

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

第一篇

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

历年真题

1987－2008

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

1987 年全国硕士研究生招生考试
数学(一) 试题

一、填空题(本题满分 15 分,每小题 3 分)

(1) 与两直线 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \\ z=2+t \end{cases}$ 及 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 都平行,且过原点的平面方程为_____.

P121,2 题

(2) 当 $x=$ _____ 时,函数 $y=x2^x$ 取得极小值. P91,21 题

(3) 由曲线 $y=\ln x$ 与两直线 $y=(e+1)-x$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形的面积是_____.

P117,31 题

(4) 设 L 为取正向的圆周 $x^2+y^2=9$,则曲线积分 $\oint_L (2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy$ 的值是_____.

P156,3 题

(5) 已知三维线性空间的基底为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1)$,则向量 $\boldsymbol{u}=(2,0,0)$ 在此基底下的坐标是_____. P245,15 题

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

二、解答题(本题满分 8 分)

求正的常数 a 与 b,使等式 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{bx-\sin x}\int_0^x \dfrac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt=1$ 成立. P79,22 题

三、解答题(本题满分 7 分. 第(1) 小题 3 分,第(2) 小题 4 分)

(1) 设 f,g 为连续可微函数,$u=f(x,xy),v=g(x+xy)$,求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$. P126,1 题

(2) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$,其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$,求矩阵 $\boldsymbol{B}$. P230,21 题

四、解答题(本题满分 8 分)

求微分方程 $y'''+6y''+(9+a^2)y'=1$ 的通解,其中常数 $a>0$. P203,15 题

答案对应的页码与题号
微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

五、选择题(本题满分 12 分,每小题 3 分)

(1) 设常数 $k>0$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{k+n}{n^2}$

(A) 发散.　　(B) 绝对收敛.

(C) 条件收敛.　　(D) 收敛或者发散与 k 的取值有关

P177,1 题

(2) 设 $f(x)$ 为已知连续函数,$I=t\int_0^{\frac{s}{t}}f(tx)\mathrm{d}x$,其中 $s>0,t>0$,则 I 的值

(A) 依赖于 s 和 t.　　(B) 依赖于 s,t,x.

(C) 依赖于 t 和 x,不依赖于 s.　　(D) 依赖于 s,不依赖于 t.　　P110,15 题

(3) 设 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$,则在 $x=a$ 处

(A) $f(x)$ 的导数存在,且 $f'(a)\neq 0$.　　(B) $f(x)$ 取得极大值.

(C) $f(x)$ 取得极小值.　　(D) $f(x)$ 的导数不存在.　　P90,20 题

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,且 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=a\neq 0$,而 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,则 $|\boldsymbol{A}^*|$ 等于

(A) a.　　(B) $\frac{1}{a}$.　　(C) a^{n-1}.　　(D) a^n.　　P212,2 题

六、解答题(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}$ 的收敛域,并求其和函数.　　P186,23 题

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

七、解答题(本题满分 10 分)

计算曲面积分

$$I=\iint_S x(8y+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 S 是曲线 $\begin{cases}z=\sqrt{y-1},\\ x=0\end{cases}(1\leqslant y\leqslant 3)$ 绕 y 轴旋转一周所形成的曲面,它的法向量与 y 轴正向的夹角恒大于 $\frac{\pi}{2}$.　　P169,27 题

八、证明题(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上可微,对于 $[0,1]$ 上的每一个 x,函数 $f(x)$ 的值都在开区间 $(0,1)$ 内,且 $f'(x)\neq 1$,证明:在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 x,使得 $f(x)=x$.　　P98,39 题

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

九、解答题（本题满分 8 分）

问 a,b 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ x_2+2x_3+2x_4=1, \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b, \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$ 有唯一解，无解，有无穷多解？并求出有无穷多解时的通解.

P252,8 题

十、填空题（本题满分 6 分，每小题 2 分）

（1）设在一次试验中，事件 A 发生的概率为 p，现进行 n 次独立试验，则 A 至少发生一次的概率为_____；而事件 A 至多发生一次的概率为_____.

P293,14 题

（2）三个箱子，第一个箱子有 4 个黑球 1 个白球，第二个箱子中有 3 个黑球 3 个白球，第三个箱子中有 3 个黑球 5 个白球. 现随机地取一个箱子，再从这个箱子中取出 1 个球，这个球为白球的概率等于_____. 已知取出的球是白球，此球属于第二个箱子的概率为_____.

P289,1 题

（3）已知连续随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}$，则 X 的数学期望为_____，X 的方差为_____.

P312,1 题

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

十一、解答题（本题满分 6 分）

设随机变量 X,Y 相互独立，其概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$$

求随机变量 $Z=2X+Y$ 的概率密度函数.

P304,12 题

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

1988 年全国硕士研究生招生考试
数学(一)试题

一、解答题(本题满分 15 分,每小题 5 分)

(1) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$ 的收敛域. P184,18 题

(2) 已知 $f(x)=e^{x^2}$,$f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$,求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域. P72,1 题

(3) 设 S 为曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧,计算曲面积分

$$I=\oint\limits_S x^3\,dydz+y^3\,dzdx+z^3\,dxdy$$ P169,28 题

二、填空题(本题满分 12 分,每小题 3 分)

(1) 若 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2tx}$,则 $f'(t)=$_____. P88,11 题

(2) 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数,它在区间 $(-1,1]$ 上定义为 $f(x)=\begin{cases}2, & -1<x\leqslant 0\\ x^3, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$,则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=1$ 处收敛于_____. P193,35 题

(3) 设 $f(x)$ 是连续函数,且 $\int_0^{x^3-1}f(t)\,dt=x$,则 $f(7)=$_____.(此题有误,$f(x)$ 不存在.将条件改成 $\int_0^{x^3-1}f(t)\,dt=x-1$.) P110,16 题

(4) 设 4×4 矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4]$,$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4]$,其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4$ 均为 4 维列向量,且已知行列式 $|\boldsymbol{A}|=4$,$|\boldsymbol{B}|=1$,则行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$_____. P212,3 题

三、选择题(本题满分 15 分,每小题 3 分)

(1) 设 $f(x)$ 可导且 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$,则 $\Delta x\to 0$ 时,$f(x)$ 在 x_0 处的微分 dy 是

(A) 与 Δx 等价的无穷小. (B) 与 Δx 同阶的无穷小.

(C) 比 Δx 低阶的无穷小. (D) 比 Δx 高阶的无穷小. P83,1 题

(2) 设 $y=f(x)$ 是方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解,且 $f(x_0)>0$,$f'(x_0)=0$,则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处

(A) 取得极大值. (B) 取得极小值.

(C) 某邻域内单调增加. (D) 某邻域内单调减少. P91,22 题

(3) 设有空间区域 $\Omega_1:x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$,$z\geqslant 0$;及 $\Omega_2:x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$,$x\geqslant 0$,$y\geqslant 0$,$z\geqslant 0$,则

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1}x\,dv=4\iiint\limits_{\Omega_2}x\,dv$. (B) $\iiint\limits_{\Omega_1}y\,dv=4\iiint\limits_{\Omega_2}y\,dv$.

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1}z\,dv=4\iiint\limits_{\Omega_2}z\,dv$. (D) $\iiint\limits_{\Omega_1}xyz\,dv=4\iiint\limits_{\Omega_2}xyz\,dv$. P146,4 题

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(4) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛，由此级数在 $x=2$ 处

(A) 条件收敛.　　(B) 绝对收敛.

(C) 发散.　　(D) 收敛性不能确定.　　P184,19 题

(5) n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s (3 \leqslant s \leqslant n)$ 线性无关的充分必要条件是

(A) 存在一组不全为 0 的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s \neq \boldsymbol{0}$.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量都线性无关.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中存在一个向量，它不能用其余向量线性表出.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表出.　　P237,3 题

四、解答题（本题满分 6 分）

设 $u = yf\left(\frac{x}{y}\right) + xg\left(\frac{y}{x}\right)$，其中函数 f, g 具有二阶连续导数，求 $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

P126,2 题

五、解答题（本题满分 8 分）

设函数 $y = y(x)$ 满足微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$，且其图形在点 $(0,1)$ 处的切线与曲线 $y = x^2 - x + 1$ 在该点处的切线重合，求函数 $y = y(x)$.　　P203,16 题

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

六、解答题（本题满分 9 分）

设位于点 $(0,1)$ 的质点 A 对质点 M 的引力大小为 $\frac{k}{r^2}$ $(k>0$ 为常数，r 为质点 A 与 M 之间的距离），质点 M 沿曲线 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 自 $B(2,0)$ 运动到 $O(0,0)$. 求在此运动过程中质点 A 对质点 M 的引力所做的功.　　P156,4 题

七、解答题（本题满分 6 分）

已知 $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{PB}$，其中 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^5$.　　P217,1 题

八、计算题（本题满分 8 分）

已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 相似；

(1) 求 x 与 y；

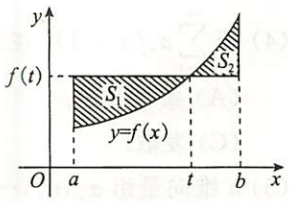
(2) 求一个满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.　　P268,8 题

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

九、证明题(本题满分 9 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,且在 (a,b) 内有 $f'(x)>0$. 证明:在 (a,b) 内存在唯一的 ξ,使曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(\xi)$,$x=a$ 所围平面图形面积 S_1 是曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(\xi)$,$x=b$ 所围平面图形面积 S_2 的 3 倍(如右图).

P118,32 题



十、填空题(本题满分 6 分,每小题 2 分)

(1) 设在三次独立试验中,事件 A 出现的概率相等,若已知 A 至少出现一次的概率等于 $\frac{19}{27}$,则事件 A 在一次试验中出现的概率是_____.

P293,15 题

(2) 在区间(0,1)中随机地取两个数,则事件"两数之和小于 $\frac{6}{5}$"的概率为_____.

P293,16 题

(3) 设随机变量 X 服从均值为 10,均方差为 0.02 的正态分布,已知

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du,\quad \Phi(2.5)=0.9938$$

则 X 落在区间(9.95,10.05)内的概率为_____.

P296,1 题

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

十一、解答题(本题满分 6 分)

设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$,求随机变量 $Y=1-\sqrt[3]{X}$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

P296,2 题

答案对应的页码与题号

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

1989 年全国硕士研究生招生考试
数学（一）试题

一、填空题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

(1) 已知 $f'(3)=2$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$ _____.

P84，2 题

(2) 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，则 $f(x)=$ _____.

P108，9 题

(3) 设平面曲线 L 为下半圆周 $y=-\sqrt{1-x^2}$，则曲线积分 $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s=$ _____.

P155，1 题

(4) 向量场 $\boldsymbol{u}(x,y,z)=xy^2\boldsymbol{i}+y\mathrm{e}^z\boldsymbol{j}+x\ln(1+z^2)\boldsymbol{k}$ 在点 $P(1,1,0)$ 处的散度 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}=$ _____.

P138，28 题

(5) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&0&0\\1&4&0\\0&0&3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则逆矩阵 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=$ _____.

P222，9 题

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

二、选择题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

(1) 当 $x>0$ 时，曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$

(A) 有且仅有水平渐近线.　(B) 有且仅有铅直渐近线.

(C) 既有水平渐近线，也有铅直渐近线.　(D) 既无水平渐近线，又无铅直渐近线.

P94，30 题

(2) 已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x+2y+z-1=0$，则点 P 的坐标是

(A)$(1,-1,2)$.　(B)$(-1,1,2)$.　(C)$(1,1,2)$.　(D)$(-1,-1,2)$.

P122，3 题

(3) 设线性无关的函数 y_1,y_2,y_3 都是二阶非齐次线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解，C_1,C_2 是任意常数，则该非齐次线性微分方程的通解是

(A)$C_1y_1+C_2y_2+y_3$.　(B)$C_1y_1+C_2y_2-(C_1+C_2)y_3$.

(C)$C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$.　(D)$C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$.

P203，17 题

(4) 设函数 $f(x)=x^2$，$0\leqslant x<1$，而 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，$-\infty<x<+\infty$.

其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x$，$n=1,2,3,\cdots$，则 $S\left(-\dfrac{1}{2}\right)=$

(A) $-\dfrac{1}{2}$.　(B) $-\dfrac{1}{4}$.　(C) $\dfrac{1}{4}$.　(D) $\dfrac{1}{2}$.

P194，36 题

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 中

(A) 必有一列元素全为 0.　(B) 必有两列元素对应成比例.

(C) 必有一列向量是其余列向量的线性组合. (D) 任一列向量是其余列向量的线性组合.

P215,10 题

三、解答题(本题满分 15 分,每小题 5 分)

(1) 设 $z = f(2x-y)+g(x,xy)$,其中函数 $f(t)$ 二阶可导,$g(u,v)$ 具有连续二阶偏导数,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

P127,3 题

(2) 设曲线积分 $\int_L xy^2\mathrm{d}x + y\varphi(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关,其中 $\varphi(x)$ 具有连续的导数,且 $\varphi(0)=0$. 计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\mathrm{d}x + y\varphi(x)\mathrm{d}y$ 的值.

P163,17 题

(3) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}v$,其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的区域.

P150,12 题

四、解答题(本题满分 6 分)

将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 展开为 x 的幂级数.

P191,32 题

五、解答题(本题满分 7 分)

设 $f(x)=\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t$,其中 $f(x)$ 为连续函数,求 $f(x)$.

P204,18 题

六、证明题(本题满分 7 分)

证明方程 $\ln x=\dfrac{x}{\mathrm{e}}-\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\mathrm{d}x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两个不同实根.

P98,40 题

七、解答题(本题满分 6 分)

问 λ 为何值时,线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_3 = \lambda, \\ 4x_1+x_2+2x_3=\lambda+2, \\ 6x_1+x_2+4x_3=2\lambda+3 \end{cases}$ 有解,并求出解的一般形式.

P252,9 题

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

八、证明题（本题满分 8 分）

假设 λ 为 n 阶可逆矩阵 A 的一个特征值，证明：

(1) $\frac{1}{\lambda}$ 为 A^{-1} 的特征值.

(2) $\frac{|A|}{\lambda}$ 为 A 的伴随矩阵 A^* 的特征值.

P263，2 题

九、解答题（本题满分 9 分）

设半径为 R 的球面 Σ 的球心在定球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$ 上，问当 R 为何值时，球面 Σ 在定球面内部的哪部分面积最大？

P152，15 题

十、填空题（本题满分 6 分，每小题 2 分）

(1) 已知随机事件 A 的概率 $P(A)=0.5$，随机事件 B 的概率 $P(B)=0.6$ 及条件概率 $P(B|A)=0.8$，则和事件 $A \cup B$ 的概率 $P(A \cup B)=$ _____.

P290，2 题

(2) 甲、乙两人独立地对同一目标射击一次，其命中率分别为 0.6 和 0.5，现已知目标被命中，则它是甲射中概率为_____.

P290，3 题

(3) 若随机变量 ξ 在区间 $(1,6)$ 上服从均匀分布，则方程 $x^2+\xi x+1=0$ 有实根的概率是_____.

P297，3 题

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

十一、解答题（本题满分 6 分）

设随机变量 X 与 Y 独立，且 X 服从均值为 1、标准差（均方差）为 $\sqrt{2}$ 的正态分布，而 Y 服从标准正态分布. 试求随机变量 $Z=2X-Y+3$ 的概率密度函数.

P312，2 题

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

1990年全国硕士研究生招生考试
数学(一)试题

一、填空题(本题满分15分,每小题3分)

(1) 过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线 $\begin{cases} x=-t+2 \\ y=3t-4 \\ z=t-1 \end{cases}$ 垂直的平面方程是_____. P122,4题

(2) 设 a 为非零常数,则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}=$_____. P73,5题

(3) 设函数 $f(x)=\begin{cases} 1, & |x|\leqslant 1 \\ 0, & |x|>1 \end{cases}$,则 $f[f(x)]=$_____. P72,2题

(4) 积分 $\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy$ 的值等于_____. P147,7题

(5) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,4,5),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,5,6),\boldsymbol{\alpha}_4=(4,5,6,7)$,则该向量组的秩是_____. P243,14题

二、选择题(本题满分15分,每小题3分)

(1) 设 $f(x)$ 是连续函数,且 $F(x)=\int_x^{e^{-x}} f(t)dt$,则 $F'(x)$ 等于

(A) $-e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$.　(B) $-e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$.

(C) $e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$.　(D) $e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$. P111,17题

(2) 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数,且 $f'(x)=[f(x)]^2$,则当 n 为大于2的正整数时,$f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 为

(A) $n![f(x)]^{n+1}$.　(B) $n[f(x)]^{n+1}$.

(C) $[f(x)]^{2n}$.　(D) $n![f(x)]^{2n}$. P88,12题

(3) 设 α 为常数,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

(A) 绝对收敛.　(B) 条件收敛.

(C) 发散.　(D) 收敛性与 α 的取值有关. P177,2题

(4) 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续,且 $f(0)=0,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$,则在点 $x=0$ 处 $f(x)$

(A) 不可导.　(B) 可导,且 $f'(0)\neq 0$.

(C) 取得极大值.　(D) 取得极小值. P91,23题

(5) 已知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,k_1,k_2 为任意常数,则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解(一般解)是

(A) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.　(B) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.

(C) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.　(D) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.

P253,10题

微信公众号【顶尖考研】(ID: diky66)

三、解答题（本题满分 15 分，每小题 5 分）

（1）求 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}\mathrm{d}x$.　　P108，10 题

（2）设 $z = f(2x-y, y\sin x)$，其中 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.　　P127，4 题

（3）求微分方程 $y''+4y'+4y = \mathrm{e}^{-2x}$ 的通解（一般解）.　　P204，19 题

四、解答题（本题满分 6 分）

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛域，并求其和函数.　　P186，24 题

五、解答题（本题满分 8 分）

求曲面积分 $I = \iint_S yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2 = 4$ 外侧在 $z \geqslant 0$ 的部分.

P170，29 题

微信公众号【顶尖考研】
（ID：djky66）

六、证明题（本题满分 7 分）

设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a) = f(b)$. 证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi) > 0$.　　P99，42 题

七、解答题（本题满分 6 分）

设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足关系式

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 为四阶单位矩阵，$\boldsymbol{C}^{-1}$ 表示 $\boldsymbol{C}$ 的逆矩阵，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{C}$ 的转置矩阵. 将上述关系式化简并求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

P231，22 题

微信公众号:顶尖考研
（ID:djky66）

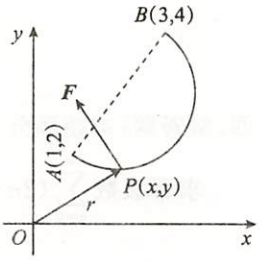
八、解答题(本题满分 8 分)

求一个正交变换化二次型 $f=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$ 成标准形.

P279,1 题

九、解答题(本题满分 8 分)

质点 P 沿着以 AB 为直径的半圆周,从点 $A(1,2)$ 运动到点 $B(3,4)$ 的过程中受变力 $\boldsymbol{F}$ 作用(见右图),$\boldsymbol{F}$ 的大小等于点 P 与原点 O 之间的距离,其方向垂直于线段 OP,且与 y 轴正向的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$. 求变力 $\boldsymbol{F}$ 对质点 P 所做的功.



P157,5 题

十、填空题(本题满分 6 分,每小题 2 分)

(1) 已知随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$,$-\infty<x<+\infty$,则 X 的概率分布函数 $F(x)=$_____.

P297,4 题

(2) 设随机事件 A,B 及其和事件 $A\cup B$ 的概率分别是 0.4,0.3 和 0.6,若 $\overline{B}$ 表示 B 的对立事件,那么事件 $A\overline{B}$ 的概率 $P(A\overline{B})=$_____.

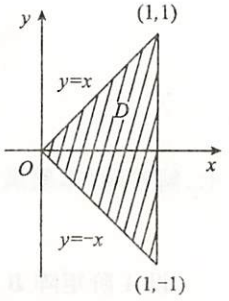
P290,4 题

(3) 已知随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布,且随机变量 $Z=3X-2$,则 $E(Z)=$_____.

P313,3 题

十一、解答题(本题满分 6 分)

设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D:0<x<1,|y|<x$(如右图)内服从均匀分布,求关于 X 的边缘概率密度函数及随机变量 $Z=2X+1$ 的方差 $D(Z)$.



P313,4 题

微信公众号:顶尖考研(ID: djky66)

1991 年全国硕士研究生招生考试
数学（一）试题

一、填空题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

(1) 设 $\begin{cases} x = 1 + t^2, \\ y = \cos t, \end{cases}$ 则 $\dfrac{d^2y}{dx^2} =$ _____.

P88,13 题

(2) 由方程 $xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$ 所确定的函数 $z = z(x, y)$ 在点 $(1, 0, -1)$ 处的全微分 $dz =$ _____.

P127,5 题

(3) 已知两条直线的方程是 $L_1: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-3}{-1}$，$L_2: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{1}$，则过 L_1 且平行于 L_2 的平面方程是_____.

P122,5 题

(4) 已知当 $x \to 0$ 时，$(1 + ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$ 与 $\cos x - 1$ 是等价无穷小，则常数 $a =$ _____.

P80,25 题

(5) 设 4 阶方阵

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

则 A 的逆矩阵 $A^{-1} =$ _____.

P223,10 题

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

二、选择题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

(1) 曲线 $y = \dfrac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}$

(A) 没有渐近线.　(B) 仅有水平渐近线.

(C) 仅有铅直渐近线.　(D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线.

P94,31 题

(2) 若连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x) = \int_0^{2x} f\left(\dfrac{t}{2}\right)dt + \ln 2$，则 $f(x)$ 等于

(A) $e^x \ln 2$.　(B) $e^{2x} \ln 2$.　(C) $e^x + \ln 2$.　(D) $e^{2x} + \ln 2$.

P197,1 题

(3) 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = 2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = 5$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 等于

(A) 3.　(B) 7.　(C) 8.　(D) 9.

P178,3 题

(4) 设 D 是 xOy 平面上以 $(1,1)$，$(-1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域，D_1 是 D 在第一象限的部分，则 $\iint\limits_D (xy + \cos x \sin y)dxdy$ 等于

(A) $2\iint\limits_{D_1} \cos x \sin y dxdy$.　(B) $2\iint\limits_{D_1} xy dxdy$.

(C)$4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. (D)0. P144,1 题

(5) 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 满足关系式 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位阵,则必有

(A)$\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{E}$. (B)$\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{E}$. (C)$\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{E}$. (D)$\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{E}$.

P223,11 题

三、解答题(本题满分 15 分,每小题 5 分)

(1) 求 $\lim\limits_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$. P73,6 题

(2) 设 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的指向外侧的法向量,求函数 $u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数. P138,29 题

(3) 求 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}v$,其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases}y^2=2z,\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与平面 $z=4$ 所围成的立体. P152,16 题

四、解答题(本题满分 6 分)

在过点 $O(0,0)$ 和 $A(\pi,0)$ 的曲线族 $y=a\sin x(a>0)$ 中,求一条曲线 L,使沿该曲线从 O 到 A 的积分 $\int_L(1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$ 的值最小. P157,6 题

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

五、解答题(本题满分 8 分)

将函数 $f(x)=2+|x|(-1\leqslant x\leqslant1)$ 展开成以 2 为周期的傅里叶级数,并由此求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 的和. P194,37 题

六、证明题(本题满分 7 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,$(0,1)$ 内可导,且 $3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=f(0)$,证明:在 $(0,1)$ 内存在一点 c,使 $f'(c)=0$. P99,43 题

七、解答题(本题满分 8 分)

已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,3),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3,5),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a+2,1),\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,4,a+8)$ 及 $\boldsymbol{\beta}=(1,1,b+3,5)$.

(1)a,b 为何值时,$\boldsymbol{\beta}$ 不能表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合?

(2)a,b 为何值时,$\boldsymbol{\beta}$ 有 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的唯一的线性表示式?写出该表示式. P234,1 题

八、证明题（本题满分 6 分）

设 A 是 n 阶正定矩阵，E 是 n 阶单位矩阵，证明 $A+E$ 的行列式大于 1. P212，4 题

九、解答题（本题满分 8 分）

在上半平面求一条向上凹的曲线，其上任一点 $P(x,y)$ 处的曲率等于此曲线在该点的法线段 PQ 长度的倒数（Q 是法线与 x 轴的交点），且曲线在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴平行. P205，20 题

十、填空题（本题满分 6 分，每小题 3 分）

(1) 若随机变量 X 服从均值为 2，方差为 σ^2 的正态分布，且 $P\{2<X<4\}=0.3$，则 $P\{X<0\}=$_____. P297，5 题

(2) 随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$（a 为正常数）内掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与该区域的面积成正比，则原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为_____. P294，17 题

十一、解答题（本题满分 6 分）

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 求 $Z=X+2Y$ 的分布函数. P305，13 题

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

1992 年全国硕士研究生招生考试
数学(一)试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x+y}+\cos(xy)=0$ 确定,则 $\dfrac{dy}{dx}=$ _____. P89,14 题

(2) 函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $\mathbf{grad}u\Big|_M=$ _____. P139,30 题

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\leqslant 0,\\ 1+x^2, & 0<x\leqslant\pi,\end{cases}$ 则其以 2π 为周期的傅里叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于 _____. P195,38 题

(4) 微分方程 $y'+y\tan x=\cos x$ 的通解为 $y=$ _____. P197,2 题

(5) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{bmatrix}$,其中 $a_i\neq 0, b_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=$ _____. P226,15 题

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 当 $x\to 1$ 时,函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限

(A) 等于 2. (B) 等于 0. (C) 为 ∞. (D) 不存在但不为 ∞. P73,7 题

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{a}{n}\right)$(常数 $a>0$)

(A) 发散. (B) 条件收敛. (C) 绝对收敛. (D) 收敛性与 a 有关. P178,4 题

(3) 在曲线 $x=t, y=-t^2, z=t^3$ 的所有切线中,与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线

(A) 只有 1 条. (B) 只有 2 条. (C) 至少有 3 条. (D) 不存在. P123,6 题

(4) 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$,则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n 为

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3. P84,3 题

(5) 要使 $\xi_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$, $\xi_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ 都是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解,只要系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

(A)$\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\end{bmatrix}$. (B)$\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$. (C)$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$. (D)$\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 4 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$. P247,1 题

三、解答题（本题共 3 小题，每小题 5 分，满分 15 分）

（1）求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$.　　P74，8 题

（2）设 $z=f(e^x\sin y,x^2+y^2)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.　　P128，6 题

（3）设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\leqslant 0,\\ e^{-x}, & x>0,\end{cases}$ 求 $\int_1^3 f(x-2)\mathrm{d}x$.　　P109，11 题

四、解答题（本题满分 6 分）

求微分方程 $y''+2y'-3y=e^{-3x}$ 的通解.　　P205，21 题

五、计算题（本题满分 8 分）

计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧.　　P170，30 题

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

六、证明题（本题满分 7 分）

设 $f''(x)<0$，$f(0)=0$，证明对任何 $x_1>0$，$x_2>0$，有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

P100，44 题

七、解答题（本题满分 8 分）

在变力 $\boldsymbol{F}=yz\boldsymbol{i}+zx\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$ 的作用下，质点由原点沿直线运动到椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上第一卦限的点 $M(\xi,\eta,\zeta)$，问 ξ,η,ζ 取何值时，力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 W 最大？并求出 W 的最大值.

P157，7 题

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

八、证明题(本题满分 7 分)

设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关,向量组 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关,问:

(1)α_1 能否由 α_2,α_3 线性表出?证明你的结论;

(2)α_4 能否由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出?证明你的结论.

P235,2 题

九、解答题(本题满分 7 分)

设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$,对应的特征向量依次为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$,$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}$,又向量 $\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$.

(1) 将 β 用 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性表出;

(2) 求 $A^n\beta$(n 为自然数).

P269,9 题

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

十、填空题(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分)

(1) 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$,$P(AB)=0$,$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{12}$,则事件 A,B,C 全不发生的概率为_____.

P290,5 题

(2) 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布,则数学期望 $E(X+e^{-2X})=$_____.

P313,5 题

十一、解答题(本题满分 6 分)

设随机变量 X 与 Y 独立,X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,Y 服从 $[-\pi,\pi]$ 上的均匀分布,试求 $Z=X+Y$ 的概率分布密度(计算结果用标准正态分布函数 Φ 表示,其中 $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$).

P305,14 题

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

1993 年全国硕士研究生招生考试
数学（一）试题

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

(1) 函数 $F(x)=\int_1^x\left(2-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t(x>0)$ 的单调减少区间为_____. P111,18 题

(2) 由曲线 $\begin{cases}3x^2+2y^2=12,\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转面在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量为_____. P141,36 题

(3) 设函数 $f(x)=\pi x+x^2(-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶级数展开式为 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则其中系数 b_3 的值为_____. P195,39 题

(4) 设数量场 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $\mathrm{div}(\mathbf{grad}\ u)=$ _____. P139,31 题

(5) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为零，且 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $n-1$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为_____. P248,2 题

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

(1) 设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin(t^2)\mathrm{d}t$，$g(x)=x^3+x^4$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的

(A) 等价无穷小. (B) 同阶但非等价的无穷小.

(C) 高阶无穷小. (D) 低阶无穷小. P80,26 题

(2) 双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 所围成的区域面积可用定积分表示为

(A) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta$. (B) $4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta$.

(C) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos 2\theta}\mathrm{d}\theta$. (D) $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2\theta)^2\mathrm{d}\theta$. P118,33 题

(3) 设有直线 $L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+8}{1}$ 与 $L_2:\begin{cases}x-y=6,\\ 2y+z=3,\end{cases}$ 则 L_1 与 L_2 的夹角为

(A) $\frac{\pi}{6}$. (B) $\frac{\pi}{4}$. (C) $\frac{\pi}{3}$. (D) $\frac{\pi}{2}$. P123,7 题

(4) 设曲线积分 $\int_L[f(x)-\mathrm{e}^x]\sin y\mathrm{d}x-f(x)\cos y\mathrm{d}y$ 与路径无关，其中 $f(x)$ 具有一阶连续导数，且 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 等于

(A) $\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x}{2}$. (B) $\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$. (C) $\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}-1$. (D) $1-\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

P158,8 题

(5) 已知 $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}$ 为三阶非零矩阵，且满足 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}$，则

(A) $t=6$ 时 $\boldsymbol{P}$ 的秩必为 1. (B) $t=6$ 时 $\boldsymbol{P}$ 的秩必为 2.

(C) $t\neq 6$ 时 $\boldsymbol{P}$ 的秩必为 1. (D) $t\neq 6$ 时 $\boldsymbol{P}$ 的秩必为 2. P227,16 题

微信公众号【顶尖考研】 ID: djky66

三、解答题(本题共3小题,每小题5分,满分15分)

(1) 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$. P74,9题

(2) 求$\int\dfrac{xe^{x}}{\sqrt{e^{x}-1}}dx$. P104,1题

(3) 求微分方程$x^{2}y'+xy=y^{2}$满足初始条件$y(1)=1$的特解. P197,3题

四、计算题(本题满分6分)

计算$\oiint\limits_{\Sigma}2xz\,dydz+yz\,dzdx-z^{2}\,dxdy$,其中$\Sigma$是由曲面$z=\sqrt{x^{2}+y^{2}}$与$z=\sqrt{2-x^{2}-y^{2}}$所围立体的表面外侧. P171,31题

五、计算题(本题满分7分)

求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}(n^{2}-n+1)}{2^{n}}$的和. P187,25题

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

六、证明题(本题共2小题,每小题5分,满分10分)

(1) 设在$[0,+\infty)$上函数$f(x)$有连续导数,且$f'(x)\geqslant k>0$,$f(0)<0$,证明:$f(x)$在$(0,+\infty)$内有且仅有一个零点. P99,41题

(2) 设$b>a>e$,证明$a^{b}>b^{a}$. P97,36题

七、解答题(本题满分8分)

已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^{2}+3x_2^{2}+3x_3^{2}+2ax_2x_3(a>0)$,通过正交变换化成标准形$f=y_1^{2}+2y_2^{2}+5y_3^{2}$,求参数$a$及所用的正交变换矩阵. P280,2题

八、证明题（本题满分 6 分）

设 A 是 $n \times m$ 矩阵，B 是 $m \times n$ 矩阵，其中 $n < m$，E 是 n 阶单位矩阵，若 $AB = E$，证明 B 的列向量组线性无关.

P237，4 题

九、解答题（本题满分 6 分）

设物体 A 从点 $(0,1)$ 出发，以速度大小为常数 v 沿 y 轴正向运动. 物体 B 从点 $(-1,0)$ 与 A 同时出发，其速度大小为 $2v$，方向始终指向 A. 试建立物体 B 的运动轨迹所满足的微分方程，并写出初始条件.

P198，4 题

十、填空题（本题共 2 小题，每小题 3 分，满分 6 分）

(1) 一批产品共有 10 个正品和 2 个次品，任意抽取两次，每次抽一个，抽出后不再放回，则第二次抽出的是次品的概率为_____.

P290，6 题

(2) 设随机变量 X 服从 $(0,2)$ 上的均匀分布，则随机变量 $Y = X^2$ 在 $(0,4)$ 内的概率分布密度 $f_Y(y) =$ _____.

P297，6 题

十一、解答题（本题满分 6 分）

设随机变量 X 的概率分布密度为 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$，$-\infty < x < +\infty$.

(1) 求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$；

(2) 求 X 与 $|X|$ 的协方差，并问 X 与 $|X|$ 是否不相关？

(3) 问 X 与 $|X|$ 是否相互独立？为什么？

P317，16 题

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

1994 年全国硕士研究生招生考试
数学(一)试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$ _____. P74,10 题

(2) 曲面 $z-e^{z}+2xy=3$ 在点(1,2,0)处的切平面方程为_____. P141,37 题

(3) 设 $u=e^{-x}\sin\dfrac{x}{y}$,则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 在点 $\left(2,\dfrac{1}{\pi}\right)$ 处的值为_____. P128,7 题

(4) 设区域 D 为 $x^2+y^2\leqslant R^2$,则 $\iint\limits_D\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)dxdy=$ _____. P145,2 题

(5) 已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3)$,$\boldsymbol{\beta}=\left(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)$,设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$,其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置,则 $\boldsymbol{A}^{n}=$ _____. P218,2 题

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x\,dx$,$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx$,$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx$,则有

(A) $N<P<M$. (B) $M<P<N$. (C) $N<M<P$. (D) $P<M<N$. P106,5 题

(2) 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$,$f'_y(x_0,y_0)$ 存在是 $f(x,y)$ 在该点连续的

(A) 充分条件而非必要条件. (B) 必要条件而非充分条件.

(C) 充分必要条件. (D) 既非充分条件又非必要条件. P128,8 题

(3) 设常数 $\lambda>0$,且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$

(A) 发散. (B) 条件收敛.

(C) 绝对收敛. (D) 收敛性与 λ 有关. P178,5 题

(4) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$,其中 $a^2+c^2\neq 0$,则必有

(A) $b=4d$. (B) $b=-4d$. (C) $a=4c$. (D) $a=-4c$. P80,23 题

(5) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,则向量组

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关. P238,5 题

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

三、解答题(本题共3小题,每小题5分,满分15分)

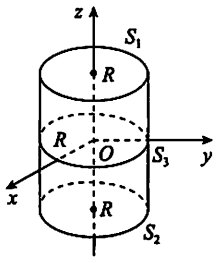
(1) 设$\begin{cases}x=\cos t^2,\\ y=t\cos t^2-\int_1^{t^2}\frac{1}{2\sqrt{u}}\cos u\,du,\end{cases}$求$\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$在$t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$的值. P111,19题

(2) 将函数$f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$展开成$x$的幂级数. P192,33题

(3) 求$\int\frac{dx}{\sin 2x+2\sin x}$. P105,2题

四、计算题(本题满分6分)

计算曲面积分$\iint_S\frac{x\,dydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}$,其中$S$是由曲面$x^2+y^2=R^2$及两平面$z=R,z=-R(R>0)$所围成立体表面(如右图)的外侧. P171,32题



五、解答题(本题满分9分)

设$f(x)$具有二阶连续导数,$f(0)=0,f'(0)=1$,且

$$[xy(x+y)-f(x)y]dx+[f'(x)+x^2y]dy=0$$

为一全微分方程,求$f(x)$及此全微分方程的通解. P205,22题

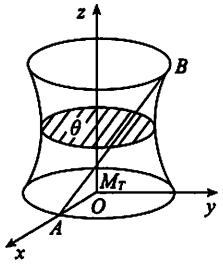
微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

六、证明题(本题满分8分)

设$f(x)$在点$x=0$的某一邻域内具有二阶连续导数,且$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$,证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$绝对收敛. P179,6题

七、解答题(本题满分6分)

已知点A与B的直角坐标分别为$(1,0,0)$与$(0,1,1)$.线段AB绕z轴旋转一周所成的旋转曲面为S,求由S及两平面$z=0,z=1$所围成的立体体积(如右图). P153,17题



八、解答题(本题满分8分)

设四元齐次线性方程组(Ⅰ)为$\begin{cases}x_1+x_2=0,\\ x_2-x_4=0.\end{cases}$又已知某线性齐次方程组(Ⅱ)的通解为$k_1(0,1,1,0)^T+k_2(-1,2,2,1)^T$.

(1) 求线性方程组(Ⅰ)的基础解系;

(2) 问线性方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)是否有非零公共解?若有,则求出非零公共解.若没有,则说明理由. P259,18题

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

九、证明题(本题满分 6 分)

设 A 为 n 阶非零方阵,A^* 是 A 的伴随矩阵,A^T 是 A 的转置矩阵. 当 $A^* = A^T$ 时,证明 $|A| \neq 0$.

P216,11 题

十、填空题(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分)

(1) 已知 A,B 两个事件满足条件 $P(AB) = P(\overline{A}\,\overline{B})$,且 $P(A) = p$,则 $P(B) =$ _____.

P291,7 题

(2) 设相互独立的两个随机变量 X,Y 具有同一分布律,且 X 的分布律为

X	0	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

则随机变量 $Z = \max\{X,Y\}$ 的分布律为_____. P306,15 题

十一、解答题(本题满分 6 分)

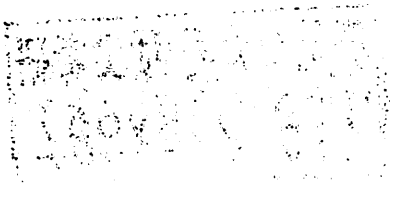
已知随机变量(X,Y) 服从二维正态分布,并且 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(1,3^2)$ 和 $N(0,4^2)$,X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY} = -\frac{1}{2}$,设 $Z = \frac{X}{3} + \frac{Y}{2}$.

(1) 求 Z 的数学期望 $E(Z)$ 和方差 $D(Z)$;

(2) 求 X 与 Z 的相关系数 ρ_{XZ};

(3) 问 X 与 Z 是否相互独立?为什么? P319,19 题

微信公众号【同济考研】
(ID: tjky66)



1995 年全国硕士研究生招生考试
数学(一)试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$ _____. P74,11 题

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{0} x\cos t^2\,\mathrm{d}t=$ _____. P111,20 题

(3) 已知$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$,则$[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=$ _____. P121,1 题

(4) 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n-1}$ 的收敛半径 $R=$ _____. P179,7 题

(5) 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{7}\end{bmatrix}$$

则 $\boldsymbol{B}=$ _____. P232,24 题

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设有直线 $L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0,\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 及平面 $\Pi:4x-2y+z-2=0$,则直线 L

(A) 平行于 Π.　(B) 在 Π 上.

(C) 垂直于 Π.　(D) 与 Π 斜交. P123,8 题

(2) 设在$[0,1]$上 $f''(x)>0$,则 $f'(0),f'(1),f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$.　(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$.

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$.　(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$.

P92,24 题

(3) 设 $f(x)$ 可导,$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$,则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的

(A) 充分必要条件.　(B) 充分条件但非必要条件.

(C) 必要条件但非充分条件.　(D) 既非充分条件又非必要条件.

P84,4 题

(4) 设 $u_n=(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$,则级数

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都收敛.　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都发散.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 发散.　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛. P179,8 题

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

(5) 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{11}&a_{32}+a_{12}&a_{33}+a_{13}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

则必有

(A)$\boldsymbol{AP}_1\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{B}$. (B)$\boldsymbol{AP}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{B}$. (C)$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$. (D)$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

P218,3 题

三、解答题(本题共 2 小题,每小题 5 分,满分 10 分)

(1) 设 $u=f(x,y,z)$,$\varphi(x^2,e^y,z)=0$,$y=\sin x$,其中 f,φ 都具有一阶连续偏导数,且 $\frac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$,求 $\frac{du}{dx}$.

P129,9 题

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间[0,1]上连续,并设 $\int_0^1 f(x)dx=A$,求 $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy$.

P148,8 题

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

四、解答题(本题共 2 小题,每小题 6 分,满分 12 分)

(1) 计算曲面积分 $\iint_\Sigma z\,dS$,其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在柱体 $x^2+y^2\leqslant 2x$ 内的部分.

P167,23 题

(2) 将 $f(x)=x-1(0\leqslant x\leqslant 2)$ 展开成周期为 4 的余弦级数. P195,40 题

五、解答题(本题满分 7 分)

设曲线 L 位于平面 xOy 平面的第一象限内,L 上任一点 M 处的切线与 y 轴总相交,交点记为 A. 已知 $|\overline{MA}|=|\overline{OA}|$,且 L 过点 $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$,求 L 的方程. P198,5 题

六、解答题(本题满分 8 分)

设函数 $Q(x,y)$ 在 xOy 平面上具有一阶连续偏导数,曲线积分 $\int_L 2xy\,dx+Q(x,y)dy$ 与路径无关,并且对任意 t 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\,dx+Q(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\,dx+Q(x,y)dy$$

求 $Q(x,y)$. P164,18 题

七、证明题(本题满分 8 分)

函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶导数,并且 $g''(x)\neq 0$,$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$,试证:

(1) 在开区间 (a,b) 内 $g(x)\neq 0$;

(2) 在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$. P100,45 题

八、解答题(本题满分 7 分)

设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$,对应于 λ_1 的特征向量为 $\xi_1=(0,1,1)^T$,求 A. P275,15 题

九、解答题(本题满分 6 分)

设 A 为 n 阶矩阵,满足 $AA^T=E$(E 是 n 阶单位矩阵,A^T 是 A 的转置矩阵),$|A|<0$,求 $|A+E|$. P213,6 题

十、填空题(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分)

(1) 设 X 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数,每次射中目标的概率为 0.4,则 X^2 的数学期望 $E(X^2)=$ _____. P313,6 题

(2) 设 X 和 Y 为两个随机变量,且

$$P\{X\geqslant 0,Y\geqslant 0\}=\frac{3}{7},P\{X\geqslant 0\}=P\{Y\geqslant 0\}=\frac{4}{7}$$

则 $P\{\max(X,Y)\geqslant 0\}=$ _____. P299,1 题

十一、解答题(本题满分 6 分)

设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$,求随机变量 $Y=e^X$ 的概率密度 $f_Y(y)$. P297,7 题

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

1996年全国硕士研究生招生考试
数学(一)试题

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分)

(1) 设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^{x}=8$,则$a=$_____. P80,24题

(2) 设一平面经过原点及$(6,-3,2)$,且与平面$4x-y+2z=8$垂直,则此平面方程为_____. P124,9题

(3) 微分方程$y''-2y'+2y=e^{x}$的通解为_____. P206,23题

(4) 函数$u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$在点$A(1,0,1)$处沿点A指向点$B(3,-2,2)$方向的方向导数为_____. P139,32题

(5) 设$\boldsymbol{A}$是4×3矩阵,且$\boldsymbol{A}$的秩$r(\boldsymbol{A})=2$,而$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{bmatrix}$,则$r(\boldsymbol{AB})=$_____. P227,17题

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分)

(1) 已知$\dfrac{(x+ay)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$为某函数的全微分,则$a$等于

(A)-1. (B)0. (C)1. (D)2. P129,10题

(2) 设$f(x)$有二阶连续导数,且$f'(0)=0$,$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$,则

(A)$f(0)$是$f(x)$的极大值.

(B)$f(0)$是$f(x)$的极小值.

(C)$(0,f(0))$是曲线$y=f(x)$的拐点.

(D)$f(0)$不是$f(x)$的极值,$(0,f(0))$也不是曲线$y=f(x)$的拐点. P92,25题

(3) 设$a_n>0(n=1,2,\cdots)$且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,常数$\lambda\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(n\tan\dfrac{\lambda}{n}\right)a_{2n}$

(A) 绝对收敛. (B) 条件收敛.

(C) 发散. (D) 敛散性与λ有关. P180,9题

(4) 设$f(x)$有连续导数,$f(0)=0$,$f'(0)\neq0$,$F(x)=\int_0^x(x^2-t^2)f(t)\mathrm{d}t$,且当$x\to0$时,$F'(x)$与$x^k$是同阶无穷小,则$k$等于

(A)1. (B)2. (C)3. (D)4. P81,27题

(5) 4阶行列式$\begin{vmatrix}a_1&0&0&b_1\\0&a_2&b_2&0\\0&b_3&a_3&0\\b_4&0&0&a_4\end{vmatrix}$的值等于

(A)$a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$.

(B)$a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$.

(C)$(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$.

(D)$(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$. P210,1题

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

三、解答题(本题共2小题,每小题5分,满分10分)

(1) 求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 的全长,其中 $a>0$ 是常数. P119,34题

(2) 设 $x_1=10, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}(n=1,2,\cdots)$,试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在,并求此极限. P78,19题

四、解答题(本题共2小题,每小题6分,满分12分)

(1) 计算曲面积分 $\iint_S (2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 S 为有向曲面 $z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 1)$,其法向量与 z 轴正向夹角为锐角. P172,33题

(2) 设变换 $\begin{cases}u=x-2y,\\ v=x+ay\end{cases}$ 可把方程 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 简化 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$,求常数 a.(假设 z 有二阶连续偏导数) P137,26题

五、计算题(本题满分7分)

求级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和. P187,26题

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

六、解答题(本题满分7分)

设对任意 $x>0$,曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x,f(x))$ 处的切线在 y 轴上的截距等于 $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,求 $f(x)$ 的一般表达式. P199,6题

七、解答题(本题满分8分)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数,且满足条件 $|f(x)|\leqslant a$,$|f''(x)|\leqslant b$,其中 a,b 都是非负常数,c 是 $(0,1)$ 内任意一点.

(1) 写出 $f(x)$ 在点 $x=c$ 处带拉格朗日型余项的一阶泰勒公式;

(2) 证明 $|f'(x)|\leqslant 2a+\frac{b}{2}$. P101,46题

八、证明题(本题满分6分)

设 $A=E-\xi\xi^{\mathrm{T}}$,其中 E 是 n 阶单位矩阵,ξ 是 n 维非零列向量,ξ^{T} 是 ξ 的转置.证明:

(1) $A^2=A$ 的充要条件是 $\xi^{\mathrm{T}}\xi=1$;

(2) 当 $\xi^{\mathrm{T}}\xi=1$ 时,A 是不可逆矩阵. P223,12题

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

九、解答题(本题满分 8 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2.

(1) 求参数 c 及此二次型对应矩阵的特征值;

(2) 指出方程 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种二次曲面.

P281,3 题

十、填空题(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分)

(1) 设工厂 A 和工厂 B 的产品的次品率分别为 1% 和 2%,现从由 A 厂和 B 厂的产品分别占 60% 和 40% 的一批产品中随机抽取一件,发现是次品,则该次品是 A 厂生产的概率是_____.

P291,8 题

(2) 设 ξ,η 是两个相互独立且均服从正态分布 $N\left(0,\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)$ 的随机变量,则随机变量 $|\xi-\eta|$ 的数学期望 $E(|\xi-\eta|)=$_____.

P313,7 题

十一、解答题(本题满分 6 分)

设 ξ,η 是相互独立且服从同一分布的两个随机变量,已知 ξ 的分布律为 $P\{\xi=i\}=\frac{1}{3}$,$i=1,2,3$,又设 $X=\max\{\xi,\eta\}$,$Y=\min\{\xi,\eta\}$.

(1) 写出二维随机变量 (X,Y) 的分布律:

Y \ X	1	2	3
1			
2			
3			

(2) 求随机变量 X 的数学期望 $E(X)$.

P314,8 题

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

1997 年全国硕士研究生招生考试
数学(一)试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$ _____. P74,12 题

(2) 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 3,则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为_____.

P184,20 题

(3) 对数螺线 $r=e^{\theta}$ 在点 $(r,\theta)=\left(e^{\frac{\pi}{2}},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 处切线的直角坐标方程为_____. P90,17 题

(4) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & t & 3\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}$ 为三阶非零矩阵,且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,则 $t=$ _____. P219,4 题

(5) 袋中有 50 个乒乓球,其中 20 个是黄球,30 个是白球. 今有两人依次随机地从袋中各取一球,取后不放回,则第二个人取得黄球的概率是_____. P294,18 题

二、选择题(本题共 5 题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$,在点(0,0)处

(A) 连续,偏导数存在. (B) 连续,偏导数不存在.

(C) 不连续,偏导数存在. (D) 不连续,偏导数不存在. P129,11 题

(2) 设在区间 $[a,b]$ 上函数 $f(x)>0,f'(x)<0,f''(x)>0$. 令 $S_1=\int_a^b f(x)dx,S_2=f(b)(b-a),S_3=\dfrac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$,则

(A) $S_1<S_2<S_3$. (B) $S_2<S_1<S_3$. (C) $S_3<S_1<S_2$. (D) $S_2<S_3<S_1$.

P106,6 题

(3) 设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt$,则 $F(x)$

(A) 为正常数. (B) 为负常数.

(C) 恒为零. (D) 不为常数. P107,7 题

(4) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{bmatrix}$,则三条直线

$$a_1x+b_1y+c_1=0,a_2x+b_2y+c_2=0,a_3x+b_3y+c_3=0$$

(其中 $a_i^2+b_i^2\neq 0,i=1,2,3$) 相交于一点的充要条件是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关. (B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(C) 秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=$ 秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$. (D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关. P138,6 题

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

(5) 设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 的方差分别为 4 和 2，则随机变量 $3X-2Y$ 的方差是

(A)8. (B)16. (C)28. (D)44. P315，9 题

三、解答题(本题共 3 小题，每小题 5 分，满分 15 分)

(1) 计算 $I=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中 Ω 为平面曲线 $\begin{cases}y^2=2z,\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周形成的曲面与平面 $z=8$ 所围成的区域. P150，13 题

(2) 计算曲线积分

$$\oint_C(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$$

其中 C 是曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\x-y+z=2,\end{cases}$ 从 z 轴正向往 z 轴负向看 C 的方向是顺时针的. P159，9 题

(3) 在某一人群中推广新技术是通过其中掌握新技术的人进行的. 设该人群的总人数为 N，在 $t=0$ 时刻已掌握新技术的人数为 x_0，在任意时刻 t 已掌握新技术的人数为 $x(t)$(将 $x(t)$ 视为连续可微变量)，其变化率与已掌握新技术人数和未掌握新技术人数之积成正比，比例常数 $k>0$，求 $x(t)$. P199，7 题

四、解答题(本题共 2 小题，第(1)小题 6 分，每(2)小题 7 分，满分 13 分)

(1) 设直线 $l:\begin{cases}x+y+b=0,\\x+ay-z-3=0\end{cases}$ 在平面 Π 上，而平面 Π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点(1，−2，5)，求 a,b 之值. P142，38 题

(2) 设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，而 $z=f(\mathrm{e}^x\sin y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{2x}z$，求 $f(u)$. P199，8 题

五、解答题(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$($A$ 为常数)，求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性. P111，21 题

六、解答题(本题满分 8 分)

设 $a_1=2,a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)(n=1,2,\cdots)$，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在；

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛. P180，10 题

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

七、解答题(本题共 2 小题,每(1)小题 5 分,第(2)小题 6 分,满分 11 分)

(1) 设 $\boldsymbol{B}$ 是秩为 2 的 5×4 矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,4,-1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(5,-1,-8,9)^{\mathrm{T}}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解向量,求 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的一个标准正交基. P246,17 题

(2) 已知 $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{bmatrix}$ 的一个特征向量.

(Ⅰ) 试确定 a,b 参数及特征向量 $\boldsymbol{\xi}$ 所对应的特征值;

(Ⅱ) 问 $\boldsymbol{A}$ 能否相似于对角阵?说明理由. P269,10 题

八、解答题(本题满分 5 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆方阵,将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行和第 j 行对换后得到的矩阵记为 $\boldsymbol{B}$.

(1) 证明 $\boldsymbol{B}$ 可逆;

(2) 求 $\boldsymbol{AB}^{-1}$. P219,5 题

九、解答题(本题满分 7 分)

从学校乘汽车到火车站的途中有 3 个交通岗,假设在各个交通岗遇到红灯的事件是相互独立的,并且概率都是 $\frac{2}{5}$,设 X 为途中遇到红灯的次数,求随机变量 X 的分布律、分布函数和数学期望. P315,10 题

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

十、解答题(本题满分 5 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 $\theta>-2$ 是未知参数,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个容量为 n 的简单随机样本,分别用矩估计法和极大似然估计法求 θ 的估计量. P325,1 题

1998年全国硕士研究生招生考试
数学(一)试题

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$ _____. P75,13题

(2) 设函数 $z=\dfrac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)$,函数 f,φ 具有二阶连续导数,则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ _____. P130,12题

(3) 设 L 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$,其周长记为 a,则 $\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=$ _____. P155,2题

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 λ,则 $(\boldsymbol{A}^*)^2+\boldsymbol{E}$ 必有特征值_____. P264,3题

(5) 设平面区域 D 由曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 及直线 $y=0,x=1,x=\mathrm{e}^2$ 所围成,二维随机变量 (X,Y) 在区域 D 上服从均匀分布,则 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度在 $x=2$ 处的值为_____. P299,2题

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分)

(1) 设 $f(x)$ 连续,则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=$

(A) $xf(x^2)$. (B) $-xf(x^2)$. (C) $2xf(x^2)$. (D) $-2xf(x^2)$. P112,22题

(2) 函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 不可导点的个数是

(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 0. P85,5题

(3) 已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$,且当 $\Delta x\to 0$ 时,α 是 Δx 的高阶无穷小,$y(0)=\pi$,则 $y(1)$ 等于

(A) 2π. (B) π. (C) $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$. (D) $\pi\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$. P200,9题

(4) 设矩阵 $\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}$ 是满秩的,则直线 $\dfrac{x-a_3}{a_1-a_2}=\dfrac{y-b_3}{b_1-b_2}=\dfrac{z-c_3}{c_1-c_2}$ 与直线 $\dfrac{x-a_1}{a_2-a_3}=\dfrac{y-b_1}{b_2-b_3}=\dfrac{z-c_1}{c_2-c_3}$

(A) 相交于一点. (B) 重合. (C) 平行但不重合. (D) 异面. P227,18题

(5) 设 A,B 是两个随机事件,且 $0<P(A)<1,P(B)>0,P(B\mid A)=P(B\mid\overline{A})$,则必有

(A) $P(A\mid B)=P(\overline{A}\mid B)$. (B) $P(A\mid B)\neq P(\overline{A}\mid B)$.

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$. (D) $P(AB)\neq P(A)P(B)$. P291,9题

三、解答题(本题满分5分)

求直线 $l:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 $\Pi:x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 l_0 的方程,并求 l_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程. P124,11题

四、解答题(本题满分6分)

确定常数 λ,使在右半平面 $x>0$ 上的向量 $\boldsymbol{A}(x,y)=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{i}-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{j}$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度,并求 $u(x,y)$. P164,19题

五、解答题(本题满分6分)

从船上向海中沉放某种探测仪器,按探测要求,需确定仪器的下沉深度 y(从海平面算起)与下沉速度 v 之间的函数关系.设仪器在重力作用下,从海平面由静止开始铅直下沉,在下沉过程中还受到阻力和浮力的作用.设仪器的质量为 m,体积为 B,海水密度为 ρ,仪器所受的阻力与下沉速度成正比,比例系数为 $k(k>0)$.试建立 y 与 v 所满足的微分方程,并求出函数关系式 $y=y(v)$.

P200,10题

六、解答题(本题满分7分)

计算 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{ax\,dydz+(z+a)^2\,dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$,其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧,a 为大于零的常数.

P173,34题

七、解答题(本题满分6分)

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$. P78,20题

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

八、解答题(本题满分5分)

设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散,试问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{a_n+1}\right)^n$ 是否收敛?并说明理由.

P181,11题

九、解答题(本题满分6分)

设 $y=f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的任一非负连续函数.

(1)试证存在 $x_0\in(0,1)$,使得在区间 $[0,x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积等于在区间 $[x_0,1]$ 上以 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形面积.

(2)又设 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内可导,且 $f'(x)>-\dfrac{2f(x)}{x}$,证明(1)中的 x_0 是唯一的.

P116,28题

十、解答题(本题满分6分)

已知二次曲面方程 $x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$ 可以经过正交变换 $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{bmatrix}$ 化为椭圆柱面方程 $\eta^2+4\zeta^2=4$,求 a,b 的值和正交矩阵 $\boldsymbol{P}$. P282,4题

十一、证明题(本题满分4分)

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,若存在正整数 k,使线性方程组 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有解向量 $\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$.

证明:向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 是线性无关的. P239,7题

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

十二、解答题(本题满分 5 分)

已知线性方程组

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1,2n}x_{2n}=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2,2n}x_{2n}=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{n,2n}x_{2n}=0 \end{cases}$$

的一个基础解系为$(b_{11},b_{12},\cdots,b_{1,2n})^{\mathrm{T}},(b_{21},b_{22},\cdots,b_{2,2n})^{\mathrm{T}},\cdots,(b_{n1},b_{n2},\cdots,b_{n,2n})^{\mathrm{T}}$. 试写出线性方程组

$$(\text{Ⅱ})\begin{cases} b_{11}y_1+b_{12}y_2+\cdots+b_{1,2n}y_{2n}=0, \\ b_{21}y_1+b_{22}y_2+\cdots+b_{2,2n}y_{2n}=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}y_1+b_{n2}y_2+\cdots+b_{n,2n}y_{2n}=0 \end{cases}$$

的通解,并说明理由. P248,4 题

十三、解答题(本题满分 6 分)

设两个随机变量 X,Y 相互独立,且都服从均值为 0,方差为 $\frac{1}{2}$ 的正态分布,求随机变量 $|X-Y|$ 的方差. P316,11 题

十四、解答题(本题满分 4 分)

从正态总体 $N(3,4,6^2)$ 中抽取容量为 n 的样本,如果要求其样本均值位于区间(1.4,5.4)内的概率不小于 0.95,问样本容量 n 至少应取多大?

附:标准正态分布表

$$\Phi(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

z	1.28	1.645	1.96	2.33
$\Phi(z)$	0.900	0.950	0.975	0.990

P329,8 题

十五、解答题(本题满分 4 分)

设某次考试的学生成绩服从正态分布,从中随机地抽取 36 位考生的成绩,算得平均成绩为 66.5 分,标准差为 15 分. 问在显著性水平 0.05 下,是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分?并给出检验过程.

附:t 分布表

$P\{t(n)\leqslant t_p(n)\}=p$

$t_p(n)$ 与 n 与 p	0.95	0.975
35	1.689 6	2.030 1
36	1.688 3	2.028 1

P332,1 题

1999年全国硕士研究生招生考试
数学(一)试题

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=$ _____. P75,14题

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \sin(x-t)^2\mathrm{d}t=$ _____. P112,23题

(3) $y''-4y=\mathrm{e}^{2x}$ 的通解为 $y=$ _____. P206,24题

(4) 设 n 阶矩阵 A 的元素全为1,则 A 的 n 个特征值是_____. P264,4题

(5) 设两两相互独立的三事件 A,B 和 C 满足条件:$ABC=\varnothing$,$P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$,且已知 $P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$,则 $P(A)=$ _____. P291,10题

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.)

(1) 设 $f(x)$ 是连续函数,$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,则

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时,$F(x)$ 必是偶函数.

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时,$F(x)$ 必是奇函数.

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时,$F(x)$ 必是周期函数.

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时,$F(x)$ 必是单调增函数. P112,24题

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0,\\ x^2g(x), & x\leqslant 0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处

(A) 极限不存在. (B) 极限存在,但不连续.

(C) 连续,但不可导. (D) 可导. P85,6题

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\ 2-2x, & \frac{1}{2}<x<1,\end{cases}$ $S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$, $-\infty<x<+\infty$,其中 $a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x(n=0,1,2,\cdots)$,则 $S\left(-\frac{5}{2}\right)$ 等于

(A) $\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{1}{2}$. (C) $\frac{3}{4}$. (D) $-\frac{3}{4}$.

P195,41题

(4) 设 A 是 $m\times n$ 矩阵,B 是 $n\times m$ 矩阵,则

(A) 当 $m>n$ 时,必有行列式 $|AB|\neq 0$. (B) 当 $m>n$ 时,必有行列式 $|AB|=0$.

(C) 当 $n>m$ 时,必有行列式 $|AB|\neq 0$. (D) 当 $n>m$ 时,必有行列式 $|AB|=0$.

P216,12题

【考研尖尖考研】(ID: ajkyoo)

(5) 设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$，则

(A) $P\{X+Y\leqslant 0\}=\frac{1}{2}$.　　(B) $P\{X+Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2}$.

(C) $P\{X-Y\leqslant 0\}=\frac{1}{2}$.　　(D) $P\{X-Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2}$.　　P300,3 题

三、解答题(本题满分 5 分.)

设 $y=y(x)$，$z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数，其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数，求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.　　P130,13 题

四、解答题(本题满分 5 分.)

求 $I=\int_L[\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y)]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y$，其中 a,b 为正的常数，L 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧.　　P159,10 题

五、解答题(本题满分 6 分.)

设函数 $y(x)(x\geqslant 0)$ 二阶可导且 $y'(x)>0$，$y(0)=1$. 过曲线 $y=y(x)$ 上任意一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线，上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积记为 S_1，区间 $[0,x]$ 上以 $y=y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2，并设 $2S_1-S_2$ 恒为 1，求此曲线 $y=y(x)$ 的方程.　　P207,25 题

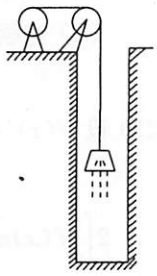
微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

六、证明题(本题满分 6 分.)

试证：当 $x>0$ 时，$(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$.　　P97,37 题

七、解答题(本题满分 6 分.)

为清除井底的污泥，用缆绳将抓斗放入井底，抓起污泥后提出井口见图. 已知井深 30 m，抓斗自重 400 N，缆绳每米重 50 N，抓斗抓起的污泥重 2 000 N，提升速度为 3 m/s，在提升过程中，污泥以 20 N/s 的速率从抓斗缝隙中漏掉，现将抓起污泥的抓斗提升至井口，问克服重力需做多少焦耳的功？



(说明：①1 N×1 m=1 J；其中 m,N,s,J 分别表示米，牛顿，秒，焦耳. ② 抓斗的高度及位于井口上方的缆绳长度忽略不计.)　　P119,35 题

八、解答题(本题满分 7 分.)

设 S 为椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分，点 $P(x,y,z)\in S$，Π 为 S 在点 P 处的切平面，$\rho(x,y,z)$ 为点 $O(0,0,0)$ 到平面 Π 的距离，求 $\iint_S\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$.　　P167,24 题

九、解答题（本题满分 7 分.）

设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$，

(1) 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(a_n + a_{n+2})$ 的值；

(2) 试证：对任意的常数 $\lambda > 0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛.

P181，12 题

十、解答题（本题满分 8 分.）

设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix}$，其行列式 $|\boldsymbol{A}| = -1$，又 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 有一个特征值 λ_0，属于 λ_0 的一个特征向量为 $\boldsymbol{\alpha} = (-1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$，求 a, b, c 和 λ_0 的值.

P264，5 题

十一、证明题（本题满分 6 分.）

设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶实对称矩阵且正定，$\boldsymbol{B}$ 为 $m \times n$ 实矩阵，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的转置矩阵，试证：$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{B}$ 的秩 $r(\boldsymbol{B}) = n$.

P285，9 题

十二、解答题（本题满分 8 分.）

设随机变量 X 与 Y 相互独立，下表列出了二维随机变量 (X, Y) 联合分布律及关于 X 和关于 Y 的边缘分布律中的部分数值，试将其余数值填入表中的空白处.

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P\{X = x_i\} = p_{i\cdot}$
x_1		$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$			
$P\{Y = y_j\} = p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$			1

P300，4 题

十三、解答题（本题满分 6 分.）

设总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6x}{\theta^3}(\theta - x), & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$；

(2) 求 $\hat{\theta}$ 的方差 $D(\hat{\theta})$.

P341，2 题

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

2000年全国硕士研究生招生考试
数学(一)试题

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.)

(1) $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,dx =$ _____. P109,12题

(2) 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点(1,-2,2)的法线方程为_____. P142,39题

(3) 微分方程 $xy''+3y'=0$ 的通解为_____. P207,26题

(4) 已知方程组 $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & a+2\\ 1 & a & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 3\\ 0\end{bmatrix}$ 无解,则 $a=$ _____. P254,12题

(5) 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$,A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等,则 $P(A)=$ _____. P292,11题

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.)

(1) 设函数 $f(x),g(x)$ 是恒大于零的可导函数,且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$,则当 $a<x<b$ 时,有

(A) $f(x)g(b)>f(b)g(x)$. (B) $f(x)g(a)>f(a)g(x)$.

(C) $f(x)g(x)>f(b)g(b)$. (D) $f(x)g(x)>f(a)g(a)$. P92,26题

(2) 设 $S:x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0)$,$S_1$ 为 S 在第一卦限中的部分,则有

(A) $\iint_S x\,dS=4\iint_{S_1}x\,dS$. (B) $\iint_S y\,dS=4\iint_{S_1}x\,dS$.

(C) $\iint_S z\,dS=4\iint_{S_1}x\,dS$. (D) $\iint_S xyz\,dS=4\iint_{S_1}xyz\,dS$. P168,25题

(3) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则必收敛的级数为

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{u_n}{n}$. (B) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$. (C) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$. (D) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$.

P181,13题

(4) 设 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m<n)$ 线性无关,则 n 维列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关的充分必要条件为

(A) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性表示.

(B) 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示.

(C) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 等价.

(D) 矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m]$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m]$ 等价. P239,8题

(5) 设二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布,则随机变量 $\xi=X+Y$ 与 $\eta=X-Y$ 不相关的充分必要条件为

(A) $E(X)=E(Y)$. (B) $E(X^2)-[E(X)]^2=E(Y^2)-[E(Y)]^2$.

(C) $E(X^2)=E(Y^2)$. (D) $E(X^2)+[E(X)]^2=E(Y^2)+[E(Y)]^2$.

P320,20题

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

三、(本题满分 5 分)

求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

P76,15 题

四、(本题满分 5 分)

设 $z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)$,其中 f 具有二阶连续偏导数,g 具有二阶连续导数,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

P131,14 题

五、(本题满分 6 分)

计算曲线积分 $\oint_L \dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$,其中 L 是以点(1,0)为中心,R 为半径的圆周($R>1$),取逆时针方向.

P160,11 题

六、(本题满分 7 分)

设对于半空间 $x>0$ 内任意的光滑有向封闭曲面 S,都有

$$\oint_S xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-e^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

其中函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有连续的一阶导数,且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$. 求 $f(x)$.

P174,35 题

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

七、(本题满分 6 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n+(-2)^n}\dfrac{x^n}{n}$ 的收敛区间,并讨论该区间端点处的收敛性.

P185,21 题

八、(本题满分 7 分)

设有一半径为 R 的球体,P_0 是此球的表面上的一个定点,球体上任一点的密度与该点到 P_0 距离的平方成正比(比例常数 $k>0$),求球体的重心位置.

P153,18 题

九、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续,且 $\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0$,$\int_0^{\pi}f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$. 试证:在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2,使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

P116,29 题

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

十、(本题满分 6 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^{*}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 4 阶单位矩阵，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

P233,25 题

十一、(本题满分 8 分)

某试验性生产线每年一月份进行熟练工与非熟练工的人数统计，然后将 $\frac{1}{6}$ 熟练工支援其他生产部分，其缺额由招收新的非熟练工补齐. 新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有 $\frac{2}{5}$ 成为熟练工. 设第 n 年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为 x_n 和 y_n，记成向量 $\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix}$.

(1) 求 $\begin{bmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix}$ 的关系式并写成矩阵形式：$\begin{bmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix}$；

(2) 验证 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的两个线性无关的特征向量，并求出相应的特征值；

(3) 当 $\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ 时，求 $\begin{bmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{bmatrix}$.

P270,11 题

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

十二、(本题满分 8 分)

某流水生产线上每个产品不合格的概率为 $p(0<p<1)$，各产品合格与否相互独立，当出现一个不合格产品时即停机检修. 设开机后第一次停机时已生产了的产品个数为 X，求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$.

P316,12 题

十三、(本题满分 6 分)

设某种元件的使用寿命 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\leqslant\theta\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数. 又设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 X 的一组样本观测值，求参数 θ 的最大似然估计值.

P326,3 题

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

2001 年全国硕士研究生招生考试
数学(一)试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.)

(1) 设 $y=e^x(C_1\sin x+C_2\cos x)$($C_1,C_2$ 为任意常数)为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解,则该方程为_____. P207,27 题

(2) 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,则 $\operatorname{div}(\mathbf{grad}\ r)\Big|_{(1,-2,2)}=$_____. P140,33 题

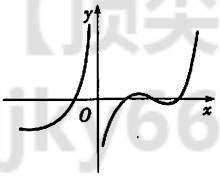
(3) 交换二次积分的积分次序:$\int_{-1}^{0}dy\int_{2}^{1-y}f(x,y)dx=$_____. P148,9 题

(4) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵,则 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=$_____. P224,13 题

(5) 设随机变量 X 的方差为 2,则根据切比雪夫不等式有估计 $P\{|X-E(X)|\geqslant 2\}\leqslant$_____. P322,1 题

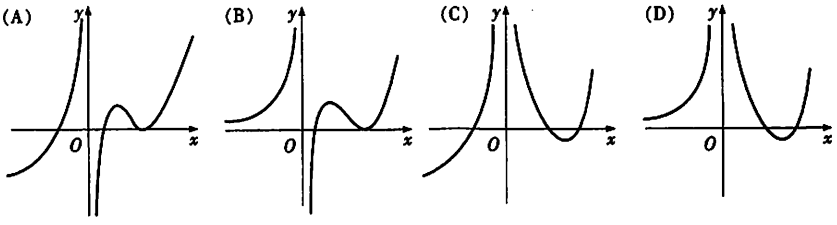
二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.)

(1) 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导,$y=f(x)$ 的图形如图所示,



微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

则导函数 $y=f'(x)$ 的图形为



P93,27 题

(2) 设函数 $f(x,y)$ 在点(0,0)附近有定义,且 $f'_x(0,0)=3$,$f'_y(0,0)=1$,则

(A) $dz\Big|_{(0,0)}=3dx+dy$.

(B) 曲面 $z=f(x,y)$ 在点$(0,0,f(0,0))$的法向量为$\{3,1,1\}$.

(C) 曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\y=0\end{cases}$ 在点$(0,0,f(0,0))$的切向量为$\{1,0,3\}$.

(D) 曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\y=0\end{cases}$ 在点$(0,0,f(0,0))$的切向量为$\{3,0,1\}$. P143,40 题

(3) 设 $f(0)=0$,则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为

(A) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在.　　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-\mathrm{e}^h)$ 存在.

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在.　　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在.

P86,7 题

(4) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$

(A) 合同且相似.　(B) 合同但不相似.　(C) 不合同但相似.　(D) 不合同且不相似.

P287,10 题

(5) 将一枚硬币重复掷 n 次,以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数,则 X 和 Y 的相关系数等于

(A) -1.　(B)0.　(C) $\dfrac{1}{2}$.　(D)1.　P320,21 题

三、(本题满分 6 分)

求 $\int\dfrac{\arctan \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$.　P105,3 题

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

四、(本题满分 6 分)

设函数 $z=f(x,y)$ 在点(1,1)处可微,且 $f(1,1)=1$,$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2$,$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3$,$\varphi(x)=f(x,f(x,x))$. 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\right|_{x=1}$.　P131,15 题

五、(本题满分 8 分)

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数,并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

P188,27 题

六、(本题满分 7 分)

计算 $I=\oint_L(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$,其中 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线,从 z 轴正向看去,L 为逆时针方向.　P161,12 题

七、(本题满分 7 分)

设 $y=f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数且 $f''(x)\neq 0$,试证:

(1) 对于 $(-1,1)$ 内的任意 $x\neq 0$,存在唯一的 $\theta(x)\in(0,1)$,使 $f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)$ 成立;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

P101,47 题

八、(本题满分 8 分)

设有一高度为 $h(t)$(t 为时间)的雪堆在融化过程中,其侧面积满足方程 $z=h(t)-\dfrac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$(设长度单位为厘米,时间单位为小时),已知体积减小的速率与侧面积成正比(比例系数为 0.9),问高度为 130 厘米的雪堆全部融化需多少小时?

P154,19 题

九、(本题满分 6 分)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,$\boldsymbol{\beta}_1=t_1\boldsymbol{\alpha}_1+t_2\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\beta}_2=t_1\boldsymbol{\alpha}_2+t_2\boldsymbol{\alpha}_3$,$\cdots$,$\boldsymbol{\beta}_s=t_1\boldsymbol{\alpha}_s+t_2\boldsymbol{\alpha}_1$,其中 t_1,t_2 为实常数. 试问 t_1,t_2 满足什么关系时,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 也为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系?

P249,5 题

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

十、(本题满分 8 分)

已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 3 维向量 $\boldsymbol{x}$,使得向量组 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$ 线性无关,且满足 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{Ax}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$.

(1) 记 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{x},\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}]$,求 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$,使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}$;

(2) 计算行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$.

P271,12 题

十一、(本题满分 7 分)

设某班车起点站上客人数 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布,每位乘客在中途下车的概率为 $p(0<p<1)$,且中途下车与否相互独立. 以 Y 表示在中途下车的人数,求:

(1) 在发车时有 n 个乘客的条件下,中途有 m 人下车的概率;

(2) 二维随机变量 (X,Y) 的概率分布.

P301,5 题

十二、(本题满分 7 分)

设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$,从该总体中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_{2n}$ $(n\geqslant 2)$,其样本均值为 $\overline{X}=\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{2n}X_i$,求统计量 $Y=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2$ 的数学期望 $E(Y)$.

P323,1 题

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

2002年全国硕士研究生招生考试
数学(一)试题

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.)

(1) $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=$ _____. P117,30题

(2) 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定,则 $y''(0)=$ _____. P89,15题

(3) 微分方程 $yy''+y'^2=0$ 满足初始条件 $y\Big|_{x=0}=1, y'\Big|_{x=0}=\frac{1}{2}$ 的特解是_____. P207,28题

(4) 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 可化成标准形 $f=6y_1^2$,则 $a=$ _____. P283,5题

(5) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$,且二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为 $\frac{1}{2}$,则 $\mu=$ _____. P298,8题

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.)

(1) 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面4条性质:

①$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续;
②$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续;
③$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微;
④$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在.

若用"$P\Rightarrow Q$"表示可由性质 P 推出性质 Q,则有

(A) ②⇒③⇒①. (B) ③⇒②⇒①.
(C) ③⇒④⇒①. (D) ③⇒①⇒④. P131,16题

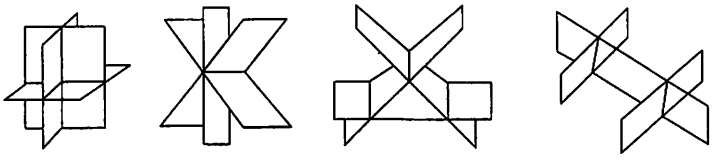
(2) 设 $u_n\neq 0(n=1,2,3,\cdots)$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$

(A) 发散. (B) 绝对收敛.
(C) 条件收敛. (D) 收敛性根据所给条件不能判定. P182,14题

(3) 设函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界且可导,则

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.
(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.
(C) 当 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$.
(D) 当 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$ 存在时,必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$. P102,48题

(4) 设有三个不同平面的方程 $a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=b_i, i=1,2,3$,它们所组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都为2,则这三个平面可能的位置关系为



(A) (B) (C) (D)

P254,13题

(5) 设 X_1 和 X_2 是任意两个相互独立的连续型随机变量,它们的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$,分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$,则

(A) $f_1(x)+f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

(B) $f_1(x)f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

(C) $F_1(x)+F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

(D) $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

P298,9题

三、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数,且 $f(0)\neq 0$, $f'(0)\neq 0$,若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to 0$ 时是比 h 高阶的无穷小,试确定 a,b 的值.

P86,8题

四、(本题满分 7 分)

已知两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x} e^{-t^2}dt$ 在点(0,0)处的切线相同,写出此切线方程,并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\frac{2}{n}\right)$.

P87,9题

微信公众号【顶尖考研】(ID: diky66)

五、(本题满分 7 分)

计算二重积分 $I=\iint_D e^{\max(x^2,y^2)}dxdy$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

P145,3题

六、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数,L 是上半平面($y>0$)内的有向分段光滑曲线,其起点为 (a,b),终点为 (c,d). 记 $I=\int_L \frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy$.

(1) 证明曲线积分 I 与路径 L 无关;

(2) 当 $ab=cd$ 时,求 I 的值.

P165,20题

七、(本题满分 7 分)

(1) 验证函数 $y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$ 满足微分方程 $y''+y'+y=e^x$;

(2) 利用(1)的结果求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

P189,28题

八、(本题满分 7 分)

设有一小山,取它的底面所在的平面为 xOy 坐标面,其底部所占的区域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2-xy\leqslant 75\}$,小山的高度函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$.

(1) 设 $M(x_0,y_0)$ 为区域 D 上一点,问 $h(x,y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大?若记此方向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$,试写出 $g(x_0,y_0)$ 的表达式.

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动,为此需要在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点.也就是说,要在 D 的边界线 $x^2+y^2-xy=75$ 上找出使(1)中的 $g(x,y)$ 达到最大值的点.试确定攀登起点的位置. P133,20 题

九、(本题满分 6 分)

已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为 4 维列向量,其中 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$,如果 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$,求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解. P254,14 题

十、(本题满分 8 分)

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵,

(1) 如果 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似,试证 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征多项式相等;

(2) 举一个 2 阶方阵的例子说明(1)的逆命题不成立;

(3) 当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为实对称矩阵时,试证(1)的逆命题成立. P272,13 题

微信公众号【数学考研】(ID: djky66)

十一、(本题满分 7 分)

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 对 X 独立地重复观察 4 次,用 Y 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数,求 Y^2 的数学期望. P317,13 题

十二、(本题满分 7 分)

设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $\theta\left(0<\theta<\frac{1}{2}\right)$ 是未知参数,利用总体 X 的样本值 3,1,3,0,3,1,2,3,求 θ 的矩估计值和最大似然估计值. P327,4 题

2003 年全国硕士研究生招生考试
数学(一) 试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$ _____. P76,16 题

(2) 曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $2x+4y-z=0$ 平行的切平面的方程是_____. P143,41 题

(3) 设 $x^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$,则 $a_2=$ _____. P196,42 题

(4) 从 $\mathbf{R}^2$ 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ 的过渡矩阵为_____. P246,18 题

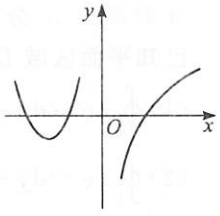
(5) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 则 $P\{X+Y\leqslant 1\}=$ _____. P301,6 题

(6) 已知一批零件的长度 X(单位:cm) 服从正态分布 $N(\mu,1)$,从中随机地抽取 16 个零件,得到长度的平均值为 40(cm),则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是_____.
(注:标准正态分布函数值 $\Phi(1.96)=0.975,\Phi(1.645)=0.95$.) P330,9 题

微信公众号【读尺考研】(ID: djky00)

二、选择题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.)

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,其导函数的图形如图所示,则 $f(x)$ 有



(A) 一个极小值点和两个极大值点.
(B) 两个极小值点和一个极大值点.
(C) 两个极小值点和两个极大值点.
(D) 三个极小值点和一个极大值点. P93,28 题

(2) 设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为非负数列,且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1,\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有
(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立.
(B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立.
(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在.
(D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在. P72,3 题

(3) 已知函数 $f(x,y)$ 在点(0,0) 的某个邻域内连续,且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$,则
(A) 点(0,0) 不是 $f(x,y)$ 的极值点.
(B) 点(0,0) 是 $f(x,y)$ 的极大值点.
(C) 点(0,0) 是 $f(x,y)$ 的极小值点.
(D) 根据所给条件无法判断点(0,0) 是否为 $f(x,y)$ 的极值点. P133,21 题

(4) 设向量组 Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 Ⅱ:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示,则
(A) 当 $r<s$ 时,向量组 Ⅱ 必线性相关.
(B) 当 $r>s$ 时,向量组 Ⅱ 必线性相关.
(C) 当 $r<s$ 时,向量组 Ⅰ 必线性相关.
(D) 当 $r>s$ 时,向量组 Ⅰ 必线性相关. P240,9 题

(5) 设有齐次线性方程组 $Ax=0$ 和 $Bx=0$,其中 A,B 均为 $m\times n$ 阶矩阵,现有 4 个命题:

① 若 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解,则秩$(A)\geqslant$秩(B);

② 若秩$(A)\geqslant$秩(B),则 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解;

③ 若 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解,则秩$(A)=$秩(B);

④ 若秩$(A)=$秩(B),则 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解.

以上命题中正确的是

(A)①②. (B)①③. (C)②④. (D)③④.

P259,19 题

(6) 设随机变量 $X\sim t(n)(n>1)$,$Y=\dfrac{1}{X^2}$,则

(A)$Y\sim\chi^2(n)$. (B)$Y\sim\chi^2(n-1)$. (C)$Y\sim F(n,1)$. (D)$Y\sim F(1,n)$.

P324,2 题

三、(本题满分 10 分)

过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线,该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

(1) 求 D 的面积 A;

(2) 求 D 绕直线 $x=e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V. P119,36 题

四、(本题满分 12 分)

将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数,并求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和. P189,29 题

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

五、(本题满分 10 分)

已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi\}$,$L$ 为 D 的正向边界. 试证:

(1) $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$;

(2) $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx\geqslant 2\pi^2$. P161,13 题

六、(本题满分 10 分)

某建筑工程打地基时,需用汽锤将桩打进土层. 汽锤每次击打,都将克服土层对桩的阻力而做功. 设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比(比例系数为 k,$k>0$),汽锤第一次击打将桩打进地下 a(m). 根据设计方案,要求汽锤每次击打桩时所做的功与前一次击打时所做的功之比为常数 $r(0<r<1)$. 问:

(1) 汽锤击打桩 3 次后,可将桩打进地下多深?

(2) 若击打次数不限,汽锤至多能将桩打进地下多深?(注:m 表示长度单位米.)

P120,37 题

七、(本题满分 12 分)

设函数 $y=y(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数,且 $y'\neq 0$,$x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数.

(1) 试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\dfrac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程;

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=\frac{3}{2}$ 的解. P208,29 题

八、(本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零,有

$$F(t)=\frac{\iiint_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v}{\iint_{D(t)} f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma},\quad G(t)=\frac{\iint_{D(t)} f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma}{\int_{-t}^{t} f(x^2)\mathrm{d}x}$$

其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant t^2\}, D(t)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant t^2\}$.

(1) 讨论 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性;

(2) 证明:当 $t>0$ 时,$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$. P151,14 题

九、(本题满分 10 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{bmatrix}, \boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}, \boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$,求 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值与特征向量,其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵. P265,6 题

十、(本题满分 8 分)

已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1: ax+2by+3c=0$$
$$l_2: bx+2cy+3a=0$$
$$l_3: cx+2ay+3b=0$$

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a+b+c=0$. P255,15 题

十一、(本题满分 10 分)

已知甲、乙两箱中装有同种产品,其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品,乙箱中仅装有 3 件合格品. 从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后,求:

(1) 乙箱中次品件数 X 的数学期望;

(2) 从乙箱中任取一件产品是次品的概率. P292,12 题

十二、(本题满分 8 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\leqslant\theta\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 是未知参数. 从总体 X 中抽取简单随机样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$,记 $\hat{\theta}=\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$.

(1) 求总体 X 的分布函数 $F(x)$;

(2) 求统计量 $\hat{\theta}$ 的分布函数 $F_{\hat{\theta}}(x)$;

(3) 如果用 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量,讨论它是否具有无偏性. P303,20 题

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

2004年全国硕士研究生招生考试
数学(一)试题

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.)

(1) 曲线 $y=\ln x$ 上与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程为_____. P90,18题

(2) 已知 $f'(e^x)=xe^{-x}$,且 $f(1)=0$,则 $f(x)=$_____. P105,4题

(3) 设 L 为正向圆周 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分,则曲线积分 $\int_L x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x$ 的值为_____. P162,14题

(4) 欧拉方程 $x^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+4x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=0(x>0)$ 的通解为_____. P209,30题

(5) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{ABA}^*=2\boldsymbol{BA}^*+\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,$\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵,则 $|\boldsymbol{B}|=$_____. P214,7题

(6) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布,则 $P\{X>\sqrt{D(X)}\}=$_____. P317,14题

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分.)

(7) 把 $x\to0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t$,$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\mathrm{d}t$,$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\mathrm{d}t$ 排列起来,使排在后面的是前一个的高阶无穷小,则正确的排列次序是

(A) α,β,γ. (B) α,γ,β. (C) β,α,γ. (D) β,γ,α. P82,28题

(8) 设函数 $f(x)$ 连续,且 $f'(0)>0$,则存在 $\delta>0$,使得

(A) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加. (B) $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少.

(C) 对任意的 $x\in(0,\delta)$,有 $f(x)>f(0)$. (D) 对任意的 $x\in(-\delta,0)$,有 $f(x)>f(0)$. P93,29题

(9) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数,下列结论中正确的是

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(B) 若存在非零常数 λ,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lambda$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

(C) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n=0$.

(D) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,则存在非零常数 λ,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lambda$. P182,15题

(10) 设 $f(x)$ 为连续函数,$F(t)=\int_1^t\mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$,则 $F'(2)$ 等于

(A) $2f(2)$. (B) $f(2)$. (C) $-f(2)$. (D) 0. P149,10题

(11) 设 A 是 3 阶方阵，将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B，再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C，则满足 $AQ=C$ 的可逆矩阵 Q 为

(A) $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

P219，6 题

(12) 设 A,B 为满足 $AB=O$ 的任意两个非零矩阵，则必有

(A) A 的列向量组线性相关，B 的行向量组线性相关.

(B) A 的列向量组线性相关，B 的列向量组线性相关.

(C) A 的行向量组线性相关，B 的行向量组线性相关.

(D) A 的行向量组线性相关，B 的列向量组线性相关.

P240，10 题

(13) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$，对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，数 u_α 满足 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$. 若 $P\{|X|<x\}=\alpha$，则 x 等于

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$. (B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$. (C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$. (D) $u_{1-\alpha}$.

P298，10 题

(14) 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$ 独立同分布，且其方差为 $\sigma^2>0$. 令 $Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则

(A) $\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\frac{\sigma^2}{n}$. (B) $\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\sigma^2$.

(C) $D(X_1+Y)=\frac{n+2}{n}\sigma^2$. (D) $D(X_1-Y)=\frac{n+1}{n}\sigma^2$.

P318，17 题

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

三、解答题（本题共 9 小题，满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

(15)（本题满分 12 分）

设 $e<a<b<e^2$，证明 $\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$.

P97，38 题

(16)（本题满分 11 分）

某种飞机在机场降落时，为了减少滑行距离，在触地的瞬间，飞机尾部张开减速伞，以增大阻力，使飞机迅速减速并停下.

现有一质量为 9000kg 的飞机，着陆时的水平速度为 700km/h. 经测试，减速伞打开后，飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比（比例系数为 $k=6.0\times10^6$ kg/h）. 问从着陆点算起，飞机滑行的最长距离是多少？（注：kg 表示千克，km/h 表示千米 / 时）

P201，11 题

(17)（本题满分 12 分）

计算曲面积分 $I=\iint_\Sigma 2x^3\,dydz+2y^3\,dzdx+3(z^2-1)\,dxdy$，其中 Σ 是曲面 $z=1-x^2-y^2$ $(z\geqslant0)$ 的上侧.

P174，36 题

(18)(本题满分 11 分)

设有方程 $x^n+nx-1=0$,其中 n 为正整数,证明此方程存在唯一正实根 x_n,并证明当 $\alpha>1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$ 收敛.

P183,16 题

(19)(本题满分 12 分)

设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数,求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值.

P134,22 题

(20)(本题满分 9 分)

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0,\\ 2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n=0,\\ \qquad\qquad\vdots\\ nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0,\end{cases}\quad(n\geqslant 2)$$

试问 a 取何值时,该方程组有非零解,并求出其通解.

P249,6 题

(21)(本题满分 9 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&a&5\end{bmatrix}$ 的特征方程有一个二重根,求 a 的值,并讨论 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

P272,14 题

(22)(本题满分 9 分)

设 A,B 为随机事件,且 $P(A)=\frac{1}{4},P(B\mid A)=\frac{1}{3},P(A\mid B)=\frac{1}{2}$,令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{ 发生},\\ 0, & A\text{ 不发生},\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{ 发生}\\ 0, & B\text{ 不发生}\end{cases}$$

求:(Ⅰ)二维随机变量 (X,Y) 的概率分布;

(Ⅱ)X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

P320,22 题

(23)(本题满分 9 分)

设总体 X 的分布函数为

$$F(x;\beta)=\begin{cases}1-\frac{1}{x^{\beta}}, & x>1\\ 0, & x\leqslant 1\end{cases}$$

其中未知参数 $\beta>1,X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

求:(Ⅰ)β 的矩估计量;

(Ⅱ)β 的最大似然估计量.

P327,5 题

2005年全国硕士研究生招生考试
数学(一)试题

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.)

(1) 曲线 $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为_____. P94,32题

(2) 微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$ 的解为_____. P202,12题

(3) 设函数 $u(x,y,z)=1+\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{18}$,单位向量 $\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$,则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(1,2,3)}=$_____. P140,34题

(4) 设 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 围成的空间区域,Σ 是 Ω 的整个边界的外侧,则 $\iint\limits_{\Sigma} x\,dydz+ydzdx+zdxdy=$_____. P175,37题

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为3维列向量,记矩阵

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)$$

如果 $|\boldsymbol{A}|=1$,那么 $|\boldsymbol{B}|=$_____. P214,8题

(6) 从数1,2,3,4中任取一个数,记为 X,再从1,…,X 中任取一个数,记为 Y,则 $P\{Y=2\}=$_____. P301,7题

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分.)

(7) 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内

(A) 处处可导. (B) 恰有一个不可导点.

(C) 恰有两个不可导点. (D) 至少有三个不可导点. P89,16题

(8) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数,"$M\Leftrightarrow N$" 表示"M 的充分必要条件是 N",则必有

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数. P113,25题

(9) 设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$,其中函数 φ 具有二阶导数,函数 ψ 具有一阶导数,则必有

(A) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. (B) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. (C) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. (D) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. P132,17题

(10) 设有三元方程 $xy-z\ln y+e^{xz}=1$,根据隐函数存在定理,存在点(0,1,1)的一个邻域,在此邻域内该方程

(A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z=z(x,y)$.

(B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y=y(x,z)$ 和 $z=z(x,y)$.

(C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $z=z(x,y)$.

(D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$. P132,18题

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

(11) 设 λ_1,λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值,对应的特征向量分别为 α_1,α_2,则 $\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件是

(A)$\lambda_1\neq 0$. (B)$\lambda_2\neq 0$. (C)$\lambda_1=0$. (D)$\lambda_2=0$.

P240,11 题

(12) 设 A 为 $n(n\geqslant 2)$ 阶可逆矩阵,交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B,A^* 与 B^* 分别为 A,B 的伴随矩阵,则

(A) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 B^*.

(B) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 B^*.

(C) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 $-B^*$.

(D) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 $-B^*$.

P220,7 题

(13) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立,则

(A)$a=0.2,b=0.3$. (B)$a=0.4,b=0.1$.

(C)$a=0.3,b=0.2$. (D)$a=0.1,b=0.4$.

P302,8 题

(14) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本,$\overline{X}$ 为样本均值,S^2 为样本方差,则

(A)$n\overline{X}\sim N(0,1)$. (B)$nS^2\sim\chi^2(n)$.

(C) $\dfrac{(n-1)\overline{X}}{S}\sim t(n-1)$. (D) $\dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n}X_i^2}\sim F(1,n-1)$.

P324,3 题

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 11 分)

设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant\sqrt{2},x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$,$[1+x^2+y^2]$ 表示不超过 $1+x^2+y^2$ 的最大整数,计算二重积分 $\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

P147,6 题

(16) (本题满分 12 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[1+\dfrac{1}{n(2n-1)}\right]x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $f(x)$.

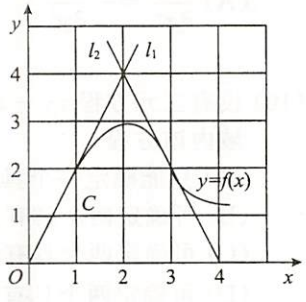
P190,30 题

(17) (本题满分 11 分)

如图所示,曲线 C 的方程为 $y=f(x)$,点(3,2)是它的一个拐点,直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点(0,0)与(3,2)处的切线,其交点为(2,4). 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数,计算定积分

$\int_0^3(x^2+x)f'''(x)\mathrm{d}x$.

P109,13 题



(18)(本题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且 $f(0)=0$,$f(1)=1$. 证明:

(Ⅰ)存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f(\xi)=1-\xi$;

(Ⅱ)存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$,使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

P102,49 题

(19)(本题满分 12 分)

设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数,在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上,曲线积分 $\oint_L \dfrac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$ 的值恒为同一常数.

(Ⅰ)证明:对右半平面 $x>0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C,有 $\oint_C \dfrac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=0$;

(Ⅱ)求函数 $\varphi(y)$ 的表达式.

P166,21 题

(20)(本题满分 9 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$,把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化成标准形;

(Ⅲ)求方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

P283,6 题

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(21)(本题满分 9 分)

已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行是(a,b,c),a,b,c 不全为零,矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{bmatrix}$($k$ 为常数),且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

P250,7 题

(22)(本题满分 9 分)

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求:(Ⅰ)(X,Y) 的边缘概率密度 $f_X(x)$,$f_Y(y)$;

(Ⅱ)$Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

P307,16 题

(23)(本题满分 9 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本,$\overline{X}$ 为样本均值,记 $Y_i=X_i-\overline{X}(i=1,2,\cdots,n)$.

求:(Ⅰ)Y_i 的方差 $D(Y_i)(i=1,2,\cdots,n)$;

(Ⅱ)Y_1 与 Y_n 的协方差 $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)$.

P318,18 题

2006年全国硕士研究生招生考试
数学(一)试题

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$ _____. P76,17题

(2) 微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解是_____. P202,13题

(3) 设 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的下侧,则 $\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ _____. P175,38题

(4) 点(2,1,0)到平面 $3x+4y+5z=0$ 的距离 $d=$ _____. P124,10题

(5) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{E}$ 为二阶单位矩阵,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$,则 $|\boldsymbol{B}|=$ _____. P214,9题

(6) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且均服从区间[0,3]上的均匀分布,则 $P\{\max\{X,Y\}\leqslant 1\}=$ _____. P303,9题

微信公众号【顶尖考研】
ID: djky66

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分.)

(7) 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数,且 $f'(x)>0$,$f''(x)>0$,Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量,Δy 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分,若 $\Delta x>0$,则

(A) $0<\mathrm{d}y<\Delta y$.　(B) $0<\Delta y<\mathrm{d}y$.

(C) $\Delta y<\mathrm{d}y<0$.　(D) $\mathrm{d}y<\Delta y<0$. P95,33题

(8) 设 $f(x,y)$ 为连续函数,则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ 等于

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.　(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.　(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$. P149,11题

(9) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则级数

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛.　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$ 收敛.　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛. P183,17题

(10) 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数,且 $\varphi'_y(x,y)\neq 0$. 已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点,下列选项正确的是

(A) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$,则 $f'_y(x_0,y_0)=0$.

(B) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$,则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

(C) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$,则 $f'_y(x_0,y_0)=0$.

(D) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$,则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$. P135,23题

(11) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 维列向量，$\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，下列选项正确的是

(A) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关.

(B) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关.

(C) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关.

(D) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关. P241,12 题

(12) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行加到第 1 行得 $\boldsymbol{B}$，再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 $\boldsymbol{C}$，记 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则

(A)$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$. (B)$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{-1}$. (C)$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$. (D)$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}$.

P220,8 题

(13) 设 A,B 为随机事件，且 $P(B)>0,P(A\mid B)=1$，则必有

(A)$P(A\cup B)>P(A)$. (B)$P(A\cup B)>P(B)$.

(C)$P(A\cup B)=P(A)$. (D)$P(A\cup B)=P(B)$. P293,13 题

(14) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且

$$P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\},$$

则必有

(A)$\sigma_1<\sigma_2$. (B)$\sigma_1>\sigma_2$. (C)$\mu_1<\mu_2$. (D)$\mu_1>\mu_2$.

P298,11 题

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

三、解答题（本题共 9 小题，满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

(15)（本题满分 10 分）

设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0\}$，计算二重积分 $I=\iint\limits_D\frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

P146,5 题

(16)（本题满分 12 分）

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi,x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$.

（Ⅰ）证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求该极限；

（Ⅱ）计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$. P78,21 题

(17)（本题满分 12 分）

将函数 $f(x)=\frac{x}{2+x-x^2}$ 展开成 x 的幂级数. P192,34 题

(18)（本题满分 12 分）

设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

(Ⅰ)验证 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$;

(Ⅱ)若 $f(1)=0$,$f'(1)=1$,求函数 $f(u)$ 的表达式. P137,27 题

(19)(本题满分 12 分)

设在上半平面 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$ 内,函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数,且对任意的 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$. 证明:对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L,都有

$$\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x-xf(x,y)\mathrm{d}y=0.$$ P166,22 题

(20)(本题满分 9 分)

已知非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1,\\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1,\\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1\end{cases}$ 有 3 个线性无关的解.

(Ⅰ)证明方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=2$;

(Ⅱ)求 a,b 的值及方程组的通解. P256,16 题

(21)(本题满分 9 分)

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3,向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个解.

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量;

(Ⅱ)求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$. P275,16 题

(22)(本题满分 9 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -1<x<0,\\ \dfrac{1}{4}, & 0\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

令 $Y=X^2$,$F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数. 求:

(Ⅰ)Y 的概率密度 $f_Y(y)$;

(Ⅱ)$F\left(-\dfrac{1}{2},4\right)$. P308,17 题

(23)(本题满分 9 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1,\\ 1-\theta, & 1\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 其中 θ 是未知参数 $(0<\theta<1)$,X_1,X_2,…,X_n 为来自总体 X 的简单随机样本,记 N 为样本值 x_1,x_2,…,x_n 中小于 1 的个数,求 θ 的最大似然估计. P328,6 题

2007年全国硕士研究生招生考试
数学(一)试题

一、选择题(本题共10小题,每小题4分,满分40分.)

(1) 当 $x \to 0^+$ 时,与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$.　　(B) $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$.

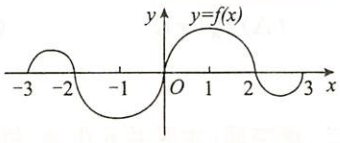
(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$.　　(D) $1-\cos\sqrt{x}$.　　P82,29题

(2) 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 渐近线的条数为

(A)0.　　(B)1.

(C)2.　　(D)3.　　P96,35题

(3) 如图所示,连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2]$,$[2,3]$ 上的图形分别是直径为1的上、下半圆周,在区间 $[-2,0]$,$[0,2]$ 上的图形分别是直径为2的下、上半圆周. 设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,则下列结论正确的是



(A) $F(3)=-\dfrac{3}{4}F(-2)$.　　(B) $F(3)=\dfrac{5}{4}F(2)$.

(C) $F(-3)=\dfrac{3}{4}F(2)$.　　(D) $F(-3)=-\dfrac{5}{4}F(-2)$.　　P107,8题

微信公众号【顶尖考研】(ID: diky66)

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,下列命题错误的是

(A) 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f(0)=0$.

(B) 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在,则 $f(0)=0$.

(C) 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在.

(D) 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在.　　P87,10题

(5) 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶导数,且 $f''(x)>0$,令 $u_n=f(n)(n=1,2,\cdots)$,则下列结论正确的是

(A) 若 $u_1>u_2$,则 $\{u_n\}$ 必收敛.　　(B) 若 $u_1>u_2$,则 $\{u_n\}$ 必发散.

(C) 若 $u_1<u_2$,则 $\{u_n\}$ 必收敛.　　(D) 若 $u_1<u_2$,则 $\{u_n\}$ 必发散.

P95,34题

(6) 设曲线 $L:f(x,y)=1$($f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数)过第Ⅱ象限内的点 M 和第Ⅳ象限内的点 N,Γ 为 L 上从点 M 到点 N 的一段弧,则下列积分小于零的是

(A) $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(B) $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}y$.

(C) $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}s$.　　(D) $\int_\Gamma f'_x(x,y)\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\mathrm{d}y$.

P162,15题

(7) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,则下列向量组线性相关的是

(A) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$.　(B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$.

(C) $\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$.　(D) $\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$.

P241,13 题

(8) 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,则 A 与 B

(A) 合同,且相似.　(B) 合同,但不相似.

(C) 不合同,但相似.　(D) 既不合同,也不相似.　P287,11 题

(9) 某人向同一目标独立重复射击,每次射击命中目标的概率为 $p(0<p<1)$,则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为

(A) $3p(1-p)^2$.　(B) $6p(1-p)^2$.　(C) $3p^2(1-p)^2$.　(D) $6p^2(1-p)^2$.

P294,19 题

(10) 设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布,且 X 与 Y 不相关,$f_X(x)$,$f_Y(y)$ 分别表示 X,Y 的概率密度,则在 $Y=y$ 的条件下,X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x\mid y)$ 为

(A) $f_X(x)$.　(B) $f_Y(y)$.　(C) $f_X(x)f_Y(y)$.　(D) $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$.

P303,10 题

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.)

(11) $\int_1^2 \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}dx=$ _____.　P110,14 题

(12) 设 $f(u,v)$ 为二元可微函数,$z=f(x^y,y^x)$,则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ _____.　P132,19 题

(13) 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''-4y'+3y=2e^{2x}$ 的通解为 $y=$ _____.

P209,31 题

(14) 设曲面 $\Sigma:|x|+|y|+|z|=1$,则 $\oint\limits_{\Sigma}(x+|y|)dS=$ _____.　P168,26 题

(15) 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$,则 A^3 的秩为_____.　P228,19 题

(16) 在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数,则这两个数之差的绝对值小于 $\dfrac{1}{2}$ 的概率为_____.

P295,20 题

三、解答题(本题共 8 小题,满分 86 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(17) (本题满分 11 分)

求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4,y\geqslant 0\}$ 上的最大值和最小值.

P135,24 题

(18) (本题满分 10 分)

计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}xz\,dydz+2zy\,dzdx+3xy\,dxdy$,其中 Σ 为曲面 $z=1-x^2-\dfrac{y^2}{4}(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的上侧.

P175,39 题

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

(19)（本题满分 11 分）

设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值，$f(a)=g(a),f(b)=g(b)$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

P103,50 题

(20)（本题满分 10 分）

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛，其和函数 $y(x)$ 满足

$$y''-2xy'-4y=0,y(0)=0,y'(0)=1.$$

（Ⅰ）证明 $a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n(n=1,2,\cdots)$；

（Ⅱ）求 $y(x)$ 的表达式.

P191,31 题

(21)（本题满分 11 分）

设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}\quad①$$

与方程

$$x_1+2x_2+x_3=a-1\quad②$$

有公共解，求 a 的值及所有公共解.

P260,20 题

(22)（本题满分 11 分）

设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1 的一个特征向量，记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

（Ⅰ）验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量，并求 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值与特征向量；

（Ⅱ）求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

P276,17 题

(23)（本题满分 11 分）

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,0<y<1,\\0, & \text{其他.}\end{cases}$$

（Ⅰ）求 $P\{X>2Y\}$；

（Ⅱ）求 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

P309,18 题

(24)（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta}, & 0<x<\theta,\\\dfrac{1}{2(1-\theta)}, & \theta\leqslant x<1,\\0, & \text{其他,}\end{cases}$$

其中参数 $\theta(0<\theta<1)$ 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，$\overline{X}$ 是样本均值.

（Ⅰ）求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$；

（Ⅱ）判断 $4\overline{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量，并说明理由.

P328,7 题

2008年全国硕士研究生招生考试
数学(一)试题

一、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分.)

(1) 设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)\mathrm{d}t$,则 $f'(x)$ 的零点个数为

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3. P114,26题

(2) 函数 $f(x,y)=\arctan\frac{x}{y}$ 在点(0,1)处的梯度等于

(A)i. (B)$-i$. (C)j. (D)$-j$.

P141,35题

(3) 在下列微分方程中,以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$($C_1,C_2,C_3$ 为任意常数)为通解的是

(A)$y'''+y''-4y'-4y=0$. (B)$y'''+y''+4y'+4y=0$.

(C)$y'''-y''-4y'+4y=0$. (D)$y'''-y''+4y'-4y=0$. P209,32题

(4) 设函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内单调有界,$\{x_n\}$ 为数列,下列命题正确的是

(A) 若$\{x_n\}$收敛,则$\{f(x_n)\}$收敛. (B) 若$\{x_n\}$单调,则$\{f(x_n)\}$收敛.

(C) 若$\{f(x_n)\}$收敛,则$\{x_n\}$收敛. (D) 若$\{f(x_n)\}$单调,则$\{x_n\}$收敛.

P73,4题

微信公众号【顶尖考研】(id:djky66)

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$,则

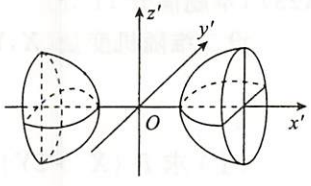
(A)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆. (B)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.

(C)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆. (D)$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆. P224,14题

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶实对称矩阵,如果二次曲面方程

$$(x,y,z)\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=1$$

在正交变换下的标准方程的图形如图所示,



则 $\boldsymbol{A}$ 的正特征值的个数为

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3. P284,7题

(7) 设随机变量 X,Y 独立同分布,且 X 的分布函数为 $F(x)$,则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为

(A)$F^2(x)$. (B)$F(x)F(y)$.

(C)$1-[1-F(x)]^2$. (D)$[1-F(x)][1-F(y)]$. P304,11题

(8) 设随机变量 $X\sim N(0,1)$,$Y\sim N(1,4)$,且相关系数 $\rho_{XY}=1$,则

(A)$P\{Y=-2X-1\}=1$. (B)$P\{Y=2X-1\}=1$.

(C)$P\{Y=-2X+1\}=1$. (D)$P\{Y=2X+1\}=1$. P321,23题

二、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.)

(9) 微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解是 $y=$_____. P202,14题

(10) 曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点(0,1)处的切线方程是_____. P90,19题

(11) 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛，在 $x=-4$ 处发散，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$ 的收敛域为_____.

P185,22 题

(12) 设曲面 Σ 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧，则 $\iint_{\Sigma} xy\,dydz+xdzdx+x^2dxdy=$ _____.

P176,40 题

(13) 设 A 为 2 阶矩阵，α_1,α_2 为线性无关的 2 维列向量，$A\alpha_1=0$，$A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$. 则 A 的非零特征值为_____.

P266,7 题

(14) 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\{X=E(X^2)\}=$ _____.

P317,15 题

三、解答题（本题共 9 小题，满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

(15) (本题满分 9 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

P76,18 题

(16) (本题满分 9 分)

计算曲线积分 $\int_L \sin 2x dx+2(x^2-1)ydy$，其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(\pi,0)$ 的一段.

P163,16 题

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(17) (本题满分 11 分)

已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0\\ x+y+3z=5\end{cases}$，求 C 上距离 xOy 面最远的点和最近的点.

P136,25 题

(18) (本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是连续函数，

(Ⅰ) 利用定义证明函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 可导，且 $F'(x)=f(x)$；

(Ⅱ) 当 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数时，证明函数 $G(x)=2\int_0^x f(t)dt-x\int_0^2 f(t)dt$ 也是以 2 为周期的周期函数.

P114,27 题

(19) (本题满分 11 分)

将函数 $f(x)=1-x^2(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成余弦级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

P196,43 题

(20)(本题满分 10 分)

设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 3 维列向量,矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 分别是 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的转置. 证明:

(Ⅰ)秩 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$;

(Ⅱ)若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关,则秩 $r(\boldsymbol{A})<2$.

P228,20 题

(21)(本题满分 12 分)

设 n 元线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{bmatrix}_{n\times n},\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(Ⅰ)证明行列式 $|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$;

(Ⅱ)当 a 为何值时,该方程组有唯一解,并求 x_1;

(Ⅲ)当 a 为何值时,该方程组有无穷多解,并求通解.

P257,17 题

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立,X 的概率分布为 $P\{X=i\}=\frac{1}{3}(i=-1,0,1)$,$Y$ 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$,记 $Z=X+Y$.

(Ⅰ)求 $P\left\{Z\leqslant\frac{1}{2}\mid X=0\right\}$;

(Ⅱ)求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$.

P310,19 题

(23)(本题满分 11 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本. 记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2.$$

(Ⅰ)证明 T 是 μ^2 的无偏估计量;

(Ⅱ)当 $\mu=0,\sigma=1$ 时,求 $D(T)$.

P331,11 题

第二篇

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

真题解析

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

第一部分　高等数学

第一章　函数、极限、连续

本章导读

函数是微积分的研究对象，极限是建立微积分理论和方法的基础，连续性是函数的基本性质，是函数可导和可积的基本条件，连续函数是微积分所讨论的函数的主要类型. 因此，函数、极限与函数连续性是本章的主要内容，也是微积分的理论基础.

其主要内容有：

(1) 函数的概念，基本性质及复合函数；

(2) 极限的概念，性质，存在准则及求极限的方法；无穷小量的概念、性质及阶的比较；

(3) 连续的概念，间断点及其分类，连续函数的性质(运算性质及有限闭区间上连续函数性质).

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

试题特点

本章是微积分的基础，每年必考. 而本章的特点是基本概念和基本理论非常多，许多考题重点考查这些基本概念和基本理论，从往年试卷分析情况来看，失分率比较高，因此，望考生重视基本概念和基本理论的复习.

本章常考题型

(1) 求极限；

(2) 无穷小量及其比较；

(3) 求间断点及判别间断点类型.

无穷小量比较实际上就是研究“$\frac{0}{0}$”型极限，而间断点类型判定的关键也是求极限，所以，本章常考的三种题型的核心都是求极限. 重点是求极限的常用方法(如有理运算，基本极限，等价无穷小代换、洛必达法则等).

考题详析

一、复合函数及函数的几种特性

1 (1988,一(2)题,5分)已知 $f(x)=e^{x^2}$,$f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$,求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

【解】 由 $f(x)=e^{x^2}$,$f[\varphi(x)]=1-x$,$\varphi(x)\geqslant 0$ 可知

$$e^{\varphi^2(x)}=1-x\geqslant 1$$

且 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}\quad(x\leqslant 0)$.

2 (1990,一(3)题,3分)设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$,则 $f[f(x)]=$ _____.

【答案】 1.

【解析】 $f[f(x)]=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f[f(x)]\equiv 1$.

二、极限的概念、性质及存在准则

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

3 (2003,二(2)题,4分)设 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$ 均为非负数列,且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立.　　(B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在.　　(D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.

【答案】 D.

【解析】 (方法一)　直接法

若极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 存在,设其为 A,则

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b_nc_n}{b_n}=\frac{A}{1}=A$$

这与 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$ 矛盾.故极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.

或由于 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n=\infty$.

(方法二)　排除法

(A) 的反例,设 $a_n=\dfrac{100}{n}$,$b_n=\dfrac{n}{n+1}$,当 $n=1$ 时 $a_1=100>b_1=\dfrac{1}{2}$.

(B) 的反例,设 $b_n=\dfrac{n+100}{n}$,$c_n=n$,当 $n=1$ 时 $b_1=101>c_1=1$.

(C) 的反例,设 $a_n=\dfrac{1}{n^2}$,$c_n=n$,$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

故应选(D).

4 (2008,4题,4分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界,$\{x_n\}$ 为数列,下列命题正确的是

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.　(B) 若 $\{x_n\}$ 单调,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 收敛.　(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调,则 $\{x_n\}$ 收敛.

【答案】 B.

【解析】 (方法一) 由于 $\{x_n\}$ 单调,$f(x)$ 单调有界,则数列 $\{f(x_n)\}$ 单调有界.由单调有界准则知数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛,故应选(B).

(方法二) 排除法:若取 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 和 $x_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$,则显然 $f(x)$ 单调,$\{x_n\}$ 收敛,但 $f(x_n)=\begin{cases}1, & n\text{ 为偶数},\\ -1, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}$ 显然 $\{f(x_n)\}$ 不收敛,这样就排除了(A).

若取 $f(x)=\arctan x$,$x_n=n$,则 $f(x_n)=\arctan n$,显然 $\{f(x_n)\}$ 收敛且单调,但 $\{x_n\}$ 不收敛,这样就排除了(C)和(D),故应选(B).

【评注】 本题主要考查数列收敛的单调有界准则,是一道基本题,但本题是当年考卷中四个高等数学选择题中考生做得最差的一个,难度系数为 0.456.

考研试卷中的选择题都是单项选择题,有并且只有一个选项正确.常用方法有两种,一种是直接法,即从题设条件出发经过推理或者演算直接说明某个选项正确;另一种方法是排除法,即说明有3个选项是错误的,则剩余一个选项必正确.排除法一般用在题目中出现一般函数(或抽象函数)$f(x)$.利用排除法就是选一个符合题目条件的具体函数,利用它说明有3个选项不正确,剩余一个正确.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

三、求函数的极限

5 (1990,一(2)题,3分) 设 a 为非零常数,则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=$ _____.

【答案】 e^{2a}.

【解析】 这是一个"1^∞"型极限.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^x$$

又 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2ax}{x-a}=2a$,则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=e^{2a}$.

6 (1991,三(1)题,5分) 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$.

【解】 由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}[1+(\cos\sqrt{x}-1)]^{\frac{\pi}{x}}$.

又 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\pi(\cos\sqrt{x}-1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\pi\left(-\frac{1}{2}x\right)}{x}=-\dfrac{\pi}{2}$,

则 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}=e^{-\frac{\pi}{2}}$.

7 (1992,二(1)题,3分) 当 $x\to 1$ 时,函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限

(A) 等于 2.　(B) 等于 0.　(C) 为 ∞.　(D) 不存在但不为 ∞.

【答案】 D.

【解析】 $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to1^-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=0$

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=\infty$

故当 $x\to1$ 时，函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限不存在但也不为 ∞，故应选(D).

8 (1992，三(1)题，5分) 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$.

【解】 当 $x\to0$ 时，$1-\sqrt{1-x^2}\sim\dfrac{1}{2}x^2$，则

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-\sin x-1}{\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-\cos x}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x+\sin x}{1}=1$$

9 (1993，三(1)题，5分) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

【解】 本题是一个“1^∞”型极限.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[1+\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)\right]^x$$

又 $$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)\cdot x=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}+\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}+\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2}{\frac{1}{x}}$$

$$=2+0=2$$

则原式 $=e^2$.

10 (1994，一(1)题，3分) $\lim\limits_{x\to0}\operatorname{cot}x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$ _____.

【答案】 $\dfrac{1}{6}$.

【解析】 $\lim\limits_{x\to0}\operatorname{cot}x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x(x-\sin x)}{x\sin^2x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

11 (1995，一(1)题，3分) $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$ _____.

【答案】 e^6.

【解析】 由于 $\lim\limits_{x\to0}(3x)\cdot\dfrac{2}{\sin x}=6\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}=6$，则原式 $=e^6$.

12 (1997，一(1)题，3分) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$ _____.

【答案】 $\dfrac{3}{2}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【解析】（方法一）　原式$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}$

$=\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to0}x\cos\dfrac{1}{x}\right)$

$=\frac{3}{2}$.

（方法二）　原式$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x}{x}$　（忽略掉分子上高阶无穷小）

$=\frac{3}{2}$.

【评注】　本题不能用洛必达法则.

13 (1998,一(1)题,3分) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$_____.

【答案】　$-\frac{1}{4}$.

【解析】（方法一）　分子有理化

原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}$

$=\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2(\sqrt{1-x^2}-1)}{x^2}$

$=\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{x^2}=-\frac{1}{4}$.

微信公众号【顶尖考研】
ID:djky66)

（方法二）　洛必达法则

原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}=\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x\sqrt{1-x^2}}$

$=\frac{1}{4}\left(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}\right)$

$=\frac{1}{4}\left[\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{2}x}{x}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x}{x}\right]=-\frac{1}{4}$.

（方法三）　泰勒公式

原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left[1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2+o_1(x^2)\right]+\left[1-\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2+o_2(x^2)\right]-2}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{4}x^2+o(x^2)}{x^2}=-\frac{1}{4}$.

14 (1999,一(1)题,3分) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)=$_____.

【答案】　$\frac{1}{3}$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【解析】　原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{3}x^3}{x^3}=\frac{1}{3}$.

15 (2000,三题,5分) 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

【解】 因为

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1$$

故原式 $=1$.

16 (2003,一(1)题,4分) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$_____.

【答案】 $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

【解析】 $$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=\lim_{x\to 0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$$

又 $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

则$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

17 (2006,1题,4分) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$_____.

【答案】 2.

【解析】 本题是求$\dfrac{0}{0}$型极限.用等价无穷小代换很方便.

当$x\to 0$时,$\ln(1+x)\sim x$,$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$,则

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【评注】 本题是一个$\dfrac{0}{0}$型极限,主要是利用等价无穷小代换求解.

常用的等价无穷小:当$x\to 0$时

$$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\ln(1+x)\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim e^x-1$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2;(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x;a^x-1\sim x\ln a(a>0,a\neq 1)$$

还有若$\alpha(x)\to 0$,则

$$\alpha(x)+o(\alpha(x))\sim\alpha(x)$$

注意:在乘除法中可用等价无穷小代换,而在加减法中不要用等价无穷小代换.

18 (2008,15题,9分) 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

【解】 (方法一) $$\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]x}{x^4}$$ (等价代换)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)\cdot\cos x}{3x^2}$$ (洛必达法则)

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{x^2}$$ (极限为非零常数因子极限先求)

$$= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin^2 x}{x^2} \quad \text{（等价无穷小代换）}$$

$$= \frac{1}{6}.$$

（方法二）
$$\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{\sin^4 x} \quad \text{（等价无穷小代换）}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t}{t^3} \quad \text{（变量代换 } \sin x = t\text{）}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{3t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}t^2}{3t^2} = \frac{1}{6}.$$

（方法三）
$$\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$$

由泰勒公式 $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$ 知

$$\sin(\sin x) = \sin x-\frac{\sin^3 x}{3!}+o(\sin^3 x)$$

则
$$\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\left[\sin x-\frac{1}{6}\sin^3 x+o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}\sin^3 x+o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

（方法四）
$$\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos\xi\cdot(x-\sin x)}{x^3} \quad \text{（}\xi\text{ 在 } x \text{ 和 } \sin x \text{ 之间）（拉格朗日中值定理）}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \frac{1}{6}.$$

（方法五）　由于当 $x\to 0$ 时，$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$，则 $\sin x-\sin(\sin x)\sim\frac{1}{6}\sin^3 x$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}\sin^3 x\cdot\sin x}{x^4} = \frac{1}{6}.$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【评注】 ① 本题是一个“$\frac{0}{0}$”型极限，方法一主要是用洛必达法则和等价无穷小代换；方法二主要是利用变量代换和等价无穷小代换；方法三主要是利用泰勒公式；方法四主要是利用拉格朗日中值定理. 方法五最简单.

② 考卷中出现一些典型错误，例如

$$\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin^2 x}{x^4}-\frac{\sin(\sin x)\sin x}{x^4}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\sin x}{x^3}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

这说明考生对极限的最基本的运算法则和等价无穷小代换的基本原则掌握不够.

四、求数列的极限

19 (1996,三(2)题,5分) 设 $x_1=10, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}(n=1,2,\cdots)$,试证数列$\{x_n\}$极限存在,并求此极限.

【证明】 由 $x_1=10, x_2=\sqrt{6+x_1}=\sqrt{16}$ 知 $x_1>x_2$,设对正整数 k 有 $x_k>x_{k+1}$,则有

$$x_{k+1}=\sqrt{6+x_k}>\sqrt{6+x_{k+1}}=x_{k+2},$$

故由归纳法知,对一切正整数 n,都有 $x_n>x_{n+1}$,即$\{x_n\}$为单调递减数列.

由 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$,显见 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$,即$\{x_n\}$下有界,则极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在. 令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,对 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ 两边取极限得 $a=\sqrt{6+a}$,从而 $a^2-a-6=0, a=3$ 或 $a=-2$.

因为 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$,所以 $a\geqslant 0$,舍去 $a=-2$,故得极限值 $a=3$.

20 (1998,七题,6分) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

【解】 $\dfrac{1}{n+1}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{n\pi}{n}\right)\leqslant\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\leqslant$

$\dfrac{1}{n+\frac{1}{n}}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{n\pi}{n}\right)\leqslant\dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{n\pi}{n}\right)$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

又$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{n\pi}{n}\right)=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{n\pi}{n}\right)=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}$

则原式 $=\dfrac{2}{\pi}$.

21 (2006,16题,12分) 设数列$\{x_n\}$满足

$$0<x_1<\pi, x_{n+1}=\sin x_n\quad(n=1,2,\cdots)$$

(Ⅰ) 证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,并求该极限;

(Ⅱ) 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

【分析】 由于数列是由递推关系给出的,通常用单调有界准则证明极限存在,并求出极限. 由于(Ⅱ)中的极限是一个"1^∞"型,可将其化为函数的极限,再利用重要极限或取对数的方法便可求出此极限.

(Ⅰ)【证明】 用归纳法证明$\{x_n\}$单调递减且下有界.

由于 $\sin x<x, x\in(0,\pi)$,则由 $0<x_1<\pi$,知 $0<x_2=\sin x_1<x_1<\pi$,

设 $0<x_n<\pi$,则 $0<x_{n+1}=\sin x_n<x_n<\pi$.

所以,$\{x_n\}$单调递减且下有界,故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,

设 $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$,由 $x_{n+1}=\sin x_n$ 知 $a=\sin a$ 所以,$a=0$,即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

（Ⅱ）【解】（方法一）　由于$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$，

所以，考虑函数极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}}$，又

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}\quad\text{（等价无穷小代换）}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}$$

则$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$，故$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$.

（方法二）　由于$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$为“$1^\infty$”型极限，且

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

而$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^3}=-\frac{1}{6}$　（等价无穷小代换），

则$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$，故$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$.

【评注】　本题是一道综合题，主要考查数列极限存在的单调有界准则，数列极限转化为函数极限，“1^∞”型极限的求法——基本极限、洛必达法则等. 考生的典型错误是不将原题中数列极限转化为函数极限，直接对数列极限用洛必达法则.

微信公众号【研生考研】(ID: djky66)

五、确定极限中的参数

22（1987，二题，8分）求正的常数a与b，使等式$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}\mathrm{d}t=1$成立.

【解】　由洛必达法则可知

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}\mathrm{d}t=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}}{b-\cos x}$$

若$b\neq1$，则$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}\mathrm{d}t=0$，与题设矛盾，故$b=1$，此时

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{a}}\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=\frac{2}{\sqrt{a}}=1$$

则$a=4$.

【评注】　这种已知极限确定参数的问题的基本方法是求等式的左端极限，在这个过程中确定参数.

23 (1994,二(4)题,3分) 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-\mathrm{e}^{-x^2})}=2$,其中$a^2+c^2\neq 0$,则必有

(A)$b=4d$. (B)$b=-4d$. (C)$a=4c$. (D)$a=-4c$.

【答案】 D.

【解析】 (方法一) 由于$a^2+c^2\neq 0$,则

$$2=\lim_{x\to 0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-\mathrm{e}^{-x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{a\tan x}{x}+\dfrac{b(1-\cos x)}{x}}{\dfrac{c\ln(1-2x)}{x}+\dfrac{d(1-\mathrm{e}^{-x^2})}{x}}=\frac{a+0}{-2c+0}=-\frac{a}{2c}$$

则$a=-4c$,故选(D).

(方法二) 当$x\to 0$时,$1-\cos x$是$\tan x$的高阶无穷小;$1-\mathrm{e}^{-x^2}$是$\ln(1-2x)$的高阶无穷小,则

$$\lim_{x\to 0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-\mathrm{e}^{-x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{a\tan x}{c\ln(1-2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{-2cx}=\frac{a}{-2c}=2$$

则$a=-4c$.

【评注】 方法二中用到一个结论:两个无穷小量相加减,求极限时可舍去高阶无穷小项.

微信公众号【西尖考研】(ID: djky66)

24 (1996,一(1)题,3分) 设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$,则$a=$_____.

【答案】 $\ln 2$.

【解析】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3a}{x-a}\right)^x$.

又$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3a}{x-a}\cdot x=3a$,则$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=\mathrm{e}^{3a}=8$,

故$a=\ln 2$.

六、无穷小量及其阶的比较

25 (1991,一(4)题,3分) 已知当$x\to 0$时,$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$与$\cos x-1$是等价无穷小,则常数$a=$_____.

【答案】 $-\dfrac{3}{2}$.

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}ax^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\dfrac{2}{3}a=1$

则$a=-\dfrac{3}{2}$.

26 (1993,二(1)题,3分) 设$f(x)=\int_0^{\sin x}\sin(t^2)\mathrm{d}t$,$g(x)=x^3+x^4$,则当$x\to 0$时,$f(x)$是$g(x)$的

(A) 等价无穷小.　　(B) 同阶但非等价的无穷小.

(C) 高阶无穷小.　　(D) 低阶无穷小.

【答案】 B.

【解析】 (方法一)　由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\sin(t^2)\,dt}{x^3+x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin^2 x)\cos x}{3x^2+4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2+4x^3}\quad(\text{等价代换})$$

$$=\frac{1}{3}$$

所以,当 $x\to 0$ 时,$f(x)$ 是 $g(x)$ 的同阶但非等价无穷小.

(方法二)　当 $x\to 0$ 时,

$$f(x)=\int_0^{\sin x}\sin(t^2)\,dt\sim\int_0^{\sin x}t^2\,dt=\frac{\sin^3 x}{3}\sim\frac{x^3}{3}$$

$$g(x)=x^3+x^4\sim x^3$$

故应选(B).

【评注】 方法二中用到两个重要结论:

(1) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内连续,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$,则 $\int_0^x f(t)\,dt\sim\int_0^x g(t)\,dt$. 特别的,若当 $x\to 0$ 时,$f(x)\sim g(x)$,则 $\int_0^x f(t)\,dt\sim\int_0^x g(t)\,dt$.

(2) 若当 $x\to x_0$ 时,$g(x)$ 是 $f(x)$ 的高阶无穷小,则当 $x\to x_0$ 时 $f(x)+g(x)\sim f(x)$.

27 (1996, 二(4) 题,3 分) 设 $f(x)$ 有连续导数,$f(0)=0$,$f'(0)\neq 0$,$F(x)=\int_0^x(x^2-t^2)f(t)\,dt$,且当 $x\to 0$ 时,$F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小,则 k 等于

(A)1.　　(B)2.　　(C)3.　　(D)4.

【答案】 C.

【解析】 (方法一)　直接法

$$F(x)=\int_0^x(x^2-t^2)f(t)\,dt=x^2\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x t^2 f(t)\,dt$$

则　$$F'(x)=2x\int_0^x f(t)\,dt+x^2f(x)-x^2f(x)=2x\int_0^x f(t)\,dt$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{x^k}=2\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x^{k-1}}=2\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{(k-1)x^{k-2}}$$

由 $F'(x)$ 与 x^k 为同阶无穷小,则上式极限应为非零有限值. 又 $f'(0)\neq 0$,则 $k=3$,此时

$$\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)\neq 0$$

(方法二)　排除法:取 $f(x)=x$,则 $f(0)=0$,$f'(0)=1\neq 0$,此时,

$$F(x)=\int_0^x(x^2-t^2)f(t)\,dt=\int_0^x(x^2-t^2)t\,dt$$

$$=\frac{x^4}{2}-\frac{x^4}{4}=\frac{x^4}{4}$$

则 $F'(x)=x^3$ 为 x 的 3 阶无穷小,显然,选项(A)(B)(D) 都不正确. 故应选(C).

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

28 (2004,7题,4分) 把 $x\to0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x\cos t^2\,dt,\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt,\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,dt$ 排列起来,使排在后面的是前一个的高阶无穷小,则正确的排列次序是

(A)α,β,γ. (B)α,γ,β. (C)β,α,γ. (D)β,γ,α.

【答案】 B.

【解析】 (方法一) 由于

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\cos t^2\,dt}{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt}=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x^2}{2x\tan x}=\infty$$

则当 $x\to0^+$ 时,β 是比 α 高阶的无穷小,排除(C)和(D)选项.

又 $$\lim_{x\to0^+}\frac{\beta}{\gamma}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt}{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,dt}=\lim_{x\to0^+}\frac{2x\tan x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x^{3/2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{2x^2}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot x^{\frac{3}{2}}}=0$$

则当 $x\to0^+$ 时,β 是比 γ 高阶的无穷小,则排除(A),故应选(B).

事实上,由 β 是比 γ 高阶的无穷小就能排除(A)(C)(D)三个选项,故应选(B).

(方法二) 利用结论:设在 $x=0$ 某邻域内 $f(x)$ 连续,$\varphi(x)$ 可导,且当 $x\to0$ 时,$f(x)$ 是 x 的 n 阶无穷小,$\varphi(x)$ 是 x 的 m 阶无穷小,则 $\int_0^{\varphi(x)}f(t)\,dt$ 是 x 的 $m(n+1)$ 阶无穷小,则

$$\alpha=\int_0^x\cos t^2\,dt,m(n+1)=1(0+1)=1$$

$$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt,m(n+1)=2\left(\frac{1}{2}+1\right)=3$$

$$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,dt,m(n+1)=\frac{1}{2}(3+1)=2$$

则正确排序为 α,γ,β. 故应选(B).

微信公众号(顶尖考研)
(ID:djky66)

29 (2007,1题,4分) 当 $x\to0^+$ 时,与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

(A)$1-e^{\sqrt{x}}$. (B)$\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$.

(C)$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$. (D)$1-\cos\sqrt{x}$.

【答案】 B.

【解析】 (方法一) $\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}=[\ln(1+x)-\ln(1-\sqrt{x})]\sim\sqrt{x}$(当 $x\to0^+$),

事实上,$\ln(1+x)\sim x$,即当 $x\to0^+$ 时,$\ln(1+x)$ 是 x 的一阶无穷小,$-\ln(1-\sqrt{x})\sim\sqrt{x}$,即 $-\ln(1-\sqrt{x})$ 是 x 的 $\frac{1}{2}$ 阶无穷小,几个不同阶无穷小量的代数和的阶数由其中阶数最低的项来决定.

故应选(B).

(方法二) 当 $x\to0^+$ 时,

$$1-e^{\sqrt{x}}\sim-\sqrt{x},\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\frac{1}{2}\sqrt{x},1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}x$$

则选项(A)(C)(D)均不正确,故应选(B).

第二章　一元函数微分学

本章导读

导数与微分是微分学的两个基本概念，是研究函数局部性态的基础．微分中值定理建立了函数和导数之间的联系，是利用导数研究函数基本性态的理论基础．

本章主要内容有：

(1) 导数与微分的概念及其几何意义；

(2) 连续、可导、可微之间的关系；

(3) 微分法(有理运算，复合函数，隐函数，参数方程等)；

(4) 微分中值定理(罗尔，拉格朗日，柯西，泰勒)；

(5) 函数基本性态及判定(单调性，极值与最值，曲线的凹凸性与拐点，渐近线)．

试题特点

本章考试内容多，考题比例大(一般 20 分左右)，有基本概念 —— 导数与微分，基本方法 —— 微分法，基本理论 —— 微分中值定理，应用 —— 函数性态．

微信公众号【张宇考研】(ID：djky66)

本章常考题型

(1) 导数概念；

(2) 微分法(复合函数，隐函数，参数方程)；

(3) 函数的单调性与极值；

(4) 曲线的凹向与拐点；

(5) 方程的根；

(6) 证明函数不等式；

(7) 微分中值定理证明题．

后三种题型是难点．考研试卷最难的题经常出在这一章，那就是与微分中值定理有关的证明题．

考题详析

一、导数与微分的概念

1 (1988，三(1) 题，3 分) 设 $f(x)$ 可导且 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$，则 $\Delta x\to 0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 处的微分 $\mathrm{d}y$ 是

(A) 与 Δx 等价的无穷小．　(B) 与 Δx 同阶的无穷小．

(C) 比 Δx 低阶的无穷小．　(D) 比 Δx 高阶的无穷小．

【答案】 B.

【解析】 由 $f'(x_0)=\frac{1}{2}$ 知

$$dy=f'(x_0)\Delta x=\frac{1}{2}\Delta x$$

又 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{dy}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x}=\frac{1}{2}$.

则当 $\Delta x\to 0$ 时，dy 是与 Δx 同阶的无穷小.

2 (1989，一(1) 题，3 分) 已知 $f'(3)=2$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$ _____.

【答案】 -1.

【解析】 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3-h)-f(3)}{2h}=\frac{-1}{2}\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}=-\frac{1}{2}f'(3)=-1$.

3 (1992，二(4) 题，3 分) 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$，则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n 为

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3.

【答案】 C.

【解析】 由于 $3x^3$ 处处任意阶可导，因此，记 $\varphi(x)=x^2|x|$，只要考查 $\varphi^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n.

$$\varphi(x)=\begin{cases}x^3, & x>0\\ -x^3, & x\leqslant 0\end{cases}\text{或}\ \varphi(x)=\begin{cases}x^3, & x\geqslant 0\\ -x^3, & x<0\end{cases}$$

$$\varphi'_-(0)=(-x^3)'\Big|_{x=0}=(-3x^2)\Big|_{x=0}=0$$

$$\varphi'_+(0)=(x^3)'\Big|_{x=0}=3x^2\Big|_{x=0}=0$$

则

$$\varphi'(x)=\begin{cases}3x^2, & x>0\\ -3x^2, & x\leqslant 0\end{cases}\text{或}\ \varphi'(x)=\begin{cases}3x^2, & x\geqslant 0\\ -3x^2, & x<0\end{cases}$$

$$\varphi''_-(0)=(-3x^2)'\Big|_{x=0}=(-6x)\Big|_{x=0}=0$$

$$\varphi''_+(0)=(3x^2)'\Big|_{x=0}=(6x)\Big|_{x=0}=0$$

$$\varphi''(x)=\begin{cases}6x, & x>0\\ -6x, & x\leqslant 0\end{cases}\text{或}\ \varphi''(x)=\begin{cases}6x, & x\geqslant 0\\ -6x, & x<0\end{cases}$$

$$\varphi'''_-(0)=(-6x)'\Big|_{x=0}=-6$$

$$\varphi'''_+(0)=(6x)'\Big|_{x=0}=6$$

故 $\varphi'''(0)$ 不存在，于是 $f'''(0)$ 不存在，故 $n=2$. 选(C).

4 (1995，二(3) 题，3 分) 设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的

(A) 充分必要条件. (B) 充分条件但非必要条件.

(C) 必要条件但非充分条件. (D) 既非充分条件又非必要条件.

【答案】 A.

【解析】 由于 $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)=f(x)+|\sin x|f(x)$. $f(x)$ 可导，则 $F(x)$ 可导的充要条件是 $|\sin x|f(x)$ 可导，令 $\varphi(x)=|\sin x|f(x)$.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|\sin x|f(x)}{x}=\begin{cases}f(0), & x\to 0^+\\ -f(0), & x\to 0^-\end{cases}$$

即 $f'_+(0)=f(0)$，$f'_-(0)=-f(0)$，则 $f(0)=0$ 是 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件，从而 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充分必要条件，故应选(A).

5 (1998，二(2)题，3分) 函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 不可导点的个数是

(A)3.　　(B)2.　　(C)1.　　(D)0.

【答案】 B.

【解析】 (方法一) 若去掉 $|x^3-x|$ 的绝对值，$f(x)$ 是一个分段函数，每一段上都是多项式函数. 因此，$f(x)$ 只可能在分段函数分界点处出现不可导，即只可能在 $x^3-x=0$，即 $x=-1,0,1$ 这三点出现不可导点. 又

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)|x^3-x|}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x-2)|x^3-x|=0$$

则 $f'(-1)=0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-x-2)|x^2-1||x|}{x}=-2\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=\begin{cases}2, & x\to 0^-\\ -2, & x\to 0^+\end{cases}$$

则 $f'(0)$ 不存在.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-x-2)|x(x+1)||x-1|}{x-1}=-4\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x-1}=\begin{cases}4, & x\to 1^-\\ -4, & x\to 1^+\end{cases}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

则 $f'(1)$ 不存在.

故应选(B).

(方法二) 由于 $f(x)=(x^2-x-2)|x||x-1||x+1|$，我们知道 $|x|$ 在 $x=0$ 处不可导，而 $x|x|$ 在 $x=0$ 处可导. 因此

$$|x||x-1||x+1|$$

在 $x=-1,x=0,x=1$ 不可导，乘了因子 (x^2-x-2) 会不会改变这三个点的可导性关键是 x^2-x-2 中是否含有绝对值中的这三个因子 $x,x-1,x+1$，又

$$x^2-x-2=(x+1)(x-2)$$

所以 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 在 $x=0,x=1$ 处不可导，在 $x=-1$ 处可导，故应选(B).

6 (1999，二(2)题，3分) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0,\\ x^2g(x), & x\leqslant 0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处

(A) 极限不存在.　　(B) 极限存在，但不连续.

(C) 连续，但不可导.　　(D) 可导.

【答案】 D.

【解析】 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x\sqrt{x}}=0$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2g(x)-0}{x}=\lim_{x\to0^-}xg(x)=0$$

则 $f'(0)=0$，故应选(D).

7 (2001，二(3)题，3分) 设 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为

(A) $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在.　　(B) $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在.

(C) $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在.　　(D) $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在.

【答案】 B.

【解析】 (方法一)　解析法

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}f(1-e^h)=\lim_{h\to0}\frac{f(1-e^h)-f(0)}{h}\xlongequal{1-e^h=x}\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{\ln(1-x)}=-\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

由上式可知，$\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}f(1-e^h)$ 与 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ 存在性是一致的. 又 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件是极限 $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在，故应选(B).

(方法二)　排除法：令 $f(x)=|x|$，则 $f'(0)$ 不存在，而

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)=\lim_{h\to0}\frac{|1-\cos h|}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{2}h^2}{h^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(h-\sin h)=\lim_{h\to0}\frac{|h-\sin h|}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{\left|\frac{1}{6}h^3\right|}{h^2}=\frac{1}{6}\lim_{h\to0}|h|=0$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

则排除(A)(C)选项.

令 $f(x)=\begin{cases}1, & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 显然 $f'(0)$ 不存在，但

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}[1-1]=0$$

从而排除(D)，故应选(B).

8 (2002，三题，6分) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数，且 $f(0)\neq0$，$f'(0)\neq0$，若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to0$ 时是比 h 高阶的无穷小，试确定 a,b 的值.

【解】 (方法一)　由题设知 $\lim\limits_{h\to0}[af(h)+bf(2h)-f(0)]=(a+b-1)f(0)=0$，又 $f(0)\neq0$，则 $a+b-1=0$.

又
$$\begin{aligned}0&=\lim_{h\to0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{af'(h)+2bf'(2h)}{1}=(a+2b)f'(0)\end{aligned}$$

由于 $f'(0)\neq0$，则 $a+2b=0$，于是 $a=2,b=-1$.

(方法二)　同方法一知 $a+b-1=0$.

又
$$\begin{aligned}0&=\lim_{h\to0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{af(h)+bf(2h)-(a+b)f(0)}{h}\\&=a\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+2b\lim_{h\to0}\frac{f(2h)-f(0)}{2h}\end{aligned}$$

$$= af'(0) + 2bf'(0) = (a+2b)f'(0)$$

因为 $f'(0) \neq 0$，则 $a+2b=0$，于是 $a=2, b=-1$.

【评注】 若本题条件减弱为 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域可导，或 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，此时，只能用方法二.

9 (2002，四题，7 分) 已知两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x} e^{-t^2}\,dt$ 在点 $(0,0)$ 处的切线相同，写出此切线方程，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\frac{2}{n}\right)$.

【解】 由两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x} e^{-t^2}\,dt$ 在点 $(0,0)$ 处的切线相同知

$$f(0)=0$$

$$f'(0)=\left(\int_0^{\arctan x} e^{-t^2}\,dt\right)'\Big|_{x=0} = e^{-\arctan^2 x}\frac{1}{1+x^2}\Big|_{x=0} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} nf\left(\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{1}{n}}$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{2}{n}}$$

$$= 2f'(0) = 2$$

10 (2007，4 题，4 分) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是

(A) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.

(B) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.

(C) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.

(D) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【答案】 D.

【解析】 (方法一) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，又 $\lim\limits_{x\to 0}x=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，故 $f(0)=0$，命题(A) 正确.

同理，若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+f(-x)]=f(0)+f(0)=0$，则 $f(0)=0$，故命题(B) 正确.

若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，由(A) 选项的讨论知 $f(0)=0$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

存在，由导数定义知，$f'(0)$ 存在，故命题(C) 正确，由排除法知应选(D).

(方法二) 虽然有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x} - \frac{f(-x)-f(0)}{x}\right]$$

但$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$存在，不能保证$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$或$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(-x)-f(0)}{x}$一定存在，故$f'(0)$不一定存在. 如$f(x)=|x|$，虽然$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|-|-x|}{x}=0$存在，但$f'(0)$不存在，故命题(D)不正确，应选(D).

【评注】 (1) 方法一中多次用到一个基本结论：

若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$存在，且$\lim g(x)=0$，则$\lim f(x)=0$；

(2) 由方法二可得到一个基本结论：

若$f'(x_0)$存在，则极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$一定存在，但反之则不然.

该知识点在考卷中多次考到，望考生重视；

(3) 虽然本题涉及的知识(概念、理论)都是最基本的，但考生出错较多，说明部分考生基础不够扎实.

二、导数与微分计算

11 (1988，二(1)题，3分) 若$f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2tx}$，则$f'(t)=$_____.

【答案】 $e^{2t}(2t+1)$.

【解析】 由于$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2tx}{x}=2t$，则

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2tx}=e^{2t}$$

$$f(t)=te^{2t}$$

则$f'(t)=e^{2t}+2te^{2t}=e^{2t}(2t+1)$.

12 (1990，二(2)题，3分) 已知函数$f(x)$具有任意阶导数，且$f'(x)=[f(x)]^2$，则当n为大于2的正整数时，$f(x)$的n阶导数$f^{(n)}(x)$为

(A)$n![f(x)]^{n+1}$.　　(B)$n[f(x)]^{n+1}$.

(C)$[f(x)]^{2n}$.　　(D)$n![f(x)]^{2n}$.

【答案】 A.

【解析】 由$f'(x)=[f(x)]^2$知

$$f''(x)=2f(x)f'(x)=2f(x)[f(x)]^2=2f^3(x)$$

$$f'''(x)=2\times 3f^2(x)f'(x)=3![f(x)]^4$$

由数学归纳法可知

$$f^{(n)}(x)=n![f(x)]^{n+1}$$

故应选(A).

13 (1991，一(1)题，3分) 设$\begin{cases}x=1+t^2\\ y=\cos t\end{cases}$，则$\dfrac{d^2y}{dx^2}=$_____.

【答案】 $\dfrac{\sin t-t\cos t}{4t^3}$.

【解析】 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{-\sin t}{2t}$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{-\sin t}{2t}\right)\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{t\cos t-\sin t}{t^2}\cdot\frac{1}{2t}=\frac{\sin t-t\cos t}{4t^3}$$

14 (1992,一(1)题,3分) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x+y}+\cos(xy)=0$ 确定,则 $\frac{dy}{dx}=$ _____.

【答案】 $\frac{y\sin(xy)-e^{x+y}}{e^{x+y}-x\sin(xy)}$.

【解析】 等式 $e^{x+y}+\cos(xy)=0$ 两端对 x 求导得

$$e^{x+y}\left(1+\frac{dy}{dx}\right)-\sin(xy)\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)=0$$

由上式解得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y\sin(xy)-e^{x+y}}{e^{x+y}-x\sin(xy)}$$

15 (2002,一(2)题,3分) 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定,则 $y''(0)=$ _____.

【答案】 -2.

【解析】 将 $x=0$ 代入方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 得 $y=0$,方程两端对 x 求导得

$$e^yy'+6y+6xy'+2x=0 \tag{1}$$

将 $x=0,y=0$ 代入上式得 $y'(0)=0$. (1)式两端再对 x 求导得

$$e^yy'^2+e^yy''+12y'+6xy''+2=0$$

将 $x=0,y=0,y'(0)=0$ 代入上式得

$$y''(0)+2=0$$

即 $y''(0)=-2$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky08)

16 (2005,7题,4分) 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内

(A) 处处可导.　　(B) 恰有一个不可导点.

(C) 恰有两个不可导点.　　(D) 至少有三个不可导点.

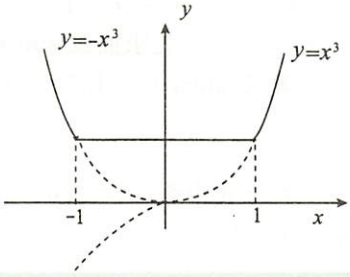
【答案】 C.

【解析】 先求极限得到 $f(x)$ 的表达式,然后再讨论 $f(x)$ 的可导性.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{a_i\}(a_i>0)$ 知

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$$

$$=\max\{1,|x|^3\}=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1.\\ |x|^3, & |x|>1.\end{cases}$$



由 $y=f(x)$ 的表达式和其图形可知,$f(x)$ 在 $x=\pm1$ 处不可导(尖点),在其余点均可导,故应选(C).

【评注】 本题求得 $f(x)$ 的表达式后,也可根据表达式确定各点的可导性,由其表达式知,$f(x)$ 不可导点最多两个,即 $x=\pm1$,其余点均可导,又由 $f(x)$ 表达式知 $f(x)$ 为偶函数,则 $f(x)$ 在 $x=\pm1$ 两点处可导性相同,因此,只需讨论 $x=1$ 处的可导性.

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{1-1}{x-1}=0,f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^3-1}{x-1}=3$$

则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导,从而在 $x=-1$ 处也不可导.

三、导数的几何意义

17 (1997,一(3)题,3分) 对数螺线 $r=e^{\theta}$ 在点 $(r,\theta)=\left(e^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2}\right)$ 处切线的直角坐标方程为_____.

【答案】 $x+y=e^{\frac{\pi}{2}}$.

【解析】 将极坐标方程 $r=e^{\theta}$ 化为参数方程.

$$\begin{cases}x=r\cos\theta=e^{\theta}\cos\theta\\ y=r\sin\theta=e^{\theta}\sin\theta\end{cases}$$

所求曲线在点 $\left(\frac{\pi}{2},e^{\frac{\pi}{2}}\right)$ 处切线斜率为

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\left.\frac{e^{\theta}\sin\theta+e^{\theta}\cos\theta}{e^{\theta}\cos\theta-e^{\theta}\sin\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-1$$

又当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时,$x=0,y=e^{\frac{\pi}{2}}$,则所求切线方程为

$$y-e^{\frac{\pi}{2}}=(-1)(x-0)$$

即 $x+y=e^{\frac{\pi}{2}}$.

18 (2004,1题,4分) 曲线 $y=\ln x$ 上与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程为_____.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【答案】 $y=x-1$.

【解析】 由 $y=\ln x$ 知,$y'=\frac{1}{x}$,又曲线 $y=\ln x$ 的切线与直线 $x+y=1$ 垂直,则 $\frac{1}{x}=1$,得 $x=1$. 切点为(1,0),则切线方程为

$$y-0=1\cdot(x-1)$$

即 $y=x-1$.

19 (2008,10题,4分) 曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点(0,1)处的切线方程是_____.

【答案】 $y=x+1$.

【解析】 先求曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点(0,1)处切线斜率 $y'(0)$.

等式 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 两端对 x 求导得

$$\cos(xy)\cdot(y+xy')+\frac{y'-1}{y-x}=1$$

在上式中令 $x=0,y=1$ 得 $y'(0)=1$,于是该曲线在点(0,1)处的切线方程为 $y-1=x$,即 $y=x+1$.

四、函数的单调性、极值与最值

20 (1987,五(3)题,3分) 设 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$,则在 $x=a$ 处

(A) $f(x)$ 的导数存在,且 $f'(a)\neq 0$.　　(B) $f(x)$ 取得极大值.

(C) $f(x)$ 取得极小值.　　(D) $f(x)$ 的导数不存在.

【答案】 B.

【解析】（方法一）　直接法：由$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$及极限保号性可知，在$x=a$的某去心邻域$\mathring{U}(a,\delta)$内

$$\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}<0$$

从而有$f(x)-f(a)<0$，即$f(x)<f(a)$，$f(x)$在$x=a$处取极大值，故应选(B).

事实上，由$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$可知

$$\begin{aligned}f'(a)&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}\cdot(x-a)\\&=(-1)\cdot 0=0\end{aligned}$$

则(A)(D)都不正确.

（方法二）　排除法：取$f(x)=-(x-a)^2$，显然$f(x)$满足题设条件，但该$f(x)$在$x=a$处取得极大值，且$f'(a)=-2(x-a)\Big|_{x=a}=0$.

则选项(A)(C)(D)都不正确，故应选(B).

21（1987，一(2)题，3分）当$x=$_____时，函数$y=x2^x$取得极小值.

【答案】　$-\dfrac{1}{\ln 2}$.

【解析】　$y'=2^x+x2^x\ln 2=2^x(1+x\ln 2)$

令$y'=0$得，$x=-\dfrac{1}{\ln 2}$.

又当$x<-\dfrac{1}{\ln 2}$时，$y'<0$；当$x>-\dfrac{1}{\ln 2}$时，$y'>0$，则$y=x2^x$在$x=-\dfrac{1}{\ln 2}$处取得极小值.

【评注】　本题是一道填空题，求出唯一一个可能取得极值的点$x=-\dfrac{1}{\ln 2}$，就可以填答案了，可以不再做进一步的判定.

22（1988，三(2)题，3分）设$y=f(x)$是方程$y''-2y'+4y=0$的一个解，且$f(x_0)>0$，$f'(x_0)=0$，则函数$f(x)$在点x_0处

(A) 取得极大值.　　(B) 取得极小值.

(C) 某邻域内单调增加.　　(D) 某邻域内单调减少.

【答案】　A.

【解析】　由于$y=f(x)$是方程$y''-2y'+4y=0$的解，则

$$f''(x)-2f'(x)+4f(x)=0$$

上式中令$x=x_0$，则

$$f''(x_0)-2f'(x_0)+4f(x_0)=0$$

$$f''(x_0)=-4f(x_0)<0$$

故函数$f(x)$在x_0点取极大值.

23（1990，二(4)题，3分）已知$f(x)$在$x=0$的某个邻域内连续，且$f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在点$x=0$处$f(x)$

(A) 不可导.　　(B) 可导，且$f'(0)\neq 0$.

(C) 取得极大值.　　(D) 取得极小值.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)
微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

【答案】 D.

【解析】 （方法一） 直接法

由于$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2>0$，由极限保号性知，存在 $x=0$ 的某个去心邻域使

$$\frac{f(x)}{1-\cos x}>0$$

从而在该去心邻域内

$$f(x)>0=f(0)$$

由极值定义可知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取极小值.

（方法二） 排除法

令 $f(x)=x^2$，显然，此时

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$$

满足题设条件，而 $f(x)=x^2$ 在 $x=0$ 处可导，$f'(0)=0$ 取极小值，则(A)(B)(C) 选项都不正确，故应选(D).

24 (1995，二(2) 题，3 分) 设在$[0,1]$上 $f''(x)>0$，则 $f'(0)$，$f'(1)$，$f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是

(A)$f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$.　　(B)$f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$.

(C)$f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$.　　(D)$f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$.

【答案】 B.

【解析】 由于 $f''(x)>0$，则 $f'(x)$ 单调增，又

$$f(1)-f(0)=f'(\xi),0<\xi<1$$

则

$$f'(1)>f'(\xi)>f'(0)$$

即

$$f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$$

故应选(B).

25 (1996，二(2) 题，3 分) 设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，则

(A)$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(B)$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C)$(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D)$f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

【答案】 B.

【解析】 因为 $f(x)$ 有二阶连续导数，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1>0$，由极限的保号性知，在 $x=0$ 的某去心邻域内$\dfrac{f''(x)}{|x|}>0$，即 $f''(x)>0$，所以，$f'(x)$ 单调递增，又 $f'(0)=0$，因此，$f'(x)$ 在 $x=0$ 两侧由负变正，由极值第一充分条件知，$f(x)$ 在 $x=0$ 处取极小值，故应选(B).

26 (2000，二(1) 题，3 分) 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 是恒大于零的可导函数，且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$，则当 $a<x<b$ 时，有

(A)$f(x)g(b)>f(b)g(x)$.　　(B)$f(x)g(a)>f(a)g(x)$.

(C)$f(x)g(x)>f(b)g(b)$.　　(D)$f(x)g(x)>f(a)g(a)$.

【答案】 A.

【解析】 令 $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，$(a\leqslant x\leqslant b)$，由题设知

微信公众号【天尘考研】(ID: djky66)

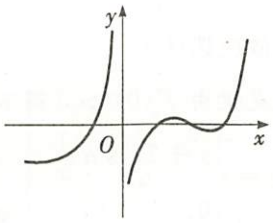
$$F'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}<0,(a<x<b)$$

则 $F(x)$ 在$[a,b]$上单调减，从而，当 $a<x<b$ 时 $F(b)<F(x)$，即

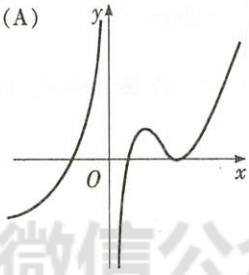
$$\frac{f(b)}{g(b)}<\frac{f(x)}{g(x)}$$

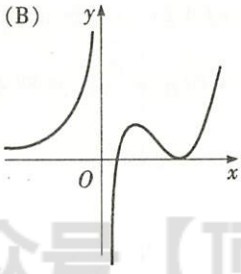
故 $f(x)g(b)>f(b)g(x)$.

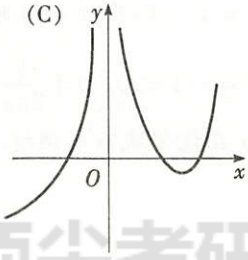
27 (2001，二(1) 题，3 分) 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导，$y=f(x)$ 的图形如图所示，

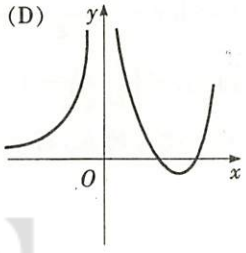


则导函数 $y=f'(x)$ 的图形为

(A) 

(B) 

(C) 

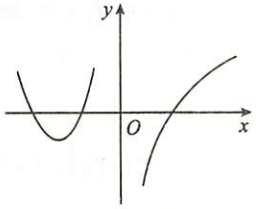
(D) 

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

【答案】 D.

【解析】 由 $y=f(x)$ 的图形可知，当 $x<0$ 时，$f(x)$ 单调增，因此，$f'(x)>0$，即曲线 $y=f'(x)$ 应在 x 轴上方，所以(A)(C) 都不正确；又当 $x>0$ 时，$f(x)$ 先增，然后减，最后增，因此，$f'(x)$ 先正，然后负，最后为正，显然(B) 不正确，故应选(D).

28 (2003，二(1) 题，4 分) 设函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续，其导函数的图形如图所示，则 $f(x)$ 有



(A) 一个极小值点和两个极大值点.

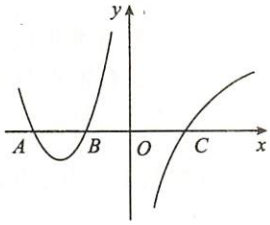
(B) 两个极小值点和一个极大值点.

(C) 两个极小值点和两个极大值点.

(D) 三个极小值点和一个极大值点.

【答案】 C.

【解析】 为方便说，将图形与 x 轴的交点依次标记为 A,B,C. 如右图，在 A 点左侧 $f'(x)>0$，在 A 点右侧 $f'(x)<0$，所以点 A 为 $f(x)$ 的极大值点；同理可知点 B,C 都是 $f(x)$ 的极小值点；在点 O 左侧 $f'(x)>0$，右侧 $f'(x)<0$，而 $f(x)$ 在点 O 连续，所以点 O 也是 $f(x)$ 的极大值点. 故应选(C).



29 (2004，8 题，4 分) 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$，使得

(A) $f(x)$ 在$(0,\delta)$内单调增加.

(B) $f(x)$ 在$(-\delta,0)$内单调减少.

(C) 对任意的 $x\in(0,\delta)$，有 $f(x)>f(0)$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

(D) 对任意的 $x\in(-\delta,0)$,有 $f(x)>f(0)$.

【答案】 C.

【解析】 由 $f'(0)>0$ 知

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}>0$$

由极限保号性知,在 $x=0$ 某邻域内

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}>0$$

因此,在 $(0,\delta)$ 内,$f(x)>f(0)$,故应选(C).

【评注】 本题不能选(A),也就是说由 $f'(0)>0$ 得不到 $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加.例如

$$f(x)=\begin{cases}x+2x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+2x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=1>0$,当 $x\neq0$ 时,$f'(x)=1+4x\sin\dfrac{1}{x}-2\cos\dfrac{1}{x}$.

因此,$f'\left(\dfrac{1}{2n\pi}\right)=1-2=-1<0$,由于 $\dfrac{1}{2n\pi}\to0(n\to\infty)$,说明在 $x=0$ 的任何邻域内都有使 $f'(x)<0$ 的点,则 $f(x)$ 在该邻域不单调增.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

五、曲线的凹向、拐点及渐近线

30 (1989,二(1)题,3分) 当 $x>0$ 时,曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$

(A) 有且仅有水平渐近线.　(B) 有且仅有铅直渐近线.

(C) 既有水平渐近线,也有铅直渐近线.　(D) 既无水平渐近线,又无铅直渐近线.

【答案】 A.

【解析】 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$,则曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ 有水平渐近线 $y=1$.

显然该曲线无铅直渐近线,故应选(A).

31 (1991,二(1)题,3分) 曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$

(A) 没有渐近线.　(B) 仅有水平渐近线.

(C) 仅有铅直渐近线.　(D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线.

【答案】 D.

【解析】 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=1$,则该曲线有水平渐近线 $y=1$.

又 $\lim\limits_{x\to0}y=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=\infty$,则 $x=0$ 为该曲线的铅直渐近线,故应选(D).

32 (2005,1题,4分) 曲线 $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为_____.

【答案】 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【解析】 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{(2x+1)x}=\dfrac{1}{2}$

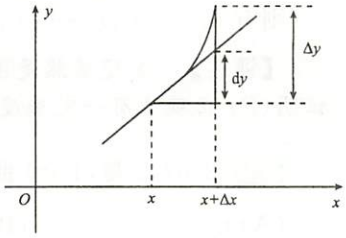
$$b=\lim_{x\to\infty}[y-ax]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{2x+1}-\frac{1}{2}x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{2(2x+1)}=-\frac{1}{4}$$

则斜渐近线方程为 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}$.

33 (2006,7题,4分) 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数,且 $f'(x)>0$,$f''(x)>0$,Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量,Δy 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分,若 $\Delta x>0$,则

(A) $0<\mathrm{d}y<\Delta y$.　　(B) $0<\Delta y<\mathrm{d}y$.

(C) $\Delta y<\mathrm{d}y<\Delta x$.　　(D) $\mathrm{d}y<\Delta y<0$.



【答案】 A.

【解析】 (方法一)　由题设条件知,$y=f(x)$ 单调增加且是凹的,再由 Δy,$\mathrm{d}y$ 的几何意义,如图所示,有 $0<\mathrm{d}y<\Delta y$. 故应选(A).

(方法二)　排除法:取 $f(x)=x^2$,$x\in(0,+\infty)$,显然满足题设条件,取 $x_0=1$,则

$$\mathrm{d}y=f'(x_0)\mathrm{d}x=2\mathrm{d}x=2\Delta x$$

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(1+\Delta x)^2-1^2=\Delta x(2+\Delta x)=2\Delta x+(\Delta x)^2$$

由于 $\Delta x>0$,则 $0<\mathrm{d}y<\Delta y$.

排除(B)(C)(D),故应选(A).

(方法三)　由 $f'(x)>0$,$\Delta x>0$ 知 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x>0$.

又 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(c)\Delta x$,$(x_0<c<x_0+\Delta x)$,

由于 $f''(x)>0$,则 $f'(x)$ 单调增加,$f'(c)>f'(x_0)$,从而有 $f'(x_0)\Delta x<f'(c)\Delta x$,

故 $0<\mathrm{d}y<\Delta y$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

34 (2007,5题,4分) 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数,且 $f''(x)>0$,令 $u_n=f(n)$ $(n=1,2,\cdots)$,则下列结论正确的是

(A) 若 $u_1>u_2$,则 $\{u_n\}$ 必收敛.　　(B) 若 $u_1>u_2$,则 $\{u_n\}$ 必发散.

(C) 若 $u_1<u_2$,则 $\{u_n\}$ 必收敛.　　(D) 若 $u_1<u_2$,则 $\{u_n\}$ 必发散.

【答案】 D.

【解析】 (方法一)　图示法:由 $f''(x)>0$,知,曲线 $y=f(x)$ 是凹的,

显然,图1排除选项(A),其中 $u_n=f(n)\to-\infty$;图2排除选项(B),其中 $u_n=f(n)\to0$;图3排除选项(C),其中 $u_n=f(n)\to+\infty$;故应选(D).

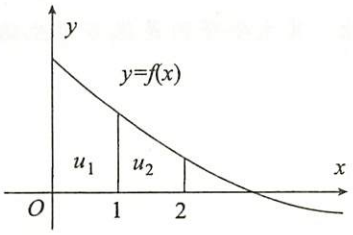


图1

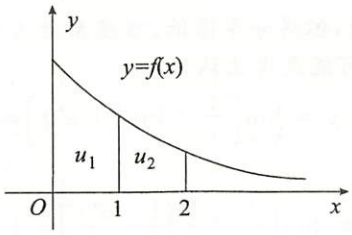


图2

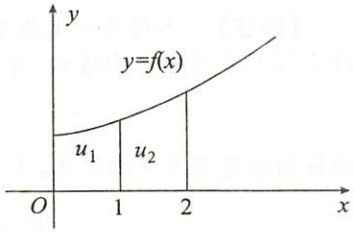


图3

(方法二)　排除法,取 $f(x)=(x-2)^2$,显然在 $(0,+\infty)$,$f''(x)=2>0$,$f(1)=1>f(2)=0$,但 $u_n=f(n)=(n-2)^2\to+\infty$,排除(A);

取 $f(x)=\dfrac{1}{x}$,在 $(0,+\infty)$ 上,$f''(x)>0$,且 $f(1)=1>f(2)=\dfrac{1}{2}$,

但 $u_n=f(n)=\dfrac{1}{n}\to0$,排除(B).

取 $f(x)=\mathrm{e}^x$,在 $(0,+\infty)$ 上,$f''(x)=\mathrm{e}^x>0$,且 $f(1)=\mathrm{e}<f(2)=\mathrm{e}^2$,

但 $u_n = f(n) = e^n \to +\infty$，排除(C)，故应选(D).

(方法三) 直接法，直接证明(D)正确.

由拉格朗日中值定理知

$$u_2 - u_1 = f(2) - f(1) = f'(c) > 0, (1 < c < 2)$$

当 $n > 2$ 时，

$$f(n) = f(n) - f(2) + f(2) = f'(\xi)(n-2) + f(2)(2 < \xi < n)$$

由于 $f''(x) > 0$，且 $\xi > c$，则 $f'(\xi) > f'(c) > 0$，从而有

$$f(n) > f'(c)(n-2) + f(2) \to +\infty$$

则有 $u_n = f(n) \to +\infty$.

【评注】 本题显然是图示法和排除法比较简单. 由于大部分考生对这两种方法不熟悉，而证明(D)正确又有一定难度，部分考生只能猜答案，准确率较低.

35 (2007，2题，4分) 曲线 $y = \dfrac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 渐近线的条数为

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3.

【答案】 D.

【解析】 由于

$$\lim_{x \to 0} y = \lim_{x \to 0}\left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)\right] = \infty$$

则 $x = 0$ 为曲线的铅直渐近线；

由于

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty}\left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)\right] = 0 \left(\lim_{x \to +\infty} y = +\infty\right)$$

则 $y = 0$ 为曲线的水平渐近线；

由于 $-\infty$ 一侧已有水平渐近线，则斜渐近线只可能出现在 $+\infty$ 一侧，又

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty}\left[\frac{1}{x^2} + \frac{\ln(1 + e^x)}{x}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty}[y - ax] = \lim_{x \to +\infty}\left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) - x\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty}\left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) - \ln e^x\right] = \lim_{x \to +\infty}\left[\frac{1}{x} + \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)\right] = 0$$

则曲线有斜渐近线 $y = x$，故该曲线有三条渐近线，应选(D).

【评注】 本题是一道基本题，但得分率很低，难度系数为0.220. 其主要原因是很多考生选择了(C)，少了一条渐近线. 原因可能是考生认为

$$\lim_{x \to \infty} y = \lim_{x \to \infty}\left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)\right] = \infty$$

则该曲线没有水平渐近线，又

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty}\left[\frac{1}{x^2} + \frac{\ln(1 + e^x)}{x}\right] = 1$$

$$\lim_{x \to \infty}(y - ax) = \lim_{x \to \infty}\left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) - \ln e^x\right] = 0$$

该曲线有斜渐近线 $y = x$，这样就少了一条水平渐近线，选择了(C). 其问题的关键是考生错误的认为 $\lim\limits_{x \to \infty} e^x = \infty$，这是一种“经典”的错误. 正确的是 $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$，但 $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

六、证明函数不等式

36 (1993,六(2)题,5分) 设 $b>a>\mathrm{e}$,证明 $a^b>b^a$.

【证明】　由于 $b>a>\mathrm{e}$ 及对数函数 $\ln x$ 单调增,则原不等式等价于 $b\ln a>a\ln b$,即 $\dfrac{\ln a}{a}>\dfrac{\ln b}{b}$. 因此,只要证 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 单调减. 因此,令

$$f(x)=\frac{\ln x}{x},x\in(\mathrm{e},+\infty)$$

则 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调减,又 $b>a>\mathrm{e}$,则 $f(b)<f(a)$,即

$$\frac{\ln b}{b}<\frac{\ln a}{a}$$

故 $a^b>b^a$.

37 (1999,六题,6分) 试证:当 $x>0$ 时,$(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$.

【证明】　(方法一)　令 $\varphi(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$,易知 $\varphi(1)=0$,由于

$$\varphi'(x)=2x\ln x-x+2-\frac{1}{x},\varphi'(1)=0$$

$$\varphi''(x)=2\ln x+1+\frac{1}{x^2},\varphi''(1)=2>0$$

$$\varphi'''(x)=\frac{2(x^2-1)}{x^3}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: dky66)

所以,当 $0<x<1$ 时,$\varphi'''(x)<0$;当 $1<x<+\infty$ 时,$\varphi'''(x)>0$,从而推知当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$\varphi''(x)>0$.

由 $\varphi'(1)=0$ 推知当 $0<x<1$ 时,$\varphi'(x)<0$;当 $1<x<+\infty$ 时,$\varphi'(x)>0$. 再由 $\varphi(1)=0$ 推知当 $x>0$ 时 $(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$.

(方法二)　令 $\varphi(x)=\ln x-\dfrac{x-1}{x+1}$,则

$$\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+1}{x(x+1)^2}>0\quad(x>0)$$

$\varphi(1)=0$,所以,当 $0<x<1$ 时,$\varphi(x)<0$,当 $1<x<+\infty$ 时,$\varphi(x)>0$.

于是当 $x>0$ 时,$(x^2-1)\varphi(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2\geqslant 0$.

即 $(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$.

【评注】　本题也可令 $\varphi(x)=(x+1)\ln x-(x-1)$.

38 (2004,15题,12分) 设 $\mathrm{e}<a<b<\mathrm{e}^2$,证明 $\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}(b-a)$.

【证明】　(方法一)　对函数 $\ln^2 x$ 在区间 $[a,b]$ 上应用拉格朗日中值定理,得

$$\ln^2 b-\ln^2 a=\frac{2\ln\xi}{\xi}(b-a)\quad(\mathrm{e}<a<\xi<b<\mathrm{e}^2)$$

设 $f(t)=\dfrac{\ln t}{t}$,则 $f'(t)=\dfrac{1-\ln t}{t^2}$.

当 $t>\mathrm{e}$ 时,$f'(t)<0$,故 $f(t)$ 单调减少,所以 $f(\xi)>f(b)>f(\mathrm{e}^2)$,即

$$\frac{\ln \xi}{\xi} > \frac{\ln e^2}{e^2} = \frac{2}{e^2}$$

$$\ln^2 b - \ln^2 a = \frac{2\ln \xi}{\xi}(b-a) > \frac{4}{e^2}(b-a)$$

（方法二） 设 $f(x) = \ln^2 x - \frac{4}{e^2}x$，则

$$f'(x) = \frac{2}{x}\ln x - \frac{4}{e^2}, f''(x) = \frac{2(1-\ln x)}{x^2}$$

当 $x > e$ 时，$f''(x) < 0$，$f'(x)$ 单调减少，所以当 $e < x < e^2$ 时，

$$f'(x) > f'(e^2) = \frac{4}{e^2} - \frac{4}{e^2} = 0$$

即当 $e < a < b < e^2$ 时，$f(b) > f(a)$，即

$$\ln^2 b - \frac{4}{e^2}b > \ln^2 a - \frac{4}{e^2}a$$

故

$$\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$$

七、方程根的存在性与个数

39 (1987，八题，10 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上可微，对于 $[0,1]$ 上的每一个 x，函数 $f(x)$ 的值都在开区间 $(0,1)$ 内，且 $f'(x) \neq 1$. 证明在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 x，使得 $f(x) = x$.

【分析】 本题实际上就是要证方程 $f(x) - x = 0$ 在 $(0,1)$ 内有且仅有一个实根.

【证明】 （方法一） 令 $F(x) = f(x) - x$，显然 $F(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且

$$F(0) = f(0) - 0 = f(0) > 0, F(1) = f(1) - 1 < 0$$

由连续函数零点定理知，存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $F(\xi) = 0$，即 $f(\xi) = \xi$.

以下证明这种 ξ 只有一个，反证法. 若不然，则存在 $c \in (0,1)$，$c \neq \xi$，使 $f(c) = c$，此时

$$F(c) = F(\xi) = 0$$

则由罗尔定理可知，在 c 与 ξ 之间存在 η 使 $F'(\eta) = 0$，即

$$f'(\eta) = 1$$

这与题设 $f'(x) \neq 1$ 矛盾，故在 $(0,1)$ 内存在唯一的 x，使 $f(x) = x$.

（方法二） 证明存在 $\xi \in (0,1)$，使 $F(\xi) = 0$ 同方法一，以下证明唯一性.

这里要用到罗尔定理的推论：若在区间 I 上 $f^{(n)}(x) \neq 0$，则方程 $f(x) = 0$ 在区间 I 上最多 n 个实根.

在本题中 $F'(x) = f'(x) - 1 \neq 0$，则方程 $F(x) = 0$ 在 $(0,1)$ 内最多一个实根，故在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 x，使 $f(x) = x$.

40 (1989，六题，7 分) 证明方程 $\ln x = \frac{x}{e} - \int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两个不同的实根.

【证明】 $\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx = \int_0^{\pi} \sqrt{2\sin^2 x}\,dx = \sqrt{2}\int_0^{\pi} \sin x\,dx = 2\sqrt{2}$.

令 $f(x) = \frac{x}{e} - \ln x - 2\sqrt{2}$，

$f'(x) = \frac{1}{e} - \frac{1}{x}$，令 $f'(x) = 0$，得 $x = e$.

当 $0<x<e$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $e<x<+\infty$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，则 $f(x)$ 在区间 $(0,e)$ 和 $(e,+\infty)$ 内分别至多有一个零点，即原方程至多两个实根.

又 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，且

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty, f(e)=-2\sqrt{2}<0, \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

则 $f(x)$ 在区间 $(0,e)$ 和 $(e,+\infty)$ 上分别至少有一个零点. 综上所述，方程

$$\ln x=\frac{x}{e}-\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx$$

在区间 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两个实根.

41 (1993，六(1)题，5分) 设在 $[0,+\infty)$ 上函数 $f(x)$ 有连续导数，且 $f'(x)\geqslant k>0$，$f(0)<0$，证明：$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有一个零点.

【证明】 由于 $f'(x)\geqslant k>0$，则 $f(x)$ 单调增，从而 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上最多一个零点，又 $f(0)<0$，因此，只要证 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上至少有一个零点，也就是只要证在 $(0,+\infty)$ 至少有一点 x，使 $f(x)>0$. 为此，由拉格朗日定理知，

$$\begin{aligned} f(x)&=f(x)-f(0)+f(0)=f'(\xi)x+f(0)\quad(0<\xi<x)\\ &\geqslant kx+f(0)\end{aligned}$$

显然，只要 $x>-\dfrac{f(0)}{k}$ 即可.

令 $x_0>-\dfrac{f(0)}{k}$，则 $f(0)<0$，$f(x_0)>0$，由连续函数零点定理知，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上至少有一个零点，综上所述，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有且仅有一个零点.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【评注】 证明在 $(0,+\infty)$ 上有一点 x，使 $f(x)>0$ 还有另一方法，即由 $f'(x)\geqslant k>0$ 知

$$\int_0^x f'(t)\,dt\geqslant\int_0^x k\,dx$$

即

$$f(x)-f(0)\geqslant kx$$

八、微分中值定理有关的证明题

42 (1990，六题，7分) 设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$. 证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)>0$.

【证明】 由于 $f(x)$ 不恒为常数，且 $f(a)=f(b)$，则在 (a,b) 内至少存在一点 c，使 $f(c)\neq f(a)$. 不妨设 $f(c)>f(a)$. 在 $[a,c]$ 上对 $f(x)$ 用拉格朗日中值定理得，在 (a,c) 上至少存在一点 ξ，使

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=f'(\xi)$$

由于上式左端为正，则 $f'(\xi)>0$，原题得证.

43 (1991，六题，7分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，且 $3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\,dx=f(0)$，证明：在 $(0,1)$ 内存在一点 c，使 $f'(c)=0$.

【证明】 由积分中值定理知，在 $\left[\dfrac{2}{3},1\right]$ 内存在一点 ξ，使

$$\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\,dx=f(\xi)\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}f(\xi)$$

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

从而有

$$f(\xi)=f(0)$$

故 $f(x)$ 在$[0,\xi]$上满足罗尔定理条件，因此在$(0,\xi)$内存在一点 c，使

$$f'(c)=0,c\in(0,\xi)\subset(0,1)$$

原题得证.

44 (1992，六题，7 分) 设 $f''(x)<0,f(0)=0$，证明对任何 $x_1>0,x_2>0$，有

$$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$$

【证明】 (方法一) 对 $f(x)$ 分别在区间$[0,x_1]$和$[x_2,x_1+x_2]$上用拉格朗日中值定理得(这里不妨设 $x_1\leqslant x_2$)

$$f(x_1)=f(x_1)-f(0)=f'(\xi_1)x_1,\xi_1\in(0,x_1)$$

$$f(x_1+x_2)-f(x_2)=f'(\xi_2)x_1,\xi_2\in(x_2,x_1+x_2)$$

又 $f''(x)<0$，则 $f'(x)$ 单调减，于是 $f'(\xi_2)<f'(\xi_1)$，则

$$f(x_1+x_2)-f(x_2)<f(x_1)$$

即 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

(方法二) 只要证明当 $x>0$ 时，$f(x_1+x)<f(x_1)+f(x)$.

令 $\varphi(x)=f(x)+f(x_1)-f(x_1+x)$，则 $\varphi'(x)=f'(x)-f'(x_1+x)$.

由于 $f''(x)<0$，则 $f'(x_1+x)<f'(x)$，于是

$$\varphi'(x)>0,(x>0)$$

则 $\varphi(x)$ 单调增.

又 $\varphi(0)=f(x_1)-f(x_1)=0$，

故当 $x>0$ 时，$\varphi(x)>0$，原式得证.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

45 (1995，七题，8 分) 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在$[a,b]$上存在二阶导数，并且 $g''(x)\neq0,f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，试证：

(1) 在开区间(a,b)内 $g(x)\neq0$；

(2) 在开区间(a,b)内至少存在一点 ξ，使$\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

【证明】 (1) 用反证法：若存在 $c\in(a,b)$，使 $g(c)=0$，则对 $g(x)$ 在$[a,c]$和$[c,b]$上分别用罗尔定理，知存在 $\xi_1\in(a,c)$ 和 $\xi_2\in(c,b)$，使

$$g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$$

再对 $g'(x)$ 在$[\xi_1,\xi_2]$上用罗尔定理知，存在 $\xi_3\in(\xi_1,\xi_2)$，使 $f''(\xi_3)=0$，这与题设 $g''(x)\neq0$ 矛盾. 故在(a,b)内 $g(x)\neq0$.

(2) 令 $\varphi(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$，易知，$\varphi(a)=\varphi(b)=0$.

对 $\varphi(x)$ 在$[a,b]$上应用罗尔定理，知存在 $\xi\in(a,b)$，使 $\varphi'(\xi)=0$，即

$$f(\xi)g''(\xi)-g(\xi)f''(\xi)=0$$

由于 $g(\xi)\neq0,g''(\xi)\neq0$，故得

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$$

【评注】 本题的难点就是辅助函数 $\varphi(x)$ 的构造. 思路是：要证$\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$，只要证

$$f(\xi)g''(\xi)-g(\xi)f''(\xi)=0$$

只要能够造 $\varphi(x)$，使 $\varphi'(\xi)=f(\xi)g''(\xi)-g(\xi)f''(\xi)$，由此可知，只要令 $\varphi(x)=f(x)g'(x)-g(x)f'(x)$ 即可.

46 (1996,七题,8 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数,且满足条件 $|f(x)|\leqslant a$,$|f''(x)|\leqslant b$,其中 a,b 都是非负常数,c 是 $(0,1)$ 内任意一点.

(1) 写出 $f(x)$ 在点 $x=c$ 处带拉格朗日型余项的一阶泰勒公式;

(2) 证明 $|f'(c)|\leqslant 2a+\frac{b}{2}$.

【证明】　由泰勒公式知

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2 \quad (\xi \text{ 在 } c \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

在上式中分别令 $x=0$ 和 $x=1$ 得

$$f(0)=f(c)+f'(c)(0-c)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}c^2 \quad (\xi_1 \text{ 在 } 0 \text{ 与 } c \text{ 之间})$$

$$f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-c)^2 \quad (\xi_2 \text{ 在 } c \text{ 与 } 1 \text{ 之间})$$

两式相减得

$$f(1)-f(0)=f'(c)+\frac{1}{2!}[f''(\xi_2)(1-c)^2-f''(\xi_1)c^2]$$

从而有　$|f'(c)|\leqslant|f(1)|+|f(0)|+\frac{1}{2!}|f''(\xi_2)|(1-c)^2+\frac{1}{2!}|f''(\xi_1)|c^2$

$$\leqslant 2a+\frac{b}{2}[(1-c)^2+c^2]\leqslant 2a+\frac{b}{2}$$

【评注】　$(1-x)^2+x^2$ 在 $[0,1]$ 上最大值为 1,则 $(1-x)^2+x^2\leqslant 1$.

微信公众号【顾头考研】(ID: djky66)

47 (2001,七题,7 分) 设 $y=f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数且 $f''(x)\neq 0$,试证:

(1) 对于 $(-1,1)$ 内的任意 $x\neq 0$,存在唯一的 $\theta(x)\in(0,1)$,使 $f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)$ 成立;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

【证明】　(方法一)　(1) 任给非零 $x\in(-1,1)$,由拉格朗日中值定理得

$$f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x) \quad (0<\theta(x)<1)$$

因为 $f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 内连续且 $f''(x)\neq 0$,所以,$f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 内不变号,不妨设 $f''(x)>0$,则 $f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 内严格单增,故 $\theta(x)$ 唯一.

(2) 由泰勒公式得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2 \quad (\xi \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

所以

$$xf'(\theta(x)x)=f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2$$

从而

$$\theta(x)\frac{f'(\theta(x)x)-f'(0)}{\theta(x)x}=\frac{f''(\xi)}{2!}$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(\theta(x)x)-f'(0)}{\theta(x)x}=f''(0)$.$\lim\limits_{x\to 0}f''(\xi)=\lim\limits_{\xi\to 0}f''(\xi)=f''(0)$,

故 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

（方法二） (1) 同方法一(1).

(2) 对非零 $x\in(-1,1)$，由拉格朗日中值定理得

$$f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)\quad(0<\theta(x)<1).$$

所以 $\dfrac{f'(\theta(x)x)-f'(0)}{x}=\dfrac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}$.

由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(\theta(x)x)-f'(0)}{\theta(x)x}=f''(0)$，

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{f''(0)}{2}$$

故 $\lim\limits_{x\to0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

48 (2002，二(3)题，3分) 设函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界且可导，则

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$. (B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(C) 当 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$. (D) 当 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$.

【答案】 B.

【解析】 （方法一） 直接法：由拉格朗日中值定理知

$$\frac{f(2x)-f(x)}{x}=f'(\xi)\quad(x<\xi<2x)$$

又 $f(x)$ 有界，则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=0$$

从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(\xi)=0$，又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在，则

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}f'(\xi)=0$$

故应选(B).

（方法二） 排除法

取 $f(x)=\dfrac{\sin x^2}{x}$，则显然 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界且可导，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x^2}{x}=0$. 而

$$f'(x)=2\cos x^2-\frac{\sin x^2}{x^2}$$

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x^2}{x^2}=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}2\cos x^2$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 不存在，排除(A).

又 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x^2}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=1$. 故排除(C)和(D).

49 (2005，18题，12分) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$. 证明：

(Ⅰ) 存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$；

(Ⅱ) 存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

【证明】 (Ⅰ) 令 $F(x)=f(x)-1+x$，$x\in[0,1]$ 由题设知，$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，又

$$F(0)=f(0)-1=-1<0,F(1)=f(1)=1>0$$

由连续函数的零点定理知，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$

即 $$f(\xi)=1-\xi.$$

(Ⅱ) 在区间 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 上分别对 $f(x)$ 用拉格朗日中值定理得

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

$$\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi}=f'(\eta)\qquad \eta\in(0,\xi)$$

$$\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=f'(\zeta)\qquad \zeta\in(\xi,1)$$

此时，$f'(\eta)f'(\zeta)=\dfrac{f(\xi)-f(0)}{\xi}\cdot\dfrac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\dfrac{f(\xi)}{1-\xi}\cdot\dfrac{1-f(\xi)}{\xi}=1$.

50 (2007，19题，11分) 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内具有二阶导数且存在相等的最大值，$f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

【分析】　若令 $F(x)=f(x)-g(x)$，则本题要证明存在 $\xi\in(a,b)$，使 $F''(\xi)=0$，又 $F(a)=F(b)=0$，若能证明存在 $\eta\in(a,b)$，使 $F(\eta)=0$，对 $F(x)$ 反复用罗尔定理可证明本题.

【证明】　(方法一)　令 $F(x)=f(x)-g(x)$，则 $F(a)=F(b)=0$.

设 $f(x)$，$g(x)$ 在(a,b)内的最大值为 M，且分别在 $\alpha\in(a,b)$，$\beta\in(a,b)$ 取到，即 $f(\alpha)=M$，$g(\beta)=M$.

若 $\alpha=\beta$，取 $\eta=\alpha$，则 $F(\eta)=0$；

若 $\alpha\neq\beta$，则

$$F(\alpha)=f(\alpha)-g(\alpha)=M-g(\alpha)\geqslant 0$$

$$F(\beta)=f(\beta)-g(\beta)=f(\beta)-M\leqslant 0$$

此时，由连续函数介值定理知在 α 与 β 之间至少存在点 η，使 $F(\eta)=0$.

综上所述，存在 $\eta\in(a,b)$，使 $F(\eta)=0$.

由罗尔定理知存在 $\xi_1\in(a,\eta)$，$\xi_2\in(\eta,b)$，使得 $F'(\xi_1)=0$，$F'(\xi_2)=0$.

再由罗尔定理得，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得 $F''(\xi)=0$，即 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

(方法二)　为证明存在 $\eta\in(a,b)$ 使 $F(\eta)=0$，用反证法，假设不存在 $\eta\in(a,b)$，使 $F(\eta)=0$，由 $F(x)$ 的连续性知对一切 $x\in(a,b)$，$F(x)$ 恒大于零或恒小于零.

不妨设 $F(x)>0$，设 $g(x)$ 在 $x_0\in(a,b)$ 取到最大值，则

$$F(x_0)=f(x_0)-g(x_0)>0，\text{即 } f(x_0)>g(x_0)$$

从而可知 $f(x)$ 在(a,b)上的最大值必大于 $g(x)$ 在(a,b)上的最大值，这与题设矛盾，故存在 $\eta\in(a,b)$，使 $F(\eta)=0$.

以下同方法一.

【评注】　本题证明完全的考生并不多，错误多种多样，主要有：

(1) 部分考生将题设“存在相等的最大值”误解为“不但最大值相等，而且取得最大值的点也相同”，即存在 $\eta\in(a,b)$，使

$$f(\eta)=\max_{[a,b]}f(x)，g(\eta)=\max_{[a,b]}g(x)$$

这样 $f(\eta)=g(\eta)$，证明就简单多了，这显然是错误的.

(2) 有些考生不考虑题设条件，直接用柯西定理(柯西定理要求某函数导数不为零)，可能是受“只要题中有两个函数的导数等式，就用柯西中值定理”的误导.

(3) 还有考生见到题目条件中有二阶可导，就想到用泰勒公式，这同样是受某些参考书中的“解题套路”的影响.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

第三章　一元函数积分学

本章导读

一元函数积分学是微积分的另一个主要内容. 与微分学不同,积分是研究函数整体性质的,其中不定积分是微分的逆运算,定积分是一种和式的极限,微积分基本定理和牛顿－莱布尼茨公式阐明了微分学和积分学的内在联系,换元法和分部积分法是计算不定积分和定积分的两种主要方法,微元法是用定积分解决几何、物理等问题的一种常用的基本方法. 一元函数积分是多元函数积分的基础.

本章主要内容有:

(1) 不定积分与原函数的概念,求不定积分的两种主要方法 —— 换元法,分部积分法;

(2) 定积分的概念、性质及计算方法(换元、分部),变上限积分及其导数;

(3) 反常积分的概念与计算;

(4) 定积分应用(几何,物理).

试题特点

定积分与不定积分是积分学的两个基本概念,计算不定积分和定积分是微积分的基本运算,是考研的一个重点,定积分应用是考研试卷中应用题考的最多的一个内容.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

本章常考题型

(1) 不定积分、定积分及反常积分的计算;

(2) 变上限积分及其应用;

(3) 用定积分计算几何、物理量;

(4) 一元微积分学的综合题.

考题详析

一、不定积分的计算

1 (1993,三(2)题,5分) 求$\int \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x$.

【解】 令$\sqrt{\mathrm{e}^x-1}=u$,则$x=\ln(1+u^2)$,$\mathrm{d}x=\frac{2u}{1+u^2}\mathrm{d}u$,

从而

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx = \int \frac{(1+u^2)\ln(1+u^2)}{u}\cdot\frac{2u}{1+u^2}du$$

$$= 2\int \ln(1+u^2)du$$

$$= 2u\ln(1+u^2) - 4\int \frac{u^2}{1+u^2}du$$

$$= 2u\ln(1+u^2) - 4u + 4\arctan u + C$$

$$= 2x\sqrt{e^x-1} - 4\sqrt{e^x-1} + 4\arctan\sqrt{e^x-1} + C$$

2 (1994，三(3)题，5分) 求$\int \frac{dx}{\sin 2x + 2\sin x}$.

【解】 (方法一)　原式$= \int \frac{dx}{2\sin x(\cos x+1)} = \frac{1}{4}\int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{d\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}\int \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}d\tan\frac{x}{2}$$

$$= \frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

(方法二)　原式$= \int \frac{dx}{2\sin x(\cos x+1)} = \int \frac{\sin x dx}{2(1-\cos^2 x)(\cos x+1)}$

$$\xlongequal{\cos x = u} -\frac{1}{2}\int \frac{du}{(1-u^2)(1+u)} = -\frac{1}{4}\int \frac{(1-u)+(1+u)}{(1-u^2)(1+u)}du$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\int \frac{du}{(1+u)^2} + \int \frac{du}{1-u^2}\right] = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{1+u} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}\right) + C$$

$$= \frac{1}{4(1+\cos x)} - \frac{1}{8}\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x} + C$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

3 (2001，三题，6分) 求$\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx$.

【解】 $\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}}dx = -\frac{1}{2}\int \arctan e^x de^{-2x} = -\frac{1}{2}e^{-2x}\arctan e^x + \frac{1}{2}\int \frac{e^{-x}}{1+e^{2x}}dx$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\arctan e^x + \frac{1}{2}\int \frac{de^x}{e^{2x}(1+e^{2x})}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\arctan e^x + \frac{1}{2}\left[\int \frac{de^x}{e^{2x}} - \int \frac{de^x}{1+e^{2x}}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\arctan e^x - \frac{1}{2e^x} - \frac{1}{2}\arctan e^x + C$$

$$= -\frac{1}{2}(e^{-2x}\arctan e^x + e^{-x} + \arctan e^x) + C$$

4 (2004，2题，4分) 已知$f'(e^x) = xe^{-x}$，且$f(1) = 0$，则$f(x) =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}(\ln x)^2$.

【解析】 (方法一)　令$e^x = t$，则由$f'(e^x) = xe^{-x}$知，

$$f'(t) = \frac{\ln t}{t}$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

$$f(t)=\int\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t=\int\ln t\mathrm{d}\ln t=\frac{1}{2}(\ln t)^2+C$$

由 $f(1)=0$ 得，$C=0$，则

$$f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2$$

（方法二） 等式 $f'(\mathrm{e}^x)=x\mathrm{e}^{-x}$ 两端对 e^x 积分得

$$\int f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}\mathrm{e}^x=\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}\mathrm{e}^x$$

则

$$f(\mathrm{e}^x)=\int x\mathrm{e}^{-x}\cdot\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2+C$$

令 $\mathrm{e}^x=t$，则 $f(t)=\frac{1}{2}(\ln t)^2+C$.

以下同方法一.

二、定积分概念、性质及几何意义

5 (1994，二(1) 题，3 分) 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4x\mathrm{d}x$，$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3x+\cos^4x)\mathrm{d}x$，$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3x-\cos^4x)\mathrm{d}x$，则有

(A) $N<P<M$.　　(B) $M<P<N$.

(C) $N<M<P$.　　(D) $P<M<N$.

【答案】 D.

【解析】 由 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & \text{当 } f(x) \text{ 为奇函数}\\ 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & \text{当 } f(x) \text{ 为偶函数}\end{cases}$，可知

$$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4x\mathrm{d}x=0$$

$$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3x+\cos^4x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4x\mathrm{d}x>0$$

$$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3x-\cos^4x)\mathrm{d}x=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4x\mathrm{d}x<0$$

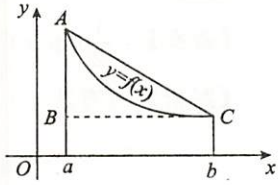
则 $P<M<N$，故应选(D).

6 (1997，二(2) 题，3 分) 设在区间 $[a,b]$ 上函数 $f(x)>0$，$f'(x)<0$，$f''(x)>0$. 令 $S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$S_2=f(b)(b-a)$，$S_3=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$，则

(A) $S_1<S_2<S_3$.　(B) $S_2<S_1<S_3$.　(C) $S_3<S_1<S_2$.　(D) $S_2<S_3<S_1$.

【答案】 B.

【解析】 由 $f(x)>0$，$f'(x)<0$，$f''(x)>0$ 可知曲线 $y=f(x)$ 如右图.



$S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为曲线 $y=f(x)$，$x=a$，$x=b$ 及 x 轴围成曲边梯形

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

面积.

$S_2 = f(b)(b-a)$ 为线段 BC 与 $x=a, x=b$ 及 x 轴所围矩形面积.

$S_3 = \frac{1}{2}[f(b)+f(a)](b-a)$ 为线段 AC 与 $x=a, x=b$ 及 x 轴围成梯形的面积. 如图易得

$$S_2 < S_1 < S_3$$

故应选(B).

7 (1997,二(3)题,3分) 设 $F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t}\sin t\,dt$,则 $F(x)$

(A) 为正常数.　(B) 为负常数.　(C) 恒为零.　(D) 不为常数.

【答案】 A.

【解析】 (方法一)　由于 $e^{\sin t}\sin t$ 为以 2π 为周期的函数,则

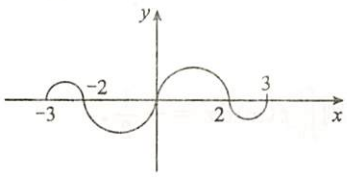
$$I = \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t}\sin t\,dt = \int_0^{2\pi} e^{\sin t}\sin t\,dt$$

为常数,也可由 $\frac{d}{dx}\int_x^{x+2\pi} e^{\sin t}\sin t\,dt = e^{\sin(x+2\pi)}\sin(x+2\pi) - e^{\sin x}\sin x \equiv 0$,则 $I \equiv C$.

$$\begin{aligned} I = I(0) &= \int_0^{2\pi} e^{\sin t}\sin t\,dt = -\int_0^{2\pi} e^{\sin t}\,d\cos t \\ &= -\cos t e^{\sin t}\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\cos^2 t e^{\sin t}dt \\ &= \int_0^{2\pi}\cos^2 t e^{\sin t}dt > 0 \end{aligned}$$

则 I 为正常数,故应选(A).

8 (2007,3题,4分) 如图所示,连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2],[2,3]$ 上的图形分别是直径为1的上、下半圆周,在区间 $[-2,0],[0,2]$ 上的图形分别是直径为2的下、上半圆周,设 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$,则下列结论正确的是



(A) $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$.

(B) $F(3) = \frac{5}{4}F(2)$.

(C) $F(-3) = \frac{3}{4}F(2)$.

(D) $F(-3) = -\frac{5}{4}F(-2)$.

【答案】 C.

【解析】 (方法一)　四个选项中出现的 $F(x)$ 在四个点上的函数值可根据定积分的几何意义确定.

$$F(3) = \int_0^3 f(t)dt = \int_0^2 f(t)dt + \int_2^3 f(t)dt = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3}{8}\pi$$

$$F(2) = \int_0^2 f(t)dt = \frac{\pi}{2}$$

$$F(-2) = \int_0^{-2} f(t)dt = -\int_{-2}^0 f(t)dt = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$F(-3) = \int_0^{-3} f(t)dt = -\int_{-3}^0 f(t)dt = -\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{8}\pi$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

则 $F(-3)=\frac{3}{4}F(2)$，故应选(C).

(方法二)　由定积分几何意义知 $F(2)>F(3)>0$，排除(B).

又由 $f(x)$ 的图形可知 $f(x)$ 为奇函数，则 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数，从而

$$F(-3)=F(3)>0, F(-2)=F(2)>0$$

显然排除(A)和(D)，故选(C).

【评注】 (1) 部分考生选(A)，可能是没注意到

$$F(-2)=\int_0^{-2} f(t)\mathrm{d}t=-\int_{-2}^0 f(t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$$

误以为 $F(-2)=\int_0^{-2} f(t)\mathrm{d}t=-\frac{\pi}{2}$；

(2) 方法二简单，这里用到一个基本结论：设 $f(x)$ 是连续函数，则

$$f(x)\text{ 为奇函数}\Rightarrow F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\text{ 为偶函数}$$

$$f(x)\text{ 为偶函数}\Rightarrow F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\text{ 为奇函数}$$

三、定积分计算

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

9 (1989，一(2)题，3分) 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，则 $f(x)=$ _____.

【答案】 $x-1$.

【解析】 等式 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ 两端从0到1积分，注意 $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ 是常数，则

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}x+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}$，

$$f(x)=x+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=x-1$$

10 (1990，三(1)题，5分) 求 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}\mathrm{d}x$.

【解】 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}\mathrm{d}x=\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}\frac{1}{2-x}$

$$=\frac{\ln(1+x)}{2-x}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(2-x)(1+x)}$$

$$=\ln 2-\frac{1}{3}\int_0^1\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2-x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\ln 2-\frac{1}{3}\ln\frac{1+x}{2-x}\Big|_0^1$$

$$=\ln 2-\frac{2}{3}\ln 2=\frac{1}{3}\ln 2$$

11 (1992,三(3)题,5分) 设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\leqslant 0\\ \mathrm{e}^{-x}, & x>0\end{cases}$,求$\int_1^3 f(x-2)\mathrm{d}x$.

【解】 令 $x-2=t$,则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$,

$$\text{原式}=\int_{-1}^{1}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{0}(1+t^2)\mathrm{d}t+\int_0^1\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\frac{7}{3}-\frac{1}{\mathrm{e}}$$

12 (2000,一(1)题,3分)$\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x=$_____.

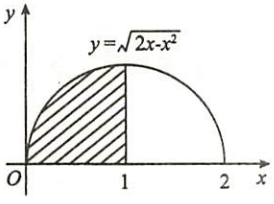
【答案】 $\frac{\pi}{4}$.

【解析】 (方法一) 原式 $=\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}x$.

令 $x-1=\sin t$,则 $\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$,

$$\text{上式}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^2 t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

(方法二) 由定积分几何意义知,定积分$\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x$在几何上表示曲线$y=\sqrt{2x-x^2}$与$x$轴及直线$x=1$所围$\frac{1}{4}$单位圆面积(如右图).则



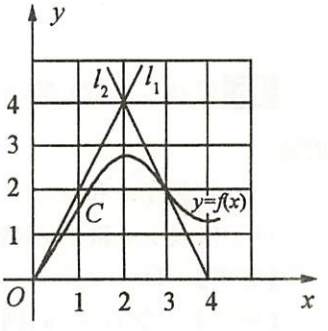
$$\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$$

【评注】 方法二主要是利用定积分的几何意义,常用结论有:

设 $a>0$,则$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi a^2}{4}$,$\int_0^a\sqrt{2ax-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi a^2}{4}$.

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

13 (2005,17题,11分) 如图,曲线 C 的方程为 $y=f(x)$,点(3,2)是它的一个拐点,直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点(0,0)与(3,2)处的切线,其交点为(2,4).设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数,计算定积分$\int_0^3(x^2+x)f'''(x)\mathrm{d}x$.



【分析】 本题要求的是幂函数与 $f(x)$ 的高阶导数乘积的定积分,通常的做法是用分部积分法,并从图中得到 $f(x)$ 的相关导数值和函数值.

【解】 由点(3,2)是曲线 $y=f(x)$ 的拐点知 $f''(3)=0$.由于直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点(0,0)与(3,2)处的切线,且由图中不难看出直线 l_1 与 l_2 的斜率分别为 2 和 -2 知,$f'(0)=2$,$f'(3)=-2$,且由图不难看出 $f(0)=0$,$f(3)=2$.则

$$\begin{aligned}\int_0^3(x^2+x)f'''(x)\mathrm{d}x&=\int_0^3(x^2+x)\mathrm{d}f''(x)=(x^2+x)f''(x)\Big|_0^3-\int_0^3(2x+1)f''(x)\mathrm{d}x\\&=-\int_0^3(2x+1)\mathrm{d}f'(x)=-(2x+1)f'(x)\Big|_0^3+2\int_0^3f'(x)\mathrm{d}x\\&=-[7\times(-2)-2]+2\int_0^3f'(x)\mathrm{d}x\\&=16+2f(x)\Big|_0^3=16+2(2-0)=20.\end{aligned}$$

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

【评注】 本题是一道微积分学的综合题，主要考查分部积分法和导数的几何意义. 与一般题不同的是，本题中 $f(x)$，$f'(x)$，$f''(x)$ 在相关点的值不是直接给出，而是隐含在图形中，考生的错误主要是两种：

(1) 有些考生误认为 $y=f(x)$ 是三次曲线，从而假设 $y=ax^3+bx^2+cx$；

(2) 由于概念不清，$f'(0)$，$f'(3)$，$f''(3)$ 求错.

14 (2007，11 题，4 分) $\int_1^2 \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}dx=$ _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{e}}{2}$.

【解析】 (方法一) $\int_1^2 \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}dx=-\int_1^2 \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}d\left(\frac{1}{x}\right)=-\int_1^2 \frac{1}{x}d(e^{\frac{1}{x}})=-\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\Big|_1^2+\int_1^2 e^{\frac{1}{x}}d\left(\frac{1}{x}\right)$

$$=-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}+e+e^{\frac{1}{x}}\Big|_1^2=\frac{\sqrt{e}}{2}$$

(方法二) 令 $\frac{1}{x}=t$，$x=\frac{1}{t}$，$dx=-\frac{1}{t^2}dt$，则

$$\int_1^2 \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}dx=-\int_1^{\frac{1}{2}} te^t dt=\int_{\frac{1}{2}}^1 tde^t=te^t\Big|_{\frac{1}{2}}^1-\int_{\frac{1}{2}}^1 e^t dt$$

$$=e-\frac{\sqrt{e}}{2}-e^t\Big|_{\frac{1}{2}}^1=e-\frac{\sqrt{e}}{2}-(e-\sqrt{e})=\frac{\sqrt{e}}{2}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

四、变上限积分函数及其应用

15 (1987，五(2) 题，3 分) 设 $f(x)$ 为已知连续函数，$I=t\int_0^{\frac{s}{t}} f(tx)dx$，其中 $s>0$，$t>0$，则 I 的值

(A) 依赖于 s 和 t.　　(B) 依赖于 s，t，x.

(C) 依赖于 t 和 x，不依赖于 s.　　(D) 依赖于 s，不依赖于 t.

【答案】 D.

【解析】 令 $tx=u$，则 $tdx=du$，

$$I=\int_0^s f(u)du$$

显然，I 只与 s 有关，故应选(D).

16 (1988，二(3) 题，3 分) 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $\int_0^{x^3-1} f(t)dt=x$，则 $f(7)=$ _____. (此题有误，$f(x)$ 不存在. 将条件改成 $\int_0^{x^3-1} f(t)dt=x-1$.)

【答案】 $\frac{1}{12}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【解析】 等式 $\int_0^{x^3-1} f(t)dt=x-1$ 两端对 x 求导得

$$3x^2 f(x^3-1)=1$$

上式中令 $x=2$ 得

$$12f(7)=1$$

则 $f(7)=\frac{1}{12}$.

17 (1990,二(1)题,3分) 设 $f(x)$ 是连续函数,且 $F(x)=\int_x^{e^{-x}}f(t)\mathrm{d}t$,则 $F'(x)$ 等于

(A) $-e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$.　　(B) $-e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$.

(C) $e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$.　　(D) $e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$.

【答案】 A.

【解析】 $F'(x)=f(e^{-x})(-e^{-x})-f(x)=-e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$,故选(A).

18 (1993,一(1)题,3分) 函数 $F(x)=\int_1^x\left(2-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t(x>0)$ 的单调减少区间为_____.

【答案】 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$.

【解析】 由 $F(x)=\int_1^x\left(2-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t,(x>0)$ 可知

$$F'(x)=2-\frac{1}{\sqrt{x}}\quad(x>0)$$

由此可知,当 $0<x<\frac{1}{4}$ 时,$F'(x)<0$,$F(x)$ 单调减少.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: diky66)

19 (1994,三(1)题,5分) 设 $\begin{cases}x=\cos t^2,\\ y=t\cos t^2-\int_1^{t^2}\frac{1}{2\sqrt{u}}\cos u\mathrm{d}u,\end{cases}$ 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 在 $t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 的值.

【解】
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\cos t^2-2t^2\sin t^2-\frac{1}{2\sqrt{t^2}}\cos t^2\cdot(2t)=-2t^2\sin t^2$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-2t\sin t^2$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=t$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=1\cdot\frac{1}{-2t\sin t^2}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

20 (1995,一(2)题,3分) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^0x\cos t^2\mathrm{d}t=$_____.

【答案】 $\int_{x^2}^0\cos t^2\mathrm{d}t-2x^2\cos x^4$.

【解析】 由于 $\int_{x^2}^0x\cos t^2\mathrm{d}t=x\int_{x^2}^0\cos t^2\mathrm{d}t$,则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x\int_{x^2}^0\cos t^2\mathrm{d}t=\int_{x^2}^0\cos t^2\mathrm{d}t-2x^2\cos x^4$.

21 (1997,五题,6分) 设函数 $f(x)$ 连续,$\varphi(x)=\int_0^1f(xt)\mathrm{d}t$,且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=A$($A$ 为常数),求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

【解】 由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$可知，$f(0)=0$，$\varphi(0)=0$. 令$u=xt$，则

$$\varphi(x)=\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x},(x\neq 0)$$

从而$\varphi'(x)=\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2},(x\neq 0)$.

由导数定义有

$$\varphi'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}$$

又 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$

$$=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}=\varphi'(0)$$

从而可知$\varphi'(x)$在$x=0$处连续.

22 (1998，二(1)题，3分) 设$f(x)$连续，则$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=$

(A)$xf(x^2)$. (B)$-xf(x^2)$. (C)$2xf(x^2)$. (D)$-2xf(x^2)$.

【答案】 A.

【解析】 (方法一) 直接法

令$x^2-t^2=u$，则$-2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}u$

$$\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}f(u)\mathrm{d}u$$

则$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}f(u)\mathrm{d}u=xf(x^2)$.

故应选(A).

(方法二) 排除法：取$f(x)\equiv 1$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x t\mathrm{d}t=x$$

显然，选项(B)(C)(D)都不正确，故应选(A).

23 (1999，一(2)题，3分) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x\sin(x-t)^2\mathrm{d}t=$ _____.

【答案】 $\sin x^2$.

【解析】 令$x-t=u$，则$-\mathrm{d}t=\mathrm{d}u$，

$$\int_0^x\sin(x-t)^2\mathrm{d}t=\int_0^x\sin u^2\mathrm{d}u$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x\sin(x-t)^2\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x\sin u^2\mathrm{d}u=\sin x^2$$

24 (1999，二(1)题，3分) 设$f(x)$是连续函数，$F(x)$是$f(x)$的原函数，则

(A) 当$f(x)$是奇函数时，$F(x)$必是偶函数.

(B) 当$f(x)$是偶函数时，$F(x)$必是奇函数.

(C) 当$f(x)$是周期函数时，$F(x)$必是周期函数.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时，$F(x)$ 必是单调增函数.

【答案】 A.

【解析】 (方法一)　直接法

由于 $f(x)$ 连续，则 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，由于 $f(x)$ 是奇函数，则 $F(x)$ 是偶函数，$F(x)+C$ 仍是偶函数，故应选(A).

(方法二)　排除法

$f(x)=x^2$ 为偶函数，$F(x)=\frac{1}{3}x^3+1$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，但 $F(x)$ 不是奇函数，则(B)不正确；取 $f(x)=1+\cos x$ 是周期函数，$F(x)=x+\sin x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，但 $F(x)=x+\sin x$ 不是周期函数，从而(C)不正确；取 $f(x)=x$，显然单调增，$F(x)=\frac{1}{2}x^2$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，而 $F(x)=\frac{1}{2}x^2$ 不单调，则(D)不正确，故应选(A).

【评注】 方法一中用到一个基本结论：设 $f(x)$ 连续，则当 $f(x)$ 为奇函数时，$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数；当 $f(x)$ 为偶函数时，$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为奇函数.

25 (2005，8题，4分) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，“$M\Leftrightarrow N$”表示 M 的充分必要条件是 N，则必有

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【答案】 A.

【解析】 (方法一)　若 $F(x)$ 是偶函数，由导函数的基本结论“可导的偶函数其导函数为奇函数”知，$F'(x)=f(x)$ 为奇函数.

反之，若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数，$f(x)$ 的任一原函数 $F(x)$ 可表示为

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$$

则 $F(x)$ 是偶函数.

故应选(A).

(方法二)　排除法：取 $f(x)=\cos x+1$，$F(x)=\sin x+x+1$，显然 $f(x)$ 连续，$F'(x)=f(x)$，且 $f(x)$ 是偶函数，周期函数，但 $F(x)$ 不是奇函数($F(0)\neq 0$)，也不是周期函数，排除(B)和(C)选项.

若取 $f(x)=x$，$F(x)=\frac{1}{2}x^2$，排除(D)，故应选(A).

【评注】 本题主要考查函数和其原函数之间的关系，主要结论有：

(1) 可导的偶函数的导函数为奇函数，而可导的奇函数的导函数为偶函数；

(2) 奇函数的原函数都是偶函数，而偶函数的原函数之一为奇函数；

(3) 可导的周期函数其导函数仍为周期函数(但周期函数的原函数并不一定是周期函数，(方法二)中已给出反例).

本题可直接利用(1)和(2)得出选项(A)正确.

26 (2008,1 题,4 分) 设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)\mathrm{d}t$,则 $f'(x)$ 的零点个数为

(A)0. (B)1. (C)2. (D)3.

【答案】 B.

【解析】 由于 $f'(x)=2x\ln(2+x^2)$ 且 $\ln(2+x^2)\neq 0$,则 $x=0$ 是 $f'(x)$ 唯一的零点,故应选(B).

27 (2008,18 题,10 分) 设函数 $f(x)$ 连续,

(Ⅰ) 利用定义证明函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 可导,且 $F'(x)=f(x)$;

(Ⅱ) 当 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数时,证明函数 $G(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$ 也是以 2 为周期的周期函数.

【证明】 (Ⅰ) 对任意的 x,由于函数 $f(x)$ 连续,所以

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_0^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}\quad\text{(积分中值定理)}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}f(\xi)\end{aligned}$$

其中 ξ 介于 x 与 $x+\Delta x$ 之间.

由 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(\xi)=f(x)$ 可知,函数 $F(x)$ 在 x 处可导,且 $F'(x)=f(x)$.

(Ⅱ)(方法一) 由于对任意的 x,有

$$\begin{aligned}G'(x+2)&=\left[2\int_0^{x+2}f(t)\mathrm{d}t-(x+2)\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t\right]'\\&=2f(x+2)-\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t=2f(x)-\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$G'(x)=\left(2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t\right)'=2f(x)-\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$$

所以 $G'(x+2)-G'(x)=0$,从而有

$$G(x+2)-G(x)=C\quad(C\text{ 为常数})$$

又 $G(0+2)-G(0)=G(2)-G(0)=0$,则

$$C=0,G(x+2)-G(x)=0$$

即 $G(x)$ 也是以 2 为周期的周期函数.

(方法二) 由于对任意 x,有

$$\begin{aligned}G(x+2)&=2\int_0^{x+2}f(t)\mathrm{d}t-(x+2)\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t\\&=2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t+2\int_2^{x+2}f(t)\mathrm{d}t-x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t\\&=2\int_2^{x+2}f(t)\mathrm{d}t-x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

$$\int_2^{x+2} f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{t=u+2} \int_0^x f(u+2)\mathrm{d}u = \int_0^x f(u)\mathrm{d}u = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

则 $G(x+2) = 2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t = G(x)$.

故 $G(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

（方法三）　由于对任意的 x，有

$$\begin{aligned} G(x+2) &= 2\int_0^{x+2} f(t)\mathrm{d}t - (x+2)\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + 2\int_x^{x+2} f(t)\mathrm{d}t - x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t - 2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 以 2 为周期，$\int_x^{x+2} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$，则

$$G(x+2) = 2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t = G(x)$$

故 $G(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

（方法四）　由于对任意的 x，有

$$G(x+2) = 2\int_0^{x+2} f(t)\mathrm{d}t - (x+2)\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{x+2} f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{u=t-2} \int_{-2}^x f(u+2)\mathrm{d}u = \int_{-2}^0 f(u)\mathrm{d}u + \int_0^x f(u)\mathrm{d}u$$

则

$$\begin{aligned} G(x+2) &= 2\int_{-2}^0 f(u)\mathrm{d}u + 2\int_0^x f(u)\mathrm{d}u - x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t - 2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t \\ &= G(x) + 2\int_{-2}^0 f(u)\mathrm{d}u - 2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t = G(x) \end{aligned}$$

故 $G(x)$ 也是以 2 为周期的函数.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【评注】（1）在（Ⅰ）的证明中考生有如下错误：

① $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)}{1}$，

上式中用了洛必达法则，这是错误的，因为变上限积分求导的结论正是本题要证的；

② $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{F'(\xi)\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\xi) = f(x)$，

上式中用到拉格朗日中值定理，但这里 $F(x)$ 可导正是本题要证的结论.

（2）在（Ⅱ）的证明中多次用到关于周期函数的结论：

若 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，则

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x$$

在（Ⅱ）的证明中考生有两个典型的错误：

① 因为 $f(x)$ 以 2 为周期，所以 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{x+2} f(t)\mathrm{d}t$；

② 因为 $G'(x)$ 以 2 为周期，则 $G(x)$ 也以 2 为周期.

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

五、与定积分有关的证明题

28 (1998,九题,6 分) 设 $y=f(x)$ 是区间$[0,1]$上的任一非负连续函数.

(1) 试证存在 $x_0\in(0,1)$,使得在区间$[0,x_0]$上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积等于在区间$[x_0,1]$上以 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形面积.

(2) 又设 $f(x)$ 在区间$(0,1)$内可导,且 $f'(x)>-\dfrac{2f(x)}{x}$,证明(1)中的 x_0 是唯一的.

【证明】 (方法一) (1) 设 $F(x)=x\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$,则 $F(0)=F(1)=0$,且

$$F'(x)=\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t-xf(x)$$

对 $F(x)$ 在$[0,1]$上应用罗尔定理知,存在一点 $x_0\in(0,1)$,使 $F'(x_0)=0$,因而

$$\int_{x_0}^1 f(x)\mathrm{d}x-x_0f(x_0)=0$$

即矩阵面积 $x_0f(x_0)$ 等于曲边梯形面积$\int_{x_0}^1 f(x)\mathrm{d}x$.

(2) 设 $\varphi(x)=\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t-xf(x)$,则当 $x\in(0,1)$ 时,有

$$\varphi'(x)=-f(x)-f(x)-xf'(x)<0$$

所以,$\varphi(x)$ 在区间$(0,1)$上单调减少,故此时(1)中的 x_0 是唯一的.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

(方法二) (1) 设在区间$(a,1)\left(a\geqslant\dfrac{1}{2}\right)$内取 x_1. 若在区间$[x_1,1]$上 $f(x)\equiv0$,则$(x_1,1)$内任一点都可作为 x_0,否则可设 $f(x_2)>0$ 为连续函数 $f(x)$ 在区间$[x_1,1]$上的最大值,$x_2\in[x_1,1]$.

在区间$[0,x_2]$上,作辅助函数 $\varphi(x)=\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t-xf(x)$,则 $\varphi(x)$ 连续,且 $\varphi(0)>0$,又

$$\varphi(x_2)=\int_{x_2}^1 f(t)\mathrm{d}t-x_2f(x_2)\leqslant(1-2x_2)f(x_2)<0$$

因而,由闭区间上的连续函数的介值定理,存在点 $x_0\in(0,x_2)\subset(0,1)$,使 $\varphi(x_0)=0$,即

$$\int_{x_0}^1 f(t)\mathrm{d}t=x_0f(x_0)$$

(2) 证法同上.

29 (2000,九题,6 分) 设函数 $f(x)$ 在$[0,\pi]$上连续,且$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$,$\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$. 试证:在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2,使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

【证明】 (方法一) 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,$0\leqslant x\leqslant\pi$,则有 $F(0)=0$,$F(\pi)=0$.

又因为

$$\begin{aligned}0&=\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=\int_0^\pi\cos x\mathrm{d}F(x)\\&=F(x)\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi F(x)\sin x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

$$= \int_0^{\pi} F(x)\sin x\mathrm{d}x$$

$$= \pi F(\xi)\sin\xi \quad (0<\xi<\pi)$$

又 $\sin\xi \neq 0$，则 $F(\xi)=0$. 由此可得

$$F(0)=F(\xi)=F(\pi)=0 \quad (0<\xi<\pi)$$

再对 $F(x)$ 在$[0,\xi]$，$[\xi,\pi]$ 上用罗尔定理知，至少存在 $\xi_1\in(0,\xi)$，$\xi_2\in(\xi,\pi)$，使

$$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$$

即 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

（方法二）　由积分中值定理知

$$0=\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\pi f(\xi_1) \quad (0<\xi_1<\pi)$$

则 $f(\xi_1)=0$.

若在$(0,\pi)$ 内 $f(x)=0$ 仅有一个实根 $x=\xi_1$，则由$\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=0$ 可知，$f(x)$ 在$(0,\xi_1)$ 与(ξ_1,π) 异号. 不妨设在$(0,\xi_1)$ 内 $f(x)>0$，在(ξ_1,π) 内 $f(x)<0$，于是再由

$$\int_0^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$$

及 $\cos x$ 在$[0,\pi]$ 上的单调性知

$$0=\int_0^{\pi} f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\xi_1} f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\mathrm{d}x+\int_{\xi_1}^{\pi} f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\mathrm{d}x$$

由于这里$\int_0^{\xi_1} f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\mathrm{d}x>0$，$\int_{\xi_1}^{\pi} f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\mathrm{d}x>0$. 上式左、右两端矛盾，从而可知，在$(0,\pi)$ 内除 ξ_1 外，$f(x)=0$ 至少还有另一实根 ξ_2. 故知存在 $\xi_1,\xi_2\in(0,\pi)$，且 $\xi_1\neq\xi_2$，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

六、反常积分的敛散性与计算

30 (2002，一(1) 题，3 分) $\int_e^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}=$ _____.

【答案】 1.

【解析】 $\int_e^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}=\int_e^{+\infty}\frac{1}{\ln^2 x}\mathrm{d}\ln x=-\frac{1}{\ln x}\Big|_e^{+\infty}=1.$

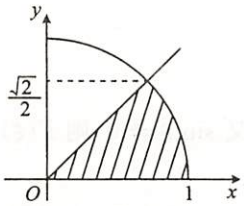
七、定积分的应用

31 (1987，一(3) 题，3 分) 由曲线 $y=\ln x$ 与两直线 $y=(\mathrm{e}+1)-x$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形的面积是_____.

【答案】 $\frac{3}{2}$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

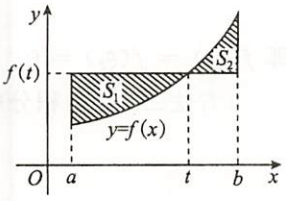
【解析】 所围平面图形如右图所示，所求面积为



$$S=\int_1^e \ln x\mathrm{d}x+\int_e^{e+1}[(e+1)-x]\mathrm{d}x=\frac{3}{2}$$

或 $S=\int_0^1[(e+1)-y-e^y]\mathrm{d}y=\frac{3}{2}$.

32 (1988，九题，9分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且在 (a,b) 内有 $f'(x)>0$. 证明：在 (a,b) 内存在唯一的 ξ，使曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(\xi)$，$x=a$ 所围平面图形面积 S_1 是曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(\xi)$，$x=b$ 所围平面图形面积 S_2 的3倍(如右图).



【证明】 先证存在性：在 $[a,b]$ 内任取一点 t，令

$$F(t)=\int_a^t[f(t)-f(x)]\mathrm{d}x-3\int_t^b[f(x)-f(t)]\mathrm{d}x$$

$$=(t-a)f(t)-\int_a^t f(x)\mathrm{d}x-3\int_t^b f(x)\mathrm{d}x+3(b-t)f(t)$$

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且在 (a,b) 内 $f'(x)>0$，

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)<f(x)<f(b)(x\in(a,b))$，则

$$F(a)=-3\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+3(b-a)f(a)<0$$

$$F(b)=(b-a)f(b)-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

由连续函数零点定理知，存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$F(\xi)=0$$

下面证明唯一性：由于

$$F'(t)=f(t)+(t-a)f'(t)-f(t)+3f(t)-3f(t)+3(b-t)f'(t)$$

$$=[(t-a)+3(b-t)]f'(t)>0$$

则 $F(t)$ 在 (a,b) 内单调增加，因此，在 (a,b) 内只有一个 ξ，使

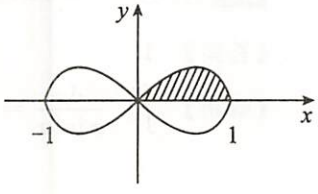
$$F(\xi)=0，即\ S_1=3S_2$$

33 (1993，二(2)题，3分) 双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 所围成的区域面积可用定积分表示为

(A) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta$.　(B) $4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta$.　(C) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos 2\theta}\mathrm{d}\theta$.　(D) $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2\theta)^2\mathrm{d}\theta$.

【答案】 A.

【解析】 由双纽线方程知，其图形关于 x 轴和 y 轴都对称. 如右图，其极坐标方程为



$$r^2=\cos 2\theta$$

其在第一象限 θ 的变化范围为 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$. 则其在第一象限所围图形面积为

$$S_1=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}r^2\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta$$

由对称性知，总面积为

$$S=4S_1=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

故应选(A).

34 (1996,三(1)题,5分) 求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 的全长,其中 $a>0$ 是常数.

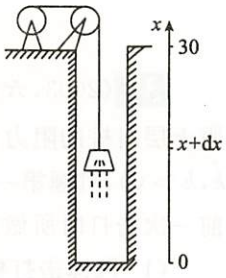
【解】 $r'(\theta)=-a\sin\theta$.

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta \\ &= a\sqrt{(1+\cos\theta)^2+(-\sin\theta)^2}\,d\theta \\ &= 2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta \end{aligned}$$

由对称性可知,所求心形线全长为

$$s=2\int_0^{\pi}2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta=8a$$

35 (1999,七题,6分) 为清除井底的污泥,用缆绳将抓斗放入井底,抓起污泥后提出井口(见图). 已知井深 30 m,抓斗自重 400 N,缆绳每米重 50 N,抓斗抓起的污泥重 2000 N,提升速度为 3 m/s,在提升过程中,污泥以 20 N/s 的速率从抓斗缝隙中漏掉,现将抓起污泥的抓斗提升至井口,问克服重力需做多少焦耳的功?



(说明:①1 N×1 m=1 J;其中 m,N,s,J 分别表示米,牛顿,秒,焦耳. ②抓斗的高度及位于井口上方的缆绳长度忽略不计.)

【解】 (方法一) 作 x 轴如图所示,将抓起污泥的抓斗提升到井口所作功

$$W=W_1+W_2+W_3$$

其中 W_1 是克服抓斗自重做的功;W_2 是克服缆绳重力做的功;W_3 是提出污泥所做的功,由题意知

$$W_1=400\times30=12000$$

$$dW_2=50(30-x)dx$$

从而

$$W_2=\int_0^{30}50(30-x)dx=22500$$

在时间间隔$[t,t+dt]$内提升污泥所做的功为 $dW_3=3(2000-20t)dt$,

$$W_3=\int_0^{10}3(2000-20t)dt=57000$$

则共需作功

$$W=W_1+W_2+W_3=12000+22500+57000=91500(\text{J})$$

(方法二) 以时间 t 为积分变量,在时间间隔$[t,t+dt]$内克服重力所做的功为

$$dW=[400+(30-3t)50+(2000-20t)]3dt$$

$$W=\int_0^{10}[400+(30-3t)50+(2000-20t)]3dt=91500(\text{J})$$

36 (2003,三题,10分) 过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线,该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

(1) 求 D 的面积 A;

(2) 求 D 绕直线 $x=e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.

【解】 设切点为$(x_0,\ln x_0)$,则切线斜率为 $y'(x_0)=\dfrac{1}{x_0}$,切线方程为

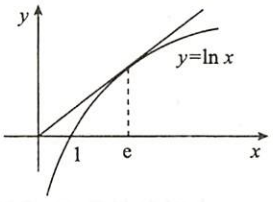
$$y=\ln x_0+\frac{1}{x_0}(x-x_0)$$

微信公众号(数学考研)
(ID: dgkyb)

由已知该切线经过原点(0,0),得 $\ln x_0 = 1$,所以 $x_0 = e$.

于是切点为(e,1),切线方程为 $y = \frac{x}{e}$.

(1) 所求面积为



$$A = \int_0^1 (e^y - ey)dy = \frac{1}{2}e - 1$$

或

$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot 1 - \int_1^e \ln x dx = \frac{1}{2}e - 1$$

(2) 体积为

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi e^2 \cdot 1 - \pi \int_0^1 (e - e^y)^2 dy$$

$$= \frac{\pi}{6}(5e^2 - 12e + 3)$$

37 (2003,六题,10 分) 某建筑工程打地基时,需用汽锤将桩打进土层. 汽锤每次击打,都将克服土层对桩的阻力而作功. 设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比(比例系数为 k,$k > 0$),汽锤第一次击打将桩打进地下 a(m). 根据设计方案,要求汽锤每次击打桩时所做的功与前一次击打时所做的功之比为常数 $r(0 < r < 1)$. 问:

(1) 汽锤击打桩 3 次后,可将桩打进地下多深?

(2) 若击打次数不限,汽锤至多能将桩打进地下多深?(注:m 表示长度单位米.)

【解】 (1) 建立坐标系,地面作为坐标原点,向下方向为 x 轴的正向. 设第 n 次打击后,桩被打下 x_n,第 n 次打击时,汽锤所做的功为 $W_n(n = 1,2,\cdots)$. 由题设知,当桩被打进地下的深度为 x 时,土层对桩的阻力大小为 kx,所以

$$W_1 = \int_0^{x_1} kx dx = \frac{k}{2}x_1^2 \quad (x_1 = a)$$

$$W_2 = \int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2)$$

$$W_3 = \int_{x_2}^{x_3} kx dx = \frac{k}{2}(x_3^2 - x_2^2)$$

所以,$W_1 + W_2 + W_3 = \frac{k}{2}x_3^2$,又 $W_3 = rW_2 = r^2 W_1$,因此

$$\frac{k}{2}x_3^2 = (1 + r + r^2)W_1 = (1 + r + r^2)\frac{k}{2}a^2$$

于是

$$x_3 = \sqrt{1 + r + r^2}a$$

(2) 由归纳法知

$$x_n = \sqrt{1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}}a = \sqrt{\frac{1 - r^n}{1 - r}}a$$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \frac{a}{\sqrt{1 - r}}$$

微信公众号:数学考研(ID: djky66)

第四章　向量代数和空间解析几何

本章导读

本章内容只在硕士研究生入学考试数学试题数学一中要求.此部分考题较少,不是说该内容不重要,在考试复习中也要重视这方面的内容.

试题特点

单独出题的几率较小,即使出题也多为选择题或填空题,试题难度不大.但多元函数微分学在几何中的应用、重积分、曲线和曲面积分的题目有许多涉及到空间解析几何.主要要掌握向量的概念、运算及其运算性质,会求各种形式的直线及平面方程,特别是要记住常见的几种曲面方程以及它们在各坐标面上的投影.

考题详析

一、向量运算

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

例1 (1995,一(3)题,3分) 已知$(a\times b)\cdot c=2$,则$[(a+b)\times(b+c)]\cdot(c+a)=$_____.

【答案】 4.

【解析】 利用向量的运算性质计算即可.

$$\begin{aligned}&[(a+b)\times(b+c)]\cdot(c+a)\\&=(a\times b+b\times b+a\times c+b\times c)\cdot(c+a)\\&=(a\times b)\cdot c+(a\times c)\cdot c+(b\times c)\cdot c+(a\times b)\cdot a+(a\times c)\cdot a+(b\times c)\cdot a\\&=(a\times b)\cdot c+(b\times c)\cdot a=2(a\times b)\cdot c=4.\end{aligned}$$

二、直线与平面

例2 (1987,一(1)题,3分) 与两直线$\begin{cases}x=1\\y=-1+t\\z=2+t\end{cases}$及$\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$都平行,且过原点的平面方程为_____.

【答案】 $x-y+z=0$.

【解析】 本题主要考查直线的参数方程与标准方程、向量的向量积及平面的点法式方程.也可以利用待定系数法,根据题中条件定出所求平面方程$Ax+By+Cz+D=0$中的系数.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

（方法一） 由题意知直线 $L_1:\begin{cases}x=1\\y=-1+t\\z=2+t\end{cases}$ 的方向向量为 $s_1=\{0,1,1\}$，

直线 $L_2:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 的方向向量为 $s_2=\{1,2,1\}$.

由于所求平面与直线 L_1、L_2 都平行，所以平面的法向量为

$$n=s_1\times s_2=\begin{vmatrix}i&j&k\\0&1&1\\1&2&1\end{vmatrix}=\{-1,1,-1\}$$

又因为平面过原点，故其方程为 $x-y+z=0$.

（方法二） 设所求的平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，其过原点得 $D=0$.

由题意 $\{A,B,C\}$ 与 s_1,s_2 均垂直，则有

$$\begin{cases}B+C=0\\A+2B+C=0\end{cases}\text{，解之得}\begin{cases}B=-C\\A=C\end{cases}\text{，}$$

进而所求的方程为 $x-y+z=0$.

3 (1989，二(2)题，3分) 已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x+2y+z-1=0$，则点 P 的坐标是

(A)$(1,-1,2)$. (B)$(-1,1,2)$. (C)$(1,1,2)$. (D)$(-1,-1,2)$.

【答案】 C.

【解析】 本题考查曲面的切平面的求法以及两个平面平行的充要条件.

设切点是 $P(x_0,y_0,z_0)$，则切平面的法向量是 $n=\{2x_0,2y_0,1\}$，它与平面 $2x+2y+z-1=0$ 的法向量平行，故有 $\dfrac{2x_0}{2}=\dfrac{2y_0}{2}=\dfrac{1}{1}$. 由此可得：$x_0=1,y_0=1,z_0=4-x_0^2-y_0^2=2$，故选(C).

4 (1990，一(1)题，3分) 过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线 $\begin{cases}x=-t+2\\y=3t-4\\z=t-1\end{cases}$ 垂直的平面方程是_____.

【答案】 $x-3y-z+4=0$.

【解析】 直线的方向向量即为所求平面的法向量.

由于所求平面与已知直线垂直，故所求平面的法向量为$\{-1,3,1\}$，又知此平面过点 $M(1,2,-1)$，因此平面的点法式方程为

$$(-1)(x-1)+3(y-2)+(z+1)=0$$

即 $x-3y-z+4=0$.

5 (1991，一(3)题，3分) 已知两条直线的方程是

$$L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1},L_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$$

则过 L_1 且平行于 L_2 的平面方程是_____.

【答案】 $x-3y+z+2=0$.

【解析】 根据题意，所求平面应过直线 L_1，从而过直线 L_1 上的点$(1,2,3)$，另外所求平面的法向量 n 与已知直线 L_1 与 L_2 的方向向量都垂直，从而可取

$$n=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=i-3j+k$$

于是所求平面方程为$(x-1)-3(y-2)+(z-3)=0$,即$x-3y+z+2=0$.

6 (1992,二(3)题,3分)在曲线$x=t,y=-t^2,z=t^3$的所有切线中,与平面$x+2y+z=4$平行的切线

(A) 只有1条.　　(B) 只有2条.

(C) 至少有3条.　　(D) 不存在.

【答案】 B.

【解析】 利用曲线的切线的方向向量与平面的法向量垂直.

所给曲线上对应于t值点处的切线的方向向量为$\{1,-2t,3t^2\}$,若要求该切线与已知平面平行,则有$\{1,-2t,3t^2\}\cdot\{1,2,1\}=0$,即

$$1-4t+3t^2=0$$

解得$t_1=\frac{1}{3},t_2=1$.因此,正确选项是(B).

7 (1993,二(3)题,3分)设有直线$L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+8}{1}$与$L_2:\begin{cases}x-y=6,\\2y+z=3,\end{cases}$则$L_1$与$L_2$的夹角为

(A) $\frac{\pi}{6}$.　　(B) $\frac{\pi}{4}$.　　(C) $\frac{\pi}{3}$.　　(D) $\frac{\pi}{2}$.

【答案】 C.

【解析】 只需求两条直线的方向向量的夹角.直线L_1的方向向量是$s_1=\{1,-2,1\}$.

直线L_2的方向向量是

$$s_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-i-j+2k$$

从而直线L_1与L_2的夹角φ的余弦为

$$\cos\varphi=\frac{s_1\cdot s_2}{|s_1|\cdot|s_2|}=\frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{1}{2}$$

因此

$$\varphi=\frac{\pi}{3}$$

答案选(C).

8 (1995,二(1)题,3分)设有直线$L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$及平面$\Pi:4x-2y+z-2=0$,则直线$L$

(A) 平行于Π.　　(B) 在Π上.　　(C) 垂直于Π.　　(D) 与Π斜交.

【答案】 C.

【解析】 先求出直线L的方向向量,判断其与平面Π的法向量间的关系.

L的方向向量

$$s=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -10 \end{vmatrix}=-28i+14j-7k=\{-28,14,-7\}=-7\{4,-2,1\}.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

Π 的法向量 $\boldsymbol{n}=\{4,-2,1\}$，显然 $s /\!/ n$，因而 $L \perp \Pi$.

9 (1996，一(2)题，3分) 设一平面经过原点及点(6，−3，2)，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，则此平面方程为_____.

【答案】 $2x+2y-3z=0$.

【解析】 (方法一) 设 $M(x,y,z)$ 是所求平面上的任一点，则向量 $\{x,y,z\}$ 与向量 $\{6,-3,2\}$ 以及向量 $\{4,-1,2\}$ 的混合积为零，即

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0$$

化简得 $2x+2y-3z=0$，即为所求的平面方程.

(方法二) 所求平面的法向量可取为

$$\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 6 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$$

故所求的平面方程为 $-4x-4y+6z=0$，即 $2x+2y-3z=0$.

10 (2006，4题，4分) 点(2，1，0) 到平面 $3x+4y+5z=0$ 的距离 $d=$ _____.

【答案】 $\sqrt{2}$.

【解析】 直接利用点到平面距离公式

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

进行计算，其中 (x_0,y_0,z_0) 为点的坐标，$Ax+By+Cz+D=0$ 为平面方程.

$$d=\frac{|3\times 2+4\times 1+5\times 0|}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}}=\sqrt{2}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

三、求旋转面的方程

15 (1998，三题，5分) 求直线 $l:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 $\Pi:x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 l_0 的方程，并求 l_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程.

【分析】 过直线 l 作垂直于平面 Π 的平面 Π_1，这两个平面的交线即为 l_0，再将 l_0 表示为 y 的参数方程，进而得到旋转面的方程. 求平面 Π_1 方程可以有多种方法.

【解】 (方法一) 过直线 l 作垂直于平面 Π 的平面 Π_1，平面 Π_1 的法向量

$$\boldsymbol{n}_1=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$$

又(1，0，1) 为直线 l 上的点，Π_1 的方程为

$$x-1-3y-2(z-1)=0$$

即

$$x-3y-2z+1=0$$

从而 l_0 的方程为　$l_0:\begin{cases}x-y+2z-1=0\\x-3y-2z+1=0\end{cases}$

将 l_0 写成参数 y 的方程　$\begin{cases}x=2y\\z=-\frac{1}{2}(y-1)\end{cases}$

所以，l_0 绕 y 轴旋转一周所成旋转曲面的方程为 $x^2+z^2=(2y)^2+\left[-\frac{1}{2}(y-1)\right]^2$，即

$$4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0$$

（方法二）　用平面束方程，直线 $l:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$ 的方程可写为

$$\begin{cases}x-y-1=0\\y+z-1=0\end{cases}$$

过直线 l 的平面束方程为

$$x-y-1+\lambda(y+z-1)=0$$

即　$$x+(\lambda-1)y+\lambda z-\lambda-1=0$$

使它与平面 Π 垂直，有 $1-(\lambda-1)+2\lambda=0$，得 $\lambda=-2$，于是 Π_1 的方程为

$$x-3y-2z+1=0$$

以下同方法一.

（方法三）　直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=1-t\end{cases}$，代入平面 Π 的方程，得 $t=1$，因此直线 l 与平面 Π 的交点为 $M_1(2,1,0)$.

过直线 l 上的点 $M_0(1,0,1)$ 作平面 Π 的垂线 $l_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$.

直线 l_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+t\\y=-t\\z=1+2t\end{cases}$，代入平面 Π 的方程，得 $t=-\frac{1}{3}$.

因此直线 l_1 与平面 Π 的交点为 $M_2\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

M_1 与 M_2 的连线即为所求的 $l_0:\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$.

以 y 为参数，直线 l_0 的方程可表示为 $\begin{cases}x=2y\\z=-\frac{1}{2}(y-1)\end{cases}$，

所以，l_0 绕 y 轴旋转一周所成旋转曲面的方程为 $x^2+z^2=(2y)^2+\left[-\frac{1}{2}(y-1)\right]^2$，即

$$4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

第五章　多元函数的微分学

本章导读

本章主要研究二元函数的偏导数、全微分等概念，要掌握计算它们的各种方法以及它们的应用. 一元函数中的许多结论可以推广到二元函数中来，但有些结论是不成立的. 二元函数微分学比一元函数的微分学要复杂的多，我们要掌握它们的共同规律，踏踏实实地做一些题目，一定会收到预期的效果.

试题特点

每年试题一般是一个大题、一个小题，分数约占试卷的 8%，主要考查复合函数求偏导数及多元函数的极值，难度不是很大. 一定要熟练掌握复合函数求偏导数的公式，特别要注意抽象函数求高阶偏导数的题目，以及复合函数求偏导数的方法在隐函数求偏导中的应用. 同时，多元函数微分学在几何中的应用和求函数的极值、最值也是考研数学的一个重点.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

考题详析

一、求多元函数的偏导数及全微分

1 (1987，三(1)题，3分) 设 f,g 为连续可微函数，$u=f(x,xy)$，$v=g(x+xy)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

【解】　由复合函数的求导方法得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1+yf'_2,\frac{\partial v}{\partial x}=(1+y)g'$$

所以 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=(1+y)g'(f'_1+yf'_2)$.

【评注】　应注意 u,v 虽然都是 x,y 的二元函数，但它们复合的形式有所不同，f,g 在形式上一个是二元函数一个是一元函数.

2 (1988，四题，6分) 设 $u=yf\left(\dfrac{x}{y}\right)+xg\left(\dfrac{y}{x}\right)$，其中函数 f,g 具有二阶连续导数，求 $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

【解】　由复合函数求导法得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yf'\frac{1}{y}+g+xg'\left(-\frac{y}{x^2}\right)=f'+g-\frac{y}{x}g'$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{y}f''+\left(-\frac{y}{x^2}\right)g'+\frac{y}{x^2}g'-\frac{y}{x}\left(-\frac{y}{x^2}\right)g''=\frac{1}{y}f''+\frac{y^2}{x^3}g''$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{x}{y^2}f''+\frac{1}{x}g'-\frac{1}{x}g'-\frac{y}{x}\frac{1}{x}g''=-\frac{x}{y^2}f''-\frac{y}{x^2}g''$$

所以 $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=x\left(\frac{1}{y}f''+\frac{y^2}{x^3}g''\right)+y\left(-\frac{x}{y^2}f''-\frac{y}{x^2}g''\right)=0.$

【评注】 $f\left(\frac{x}{y}\right),g\left(\frac{y}{x}\right)$ 中间变量是一个，导数应记为 f',g'，不能出现 f'_x,f'_y 等记号.

3 (1989，三(1)题，5分) 设 $z=f(2x-y)+g(x,xy)$，其中函数 $f(t)$ 二阶可导，$g(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解】 由复合函数求导法得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2f'+g'_1+yg'_2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2f''+xg''_{12}+g'_2+xyg''_{22}$$

【评注】 当 $z=g(u,v)$，u,v 不是自变量 x,y 时，对第一个中间变量求偏导简单记为 g'_1，对第二个中间变量求偏导简单记为 g'_2，g'_1,g'_2 仍应看做中间变量 u,v 的函数. $f(2x-y)$ 中间变量是一个，导数应记为 f'，不能出现 f'_x,f'_y 等记号.

4 (1990，三(2)题，5分) 设 $z=f(2x-y,y\sin x)$，其中 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

【解】 由复合函数求导法得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2f'_1+y\cos xf'_2$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=2(-f''_{11}+\sin xf''_{12})+\cos x[f'_2+y(-f''_{21}+\sin xf''_{22})]\\&=-2f''_{11}+(2\sin x-y\cos x)f''_{12}+\cos xf'_2+y\sin x\cos xf''_{22}\end{aligned}$$

【评注】 当 $z=f(u,v)$，u,v 不是自变量 x,y 时，对第一个中间变量求偏导简单记为 f'_1，对第二个中间变量求偏导简单记为 f'_2. f'_1,f'_2 仍应看做中间变量 u,v 的函数.

5 (1991，一(2)题，3分) 由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分 $dz=$ _____.

【答案】 $dx-\sqrt{2}dy$.

【解析】 可以利用三种方法求解，即求导法、全微分法及公式法.

(方法一) 方程两边分别对 x,y 求偏导

$$yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{x+z\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0,xz+xy\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{y+z\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0$$

令 $x=1,y=0,z=-1$，得 $\frac{\partial z}{\partial x}=1,\frac{\partial z}{\partial y}=-\sqrt{2}$，有 $dz=dx-\sqrt{2}dy$.

(方法二) 令 $F(x,y,z)=xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}-\sqrt{2}$，有

$$\frac{\partial F}{\partial x}=yz+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{\partial F}{\partial y}=xz+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{\partial F}{\partial z}=xy+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

得

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0,-1)}=-\left.\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right|_{(1,0,-1)}=1,\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0,-1)}=-\left.\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right|_{(1,0,-1)}=-\sqrt{2}$$

所以 $dz=dx-\sqrt{2}dy$.

(方法三) 对方程两边求微分,有

$$yzdx+xzdy+yzdx+\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0$$

令 $x=1,y=0,z=-1$,得 $-dy+\frac{dx-dz}{\sqrt{2}}=0$,有 $dz=dx-\sqrt{2}dy$.

【评注】 上述三种解法最好都能掌握,根据不同的题目可选择不同的方法.

6 (1992,三(2)题,5分) 设 $z=f(e^x\sin y,x^2+y^2)$,其中 f 具有二阶连续偏导数,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解】 由复合函数求导法得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1e^x\sin y+2xf'_2$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=(f''_{11}e^x\cos y+2yf''_{12})e^x\sin y+f'_1e^x\cos y+2x(f''_{21}e^x\cos y+2yf''_{22})\\&=f''_{11}e^{2x}\sin y\cos y+2e^xf''_{12}(y\sin y+x\cos y)+4xyf''_{22}+f'_1e^x\cos y\end{aligned}$$

【评注】 此题是抽象函数求偏导数,但因涉及到二阶偏导数,故应注意对中间变量 u,v 求完一阶偏导数后,仍应看做中间变量 u,v 的函数. 习惯上,当 $z=f(u,v)$,u,v 不是自变量 x,y 时,对第一个中间变量求偏导简单记为 f'_1,对第二个中间变量求偏导简单记为 f'_2.

7 (1994,一(3)题,3分) 设 $u=e^{-x}\sin\frac{x}{y}$,则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 在点 $\left(2,\frac{1}{\pi}\right)$ 处的值为_____.

【答案】 π^2e^{-2}.

【解析】 $\frac{\partial u}{\partial x}=-e^{-x}\sin\frac{x}{y}+\frac{1}{y}e^{-x}\cos\frac{x}{y}=e^{-x}\left(\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}-\sin\frac{x}{y}\right)$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=e^{-x}\left(-\frac{1}{y^2}\cos\frac{x}{y}+\frac{x}{y^3}\sin\frac{x}{y}+\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\right)$$

因而 $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|_{\left(2,\frac{1}{\pi}\right)}=e^{-2}(-\pi^2\cos 2\pi+2\pi^3\sin 2\pi+2\pi^2\cos 2\pi)=\pi^2e^{-2}$.

【评注】 由于 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$,所以本题还可求 $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right|_{\left(2,\frac{1}{\pi}\right)}$.

8 (1994,二(2)题,3分) 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$,$f'_y(x_0,y_0)$ 存在是 $f(x,y)$ 在该点连续的

(A) 充分条件而非必要条件.　　(B) 必要条件而非充分条件.

(C) 充分必要条件.　　(D) 既非充分条件又非必要条件.

【答案】 D.

【解析】 取 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

可计算 $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$，但 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续.

取 $f(x,y)=|x|+|y|$，显然 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续，但 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{x}$，此极限不存在，即 $f'_x(0,0)$ 不存在.

答案应选(D).

9 (1995，三(1)题，5分) 设 $u=f(x,y,z)$，$\varphi(x^2,e^y,z)=0$，$y=\sin x$，其中 f，φ 都具有一阶连续偏导数，且 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\neq0$，求 $\dfrac{du}{dx}$.

【分析】　由已知可看出，经过复合 u 是 x 的一元函数. 利用复合函数求导法求 $\dfrac{du}{dx}$.

【解】
$$\frac{du}{dx}=f'_x+f'_y\frac{dy}{dx}+f'_z\frac{dz}{dx}$$

而
$$\frac{dy}{dx}=\cos x$$

方程 $\varphi(x^2,e^y,z)=0$ 两边对 x 求导得 $2x\varphi'_1+\varphi'_2e^y\dfrac{dy}{dx}+\varphi'_3\dfrac{dz}{dx}=0$，

即 $2x\varphi'_1+\varphi'_2e^y\cos x+\varphi'_3\dfrac{dz}{dx}=0$，有

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{2x\varphi'_1+\varphi'_2e^y\cos x}{\varphi'_3}$$

故 $\dfrac{du}{dx}=f'_x+f'_y\cos x-f'_z\dfrac{1}{\varphi'_3}(2x\varphi'_1+e^{\sin x}\cos x\varphi'_2)$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

10 (1996，二(1)题，3分) 已知 $\dfrac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$ 为某函数的全微分，则 a 等于

(A) -1.　　(B) 0.　　(C) 1.　　(D) 2.

【答案】 D.

【解析】　令 $P=\dfrac{x+ay}{(x+y)^2}$，$Q=\dfrac{y}{(x+y)^2}$，$Pdx+Qdy$ 为某函数的全微分，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

而 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{a(x+y)^2-2(x+ay)(x+y)}{(x+y)^4}=\dfrac{a(x+y)-2(x+ay)}{(x+y)^3}$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{-2y}{(x+y)^3}$，

则 $-2x-2ay+ax+ay=-2y$，故 $a=2$.

答案选(D).

11 (1997，二(1)题，3分) 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处

(A) 连续，偏导数存在.　　(B) 连续，偏导数不存在.

(C) 不连续，偏导数存在.　　(D) 不连续，偏导数不存在.

【答案】 C.

【解析】　利用连续及偏导数的定义.

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}\xlongequal{y=x}\dfrac{1}{2}\neq0=f(0,0)$，从而 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续，排除(A)(B).

由偏导数的定义 $f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{0-0}{x}=0$，由对称性 $f'_y(0,0)=0$，排

除(D).

答案选(C).

12 (1998,一(2)题,3分) 设函数 $z=\frac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)$,函数 f、φ 具有二阶连续导数,则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ _____.

【答案】 $yf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y)$.

【解析】 这是一个半抽象函数的求二阶混合偏导数的问题.

(方法一) 常规求偏导数的方法.

因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}f(xy)+\frac{1}{x}f'(xy)y+y\varphi'(x+y)$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=-\frac{1}{x^2}f'(xy)x+\frac{1}{x}f''(xy)xy+\frac{1}{x}f'(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y)\\&=yf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y)\end{aligned}$$

(方法二) 利用二阶混合偏导数相等.

因为函数 f,φ 具有连续的二阶导数,则二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 是连续的,即 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\equiv\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$. 因此,两个二阶混合偏导数可以交换次序.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

因为

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}f'(xy)\cdot x+\varphi(x+y)+y\cdot\varphi'(x+y)$$

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=yf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y)$$

【评注】 本题的两种计算方法,虽然都是逐项求偏导数,但顺序不同,其计算的工作量也大不相同.

13 (1999,三题,5分) 设 $y=y(x),z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数,其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数,求 $\frac{dz}{dx}$.

【分析】 由三个变元、两个方程构成的方程组确定了两个一元函数 $y=y(x),z=z(x)$,方程组中两个方程两边分别对 x 求导,解出 $\frac{dz}{dx}$.

【解】 方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 两边分别对 x 求导得

$$\begin{cases}\frac{dz}{dx}=f+xf'\left(1+\frac{dy}{dx}\right)\\F'_x+F'_y\frac{dy}{dx}+F'_z\frac{dz}{dx}=0\end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases}-xf'\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=f+xf'\\F'_y\frac{dy}{dx}+F'_z\frac{dz}{dx}=-F'_x\end{cases}$$

解得 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{(f+xf')F'_y-xf'F'_x}{F'_y+xf'F'_z}(F'_y+xf'F'_z\neq 0)$

【评注】 实际此题同时也可求出$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

14 (2000,四题,5分) 设$z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)$,其中$f$具有二阶连续偏导数,$g$具有二阶连续导数,求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解】 用复合函数求偏导的方法得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf'_1+\frac{1}{y}f'_2-\frac{y}{x^2}g'$$

从而 $$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=f'_1+y\left(xf''_{11}-\frac{x}{y^2}f''_{12}\right)-\frac{1}{y^2}f'_2+\frac{1}{y}\left(xf''_{21}-\frac{x}{y^2}f''_{22}\right)-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''\\&=f'_1-\frac{1}{y^2}f'_2+xyf''_{11}-\frac{x}{y^3}f''_{22}-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''\end{aligned}$$

15 (2001,四题,6分) 设函数$z=f(x,y)$在点(1,1)处可微,且$f(1,1)=1,\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2$,$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3,\varphi(x)=f(x,f(x,x))$,求$\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\right|_{x=1}$.

【分析】 利用复合函数求导的方法,关键是求$\dfrac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}$.

【解】 由题意 $\varphi(1)=f(1,f(1,1))=f(1,1)=1$,

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\right|_{x=1}&=\left.3\varphi^2(x)\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}\\&=\left.3\varphi^2(x)\{f'_1[x,f(x,x)]+f'_2[x,f(x,x)][f'_1(x,x)+f'_2(x,x)]\}\right|_{x=1}\\&=3\times 1^2\times\{f'_1(1,1)+f'_2(1,1)[f'_1(1,1)+f'_2(1,1)]\}\\&=3\times 1\times[2+3(2+3)]=51\end{aligned}$$

【评注】 求$\dfrac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}$时一定注意不能少项.

16 (2002,二(1)题,3分) 考虑二元函数$f(x,y)$的下面4条性质:

①$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续.

②$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的两个偏导数连续.

③$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微.

④$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的两个偏导数存在.

若用"$P\Rightarrow Q$"表示可由性质P推出性质Q,则有

(A)②⇒③⇒①. (B)③⇒②⇒①.

(C)③⇒④⇒①. (D)③⇒①⇒④.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【答案】 A.

【解析】 本题主要考查二元函数在一点处两个偏导数连续、可微,两个偏导数存在及连续之间的关系.$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的两个偏导数连续是$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微的充分条件.

$f(x,y)$在点(x_0,y_0)可微是$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续的充分条件.

答案为(A).

17 (2005,9题,4分) 设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)\mathrm{d}t$,其中函数 φ 具有二阶导数,ψ 具有一阶导数,则必有

(A) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　(B) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(C) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　(D) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

【答案】 B.

【解析】 因为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x+y)+\varphi'(x-y)+\psi(x+y)-\psi(x-y)$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(x+y)-\varphi'(x-y)+\psi(x+y)+\psi(x-y),$$

于是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi''(x+y)-\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)+\psi'(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y),$$

可见有 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$,应选(B).

【评注】 本题综合考查了复合函数求偏导和隐函数求偏导以及高阶偏导的计算.作为做题技巧,也可取 $\varphi(t)=t^2$,$\psi(t)=1$,则 $u(x,y)=2x^2+2y^2+2y$,容易验算只有 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 成立,同样可找到正确选项(B).

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

18 (2005,10题,4分) 设有三元方程 $xy-z\ln y+\mathrm{e}^{xz}=1$,根据隐函数存在定理,存在点(0,1,1)的一个邻域,在此邻域内该方程

(A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z=z(x,y)$.

(B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $z=z(x,y)$.

(C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y=y(x,z)$ 和 $z=z(x,y)$.

(D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$.

【答案】 D.

【解析】 $F(x,y,z)=xy-z\ln y+\mathrm{e}^{xz}-1$,则

$$F'_x=y+\mathrm{e}^{xz}z,F'_y=x-\frac{z}{y},F'_z=-\ln y+\mathrm{e}^{xz}x,$$

且 $F'_x(0,1,1)=2,F'_y(0,1,1)=-1,F'_z(0,1,1)=0$.

由此可确定相应的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$.故应选(D).

【评注】 隐函数存在定理直接考查,有部分考生感到较生疏.实际上本题也可从隐函数求偏导公式着手分析:若偏导表达式有意义,相应偏导数也就存在.

19 (2007,12题,4分) 设 $f(u,v)$ 是二元可微函数,$z=f(x^y,y^x)$,则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ _____.

【答案】 $f'_1\cdot yx^{y-1}+f'_2\cdot y^x\ln y$.

【解析】 利用复合函数的求导公式,可直接得出

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial(x^y)}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial(y^x)}{\partial x}=f'_1\cdot yx^{y-1}+f'_2\cdot y^x\ln y$$

【评注】　二元复合函数求偏导时，最好设出中间变量，注意计算的正确性.

二、求多元函数的极值

20 (2002，八题，7分) 设有一小山，取它的底面所在的平面为 xOy 坐标面，其底部所占的区域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2-xy\leqslant 75\}$，小山的高度函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$.

(1) 设 $M(x_0,y_0)$ 为区域 D 上一点，问 $h(x,y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大?若记此方向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$，试写出 $g(x_0,y_0)$ 的表达式.

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动，为此需要在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点，也就是说，要在 D 的边界线 $x^2+y^2-xy=75$ 上找出使(1) 中的 $g(x,y)$ 达到最大值的点，试确定攀登起点的位置.

【解】　(1) 由于

$$\begin{aligned}\mathbf{grad}\,h(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}&=\frac{\partial h}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}\boldsymbol{i}+\frac{\partial h}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}\boldsymbol{j}\\&=(y_0-2x_0)\boldsymbol{i}+(x_0-2y_0)\boldsymbol{j}\\\left|\mathbf{grad}\,h(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}\right|&=\sqrt{(y_0-2x_0)^2+(x_0-2y_0)^2}\end{aligned}$$

于是 $h(x,y)$ 沿方向 $(y_0-2x_0)\boldsymbol{i}+(x_0-2y_0)\boldsymbol{j}$ 的方向导数取得最大值，其最大值为

$$g(x_0,y_0)=\sqrt{(y_0-2x_0)^2+(x_0-2y_0)^2}$$

(2) 令 $f(x,y)=g^2(x,y)=(y-2x)^2+(x-2y)^2$，由题意只需求 $f(x,y)$ 在约束条件

$$\varphi(x,y)=75-x^2-y^2+xy=0$$

下的最大值点. 用拉格朗日乘数法，令

$$\begin{aligned}F(x,y,\lambda)&=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)\\&=(y-2x)^2+(x-2y)^2+\lambda(75-x^2-y^2+xy)\end{aligned}$$

则有

$$\begin{cases}F'_x=-4(y-2x)+2(x-2y)+\lambda(-2x+y)=0 & ①\\F'_y=2(y-2x)-4(x-2y)+\lambda(-2y+x)=0 & ②\\F'_\lambda=75-x^2-y^2+xy=0 & ③\end{cases}$$

① 与 ② 相加得 $(x+y)(2-\lambda)=0$，所以 $x+y=0$ 或 $\lambda=2$.

当 $\lambda=2$ 时，由 ① 或 ② 皆可得 $y=x$，代入 ③ 解得可能的条件极值点为 $P_1(-5\sqrt{3},-5\sqrt{3})$，$P_2(5\sqrt{3},5\sqrt{3})$.

当 $x+y=0$ 时，由 ③ 解得可能的条件极值点为 $P_3(5,-5)$，$P_4(-5,5)$.

由于 $f(P_1)=f(P_2)=150$，$f(P_3)=f(P_4)=450$，所以点 $P_3(5,-5)$ 或 $P_4(-5,5)$ 可作为攀登的起点.

【评注】　此题看上去是一个实际问题，其实题中已明确是求解一个数学问题.

21 (2003，二(3) 题，4分) 已知函数 $f(x,y)$ 在点(0,0) 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则

(A) 点(0,0) 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

微信公众号（考类考研）
(ID:djky66)

(B) 点(0,0)是 $f(x,y)$ 的极大值点.

(C) 点(0,0)是 $f(x,y)$ 的极小值点.

(D) 根据所给条件无法判断点(0,0)是否为 $f(x,y)$ 的极值点.

【答案】 A.

【解析】 由已知得 $f(0,0)=0$,因此点(0,0)是否为 $f(x,y)$ 的极值,关键看在点(0,0)的充分小的邻域内 $f(x,y)$ 是恒大于零、恒小于零还是变号.

由 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$ 知,分子的极限必为零,从而有 $f(0,0)=0$,且 $f(x,y)-xy\approx(x^2+y^2)^2$($|x|$,$|y|$ 充分小时),于是

$$f(x,y)-f(0,0)\approx xy+(x^2+y^2)^2$$

可见当 $y=x$ 且 $|x|$ 充分小时,$f(x,y)-f(0,0)\approx x^2+4x^4>0$;而当 $y=-x$ 且 $|x|$ 充分小时,$f(x,y)-f(0,0)\approx -x^2+4x^4<0$. 故点(0,0)不是 $f(x,y)$ 的极值点,应选(A).

【评注】 本题综合考查了多元函数的极限、连续和多元函数极值的概念,有一定难度.

22 (2004,19题,12分) 设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数,求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值.

【分析】 可能极值点是两个一阶偏导数为零的点,先求出一阶偏导,再令其为零确定极值点即可,然后用二阶偏导确定是极大值还是极小值,并求出相应的极值.

【解】 因为 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$,所以

$$2x-6y-2y\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$-6x+20y-2z-2y\frac{\partial z}{\partial y}-2z\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

令 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x-3y=0,\\ -3x+10y-z=0\end{cases}$

故 $\begin{cases}x=3y,\\ z=y.\end{cases}$

将上式代入 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$,可得

$$\begin{cases}x=9,\\ y=3,\\ z=3\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}x=-9,\\ y=-3,\\ z=-3.\end{cases}$$

再对上述两个一阶偏导数的式子求偏导数得

$$2-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$$

$$-6-2\frac{\partial z}{\partial x}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$$

$$20-2\frac{\partial z}{\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

所以 $$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(9,3,3)}=\frac{1}{6},B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(9,3,3)}=-\frac{1}{2},C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(9,3,3)}=\frac{5}{3}$$

故 $AC-B^2=\dfrac{1}{36}>0$,又 $A=\dfrac{1}{6}>0$,从而点(9,3)是 $z(x,y)$ 的极小值点,极小值为 $z(9,3)=3$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

类似地，由

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{1}{6},B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(-9,-3,-3)}=\frac{1}{2},C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{5}{3}$$

可知 $AC-B^2=\frac{1}{36}>0$，又 $A=-\frac{1}{6}<0$，从而点$(-9,-3)$是 $z(x,y)$ 的极大值点，极大值为

$$z(-9,-3)=-3$$

【评注】 本题讨论由方程所确定的隐函数求极值问题，关键是求可能极值点时应注意 x,y,z 满足原方程.

23 (2006，10 题，4 分) 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi_y'(x,y)\neq 0$，已知(x_0,y_0)是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是

(A) 若 $f_x'(x_0,y_0)=0$，则 $f_y'(x_0,y_0)=0$.

(B) 若 $f_x'(x_0,y_0)=0$，则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

(C) 若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f_y'(x_0,y_0)=0$.

(D) 若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

【答案】 D.

【解析】 作拉格朗日函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，并记对应 x_0,y_0 的参数 λ 的值为 λ_0，则

$$\begin{cases}F_x'(x_0,y_0,\lambda_0)=0,\\ F_y'(x_0,y_0,\lambda_0)=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}f_x'(x_0,y_0)+\lambda_0\varphi_x'(x_0,y_0)=0\\ f_y'(x_0,y_0)+\lambda_0\varphi_y'(x_0,y_0)=0\end{cases}$$

消去 λ_0，得

$$f_x'(x_0,y_0)\varphi_y'(x_0,y_0)-f_y'(x_0,y_0)\varphi_x'(x_0,y_0)=0$$

整理得 $f_x'(x_0,y_0)=\frac{1}{\varphi_y'(x_0,y_0)}f_y'(x_0,y_0)\varphi_x'(x_0,y_0)$(因为 $\varphi_y'(x,y)\neq 0$).

若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$. 故选(D).

【评注】 本题考查了二元函数极值的必要条件和拉格朗日乘数法.

24 (2007，17 题，11 分) 求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4,y\geqslant 0\}$ 上的最大值和最小值.

【分析】 本题求二元函数在闭区域的最值. 先求出函数在区域内的驻点，然后比较驻点的函数值和边界上的极值，则最大者为最大值，最小者为最小值.

【解】 函数在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<4,y>0\}$ 内的驻点.

$$\begin{cases}f_x'=2x-2xy^2=0\\ f_y'=4y-2x^2y=0\end{cases}$$

解得$\begin{cases}x=\pm\sqrt{2}\\ y=1\end{cases}$，相应的函数值 $f(\pm\sqrt{2},1)=2$.

函数在边界 $y=0,(-2\leqslant x\leqslant 2)$，

$$f(x,0)=x^2,-2\leqslant x\leqslant 2$$

最大值 $f(\pm 2,0)=4$，最小值 $f(0,0)=0$.

函数在边界 $x^2+y^2=4,y>0$，作拉格朗日函数

$$L(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2+\lambda(x^2+y^2-4)$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=2x-2xy^2+2\lambda x=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=4y-2x^2y+2\lambda y=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2-4=0,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}x=\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}},\\ y=\sqrt{\dfrac{3}{2}},\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=0,\\ y=2.\end{cases}$$

$$f\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\frac{7}{4},f(0,2)=8.$$

比较以上函数值,可得函数在区域 D 上的最大值为 8,最小值为 0.

【评注】 多元函数的最值问题,一般都用拉格朗日乘数法解决.利用拉格朗日乘数法确定目标函数的可能极值点后,不必一一检验它们是否为极值点,只要比较目标函数在这些点处的值,最大者为最大值,最小者为最小值.但当只有唯一的可能极值点时,目标函数在这点处必取到最值,究竟是最大值还是最小值需根据问题的实际意义判定.

25 (2008,17 题,11 分) 已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0,\\ x+y+3z=5,\end{cases}$ 求曲线 C 距 xOy 面最远和最近的点.

【分析】 点 (x,y,z) 到 xOy 平面的距离为 $|z|$,故求 C 上距离 xOy 面最远点和最近点的坐标,等价于求函数 $H=z^2$ 在条件 $x^2+y^2-2z^2=0$ 与 $x+y+3z=5$ 下的最大值点和最小值点.

【解】 设 $P(x,y,z)$ 为曲线 C 上的任意一点,则点 P 到 xOy 平面的距离为 $|z|$,问题转化为求 z^2 在约束条件 $x^2+y^2-2z^2=0$ 与 $x+y+3z=5$ 下的最值点.令拉格朗日函数为

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x^2+y^2-2z^2)+\mu(x+y+3z-5)$$

解方程组

$$\begin{cases}F'_x=2\lambda x+\mu=0\\ F'_y=2\lambda y+\mu=0\\ F'_z=2z-4\lambda z+3\mu=0\\ F'_\lambda=x^2+y^2-2z^2=0\\ F'_\mu=x+y+3z-5=0\end{cases}$$

由前两个式子得 $x=y$,从而 $\begin{cases}2x^2-2z^2=0\\ 2x+3z=5\end{cases}$,得可能极值点:

$$\begin{cases}x=1\\ y=1\\ z=1\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}x=-5\\ y=-5\\ z=5\end{cases}$$

根据几何意义,曲线 C 上存在距离 xOy 面最远的点和最近的点,故所求点依次为 $(-5,-5,5)$ 和 $(1,1,1)$.

【评注】 本题考查在两个约束条件 $\begin{cases}\varphi(x,y,z)=0,\\ \psi(x,y,z)=0\end{cases}$ 下的函数 $u=f(x,y,z)$ 的条件极值问题,可类似地构造拉格朗日函数

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$$

解出可能极值点后,直接代入目标函数计算函数值再比较大小确定相应的极值(或最值)即可.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

三、反问题

26 (1996,四(2)题,6分) 设变换$\begin{cases} u = x - 2y \\ v = x + ay \end{cases}$可把方程$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$化简为$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$,求常数$a$.

【分析】 在变换$\begin{cases} u = x - 2y, \\ v = x + ay \end{cases}$下,$z$可看做是通过$u,v$依赖于$x,y$的复合函数,由复合函数求导法则,将$z$关于$x,y$的偏导数转化为$z$关于$u,v$的偏导数,从而将$z$关于$x,y$的偏导数方程转化为$z$关于$u,v$的偏导数方程,进而求出$a$的值.

【解】
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -2\frac{\partial z}{\partial u} + a\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= -2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + (a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right) + a\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$= 4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 4a\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

因此代入原方程,并整理得

$$(10+5a)\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + (6+a-a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$$

由题意$6+a-a^2=0$,$10+5a \neq 0$,解得$a=3$.

【评注】 本题还可把z看做是通过x,y依赖于u,v的复合函数,$\begin{cases} x = \dfrac{au+2v}{a+2} \\ y = \dfrac{-u+v}{a+2} \end{cases}$,从$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$出发,利用$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$也可得到结果.

27 (2006,18题,12分) 设函数$f(u)$在$(0,+\infty)$内具有二阶导数,且$z = f(\sqrt{x^2+y^2})$满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

(Ⅰ) 验证$f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$;

(Ⅱ) 若$f(1)=0$,$f'(1)=1$,求函数$f(u)$的表达式.

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

【分析】 利用复合函数偏导数计算方法求出$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$,$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$代入$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$即可得(Ⅰ).按常规

方法解(Ⅱ)即可.

【解】 (Ⅰ)设 $u=\sqrt{x^2+y^2}$,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+f'(u)\cdot\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$$=f''(u)\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}+f'(u)\cdot\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}+f'(u)\cdot\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

将 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 代入 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$,得 $f''(u)+\frac{f'(u)}{u}=0$.

(Ⅱ)令 $f'(u)=p$,则 $p'+\frac{p}{u}=0\Rightarrow\frac{\mathrm{d}p}{p}=-\frac{\mathrm{d}u}{u}$,两边积分得

$$\ln p=-\ln u+\ln C_1$$

即 $p=\frac{C_1}{u}$,亦即 $f'(u)=\frac{C_1}{u}$.

由 $f'(1)=1$ 可得 $C_1=1$. 所以有 $f'(u)=\frac{1}{u}$,两边积分得 $f(u)=\ln u+C_2$.

由 $f(1)=0$ 可得 $C_2=0$,故 $f(u)=\ln u$.

【评注】 本题为基础题型,着重考查多元复合函数的偏导数的计算及可降阶方程的求解.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

四、求方向导数与梯度

28 (1989,一(4)题,3分)向量场 $\boldsymbol{u}(x,y,z)=xy^2\boldsymbol{i}+ye^x\boldsymbol{j}+x\ln(1+z^2)\boldsymbol{k}$ 在点 $P(1,1,0)$ 处的散度 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}=$ _____.

【答案】 2.

【解析】 向量场 $\boldsymbol{u}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$ 在点 (x,y,z) 处的散度 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$.

本题中 $P=xy^2,Q=ye^x,R=x\ln(1+z^2)$,则

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\big|_{(1,1,0)}=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\Big|_{(1,1,0)}=\left(y^2+e^x+\frac{2xz}{1+z^2}\right)\Big|_{(1,1,0)}=2$$

29 (1991,三(2)题,5分)设 n 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的指向外侧的法向量,求函数 $u=\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 n 的方向导数.

【分析】 先求出单位法向量 $\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$,则 u 在点 P 处沿方向 n 的方向导数有公式 $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_P=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_P\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_P\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_P\cos\gamma$.

【解】 设 $F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-6$,则

$$F'_x=4x,F'_y=6y,F'_z=2z$$

因此过点 $P(1,1,1)$ 处的指向外侧的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{4,6,2\}$，单位化得 $\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{14}}\{2,3,1\}$.

又
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P=\left.\frac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_P=\frac{6}{\sqrt{14}},\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P=\left.\frac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_P=\frac{8}{\sqrt{14}}$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P=\left.-\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z^2}\right|_P=-\sqrt{14}$$

于是有
$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_P=\frac{6}{\sqrt{14}}\times\frac{2}{\sqrt{14}}+\frac{8}{\sqrt{14}}\times\frac{3}{\sqrt{14}}-\sqrt{14}\times\frac{1}{\sqrt{14}}=\frac{11}{7}$$

30 (1992，一(2)题，3分) 函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $\left.\mathbf{grad}\,u\right|_M=$ _____.

【答案】 $\frac{2}{9}\{1,2,-2\}$.

【解析】 直接根据梯度公式 $\mathbf{grad}\,u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$ 计算即可.

因为
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2+z^2},\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}$$

于是有
$$\left.\mathbf{grad}\,u\right|_M=\frac{2}{9}\boldsymbol{i}+\frac{4}{9}\boldsymbol{j}-\frac{4}{9}\boldsymbol{k}=\frac{2}{9}\{1,2,-2\}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

31 (1993，一(4)题，3分) 设数量场 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $\mathrm{div}(\mathbf{grad}\,u)=$ _____.

【答案】 $\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

【解析】
$$\mathrm{div}(\mathbf{grad}\,u)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$
$$=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

而
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{x^2+y^2+z^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2+z^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

故
$$\mathrm{div}(\mathbf{grad}\,u)=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$

32 (1996，一(4)题，3分) 函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿点 A 指向 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数为_____.

【答案】 $\frac{1}{2}$.

【解析】 先求出单位法向量 $\boldsymbol{n}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$，则 u 在点 A 处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数有公式：
$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_A=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A\cdot\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A\cdot\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A\cdot\cos\gamma$$

$$\boldsymbol{n}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{\{2,-2,1\}}{3}=\left\{\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right\}$$

又

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A=\left.\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\right|_A=\frac{1}{2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A=\left.\frac{y}{(x+\sqrt{y^2+z^2})\sqrt{y^2+z^2}}\right|_A=0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A=\left.\frac{z}{(x+\sqrt{y^2+z^2})\sqrt{y^2+z^2}}\right|_A=\frac{1}{2}$$

于是所求的方向导数

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_A=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+0+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$$

33 (2001,一(2)题,3分)设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,则 $\operatorname{div}(\mathbf{grad}\ r)|_{(1,-2,2)}=$ _____.

【答案】 $\frac{2}{3}$.

【解析】 本题主要考查散度与梯度的混合运算.

因为

$$\operatorname{div}(\mathbf{grad}\ r)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)$$

而

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r},\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)=\frac{r-x\dfrac{\partial r}{\partial x}}{r^2}=\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3},\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)=\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3},\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)=\frac{1}{r}-\frac{z^2}{r^3}$$

故

$$\operatorname{div}(\mathbf{grad}\ r)|_{(1,-2,2)}=\left(\frac{3}{r}-\frac{x^2+y^2+z^2}{r^3}\right)\Big|_{(1,-2,2)}=\left.\frac{2}{r}\right|_{(1,-2,2)}=\frac{2}{3}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【评注】 (1)设某向量场

$$\boldsymbol{A}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

则向量场 A 在场中的任意一点(x,y,z)处的散度为

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

(2)对数量场 r 作用一个梯度(grad),就得到一个向量场 $\mathbf{grad}\ r$. 再对一个向量场 $\mathbf{grad}\ r$ 作用一个散度(div),就得到一个数量场

$$\operatorname{div}(\mathbf{grad}\ r)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}$$

34 (2005,3题,4分)设函数 $u(x,y,z)=1+\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{18}$,单位向量 $\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$,则 $\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(1,2,3)}=$ _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【解析】 因为 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{3},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{6},\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{9}$,于是所求方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(1,2,3)}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

【评注】　本题若 $\boldsymbol{n}=\{m,t,l\}$ 非单位向量，则应先将其单位化，从而得方向余弦为：

$$\cos\alpha=\frac{m}{\sqrt{m^2+t^2+l^2}},\cos\beta=\frac{t}{\sqrt{m^2+t^2+l^2}},\cos\gamma=\frac{l}{\sqrt{m^2+t^2+l^2}}.$$

35 (2008,2 题,4 分) 函数 $f(x,y)=\arctan\frac{x}{y}$ 在点(0,1)处的梯度等于

(A)$\boldsymbol{i}$.　　(B)$-\boldsymbol{i}$.　　(C)$\boldsymbol{j}$.　　(D)$-\boldsymbol{j}$.

【答案】 A.

【解析】 直接利用公式 $\mathbf{grad}f(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\boldsymbol{j}$.

因为

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}=\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}=-\frac{x}{x^2+y^2}$$

于是

$$\mathbf{grad}f(x,y)\Big|_{(0,1)}=f'_x(0,1)\boldsymbol{i}+f'_y(0,1)\boldsymbol{j}=1\cdot\boldsymbol{i}+0\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}$$

故应选(A).

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

五、多元函数微分学的几何应用

36 (1993,一(2)题,3 分) 由曲线 $\begin{cases}3x^2+2y^2=12\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转面在点$(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$处的指向外侧的单位法向量为_____.

【答案】 $\frac{1}{\sqrt{5}}\{0,\sqrt{2},\sqrt{3}\}$.

【解析】 先写出旋转面的方程，再求曲面在点$(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$处的法向量.

曲线 $\begin{cases}3x^2+2y^2=12\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转面为

$$3(x^2+z^2)+2y^2=12$$

令 $F(x,y,z)=3(x^2+z^2)+2y^2-12$，则

$$F'_x=6x,F'_y=4y,\ F'_z=6z$$

在点$(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$处的法向量为$\{0,4\sqrt{3},6\sqrt{2}\}$，于是点$(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$处指向外侧的单位法向量为$\frac{1}{\sqrt{5}}\{0,\sqrt{2},\sqrt{3}\}$.

37 (1994,一(2)题,3 分) 曲面 $z-e^z+2xy=3$ 在点(1,2,0)处的切平面方程为_____.

【答案】 $2x+y-4=0$.

【解析】 求出切平面的法向量，利用点法式写出切平面方程.

令 $F(x,y,z)=z-e^z+2xy-3$，则

$$F'_x=2y,F'_y=2x,\ F'_z=1-e^z$$

在点(1,2,0)处的切平面的法向量为{4,2,0}，于是点(1,2,0)处的切平面方程为

$$4(x-1)+2(y-2)=0,\text{即}\ 2x+y-4=0$$

38 (1997，四(1)题，6分) 设直线 $l:\begin{cases}x+y+b=0,\\x+ay-z-3=0\end{cases}$ 在平面 Π 上，而平面 Π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点(1，−2，5)，求 a,b 之值.

【分析】 首先利用多元函数微分学的知识容易求出曲面 $z=x^2+y^2$ 过点(1，−2，5)的切平面方程 Π，而直线 l 在平面 Π 上，可将直线方程直接代入平面 Π 中，也可利用平面束方法，找到与 Π 重合的平面，从而求出 a,b 之值.

【解】 (方法一) 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2-z$，则 $F'_x=2x,F'_y=2y,F'_z=-1$. 在点(1，−2，5)处曲面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,-4,-1)$，于是切平面方程为

$$2(x-1)-4(y+2)-(z-5)=0$$

即

$$2x-4y-z-5=0$$

由 $l:\begin{cases}x+y+b=0,\\x+ay-z-3=0\end{cases}$ 得 $y=-x-b,z=x-3+a(-x-b)$.

代入平面 Π 方程，得

$$2x+4x+4b-x+3+ax+ab-5=0$$

故

$$5+a=0,4b+ab-2=0$$

由此解得 $a=-5,b=-2$.

(方法二) 由方法一知，平面 Π 的方程为 $2x-4y-z-5=0$.

过直线 $l:\begin{cases}x+y+b=0,\\x+ay-z-3=0\end{cases}$ 的平面束为

$$x+y+b+\lambda(x+ay-z-3)=0$$

即

$$(1+\lambda)x+(1+a\lambda)y-\lambda z+b-3\lambda=0$$

其与平面 Π 重合，要求

$$\frac{1+\lambda}{2}=\frac{1+a\lambda}{-4}=\frac{-\lambda}{-1}=\frac{b-3\lambda}{-5}$$

解得 $\lambda=1,a=-5,b=-2$.

39 (2000，一(2)题，3分) 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点(1，−2，2)的法线方程为_____.

【答案】 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-2}{6}$.

【解析】 本题考查曲面在一点处的法线方程. 关键是求出法线的方向向量，而此方向向量恰是曲面在点(1，−2，2)处的法向量.

设 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$，则曲面在点(1，−2，2)处的法向量，即法线的方向向量为

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

$$\{F'_x,F'_y,F'_z\}\Big|_{(1,-2,2)}=\{2x,4y,6z\}\Big|_{(1,-2,2)}=\{2,-8,12\}=2\{1,-4,6\}$$

故所求法线方程为$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-8}=\frac{z-2}{12}$,即$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-2}{6}$.

40 (2001,二(2)题,3分)设函数$f(x,y)$在点(0,0)附近有定义,且$f'_x(0,0)=3,f'_y(0,0)=1$,则

(A)$dz\Big|_{(0,0)}=3dx+dy$.

(B)曲面$z=f(x,y)$在点$(0,0,f(0,0))$的法向量为$\{3,1,1\}$.

(C)曲线$\begin{cases}z=f(x,y)\\y=0\end{cases}$在点$(0,0,f(0,0))$的切向量为$\{1,0,3\}$.

(D)曲线$\begin{cases}z=f(x,y)\\y=0\end{cases}$在点$(0,0,f(0,0))$的切向量为$\{3,0,1\}$.

【答案】 C.

【解析】 题设只知道一点的偏导数存在,但不一定可微,因此可立即排除(A);至于(B),(C),(D)则需要通过具体的计算才能进行区分.令$F(x,y,z)=z-f(x,y)$,则有

$$F'_x=-f'_x,F'_y=-f'_y,F'_z=1$$

因此过点$(0,0,f(0,0))$的法向量为$\pm\{-3,-1,1\}$,可排除(B).

曲线$\begin{cases}z=f(x,y),\\y=0\end{cases}$可表示为参数形式:

$$\begin{cases}x=x\\y=0\\z=f(x,0)\end{cases}$$

其在点$(0,0,f(0,0))$的切线方向向量为$\pm\{1,0,f'_x(0,0)\}=\pm\{1,0,3\}$,故正确选项为(C).

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【评注】 由于偏导数存在并不一定能保证函数可微,不一定能保证曲面$z=f(x,y)$在相应点$(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$处存在切平面,因此即使将选项(B)换为法线向量$\{3,1,-1\}$或$\{-3,-1,1\}$,选项(B)依然是错误的.

41 (2003,一(2)题,4分)曲面$z=x^2+y^2$与平面$2x+4y-z=0$平行的切平面的方程是_____.

【答案】 $2x+4y-z=5$.

【解析】 待求平面的法向量为$n=\{2,4,-1\}$,因此只需确定切点坐标即可求出平面方程,而切点坐标可根据曲面$z=x^2+y^2$切平面的法向量与$n=\{2,4,-1\}$平行确定.

令$F(x,y,z)=z-x^2-y^2$,则

$$F'_x=-2x,F'_y=-2y,F'_z=1$$

设切点坐标为(x_0,y_0,z_0),则切平面的法向量为$\{-2x_0,-2y_0,1\}$,其与已知平面$2x+4y-z=0$平行,因此有

$$\frac{-2x_0}{2}=\frac{-2y_0}{4}=\frac{1}{-1}$$

可解得$x_0=1,y_0=2$,相应地有$z_0=x_0^2+y_0^2=5$.

故所求的切平面方程为$2(x-1)+4(y-2)-(z-5)=0$,即$2x+4y-z=5$.

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

第六章　重积分

本章导读

本章考查的重点是二重积分的计算，除了掌握基本的计算方法，需注意对称性、拆分区域、拆分函数、交换积分次序、交换积分坐标系等的应用. 三重积分的考查要求较低.

试题特点

由于重积分可以糅合在线、面积分中，单独对重积分的测试不是每年试题中均出现，分数约占试卷的4%～5%. 主要集中在二重积分计算的考查，往往在被积函数和积分区域设置障碍，因而要掌握一定的方法和技巧. 另外，被积函数为抽象函数的二重积分值得关注.

考题详析

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

一、基本概念及性质

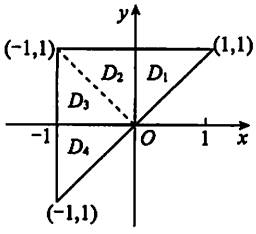
1 (1991，二(4)题，3分) 设 D 是 xOy 平面上以(1,1)，(−1,1) 和(−1，−1) 为顶点的三角形区域，D_1 是 D 的第一象限的部分，则 $\iint_D (xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 等于

(A) $2\iint_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.　　(B) $2\iint_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(C) $4\iint_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.　　(D) 0.

【答案】 A.

【解析】 根据被积函数的特点，把积分区域划分，再利用二重积分的对称性. 把积分区域 D 划分为如图 $D=D_1+D_2+D_3+D_4$.



令 $I_1=\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_2=\iint_D\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

由二重积分的对称性 $\iint_{D_1+D_2}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_3+D_4}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，

$$\iint_{D_3+D_4}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,\quad \iint_{D_1+D_2}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

于是

$$\iint_D(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I_1+I_2=2\iint_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故应选(A).

二、二重积分的基本计算

2 (1994,一(4)题,3分) 设区域 D 为 $x^2+y^2\leqslant R^2$,则 $\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ _____.

【答案】 $\frac{\pi R^4}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$.

【解析】 积分区域 D 关于直线 $y=x$ 对称,可利用二重积分的对称性计算;也可直接利用极坐标计算.

(方法一) 利用轮换对称性

$$\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left(\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi R^4}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

(方法二) 利用极坐标

$$\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\left(\frac{r^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{r^2\sin^2\theta}{b^2}\right)r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{4}R^4\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)\mathrm{d}\theta=\frac{\pi R^4}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

微信公众号(顺水考研)
(ID:shunshuikaoyan)

【评注】 方法一比方法二简便,有时利用轮换对称性计算二重积分会更方便.

3 (2002,五题,7分) 计算二重积分 $I=\iint\limits_D\mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

【分析】 本题的关键是 $\max\{x^2,y^2\}$ 的处理,也就是将积分区域 D 按 $\max\{x^2,y^2\}$ 的要求划分.

【解析】 (方法一) 利用分块函数的积分.

设 $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x\}$,$D_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,x\leqslant y\leqslant 1\}$,则

$$I=\iint\limits_D\mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x+\int_0^1y\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^1x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{e}-1$$

(方法二) 由于被积函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}=f(y,x)$,故

$$I=\iint\limits_Df(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}y$$

$$=\mathrm{e}-1$$

(方法三) 利用极坐标系.

$$I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}}\mathrm{e}^{r^2\cos^2\theta}r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}}\mathrm{e}^{r^2\sin^2\theta}r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\mathrm{e}^{r^2\cos^2\theta}\Big|_0^{\frac{1}{\cos\theta}}\right)\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin^2\theta}\mathrm{e}^{r^2\sin^2\theta}\Big|_0^{\frac{1}{\sin\theta}}\right)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2\theta}(\mathrm{e}-1)\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^2\theta}(\mathrm{e}-1)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1)\tan\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1)\cot\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\mathrm{e}-1$$

【评注】 本题的解法较多，同学们应从中理解、区别它们的优劣和繁简.

三、利用区域的对称性及函数的奇偶性计算积分

4 (1988，三(3)题，3分) 设有空间区域 $\Omega_1:x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,z\geqslant 0$；及 $\Omega_2:x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0$，则

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1}x\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}x\mathrm{d}v$.　(B) $\iiint\limits_{\Omega_1}y\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}y\mathrm{d}v$.

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1}z\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}z\mathrm{d}v$.　(D) $\iiint\limits_{\Omega_1}xyz\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}xyz\mathrm{d}v$.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

【答案】 C.

【解析】 利用三重积分的对称性.

Ω_1 关于 yOz 面和 zOx 面对称，被积函数 z 关于 x,y 均为偶函数，根据三重积分的对称性 $\iiint\limits_{\Omega_1}z\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}z\mathrm{d}v$. 答案选(C).

【评注】 可看出，(A)(B)(D)的左边均为零，而右边不等于零.

5 (2006，15题，10分) 设区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0\}$，计算二重积分

$$\iint_D\frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

【分析】 由于积分区域 D 关于 x 轴对称，故可先利用二重积分的对称性结论简化所求积分，又因为积分区域为圆域的一部分，则将其化为极坐标系下累次积分即可.

【解】 积分区域 D 如图所示. 因为区域 D 关于 x 轴对称，

函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{1+x^2+y^2}$ 是变量 y 的偶函数，

函数 $g(x,y)=\dfrac{xy}{1+x^2+y^2}$ 是变量 y 的奇函数. 则

$$\iint_D\frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D_1}\frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r}{1+r^2}\mathrm{d}r=\frac{\pi\ln 2}{2}$$

$$\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

故 $\iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi\ln 2}{2}$.

【评注】 只要见到积分区域具有对称性的二重积分计算问题，就要想到考查被积函数或其代数和的每一部分是否具有奇偶性，以便简化计算.

四、分块函数积分的计算

6 (2005，15 题，11 分) 设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant\sqrt{2},x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，$[1+x^2+y^2]$ 表示不超过 $1+x^2+y^2$ 的最大整数. 计算二重积分 $\iint_D xy[1+x^2+y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【分析】首先应设法去掉取整函数符号，为此将积分区域分为两部分即可.

【解】 令 $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x^2+y^2<1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，

$D_2=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant\sqrt{2},x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$.

则 $\iint_D xy[1+x^2+y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\iint_{D_2} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_1^{\sqrt[4]{2}} r^3\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{8}+\frac{1}{4} = \frac{3}{8}.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【评注】 对于二重积分(或三重积分)的计算问题，当被积函数为分块函数时应利用积分的可加性分区域积分. 而实际考题中，被积函数经常为隐含的分块函数，如取绝对值函数 $|f(x,y)|$、取极值函数 $\max\{f(x,y),g(x,y)\}$ 以及取整函数 $[f(x,y)]$ 等等.

五、交换积分次序及坐标系

7 (1990，一(4) 题，3 分) 积分 $\int_0^2 \mathrm{d}x\int_x^2 \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y$ 的值等于_____.

【答案】 $\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-4})$.

【解析】 由于被积函数 e^{-y^2} 的原函数不是初等函数，可交换积分次序后计算；或令 $F(x)=\int_x^2 \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y$ 用分部积分法.

(方法一) 交换积分次序

$$\int_0^2 \mathrm{d}x\int_x^2 \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}y\int_0^y \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 y\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y^2}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-4})$$

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

（方法二） 用分部积分法

令 $F(x)=\int_x^2 e^{-y^2}dy$，则 $F'(x)=-e^{-x^2}$，且

$$\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy=\int_0^2\left[\int_x^2 e^{-y^2}dy\right]dx=x\int_x^2 e^{-y^2}dy\Big|_0^2+\int_0^2 xe^{-x^2}dx$$
$$=\frac{1}{2}(1-e^{-4})$$

8 (1995，三(2)题，5分) 设函数 $f(x)$ 在区间[0,1]上连续，并设 $\int_0^1 f(x)dx=A$，求 $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy$.

【分析】 二次积分转化为二重积分，再用二重积分的轮换对称性；或交换积分次序后将 x,y 互换；或考虑变限积分及凑微分法.

【解】 （方法一） 化为二重积分

$$\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy=\iint\limits_{\substack{x\leqslant y\leqslant 1\\0\leqslant x\leqslant 1}} f(x)f(y)dxdy\xlongequal{x\leftrightarrow y}\iint\limits_{\substack{y\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} f(x)f(y)dxdy$$
$$=\frac{1}{2}\left[\iint\limits_{\substack{x\leqslant y\leqslant 1\\0\leqslant x\leqslant 1}} f(x)f(y)dxdy+\iint\limits_{\substack{y\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} f(x)f(y)dxdy\right]$$
$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{\substack{0\leqslant y\leqslant 1\\0\leqslant x\leqslant 1}} f(x)f(y)dxdy$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 f(y)dy=\frac{1}{2}A^2$$

（方法二） 交换积分次序

$$\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy=\int_0^1 dy\int_0^y f(x)f(y)dx\xlongequal{x\leftrightarrow y}\int_0^1 dx\int_0^x f(x)f(y)dy$$
$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(x)dx\int_x^1 f(y)dy+\int_0^1 f(x)dx\int_0^x f(y)dy\right]$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 f(y)dy=\frac{1}{2}A^2$$

（方法三） 令 $F(x)=\int_x^1 f(y)dy$，则 $F'(x)=-f(x)$

$$\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy=\int_0^1\left[f(x)\int_x^1 f(y)dy\right]dx$$
$$=-\int_0^1[F'(x)F(x)]dx$$
$$=-\int_0^1 F(x)dF(x)=-\frac{1}{2}F^2(x)\Big|_0^1$$
$$=-\frac{1}{2}[F^2(1)-F^2(0)]=\frac{1}{2}F^2(0)=\frac{1}{2}A^2$$

【评注】 本题从不同角度有不同的解法，其实方法三更简单一些.

9 (2001，一(3)题，3分) 交换二次积分的积分次序：$\int_{-1}^0 dy\int_2^{1-y} f(x,y)dx=$ _____.

【答案】 $\int_1^2 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【解析】　因为$\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{2}^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{1-y}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x$，积分区域为

$$D=\{(x,y)\,|\,-1\leqslant y\leqslant 0,1-y\leqslant x\leqslant 2\}$$

又可将D改写为$D=\{(x,y)\,|\,1\leqslant x\leqslant 2,1-x\leqslant y\leqslant 0\}$，于是有

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{2}^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}x&=-\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{1-y}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x\\&=-\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{1-x}^{0}f(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{0}^{1-x}f(x,y)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

【评注】　交换二次积分的积分次序应是常规题，但本题的一个小技巧在于x的积分下限2大于积分上限$1-y$，于是按常规积分区域$D=\{(x,y)\,|\,-1\leqslant y\leqslant 0,2\leqslant x\leqslant 1-y\}$中的第二个不等式是矛盾的，无法画出积分区域草图. 这只需先交换一下积分上下限.

10（2004，10题，4分）设$f(x)$为连续函数，$F(t)=\int_{1}^{t}\mathrm{d}y\int_{y}^{t}f(x)\mathrm{d}x$，则$F'(2)$等于

(A)$2f(2)$.　　(B)$f(2)$.　　(C)$-f(2)$.　　(D)0.

【答案】　B.

【解析】　先求导，再代入$t=2$即可. 关键是求导前应先交换积分次序，使得被积函数中不含有变量t.

交换积分次序，得

$$F(t)=\int_{1}^{t}\mathrm{d}y\int_{y}^{t}f(x)\mathrm{d}x=\int_{1}^{t}\left[\int_{1}^{x}f(x)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_{1}^{t}f(x)(x-1)\mathrm{d}x$$

于是，$F'(t)=f(t)(t-1)$，从而有$F'(2)=f(2)$，故应选(B).

【评注】　在应用变限积分对变量x求导时，应注意被积函数中不能含有变量x：

$$\left[\int_{a(x)}^{b(x)}f(t)\mathrm{d}t\right]'=f[b(x)]b'(x)-f[a(x)]a'(x)$$

否则，应先通过恒等变形、变量代换和交换积分次序等将被积函数中的变量x换到积分号外或积分限上.

11（2006，8题，4分）设$f(x,y)$为连续函数，则$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{1}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$等于

(A)$\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_{x}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.　　(B)$\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

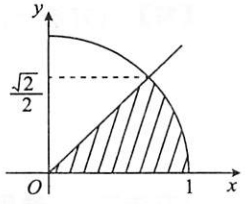
(C)$\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_{y}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(D)$\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

【答案】　C.

【解析】　由题设可知积分区域D如右图所示，显然是Y型域，则

原式$=\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_{y}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

故选(C).



【评注】　本题为基本题型，关键是首先画出积分区域的图形.

六、三重积分的计算

12 (1989,三(3)题,5分) 计算三重积分$\iiint_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}v$,其中$\Omega$是由曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$所围成的区域.

【分析】 注意三重积分的对称性,从被积函数和积分区域的特点,可利用球面坐标或先二后一的积分方法.

【解】 (方法一) 由于Ω关于yOz面对称,所以$\iiint_{\Omega}x\mathrm{d}v=0$.而用球面坐标

$$\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{\pi}{8}$$

所以

$$\iiint_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}v=\frac{\pi}{8}$$

(方法二) 同方法一$\iiint_{\Omega}x\mathrm{d}v=0$.

由$\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2}\\ z=\sqrt{1-x^2-y^2}\end{cases}$得$\begin{cases}x^2+y^2=\frac{1}{2}\\ z=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$,则用先二后一积分

$$\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}v=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}z\mathrm{d}z\iint_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 z\mathrm{d}z\iint_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中$D_1:x^2+y^2\leqslant z^2\left(0\leqslant z\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$D_2:x^2+y^2\leqslant 1-z^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant z\leqslant 1\right)$,于是

$$\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}v=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\pi z^3\mathrm{d}z+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\pi z(1-z^2)\mathrm{d}z=\frac{\pi}{8}$$

所以$\iiint_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}v=\frac{\pi}{8}$.

13 (1997,三(1)题,5分) 计算$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$,其中$\Omega$为平面曲线$\begin{cases}y^2=2z\\ x=0\end{cases}$绕$z$轴旋转一周形成的曲面与平面$z=8$所围成的区域.

【分析】 本题可用直角坐标和柱面坐标计算,但计算量很大,这里采用"先二后一"法.

【解】 (方法一) 用柱面坐标

$$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^4 r\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{2}}^8 r^2\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^4 r^3\left(8-\frac{r^2}{2}\right)\mathrm{d}r=\frac{1024}{3}\pi$$

(方法二) 选用"先二后一"法,有$D(z):x^2+y^2\leqslant 2z$,于是

$$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\int_0^8\mathrm{d}z\iint_{D(z)}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^8\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}}r^3\mathrm{d}r=2\pi\int_0^8 z^2\mathrm{d}z=\frac{1024}{3}\pi$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【评注】　当被积函数 $f(x,y,z)$ 仅是 z 的函数或用垂直于 z 轴的平面去截 Ω 所得 $D(z)$ 是圆域或其一部分时，使用“先二后一”方法有很明显的优点.

14 (2003，八题，12 分) 设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零，

$$F(t)=\frac{\iiint_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v}{\iint_{D(t)} f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma},G(t)=\frac{\iint_{D(t)} f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma}{\int_{-1}^{t} f(x^2)\mathrm{d}x}$$

其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\leqslant t^2\},D(t)=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant t^2\}$.

(1) 讨论 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性.

(2) 证明当 $t>0$ 时，$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$.

【分析】　(1) 先分别在球面坐标下计算分子的三重积分和在极坐标下计算分母的重积分，再根据导函数 $F'(t)$ 的符号确定单调性；(2) 将待证的不等式作适当的恒等变形后，构造辅助函数，再用单调性进行证明即可.

【解】　(1) 因为

$$F(t)=\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{t} f(r^2)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{t} f(r^2)r\mathrm{d}r}=\frac{2\int_0^{t} f(r^2)r^2\mathrm{d}r}{\int_0^{t} f(r^2)r\mathrm{d}r}$$

$$F'(t)=\frac{2tf(t^2)\int_0^{t} f(r^2)r(t-r)\mathrm{d}r}{\left[\int_0^{t} f(r^2)r\mathrm{d}r\right]^2}$$

微信公众号【[illegible]考研】(ID: djky66)

所以在 $(0,+\infty)$ 上 $F'(t)>0$，故 $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

(2) 因

$$G(t)=\frac{\pi\int_0^{t} f(r^2)r\mathrm{d}r}{\int_0^{t} f(r^2)\mathrm{d}r}$$

要证明 $t>0$ 时 $F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$，只需证明 $t>0$ 时，$F(t)-\frac{2}{\pi}G(t)>0$，即

$$\int_0^{t} f(r^2)r^2\mathrm{d}r\int_0^{t} f(r^2)\mathrm{d}r-\left[\int_0^{t} f(r^2)r\mathrm{d}r\right]^2>0$$

令

$$g(t)=\int_0^{t} f(r^2)r^2\mathrm{d}r\int_0^{t} f(r^2)\mathrm{d}r-\left[\int_0^{t} f(r^2)r\mathrm{d}r\right]^2$$

则 $g'(t)=f(t^2)\int_0^{t} f(r^2)\,(t-r)^2\mathrm{d}r>0$，故 $g(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

因为 $g(t)$ 在 $t=0$ 处连续，所以当 $t>0$ 时，有 $g(t)>g(0)$.

又 $g(0)=0$，故当 $t>0$ 时，$g(t)>0$，

因此，当 $t>0$ 时，$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$.

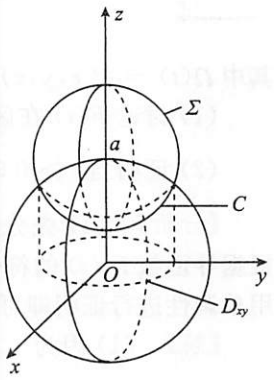
【评注】　本题将定积分、二重积分和三重积分等多个知识点结合起来了，但难点是证明(2)中的不等式，这里也可用柯西积分不等式证明：

$$\left[\int_a^{b} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2\leqslant\int_a^{b} f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^{b} g^2(x)\mathrm{d}x$$

在上式中取 $f(x)$ 为 $\sqrt{f(r^2)}r$，$g(x)$ 为 $\sqrt{f(r^2)}$ 即可.

七、重积分的应用

15 (1989,九题,9分) 设半径为 R 的球面 Σ 的球心在定球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$ 上,问当 R 为何值时,球面 Σ 在定球面内部的哪部分面积最大?



【分析】 利用二重积分求出在定球面内部的那部分曲面的面积,再求面积的最大值.

【解】 不妨设球面 Σ 的球心为 $(0,0,a)$,则 Σ 的方程为 $x^2+y^2+(z-a)^2=R^2$,两球面的交线 C 在 xOy 面上的投影为

$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{R^2}{4a^2}(4a^2-R^2) \\ z=0 \end{cases}$,其围成的区域为 D_{xy}(如图),

球面 Σ 在定球面内的那部分的方程为 $z=a-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

这部分球面的面积为

$$S(R)=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{R}{2a}\sqrt{4a^2-R^2}}\frac{Rr}{\sqrt{R^2-r^2}}\mathrm{d}r$$

$$=2\pi R^2-\frac{1}{a}\pi R^3\ (0<R<2a)$$

由 $S'(R)=4\pi R-\dfrac{3}{a}\pi R^2=0$,得 $R=\dfrac{4}{3}a$($R=0$ 舍去),而 $S''\left(\dfrac{4}{3}a\right)=-4\pi<0$,

故当 $R=\dfrac{4}{3}a$ 时,球面 Σ 在定球面内部的那部分的面积最大.

【评注】 本题中把球面 Σ 的球心选为 $(0,0,a)$ 很有必要,否则处理起来不大方便.

16 (1991,三(3)题,5分) 求 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}v$,其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与平面 $z=4$ 所围成的立体.

【分析】 先求出旋转面的方程,再利用柱面坐标或球面坐标计算三重积分.

【解】 (方法一) 利用"先一后二"的柱坐标公式.

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}v=\iint\limits_{D}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\mathrm{d}z$$

由题设知,Ω 是由曲面 $z=\dfrac{x^2+y^2}{2}$ 与平面 $z=4$ 所围成的空间闭区域.

由于旋转曲面 $z=\dfrac{x^2+y^2}{2}$ 在柱坐标系下的方程为 $z=\dfrac{r^2}{2}$,

Ω 在坐标平面 xOy 上的投影 $D:x^2+y^2\leqslant 8$.

于是

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sqrt{2}}r\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{2}}^{4}(r^2+z)\mathrm{d}z$$

微信公众号【环尖考研】(ID: dky66)

$$= 2\pi \int_0^{2\sqrt{2}} \left(4r^3 + 8r - \frac{5}{8}r^5\right) dr = \frac{256}{3}\pi$$

（方法二）　利用“先二后一”的柱坐标公式.

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv = \int_{z_1}^{z_2} dz \iint_{D(z)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,dr\,d\theta$$

由题意积分区域 Ω 可以表示为

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \leqslant 2z, 0 \leqslant z \leqslant 4\}$$

即固定 $0 \leqslant z \leqslant 4$，垂直于坐标 z 轴的平面 $Z = z$ 与 Ω 的截面为圆域 $D(z): x^2 + y^2 \leqslant 2z$. 于是，

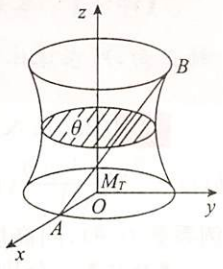
$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z)\,dv = \int_0^4 dz \iint_{D(z)} (x^2 + y^2 + z)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^4 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2z}} (r^2 + z)\,r\,dr = 4\pi \int_0^4 z^2\,dz = \frac{256}{3}\pi$$

【评注】　当积分区域 Ω 的边界曲面方程容易用极坐标表示，且积分区域 Ω 为柱体，或被积函数为 $f(x^2+y^2)$ 时，三重积分应采用柱坐标变换的换元公式 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$. 此时，应注意确定变量 r、z、θ 的取值范围.

上述两种解法都是用柱坐标的换元法计算三重积分的. 对于本题而言，方法一较为方便. 当然，本题也可考虑用球面坐标计算.

17（1994，七题，6 分）已知点 A 与 B 的直角坐标分别为 $(1,0,0)$ 与 $(0,1,1)$，线段 AB 绕 z 轴旋转一周所成的旋转曲面为 S，求由 S 及两平面 $z = 0$，$z = 1$ 所围成的立体体积.（如右图）



【分析】　绕 z 轴旋转所得旋转体的体积计算，关键是求出其垂直于 z 轴的截面的面积 $S(z)$，然后即可转化为定积分进行计算. 这里截面为圆，只需找出 x，y 关于 z 的表达式，即可求出圆的半径，从而求出圆的面积，而这一点可通过直线方程得到. 本题也可用三重积分计算立体的体积.

【解】　（方法一）　由于直线 AB 过点 $(1,0,0)$ 和 $(0,1,1)$，因此直线方程为

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$$

即 $x = 1 - z$，$y = z$.

用 $Z = z$ 的平面去截此旋转体，其截面为圆域，且圆截面半径为

$$r(z) = \sqrt{(1-z)^2 + z^2} = \sqrt{1 - 2z + 2z^2}$$

从而截面面积为 $S(z) = \pi(1 - 2z + 2z^2)$，因此旋转体的体积为

$$V = \int_0^1 \pi(1 - 2z + 2z^2)\,dz = \frac{2}{3}\pi$$

（方法二）　直线 AB 的方程为 $\begin{cases} x = 1 - z \\ y = z \end{cases}$，

曲面 S 的方程为 $x^2 + y^2 = 1 - 2z + 2z^2$，其在平行于 xOy 面上的截面为

$$D: x^2 + y^2 \leqslant 1 - 2z + 2z^2$$

所求旋转体的体积

$$V = \int_0^1 dz \iint_D dx\,dy = \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{1-2z+2z^2}} r\,dr = \frac{2}{3}\pi$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

18（2000，八题，7 分）设有一半径为 R 的球体，P_0 是此球表面上的一个定点，球体上任一点的密度与该点到 P_0 的距离的平方成正比（比例系数 $k > 0$），求球体的重心位置.

【分析】 这是一个三重积分的应用题，需要建立直角坐标系.

【解】 设球体为 Ω，以球体的球心为坐标原点，以射线 OP_0 为正 x 轴建立直角坐标系，则点 $P_0(R,0,0)$，球面方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$.

设 Ω 的重心坐标为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由对称性得 $\bar{y}=\bar{z}=0$

$$\bar{x}=\frac{\iiint_\Omega xk[(x-R)^2+y^2+z^2]\mathrm{d}v}{\iiint_\Omega k[(x-R)^2+y^2+z^2]\mathrm{d}v}$$

而 $$\iiint_\Omega xk[(x-R)^2+y^2+z^2]\mathrm{d}v=-2Rk\iiint_\Omega x^2\mathrm{d}v$$

$$=-\frac{2}{3}Rk\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$$

$$=-\frac{2}{3}Rk\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}r^2r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=-\frac{8}{15}k\pi R^4$$

$$\iiint_\Omega k[(x-R)^2+y^2+z^2]\mathrm{d}v=k\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v+k\iiint_\Omega R^2\mathrm{d}v$$

$$=k\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}r^2r^2\sin\varphi\mathrm{d}r+\frac{4}{3}k\pi R^5=\frac{32}{15}k\pi R^5$$

故 $\bar{x}=-\frac{R}{4}$，所求球体的重心为 $\left(-\frac{R}{4},0,0\right)$.

【评注】 本题还可以其他形式建立直角坐标系，如：P_0 为坐标原点，P_0 与球心的连线为 x 轴正向，所求球体的重心为 $(0,0,\bar{z})=\left(0,0,\frac{5}{4}R\right)$.

微信公众号【顾天考研】(ID: djky66)

19 (2001，八题，8 分) 设有一高度为 $h(t)$ (t 为时间) 的雪堆在融化过程中，其侧面满足方程 $z=h(t)-\frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$ (设长度单位为厘米，时间单位为小时)，已知体积减少的速率与侧面积成正比(比例系数 0.9)，问高度为 130 厘米的雪堆全部融化需多少小时？

【分析】 分别用三重积分和二重积分将雪堆的体积和侧面积表示成函数 $h(t)$ 的函数，求出 $h(t)=0$ 的 t 值.

【解】 设雪堆的体积为 V，侧面积为 S，则

$$V=\int_0^{h(t)}\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leqslant\frac{1}{2}[h^2(t)-zh(t)]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{h(t)}\frac{1}{2}\pi[h^2(t)-zh(t)]\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{4}\pi h^3(t)$$

$$S=\iint_{x^2+y^2\leqslant\frac{1}{2}h^2(t)}\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\leqslant\frac{1}{2}h^2(t)}\sqrt{1+\frac{16(x^2+y^2)}{h^2(t)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2\pi}{h(t)}\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\sqrt{h^2(t)+16r^2}r\mathrm{d}r=\frac{13\pi h^2(t)}{12}$$

由题意 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-0.9S$，代入得 $\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{13}{10}$，$h(t)=-\frac{13}{10}t+C$，

已知 $h(0)=130$ 得 $h(t)=-\frac{13}{10}t+130$，令 $h(t)=0$，有 $t=100$.

因此，高度为 130(厘米) 的雪堆全部融化需 100 小时.

【评注】 本题易犯错误 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0.9S$，少一个负号；另易混淆变量 x,y,z,t 之间的关系.

第七章　曲线、曲面积分

本章导读

本章一直是研究生考试命题的重要内容，重点是第二类积分的计算、平面曲线积分与路径无关的判定和相关计算与证明，要熟练掌握与格林公式、高斯公式相关的各类题型及其思路、方法、技巧等.

试题特点

每年试题一般是一个大题、一个小题，分数约占试卷的9%. 主要考查各类线面积分的计算，重点是第二类线面积分的计算. 第一类积分的考查相对较少，且难度不大.

考题详析

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

一、第一类曲线积分的计算

1 (1989，一(3)题，3分) 设平面曲线 L 为下半圆周 $y=-\sqrt{1-x^2}$，则曲线积分 $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s=$ _____.

【答案】 π.

【解析】 计算曲线、曲面积分时，应先将积分曲线或曲面方程代入被积函数，对积分进行化简，然后计算积分. 本题积分曲线 L 为下半圆周 $y=-\sqrt{1-x^2}$，即 $x^2+y^2=1(y\leqslant 0)$.

将积分曲线 L 的方程：$y=-\sqrt{1-x^2}$，即 $x^2+y^2=1(y\leqslant 0)$ 代入被积函数，得

$$\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s=\int_L 1\mathrm{d}s=\pi(\text{积分曲线 } L \text{ 的弧长})$$

【评注】 本题也可利用参数法，将曲线积分化为参变量的定积分. L 的参数方程为

$$x=\cos t, y=\sin t, \pi\leqslant t\leqslant 2\pi$$

于是 $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s=\int_\pi^{2\pi}(\cos^2 t+\sin^2 t)\sqrt{x'^2+y'^2}\mathrm{d}t=\int_\pi^{2\pi}1\mathrm{d}t=\pi.$

2 (1998，一(3)题，3分) 设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，其周长记为 a，则 $\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=$ _____.

【答案】 $12a$.

【解析】 首先将积分曲线 L 的方程代入积分 $\oint_L (3x^2+4y^2)\mathrm{d}s$ 进行化简；其次，对积分 $\oint_L 2xy\mathrm{d}s$ 利用对称性.

将积分曲线 L 的方程：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，即 $3x^2+4y^2=12$ 代入被积函数，得

$$\oint_L(3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=\oint_L 12\mathrm{d}s=12a$$

由于 L 关于 x 轴（y 轴）对称，函数 $2xy$ 关于变量 y（变量 x）为奇函数，所以，

$$\oint_L 2xy\mathrm{d}s=0$$

于是 $$\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=\oint_L 2xy\mathrm{d}s+\oint_L(3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=12a$$

【评注】 若积分曲线关于 x 轴（或 y 轴）对称，应考察被积函数或被积函数的某一部分是否关于变量 y（或变量 x）为奇、偶函数，利用对称性化简积分.

二、第二类曲线积分的计算

3 (1987，一(4)题，3分) 设 L 为取正向的圆周 $x^2+y^2=9$，则曲线积分 $\oint_L(2xy-2y)\mathrm{d}x+(x^2-4x)\mathrm{d}y$ 的值是_____.

【答案】 -18π

【解析】 利用极坐标将曲线用参数方程表示，相应曲线积分可化为定积分；或直接利用格林公式计算.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

（方法一） 正向圆周 $x^2+y^2=9$ 可表示为

$$\begin{cases}x=3\cos\theta,\\ y=3\sin\theta,\end{cases}\quad \theta:0\to 2\pi.$$

于是

$$\oint_L(2xy-2y)\mathrm{d}x+(x^2-4x)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}[(18\sin\theta\cos\theta-6\sin\theta)(-3\sin\theta)+(9\cos^2\theta-12\cos\theta)(3\cos\theta)]\mathrm{d}\theta=-18\pi.$$

（方法二） 由格林公式得

$$\oint_L(2xy-2y)\mathrm{d}x+(x^2-4x)\mathrm{d}y=\iint_D[(2x-4)-(2x-2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-18\pi.$$

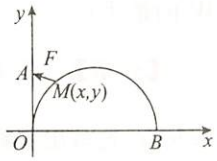
其中 $D:x^2+y^2\leqslant 9$.

【评注】 要熟练掌握常见曲线的参数方程，如圆、椭圆等. 注意利用参数法计算第二类曲线积分时，化为定积分下限是起点的参数值，上限是终点的参数值. 就本题的两种解法，显然方法二更简单一些，实际计算时要根据题目选择不同的方法.

4 (1988，六题，9分) 设位于点(0，1)的质点 A 对质点 M 的引力大小为 $\frac{k}{r^2}(k>0$ 为常数，r 为质点 A 与 M 之间的距离)，质点 M 沿曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 自 $B(2,0)$ 运动到 $O(0,0)$. 求在此运动过程中质点 A 对质点 M 的引力所做的功.

【分析】 本题的关键是求出引力 $\boldsymbol{F}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}$ 的表达式，进而可求所做的功为第二类曲线积分 $W=\int_{\overset{\frown}{BO}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$.

【解】　设 $M(x,y)$，由已知有



$$\overrightarrow{MA}=\{-x,1-y\},r=|\overrightarrow{MA}|=\sqrt{x^2+(1-y)^2}$$

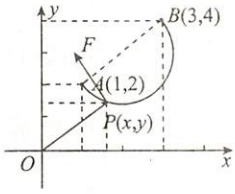
则
$$\boldsymbol{F}=\frac{k}{r^2}\cdot\frac{\overrightarrow{MA}}{r}=\frac{k}{r^3}\{-x,1-y\}$$

于是
$$W=\frac{k}{r^3}\int_{\overset{\frown}{BO}}-x\mathrm{d}x+(1-y)\mathrm{d}y=\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)k$$

【评注】　变力做功是一类常见的物理应用题，并且还可拓展到空间曲线的情形

$$W=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

5　(1990，九题，8 分) 质点 P 沿着以 AB 为直径的半圆周，从点 $A(1,2)$ 运动到点 $B(3,4)$ 的过程中受变力 $\boldsymbol{F}$ 作用(见图)，$\boldsymbol{F}$ 的大小等于点 P 到原点 O 之间的距离，其方向垂直于线段 OP 且与 y 轴正向的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$. 求变力 $\boldsymbol{F}$ 对质点 P 所做的功.



【分析】　变力 $\boldsymbol{F}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}$ 对沿有向曲线 L 运动的质点所做的功 $W=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$，本题关键是写出 $\boldsymbol{F}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}$ 的表达式.

【解】　设质点 $P(x,y)$，则变力 $\boldsymbol{F}$ 的大小为 $\sqrt{x^2+y^2}$，$\boldsymbol{F}$ 的方向 $\{-y,x\}$，因而

$$\boldsymbol{F}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$$

变力 $\boldsymbol{F}$ 对质点 P 所做的功

$$W=\int_L -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$$

其中 L 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+\sqrt{2}\cos\theta\\ y=3+\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}$，故

$$W=\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}[\sqrt{2}(3+\sqrt{2}\sin\theta)\sin\theta+\sqrt{2}(2+\sqrt{2}\cos\theta)\cos\theta]\mathrm{d}\theta=2(\pi-1)$$

6　(1991，四题，6 分) 在过点 $O(0,0)$ 和 $A(\pi,0)$ 的曲线族 $y=a\sin x(a>0)$ 中，求一条曲线 L，使沿该曲线从 O 到 A 的积分 $\int_L(1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$ 的值最小.

【分析】　先用参数法计算 $\int_L(1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$，得到关于 a 的函数，再求 a 的值使此函数取到最大值，进而求得曲线 L 的方程.

【解】
$$\int_L(1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}[1+a^3\sin^3x+(2x+a\sin x)a\cos x]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{4}{3}a^3-4a+\pi$$

令 $f(a)=\frac{4}{3}a^3-4a+\pi$，由 $f'(a)=4a^2-4=0$ 得 $a=1(a=-1$ 舍去)，此时 $f''(1)=8>0$，$f(a)$ 在 $a=1$ 时取到最小值，所以所求的曲线为 $y=\sin x$.

【评注】　本题是第二类曲线积分与一元函数最值相结合的一个综合题.

7　(1992，七题，8 分) 在变力 $\boldsymbol{F}=yz\boldsymbol{i}+zx\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$ 的作用下，质点由原点沿直线运动到椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上第一卦限点 $M(\xi,\eta,\zeta)$，问当 ξ,η,ζ 取何值时，力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功 W 最大？并求出

微信公众号【顶尖考研】(ID：ding66)

W 的最大值.

【分析】 变力 $\boldsymbol{F}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$ 对沿空间曲线 L 运动的质点所做的功为 $W=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$. 先写出直线 OM 的参数方程,由参数法求出 W,然后再求 W 在条件 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 约束下的极值问题.

【解】 直线 OM 的参数方程为 $x=\xi t, y=\eta t, z=\zeta t, t$ 从 0 到 1,则

$$W=\int_{\overline{OM}} yz\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z=\int_0^1 3\xi\eta\zeta t^2\mathrm{d}t=\xi\eta\zeta$$

下面用拉格朗日乘数法求 $W=\xi\eta\zeta$ 在条件 $\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1$ 下的最大值.

设 $F(\xi,\eta,\zeta,\lambda)=\xi\eta\zeta+\lambda\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1\right)$,

令 $\begin{cases} F'_\xi=\eta\zeta+2\lambda\frac{\xi}{a^2}=0 \\ F'_\eta=\xi\zeta+2\lambda\frac{\eta}{b^2}=0 \\ F'_\zeta=\xi\eta+2\lambda\frac{\zeta}{c^2}=0 \\ F'_\lambda=\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1=0 \end{cases}$,由前三个方程可得 $\frac{\xi^2}{a^2}=\frac{\eta^2}{b^2}=\frac{\zeta^2}{c^2}$,

代入第四个方程得 $\xi=\frac{1}{\sqrt{3}}a,\eta=\frac{1}{\sqrt{3}}b,\zeta=\frac{1}{\sqrt{3}}c$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: diky66)

因为根据实际意义该问题存在最大值,又 $\xi=\frac{1}{\sqrt{3}}a,\eta=\frac{1}{\sqrt{3}}b,\zeta=\frac{1}{\sqrt{3}}c$ 是唯一的可能极值点,所以,当 $\xi=\frac{1}{\sqrt{3}}a,\eta=\frac{1}{\sqrt{3}}b,\zeta=\frac{1}{\sqrt{3}}c$ 时,W 取到最大值 $\frac{\sqrt{3}}{9}abc$.

【评注】 本题将变力做功、第二类曲线积分及多元函数的极值三者综合起来,是一综合题型.

8 (1993,二(4)题,3分) 设曲线积分 $\int_L[f(x)-\mathrm{e}^x]\sin y\mathrm{d}x-f(x)\cos y\mathrm{d}y$ 与路径无关,其中 $f(x)$ 具有一阶连续导数,且 $f(0)=0$,则 $f(x)$ 等于

(A) $\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x}{2}$. (B) $\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$. (C) $\frac{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x}{2}-1$. (D) $1-\frac{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x}{2}$.

【答案】 B.

【解析】 第二类曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关的充要条件是 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$,由此列出关于 $f(x)$ 的方程,解方程求出 $f(x)$.

由已知 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$,即 $\frac{\partial[f(x)-\mathrm{e}^x]\sin y}{\partial y}=\frac{\partial[-f(x)\cos y]}{\partial x}$,有

$$[f(x)-\mathrm{e}^x]\cos y=-f'(x)\cos y,\text{即 } f'(x)+f(x)=\mathrm{e}^x$$

解一阶线性微分方程得

$$f(x)=\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\left(C+\int\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)=\mathrm{e}^{-x}\left(C+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right)$$

由 $f(0)=0$ 得 $C=-\frac{1}{2}$,所以 $f(x)=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$. 答案应选(B).

9 (1997,三(2)题,5分) 计算曲线积分

$$\oint_C (z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$$

其中 C 是曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$，从 z 轴正向往 z 轴负向看 C 的方向是顺时针的.

【分析】　计算第二类空间曲线积分主要有两种方法:一是用参数法将曲线积分化为参变量的定积分,关键在于用参数方程表示空间曲线;二是用斯托克斯公式将曲线积分化为第二类曲面积分,关键在于选择一个以积分曲线为边界的有向曲面 Σ,并且使曲面 Σ 的侧与积分曲线的方向符合右手法则.

【解】　(方法一)　令 $x=\cos t, y=\sin t$,则 $z=2-\cos t+\sin t$,积分曲线 C 的起点与终点所对应的 t 的值分别为 $t=2\pi, t=0$. 于是

$$\oint_C (z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z=\int_{2\pi}^{0}-[2(\sin t+\cos t)-2\cos 2t-1]\mathrm{d}t=-2\pi$$

(方法二)　设 Σ 为平面 $x-y+z=2$ 的下侧被曲线 C 所围成的部分,

$D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 为 Σ 在 xOy 面上的投影区域. 由斯托克斯公式得

$$\oint_C (z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z-y & x-z & x-y \end{vmatrix}=\iint_{\Sigma}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\pi$$

【评注】　用参数法将第二类空间曲线积分化为参变量的定积分时,定积分的下限与上限应分别是:对应于积分曲线的起点与终点的参变量的值. 若空间曲线积分的参数方程很难写出,可考虑用斯托克斯公式.

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

10 (1999,四题,5分) 求 $I=\int_L (\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y))\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y$,其中 a,b 为正的常数,L 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧.

【分析】　本题用参数法计算比较复杂,可考虑添加有向曲线段,使之成为闭曲线,利用格林公式计算;另外,考虑到被积表达式的一部分存在原函数,可将被积表达式分为两部分,一部分的积分归结为求原函数,另一部分用参数法计算.

【解析】　(方法一)　添加有向直线段 $\overline{OA}$:$y=0, 0\leqslant x\leqslant 2a$,则

$$\begin{aligned} I&=\int_L (\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y))\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y \\ &=\int_{L+\overline{OA}} (\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y))\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y \\ &\quad-\int_{\overline{OA}} (\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y))\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y \\ &=I_1-I_2 \end{aligned}$$

对于积分 I_1,由格林公式得

$$I_1=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D (b-a)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}(b-a)a^2$$

对于积分 I_2,以 x 为参变量,化为参变量的定积分得

$$I_2=\int_{\overline{OA}} (\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y))\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y=\int_0^{2a}(-bx)\mathrm{d}x=-2a^2b$$

所以，$$I=\int_L(e^x\sin y-b(x+y))dx+(e^x\cos y-ax)dy$$
$$=I_1-I_2=\frac{\pi}{2}(b-a)a^2+2a^2b$$

（方法二） 由被积表达式 $Pdx+Qdy=e^x\sin ydx+e^x\cos ydy-b(x+y)dx-axdy$
$$=d(e^x\sin y)-b(x+y)dx-axdy$$

前一积分$\int_L e^x\sin ydx+e^x\cos ydy=e^x\sin y\Big|_{(2a,0)}^{(0,0)}=0$，

对于后一积分$\int_L b(x+y)dx+axdy$，取 L 的参数方程：$\begin{cases}x=a+a\cos t\\ y=a\sin t\end{cases}$，$t:0\to\pi$，

得 $$\int_L b(x+y)dx+axdy$$
$$=\int_0^{\pi}(-a^2b\sin t-a^2b\sin t\cos t-a^2b\sin^2 t+a^3\cos t+a^3\cos^2 t)dt$$
$$=-\frac{\pi}{2}(b-a)a^2-2a^2b,$$

因此，$I=\int_L(e^x\sin y-b(x+y))dx+(e^x\cos y-ax)dy=\frac{\pi}{2}(b-a)a^2+2a^2b.$

【评注】 当积分曲线 L 不是闭曲线，且用参数法计算比较复杂时，典型的方法是：添加有向曲线段，利用格林公式计算；而对于方法二，利用凑微分的方法求原函数，也是值得借鉴的方法.

11 (2000，五题，6分) 计算曲线积分$\oint_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中 L 是以(1，0)为中心，R 为半径的圆周($R>1$)，取逆时针方向.

【分析】 本题积分曲线 L 虽然为闭曲线，但在 $R>1$ 时 L 所围成的区域 D 内含有奇点 $O(0,0)$，不能直接在 D 上利用格林公式，这时一般是构造适当的闭曲线挖去奇点，为便于积分，可构造曲线 $L_1:4x^2+y^2=\varepsilon^2,\varepsilon>0$ 且充分小使 L_1 在 L 的内部.

【解】 这里 $$P=\frac{-y}{4x^2+y^2},Q=\frac{x}{4x^2+y^2}$$

当$(x,y)\neq(0,0)$时，$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

当 $R>1$ 时，$(0,0)\in D$(奇点).

作一小椭圆 $L_1:x=\frac{\varepsilon}{2}\cos t,y=\varepsilon\sin t(\varepsilon>0$，且充分小)，使 $L_1\subset D$，

于是 $$\oint_{L+(-L_1)}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=0$$

故 $$\oint_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\oint_{L_1}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\frac{1}{2}\varepsilon^2}{\varepsilon^2}dt=\pi$$

【评注】 本题的关键是合适构造挖去奇点的闭曲线 L_1，如果取 L_1 为小圆：$x^2+y^2=\varepsilon^2,\varepsilon>0$，其参数方程为$\begin{cases}x=\varepsilon\cos t\\ y=\varepsilon\sin t\end{cases}$，$t:0\to2\pi$，则$\oint_{L_\varepsilon}Pdx+Qdy=\int_0^{2\pi}\frac{dt}{1+3\cos^2 t}$，此定积分计算比较复杂. 另外，如果直接用 L 的参数方程：$\begin{cases}x=1+R\cos t\\ y=R\sin t\end{cases}$，$t:0\to2\pi$，将积分 $I=\oint_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$ 直接化为定积分，则计算也较复杂.

12 (2001，六题，7 分) 计算 $I=\oint_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$，其中 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线，从 z 轴正向看去，L 为逆时针方向.

【分析】　本题主要考查空间第二型曲线积分的计算方法. 利用斯托克斯公式.

【解】　记 Σ 为平面 $x+y+z=2$ 上 L 所围成部分的上侧，D 为 Σ 在 xOy 坐标平面上的投影. 由斯托克斯公式，得

$$\begin{aligned} I&=\iint_{\Sigma}(-2y-4z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(-2z-6x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(-2x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(4x+2y+3z)\mathrm{d}S\\ &=-2\iint_{D}(x-y+6)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=-12\iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-24 \end{aligned}$$

13 (2003，五题，10 分) 已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi\}$，$L$ 为 D 的正向边界. 试证：

(1) $\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x$；

(2) $\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x\geqslant 2\pi^2$.

【分析】　本题边界曲线为折线段，可将曲线积分直接化为定积分证明，或曲线为封闭正向曲线，自然可想到用格林公式；(2) 的证明应注意用(1) 的结果.

微信公众号【极客考研】(ID：ljky66)

【证明】　(方法一)　(1) 左边 $=\int_0^{\pi}\pi\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-\int_{\pi}^{0}\pi\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}(\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x$

右边 $=\int_0^{\pi}\pi\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-\int_{\pi}^{0}\pi\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}(\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x$

所以　$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x$

(2) 由于 $\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x}\geqslant 2$，故由(1) 得

$$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}(\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x\geqslant 2\pi^2$$

(方法二)　(1) 根据格林公式，得

$$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\iint_D(\mathrm{e}^{\sin y}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x=\iint_D(\mathrm{e}^{-\sin y}+\mathrm{e}^{\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因为 D 具有轮换对称性，所以

$$\iint_D(\mathrm{e}^{\sin y}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(\mathrm{e}^{-\sin y}+\mathrm{e}^{\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故　$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x$.

(2) 由(1) 知

$$\begin{aligned}\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x&=\iint_D(\mathrm{e}^{\sin y}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_D\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$=\iint_D e^{\sin x}dxdy+\iint_D e^{-\sin x}dxdy(\text{利用轮换对称性})$$

$$=\iint_D (e^{\sin x}+e^{-\sin x})dxdy\geqslant\iint_D 2dxdy=2\pi^2$$

【评注】 本题方法一与方法二中的定积分与二重积分是很难直接计算出来的，因此期望通过计算出结果去证明恒等式与不等式是困难的.

14 (2004,3题,4分) 设 L 为正向圆周 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分，则曲线积分 $\int_L xdy-2ydx$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{3}{2}\pi$.

【解析】 利用极坐标将曲线用参数方程表示，相应曲线积分可化为定积分.

正向圆周 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分，可表示为

$$\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\theta,\\ y=\sqrt{2}\sin\theta,\end{cases}\quad \theta:0\to\frac{\pi}{2}.$$

于是 $$\int_L xdy-2ydx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sqrt{2}\cos\theta\cdot\sqrt{2}\cos\theta+2\sqrt{2}\sin\theta\cdot\sqrt{2}\sin\theta]d\theta$$

$$=\pi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\theta d\theta=\frac{3\pi}{2}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: diky66)

【评注】 本题也可添加直线段，使之成为封闭曲线，然后用格林公式计算，而在添加的线段上用参数法化为定积分计算即可.

15 (2007,6题,4分) 设曲线 $L:f(x,y)=1$($f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数)，过第Ⅱ象限内的点 M 和第Ⅳ象限内的点 N，Γ 为 L 上从点 M 到点 N 的一段弧，则下列小于零的是

(A) $\int_\Gamma f(x,y)dx$.　　(B) $\int_\Gamma f(x,y)dy$.

(C) $\int_\Gamma f(x,y)ds$.　　(D) $\int_\Gamma f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy$.

【答案】 B.

【解析】 设 M,N 点的坐标分别为 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，则由题设可知 $x_1<x_2,y_1>y_2$.

因为

$$\int_\Gamma f(x,y)dx=\int_\Gamma dx=x_2-x_1>0;$$

$$\int_\Gamma f(x,y)dy=\int_\Gamma dy=y_2-y_1<0;$$

$$\int_\Gamma f(x,y)ds=\int_\Gamma ds=\Gamma\text{的弧长}>0;$$

$$\int_\Gamma f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy=\int_\Gamma 0dx+0dy=0.$$

所以应选(B).

【评注】 本题属基本概念题型，注意求对坐标的曲线积分时要考虑方向，对于曲线积分和曲面积分，应尽量先将曲线、曲面方程代入被积表达式化简，然后再计算.

16 (2008,16 题,9 分) 计算曲线积分$\int_L \sin 2x\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\mathrm{d}y$,其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从点(0,0) 到点(π,0) 的一段.

【分析】　利用曲线的参数方程直接转化为定积分计算或添加线段使之形成封闭曲线,再用格林公式,而添加线段上用参数法.

【解】　(方法一)

$$\begin{aligned}\int_L \sin 2x\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\mathrm{d}y&=\int_0^{\pi}[\sin 2x+2(x^2-1)\sin x\cdot\cos x]\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\pi}x^2\sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{x^2}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}x\cos 2x\mathrm{d}x\\&=-\frac{\pi^2}{2}+\frac{x}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{\pi^2}{2}.\end{aligned}$$

(方法二)　添加 x 轴上从点(π,0) 到点(0,0) 的直线段 L_1,D 为 L 与 L_1 围成的封闭区域,则

$$\begin{aligned}\int_L \sin 2x\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\mathrm{d}y&=\oint_{L+L_1}\sin 2x\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\mathrm{d}y-\int_{L_1}\sin 2x\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\mathrm{d}y\\&=-\iint_D 4xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^{\pi}\sin 2x\mathrm{d}x=-\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}4xy\mathrm{d}y\\&=-\int_0^{\pi}2x\sin^2 x\mathrm{d}x=-\int_0^{\pi}x(1-\cos 2x)\mathrm{d}x=-\frac{\pi^2}{2}.\end{aligned}$$

三、平面曲线积分与路径无关的问题

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

17 (1989,三(2) 题,5 分) 设曲线积分$\int_L xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关,其中 $\varphi(x)$ 具有连续的导数,且 $\varphi(0)=0$,计算$\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y$ 的值.

【分析】　曲线积分$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关 $\Leftrightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$,由此可得到关于 $\varphi(x)$ 的微分方程,解方程求出 $\varphi(x)$,再计算积分的值.

【解】　由题知$\frac{\partial(y\varphi(x))}{\partial x}=\frac{\partial(xy^2)}{\partial y}$,即 $y\varphi'(x)=2xy$,解方程得 $\varphi(x)=x^2+C$,

又由 $\varphi(0)=0$,得 $C=0$,所以 $\varphi(x)=x^2$.

于是
$$\begin{aligned}\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y&=\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y\\&=\int_{(0,0)}^{(1,1)}\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2y^2\right)=\frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{(0,0)}^{(1,1)}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

【评注】　(1) 已知积分$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关,求被积表达式中所包含的未知函数、待定参数或积分值,一般利用积分与路径无关的充要条件$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$.

(2) 本题可取特殊积分路径:由点(0,0) → (0,1),再由点(0,1) → (1,1) 的折线段,则有

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y=\int_0^1 y\varphi(0)\mathrm{d}y+\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

这里不需要求出 $\varphi(x)$,但这是一种特殊情况.一般情形,应按本题的思路求解.

18 (1995，六题，8分) 设函数 $Q(x,y)$ 在 xOy 平面上具有一阶连续偏导数，曲线积分 $\int_L 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关，并对任意 t 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

求 $Q(x,y)$.

【分析】 首先由曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关 $\Leftrightarrow\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，可得到关于 $Q(x,y)$ 的关系式，然后取特殊路径积分，将已知等式转化为含有变限积分的等式，再对等式两边求导即可求出 $Q(x,y)$.

【解】 (方法一) 由题设，有 $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial(2xy)}{\partial y}$，即 $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=2x$，两边对 x 积分，得 $Q(x,y)=x^2+C(y)$.

取特殊路径积分得

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1[t^2+C(y)]\mathrm{d}y=t^2+\int_0^1C(y)\mathrm{d}y$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^t[1+C(y)]\mathrm{d}y=t+\int_0^tC(y)\mathrm{d}y$$

于是，$t^2+\int_0^1C(y)\mathrm{d}y=t+\int_0^tC(y)\mathrm{d}y$，两边对 t 求导得

$$C(t)=2t-1，即\ C(y)=2y-1$$

因此，
$$Q(x,y)=x^2+2y-1$$

(方法二) 同方法一，求得 $Q(x,y)=x^2+C(y)$，则被积表达式

$$2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y+C(y)\mathrm{d}y$$

$$=\mathrm{d}(x^2y)+\mathrm{d}\int_0^yC(v)\mathrm{d}v=\mathrm{d}\left[x^2y+\int_0^yC(v)\mathrm{d}v\right]$$

由 $\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 得

$$\left[x^2y+\int_0^yC(v)\mathrm{d}v\right]\Big|_{(0,0)}^{(t,1)}=\left[x^2y+\int_0^yC(v)\mathrm{d}v\right]\Big|_{(0,0)}^{(1,t)}$$

即 $t^2+\int_0^1C(v)\mathrm{d}v=t+\int_0^tC(v)\mathrm{d}v$，两边对 t 求导得

$$C(t)=2t-1，即\ C(y)=2y-1$$

因此，
$$Q(x,y)=x^2+2y-1$$

微信公众号【原学考研】(ID: djky66)

【评注】 本题 $Q(x,y)$ 是 x,y 的二元函数，故 $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=2x$ 也是 x,y 的二元函数，当两边对变量 x 积分时，积分常数应为变量 y 的函数，即 $Q(x,y)=x^2+C(y)$.

19 (1998，四题，6分) 确定常数 λ，使在右半平面 $x>0$ 上的向量 $\boldsymbol{A}(x,y)=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{i}-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{j}$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度，并求 $u(x,y)$.

【分析】 平面单连通区域内向量场 $\boldsymbol{A}(x,y)=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度，相当于有 $\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)$，$\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$，从而 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial P}{\partial y}$，由此可定出 λ. 在此基础上，根据积分与路径无关可得 $u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y+C$.

【解】 令 $P(x,y)=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}$，$Q(x,y)=-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}$，由题设，有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，即 $4x(x^4+y^2)^{\lambda}(\lambda+1)=0$.

可见，当且仅当$\lambda=-1$时，所给向量场是梯度场. 在$x>0$的半平面内任取一点，比如$(1,0)$作为积分路径的起点，则根据积分与路径无关，有

$$u(x,y)=\int_1^x\frac{2x\cdot 0}{x^4+0}\mathrm{d}x-\int_0^y\frac{x^2}{x^4+y^2}\mathrm{d}y+C=-\arctan\frac{y}{x^2}+C$$

其中C为任意常数.

【评注】　向量场$\boldsymbol{A}(x,y)=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$是梯度场$\Leftrightarrow$存在$u(x,y)$，使得

$$\mathrm{d}u(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$$

$\Leftrightarrow\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}\Leftrightarrow P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$是全微分方程

$\Leftrightarrow$积分$\displaystyle\int_L p(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$与路径无关

实际上，本题还可利用直接凑微分的方法求出$u(x,y)$.

20（2002，六题，8分）设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内具有一阶连续的导数，L是上半平面$(y>0)$内的有向分段光滑曲线，其起点为(a,b)，终点为(c,d). 记$I=\displaystyle\int_L\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y$.

(1) 证明曲线积分I与路径L无关；

(2) 当$ab=cd$时，求曲线积分I的值.

【分析】　本题主要考查曲线积分与路径无关的条件.

【解】　(1) 由于$P(x,y)=\dfrac{1}{y}[1+y^2f(xy)]$，$Q(x,y)=\dfrac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]$，且

$$\frac{\partial P}{\partial y}=f(xy)-\frac{1}{y^2}+xyf'(xy)=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

在上半平面内处处成立，因而“曲线积分I与路径L无关”.

(2)（方法一）　利用(1)的结果，取特殊路径.

由于曲线积分I与路径L无关，故可取积分路径L为由点(a,b)到点(c,b)，再到点(c,d)的折线段. 所以

$$\begin{aligned}I&=\int_a^c\frac{1}{b}[1+b^2f(bx)]\mathrm{d}x+\int_b^d\frac{c}{y^2}[y^2f(cy)-1]\mathrm{d}y\\&=\frac{c-a}{b}+\int_a^c bf(bx)\mathrm{d}x+\int_b^d cf(cy)\mathrm{d}y+\frac{c}{d}-\frac{c}{b}\\&=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{bc}f(t)\mathrm{d}t+\int_{bc}^{cd}f(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{cd}f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

当$ab=cd$时，积分$\displaystyle\int_{ab}^{cd}f(t)\mathrm{d}t=0$.

由此可得$I=\dfrac{c}{d}-\dfrac{a}{b}$.

注意：亦可取积分路径L为由点(a,b)到点(a,d)，再到点(c,d)的折线段.

（方法二）　将曲线积分I分项组合，利用全微分公式$\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$.

$$I=\int_L\frac{1}{y}\mathrm{d}x-\frac{x}{y^2}\mathrm{d}y+\int_L yf(xy)\mathrm{d}x+xf(xy)\mathrm{d}y=\int_L\mathrm{d}\frac{x}{y}+\int_L yf(xy)\mathrm{d}x+xf(xy)\mathrm{d}y$$

微信公众号【顶尖考研】(ID djky66)

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

而 $$\int_L \mathrm{d}\frac{x}{y}=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$$

设 $F(u)$ 为 $f(u)$ 的一个原函数，则积分

$$\int_L yf(xy)\mathrm{d}x+xf(xy)\mathrm{d}y=\int_L f(xy)\mathrm{d}(xy)=F(cd)-F(ab)$$

所以，当 $ab=cd$ 时，$F(cd)-F(ab)=0$.

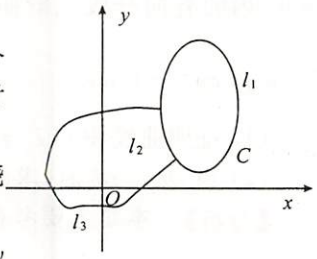
由此可得 $I=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$.

【评注】 当曲线积分 I 与路径无关时，采用全微分的方法有时比用折线段的方法更容易，前提是要记住常见函数的全微分的形式.

21 (2005，19 题，12 分) 设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数，在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上，曲线积分 $\oint_L \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$ 的值恒为同一常数.

(Ⅰ) 证明：对右半平面 $x>0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C，有 $\oint_C \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=0$；

(Ⅱ) 求函数 $\varphi(y)$ 的表达式.



【分析】 证明(Ⅰ)的关键是如何将封闭曲线 C 与围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线相联系，这可利用曲线积分的可加性将 C 进行分解讨论；而(Ⅱ)中求 $\varphi(y)$ 的表达式，显然应用积分与路径无关即可.

【解】(Ⅰ) 如图所示，将 C 分解为：$C=l_1+l_2$，另作一条曲线 l_3 围绕原点且与 C 相接，则

$$\oint_C \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=\oint_{l_1+l_3} \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}-\oint_{-l_2+l_3} \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$$

$$=0.$$

(Ⅱ) 设 $P=\frac{\varphi(y)}{2x^2+y^4}$，$Q=\frac{2xy}{2x^2+y^4}$，$P$、$Q$ 在单连通区域 $x>0$ 内具有一阶连续偏导数，由(Ⅰ)知，曲线积分 $\int_L \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$ 在该区域内与路径无关，故当 $x>0$ 时，总有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

而 $$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{2y(2x^2+y^4)-4x\cdot 2xy}{(2x^2+y^4)^2}=\frac{-4x^2y+2y^5}{(2x^2+y^4)^2}\text{①}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\varphi'(y)(2x^2+y^4)-4\varphi(y)y^3}{(2x^2+y^4)^2}=\frac{2x^2\varphi'(y)+\varphi'(y)y^4-4\varphi(y)y^3}{(2x^2+y^4)^2}\quad\text{②}$$

比较①、②两式的右端，得

$$\begin{cases}\varphi'(y)=-2y & ③\\ \varphi'(y)y^4-4\varphi(y)y^3=2y^5 & ④\end{cases}$$

由③得 $\varphi(y)=-y^2+C$，将 $\varphi(y)$ 代入④得 $2y^5-4Cy^3=2y^5$，所以 $C=0$. 从而 $\varphi(y)=-y^2$.

【评注】 本题难度较大，关键是如何将待求解的问题转化为可利用已知条件的情形.

22 (2006，19 题，12 分) 设在上半平面 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$ 内，函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数，且对任意的 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$.

证明：对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L，都有

$$\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x-xf(x,y)\mathrm{d}y=0$$

【分析】　利用曲线积分与路径无关的条件$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$.

【证明】　$f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$ 两边对 t 求导得

$$xf'_x(tx,ty)+yf'_y(tx,ty)=-2t^{-3}f(x,y)$$

令 $t=1$,则

$$xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)=-2f(x,y) \qquad ①$$

设 $P(x,y)=yf(x,y)$,$Q(x,y)=-xf(x,y)$,则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-f(x,y)-xf'_x(x,y),\frac{\partial P}{\partial y}=f(x,y)+yf'_y(x,y)$$

由 ① 可得$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$. 对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L,都有

$$\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x-xf(x,y)\mathrm{d}y=0$$

四、第一类曲面积分的计算

23 (1995,四(1)题,6分) 计算曲面积分$\iint_\Sigma z\mathrm{d}S$,其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在柱体 $x^2+y^2\leqslant 2x$ 内的部分.

【分析】　考虑到积分曲面 Σ 在 xOy 面上的投影区域比较简单,为圆面 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x\}$,将曲面积分化为该投影区域上的二重积分.

【解】　曲面 Σ 在 xOy 面上的投影区域为 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x\}$,

$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,将积分曲面方程 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 代入被积表达式,

于是

$$\iint_\Sigma z\mathrm{d}S=\iint_\Sigma\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2\mathrm{d}r=\frac{32}{9}\sqrt{2}$$

【评注】　对于曲面积分,应先将积分曲面方程代入被积表达式化简积分,再计算曲面积分.

24 (1999,八题,7分) 设 S 为椭球面$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分,点 $P(x,y,z)\in S$,Π 为 S 在点 P 处的切平面,$\rho(x,y,z)$ 为点 $O(0,0,0)$ 到平面 Π 的距离,求$\iint_S\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$.

【分析】　利用多元函数微分学的几何意义及空间解析几何相关知识求出切平面 Π 及距离 $\rho(x,y,z)$,代入计算第一类曲面积分.

【解】　令 $F(x,y,z)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2-1$,则曲面 S 在点 P 处的切平面的法向量为

$$\{F'_x,F'_y,F'_z\}=\{x,y,2z\}$$

设(X,Y,Z) 为切平面 Π 上的任意一点,则切平面 Π 的方程为

$$x(X-x)+y(Y-y)+2z(Z-z)=0,\text{即 } xX+yY+2zZ-2=0$$

可得

$$\rho(x,y,z)=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}}$$

因而

$$\iint_S\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S=\frac{1}{2}\iint_S z\sqrt{x^2+y^2+4z^2}\mathrm{d}S$$

曲面 S 在 xOy 面的投影为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$，曲面 S 的方程为 $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}$.

$$dS=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}}dxdy$$

所以

$$\iint_S\frac{z}{\rho(x,y,z)}dS=\frac{1}{2}\iint_S z\sqrt{x^2+y^2+4z^2}dS=\frac{1}{4}\iint_D(4-x^2-y^2)dxdy$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(4-r^2)rdr=\frac{3}{2}\pi$$

【评注】 这是一个多元函数微分学、空间解析几何、第一类曲面积分的综合题，虽然单独的每一个知识点不太困难，但整体运算量较大. 特别注意用 (X,Y,Z) 表示切平面 Π 上的任意一点的手法.

25 (2000，二(2)题，3分) 设 $S:x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0)$，$S_1$ 为 S 在第一卦限中的部分，则有

(A) $\iint_S x\,dS=4\iint_{S_1}x\,dS$.　　(B) $\iint_S y\,dS=4\iint_{S_1}x\,dS$.

(C) $\iint_S z\,dS=4\iint_{S_1}x\,dS$.　　(D) $\iint_S xyz\,dS=4\iint_{S_1}xyz\,dS$.

【答案】 C.

【解析】 本题考查第一类曲面积分的对称性，不需要计算各个积分.

显然四个选项等式右边都大于零，而曲面关于 yOz，zOx 面对称，则

$$\iint_S x\,dS=\iint_S y\,dS=\iint_S xyz\,dS=0$$

所以应选(C).

微信公众号【凯考研】(ID: djky66)

【评注】 实际上，由轮换对称性 $\iint_{S_1}z\,dS=\iint_{S_1}x\,dS$，而 $\iint_S z\,dS=4\iint_{S_1}z\,dS=4\iint_{S_1}x\,dS$.

26 (2007，14题，4分) 设曲面 $\Sigma:|x|+|y|+|z|=1$，则 $\oiint_\Sigma(x+|y|)dS=$ _____.

【答案】 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

【解析】 由积分域与被积函数的对称性有

$$\oiint_\Sigma x\,dS=0,\ \oiint_\Sigma|x|\,dS=\oiint_\Sigma|y|\,dS=\oiint_\Sigma|z|\,dS$$

所以

$$\oiint_\Sigma|y|\,dS=\frac{1}{3}\oiint_\Sigma(|x|+|y|+|z|)dS=\frac{1}{3}\oiint_\Sigma dS=\frac{1}{3}\times 8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

故 $\oiint_\Sigma(x+|y|)dS=\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

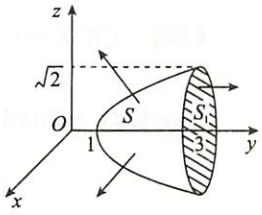
【评注】 对面积的曲面积分，应考虑利用积分区域的对称性简化计算.

五、第二类曲面积分的计算

27 (1987，七题，10 分) 计算曲面积分

$$I=\iint_S x(8y+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 S 是曲线 $\begin{cases}z=\sqrt{y-1},\\ x=0\end{cases}(1\leqslant y\leqslant 3)$ 绕 y 轴旋转一周所形成的曲面，它的法向量与 y 轴正向的夹角恒大于 $\dfrac{\pi}{2}$.



【分析】　形如 $I=\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的曲面积分，若 S 不封闭，此时计算 I 常采用“补曲面法”，将 S 补上一块有向曲面 S^*，使得 $S+S^*$ 为封闭曲面，利用高斯公式，将 $S+S^*$ 上的曲面积分化为三重积分的计算，而往往 S^* 上的积分易求.

【解】　因为曲线 $S:\begin{cases}z=\sqrt{y-1}\\ x=0\end{cases}(1\leqslant y\leqslant 3)$ 绕 y 轴旋转一周所成的曲面为 $y-1=z^2+x^2$.

于是，补充一块有向曲面 $S^*:\begin{cases}x^2+z^2\leqslant 2\\ y=3\end{cases}$，其法线方向与 y 轴的正向相同.

由高斯公式，得

$$\begin{aligned}I&=\oiint_{S+S^*}-\iint_{S^*}=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v-2\iint_{S^*}(1-3^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\mathrm{d}r\int_{1+r^2}^{3}\mathrm{d}y+\iint_{x^2+z^2\leqslant 2}16\mathrm{d}z\mathrm{d}x\\&=2\pi+32\pi=34\pi.\end{aligned}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: diky66)

【评注】　本题还可考虑用直接投影法或矢量点积法(或称投影轮换法)，但运算都较复杂，因而在实际计算中要选择合适的方法. 另此题中的三重积分还可用“先二后一”的方法来计算.

28 (1988，一(3) 题，5 分) 设 S 为曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧，计算曲面积分

$$I=\oiint_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

【分析】　已知积分曲面 S 为闭曲面，且满足高斯公式的条件，可直接用高斯公式将积分化为三重积分.

【解】　设 Ω 为闭曲面 S 所围成的空间区域，根据高斯公式并用球面坐标计算三重积分，得

$$\begin{aligned}I&=\oiint_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{12\pi}{5}\end{aligned}$$

【评注】　本题为常规题型，化为三重积分后，可考虑选用直角坐标、柱面坐标以及球面坐标进行计算，根据被积函数和空间立体的形状，本题显然用球面坐标比较方便. 但考虑到球体是旋转体，也可用“先二后一”法.

29 (1990，五题，8分) 求曲面积分 $I=\iint_S yz\,dzdx+2dxdy$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 外侧在 $z\geqslant 0$ 的部分.

【分析】 因 S 不是封闭曲面，可以考虑添加辅助曲面，利用高斯公式计算. 还可考虑用向量点积法(投影轮换法)或直接投影法.

【解】 (方法一) 令 $S_1:\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 4\\ z=0\end{cases}$ 取下侧，Ω 表示曲面 $S+S_1$ 所围的空间区域，则

$$\begin{aligned}\iint_S yz\,dzdx+2dxdy&=\iint_{S+S_1} yz\,dzdx+2dxdy-\iint_{S_1} yz\,dzdx+2dxdy\\&=\iiint_\Omega z\,dv-\iint_{S_1}2dxdy\\&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^2 r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr+\iint_{x^2+y^2\leqslant 4}2dxdy\\&=4\pi+8\pi=12\pi.\end{aligned}$$

(方法二) 用向量点积法(投影轮换法)

曲面 $S:z=\sqrt{4-x^2-y^2}$

$$z'_x=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\ z'_y=-\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

于是 $$I=\iint_S\{0,yz,2\}\cdot\left\{\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}},1\right\}dxdy$$

$$\begin{aligned}&=\iint_S\left(\frac{y^2z}{\sqrt{4-x^2-y^2}}+2\right)dxdy=\iint_S(y^2+2)dxdy\\&=\iint_{x^2+y^2\leqslant 4}(y^2+2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^2\sin^2\theta\cdot rdr+8\pi\\&=4\pi+8\pi=12\pi\end{aligned}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID：dingjiankaoyan)

【评注】 (1) 在方法一中，$\iint_{S_1}2dxdy=-\iint_{x^2+y^2\leqslant 4}2dxdy$，不能丢掉“−”号；

(2) 还可利用投影法计算 $\iint_S yz\,dzdx+2dxdy$，但运算要烦琐一些，其中计算 $\iint_S yz\,dzdx$ 时，需用 yOz 面把曲面 S 分为前后两部分，也要注意不同部分的方向.

30 (1992，五题，8分) 计算曲面积分 $\iint_\Sigma(x^3+az^2)dydz+(y^3+ax^2)dzdx+(z^3+ay^2)dxdy$，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

【分析】 因 Σ 不是封闭曲面，可以补曲面后再用高斯公式计算.

【解】 令 $\Sigma_1:\begin{cases}x^2+y^2\leqslant a^2\\ z=0\end{cases}$ 取下侧，Ω 表示曲面 $\Sigma+\Sigma_1$ 所围的空间区域，则

$$\iint_\Sigma(x^3+az^2)dydz+(y^3+ax^2)dzdx+(z^3+ay^2)dxdy$$

$$= \iint_{\Sigma+\Sigma_1} (x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y^3+az^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$- \iint_{\Sigma_1} (x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iiint_{\Omega} 3(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v - \iint_{\Sigma_1} ay^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r + a\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{6\pi a^5}{5} + a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\sin^2\theta\cdot r\mathrm{d}r = \frac{6\pi a^5}{5} + \frac{\pi a^5}{4} = \frac{29\pi a^5}{20}$$

【评注】 (1) 利用直接投影法较繁琐，但可考虑用矢量点积法；

(2) 曲面积分化为三重积分或二重积分时要注意符号；

(3) 在计算二重积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 时，可利用轮换对称性 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 会简便一些.

31 (1993，四题，6 分) 计算 $\oiint_{\Sigma} 2xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x - z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围立体的表面外侧.

【分析】 直接用高斯公式计算.

【解】 (方法一) 设 Ω 表示曲面 Σ 所围的空间区域，由高斯公式得

$$\oiint_{\Sigma} 2xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x - z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega} z\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}} r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}$$

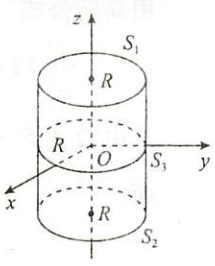
(方法二) 设 Ω 表示曲面 Σ 所围的空间区域，由高斯公式得

$$\oiint_{\Sigma} 2xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x - z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega} z\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_r^{\sqrt{2-r^2}} z\mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}$$

【评注】 在计算三重积分时，方法一用的是球面坐标，方法二用的是柱面坐标. 实际上根据被积函数的特点，还可用先二后一进行积分.

32 (1994，四题，6 分) 计算曲面积分 $\iint\limits_S \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$，其中 S 是由曲面 $x^2+y^2=R^2$ 及两平面 $z=R, z=-R(R>0)$ 所围成立体表面(如右图)的外侧.



【分析】 考虑到被积函数 $P=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, R=\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}$ 在 S 所围内部的点(0,0,0)处没意义，因而不能直接用高斯公式，只能分别在三个曲面上积分.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【解】 令 $S_1:\begin{cases}z=R\\x^2+y^2\leqslant R^2\end{cases}$，取上侧；$S_2:\begin{cases}z=-R\\x^2+y^2\leqslant R^2\end{cases}$，取下侧；$S_3:\begin{cases}-R\leqslant z\leqslant R\\x^2+y^2=R^2\end{cases}$，取外侧，则 $\iint\limits_S\frac{x\,dydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{S_1+S_2+S_3}\frac{x\,dydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}$.

而
$$\iint\limits_{S_1+S_2}\frac{x\,dydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{S_1}\frac{R^2dxdy}{x^2+y^2+R^2}+\iint\limits_{S_2}\frac{R^2dxdy}{x^2+y^2+R^2}$$
$$=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{R^2dxdy}{x^2+y^2+R^2}-\iint\limits_{D_{xy}}\frac{R^2dxdy}{x^2+y^2+R^2}=0$$

其中 $D_{xy}:\begin{cases}z=0\\x^2+y^2\leqslant R^2\end{cases}$ 是 $S_1(S_2)$ 在 xOy 面上的投影.

$$\iint\limits_{S_3}\frac{x\,dydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{S_3}\frac{x\,dydz}{R^2+z^2}$$
$$=\iint\limits_{D_{yz}}\frac{\sqrt{R^2-y^2}\,dydz}{R^2+z^2}-\iint\limits_{D_{yz}}\frac{-\sqrt{R^2-y^2}\,dydz}{R^2+z^2}$$
$$=2\int_{-R}^{R}dy\int_{-R}^{R}\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}dz=\frac{1}{2}\pi^2R$$

其中 $D_{yz}:\begin{cases}x=0\\-R\leqslant y\leqslant R,-R\leqslant z\leqslant R\end{cases}$ 是 S_3 在 yOz 面上的投影.

所以 $\iint\limits_S\frac{x\,dydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{2}\pi^2R$.

微信公众号【顶尖考研】

【评注】 对于曲面积分，注意在计算过程中应先将积分曲面方程代入被积表达式化简积分，再计算曲面积分，但使用了高斯公式后就不能代入.

33 (1996，四(1)题，6分) 计算曲面积分 $\iint\limits_S(2x+z)dydz+zdxdy$，其中 S 为有向曲面 $z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 1)$，其法向量与 z 轴正向的夹角为锐角.

【分析】 本题可有三种方法求解：(1) 补曲面用高斯公式；(2) 向量点积法投影到 xOy 面；(3) 直接投影法.

【解】 (方法一) 补曲面 $S_1:\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 1\\z=1\end{cases}$，取下侧，则

$$\iint\limits_S(2x+z)dydz+zdxdy=\iint\limits_{S+S_1}(2x+z)dydz+zdxdy-\iint\limits_{S_1}(2x+z)dydz+zdxdy$$

用高斯公式

$$\iint\limits_{S+S_1}(2x+z)dydz+zdxdy=-\iiint\limits_{\Omega}3dxdydz=-3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1rdr\int_{r^2}^1dz=-\frac{3}{2}\pi$$

其中 Ω 为 $S+S_1$ 所围的空间区域；

而
$$\iint\limits_{S_1}(2x+z)dydz+zdxdy=\iint\limits_{S_1}dxdy=-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}dxdy=-\pi$$

故
$$\iint\limits_S(2x+z)dydz+zdxdy=-\frac{3}{2}\pi+\pi=-\frac{1}{2}\pi$$

（方法二）　用向量点积法，曲面 $z=x^2+y^2$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{-2x,-2y,1\}$，则

$$\begin{aligned}\iint_S(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_S\{2x+z,0,z\}\cdot\{-2x,-2y,1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_S(-4x^2-2xz+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_S[-4x^2-2x(x^2+y^2)+x^2+y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{x^2+y^2\leqslant1}[-4x^2-2x(x^2+y^2)+x^2+y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{x^2+y^2\leqslant1}(-4x^2+x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(-4r^2\cos^2\theta+r^2)r\mathrm{d}r=-\frac{1}{2}\pi\end{aligned}$$

（方法三）　直接投影法，把 S 分别投影到 yOz 面和 xOy 面上.

设 $S=S_1+S_2$，其中 $S_1:x=\sqrt{z-y^2}$，$0\leqslant z\leqslant1$，取后侧；$S_2:x=-\sqrt{z-y^2}$，$0\leqslant z\leqslant1$，取前侧；它们在 yOz 面上的投影为 $D_{yz}=\{(y,z)\mid y^2\leqslant z\leqslant1,-1\leqslant y\leqslant1\}$，则

$$\begin{aligned}\iint_S(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_{S_1}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{S_2}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-\iint_{D_{yz}}(2\sqrt{z-y^2}+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{D_{yz}}(-2\sqrt{z-y^2}+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{x^2+y^2\leqslant1}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-4\iint_{D_{yz}}\sqrt{z-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{x^2+y^2\leqslant1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-4\int_{-1}^1\mathrm{d}y\int_{y^2}^1\sqrt{z-y^2}\mathrm{d}z+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1r^2r\mathrm{d}r=-\pi+\frac{1}{2}\pi=-\frac{1}{2}\pi\end{aligned}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

【评注】　要掌握第二类曲面积分三种常见的计算方法，根据不同的题目选择不同的方法.

34（1998，六题，7 分）计算 $\iint_\Sigma\dfrac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$，其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧，a 为大于零的常数.

【分析】　先带入曲面方程化简，然后补曲面 $\Sigma_1:\begin{cases}x^2+y^2\leqslant a^2\\z=0\end{cases}$ 下侧，用高斯公式.

【解】　先化简 $I=\dfrac{1}{a}\iint_\Sigma ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，补曲面 $\Sigma_1:\begin{cases}x^2+y^2\leqslant a^2\\z=0\end{cases}$，其法向量与 z 轴正向相反，从而得

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{a}\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{1}{a}\iint_{\Sigma_1}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{a}\left[-\iiint_\Omega(3a+2z)\mathrm{d}v+\iint_{D_{xy}}a^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]=\frac{1}{a}\left[-2\pi a^4-2\iiint_\Omega z\mathrm{d}v+\pi a^4\right]\\&=\frac{1}{a}\left[-2\pi a^4-2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r\int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^0z\mathrm{d}z\right]=-\frac{\pi}{2}a^3\end{aligned}$$

【评注】 (1) 若直接利用投影法,对坐标 y,z 的积分需把 Σ 分为前后两块,计算较复杂.
(2) 补曲面要注意侧的选取.
(3) 若曲面平行于某坐标轴,则对另两个坐标的曲面积分为零.

35 (2000,六题,7 分) 设对于半空间 $x>0$ 内任意的光滑有向封闭曲面 S,都有

$$\oint_S xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

其中函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有连续的一阶导数,且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$,求 $f(x)$.

【分析】 由高斯公式得到关于 $f(x)$ 的微分方程,解此方程,结合条件 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$ 求出 $f(x)$.

【解】 记 Ω 为曲面 S 所围成的闭区域,由高斯公式得

$$\oint_S xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm\iiint_\Omega [f(x)+xf'(x)-xf(x)-\mathrm{e}^{2x}]\mathrm{d}v = 0$$

其中"±"对应于 S 的侧.

由于 S 是任意的曲面,所以对任意的 Ω 有

$$\iiint_\Omega [f(x)+xf'(x)-xf(x)-\mathrm{e}^{2x}]\mathrm{d}v = 0$$

因而 $f(x)+xf'(x)-xf(x)-\mathrm{e}^{2x}=0$,即 $f'(x)+\left(\frac{1}{x}-1\right)f(x)=\frac{1}{x}\mathrm{e}^{2x}$.

解此一阶线性微分方程

$$f(x)=\mathrm{e}^{-\int(\frac{1}{x}-1)\mathrm{d}x}\left(C+\int\frac{1}{x}\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{\int(\frac{1}{x}-1)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}(C+\mathrm{e}^x)$$

由 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$ 得 $C=-1$,所求 $f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}(\mathrm{e}^x-1)$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

36 (2004,17 题,12 分) 计算曲面积分

$$I=\iint_\Sigma 2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 Σ 是曲面 $z=1-x^2-y^2(z\geqslant 0)$ 的上侧.

【分析】 先添加一曲面使之与原曲面围成一封闭曲面,应用高斯公式求解,而在添加的曲面上应用直接投影法求解即可.

【解】 取 Σ_1 为 xOy 平面上被圆 $x^2+y^2=1$ 所围部分的下侧,记 Ω 为由 Σ 与 Σ_1 围成的空间闭区域,则

$$I=\iint_{\Sigma+\Sigma_1} 2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\Sigma_1} 2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由高斯公式知

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma+\Sigma_1} 2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iiint_\Omega 6(x^2+y^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &= 6\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{1-r^2}(z+r^2)r\mathrm{d}z\\ &= 12\pi\int_0^1\left[\frac{1}{2}r(1-r^2)^2+r^3(1-r^2)\right]\mathrm{d}r\\ &= 2\pi\end{aligned}$$

而 $\iint\limits_{\Sigma_1} 2x^3\,dydz+2y^3\,dzdx+3(z^2-1)dxdy=-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}-3dxdy=3\pi$,

故 $I=2\pi-3\pi=-\pi$.

【评注】 本题选择 Σ_1 时应注意其侧与 Σ 围成封闭曲面后同为外侧(或内侧),再就是在 Σ_1 上直接投影积分时,应注意符号(Σ_1 取下侧,与 z 轴正向相反,所以取负号).

37 (2005,4 题,4 分) 设 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 围成的空间区域,Σ 是 Ω 的整个边界的外侧,则 $\iint\limits_{\Sigma}x\,dydz+ydzdx+zdxdy=$ _____.

【答案】 $2\pi(1-\frac{\sqrt{2}}{2})R^3$.

【解析】 $\iint\limits_{\Sigma}x\,dydz+ydzdx+zdxdy=\iiint\limits_{\Omega}3dxdydz$

$$=3\int_0^R r^2dr\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi(1-\frac{\sqrt{2}}{2})R^3.$$

38 (2006,3 题,4 分) 设 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的下侧,则 $\iint\limits_{\Sigma}x\,dydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy=$ _____.

【答案】 2π.

【解析】 设 $\Sigma_1:z=1(x^2+y^2\leqslant 1)$,取上侧,则

$$\iint\limits_{\Sigma}x\,dydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy$$

$$=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy-\iint\limits_{\Sigma_1}xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy.$$

而

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy=\iiint\limits_{V}6dv=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_r^1 dz=2\pi$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy=0$$

所以

$$\iint\limits_{\Sigma}x\,dydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy=2\pi$$

39 (2007,18 题,10 分) 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}xz\,dydz+2yz\,dzdx+3xy\,dxdy$,其中 Σ 为曲面 $z=1-x^2-\frac{y^2}{4}(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的上侧.

【分析】 本题 Σ 不是封闭曲面,首先想到加一曲面 $\Sigma_1:\begin{cases}z=0,\\ x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1,\end{cases}$ 取下侧,使 $\Sigma+\Sigma_1$ 构成封闭曲面,然后利用高斯公式转化为三重积分,再用球面(或柱面)坐标进行计算即可.

【解】 因为 Σ 的方程为:$z=1-x^2-\frac{y^2}{4}(0\leqslant z\leqslant 1)$,

微信公众号【顶尖考研】(ID: diky66)

添加一个平面 $\Sigma_1:\begin{cases}z=0,\\ x^2+\dfrac{y^2}{4}\leqslant 1,\end{cases}$ 取下侧，则 Σ 与 Σ_1 构成闭曲面 Σ_*，其所围区域记为 Ω. 于是

$$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=\oiint\limits_{\Sigma_*}-\iint\limits_{\Sigma_1}$$

而

$$\begin{aligned}\oiint\limits_{\Sigma_*}xz\,dydz+2yz\,dzdx+3xy\,dxdy&=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial(xz)}{\partial x}+\frac{\partial(2yz)}{\partial y}+\frac{\partial(3xy)}{\partial z}\right)\\&=3\iiint\limits_{\Omega}z\,dxdydz=3\int_0^1 z\,dz\iint\limits_{x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1-z}dxdy\\&=6\pi\int_0^1 z(1-z)\,dz=\pi\end{aligned}$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}xz\,dydz+2yz\,dzdx+3xy\,dxdy=\iint\limits_{\Sigma_1}3xy\,dxdy=\iint\limits_{x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1}3xy\,dxdy=0$$

所以

$$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=\oiint\limits_{\Sigma_*}-\iint\limits_{\Sigma_1}=\pi$$

40 (2008，12 题，4 分) 设曲面 Σ 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧，则 $\iint\limits_{\Sigma}xy\,dydz+x\,dzdx+x^2\,dxdy=$ _____.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

【答案】 4π.

【解析】 补曲面 $\Sigma_1:\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 4,\\ z=0,\end{cases}$ 取下侧，记 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$，则

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma}xy\,dydz+x\,dzdx+x^2\,dxdy&=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}xy\,dydz+x\,dzdx+x^2\,dxdy-\iint\limits_{\Sigma_1}xy\,dydz+x\,dzdx+x^2\,dxdy\\&=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz+\iint\limits_{D}x^2\,dxdy\\&=\iiint\limits_{\Omega}y\,dxdydz+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^2\cos^2\theta\cdot r\,dr\\&=0+\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\int_0^2 r^3\,dr=4\pi.\end{aligned}$$

第八章　无穷级数

本章导读

本章主要考查如下几个方面：一是判别或证明数项级数的敛散性，特别是判定抽象级数的敛散性；二是求幂级数的和函数及数项级数的和；三是求函数的幂级数展开式；对于傅里叶级数，考试频率低，应熟练掌握狄利克雷收敛定理.

试题特点

每年试题一般是一个大题、一个小题，分数约占试卷的 9%. 小题主要是抽象级数敛散性的判定，一般以选择题的形式出现，往往有一定难度；大题主要涉及求幂级数的和函数以及把函数展开成幂级数，题目难度不是很大. 对于傅里叶级数，在 2008，2013 年考过.

考题详析

微信公众号【顶尖考研】
(ID: diky66)

一、数项级数敛散性的判定

1 (1987，五(1) 题，3 分) 设常数 $k>0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{k+n}{n^2}$

(A) 发散.　　(B) 绝对收敛.

(C) 条件收敛.　　(D) 收敛或发散与 k 的取值有关.

【答案】 C.

【解析】 级数是交错级数，可利用莱布尼茨判别法判断其敛散性，若收敛进一步判断其是否绝对收敛.

由于数列 $\left\{\dfrac{k+n}{n^2}\right\}$ 单调递减，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{k+n}{n^2}=0$，利用莱布尼茨判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{k+n}{n^2}$ 收敛.

考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\dfrac{k+n}{n^2}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{k+n}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{k}{n^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，因级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{k}{n^2}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{k+n}{n^2}$ 是条件收敛. 应选(C).

【评注】 也可考虑 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{k+n}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{k}{n^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{k}{n^2}$ 绝对收敛，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$ 条件收敛，利用级数的性质，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{k+n}{n^2}$ 条件收敛.

2 (1990，二(3) 题，3 分) 设 α 为常数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

(A) 绝对收敛.　　(B) 条件收敛.

(C) 发散. (D) 收敛性与 α 的取值有关.

【答案】 C.

【解析】 先考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 的敛散性，再由级数的运算性质，可得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n\alpha}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 的敛散性.

因为 $\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$ 绝对收敛，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n\alpha}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 必发散. 答案为(C).

【评注】 对于三个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$.

(1) 如果有两个收敛，则第三个收敛；

(2) 如果其中一个收敛，另一个发散，则第三个发散.

3 (1991，二(3) 题，3 分) 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 等于

(A) 3. (B) 7. (C) 8. (D) 9.

【答案】 C.

【解析】 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+(-1)^{n-1}a_n)=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 收敛，所以，由级数的运算性质得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，且有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=10-2=8$. 应选(C).

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

4 (1992，二(2) 题，3 分) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{a}{n}\right)$ (常数 $a>0$)

(A) 发散. (B) 条件收敛.

(C) 绝对收敛. (D) 收敛性与 a 有关.

【答案】 C.

【解析】 因为 $\left|(-1)^n\left(1-\cos\frac{a}{n}\right)\right|=1-\cos\frac{a}{n}$，且 $1-\cos\frac{1}{n}\sim\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ 收敛，即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{a}{n}\right)$ 绝对收敛.

答案选(C).

【评注】 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$，若 $u_n\sim v_n$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 同敛散.

5 (1994，二(3) 题，3 分) 设常数 $\lambda>0$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$

(A) 发散. (B) 条件收敛. (C) 绝对收敛. (D) 收敛性与 λ 有关.

【答案】 C.

【解析】 由于 $\left|(-1)^n\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}\right|=\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}\leqslant\frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{n^2+\lambda}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{n^2}\right)$，

且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，由级数的性质及正项级数的比较判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$ 绝对收敛，答案应选(C).

6 (1994，六题，8分) 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某一邻域内具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

【分析】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 隐含 $f(0)=f'(0)=0$，考虑 $f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 用一阶泰勒公式.

【证明】 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，可得 $f(0)=f'(0)=0$.

利用泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2=\frac{1}{2}f''(\xi)x^2,(\xi\text{ 介于 }0\text{ 与 }x\text{ 之间})$$

由已知 $f''(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域内有界，存在 $M>0$，有 $|f''(x)|\leqslant M$.

令 $x=\dfrac{1}{n}$，$f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{2}f''(\xi_n)\dfrac{1}{n^2}\left(0<\xi_n<\dfrac{1}{n}\right)$，

当 n 充分大时，$\left|f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right|=\left|\dfrac{1}{2}f''(\xi_n)\dfrac{1}{n^2}\right|\leqslant\dfrac{M}{2}\dfrac{1}{n^2}$，由比较判别法级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

7 (1995，一(4) 题，3分) 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n-1}$ 的收敛半径 $R=$ _____.

【答案】 $\sqrt{3}$.

【解析】 这是缺项的幂级数，不能直接用阿达玛公式求收敛半径，可看作一般函数项级数，用比值判别法或根值判别法.

令 $u_n(x)=\dfrac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n-1}$，则

$$\rho(x)=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{n+1}{2^{n+1}+(-3)^{n+1}}x^{2n+1}}{\dfrac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n-1}}\right|=\frac{1}{3}x^2$$

当 $\rho(x)=\dfrac{1}{3}x^2<1$，即 $|x|<\sqrt{3}$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n-1}$ 绝对收敛，

当 $\rho(x)=\dfrac{1}{3}x^2>1$，即 $|x|>\sqrt{3}$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n-1}$ 发散.

所以，所求收敛半径 $R=\sqrt{3}$.

【评注】 还可作变量替换 $y=x^2$，利用公式求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n+(-3)^n}y^n$ 的收敛半径，开方即得原幂级数的收敛半径.

8 (1995，二(4) 题，3分) 设 $u_n=(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$，则级数

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都收敛.　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都发散.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 发散.　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛.

【答案】 C.

【解析】 对于交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$，利用莱布尼茨判别法知，此级数收敛.

对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^2\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$，因为 $u_n^2=\ln^2\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\sim\dfrac{1}{n}$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 发散，故选(C).

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)
微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

9 (1996,二(3)题,3分)设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,常数 $\lambda\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(n\tan\dfrac{\lambda}{n}\right)a_{2n}$

(A) 绝对收敛. (B) 条件收敛.

(C) 发散. (D) 敛散性与 λ 有关.

【答案】 A.

【解析】 尽管级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(n\tan\dfrac{\lambda}{n}\right)a_{2n}$ 为交错级数,但不能判定它是否满足莱布尼茨判别法的条件,因此应将其看作任意项级数,先考虑是否绝对收敛.

正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 收敛,而 $\left|(-1)^n\left(n\tan\dfrac{\lambda}{n}\right)a_{2n}\right|\sim\lambda a_{2n}$,因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(n\tan\dfrac{\lambda}{n}\right)a_{2n}$ 绝对收敛,应选(A).

【评注】 抽象级数敛散性的判定一般以选择题的形式出现,综合考查对级数的概念及性质的理解和掌握,题目相对有一定难度.本题用到了正项级数如下性质:若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{3n}$ 等均收敛,但此结论对一般的数项级数不成立.

10 (1997,六题,8分)设 $a_1=2,a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)(n=1,2,\cdots)$,证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在;

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛.

【分析】 (1) 由递推公式给出的数列,一般用单调有界数列必有极限来证明极限的存在;

(2) 利用(1)的结果,由正项级数的比较或比值判别法进行判断.

【解】 (1) 显然 $a_n\geqslant 0(n=1,2,3,\cdots)$,由于 $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)-a_n=\dfrac{1-a_n^2}{2a_n}$,

而 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)\geqslant\sqrt{a_n\cdot\dfrac{1}{a_n}}=1$,于是 $a_{n+1}-a_n\leqslant 0$,故数列 $\{a_n\}$ 单调减少且有下界,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

(2) 由于数列 $\{a_n\}$ 单调减少,所以有 $0\leqslant\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1=\dfrac{a_n-a_{n+1}}{a_{n+1}}\leqslant a_n-a_{n+1}$,

而正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 的部分和 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-a_{i+1})=a_1-a_{n+1}$,

又极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在,所以,极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在,即正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 收敛,则由正项级数的比较判别法得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛.

【评注】 本题综合考查了数列极限存在准则与级数收敛的判别法.在确定数列的界时,往往可由 $a_{n+1}-a_n$ 的符号进行反推,本题由 $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1-a_n^2}{2a_n}$,提示证明 $a_n\leqslant 1$ 或 $a_n\geqslant 1$.

另外,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)$ 或 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n+1})$ 收敛的充要条件是极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 存在.

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

11（1998，八题，5 分）设正项数列$\{a_n\}$单调减少，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散，试问级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$是否收敛？并说明理由.

【分析】　根据单调有界数列必有极限知，极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在，而正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$的敛散性可用比较或根值判别法进行判定，问题的关键在于证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n>0$，这可由级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散得到.

【解】　（方法一）　由已知正项数列$\{a_n\}$单调减少，根据单调有界数列必有极限知，极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在. 记$a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，则有$a_n\geqslant a\geqslant 0$，如$a=0$，则由莱布尼茨判别法得交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛，这与已知条件相矛盾，所以$a>0$.

又由于　$\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n\leqslant\left(\frac{1}{a+1}\right)^n$，而$\frac{1}{a+1}<1$，几何级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a+1}\right)^n$收敛，

所以，由正项级数的比较判别法，得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$收敛.

（方法二）　同方法一，可证明极限$a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在，且$a>0$.

又$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n+1}=\frac{1}{a+1}<1$，所以，由正项级数的根值判别法，

得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$收敛.

【评注】　本题巧妙地将数列极限存在准则、正项级数判别法、交错级数的莱布尼茨判别法综合起来进行考查，只要熟练掌握了相关的基本概念、基本理论和基本方法，是可以正确解答的.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

12（1999，九题，7 分）设$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x$，

（1）求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$的值；

（2）试证：对任意的常数$\lambda>0$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$收敛.

【分析】　直接求a_n较困难.（1）要整体考虑a_n+a_{n+2}；（2）对a_n放缩估计.

【解】　（1）$a_n+a_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^n x+\tan^{n+2}x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\sec^2 x\,\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}\tan x=\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n+1}$$

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$.

（2）由于$0<a_n<a_n+a_{n+2}=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$，有$\frac{a_n}{n^\lambda}<\frac{1}{n^{\lambda+1}}$，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda+1}}$收敛，由正项级数的比较判别法，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$收敛.

13（2000，二（3）题，3 分）设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则必收敛的级数为

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{u_n}{n}$.　　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$.　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$.

【答案】 D.

【解析】 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+1}$ 也收敛，因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$ 收敛.

正确答案选(D).

【评注】 本题也可利用举反例排除错误答案. 如：取 $u_n=(-1)^n\frac{1}{\ln n}$，排除(A)；取 $u_n=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$，排除(B)；取 $u_n=(-1)^n\frac{1}{n}$，排除(C).

14 (2002，二(2)题，3分) 设 $u_n\neq 0(n=1,2,3,\cdots)$，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$

(A) 发散.　　(B) 绝对收敛.

(C) 条件收敛.　　(D) 收敛性根据所给条件不能判定.

【答案】 C.

【解析】 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$，所以由极限的保号性，存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，有 $u_n>0$.

由于 $\left|(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)\right|=\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\geqslant\frac{1}{u_n}(n>N)$，又由 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$ 得到 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{u_n}}{\frac{1}{n}}=1$，所以，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$(当 $n>N$ 时，$u_n>0$) 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 具有相同的收敛性，即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$ 发散，于是由正项级数的比较判别法得，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)\right|$ 发散，即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$ 不是绝对收敛.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

下面考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$ 是条件收敛还是发散.

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$ 的前 n 项部分和

$$\begin{aligned}S_n&=\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}\right)-\left(\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}\right)+\left(\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4}\right)+\cdots+(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)\\&=\frac{1}{u_1}+(-1)^{n+1}\frac{1}{u_{n+1}}\end{aligned}$$

由已知 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{u_n}=0$，所以，$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{u_1}$，即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$ 收敛.

因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$ 条件收敛，应选(C).

【评注】 本题难度较大，综合了极限的保号性、级数的比较判别法及其极限形式、收敛级数的定义.

15 (2004，9题，4分) 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数，下列结论中正确的是

(A) 若 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(B) 若存在非零常数 λ，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \lambda$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(C) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n = 0$.

(D) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则存在非零常数 λ，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \lambda$.

【答案】 B.

【解析】 对于敛散性的判定问题，若不便直接推证，往往可用反例通过排除法找到正确选项.

取 $a_n = \dfrac{1}{n\ln n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n}$ 发散，排除(A)，(D)；

又取 $a_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，但 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n = \infty$，排除(C)，故应选(B).

【评注】 本题也可用比较判别法的极限形式，$\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lambda \neq 0$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散，因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散，故应选(B).

16 (2004，18 题，11 分) 设有方程 $x^n + nx - 1 = 0$，其中 n 为正整数. 证明此方程存在唯一正实根 x_n，并证明当 $\alpha > 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^{\alpha}$ 收敛.

微信公众号【顶尖考研】(ID: diky66)

【分析】 利用介值定理证明存在性，利用单调性证明唯一性. 而正项级数的敛散性可用比较法判定.

【证明】 记 $f_n(x) = x^n + nx - 1$. 由 $f_n(0) = -1 < 0$，$f_n(1) = n > 0$，由连续函数的介值定理知，方程 $x^n + nx - 1 = 0$ 存在正实数根 $x_n \in (0,1)$.

当 $x > 0$ 时，$f_n'(x) = nx^{n-1} + n > 0$，可见 $f_n(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加，故方程 $x^n + nx - 1 = 0$ 存在唯一正实数根 x_n.

由 $x^n + nx - 1 = 0$ 与 $x_n > 0$ 知 $0 < x_n = \dfrac{1 - x_n^n}{n} < \dfrac{1}{n}$，故当 $\alpha > 1$ 时，

$$0 < x_n^{\alpha} < \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$$

而正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ 收敛，所以当 $\alpha > 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^{\alpha}$ 收敛.

【评注】 本题综合考查了介值定理和无穷级数的敛散性，题型设计比较新颖，但难度并不大，只要基本概念清楚，应该可以轻松求证.

17 (2006，9 题，4 分) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则级数

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛.　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 收敛.　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛.

【答案】 D.

【解析】 由 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$ 收敛，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛，故应选(D).

【评注】 也可利用排除法：

取 $a_n=(-1)^n\frac{1}{n}$，则可排除选项(A)(B)；

取 $a_n=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$，则可排除选项(C)，故(D)项正确.

二、求幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域

18 (1988，一(1)题，5分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$ 的收敛域.

【分析】 可直接用收敛半径公式，求出收敛半径及收敛区间，区间端点处的收敛性可转化为数项级数敛散性的判定，进而得到收敛域.

【解】 因为 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}}{\frac{1}{n\cdot 3^n}}=\frac{1}{3}$，所以收敛半径为 $R=\frac{1}{\rho}=3$，收敛区间为(0,6).

当 $x=0$ 时，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 是收敛的，

当 $x=6$ 时，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的.

故所求的收敛域为[0,6).

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

【评注】 本题也可令 $x-3=t$，先求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n\cdot 3^n}$ 的收敛域，再求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$ 的收敛域. 也可把其当作一般的函数项级数，直接用比值判别法求收敛半径.

19 (1988，三(4)题，3分) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛，则此级数在 $x=2$ 处

(A) 条件收敛.　　(B) 绝对收敛.

(C) 发散.　　(D) 收敛性不能确定.

【答案】 B.

【解析】 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛，由阿贝尔定理，

当 $|x-1|<|-1-1|=2$，即 $-1<x<3$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 绝对收敛，

故此级数在 $x=2$ 处绝对收敛. 应选(B).

20 (1997，一(2)题，3分) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为3，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为_____.

【答案】 (-2,4).

【解析】　幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 与 $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 有相同的收敛区间，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 的收敛区间为 $|x|<3$.

所以，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}=(x-1)^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n-1}$ 的收敛区间为

$$|x-1|<3,\text{即}(-2,4)$$

【评注】　(1) 考试大纲明确规定收敛区间是指开区间，不须考虑端点的敛散性；

(2) 幂级数经过有限次的逐项求导或积分，不改变其收敛半径与收敛区间，但收敛域可能发生变化.

21 (2000，七题，6 分) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n+(-2)^n}\dfrac{x^n}{n}$ 的收敛区间，并讨论该区间端点处的收敛性.

【分析】　可以直接用公式求收敛半径，端点处的敛散性以数项级数讨论.

【解】　令 $a_n=\dfrac{1}{[3^n+(-2)^n]n}$，则

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}=\frac{1}{3}$$

收敛半径 $R=\dfrac{1}{\rho}=3$，收敛区间为 $(-3,3)$.

当 $x=3$ 时，原级数的一般项为 $\dfrac{3^n}{3^n+(-2)^n}\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{1+(-\frac{2}{3})^n}\dfrac{1}{n}\sim\dfrac{1}{n}$，原级数发散.

当 $x=-3$ 时，原级数的一般项为

$$\frac{(-3)^n}{3^n+(-2)^n}\frac{1}{n}=\frac{(-3)^n+2^n-2^n}{3^n+(-2)^n}\frac{1}{n}=(-1)^n\frac{1}{n}-\frac{2^n}{3^n+(-2)^n}\frac{1}{n}$$

$$=(-1)^n\frac{1}{n}-\frac{1}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

又级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$ 收敛，而 $\dfrac{1}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\sim\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ 收敛，

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{3^n+(-2)^n}\dfrac{1}{n}$ 收敛，进而原级数在 $x=-3$ 时收敛.

【评注】　对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-3)^n}{3^n+(-2)^n}\dfrac{1}{n}$，虽然它是交错级数，但不能用莱布尼茨判别法判定.

22 (2008，11 题，4 分) 已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛，在 $x=-4$ 处发散，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛域为_____.

【答案】　$(1,5]$.

【解析】　由题设知，当 $|x+2|<|0+2|=2$，即 $-4<x<0$ 时，幂级数收敛；

而当 $|x+2|>|-4+2|=2$，即 $x<-4$ 或 $x>0$ 时，幂级数发散.

可见幂级数的收敛半径为 2.

于是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 当 $|x-3|<2$，即 $1<x<5$ 时收敛，

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛区间为(1,5).

另外,幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛,相当于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 在 $x=5$ 处收敛,故所求收敛域为(1,5].

【评注】 收敛区间特指开区间,而收敛域应考虑在端点的敛散性.

三、求幂级数的和函数及数项级数的和

23 (1987,六题,10 分) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}$ 的收敛域,并求其和函数.

【分析】 先用公式求出幂级数的收敛半径及收敛区间,再考察端点处的敛散性可得到收敛域. 将幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}$ 转化为基本情形 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$,即可求得和函数.

【解】 因为 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}}=\frac{1}{2}$,所以收敛半径 $R=2$,收敛区间为(-2,2).

当 $x=2$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散,当 $x=-2$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n}$ 收敛,所以幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}$ 的收敛域为[-2,2).

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n$,则

$$S'(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2-x}(-2<x<2)$$

所以 $S(x)=S(0)+\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{2-t}\mathrm{d}t=-\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)(-2\leqslant x<2)$.

于是,当 $x\neq 0$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}=\frac{1}{x}S(x)=-\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$,

当 $x=0$ 时,$\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}\right]=\frac{1}{2}$,

因此,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right), & -2\leqslant x<2,x\neq 0,\\ \frac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$

【评注】 求幂级数的和函数,一般先通过幂级数的代数运算、逐项微分、逐项积分等性质将其化为典型的幂级数求和问题:$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$.

24 (1990,四题,6 分) 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛域,并求其和函数.

【分析】 可直接用收敛半径公式,求出收敛半径及收敛区间,区间端点处的收敛性可转化为数项级数敛散性的判定,进而得到收敛域,在收敛域内求和函数.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【解析】　因为 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{2n+1}=1$，所以收敛半径为 $R=\dfrac{1}{\rho}=1$，收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x=-1$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n+1)$ 发散，

当 $x=1$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n+1)$ 发散.

故所求的收敛域为 $(-1,1)$.

和函数　$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}nx^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$

$$=2x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'+\sum_{n=0}^{\infty}x^n=2x\Big(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\Big)'+\frac{1}{1-x}$$

$$=2x\Big(\frac{x}{1-x}\Big)'+\frac{1}{1-x}=\frac{1+x}{(1-x)^2}(-1<x<1)$$

25 (1993，五题，7 分) 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2-n+1}{2^n}$ 的和.

【分析】　数项级数的求和问题一般可通过构造幂级数，转化为幂级数求和函数问题. 应先设法对数项级数进行变形，以便构造易于求和的幂级数形式.

【解】　$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2-n+1}{2^n}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)^n$，

几何级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)^n=\dfrac{1}{1-\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)}=\dfrac{2}{3}$，令 $S(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}$，有

$$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\Big(\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\Big)'=\Big(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\Big)''=\Big(\frac{1}{1-x}\Big)''=\frac{2}{(1-x)^3}(-1<x<1)$$

于是　$\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)^n=\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)^2S\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2}{\Big(1+\dfrac{1}{2}\Big)^3}=\dfrac{4}{27}$

所以　$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2-n+1}{2^n}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{27}=\dfrac{22}{27}$

26 (1996，五题，7 分) 求级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和.

【分析】　对于级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n^2-1)2^n}$，先将其转化为求幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2-1}$ 的和函数，再令 $x=\dfrac{1}{2}$ 以求得数项级数的和.

【解】　令 $S(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2-1}$，有

$$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1}=\frac{1}{2}\Big(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}\Big)=\frac{x}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}-\frac{1}{2x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}(x\neq0)$$

$$=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\frac{1}{2x}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-x-\frac{1}{2}x^2\Big)$$

因为　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{n-1}\mathrm{d}t=\int_0^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}t^{n-1}\mathrm{d}t=\int_0^x\dfrac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-\ln(1-x)(-1\leqslant x<1)$，

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

所以 $S(x)=-\frac{x}{2}\ln(1-x)+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2x}\ln(1-x)(-1\leqslant x<1,x\neq 0)$.

于是 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2$.

27 (2001,五题,8分) 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$,试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数,并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

【分析】 由于 $\frac{1+x^2}{x}=x^{-1}+x$ 已经是 x 的幂函数形式,所以只需将 $\arctan x$ 展开成 x 的幂级数即可.

【解】 因为 $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}(-1<x<1)$,

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}(-1\leqslant x\leqslant 1)$$

所以
$$\begin{aligned}\frac{1+x^2}{x}\arctan x&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2}{1-4n^2}x^{2n}(-1\leqslant x\leqslant 1,x\neq 0)\end{aligned}$$

又 $\left[1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2}{1-4n^2}x^{2n}\right]_{x=0}=1=f(0)$,于是 $f(x)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2}{1-4n^2}x^{2n}(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

令 $x=1$,得 $f(1)=1+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}=\frac{\pi}{2}$,因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【评注】 (1) 对于本题,不能直接对函数 $\frac{1+x^2}{x}\arctan x$ 逐次求其一阶、二阶、…、直到一般的 n 阶导数,再由此求其幂级数展开式,这样做是非常复杂的.应考虑到 $\frac{1+x^2}{x}=x^{-1}+x$ 已经是 x 的幂函数形式,只需将 $\arctan x$ 展开成 x 的幂级数,特别注意这种技巧.

另外,应指出 $\left[1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2}{1-4n^2}x^{2n}\right]_{x=0}=1=f(0)$,这样才能说明幂级数 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2}{1-4n^2}x^{2n}$ 在区间 $[-1,1]$ 上表示函数 $f(x)$.

(2) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ 的收敛域为 $(-1,1)$,但逐项积分后所得幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ 的收敛域为 $[-1,1]$.须注意:幂级数经过有限次的逐项求导、积分不改变其收敛半径及收敛区间,但在收敛区间的端点处的敛散性可能会改变.

(3) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和是幂级数展开式的一个基本应用,根据要求和的级数的特点,在展开式 $f(x)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2}{1-4n^2}x^{2n}(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 中令 $x=1$ 即可得到所求级数的和.

28 (2002,七题,7 分)(1) 验证函数

$$y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$$

满足微分方程$y''+y'+y=e^x$;

(2) 利用(1) 的结果求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$的和函数.

【分析】 (1) 利用幂级数的逐项微分性质;(2) 利用(1) 中微分方程的解.

【解】 (1) 由幂级数的逐项微分性质,可知

$$y'(x)=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\cdots,x\in\mathbf{R}$$

$$y''(x)=x+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\cdots,x\in\mathbf{R}$$

所以

$$y''+y'+y=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=e^x,x\in\mathbf{R}$$

(2) 由已知$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=y(x)$,所以为求$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$的和函数,只要求出$y(x)$的表达式即可. 解齐次方程$y''+y'+y=0$,其特征方程为$\lambda^2+\lambda+1=0$,特征根为$\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$,故齐次方程的通解为$\overline{y}=e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

可设方程$y''+y'+y=e^x$的特解为$y^*=Ae^x$,代入可得$A=\frac{1}{3}$,故$y^*=\frac{1}{3}e^x$,于是$y=y(x)=e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{1}{3}e^x$. 由(1) 中的结果可知$y(0)=1,y'(0)=0$由此得

$$C_1=\frac{2}{3},C_2=0$$

因此

$$y(x)=\frac{1}{3}e^x+\frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=y(x)=\frac{1}{3}e^x+\frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

29 (2003,四题,12 分)将函数$f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}$展开成$x$的幂级数,并求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$的和.

【分析】 本题可先求导,利用间接法展开成幂级数,然后取x为某特殊值,得所求级数的和.

【解】 因为$f'(x)=-\frac{2}{1+4x^2}=-2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^nx^{2n},x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

又$f(0)=\frac{\pi}{4}$,所以

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}-2\int_0^x\Big[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^nt^{2n}\Big]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1},x\in\Big(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big)$$

因为级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$收敛，函数$f(x)$在$x=\frac{1}{2}$处连续，所以

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1},x\in\Big(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big]$$

令$x=\frac{1}{2}$，得

$$f\Big(\frac{1}{2}\Big)=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\frac{(-1)4^n}{2n+1}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}\Big]=\frac{\pi}{4}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

再由$f\Big(\frac{1}{2}\Big)=0$，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}-f\Big(\frac{1}{2}\Big)=\frac{\pi}{4}$$

30 (2005，16题，12分)求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\Big[1+\frac{1}{n(2n-1)}\Big]x^{2n}$的收敛区间与和函数$f(x)$.

【分析】 先求收敛半径，进而可确定收敛区间. 和函数可利用逐项求导得到.

【解】 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)+1}{(n+1)(2n+1)}\cdot\frac{n(2n-1)}{n(2n-1)+1}=1$，所以当$x^2<1$时，原级数绝对收敛，当$x^2>1$时，原级数发散，因此原级数的收敛半径为1，收敛区间为$(-1,1)$

记$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)}x^{2n},x\in(-1,1)$，则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1},x\in(-1,1)$$

$$S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2},x\in(-1,1)$$

由于$S(0)=0,S'(0)=0$，所以

$$S'(x)=\int_0^x S''(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\arctan x$$

$$S(x)=\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\arctan t\mathrm{d}t=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

又 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n}=\frac{x^2}{1+x^2},x\in(-1,1)$，从而

$$f(x)=2S(x)+\frac{x^2}{1+x^2}$$

$$=2x\arctan x-\ln(1+x^2)+\frac{x^2}{1+x^2},x\in(-1,1)$$

【评注】 本题求收敛区间是基本题型，应注意收敛区间一般指开区间. 而幂级数求和尽量将其转化为形如$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$或$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$的幂级数，再通过逐项求导或逐项积分求出其和函数.

31 (2007,20 题,10 分) 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛,其和函数 $y(x)$ 满足

$$y''-2xy'-4y=0,y(0)=0,y'(0)=1$$

(Ⅰ) 证明:$a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n(n=1,2,\cdots)$;

(Ⅱ) 求 $y(x)$ 的表达式.

【分析】　可将幂级数代入微分方程通过比较同次项系数,从而证得(Ⅰ);由(Ⅰ)求(Ⅱ).

【解】　(Ⅰ) 对 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 求一、二阶导数,得

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$$

代入 $y''-2xy'-4y=0,y(0)=0,y'(0)=1$,可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n-2\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n-4\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0,a_0=0,a_1=1,a_2=0$$

即 $2a_2-4a_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-2(n+2)a_n]x^n=0$,

比较同次项系数可得

$$2a_2-4a_0=0,(n+1)(n+2)a_{n+2}-2(n+2)a_n=0,n=1,2,\cdots$$

从而

$$a_{n+2}=\frac{2}{n+1}a_n,n=1,2,\cdots$$

(Ⅱ) 由 $a_0=0,a_1=1,a_2=0,a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n,n=1,2,\cdots$ 可得

$$a_{2n}=0,a_{2n+1}=\frac{2}{2n}a_{2n-1}=\frac{2}{2n}\cdot\frac{2}{(2n-2)}a_{2n-3}=\cdots=\frac{1}{n!}a_1=\frac{1}{n!}$$

故

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x^2)^n=xe^{x^2}$$

【评注】　本题为一道幂级数与二阶微分方程的综合题,考查了幂级数的逐项微分法及 e^x 的麦克劳林级数展开式.所以需记住 $e^x,\dfrac{1}{1-x},\ln(1+x)$ 等常见函数的麦克劳林级数展开式.

四、函数的幂级数展开

32 (1989,四题,6 分) 将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 展开为 x 的幂级数.

【分析】　幂级数展开有两种方法,即直接法和间接法.一般考查间接法,通过适当的恒等变

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

形、求导或积分等，转化为幂级数展开式已知的函数.

【解】 因为 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$，所以 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}(-1<x<1)$，有

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}+\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}(-1\leqslant x<1)$$

【评注】 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ 的收敛域为 $(-1,1)$，但逐项积分后所得幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ 的收敛域为 $[-1,1)$，其实 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ 在 $x=1$ 处也收敛，若对函数 $f(x)$ 补充定义：$f(1)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\arctan\frac{1+x}{1-x}=\frac{\pi}{2}$，则 $f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ 在 $[-1,1]$ 上成立.

另外，幂级数经过有限次的逐项求导、积分不改变其收敛半径及收敛区间，但在收敛区间的端点处的敛散性有可能会改变.

33 (1994，三(2)题，5分) 将函数 $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$ 展开成 x 的幂级数.

【分析】 用间接法展开，可以求导后展开或分解为常见函数的展开式.

【解】 (方法一) 可计算 $f'(x)=\frac{1}{1-x^4}-1=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{4n}-1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{4n}(-1<x<1)$，

所以 $f(x)=f(0)+\int_0^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}t^{4n}\mathrm{d}t=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}x^{4n+1}(-1<x<1)$.

(方法二) $f(x)=\frac{1}{4}\ln(1+x)-\frac{1}{4}\ln(1-x)+\frac{1}{2}\arctan x-x$

而 $$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}(-1<x\leqslant1)$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}(-1\leqslant x<1)$$

且 $$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}(-1<x<1)$$

有 $$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}(-1\leqslant x\leqslant1)$$

所以 $$f(x)=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}-x$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}-x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}(-1<x<1)$$

34 (2006，17题，12分) 将函数 $f(x)=\frac{x}{2+x-x^2}$ 展成 x 的幂级数.

【分析】 利用常见函数的幂级数展开式.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

【解】 $f(x)=\dfrac{x}{2+x-x^2}=\dfrac{x}{(2-x)(1+x)}=\dfrac{A}{2-x}+\dfrac{B}{1+x}$，比较两边系数可得 $A=\dfrac{2}{3}$，$B=-\dfrac{1}{3}$，即 $f(x)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{2-x}-\dfrac{1}{1+x}\right)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1-\frac{x}{2}}-\dfrac{1}{1+x}\right)$.

而

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,x\in(-1,1),\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n,x\in(-2,2)$$

故 $f(x)=\dfrac{x}{2+x-x^2}=\dfrac{1}{3}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}x^n\right)=\dfrac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^{n+1}+\dfrac{1}{2^n}\right)x^n,x\in(-1,1)$.

【评注】 分式函数的幂级数展开一般采用间接法. 要熟记常用函数的幂级数展开公式：

(1) $\dfrac{1}{1-u}=1+u+u^2+\cdots+u^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}u^n,u\in(-1,1)$；

(2) $\dfrac{1}{1+u}=1-u+u^2-\cdots+(-1)^n u^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u^n,u\in(-1,1)$；

(3) $e^u=1+u+\dfrac{1}{2!}u^2+\cdots+\dfrac{1}{n!}u^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}u^n,u\in(-\infty,+\infty)$；

(4) $\sin u=u-\dfrac{u^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n u^{2n+1}}{(2n+1)!},u\in(-\infty,+\infty)$；

(5) $\cos u=1-\dfrac{u^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{u^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n u^{2n}}{(2n)!},u\in(-\infty,+\infty)$；

(6) $\ln(1+u)=u-\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{u^3}{3}-\cdots+(-1)^n\dfrac{u^{n+1}}{n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n u^{n+1}}{n+1},u\in(-1,1]$；

(7) $(1+u)^\alpha=1+\alpha u+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}u^2+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}u^n+\cdots,u\in(-1,1)$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

五、傅里叶级数

35 (1988，二(2)题，3分) 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，它在区间 $(-1,1]$ 上定义为

$$f(x)=\begin{cases}2, & -1<x\leqslant 0\\ x^3, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=1$ 处收敛于_____.

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

【答案】 $\dfrac{3}{2}$.

【解析】 由狄利克雷收敛定理知，$f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=1$ 处收敛于

$$\frac{f(-1^+)+f(1^-)}{2}=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$$

【评注】 应注意在不连续点与左右端点处收敛定理的结论：收敛于相应点左右极限的算术平均值.

36 (1989，二(4)题，3分) 设函数 $f(x)=x^2$，$0\leqslant x<1$，而 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，$-\infty<x<+\infty$，其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x$，$n=1,2,\cdots$，则 $S\left(-\frac{1}{2}\right)=$

(A) $-\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{1}{4}$. (C) $\frac{1}{4}$. (D) $\frac{1}{2}$.

【答案】 B.

【解析】 函数 $f(x)$ 先作奇延拓，再作周期为2的延拓，$S(x)$ 即为 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数，由狄利克雷收敛定理

$$S\left(-\frac{1}{2}\right)=-S\left(\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$$

所以应选(B).

37 (1991，五题，8分) 将函数 $f(x)=2+|x|$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 展开成以2为周期的傅里叶级数，并由此求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【分析】 因函数为偶函数，可展开成余弦级数，再取特殊的 x 值，变形求得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

【解】 因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $b_n=0(n=1,2,\cdots)$，且

$$a_0=2\int_0^1(2+x)\mathrm{d}x=5$$

$$a_n=2\int_0^1(2+x)\cos n\pi x\mathrm{d}x=\frac{2(\cos n\pi-1)}{\pi^2n^2}(n=1,2,\cdots)$$

因为函数 $f(x)$ 在 $x\in[-1,1]$ 上满足狄利克雷收敛定理的条件，故

$$f(x)=2+|x|=\frac{5}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(\cos n\pi-1)}{\pi^2n^2}\cdot\cos n\pi x=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2}$$

当 $x=0$ 时，有 $f(0)=2=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$，从而 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

又由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{4}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

【评注】 注意本题中计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是通过解方程得出的技巧.

38 (1992,一(3)题,3分) 设 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\leqslant 0\\ 1+x^2, & 0<x\leqslant\pi\end{cases}$,则其以 2π 为周期的傅里叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于_____.

【答案】 $\frac{\pi^2}{2}$.

【解析】 设 $S(x)$ 为函数 $f(x)$ 以 2π 为周期的傅里叶级数的和函数,根据狄利克雷收敛定理,有

$$S(\pi)=\frac{1}{2}[f(\pi^-)+f(-\pi^+)]=\frac{1}{2}[(1+\pi^2)+(-1)]=\frac{\pi^2}{2}$$

39 (1993,一(3)题,3分) 设函数 $f(x)=\pi x+x^2(-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶级数展开式为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

则其中系数 b_3 的值为_____.

【答案】 $\frac{2}{3}\pi$.

【解析】 根据傅里叶级数的定义,有

$$b_3=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 3x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi x+x^2)\sin 3x\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}x\sin 3x\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky6b)

40 (1995,四(2)题,6分) 将函数 $f(x)=x-1(0\leqslant x\leqslant 2)$ 展开成周期为4的余弦级数.

【分析】 将函数先作偶延拓,再作周期为4的周期延拓.

【解】

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2(x-1)\mathrm{d}x=0$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\int_0^2(x-1)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{n\pi}\int_0^2(x-1)\mathrm{d}\sin\frac{n\pi x}{2}=-\frac{2}{n\pi}\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1](n=1,2,\cdots)$$

所以展开成周期为4的余弦级数为

$$f(x)=\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}[(-1)^n-1]\cos\frac{n\pi x}{2}(0\leqslant x\leqslant 2)$$

41 (1999,二(3)题,3分) 设 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\\ 2-2x, & \frac{1}{2}<x<1\end{cases}$,$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$,$-\infty<x<+\infty$,其中 $a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x$,$n=0,1,2,\cdots$,则 $S\left(-\frac{5}{2}\right)$ 等于

(A) $\frac{1}{2}$.　　(B) $-\frac{1}{2}$.　　(C) $\frac{3}{4}$.　　(D) $-\frac{3}{4}$.

【答案】 C.

【解析】 由狄利克雷收敛定理

$$S\left(-\frac{5}{2}\right)=S\left(-2-\frac{1}{2}\right)=S\left(-\frac{1}{2}\right)=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{f\left(\frac{1}{2}-0\right)+f\left(\frac{1}{2}+0\right)}{2}=\frac{3}{4}$$

所以应选(C).

42 (2003,一(3)题,4分) 设 $x^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$,则 $a_2=$_____.

【答案】 1.

【解析】 将 $f(x)=x^2(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开为余弦级数 $x^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$,利用公式 $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$,计算 a_2.

$$\begin{aligned}a_2&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cdot\cos 2x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\,d\sin 2x\\&=\frac{1}{\pi}\left[x^2\sin 2x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin 2x\cdot 2x\,dx\right]\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\,d\cos 2x=\frac{1}{\pi}\left[x\cos 2x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos 2x\,dx\right]\\&=1\end{aligned}$$

【评注】 主要考查傅里叶级数的展开公式,本质上转化为定积分的计算.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

43 (2008,19题,11分) 将函数 $f(x)=1-x^2(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成余弦级数,并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

【解】 因为 $f(x)$ 为偶函数,于是 $b_n=0(n=1,2,\cdots)$,对 $n=1,2,\cdots$,有

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\cos nx\,dx-\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx\right)\\&=\frac{2}{\pi}\left(0-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}x^2\,d\sin nx\right)=-\frac{2}{n\pi}\left(x^2\sin nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}2x\sin nx\,dx\right)\\&=-\frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}x\,d\cos nx=-\frac{4}{n^2\pi}\left(x\cos nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right)\\&=-\frac{4}{n^2\pi}\cdot\pi(-1)^n=\frac{4\cdot(-1)^{n+1}}{n^2}.\end{aligned}$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\,dx=2\left(1-\frac{\pi^2}{3}\right)$$

所以 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=1-\frac{\pi^2}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx,0\leqslant x\leqslant\pi.$

令 $x=0$,得 $f(0)=1-\frac{\pi^2}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot(-1)^{n+1}}{n^2}$,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$

第九章　常微分方程

本章导读

本章主要侧重于一阶微分方程及二阶常系数线性微分方程的求解，其他类型的方程考试中出现的频率较低．一阶微分方程重点掌握可分离变量、齐次及一阶线性微分方程的求解，特别是一阶线性微分方程的求解．

试题特点

每年试题一般是一个小题，以大题出现的形式较少，分数约占试卷的 4%，难度不是很大．除了各种微分方程的求解，常系数线性微分方程解的结构及性质也是考查的一个重要方面．

考题详析

一、一阶微分方程

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

1 (1991，二(2) 题，3 分) 若连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x)=\int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t+\ln 2$，则 $f(x)$ 等于

(A) $\mathrm{e}^x\ln 2$.　　(B) $\mathrm{e}^{2x}\ln 2$.　　(C) $\mathrm{e}^x+\ln 2$.　　(D) $\mathrm{e}^{2x}+\ln 2$.

【答案】 B.

【解析】 方程两边对 x 求导，去掉变限积分，得到微分方程，再解微分方程．

方程 $f(x)=\int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t+\ln 2$ 两边对 x 求导，得

$$f'(x)=2f(x)，且满足\ f(0)=\ln 2$$

解此变量可分离微分方程

$$f(x)=C\mathrm{e}^{2x}$$

代入 $f(0)=\ln 2$，得 $C=\ln 2$，所求 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}\ln 2$．答案选(B)．

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

【评注】 注意题中隐含的初值条件 $f(0)=\ln 2$.

2 (1992，一(4) 题，3 分) 微分方程 $y'+y\tan x=\cos x$ 的通解为 $y=$ _____.

【答案】 $(x+C)\cos x$.

【解析】 此题为一阶线性方程，由一阶线性方程通解公式得

$$y=\mathrm{e}^{-\int\tan x\mathrm{d}x}\left[\int\cos x\mathrm{e}^{\int\tan x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{\ln\cos x}\left(\int\cos x\mathrm{e}^{-\ln\cos x}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=(x+C)\cos x$$

3 (1993，三(3) 题，5 分) 求微分方程 $x^2y'+xy=y^2$ 满足初始条件 $y(1)=1$ 的特解．

【分析】 该方程是齐次微分方程，按齐次方程的方法求解即可．

【解】 原方程变为

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{y}{x}$$

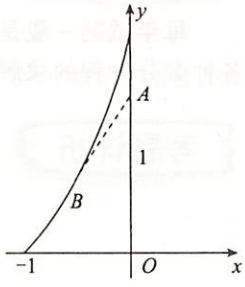
令 $u=\frac{y}{x}$，有 $u+x\frac{du}{dx}=u^2-u$，即 $\frac{1}{u(u-2)}du=\frac{1}{x}dx$，

两边积分 $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-2}{u}\right|=\ln|x|+\frac{1}{2}\ln C_1$，即 $\frac{u-2}{u}=\pm C_1x^2$，

代入 $u=\frac{y}{x}$，原方程的通解为 $\frac{y-2x}{y}=Cx^2(C=\pm C_1)$.

用初始条件 $y\Big|_{x=1}=1$，$C=-1$，所求特解为 $y=\frac{2x}{1+x^2}$.

4 (1993，九题，6 分) 设物体 A 从点(0，1) 出发，以速度大小为常数 v 沿 y 轴正向运动，物体 B 从点(−1，0) 与 A 同时出发，其速度大小为 $2v$，方向始终指向 A. 试建立物体 B 的运动轨迹所满足的微分方程，并写出初始条件.



【分析】 B 的运动始终指向 A，意味着待求曲线的切线的斜率与 A、B 两点连线的斜率相等，得到一关系式；由 B 的速度可得另一个关系式. 综合两个式子可求得运动轨迹所满足的微分方程.

【解】 设在时刻 t，B 位于点 (x,y) 处，此时 A 位于点 $(0,1+vt)$ 处，则由题意得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-(1+vt)}{x}$$

即

$$x\frac{dy}{dx}=y-vt-1$$

两边对 x 求导 $x\frac{d^2y}{dx^2}=-v\frac{dt}{dx}$，(*)

又由已知 $2v=\frac{ds}{dt}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\frac{dx}{dt}$，即 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2v}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$，带入(*)式

所求微分方程为 $x\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$，其初始条件为 $y\Big|_{x=-1}=0$，$y'\Big|_{x=-1}=1$.

【评注】 解答 $2v=\frac{ds}{dt}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\frac{dx}{dt}$ 中的 $ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$ 是弧微分.

5 (1995，五题，7 分) 设曲线 L 位于 xOy 平面的第一象限内，过 L 上任意一点 M 处的切线与 y 轴总相交，交点为 A. 已知 $|\overline{MA}|=|\overline{OA}|$，且 L 过点 $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$，求 L 的方程.

【分析】 利用 $|\overline{MA}|=|\overline{OA}|$ 建立微分方程，求满足初值条件 $y\Big|_{x=\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$ 的特解.

【解】 设 L 的方程为 $y=y(x)$，则过点 $M(x,y(x))$ 的切线方程为

$$Y-y=y'(X-x)$$

令 $X=0$，得 A 点的坐标为 $(0,y-xy')$.

由已知 $|\overline{MA}|=|\overline{OA}|$，有

$$\sqrt{x^2+(y'x)^2}=|y-xy'|$$

化简得 $2yy'-\frac{1}{x}y^2=-x$，令 $u=y^2$，方程化为 $u'-\frac{1}{x}u=-x$，这是一个一阶线性方程，

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

$$u = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left(C - \int x e^{-\int \frac{1}{x}dx}dx\right) = x(C - x)$$

即 $y^2 = Cx - x^2$，由 $y\Big|_{x=\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$ 得 $C = 3$.

L 的方程为 $y^2 = 3x - x^2$，即 $y = \sqrt{3x - x^2}(0 < x < 3)$.

【评注】　注意用 (X,Y) 表示任意点 (x,y) 处切线上点的坐标.

6　(1996，六题，7 分) 设对任意 $x > 0$，曲线 $y = f(x)$ 上点 $(x, f(x))$ 处的切线在 y 轴上的截距等于 $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$，求 $f(x)$ 的一般表达式.

【分析】　写出切线方程，求出其在 y 轴上的截距，然后列出积分方程求解.

【解】　曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x, f(x))$ 处的切线方程为

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x)$$

其在 y 轴上的截距为 $f(x) - xf'(x)$.

由题意知 $f(x) - xf'(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$，即 $xf(x) - x^2 f'(x) = \int_0^x f(t)dt$.

积分方程两边对 x 求导得 $xf''(x) + f'(x) = 0$，即 $[xf'(x)]' = 0$，

有 $xf'(x) = C_1$，进而 $f(x) = C_1 \ln x + C_2$ (C_1, C_2 为任意常数).

7　(1997，三(3) 题，5 分) 在某一人群中推广新技术是通过其中已掌握新技术的人进行的，设该人群的总人数为 N，在 $t = 0$ 时刻已掌握新技术的人数为 x_0，在任意时刻 t 已掌握新技术的人数为 $x(t)$ (将 $x(t)$ 视为连续可微变量)，其变化率与已掌握新技术人数和未掌握新技术人数之积成正比，比例常数 $k > 0$，求 $x(t)$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID:dky66)

【分析】　这是道简单的微分方程应用题.

【解】　由已知，有 $\frac{dx}{dt} = kx(N - x)$，满足 $x(0) = x_0$.

分离变量 $\frac{dx}{x(N-x)} = kdt$，两边积分得 $\frac{1}{N}\ln\frac{x}{N-x} = kt + \frac{1}{N}\ln C$，

即 $x = \frac{NCe^{kNt}}{1 + Ce^{kNt}}$，代入 $x(0) = x_0$，得 $C = \frac{x_0}{N - x_0}$，

所求 $x(t) = \frac{Nx_0 e^{kNt}}{N - x_0 + x_0 e^{kNt}}$.

【评注】　注意在式子 $\frac{1}{N}\ln\frac{x}{N-x} = kt + \frac{1}{N}\ln C$ 中，为整齐起见，要合适选取任意常数的表示形式.

8　(1997，四(2) 题，7 分) 设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，而 $z = f(e^x \sin y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{2x}z$，求 $f(u)$.

【分析】　由题中所给等式转化为关于 $f(u)$ 的微分方程，解方程求出 $f(u)$.

【解】　由复合函数求导法则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \sin y f'(u), \frac{\partial z}{\partial y} = e^x \cos y f'(u)$$

进而 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{2x}\sin^2 y f''(u) + e^x \sin y f'(u)$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{2x}\cos^2 y f''(u) - e^x \sin y f'(u)$，

代入已知等式得 $e^{2x}f''(u)=e^{2x}f(u)$，即 $f''(u)-f(u)=0$，

解此二阶常系数齐次线性微分方程得

$$f(u)=C_1e^{u}+C_2e^{-u}\text{（其中 }C_1,C_2\text{ 为任意常数）}$$

9 (1998，二(3)题，3分) 已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\frac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$，且当 $\Delta x\to 0$ 时，α 是 Δx 的高阶无穷小，$y(0)=\pi$，则 $y(1)$ 等于

(A)2π. (B) π. (C)$e^{\frac{\pi}{4}}$. (D)$\pi e^{\frac{\pi}{4}}$.

【答案】 D.

【解析】 由题设可知函数 $y=y(x)$ 在点 x 处可微，根据微分与导数的关系，可得 $y'=\frac{y}{1+x^2}$，解此可分离变量方程即可.

分离变量得 $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{1+x^2}$，两边积分得 $\ln y=\arctan x+\ln C$，即 $y=Ce^{\arctan x}$，代入 $y(0)=\pi$，得 $C=\pi$，于是 $y=\pi e^{\arctan x}$，$y(1)=\pi e^{\frac{\pi}{4}}$，故选(D).

【评注】 由 $\Delta y=\frac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$，根据导数定义得

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{y}{1+x^2}+\frac{\alpha}{\Delta x}\right)=\frac{y}{1+x^2}$$

另外，从本题可知，由函数在任意点 x 处的微分或导数定义，可构造微分方程，这样可将微分或导数的定义与微分方程结合起来，构造较综合的题目.

微信公众号【硕果考研】

10 (1998，五题，6分) 从船上向海中沉放某种探测仪器，按探测要求，需确定仪器的下沉深度 y(从海平面算起) 与下沉速度 v 之间的函数关系. 设仪器在重力作用下，从海平面由静止开始铅直下沉，在下沉过程中还受到阻力和浮力的作用. 设仪器的质量为 m，体积为 B，海水比重为 ρ，仪器所受的阻力与下沉速度成正比，比例系数为 $k(k>0)$. 试建立 y 与 v 所满足的微分方程，并求出函数关系式 $y=y(v)$.

【分析】 由牛顿第二定律列方程，并求解.

【解】 设沉放点为原点 O，Oy 轴正向垂直向下，则由牛顿第二定律得

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=mg-B\rho-kv$$

其中 $v=\frac{dy}{dt}$，进而 $\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt}=v\frac{dv}{dy}$，

于是所列微分方程化为 $mv\frac{dv}{dy}=mg-B\rho-kv$.

分离变量 $dy=\frac{mv}{mg-B\rho-kv}dv$，两边积分

$$y=-\frac{mv}{k}-\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln(mg-B\rho-kv)+C$$

代入初值条件 $v|_{y=0}=0$，得 $C=\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln(mg-B\rho)$，

所求的函数关系式为 $y=-\frac{mv}{k}-\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln\left(\frac{mg-B\rho-kv}{mg-B\rho}\right)$.

【评注】　本题是一个难度不算太大的物理应用题，但由于题中涉及较多的抽象字母，运算稍显繁琐，应注意计算能力的训练.

11 (2004，16题，11分) 某种飞机在机场降落时，为了减少滑行距离，在触地的瞬间，飞机尾部张开减速伞，以增大阻力，使飞机迅速减速并停下.

现有一质量为9000kg的飞机，着陆时的水平速度为700km/h. 经测试，减速伞打开后，飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比(比例系数为 $k=6.0\times10^6$). 问从着陆点算起，飞机滑行的最长距离是多少?(注：kg表示千克，km/h表示千米/小时)

【分析】　本题是标准的牛顿第二定理的应用，列出关系式后再解微分方程即可.

【解】　(方法一)　由题设，飞机的质量 $m=9000\text{kg}$，着陆时的水平速度 $v_0=700\text{km/h}$. 从飞机接触跑道开始记时，设 t 时刻飞机的滑行距离为 $x(t)$，速度为 $v(t)$.

根据牛顿第二定律，得

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv$$

又

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

由以上两式得

$$\mathrm{d}x=-\frac{m}{k}\mathrm{d}v$$

积分得 $x(t)=-\frac{m}{k}v+C$. 由于 $v(0)=v_0$，$x(0)=0$，故得 $C=\frac{m}{k}v_0$，从而

$$x(t)=\frac{m}{k}(v_0-v(t))$$

当 $v(t)\to0$ 时，$x(t)\to\frac{mv_0}{k}=\frac{9000\times700}{6.0\times10^6}=1.05(\text{km})$.

所以，飞机滑行的最长距离为1.05km.

(方法二)　根据牛顿第二定律，得 $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv$，

所以

$$\frac{\mathrm{d}v}{v}=-\frac{k}{m}\mathrm{d}t$$

两端积分得通解 $v=Ce^{-\frac{k}{m}t}$，代入初始条件 $v\Big|_{t=0}=v_0$ 解得 $C=v_0$，

故

$$v(t)=v_0e^{-\frac{k}{m}t}$$

飞机滑行的最长距离为

$$x=\int_0^{+\infty}v(t)\mathrm{d}t=-\frac{mv_0}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{mv_0}{k}=1.05(\text{km})$$

或由 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_0e^{-\frac{k}{m}t}$，知 $x(t)=\int_0^t v_0e^{-\frac{k}{m}t}\mathrm{d}t=-\frac{kv_0}{m}(e^{-\frac{k}{m}t}-1)$，故最长距离为当 $t\to\infty$ 时，$x(t)\to\frac{kv_0}{m}=1.05(\text{km})$.

(方法三)　根据牛顿第二定律，得 $m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0$$

其特征方程为 $\lambda^2+\frac{k}{m}\lambda=0$，解之得 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=-\frac{k}{m}$，

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

故 $$x = C_1 + C_2 e^{-\frac{k}{m}t}$$

由 $x\Big|_{t=0} = 0, v\Big|_{t=0} = \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = -\frac{kC_2}{m}e^{-\frac{k}{m}t}\Big|_{t=0} = v_0$，得 $C_1 = -C_2 = \frac{mv_0}{k}$，于是

$$x(t) = \frac{mv_0}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

当 $t \to +\infty$ 时，$x(t) \to \frac{mv_0}{k} = 1.05(\text{km})$.

所以，飞机滑行的最长距离为 1.05km.

【评注】 本题求飞机滑行的最长距离，可理解为 $t \to +\infty$ 或 $v(t) \to 0$ 的极限值，这种条件应引起注意.

12 (2005，2 题，4 分) 微分方程 $xy' + 2y = x\ln x$ 满足 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 的解为_____.

【答案】 $y = \frac{1}{3}x\ln x - \frac{1}{9}x$.

【解析】 原方程等价为 $y' + \frac{2}{x}y = \ln x$，于是通解为

$$y = e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left[\int \ln x \cdot e^{\int\frac{2}{x}dx}dx + C\right] = \frac{1}{x^2}\cdot\left[\int x^2\ln x dx + C\right]$$

$$= \frac{1}{3}x\ln x - \frac{1}{9}x + C\frac{1}{x^2}$$

由 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 得 $C = 0$，故所求解为 $y = \frac{1}{3}x\ln x - \frac{1}{9}x$.

微信公众号【顶尖考研】

【评注】 本题虽属基本题型，但在用相关公式时应注意先化为标准型. 另外，本题也可如下求解：原方程可化为 $x^2y' + 2xy = x^2\ln x$，即 $(x^2y)' = x^2\ln x$，两边积分得

$$x^2y = \int x^2\ln x dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C,$$

再代入初始条件即可得所求解为 $y = \frac{1}{3}x\ln x - \frac{1}{9}x$.

13 (2006，2 题，4 分) 微分方程 $y' = \frac{y(1-x)}{x}$ 的通解是_____.

【答案】 $y = Cxe^{-x}(x \neq 0)$，C 为任意常数.

【解析】 原方程等价为

$$\frac{dy}{y} = \left(\frac{1}{x} - 1\right)dx$$

两边积分得 $\ln y = \ln x - x + C_1$，整理得

$$y = Cxe^{-x}, (C = e^{C_1})$$

14 (2008，9 题，4 分) 微分方程 $xy' + y = 0$ 满足条件 $y(1) = 1$ 的解是 $y =$ _____.

【答案】 $y = \frac{1}{x}$.

【解析】 分离变量，得 $\frac{dy}{y} = -\frac{1}{x}dx$，两边积分有

$$\ln|y| = -\ln|x| + C_1 \Rightarrow \ln|xy| = C_1 \Rightarrow xy = \pm e^{C_1} = C$$

利用条件 $y(1) = 1$ 知 $C = 1$，故满足条件的解为 $y = \frac{1}{x}$.

【评注】　微分方程 $xy'+y=0$ 可改写为 $(xy)'=0$，再两边积分即可.

二、高阶常系数微分方程的求解

15 (1987，四题，8 分) 求微分方程 $y'''+6y''+(9+a^2)y'=1$ 的通解(一般解)，其中常数 $a>0$.

【分析】　本题为高阶常系数非齐次线性微分方程，有标准的求解方法：先求出特征方程的根，进而写出对应齐次方程的通解 $\bar{y}$；其次待定系数求出非齐次线性微分方程的一个特解 y^*；最后写出非齐次线性微分方程的通解 $y=\bar{y}+y^*$.

【解】　对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^3+6\lambda^2+(9+a^2)\lambda=0$，

求解得根为 $\lambda_1=0,\lambda_{2,3}=-3\pm ai$，故对应齐次方程的通解为

$$\bar{y}=C_1+e^{-3x}(C_2\cos ax+C_3\sin ax)$$

设非齐次方程的特解为 $y^*=Ax$，代入原方程得 $A=\dfrac{1}{9+a^2}$.

所求微分方程的通解为 $y=C_1+e^{-3x}(C_2\cos ax+C_3\sin ax)+\dfrac{x}{9+a^2}$.

【评注】　本题也可先作变量代换 $y'=u$，将原方程化为二阶常系数线性非齐次微分方程进行求解.

16 (1988，五题，8 分) 设函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $y''-3y'+2y=2e^x$，且其图形在点(0，1) 处的切线与曲线 $y=x^2-x+1$ 在该点的切线重合，求函数 $y=y(x)$.

【分析】　本题实际上是求二阶常系数非齐次微分方程的一个特解，初值条件由题意确定为 $y(0)=1,y'(0)=-1$.

【解】　对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2-3\lambda+2=0,\text{得}\ \lambda_1=1,\lambda_2=2$$

则对应齐次方程的通解为 $\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{2x}$.

可设原方程的特解为 $y^*=Axe^x$，代入原方程得 $A=-2$，

故原方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}-2xe^x$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

所求函数对应的曲线在点(0，1) 处的切线与曲线 $y=x^2-x+1$ 在该点的切线重合，有 $y(0)=1,y'(0)=-1$，得 $C_1=1,C_2=0$，故所求的函数为 $y=(1-2x)e^x$.

【评注】　注意利用函数 $y=y(x)$ 的图形在点(0，1) 处的切线与曲线 $y=x^2-x+1$ 在该点的切线重合确定微分方程初值条件的方式.

17 (1989，二(3) 题，3 分) 设线性无关的函数 y_1,y_2,y_3 都是二阶非齐次线性微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$$

的解，C_1,C_2 是任意常数，则该非齐次线性微分方程的通解是

(A) $C_1y_1+C_2y_2+y_3$.　　(B) $C_1y_1+C_2y_2-(C_1+C_2)y_3$.

(C) $C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$.　　(D) $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$.

【答案】　D.

【解析】　此题主要考查二阶线性微分方程解的性质及结构.

根据线性微分方程解的性质 y_1-y_3,y_2-y_3 是齐次方程的两个线性无关的解，因而齐次方程

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

的通解为 $C_1(y_1-y_3)+C_2(y_2-y_3)$，所以非齐次方程的通解为

$$C_1(y_1-y_3)+C_2(y_2-y_3)+y_3=C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$$

答案选(D).

18 (1989，五题，7 分) 设 $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$ 为连续函数，求 $f(x)$.

【分析】 先在等式两边对 x 求导，消去变限积分，将原方程化为关于未知函数 $f(x)$ 的微分方程，再求解该微分方程.

【解】 $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$ 化为

$$f(x)=\sin x-x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t \tag{1}$$

两边对 x 求导得

$$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-xf(x)+xf(x)$$

即

$$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \tag{2}$$

两边再对 x 求导得

$$f''(x)+f(x)=-\sin x$$

令 $x=0$，由(1)(2)式，得 $f(0)=0,f'(0)=1$.

于是，原问题就转化为求微分方程 $f''(x)+f(x)=-\sin x$ 满足初始条件 $f(0)=0,f'(0)=1$ 的特解.

方程 $f''(x)+f(x)=-\sin x$ 对应的齐次方程的特征方程为 $\lambda^2+1=0$，特征根为 $\lambda_{1,2}=\pm\mathrm{i}$，故对应的齐次方程通解为 $C_1\cos x+C_2\sin x$.

因为 $\pm\mathrm{i}$ 是特征根，因此原方程的特解可设为

$$y^*=x(A\cos x+B\sin x)$$

代入方程得 $A=\frac{1}{2},B=0$，所以方程的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}x\cos x$.

代入初始条件 $f(0)=0,f'(0)=1$，得 $C_1=0,C_2=\frac{1}{2}$，从而 $f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}x\cos x$.

【评注】 此题是一个积分方程，但要注意题中隐含的初值条件 $f(0)=0,f'(0)=1$.

19 (1990，三(3)题，5 分) 求微分方程 $y''+4y'+4y=\mathrm{e}^{-2x}$ 的通解(一般解).

【分析】 本题是求解二阶常系数非齐次线性微分方程的通解，利用二阶常系数非齐次微分方程解的结构求解，即先求出对应齐次方程的通解 $\bar{y}$，然后求出非齐次微分方程的一个特解 y^*，则其通解为 $y=\bar{y}+y^*$.

【解】 对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2+4\lambda+4=0$$

得 $\lambda_1=\lambda_2=-2$，则对应齐次方程的通解为 $\bar{y}=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-2x}$.

可设原方程的特解为 $y^*=Ax^2\mathrm{e}^{-2x}$，代入原方程得 $A=\frac{1}{2}$.

故原方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-2x}+\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-2x}$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

【评注】 对二阶常系数非齐次线性微分方程，当自由项为多项式、指数函数、$\sin\beta x$，$\cos\beta x$ 以及它们和、差、积所得的函数时，要熟练掌握求特解的方法.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

20 (1991,九题,8分) 在上半平面求一条向上凹的曲线,其上任一点 $P(x,y)$ 处的曲率等于此曲线在该点的法线段 PQ 长度的倒数(Q 是法线与 x 轴的交点),且曲线在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴平行.

【分析】　本题为几何应用问题,先写出曲率与法线方程,然后根据题意列出微分方程并求解.注意:曲线向上凹意味着 $y''>0$,曲线在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴平行意味着有初始条件:$y(1)=1,y'(1)=0$.

【解】　设所求曲线的方程为 $y=y(x)(y>0)$,其在任一点 $P(x,y)$ 处的法线方程为

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)$$

它与 x 轴的交点是 $(x+yy',0)$,从而线段 PQ 长度为 $\sqrt{(yy')^2+y^2}=y\sqrt{1+y'^2}$,根据题意,有微分方程

$$\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{y\sqrt{1+y'^2}}$$

由于 $y''>0$,得方程 $yy''=1+y'^2$,且满足初始条件:$y(1)=1,y'(1)=0$.

这是不显含 x 的可降阶的二阶方程,令 $p=y'$,有 $y''=p\frac{dp}{dy}$,代入方程得 $yp\frac{dp}{dy}=1+p^2$,分离变量得 $\frac{pdp}{1+p^2}=\frac{dy}{y}$,两边积分得 $\sqrt{1+p^2}=C_1y$,即 $\sqrt{1+y'^2}=C_1y$.

代入初始条件 $y(1)=1,y'(1)=0$,得 $C_1=1$,因此有 $\sqrt{1+y'^2}=y$,即 $y'=\pm\sqrt{y^2-1}$,$\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}=\pm dx$,两边积分得

$$\ln(y+\sqrt{y^2-1})=\pm x+C$$

代入 $y(1)=1$ 得 $C=\mp1$,所求曲线的方程为 $\ln(y+\sqrt{y^2-1})=\pm(x-1)$,即 $y=\frac{1}{2}(e^{x-1}+e^{1-x})$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【评注】　本题综合考查了导数的几何应用、微分方程等多个知识点,有一定的难度与计算量.另外,求曲线在任意点 $P(x,y)$ 处的法线方程时,由于任意点已用 x 和 y 表示,因此法线上任意点的坐标设为 (X,Y),以示区别.

21 (1992,四题,6分) 求微分方程 $y''+2y'-3y=e^{-3x}$ 的通解.

【分析】　本题是求解二阶常系数非齐次微分方程的通解,利用二阶常系数非齐次微分方程解的结构求解,即先求出对应齐次方程的通解 $\bar{y}$,然后求出非齐次微分方程的一个特解 y^*,则其通解为 $y=\bar{y}+y^*$.

【解】　对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2+2\lambda-3=0,\text{得}\ \lambda_1=1,\lambda_2=-3$$

则对应齐次方程的通解为 $\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{-3x}$.

可设原方程的特解为 $y^*=Axe^{-3x}$,代入原方程得 $A=-\frac{1}{4}$,

故原方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-3x}-\frac{1}{4}xe^{-3x}$,其中 C_1,C_2 为任意常数.

22 (1994,五题,9分) 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数,$f(0)=0,f'(0)=1$,且

$$[xy(x+y)-f(x)y]dx+[f'(x)+x^2y]dy=0$$

为一全微分方程,求 $f(x)$ 及此全微分方程的通解.

【分析】 利用 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$ 为全微分方程的充分必要条件是 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，求出 $f(x)$，然后解方程求通解.

【解】 由全微分方程的充分必要条件有

$$\frac{\partial[f'(x)+x^2y]}{\partial x}=\frac{\partial[xy(x+y)-f(x)y]}{\partial y}$$

即 $f''(x)+2xy=x^2+2xy-f(x)$，亦是 $f''(x)+f(x)=x^2$.

解此二阶常系数线性微分方程得

$$f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+x^2-2$$

由 $f(0)=0,f'(0)=1$，得 $C_1=2,C_2=1$，

所以 $$f(x)=2\cos x+\sin x+x^2-2$$

原全微分方程为

$$[xy^2-y(2\cos x+\sin x)+2y]\mathrm{d}x+(-2\sin x+\cos x+2x+x^2y)\mathrm{d}y=0$$

凑微分 $$\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2y^2)-2\mathrm{d}(y\sin x)+\mathrm{d}(y\cos x)+2\mathrm{d}(xy)=0$$

因此原方程通解为 $\frac{1}{2}x^2y^2-2y\sin x+y\cos x+2xy=C$.

【评注】 对于全微分方程的解法，除了题中直接凑微分外，还可考虑用第二类曲线积分求原函数 $u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y$，通解为 $u(x,y)=C$；或用偏积分法 $\frac{\partial u}{\partial x}=P$，$\frac{\partial u}{\partial y}=Q$，求出 $u(x,y)$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: dkky66)

23 (1996，一(3)题，3分) 微分方程 $y''-2y'+2y=\mathrm{e}^x$ 的通解为_____.

【答案】 $y=\mathrm{e}^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+\mathrm{e}^x$，$C_1,C_2$ 为任意常数.

【解析】 本题求解二阶常系数非齐次微分方程的通解，利用二阶常系数非齐次微分方程解的结构求解，即先求出对应齐次方程的通解 $\overline{y}$，然后求出非齐次微分方程的一个特解 y^*，则其通解为 $y=\overline{y}+y^*$.

对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2-2\lambda+2=0,\text{得 }\lambda_{1,2}=1\pm\mathrm{i}$$

则对应齐次方程的通解为 $\overline{y}=\mathrm{e}^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$.

可设原方程的特解为 $y^*=A\mathrm{e}^x$，代入原方程得 $A=1$，所以原方程的特解为 $y^*=\mathrm{e}^x$.

故原方程的通解为 $y=\mathrm{e}^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+\mathrm{e}^x$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

24 (1999，一(3)题，3分) $y''-4y=\mathrm{e}^{2x}$ 的通解为 $y=$_____.

【答案】 $C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}+\frac{1}{4}x\mathrm{e}^{2x}$，$C_1,C_2$ 为任意常数.

【解析】 利用线性微分方程的通解的结构求解.

先求齐次微分方程 $y''-4y=0$ 的通解 $\overline{y}$.

特征方程为 $\lambda^2-4=0$，得 $\lambda_1=2,\lambda_2=-2$. 所以，齐次微分方程的通解为 $\overline{y}=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}$.

再求非齐次微分方程 $y''-4y=\mathrm{e}^{2x}$ 的一个特解 y^*. $\lambda_2=2$ 是特征方程为 $\lambda^2-4=0$ 的单根，则设特解的形式为 $y^*=Ax\mathrm{e}^{2x}$.

将 y^* 代入到原微分方程，得 $A=\frac{1}{4}$，原微分方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}+\frac{1}{4}x\mathrm{e}^{2x}$.

25 (1999，五题，6分) 设函数 $y(x)(x\geqslant 0)$ 二阶可导且 $y'(x)>0$，$y(0)=1$. 过曲线 $y=y(x)$ 上任意一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线，上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积记为 S_1，区间 $[0,x]$ 上以 $y=y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2. 并设 $2S_1-S_2$ 恒为1，求此曲线 $y=y(x)$ 的方程.

【分析】　由几何意义，求出 S_1，S_2，利用 $2S_1-S_2=1$ 得到关于 $y(x)$ 的积分方程，解此方程，求出 $y=y(x)$.

【解】　设过点 $P(x,y)$ 的切线方程为 $Y-y=y'(x)(X-x)$，与 x 轴的交点为 $\left(x-\frac{y}{y'},0\right)$. 且由题设，知 $y(x)>0$.

因为 $S_1=\frac{1}{2}y\left|x-\left(x-\frac{y}{y'}\right)\right|=\frac{y^2}{2y'}$，且 $S_2=\int_0^x y(t)\mathrm{d}t$.

由条件 $2S_1-S_2=1$，得 $\frac{y^2}{y'}-\int_0^x y(t)\mathrm{d}t=1$，两边对 x 求导，整理得 $yy''=y'^2$，

且满足初值条件 $y(0)=1$，$y'(0)=1$.

令 $y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p$，则 $y''=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$. 于是，$ypp'=p^2$，即 $yp'=p$.

解此微分方程，得通解为 $y=\mathrm{e}^{C_1+C_2x}$，其中 C_1，C_2 为任意常数.

于是，利用条件 $y(0)=1$，$y'(0)=1$，满足特定条件的特解为 $y=\mathrm{e}^x$.

【评注】　注意积分方程隐含的条件 $y'(0)=1$.

26 (2000，一(3)题，3分) 微分方程 $xy''+3y'=0$ 的通解为_____.

【答案】　$y=\frac{C_1}{x^2}+C_2$.

【解析】　这是不显含 y 的二阶微分方程.

令 $y'=p$，则 $y''=p'$. 于是，$xp'+3p=0$，这是一个可分离变量微分方程.

$\frac{\mathrm{d}p}{p}=-\frac{3}{x}\mathrm{d}x$，两边积分，得 $\ln p=-3\ln x+\ln C$，从而 $p=\frac{C}{x^3}$，即 $y'=\frac{C}{x^3}$.

再积分一次，即得原微分方程的通解为 $y=-\frac{C}{2x^2}+C_2=\frac{C_1}{x^2}+C_2\left(C_1=-\frac{C}{2}\right)$.

27 (2001，一(1)题，3分) 设 $y=\mathrm{e}^x(C_1\sin x+C_2\cos x)$（$C_1$，$C_2$ 为任意常数）为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解，则该方程为_____.

【答案】　$y''-2y'+2y=0$.

【解析】　由于二阶常系数线性齐次微分方程由其特征方程唯一确定，因此由通解表达式得到对应的特征根，即可确定特征方程，从而得到齐次微分方程.

根据二阶常系数线性齐次微分方程的特征根与其通解表达式之间的关系，可知特征根为一对复数根 $\lambda_{1,2}=1\pm\mathrm{i}$，根据根与系数的关系，得特征方程为 $\lambda^2-2\lambda+2=0$.

因此相应的二阶常系数线性齐次微分方程为 $y''-2y'+2y=0$.

【评注】　对于二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$，函数 $Ae^{\alpha x}$ 是其解的充要条件为 $\lambda=\alpha$ 是特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的根；函数 $Ae^{\alpha x}\sin\beta x$，$Be^{\alpha x}\cos\beta x$ 或 $\mathrm{e}^{\alpha x}(A\sin\beta x+B\cos\beta x)$ 是其解的充要条件为 $\lambda=\alpha\pm\beta\mathrm{i}$ 是特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的根.

28 (2002，一(3)题，3分) 微分方程 $yy''+y'^2=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1$，$y'\big|_{x=0}=\frac{1}{2}$ 的特解是_____.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

【答案】 $y^2=x+1$ 或 $y=\sqrt{x^2+1}$.

【解析】 这是不显含 x 的可降阶的二阶微分方程,令 $y'=p$ 降为一阶微分方程.

令 $y'=p$,原方程变为

$$yp\frac{dp}{dy}+p^2=0$$

有 $p=0$ 或 $y\frac{dp}{dy}+p=0$.

显然 $p=0$ 不满足初始条件 $y\Big|_{x=0}=1,y'\Big|_{x=0}=\frac{1}{2}$.

因此必有 $y\frac{dp}{dy}+p=0$,即 $\frac{dp}{p}=-\frac{dy}{y}$,两边积分得 $p=\frac{C_1}{y}$,即 $y'=\frac{C_1}{y}$,代入初始条件 $y\Big|_{x=0}=1,y'\Big|_{x=0}=\frac{1}{2}$,得 $C_1=\frac{1}{2}$.

于是 $y'=\frac{1}{2y}$,即 $2ydy=dx$,两边积分得 $y^2=x+C_2$,代入 $y\Big|_{x=0}=1$,得 $C_2=1$,

故所求特解为 $y^2=x+1$ 或 $y=\sqrt{x+1}$.

29 (2003,七题,12 分) 设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数,且 $y'\neq 0,x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数.

(1) 试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)\left(\frac{dx}{dy}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程;

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0,y'(0)=\frac{3}{2}$ 的解.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【分析】 应注意:

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y'}\right)\cdot\frac{dx}{dy}=\frac{-y''}{y'^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}$$

然后再代入原方程化简即可.

【解】 (1) 由反函数的求导公式知 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$,于是有

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y'}\right)\cdot\frac{dx}{dy}=\frac{-y''}{y'^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}$$

代入原微分方程得

$$y''-y=\sin x \tag{*}$$

(2) 方程(*)所对应的齐次方程 $y''-y=0$ 的通解为

$$\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{-x}$$

设方程(*)的特解为

$$y^*=A\cos x+B\sin x$$

代入方程(*),求得 $A=0,B=-\frac{1}{2}$,故 $y^*=-\frac{1}{2}\sin x$,从而 $y''-y=\sin x$ 的通解是

$$y=\bar{y}+y^*=C_1e^x+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x$$

由 $y(0)=0,y'(0)=\frac{3}{2}$,得 $C_1=1,C_2=-1$. 故所求初值问题的解为

$$y=e^x-e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x$$

【评注】 本题的核心是第一步方程变换.

30 (2004,4 题,4 分) 欧拉方程 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+4x\dfrac{dy}{dx}+2y=0(x>0)$ 的通解为_____.

【答案】 $y=\dfrac{C_1}{x}+\dfrac{C_2}{x^2}$.

【解析】 欧拉方程的求解有固定方法,作变量代换 $x=e^t$ 化为常系数线性齐次微分方程即可.

令 $x=e^t$,则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dt}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

代入原方程,整理得

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=0$$

解此方程,得通解为 $y=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}=\dfrac{C_1}{x}+\dfrac{C_2}{x^2}$.

【评注】 本题属基础题型,也可直接套用公式,令 $x=e^t$,则欧拉方程

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2}+bx\frac{dy}{dx}+cy=f(x)$$

可化为

$$a\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+b\frac{dy}{dt}+cy=f(e^t)$$

31 (2007,13 题,4 分) 二阶常系数非齐次微分方程 $y''-4y'+3y=2e^{2x}$ 的通解为 $y=$_____.

【答案】 $C_1e^x+C_2e^{3x}-2e^{2x}$,其中 C_1,C_2 为任意常数.

【解析】 对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2-4\lambda+3=0\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=3$$

则对应齐次方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$.

设原方程的特解为 $y^*=Ae^{2x}$,代入原方程可得

$$4Ae^{2x}-8Ae^{2x}+3Ae^{2x}=2e^{2x}\Rightarrow A=-2$$

所以原方程的特解为 $y^*=-2e^{2x}$,故原方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{3x}-2e^{2x},\text{其中 } C_1,C_2 \text{ 为任意常数}$$

32 (2008,3 题,4 分) 在下列微分方程中,以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x(C_1,C_2,C_3$ 为任意常数) 为通解的是

(A) $y'''+y''-4y'-4y=0$.　　(B) $y'''+y''+4y'+4y=0$.

(C) $y'''-y''-4y'+4y=0$.　　(D) $y'''-y''+4y'-4y=0$.

【答案】 D.

【解析】 由通解表达式 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$,

可知其特征根为 $\lambda_1=1,\lambda_{2,3}=\pm 2i$. 可见对应特征方程为

$$(\lambda-1)(\lambda^2+4)=\lambda^3-\lambda^2+4\lambda-4=0$$

故对应微分方程为 $y'''-y''+4y'-4y=0$,

应选(D).

【评注】 对于三阶或三阶以上的常系数线性微分方程,同样应该掌握其特征方程与对应解之间的关系.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

第二部分　线性代数

第一章　行列式

本章导读

历年来单纯行列式的考题不多，分值也不大，相对重要的是抽象型行列式的计算，另一方面大家要注意如何通过行列式的计算来帮助回答矩阵、向量、方程组、特征值、二次型中的等等问题，即行列式的应用.

一、数字型行列式的计算

微信公众号【顶尖考研】

试题特点

对于数字型行列式的计算主要是用按行、按列展开公式，但在展开之前往往先运用行列式性质对其作恒等变形，以期某行或某列有较多的零元素，这时再展开可减轻计算量. 同时，也要注意一些特殊公式，如上(下)三角、范德蒙行列式、拉普拉斯展开式的运用.

计算行列式时，一些常用的技巧有：把第一行的 k_i 倍加至第 i 行；把每行都加到第一行；逐行相加；….

1 (1996，二(5)题，3分)4阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于

(A) $a_1a_2a_3a_4 - b_1b_2b_3b_4$.　　(B) $a_1a_2a_3a_4 + b_1b_2b_3b_4$.

(C) $(a_1a_2 - b_1b_2)(a_3a_4 - b_3b_4)$.　　(D) $(a_2a_3 - b_2b_3)(a_1a_4 - b_1b_4)$.

【答案】 D.

【解析】 这是一个数字型行列式的计算，由于本题有较多的零，可以直接展开计算. 若按第一行展开，有

$$D = a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a_1a_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} - b_1b_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1a_4 - b_1b_4)(a_2a_3 - b_2b_3)$$

所以应选(D).

若熟悉拉普拉斯展开式，可通过两列互换，两行互换，把零元素调至行列式的一角. 例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

从而知

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

练习题

1.(2001，数四，3 分) 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$，则第 4 行各元素余子式之和的值为_____.

2.(1991，数四，3 分) n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

练习题参考答案

1.【答案】 -28.

【解析】 按余子式定义，即求下列 4 个行列式值之和

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -7 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -56 + 0 + 42 - 14 = -28$$

因为行列式中有较多的零元素，所以用余子式的定义直接求和并不复杂.

如果利用余子式与代数余子式的关系及代数余子式的性质，也可如下计算

$$\sum M_{4j} = -A_{41} + A_{42} - A_{43} + A_{44}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -28$$

2.【答案】 $a^n + (-1)^{n+1} b^n$.

【解析】 按第 1 列展开，有

$$D = a \begin{vmatrix} a & b & & & \\ & a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a & b \\ & & & & a \end{vmatrix} + b(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} b & & & & \\ a & b & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & b & \\ & & & a & b \end{vmatrix}$$

$$= a^n + (-1)^{n+1} b^n$$

请思考本题按第 1 行展开与按第 1 列展开哪一种方法更简便?

二、抽象型行列式的计算

试题特点

对于抽象型行列式的计算,有可能考查行列式性质的理解、运用,有可能涉及矩阵的运算,也可能用特征值、相似等处理. 这一类题目往往综合性强,涉及知识点多. 因此,考生复习时要注意知识的衔接与转换,如果内在联系把握得好,解题时的思路就灵活. 这一类题目计算量一般不会太大.

2 (1987,五(4) 题,3 分) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,且 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=a\neq 0$,而 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,则 $|\boldsymbol{A}^*|$ 等于

(A) a. (B) $\frac{1}{a}$. (C) a^{n-1}. (D) a^n.

【答案】 C.

【解析】 这是一个抽象行列式的计算. 由伴随矩阵的基本关系式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$$

两端取行列式,并利用 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$ 及 $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$ 有

$$|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{A}|^*=|\boldsymbol{A}|^n|\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}|^n$$

因为 $|\boldsymbol{A}|=a\neq 0$,从而知 $|\boldsymbol{A}^*|=a^{n-1}$. 故应当选(C).

3 (1988,二(4) 题,3 分) 设 4×4 矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4]$,$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4]$,其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4$ 均为 4 维列向量,且已知行列式 $|\boldsymbol{A}|=4$,$|\boldsymbol{B}|=1$,则行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$ _____.

【答案】 40.

【解析】 这是抽象行列式的计算. 由于

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\gamma}_2,2\boldsymbol{\gamma}_3,2\boldsymbol{\gamma}_4]$$

从而

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|&=8|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|\\&=8(|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|+|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|)\\&=8(|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|)=40\end{aligned}$$

【评注】 当行列式的一行(列) 有公因数时,可把公因数提取到行列式记号之外,这一性质不要与 $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$ 相混淆.

当行列式的一行(列) 是两个数的和时,可把行列式对该行(列) 拆开成两个行列式之和,拆开时其他各行(列) 均保持不变,对于行列式的这一性质应当正确理解. 因此,若要拆开 n 阶行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$,则应当是 2^n 个 n 阶行列式的和,所以 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$ 是不正确的.

4 (1991,八题,6 分) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定阵,$\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位阵,证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的行列式大于 1.

【证明】 (方法一) 因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵,故存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

其中 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，$\lambda_i$ 是 A 的特征值.

因此 $Q^{\mathrm{T}}(A+E)Q=Q^{\mathrm{T}}AQ+Q^{\mathrm{T}}Q=\Lambda+E$.

两端取行列式得

$$|A+E|=|Q^{\mathrm{T}}||A+E||Q|=|Q^{\mathrm{T}}(A+E)Q|=|\Lambda+E|=\prod(\lambda_i+1)$$

从而 $|A+E|>1$.

（方法二）　设 A 的 n 个特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$. 由于 A 是正定矩阵，故特征值全大于 0.

因为 $A+E$ 的特征值是 $\lambda_1+1,\lambda_2+1,\cdots,\lambda_n+1$，它们全大于 1，根据 $|A|=\prod\lambda_i$，知

$$|A+E|=\prod(\lambda_i+1)>1$$

5　(1994，试卷 Ⅱ，6 分) 设 A 是 n 阶方阵，且 $2,4,\cdots,2n$ 是 A 的 n 个特征值，E 是 n 阶单位阵. 计算行列式 $|A-3E|$ 的值.

【解】　（方法一）　因为矩阵 A 有 n 个不同的特征值，故可相似对角化，即有可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&&&\\&4&&\\&&\ddots&\\&&&2n\end{bmatrix}=\Lambda$$

于是　$$A=P\Lambda P^{-1}$$

从而　$$A-3E=P\Lambda P^{-1}-3E=P(\Lambda-3E)P^{-1}$$

那么　$$|A-3E|=|P|\cdot|\Lambda-3E|\cdot|P^{-1}|=|\Lambda-3E|$$

$$=\begin{vmatrix}-1&&&\\&1&&\\&&3&\\&&&\ddots\\&&&2n-3\end{vmatrix}=-[(2n-3)!!]$$

（方法二）　因为 A 的特征值是 $2,4,\cdots,2n$，故知 $A-3E$ 的特征值是 $-1,1,3,\cdots,2n-3$.

由于 $|A|=\prod\lambda_i$，所以

$$|A-3E|=(-1)\cdot1\cdot3\cdots(2n-3)=-[(2n-3)!!]$$

6　(1995，九题，6 分) 设 A 为 n 阶矩阵，满足 $AA^{\mathrm{T}}=E$（E 为 n 阶单位阵，A^{T} 是 A 的转置矩阵），$|A|<0$，求 $|A+E|$.

【分析】　这是一个抽象行列式的计算，根据已知条件，应当用矩阵恒等变形来处理.

【解】　因为

$$|A+E|=|A+AA^{\mathrm{T}}|=|A(E+A^{\mathrm{T}})|$$

$$=|A|\cdot|(E+A)^{\mathrm{T}}|=|A||E+A|$$

所以　$$(1-|A|)|E+A|=0$$

又因 $|A|<0$，$1-|A|>0$，故

$$|E+A|=0$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

7 (2004,5 题,4 分) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{ABA}^*=2\boldsymbol{BA}^*+\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,$\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵,则 $|\boldsymbol{B}|=$ _____.

【答案】 $\frac{1}{9}$.

【解析】 由于 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$,易见 $|\boldsymbol{A}|=3$,用 $\boldsymbol{A}$ 右乘矩阵方程的两端,有

$$3\boldsymbol{AB}=6\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\Rightarrow 3(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\Rightarrow 3^3|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|$$

又 $|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{vmatrix}=1$,故 $|\boldsymbol{B}|=\frac{1}{9}$. 因此应填:$\frac{1}{9}$.

8 (2005,5 题,4 分) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维列向量,记矩阵

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3],\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3]$$

如果 $|\boldsymbol{A}|=1$,那么 $|\boldsymbol{B}|=$ _____.

【答案】 2.

【解析】 (方法一) 用行列式的性质,例如先 3 列 -2 列再 2 列 -1 列有

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{B}|&=|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3|\\&=|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+5\boldsymbol{\alpha}_3|\\&=|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_3|=2|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3|\\&=2|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=2|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=2|\boldsymbol{A}|=2.\end{aligned}$$

(方法二) 用分块矩阵,由于

$$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{bmatrix}$$

两边取行列式,并用行列式乘法公式,所以

$$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=2|\boldsymbol{A}|=2.$$

【评注】 计算抽象型行列式本题的这两种解法是重要的.

9 (2006,5 题,4 分) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1\\-1&2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{E}$ 为二阶单位矩阵,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$,则 $|\boldsymbol{B}|=$ _____.

【答案】 2.

【解析】 由 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 得 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}$,两边取行列式,有

$$|\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=|2\boldsymbol{E}|=4$$

因为 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=2$,所以 $|\boldsymbol{B}|=2$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【评注】　本题考查抽象行列式的计算，运用的是矩阵运算，行列式乘法公式等基础知识. 另外 $|kA|=k^n|A|$ 不要出错. 本题难度系数 0.485. 简单题考的不理想要引起警惕.

练习题

1. (1992，数三，3 分) 设 A 为 m 阶方阵，B 为 n 阶方阵，且 $|A|=a$，$|B|=b$，$C=\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$，则 $|C|=$ _____.

2. (2000，数四，3 分) 已知 4 阶矩阵 A 相似于 B，A 的特征值为 2,3,4,5，E 为 4 阶单位矩阵，则 $|B-E|=$ _____.

练习题参考答案

1.【答案】　$(-1)^{mn}ab$.

【解析】　由拉普拉斯展开式，有

$$|C|=\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A||B|=(-1)^{mn}ab.$$

故应填：$(-1)^{mn}ab$.

2.【答案】　24.

【解析】　由 $A\sim B$ 得 B 的特征值为 2,3,4,5. 进而知 $B-E$ 的特征值为 1,2,3,4. 故应填：24.

若用 $B\sim\Lambda=\begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 3 & & \\ & & 4 & \\ & & & 5 \end{bmatrix}$，推出 $B-E\sim\Lambda-E$，进而知 $|B-E|=|\Lambda-E|$，亦可求出行列式的值.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

三、行列式 $|A|=0$ 的判定

试题特点

常用的判断 $|A|$ 是否为零的问题的思路有：

① 利用秩，设法证 $r(A)<n$；

② 用齐次方程组 $Ax=0$ 是否有非零解；

③ 据 $|A|=\prod\lambda_i$，判断 0 是否是特征值；

④ 反证法；

⑤ 相反数 $|A|=-|A|$.

10 (1989，二(5) 题，3 分) 设 A 是 4 阶矩阵，且 A 的行列式 $|A|=0$，则 A 中

(A) 必有一列元素全为 0.　　(B) 必有两列元素对应成比例.

(C) 必有一列向量是其余列向量的线性组合.　　(D) 任一列向量是其余列向量的线性组合.

【答案】　C.

【解析】　本题考核的是 $|A|=0$ 的充分必要条件，而选项(A)(B)(D) 都是充分条件，并不

必要.

以 3 阶矩阵为例，若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\\1&3&4\end{bmatrix}$，条件(A)(B) 均不成立，但 $|\boldsymbol{A}|=0$.

若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&4\\1&2&5\end{bmatrix}$，则 $|\boldsymbol{A}|=0$，但第 3 列并不是其余两列的线性组合，可见(D) 不正确.

这样，用排除法可知应选(C).

复习时，对于概念性的选择题，错误的最好能举一个简单的反例，正确的最好有一个简单的证明，这样可加深理解，把握概念能更透彻.

11 (1994，九题，6 分) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵. 当 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 时，证明 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

【证明】 (方法一) 由于 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，根据 $\boldsymbol{A}^*$ 的定义有

$$A_{ij}=a_{ij}\quad(\forall\, i,j=1,2,\cdots,n)$$

其中 A_{ij} 是行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中 a_{ij} 的代数余子式.

因为 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，不妨设 $a_{ij}\neq 0$，那么

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}|&=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\\&=a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2>0\end{aligned}$$

故 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

(方法二) (反证法) 若 $|\boldsymbol{A}|=0$，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$$

设 $\boldsymbol{A}$ 的行向量为 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}=a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2=0(i=1,2,\cdots,n)$$

于是 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})=0(i=1,2,\cdots,n)$. 进而有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，这与 $\boldsymbol{A}$ 是非零矩阵相矛盾. 故 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

12 (1999，二(4) 题，3 分) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵，则

(A) 当 $m>n$ 时，必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$. (B) 当 $m>n$ 时，必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|=0$.

(C) 当 $n>m$ 时，必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$. (D) 当 $n>m$ 时，必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|=0$.

【答案】 B.

【解析】 因为 $\boldsymbol{AB}$ 是 m 阶矩阵，$|\boldsymbol{AB}|=0$ 的充分必要条件是秩 $r(\boldsymbol{AB})<m$. 由于

$$r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{B})\leqslant\min(m,n)$$

可见当 $m>n$ 时，必有 $r(\boldsymbol{AB})\leqslant n<m$. 因此选(B).

另外，由于方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解必是方程组 $\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$ 的解，而 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 是 n 个方程 m 个未知数的齐次线性方程组，因此当 $m>n$ 时，$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解，从而 $\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，故 $|\boldsymbol{AB}|=0$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

第二章 矩阵

本章导读

矩阵是线性代数的核心内容，矩阵的概念、运算及理论贯穿线性代数的始终. 几乎年年都有单纯的矩阵知识的考题而且其他考题也回避不了矩阵的知识，矩阵的重要性不言而喻.

二十多年来，矩阵的解答题考的很少，但复习时，对于填空与选择不要大意失荆州.

一、矩阵运算、初等变换

试题特点

试题简单、基本、但容易失误. 由于矩阵乘法没有交换律、没有消去律、有零因子，这和大家熟悉的算术运算有很大区别，试题往往就是考查这里的基本功，因此复习时对于矩阵的运算要正确、熟练，不要眼高手低、犯低级失误.

矩阵的初等行变换是左乘初等矩阵、矩阵的初等列变换是右乘初等矩阵，在这里要分清左乘、右乘，记住初等矩阵的逆矩阵.

1 (1988，七题，6 分) 已知 $AP=PB$，其中 $B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{bmatrix}$，求 A 及 A^5.

【解】 由 $|P|=-1\neq 0$，知 P 可逆，于是由 $AP=PB$ 得 $A=PBP^{-1}$.

而
$$\begin{aligned}A^5&=(PBP^{-1})(PBP^{-1})(PBP^{-1})(PBP^{-1})(PBP^{-1})\\&=PB(P^{-1}P)B(P^{-1}P)B(P^{-1}P)B(P^{-1}P)BP^{-1}\\&=PB^5P^{-1}\end{aligned}$$

由 P 求出
$$P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{bmatrix}$$

所以
$$A=PBP^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{bmatrix}$$

因为 B 是对角矩阵，易见 $B^5=B$. 故
$$A^5=PB^5P^{-1}=PBP^{-1}=A$$

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

2 (1994,一(5)题,3分)已知$\alpha=(1,2,3)$,$\beta=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$,设$A=\alpha^{\mathrm{T}}\beta$,其中$\alpha^{\mathrm{T}}$是$\alpha$的转置,则$A^n=$_____.

【答案】 $3^{n-1}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}$.

【解析】 矩阵乘法有结合律,注意

$$\beta\alpha^{\mathrm{T}}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=3,(\text{是一个数})$$

而
$$A=\alpha^{\mathrm{T}}\beta=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix},(\text{是3阶矩阵})$$

于是$A^n=(\alpha^{\mathrm{T}}\beta)(\alpha^{\mathrm{T}}\beta)\cdots(\alpha^{\mathrm{T}}\beta)=\alpha^{\mathrm{T}}(\beta\alpha^{\mathrm{T}})(\beta\alpha^{\mathrm{T}})\cdots(\beta\alpha^{\mathrm{T}})\beta=3^{n-1}\alpha^{\mathrm{T}}\beta$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

所以应填:$3^{n-1}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}$.

3 (1995,二(5)题,3分)设$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{11}&a_{32}+a_{12}&a_{33}+a_{13}\end{bmatrix}$,

$P_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,$P_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$,则必有

(A)$AP_1P_2=B$. (B)$AP_2P_1=B$. (C)$P_1P_2A=B$. (D)$P_2P_1A=B$.

【答案】 C.

【解析】 A经过两次初等行变换得到B,根据初等矩阵的性质,左乘初等矩阵为行变换,右乘初等矩阵为列变换,故排除(A)(B).

P_1P_2A表示把A的第一行加至第二行后再一,二两行互换.这正是矩阵B,所以应选(C).

而P_2P_1A表示把A的一、二两行互换后再把第一行加至第二行,那么这时的矩阵是

$$\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{21}&a_{32}+a_{22}&a_{33}+a_{23}\end{bmatrix}$$

并非已知矩阵 B.

4 (1997,一(4)题,3分) 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & t & 3\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}$,$B$ 为三阶非零矩阵,且 $AB=O$,则 $t=$_____.

【答案】 -3.

【解析】 由 $AB=O$,对 B 按列分块有

$$AB=A(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(A\boldsymbol{\beta}_1,A\boldsymbol{\beta}_2,A\boldsymbol{\beta}_3)=(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0})$$

即 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是齐次方程组 $Ax=\mathbf{0}$ 的解.

又因 $B\neq O$,故 $Ax=\mathbf{0}$ 有非零解,那么

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & t & 3\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7 & 0 & 0\\ 4 & t & 3\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}=7(t+3)=0$$

所以应填:-3.

若熟悉公式:$AB=O$,则 $r(A)+r(B)\leqslant n$. 可知 $r(A)<3$. 亦可求出 $t=-3$.

5 (1997,八题,5分) 设 A 是 n 阶可逆方阵,将 A 的第 i 行和第 j 行对换后得到的矩阵记为 B.

(Ⅰ) 证明 B 可逆;

(Ⅱ) 求 AB^{-1}.

【解】 由于 $B=E_{ij}A$,其中 E_{ij} 是初等矩阵

$$E_{ij}=\begin{bmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ i\\ \\ j\\ \\ \\ \end{matrix}$$

(Ⅰ) 因为 A 可逆,$|A|\neq 0$,故

$$|B|=|E_{ij}A|=|E_{ij}|\cdot|A|=-|A|\neq 0$$

所以 B 可逆.

(Ⅱ) 由 $B=E_{ij}A$,知

$$AB^{-1}=A(E_{ij}A)^{-1}=AA^{-1}E_{ij}^{-1}=E_{ij}^{-1}=E_{ij}$$

6 (2004,11题,4分) 设 A 是3阶方阵,将 A 的第1列与第2列交换得 B,再把 B 的第2列加到第3列得 C,则满足 $AQ=C$ 的可逆矩阵 Q 为

(A) $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

【答案】 D.

【解析】 按题意,用初等矩阵描述,有

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{C}$$

故 $$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{C}$$

从而 $$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

所以应选(D).

7 (2005,12题,4分) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n\geqslant 2)$ 阶可逆矩阵,交换 $\boldsymbol{A}$ 的第1行与第2行得矩阵 $\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{A}^*$,$\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵,则

(A) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第1列与第2列得 $\boldsymbol{B}^*$. (B) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第1行与第2行得 $\boldsymbol{B}^*$.

(C) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第1列与第2列得 $-\boldsymbol{B}^*$. (D) 交换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第1行与第2行得 $-\boldsymbol{B}^*$.

【答案】 C.

【解析】 为书写简捷,不妨设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶矩阵,因为 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换得到 $\boldsymbol{B}$,所以用初等矩阵左乘 $\boldsymbol{A}$ 得到 $\boldsymbol{B}$,按已知有

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

从而 $$\frac{\boldsymbol{B}^*}{|\boldsymbol{B}|}=\frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

又因 $|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{B}|$,故 $\boldsymbol{A}^*\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=-\boldsymbol{B}^*$,所以应选(C).

【评注】 本题考查初等矩阵的两个定理:一个是左乘右乘问题,一个是初等矩阵的逆矩阵公式. 注意求伴随矩阵有两种思路:一是用定义法,一是用可逆矩阵来转换($\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$).

8 (2006,12题,4分) 设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶矩阵,将 $\boldsymbol{A}$ 的第2行加到第1行得 $\boldsymbol{B}$,再将 $\boldsymbol{B}$ 的第1列的 -1 倍加到第2列得 $\boldsymbol{C}$,记 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,则

(A)$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$. (B)$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}$.

(C)$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$. (D)$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$.

【答案】 B.

【解析】 按已知条件,用初等矩阵描述有

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

于是 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{PAP}^{-1}$，所以应选(B).

【评注】 本题考查初等矩阵的左乘右乘问题及初等矩阵逆矩阵的公式.

练习题

1.(2001，数三，3分)设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_{14}&a_{13}&a_{12}&a_{11}\\a_{24}&a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{34}&a_{33}&a_{32}&a_{31}\\a_{44}&a_{43}&a_{42}&a_{41}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

其中 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 等于

(A)$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$.　(B)$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_2$.　(C)$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}$.　(D)$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1$.

2.(2004，数三，4分)设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，则必有

(A) 当 $|\boldsymbol{A}|=a(a\neq 0)$ 时，$|\boldsymbol{B}|=a$.　(B) 当 $|\boldsymbol{A}|=a(a\neq 0)$ 时，$|\boldsymbol{B}|=-a$.

(C) 当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，$|\boldsymbol{B}|=0$.　(D) 当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，$|\boldsymbol{B}|=0$.

练习题参考答案

1.【答案】 C.

【解析】 把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的1，4两列对换，2，3两列对换即得到矩阵 $\boldsymbol{B}$. 根据初等矩阵的性质，有

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AP}_1\boldsymbol{P}_2 \text{ 或 } \boldsymbol{B}=\boldsymbol{AP}_2\boldsymbol{P}_1$$

那么 $\boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{AP}_2\boldsymbol{P}_1)^{-1}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}$. 所以应选(C).

【评注】 本题考查初等矩阵的两个定理，一个是行变换、列变换与左乘、右乘初等矩阵间的关系，一个是初等矩阵逆矩阵的公式. 复习初等矩阵时应搞清这两个基本定理.

2.【答案】 D.

【解析】 所谓矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，即 $\boldsymbol{A}$ 经初等变换得到 $\boldsymbol{B}$. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的秩.

经过初等变换其行列式的值不一定相等，例如，假若把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行乘以5可得到 $\boldsymbol{B}$，那么 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，而 $|\boldsymbol{A}|=a$ 时，$|\boldsymbol{B}|=5a$. 可知(A)(B)均不正确.

若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，说明 $r(\boldsymbol{A})=n$，而 $|\boldsymbol{B}|=0$，说明 $r(\boldsymbol{B})<n$，因此(C)不正确.

当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，$r(\boldsymbol{A})<n$，故 $r(\boldsymbol{B})<n$，因而 $|\boldsymbol{B}|=0$，即(D)正确，应选(D).

二、伴随矩阵、可逆矩阵

试题特点

伴随与可逆是矩阵中最重要的知识点，关键公式：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}=\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$$

进而有 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}$ 或 $\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$. 涉及伴随与可逆的试题非常多，要想到并灵活运用 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}=\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 这一核心公式.

☆ 定义法，单位矩阵恒等变形，可逆的充要条件都是重要的考点.

9 (1989，一(5)题，3分) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&0&0\\1&4&0\\0&0&3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则逆矩阵 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=$ _____.

【答案】 $\begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: diky66)

【解析】 由于

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}3&0&0\\1&4&0\\0&0&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

为求其逆可有多种方法，可用伴随，可用初等行变换，也可用分块求逆. 如果对 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\vdots\boldsymbol{E})$ 作行变换有

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\1&2&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&2&0&-1&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]$$

从而知

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

对于2阶矩阵的伴随矩阵有规律：主对换副变号，即

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}^{*}=\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$$

那么再利用 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix}$，本题亦可很容易求出 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}$.

10 (1991,一(5)题,3分)设4阶方阵 $A=\begin{bmatrix}5&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&1&1\end{bmatrix}$,则 A 的逆矩阵 $A^{-1}=$ _____.

【答案】 $\begin{bmatrix}1&-2&0&0\\-2&5&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$.

【解析】 本题考查的是求逆,若知道分块求逆法,则可简单解答.

注意 $\begin{bmatrix}A&O\\O&B\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A^{-1}&O\\O&B^{-1}\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}O&A\\B&O\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{bmatrix}$,

再根据2阶矩阵的伴随求逆法,易见

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&0&0\\-2&5&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djkv66)

11 (1991,二(5)题,3分)设 n 阶方阵 A,B,C 满足关系式 $ABC=E$,其中 E 是 n 阶单位阵,则必有

(A) $ACB=E$. (B) $CBA=E$. (C) $BAC=E$. (D) $BCA=E$.

【答案】 D.

【解析】 矩阵的乘法没有交换律,只有一些特殊情况可交换. 由于 ABC 均为 n 阶矩阵,且 $ABC=E$,据行列式乘法公式

$$|A||B||C|=1$$

知 A,B,C 均可逆. 那么对 $ABC=E$ 先左乘 A^{-1} 再右乘 A,有

$$ABC=E\to BC=A^{-1}\to BCA=E$$

可知应选(D).

类似地,由 $BCA=E\to CAB=E$.

不难想出,若 n 阶矩阵 $ABCD=E$,则有

$$ABCD=BCDA=CDAB=DABC=E$$

12 (1996,八题,6分)设 $A=E-\xi\xi^{\mathrm{T}}$,其中 E 为 n 阶单位矩阵,ξ 是 n 维非零列向量,ξ^{T} 是 ξ 的转置. 证明:

(1) $A^2=A$ 的充要条件是 $\xi^{\mathrm{T}}\xi=1$.

(2) 当 $\xi^{\mathrm{T}}\xi=1$ 时,A 是不可逆矩阵.

【证明】 (1) $A^2=(E-\xi\xi^{\mathrm{T}})(E-\xi\xi^{\mathrm{T}})=E-2\xi\xi^{\mathrm{T}}+\xi\xi^{\mathrm{T}}\xi\xi^{\mathrm{T}}$

$$=E-\xi\xi^{\mathrm{T}}+\xi(\xi^{\mathrm{T}}\xi)\xi^{\mathrm{T}}-\xi\xi^{\mathrm{T}}=A+(\xi^{\mathrm{T}}\xi)\xi\xi^{\mathrm{T}}-\xi\xi^{\mathrm{T}}$$

那么 $A^2=A\Leftrightarrow(\xi^{\mathrm{T}}\xi-1)\xi\xi^{\mathrm{T}}=O$.

因为 ξ 是非零列向量，$\xi\xi^{\mathrm{T}}\neq O$，故 $A^2=A\Leftrightarrow\xi^{\mathrm{T}}\xi-1=0$ 即 $\xi^{\mathrm{T}}\xi=1$.

(2) 反证法. 当 $\xi^{\mathrm{T}}\xi=1$ 时，由(1)知 $A^2=A$，若 A 可逆，则

$$A=A^{-1}A^2=A^{-1}A=E$$

与已知 $A=E-\xi\xi^{\mathrm{T}}\neq E$ 矛盾.

13 (2001，一(4)题，3分) 设矩阵 A 满足 $A^2+A-4E=O$，其中 E 为单位矩阵，则 $(A-E)^{-1}=$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}(A+2E)$.

【解析】 矩阵 A 的元素没有给出，因此用伴随矩阵、初等行变换求逆的路均堵塞. 应当考虑用定义法.

因为 $$(A-E)(A+2E)-2E=A^2+A-4E=O$$

故 $$(A-E)(A+2E)=2E$$

得 $$(A-E)\cdot\frac{A+2E}{2}=E$$

按定义知 $$(A-E)^{-1}=\frac{1}{2}(A+2E)$$

14 (2008，5题，4分) 设 A 为 n 阶非零矩阵，E 为 n 阶单位矩阵. 若 $A^3=O$，则

(A) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 不可逆. (B) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 可逆.

(C) $E-A$ 可逆，$E+A$ 可逆. (D) $E-A$ 可逆，$E+A$ 不可逆.

【答案】 C.

【解析】 判断矩阵 A 可逆通常用定义，或者用充要条件行列式 $|A|\neq0$，(当然 $|A|\neq0$ 又有很多等价的说法). 因为

$$(E-A)(E+A+A^2)=E-A^3=E,(E+A)(E-A+A^2)=E+A^3=E$$

所以，由定义知 $E-A$，$E+A$ 均可逆. 故选(C).

【评注】 本题用特征值也是简捷的，由 $A^3=O\Rightarrow A$ 的特征值 $\lambda=0\Rightarrow E-A$(或 $E+A$) 特征值均不为 $0\Rightarrow|E-A|\neq0$(或 $|E+A|\neq0$)$\Rightarrow E-A$(或 $E+A$) 可逆.

练习题

1. (1993，数四，8分) 已知3阶矩阵 A 的逆矩阵为 $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{bmatrix}$. 试求伴随矩阵 A^* 的逆矩阵.

2. (2002，数四，3分) 设 A,B 为 n 阶矩阵，A^*,B^* 分别为 A,B 对应的伴随矩阵，分块矩阵 $C=\begin{bmatrix}A&O\\O&B\end{bmatrix}$，则 C 的伴随矩阵 $C^*=$

(A) $\begin{bmatrix}|A|A^*&O\\O&|B|B^*\end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix}|B|B^*&O\\O&|A|A^*\end{bmatrix}$.

微信公众号【贝尔考研】(ID: diky66)

(C)$\begin{bmatrix} |A|B^* & O \\ O & |B|A^* \end{bmatrix}$. (D)$\begin{bmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{bmatrix}$.

3.(1992,数四,3分)设$A,B,A+B,A^{-1}+B^{-1}$均为n阶可逆矩阵,则$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$等于

(A)$A^{-1}+B^{-1}$. (B)$A+B$. (C)$A(A+B)^{-1}B$. (D)$(A+B)^{-1}$.

4.(2002,数四,3分)设矩阵$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$,$B=A^2-3A+2E$,则$B^{-1}=$_____.

练习题参考答案

1.【解】 由$AA^*=A^*A=|A|E$,有

$$\frac{A}{|A|}A^*=A^*\frac{A}{|A|}=E$$

按可逆定义,知

$$(A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}=|A^{-1}|A$$

由于$(A^{-1})^{-1}=A$,求A^{-1}的逆矩阵,有

$$(A^{-1}\vdots E)=\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

于是 $A=\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

又因$|A^{-1}|=2$,故知

$$(A^*)^{-1}=|A^{-1}|A=\begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.【答案】 D.

【解析】 对任何n阶矩阵A,B关系式要成立,那么A,B可逆时仍应成立,故可看A,B可逆时$C^*=?$

由于 $C^*=|C|C^{-1}=\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix}\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1}=|A||B|\begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} |A||B|A^{-1} & O \\ O & |A||B|B^{-1} \end{bmatrix}$$

故应选(D).

3.【答案】 C.

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

【解析】 因为$A,B,A+B$均可逆,则有

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=(EA^{-1}+B^{-1}E)^{-1}$$

$$=(B^{-1}BA^{-1}+B^{-1}AA^{-1})^{-1}=[B^{-1}(B+A)A^{-1}]^{-1}$$

$$=(A^{-1})^{-1}(B+A)^{-1}(B^{-1})^{-1}=A(A+B)^{-1}B$$

故应选(C).

注意,一般情况下$(A+B)^{-1}\neq A^{-1}+B^{-1}$,不要与转置的性质相混淆.

4.【答案】 $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

【解析】 因为 $B=(A-2E)(A-E)$,故

$$B^{-1}=(A-E)^{-1}(A-2E)^{-1}$$

因此,应求出$(A-E)^{-1}$,$(A-2E)^{-1}$.

$$(A-E)^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A-2E)^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

所以

$$B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

【评注】 A 是 2 阶矩阵,有 $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$,而 2 阶矩阵的伴随矩阵有“主对调,副变号”之规律.

这是许多教材中都出现过的习题,但仍有相当多的考生(约 36%)答错,反映出考生基本运算不熟练,计算能力差,在复习的过程中,要动脑要动手,千万不要眼高手低.

三、矩阵的秩

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

试题特点

矩阵的秩是重点也是难点,要正确理解矩阵秩的概念.

$r(A)=r \Leftrightarrow A$ 中有 r 阶子式不为 0,每个 $r+1$ 阶子式(若还有)全为 0.

在这里要分清“有一个”与“每一个”,当 $r(A)=r$ 时,A 中能否有 $r-1$ 阶子式为 0?能否有 $r+1$ 阶子式不为 0?

你用行列式来如何描述 $r(A)\geqslant r$?如何描述 $r(A)<r$?

要搞清矩阵的秩与向量组秩之间的关系,这种转换是重要的.在线性相关的判断与证明中往往是由矩阵的秩推导向量组的秩,而解方程组时往往由相关、无关推导矩阵的秩.

经初等变换矩阵的秩不变,这是求秩的最重要的方法,有时可以把定义法与初等变换法相结合来分析推导矩阵的秩.

要会用①$|A|$ 是否为 0,② 相关、无关,③ 方程组的解,会用其中的两个信息夹逼求出矩阵 A 的秩.

15 (1992,一(5)题,3 分)设 $A=\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}$,其中 $a_i\neq 0,b_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$,则矩阵 A 的秩 $r(A)=$ _____.

【答案】 1.

【解析】 利用矩阵秩的概念，考察矩阵 A 的 2 阶子式. 因为矩阵 A 中任何两行都成比例(第 i 行与第 j 行的比为 $\frac{a_i}{a_j}$)，所以 A 中二阶子式全为 0，又因 $a_i \neq 0, b_i \neq 0$，知 $a_1 b_1 \neq 0$，A 中有一阶子式非零. 故知 $r(A) = 1$.

或者
$$A = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} (b_1, b_2, \cdots, b_n) = \alpha\beta^{\mathrm{T}}$$

于是 $r(A) = r(\alpha\beta^{\mathrm{T}}) \leqslant r(\alpha) = 1$，又 $A \neq O$ 有 $r(A) \geqslant 1$.

所以 $r(A) = 1$.

16 (1993，二(5) 题，3 分) 已知 $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$，$P$ 为三阶非零矩阵，且满足 $PQ = O$，则

(A) $t = 6$ 时 P 的秩必为 1.　　(B) $t = 6$ 时 P 的秩必为 2.

(C) $t \neq 6$ 时 P 的秩必为 1.　　(D) $t \neq 6$ 时 P 的秩必为 2.

【答案】 C.

【解析】 若 A 是 $m \times n$ 矩阵，B 是 $n \times s$ 矩阵，$AB = O$，则 $r(A) + r(B) \leqslant n$.

当 $t = 6$ 时，$r(Q) = 1$. 于是从 $r(P) + r(Q) \leqslant 3$ 得 $r(P) \leqslant 2$.

因此(A)(B) 中对秩 $r(P)$ 的判定是都有可能成立，但不是必成立. 所以(A)(B) 均不正确.

当 $t \neq 6$ 时，$r(Q) = 2$. 于是从 $r(P) + r(Q) \leqslant 3$ 得 $r(P) \leqslant 1$.

又因 $P \neq O$，有 $r(P) \geqslant 1$. 从而 $r(P) = 1$ 必成立. 所以应当选(C).

17 (1996，一(5) 题，3 分) 设 A 是 4×3 矩阵，且 A 的秩 $r(A) = 2$，而 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，则 $r(AB) =$ _____.

【答案】 2.

【解析】 因为 B 可逆，故 $r(AB) = r(A) = 2$.

注意，若 A 可逆，则 $r(AB) = r(B)$，$r(BA) = r(B)$.

18 (1998，二(4) 题，3 分) 设矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ 是满秩的，则直线 $\frac{x - a_3}{a_1 - a_2} = \frac{y - b_3}{b_1 - b_2} = \frac{z - c_3}{c_1 - c_2}$ 与直线 $\frac{x - a_1}{a_2 - a_3} = \frac{y - b_1}{b_2 - b_3} = \frac{z - c_1}{c_2 - c_3}$

(A) 相交于一点.　　(B) 重合.　　(C) 平行但不重合.　　(D) 异面.

【答案】 A.

【解析】 经初等变换矩阵的秩不变，由

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ a_3-a_2 & b_3-b_2 & c_3-c_2 \end{bmatrix}$$

可知后者的秩仍为3. 所以这两直线的方向向量 $v_1=(a_1-a_2,b_1-b_2,c_1-c_2)$ 与 $v_2=(a_2-a_3,b_2-b_3,c_2-c_3)$ 线性无关,因此可排除(B)(C).

在这两条直线上各取一点(a_3,b_3,c_3)与(a_1,b_1,c_1),又可构造向量 $v=(a_3-a_1,b_3-b_1,c_3-c_1)$,如果 v,v_1,v_2 共面,则两条直线相交,若 v,v_1,v_2 不共面,则两直线异面. 为此可用混合积

$$(vv_1v_2)=\begin{vmatrix} a_3-a_1 & b_3-b_1 & c_3-c_1 \\ a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2 \\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3 \end{vmatrix}=0$$

或观察出 $v+v_1+v_2=\mathbf{0}$,而知应选(A).

19 (2007,15题,4分) 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,则 A^3 的秩为_____.

【答案】 1.

【解析】 因为 $A^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,$A^3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,所以 $r(A^3)=1$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【评注】 这是基础题,但考的并不理想,难度系数是0.678.

注意,若 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$,则

$$A^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n\times n},\cdots,A^{n-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$A^n=O$$

20 (2008,20题,10分) 设 α,β 为3维列向量,矩阵 $A=\alpha\alpha^{\mathrm{T}}+\beta\beta^{\mathrm{T}}$,其中 $\alpha^{\mathrm{T}},\beta^{\mathrm{T}}$ 分别是 α,β 的转置. 证明:

(Ⅰ) 秩 $r(A)\leqslant 2$;

（Ⅱ）若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则秩 $r(\boldsymbol{A})<2$.

【证明】（Ⅰ）因为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 3 维列向量，那么 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 都是 3 阶矩阵，且秩 $r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\leqslant 1, r(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant 1$. 那么

$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})+r(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant 2$$

（Ⅱ）由于 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，不妨设 $\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\beta}$，于是

$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=r((1+k^2)\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant r(\boldsymbol{\beta})\leqslant 1<2$$

【评注】 本题考查矩阵秩的性质公式.

（Ⅰ）中有两个基本知识点：①$r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\leqslant 1$ 和 ②$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$.

（Ⅱ）中有两个基本知识点：①$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关的几何意义和 ②$r(k\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}), k\neq 0$.

注意，如果分块矩阵比较熟悉，本题的（Ⅰ）也可如下处理：

因为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{0})\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}.$$

那么

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{0}|\cdot\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0}\end{vmatrix}$$

从而 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

练习题

1.（1994，数四，3 分）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的秩

(A) 必有一个等于 0.　　(B) 都小于 n.

(C) 一个小于 n，一个等于 n.　　(D) 都等于 n.

2.（1995，数四，3 分）设矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的秩为 $r(\boldsymbol{A})=m<n$，$\boldsymbol{E}_m$ 为 m 阶单位矩阵，下述结论中正确的是

(A) $\boldsymbol{A}$ 的任意 m 个列向量必线性无关.

(B) $\boldsymbol{A}$ 的任意一个 m 阶子式不等于零.

(C) $\boldsymbol{A}$ 通过初等行变换，必可以化为 $(\boldsymbol{E}_m,\boldsymbol{O})$ 形式.

(D) 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 一定有无穷多组解.

练习题参考答案

1.【答案】 B.

【解析】 本题主要考查矩阵秩的概念和性质，还涉及到矩阵运算、可逆，齐次方程组解的概念与性质等知识点.

在中学代数里，若 $ab=0$，我们知道其中至少有一个数为 0，而作为矩阵 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 就不能说其中至少有一个矩阵是零矩阵，这种差异要搞清楚. 例如

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\boldsymbol{O}$$

即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}\not\Rightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，那么再按矩阵秩的定义就知(A) 错误.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

又 $r(A)=n \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ 可逆. 因此对于 $AB=O$,若其中有一个矩阵的秩为 n,例如设 $r(A)=n$,则有

$$B=A^{-1}AB=A^{-1}O=O$$

与已知 $B \neq O$ 相矛盾. 从而可排除(C)(D).

对 $AB=O$,把矩阵 B 与零矩阵均按列分块

$$AB=A(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_n)=(0,0,\cdots,0)$$

于是 $A\beta_i=0(i=1,2,\cdots,n)$,即 β_i 是齐次方程组 $Ax=0$ 的解.

那么,$AB=O$ 意味着 B 的列向量全是齐次方程组 $Ax=0$ 的解.

因此,$AB=O, B \neq O$ 表明 $Ax=0$ 有非零解,从而 $r(A)<n$.

可以继续用非零解的观点来处理秩 $r(B)$,方法如下:

$$B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=(AB)^{\mathrm{T}}=O^{\mathrm{T}}=O$$

从 A^{T} 非零,知 $r(B^{\mathrm{T}})<n$,故 $r(B)<n$.

当然,本题最简单的方法是用命题:

若 A 是 $m\times n$ 矩阵,B 是 $n\times s$ 矩阵,$AB=O$,则 $r(A)+r(B)\leqslant n$.

再以 A,B 均非零,按秩的定义有 $r(A)\geqslant 1, r(B)\geqslant 1$,也就不难看出应选(B).

本题涉及到线性代数中许多基本概念,思路亦多样化,知识点的切换较多,还考查了用基本概念进行推理判断的能力.

2.【答案】 D.

【解析】 因为 A 是 $m\times n$ 矩阵,秩 $r(A)=m$,故增广矩阵的秩必为 m. 那么 $r(A)=r(\overline{A})=m<n$,所以方程组 $Ax=b$ 必有无穷多组解,故应选(D).

微信公众号【数学考研】
(ID: djky66)

四、矩阵方程

试题特点

解矩阵方程时,首先要根据矩阵的运算法则、性质把方程化简(特别要注意矩阵的乘法没有交换律),化简之后有三种形式:

$$AX=B; XA=B; AXB=C$$

对于前两个方程,若判断出 A 可逆,则有

$$X=A^{-1}B; X=BA^{-1}$$

对于第三个方程,若 A,B 均可逆,则有 $X=A^{-1}CB^{-1}$.

那么,再通过求逆等运算就可求出 X.

近十年未考矩阵方程,以往的考题请练习.

21 (1987,三(2)题,4分) 设矩阵 A 和 B 满足关系式 $AB=A+2B$,其中 $A=\begin{bmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{bmatrix}$,求矩阵 B.

【解】 由已知 $AB=A+2B$ 得 $AB-2B=A$,于是

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$$

由

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&1&2\end{bmatrix}$$

而且

$$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&1&2\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

知 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆，故

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\2&-2&-1\\-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{bmatrix}$$

【评注】　因为 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}$，也可以不求 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}$，而用行变换直接求出 $\boldsymbol{B}$，方法如下：

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\vdots\boldsymbol{A})=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&3&0&1\\1&-1&0&1&1&0\\0&1&2&0&1&4\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&3&0&1\\0&-1&-1&-2&1&-1\\0&1&2&0&1&4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&3&0&1\\0&1&1&2&-1&1\\0&0&1&-2&2&3\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&5&-2&-2\\0&1&0&4&-3&-2\\0&0&1&-2&2&3\end{array}\right]=(\boldsymbol{E}\vdots\boldsymbol{B})$$

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

22 (1990，七题，6分) 设4阶矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}$，且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足关系式 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为四阶单位矩阵，$\boldsymbol{C}^{-1}$ 表示 $\boldsymbol{C}$ 的逆矩阵，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{C}$ 的转置矩阵. 将上述关系式化简并求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

【解】　由 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，知

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})]^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}$$

那么由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$ 知 $\boldsymbol{A}=[(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}]^{-1}=[(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{-1}]^{\mathrm{T}}$.

由

$$(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

故 $$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{bmatrix}$$

23 (1992,试卷Ⅱ,5分) 设 A,B 为3阶矩阵,满足 $AB+E=A^2+B$,E 为3阶单位阵.

又知 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$,求矩阵 B.

【解】 化简矩阵方程为

$$(A-E)B=A^2-E=(A-E)(A+E)$$

由于 $A-E=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{bmatrix}$ 可逆,对矩阵方程两端左乘 $(A-E)^{-1}$ 得

$$B=A+E=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&0\\-1&0&2\end{bmatrix}$$

24 (1995,一(5)题,3分) 设3阶方阵 A,B 满足关系式 $A^{-1}BA=6A+BA$,其中

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{7}\end{bmatrix}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

则 $B=$ _____.

【答案】 $\begin{bmatrix}3&&\\&2&\\&&1\end{bmatrix}$.

【解析】 矩阵方程右乘 A^{-1},化简为

$$A^{-1}B=6E+B \quad 得 \quad (A^{-1}-E)B=6E$$

由于 A 是对角矩阵,易知

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&&\\&\frac{1}{4}&\\&&\frac{1}{7}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}3&&\\&4&\\&&7\end{bmatrix}$$

于是 $$B=6\begin{bmatrix}2&&\\&3&\\&&6\end{bmatrix}^{-1}=6\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&&\\&\frac{1}{3}&\\&&\frac{1}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&&\\&2&\\&&1\end{bmatrix}$$

25 (2000,十题,6 分) 设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{bmatrix}$,且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$,其中 E 为 4 阶单位矩阵,求矩阵 B.

【解】 由 $|A^*|=|A|^{n-1}$,有 $|A|^3=8$,得 $|A|=2$. A 是可逆矩阵.

用 A 右乘矩阵方程的两端,有

$$(A-E)B=3A \tag{①}$$

因为 $A^*A=AA^*=|A|E$,用 A^* 左乘上式的两端,并把 $|A|=2$ 代入,有

$$(2E-A^*)B=6E \tag{②}$$

于是 $B=6(2E-A^*)^{-1}$.

因为 $(2E-A^*)^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&3&0&-6\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{6}\end{bmatrix}$.

因此 $B=\begin{bmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{bmatrix}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

第三章　向量

本章导读

向量既是重点又是难点，由于向量的抽象性及逻辑推理上有较高的要求，同学们在复习时要迎难而上.

考研的重点首先是对线性相关、无关概念的理解与判断，要清楚选择、填空、证明各类题型的解题思路和技巧；其次，要把握线性表出问题的处理；第三，要理解向量组的极大线性无关组和向量组秩的概念，会推导和计算；第四，向量空间的相应概念.

一、向量的线性表出

试题特点

向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出 $\Leftrightarrow$ 方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{\beta}$ 有解

$$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta})$$

☆ 如果已知向量的坐标，那就通过判断方程组是否有解来回答向量能否线性表出的问题，不仅要会一个向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出，还要会分析、讨论一个向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出的问题.

☆ 如果向量 $\boldsymbol{\beta}$ 的坐标是未知的，那就要能用秩、用概念以及相关的定理来推理、分析.

1 (1991，七题，8分) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,3),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3,5),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a+2,1),\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,4,a+8)$ 及 $\boldsymbol{\beta}=(1,1,b+3,5)$.

(1) a,b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合？

(2) a,b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 有 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的唯一线性表示式？写出该表示式.

【解】 设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\beta}$，按分量写出，则有

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_2-x_3+2x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+(a+2)x_3+4x_4=b+3 \\ 3x_1+5x_2+x_3+(a+8)x_4=5 \end{cases}$$

对增广矩阵高斯消元，有

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a & 2 & b+1 \\ 0 & 2 & -2 & a+5 & 2 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \end{bmatrix}$$

所以当 $a=-1,b\neq 0$ 时，方程组无解，$\boldsymbol{\beta}$ 不能表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合；

当 $a\neq -1$ 时，方程组有唯一解 $\left(-\frac{2b}{a+1},\frac{a+b+1}{a+1},\frac{b}{a+1},0\right)^{\mathrm{T}}$，故 $\boldsymbol{\beta}$ 有唯一表示式，且

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{2b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{a+b+1}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_3+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_4$$

2 (1992，八题，7 分) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，问：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出？证明你的结论；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出？证明你的结论.

【解】 (1) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

因为已知 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 又因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，故 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

(反证法) 若 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，设

$$\boldsymbol{\alpha}_4=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$$

由(1) 知，可设 $\boldsymbol{\alpha}_1=l_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_3\boldsymbol{\alpha}_3$，那么代入上式整理得

$$\boldsymbol{\alpha}_4=(k_1l_2+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_1l_3+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，从而 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，这与已知矛盾.

因此，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

【评注】 对于 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，若知 $k_1\neq 0$，那么移项处理亦知 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，故(1) 的证明也可以为：

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，故存在不全为零的数 k_1,k_2,k_3 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$$

成立，其中必有 $k_1\neq 0$.

因为若 $k_1=0$，则 k_2,k_3 不全为零，使 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$. 于是 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，进而 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，这与已知矛盾. 故 $k_1\neq 0$.

由此有 $\boldsymbol{\alpha}_1=-\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{k_3}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_3$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

注意，“若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出，且表示法唯一”. 这一定理在考题中多次出现，应当理解并会运用这一定理.

练习题

1. (2000，数三、数四，8 分) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a,2,10)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,1,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(1,b,c,)^{\mathrm{T}}$. 试问：当 a,b,c 满足什么条件时，

(1) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，且表示唯一？

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出？

(3) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，但表示不唯一？并求出一般表达式.

练习题参考答案

1. 【分析】 $\boldsymbol{\beta}$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出等价于方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$ 是否有解. 通常用增广矩阵作初等行变换来讨论. 本题是三个方程三个未知数，因而也可从系数行列式讨论.

【解】 设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$，系数行列式

$$|A|=|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=\begin{vmatrix}a&-2&-1\\2&1&1\\10&5&4\end{vmatrix}=-a-4$$

(1) 当 $a\neq-4$ 时，$|A|\neq0$，方程组有唯一解，即 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，且表示唯一.

(2) 当 $a=-4$ 时，对增广矩阵作初等行变换，有

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc:c}-4&-2&-1&1\\2&1&1&b\\10&5&4&c\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}2&1&1&b\\0&0&1&2b+1\\0&0&0&3b-c-1\end{array}\right]$$

故当 $3b-c\neq1$ 时，$r(A)=2$，$r(\overline{A})=3$，方程组无解，即 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出.

(3) 若 $a=-4$，且 $3b-c=1$，有 $r(A)=r(\overline{A})=2<3$，方程组有无穷多组解，即 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，且表示法不唯一.

此时，增广矩阵化简为

$$\overline{A}\to\left[\begin{array}{ccc:c}2&1&0&-b-1\\0&0&1&2b+1\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

取 x_1 为自由变量. 解出

$$x_1=t,x_2=-2t-b-1,x_3=2b+1$$

即 $\beta=t\alpha_1-(2t+b+1)\alpha_2+(2b+1)\alpha_3$，$t$ 为任意常数.

二、向量组的线性相关和线性无关

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

试题特点

线性相关是难点之一，也是历年考生在考试时丢分最多的一个考点.

如存在不全为 0 的数组 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$ 成立，则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关.

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\text{ 线性相关}\Leftrightarrow\text{齐次方程组}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{bmatrix}=0\text{ 有非零解}$$

$$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<s$$

若使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$ 成立，必有 $k_1=0,k_2=0,\cdots,k_s=0$，则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\text{ 线性无关}\Leftrightarrow\text{齐次方程组}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{bmatrix}=0\text{ 只有零解}$$

$$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=s.$$

☆ 证无关，若用定义法就是设法证 $k_1=0,\cdots,k_s=0$；若用秩，就是设法证 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=s$(这里就是要通过用矩阵秩的定理、公式转换推导出向量组秩的信息).

3 (1988,三(5)题,3分)n维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(3\leqslant s\leqslant n)$线性无关的充分必要条件是

(A) 存在一组不全为0的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$,使$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\boldsymbol{0}$.

(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中任意两个向量都线性无关.

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中存在一个向量,它不能用其余向量线性表出.

(D)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中任意一个向量都不能用其余向量线性表出.

【答案】 D.

【解析】 任意一个向量组只要其中有非零向量,就一定有不全为0的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$,使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\boldsymbol{0}$$

而线性无关是要求对于任一组数$k_1,k_2,\cdots,k_s$不全为0,必有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\boldsymbol{0}$$

因此(A)不正确.(要分清是任一组与有一组.)

任意$s-1$个向量线性无关并不能保证s个向量仍线性无关.例如:

$$(1,0,0)^{\mathrm{T}},(0,1,0)^{\mathrm{T}},(1,1,0)^{\mathrm{T}}$$

可见(B)不正确.

当某一个向量不能用其余向量线性表出时,并不能保证这个向量组线性无关,因为还可能有另一个向量可以由其余向量线性表出,而使向量组线性相关.例如:

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$$

虽$\boldsymbol{\alpha}_3$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表出,但$\boldsymbol{\alpha}_2$可以由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出,仍有$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关.可见(C)不正确.故应选(D).

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

4 (1993,八题,6分)设$\boldsymbol{A}$是$n\times m$矩阵,$\boldsymbol{B}$是$m\times n$矩阵,其中$n<m$,$\boldsymbol{E}$是n阶单位矩阵,若$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$,证明$\boldsymbol{B}$的列向量组线性无关.

【解】 (方法一) 对$\boldsymbol{B}$按列分块,记$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$,若

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{0}$$

即

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$$

即

$$\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$$

两边左乘$\boldsymbol{A}$,得

$$\boldsymbol{AB}\begin{bmatrix}k_1\\\vdots\\k_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},\text{即}\ \boldsymbol{E}\begin{bmatrix}k_1\\\vdots\\k_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},\text{亦即}\begin{bmatrix}k_1\\\vdots\\k_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$$

所以$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$线性无关.

(方法二) 因为$\boldsymbol{B}$是$m\times n$矩阵,$n<m$,所以

$$r(\boldsymbol{B})\leqslant n$$

又因

$$r(\boldsymbol{B})\geqslant r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{E})=n$$

故

$$r(\boldsymbol{B})=n$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关.

5 (1994,二(5)题,3分) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,则向量组

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

(B)$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

(D)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

【答案】 C.

【解析】 这一类题目应当用观察法,若不易于观察时可转为计算行列式.

(A):由于$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4)-(\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{0}$,所以(A)线性相关.

(B):由于$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4)+(\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{0}$,所以(B)线性相关.

对于(C),实验几组数据不能得到0时,应立即计算由 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的系数构成的行列式.因

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

即
$$\begin{vmatrix}1&0&0&-1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}=2\neq 0$$

由行列式不为0,而知(C)线性无关.故应选(C).

当然,在处理(C)有困难时,也可来看(D),由

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4)+(\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{0}$$

知(D)线性相关,于是用排除法可确定选(C).

6 (1997,二(4)题,3分) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$,则三条直线

$$a_1x+b_1y+c_1=0,a_2x+b_2y+c_2=0,a_3x+b_3y+c_3=0$$

(其中 $a_i^2+b_i^2\neq 0,i=1,2,3$)相交于一点的充要条件是

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关. (B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(C)秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=$ 秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$. (D)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

【答案】 D.

【解析】 三条直线交于一点的充要条件是方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\a_1x+b_2y+c_2=0\\a_3x+b_3y+c_3=0\end{cases}$$

有唯一解,亦即 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=n$.即

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$$

所以应选(D).

注意,选项(C)保证方程组有解,即三条直线有交点,但不能确定交点唯一,选项(A)是必要条件,不充分.选项(B)表示三直线没有公共交点.

微信公众号【跟我考研】(ID:gkyj66)

7 (1998,十一题,4 分) 设 A 是 n 阶矩阵,若存在正整数 k,使线性方程组 $A^k x = 0$ 有解向量 α,$A^{k-1}\alpha \neq 0$. 证明:向量组 $\alpha, A\alpha, \cdots, A^{k-1}\alpha$ 是线性无关的.

【证明】 设 $l_1\alpha + l_2 A\alpha + \cdots + l_k A^{k-1}\alpha = 0$.

用 A^{k-1} 左乘上式,并把 $A^k\alpha = 0, A^{k+1}\alpha = 0, \cdots$ 代入,得

$$l_1 A^{k-1}\alpha = 0$$

由于 $A^{k-1}\alpha \neq 0$,故必有 $l_1 = 0$.

类似地,对 $l_2 A\alpha + \cdots + l_k A^{k-1}\alpha = 0$,用 A^{k-2} 左乘可知必有 $l_2 = 0$.

归纳,可得到 $l_i = 0 (i = 1, 2, \cdots, k)$,即 $\alpha, A\alpha, \cdots, A^{k-1}\alpha$ 线性无关.

8 (2000,二(4) 题,3 分) 设 n 维列向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m (m < n)$ 线性无关,则 n 维列向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 线性无关的充分必要条件为

(A) 向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 可由向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 线性表示.

(B) 向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 可由向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性表示.

(C) 向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 与向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 等价.

(D) 矩阵 $A = [\alpha_1, \cdots, \alpha_m]$ 与矩阵 $B = [\beta_1, \cdots, \beta_m]$ 等价.

【答案】 D.

【解析】 向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 向量组的秩 $r(\beta_1, \cdots, \beta_m) = m$.

根据定理"若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 可由 $\beta_1, \cdots, \beta_t$ 线性表出,则 $r(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) \leqslant r(\beta_1, \cdots, \beta_t)$".

若 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 可由 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 线性表示,则有

$$r(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) \leqslant r(\beta_1, \cdots, \beta_m)$$

又因 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性无关,知 $r(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) = m$. 从而

$$m \leqslant r(\beta_1, \cdots, \beta_m)$$

又因 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 是 m 个向量,知 $r(\beta_1, \cdots, \beta_m) \leqslant m$. 故 $r(\beta_1, \cdots, \beta_m) = m$,即 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 线性无关.

可见(A)是充分性条件. 那么(A)是必要的吗?即 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 与 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 均线性无关,能否推导出 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 必可由 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 线性表示?例如:若

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ 与 } \beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

显然 α_1, α_2 与 β_1, β_2 均线性无关,但 α_1, α_2 不能由 β_1, β_2 线性表示.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

所以(A)只是充分条件并不必要.

对于(B),有

$$r(\beta_1, \cdots, \beta_m) \leqslant r(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) = m$$

因此由(B)不能推导出 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 线性无关,即充分性不成立. 同(A)举例,知(B)不是必要条件,所以(B)对于 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 线性无关是不充分又不必要的条件.

至于(C),所谓 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 与 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 等价,即这两个向量组可以互相线性表出,由(A)知它只是一个充分条件,而(B)是一个无关的条件,因为必要性不成立. 所以(C)不是充要条件.

用排除法可知(D)正确,作为复习就应当搞清楚为什么(D)是充分必要条件.

所谓矩阵 A 与 B 等价,即经过初等变换可由矩阵 A 得到矩阵 B,亦即 $r(A) = r(B)$. 那么,

如果矩阵 $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ 与 $B = (\beta_1, \cdots, \beta_m)$ 等价,则

$$r(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) = r(\beta_1, \cdots, \beta_m)$$

由于 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性无关,有 $r(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) = m$,从而 $r(\beta_1, \cdots, \beta_m) = m$. 即 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 线性无关. 充分

性成立.

若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 均线性无关,则

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=m=r(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$$

从而矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$ 与 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$ 等价. 即必要性成立.

所以当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关时,$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关的充要条件是矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$ 等价.

9 (2003,二(4)题,4分) 设向量组 Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 Ⅱ:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示,则

(A) 当 $r<s$ 时,向量组 Ⅱ 必线性相关. (B) 当 $r>s$ 时,向量组 Ⅱ 必线性相关.

(C) 当 $r<s$ 时,向量组 Ⅰ 必线性相关. (D) 当 $r>s$ 时,向量组 Ⅰ 必线性相关.

【答案】 D.

【解析】 根据定理"若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出,且 $s>t$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 必线性相关",即若多数向量可以由少数向量线性表出,则这多数向量必线性相关,故应选(D).

【评注】 建议你举几个例子说明(A)(B)(C)均不正确.

10 (2004,12题,4分) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 的任意两个非零矩阵,则必有

(A)$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关.

(B)$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关.

(C)$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关.

(D)$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关.

【答案】 A.

【解析】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$,$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times s$ 矩阵,且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,那么

$$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$$

由于 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均非零,故 $0<r(\boldsymbol{A})<n$,$0<r(\boldsymbol{B})<n$.

由 $r(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$ 的列秩,知 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关.

由 $r(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}$ 的行秩,知 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关. 故应选(A).

11 (2005,11题,4分) 设 λ_1,λ_2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值,对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ 线性无关的充分必要条件是

(A)$\lambda_1\neq 0$. (B)$\lambda_2\neq 0$. (C)$\lambda_1=0$. (D)$\lambda_2=0$.

【答案】 B.

【解析】 按特征值、特征向量定义 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$.

若 $\lambda_2=0$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ 即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1$ 必线性相关. 排除(D).

若 $\lambda_1=0$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$ 必线性无关,但 $\lambda_1=0$ 只是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ 线性无关的充分条件,并不必要. 因此(C)是错误的.

方法一 (用定义) 设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{0}$,即有

$$(k_1+\lambda_1k_2)\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2k_2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0} \tag{1}$$

由于特征值不同特征向量线性无关,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关. 由(1)得

$$\begin{cases}k_1+\lambda_1k_2=0\\ \lambda_2k_2=0\end{cases} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)\text{ 无关}\Leftrightarrow\begin{cases}k_1=0\\ k_2=0\end{cases}\Leftrightarrow(2)\text{ 只有零解}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}1&\lambda_1\\0&\lambda_2\end{vmatrix}\neq 0\Leftrightarrow\lambda_2\neq 0.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: dijv66)

方法二　(用秩) 因为$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2))=(\boldsymbol{\alpha}_1,\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\begin{bmatrix}1&\lambda_1\\0&\lambda_2\end{bmatrix}$,

那么 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ 线性无关 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1,\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2)=2$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ 线性无关 $\Leftrightarrow r\begin{bmatrix}1&\lambda_1\\0&\lambda_2\end{bmatrix}=2\Leftrightarrow\lambda_2\neq 0$.

【评注】 处理相关、无关要会用定义法和秩这些手段.

12 (2006,11 题,4 分) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 维列向量，$\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，下列选项正确的是

(A) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

(B) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

(C) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

(D) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

【答案】 A.

【解析】 方法一　(用定义法)

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，故存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0}$$

从而有

$$\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$$

亦即

$$k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0}$$

由于 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 不全为 0 而使上式成立，说明 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关. 故(A) 正确.

方法二　(用秩) 利用分块矩阵有$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$，那么

$$r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s)\leqslant r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，有 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)<s$，

从而 $r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s)<s$，故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，即应选(A).

【评注】 如令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 易见(B)(D) 不正确. 如令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 易见(C) 不正确.

13 (2007,7 题,4 分) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则下列向量组线性相关的是

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$.　　(B)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$.

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1$.　　(D)$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$.

【答案】 A.

【解析】 因为$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{0}$，所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关，故应选(A).

至于(B)(C)(D) 的线性无关性可以用$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C}$ 的方法来处理. 即若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，那么 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关 $\Leftrightarrow|\boldsymbol{C}|\neq 0$. 选项(B)(C)(D) 中的向量有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&0&-2\\-2&1&0\\0&-2&1\end{bmatrix}$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)
微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}$$

由于$\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq0$，$\begin{vmatrix}1&0&-2\\-2&1&0\\0&-2&1\end{vmatrix}=-7\neq0$，$\begin{vmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{vmatrix}=9\neq0$，可知(B)(C)(D)的向量组都是线性无关的，故选(A).

练习题

1.(2002，数四，3分) 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(a,0,c),\boldsymbol{\alpha}_2=(b,c,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,a,b)$线性无关，则$a,b,c$必满足关系式_____.

2.(1992，数四，3分) 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$均为$n$维列向量，那么，下列结论正确的是

(A) 若$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关.

(B) 若对任意一组不全为零的数$k_1,k_1,\cdots,k_m$，都有$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\neq\boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关.

(C) 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关，则对任意一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，都有$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$.

(D) 若$0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

练习题参考答案

1.【答案】 $abc\neq0$.

【解析】 n个n维向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关的充分必要条件是行列式$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|\neq0$.而

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=\begin{vmatrix}a&b&0\\0&c&a\\c&0&b\end{vmatrix}=2abc$$

故应填：$abc\neq0$.

2.【答案】 B.

【解析】 按向量组线性相关的定义，若存在不全为零的一组数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$$

则称$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关.

选项(A)没有指明$k_1,k_2,\cdots,k_m$不全为0，故(A)不正确.选项(C)要求任意一组不全为0的数，这只能$\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,\cdots,m)$全是零向量，不是线性相关定义所要求的.

对任意一组向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，

$$0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$$

恒成立.而$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$是否线性相关?就是问除去上述情况外，是否还能找到不全为0的一组数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，仍能使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$$

成立.若能则线性相关，若不能即只要$k_1,k_2,\cdots,k_m$不全为0，必有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\neq\boldsymbol{0}$$

可见(B)是线性无关的定义.而(D)没有指明仅当$k_1=0,k_2=0,\cdots,k_m=0$时，$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$成立.故(D)不正确.所以应选(B).

三、向量组的极大线性无关组与秩

试题特点

虽然单纯的极大无关组或向量组秩的考题很少，但是齐次方程组的基础解系实际上就是解向量的极大线性无关组，这在方程组求解和求特征向量时是回避不了的；向量空间的维数和基实际上就是向量组的秩和极大无关组概念在向量空间的延伸，所以复习时这里的概念、计算、证明仍然要认真对待.

14 (1990，一(5) 题，3 分) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,4,5),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,5,6),\boldsymbol{\alpha}_4=(4,5,6,7)$，则该向量组的秩是_____.

【答案】 2.

【解析】 经初等变换向量组的秩不变. 由

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_3\\ \boldsymbol{\alpha}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

知 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=r(\boldsymbol{A})=2$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

练习题

1. (1994，数四，3 分) 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14),\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-2,2,0),\boldsymbol{\alpha}_5=(2,1,5,10)$，则该向量组的极大线性无关组是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$. (B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$. (C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5$. (D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$.

2. (1999，数二，8 分) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,-3,5,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,2,-1,p+2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(-2,-6,10,p)^{\mathrm{T}}$.

(1) p 为何值时，该向量组线性无关？并在此时将向量 $\boldsymbol{\alpha}=(4,1,6,10)^{\mathrm{T}}$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出.

(2) p 为何值时，该向量组线性相关？并在此时求出它的秩和一个极大线性无关组.

练习题参考答案

1.【答案】 B.

【解析】 这是一道常规题，按一般方法求解即可.

$$\begin{bmatrix}1&-1&2&4\\0&3&1&2\\3&0&7&14\\1&-2&2&0\\2&1&5&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&2&4\\0&3&1&2\\0&3&1&2\\0&-1&0&-4\\0&3&1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&2&4\\0&3&1&2\\0&0&0&0\\0&-1&0&-4\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{matrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_3-3\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_5-2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2\end{matrix}$$

已能看出秩为 3，极大线性无关组是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$. 或用列向量作行变换，有

$$\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-2&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&-1&3\\0&1&1&0&1\\0&2&2&-4&2\end{bmatrix}$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&3&3&-1&3\\0&2&2&-4&2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

每行第1个非零数在第1,2,4列,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是极大线性无关组.因此应选(B).

【评注】 当选择 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 作为极大线性无关组时,由第一种方法立即知

$$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_4,\quad \boldsymbol{\alpha}_5=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_4$$

即用极大线性无关组表示向量组中每个向量,那么用第二种方法时,你如何写出上述表达式?

2.【解】 对矩阵$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\vdots\boldsymbol{\alpha}]$作初等行变换:

$$\left[\begin{array}{ccccc}1&-1&3&-2&4\\1&-3&2&-6&1\\1&5&-1&10&6\\3&1&p+2&p&10\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccccc}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&6&-4&12&2\\0&4&p-7&p+6&-2\end{array}\right]$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccccc}1&-1&3&-2&4\\0&-2&-1&-4&-3\\0&0&-7&0&-7\\0&0&p-9&p-2&-8\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccccc}1&0&0&0&2\\0&1&0&2&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&p-2&1-p\end{array}\right]$$

(1) 当 $p\neq 2$ 时,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.由 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4$,解得

$$x_1=2,x_2=\frac{3p-4}{p-2},x_3=1,x_4=\frac{1-p}{p-2}$$

(2) 当 $p=2$ 时,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.此时,向量组的秩等于3.$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$(或 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$)为其一个极大线性无关组.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

四、向量空间

试题特点

复习向量空间这部分内容时应了解向量空间、子空间、解空间、基底、维数、坐标等概念,要了解基变换与坐标变换公式(在二次型化标准形中会用到),应会求过渡矩阵,要会线性无关向量组的施密特正交规范化方法,由此可构造规范正交基.

不要混淆向量维数和空间维数的概念,例如 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,4,5)^{\mathrm{T}}$ 是三维向量(因为它们有3个分量),但由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 生成的空间 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$ 是2维的向量空间(因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,它们就是空间的基,而基里有2个向量即空间是2维).

过渡矩阵的概念不要搞反,如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是三维向量空间的两组基,且

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=c_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+c_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+c_{31}\boldsymbol{\alpha}_3\\ \boldsymbol{\beta}_2=c_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+c_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+c_{32}\boldsymbol{\alpha}_3\\ \boldsymbol{\beta}_3=c_{13}\boldsymbol{\alpha}_1+c_{23}\boldsymbol{\alpha}_2+c_{33}\boldsymbol{\alpha}_3\end{cases}$$

即

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}\end{bmatrix}$$

则称 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}\end{bmatrix}$ 为由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵.

15 (1987,一(5)题,3分)已知三维线性空间的基底为$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1)$,则向量$\boldsymbol{u}=(2,0,0)$在此基底下的坐标是_____.

【答案】　$(1,1,-1)$.

【解析】　若$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{u}$,则$(x_1,x_2,x_3)$称为向量$\boldsymbol{u}$在基底$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标.按向量的分量写出即有

$$\begin{cases}x_1+x_2=2\\x_1+x_3=0\\x_2+x_3=0\end{cases}$$

解出$x_1=1,x_2=1,x_3=-1$.

因此向量$\boldsymbol{u}$的坐标是$(1,1,-1)$.

16 (1993,试卷Ⅱ,5分)已知$\mathbf{R}^3$的两个基为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\text{与}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}3\\4\\3\end{bmatrix},$$

求由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵$\boldsymbol{P}$.

【解】　设由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵为$\boldsymbol{C}$,则

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{C}$$

故

$$\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]^{-1}[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

由于

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0&1&0\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{bmatrix}$$

【评注】　本题考查两组基之间过渡矩阵的概念.由于有

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\vdots\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]\xrightarrow[\text{行变换}]{\cdots\cdots}[\boldsymbol{E}\vdots\boldsymbol{C}]$$

因而求过渡矩阵$\boldsymbol{C}$时,亦可如下进行:

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&2&3\\1&0&0&2&3&4\\1&-1&1&1&4&3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&3&4\\1&1&1&1&2&3\\1&-1&1&1&4&3\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&3&4\\0&1&1&-1&-1&-1\\0&-1&1&-1&1&-1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&3&4\\0&1&1&-1&-1&-1\\0&0&1&-1&0&-1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&3&4\\0&1&0&0&-1&0\\0&0&1&-1&0&-1\end{array}\right]$$

17 (1997,七(1)题,5分) 设 $\boldsymbol{B}$ 是秩为 2 的 5×4 矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,4,-1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(5,-1,-8,9)^{\mathrm{T}}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解向量,求 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的一个标准正交基.

【解】 因秩 $r(\boldsymbol{B})=2$,故解空间的维数 $n-r(\boldsymbol{B})=2$. 又因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是解空间的基. 取

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,3)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1$$

$$=(-1,1,4,-1)^{\mathrm{T}}-\frac{5}{15}(1,1,2,3)^{\mathrm{T}}=\frac{2}{3}(-2,1,5,-3)^{\mathrm{T}}$$

将其单位化,有

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{15}}(1,1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{39}}(-2,1,5,-3)^{\mathrm{T}}$$

即是解空间的规范正交基.

18 (2003,一(4)题,4分) 从 $\mathbf{R}^2$ 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ 的过渡矩阵为_____.

【答案】 $\begin{bmatrix}2&3\\-1&-2\end{bmatrix}$.

【解析】 设由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{C}$,则

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]\boldsymbol{C}\quad\text{即}\quad\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]^{-1}[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2]$$

那么,由 $\left[\begin{array}{cc:cc}1&1&1&1\\0&-1&1&2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc:cc}1&0&2&3\\0&-1&1&2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc:cc}1&0&2&3\\0&1&-1&-2\end{array}\right]$

可知应填:$\begin{bmatrix}2&3\\-1&-2\end{bmatrix}$.

当然也可先求出 $\begin{bmatrix}1&1\\0&-1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&1\\0&-1\end{bmatrix}$,再作矩阵乘法而得到过渡矩阵.

本题坐标简单,很容易看出

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=3\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2$$

按过渡矩阵定义,立即有 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2&3\\-1&-2\end{bmatrix}$.

微信公众号【环尖考研】(ID:hjky56)

第四章　线性方程组

本章导读

线性方程组是否有解?若有解,那么一共有多少解?有解时怎样求出其所有的解?如何求齐次方程组的基础解系?

当给出具体的方程组时,如何加减消元化简(注意只用行变换)?如何求出所有的解(可能还涉及对一些参数的讨论)?

没有具体的方程组时,如何利用解的结构(注意对矩阵秩的推断)分析、推导出通解?

面对两个方程组,如何处理公共解或同解问题?

这一切都是大家在复习方程组时要认真对待的,方程组历年来都是考试的重点,比重大、分值高、解答题多,一定要好好复习.

一、齐次方程组、基础解系

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

试题特点

考查的主要定理是:

(1) 设 A 是 $m\times n$ 矩阵,齐次方程组 $Ax=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow$ 秩 $r(A)<n$;

(2) 齐次方程组 $Ax=0$ 如有非零解,则必有无穷多解,而线性无关的解向量个数为 $n-r(A)$.

☆ 求基础解系是重点、是关键.

$n-r(A)$ 既表示 $Ax=0$ 线性无关解向量的个数,也表示方程组中自由变量的个数,如何确定自由变量?如何给自由变量赋值并求解,是这的基本功.

不论是 $Ax=0$ 还是 $Ax=b$ 都要涉及到求 $Ax=0$ 的基础解系,这里的计算一定要过关(正确、熟练).

线性无关的证明题另一种出题方法就是证基础解系.

例 (1992,二(5)题,3分) 要使 $\xi_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$, $\xi_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ 都是线性方程组 $Ax=0$ 的解,只要系数矩阵 A 为

(A) $[-2\quad 1\quad 1]$. (B) $\begin{bmatrix}2&0&-1\\0&1&1\end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix}-1&0&2\\0&1&-1\end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix}0&1&-1\\4&-2&-2\\0&1&1\end{bmatrix}$.

【答案】 A.

【解析】 因为 ξ_1,ξ_2 是 $Ax=0$ 的2个线性无关的解,故 $n-r(A)\geqslant 2$,知 $r(A)\leqslant 1$. 所以只能选(A).

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

【评注】 若选项中还有秩为1的矩阵，就应当用ξ_1,ξ_2是$Ax=0$的解来排查.本题考查解的概念与解的结构.

2 (1993,一(5)题,3分)设n阶矩阵A的各行元素之和均为零,且A的秩为$n-1$,则线性方程组$Ax=0$的通解为_____.

【答案】 $k(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.

【解析】 因为$r(A)=n-1$,由$n-r(A)=1$知齐次方程组的基础解系为一个向量,故$Ax=0$的通解形式为$k\eta$.下面应当根据已知条件"A中各行元素之和均为零"来分析推导$Ax=0$的一个非零解,它就是$Ax=0$的基础解系.各行元素的和均为0,即

$$\begin{cases} a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}=0 \\ a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n}=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{mn}=0 \end{cases}$$

而齐次方程组$Ax=0$为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

两者相比较,可知

$$x_1=1,x_2=1,\cdots,x_n=1$$

是$Ax=0$的解.所以应填$k(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

3 (1996,试卷Ⅱ,6分)求齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_5=0, \\ x_1+x_2-x_3=0, \\ x_3+x_4+x_5=0 \end{cases}$的基础解系.

【解】 对系数矩阵作初等行变换,有

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

由$n-r(A)=5-3=2$,取x_2,x_5为自由变量,得

$$\eta_1=(-1,1,0,0,0)^{\mathrm{T}},\eta_2=(-1,0,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$$

4 (1998,十二题,5分)已知线性方程组

$$(\mathrm{I})\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1,2n}x_{2n}=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2,2n}x_{2n}=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{n,2n}x_{2n}=0 \end{cases}$$

的一个基础解系为$(b_{11},b_{12},\cdots,b_{1,2n})^{\mathrm{T}},(b_{21},b_{22},\cdots,b_{2,2n})^{\mathrm{T}},\cdots,(b_{n1},b_{n2},\cdots,b_{n,2n})^{\mathrm{T}}$.试写出线性方程组

$$(\mathrm{II})\begin{cases} b_{11}y_1+b_{12}y_2+\cdots+b_{1,2n}y_{2n}=0 \\ b_{21}y_1+b_{22}y_2+\cdots+b_{2,2n}y_{2n}=0 \\ \cdots\cdots \\ b_{n1}y_1+b_{n2}y_2+\cdots+b_{n,2n}y_{2n}=0 \end{cases}$$

的通解,并说明理由.

【解】　记方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)的系数矩阵分别是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$. 由于 $\boldsymbol{B}$ 的每一行都是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解. 故 $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$. 那么

$$\boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$$

因此,$\boldsymbol{A}$ 的行向量是方程组(Ⅱ)的解.

由于 $\boldsymbol{B}$ 的行向量是(Ⅰ)的基础解系,它们应线性无关,从而知 $r(\boldsymbol{B})=n$. 且由(Ⅰ)的解的结构,知 $2n-r(\boldsymbol{A})=n$. 故 $r(\boldsymbol{A})=n$. 于是 $\boldsymbol{A}$ 的行向量线性无关.

又因(Ⅱ)的解空间是 $2n-r(\boldsymbol{B})=n$ 维的,所以 $\boldsymbol{A}$ 的行向量是(Ⅱ)解空间的一组基. 所以(Ⅱ)的通解为:

$$k_1(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1,2n})^{\mathrm{T}}+k_2(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2,2n})^{\mathrm{T}}+k_n(a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{n,2n})^{\mathrm{T}}$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 是任意常数.

5　(2001,九题,6 分)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,$\boldsymbol{\beta}_1=t_1\boldsymbol{\alpha}_1+t_2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=t_1\boldsymbol{\alpha}_2+t_2\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s=t_1\boldsymbol{\alpha}_s+t_2\boldsymbol{\alpha}_1$,其中 t_1,t_2 为实常数. 试问 t_1,t_2 满足什么关系时,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 也为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系?

【解】　由于 $\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,\cdots,s)$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的线性组合,又 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解,所以根据齐次方程组解的性质知 $\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,\cdots,s)$ 均为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

从 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,知 $s=n-r(\boldsymbol{A})$.

下面来分析 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关的条件. 设

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots\cdots+k_s\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{0}$$

即

$$(t_1k_1+t_2k_s)\boldsymbol{\alpha}_1+(t_2k_2+t_1k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(t_2k_2+t_1k_3)\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+(t_2k_{s-1}+t_1k_s)\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0},$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,因此有

$$\begin{cases}t_1k_1+t_2k_s=0\\ t_2k_1+t_1k_2=0\\ t_2k_2+t_1k_3=0\\ \cdots\cdots\\ t_2k_{s-1}+t_1k_s=0\end{cases}$$

因为系数行列式

$$\begin{vmatrix}t_1&0&0&\cdots&0&t_2\\ t_2&t_1&0&\cdots&0&0\\ 0&t_2&t_1&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&t_2&t_1\end{vmatrix}=t_1^s+(-1)^{s+1}t_2^s$$

所以当 $t_1^s+(-1)^{s+1}t_2^s\neq 0$ 时,方程组(*)只有零解 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$.

从而 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关.

即当 s 为偶数 $t_1\neq\pm t_2$,s 为奇数,$t_1\neq -t_2$ 时,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 也为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

6　(2004,20 题,9 分)设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0,\\ 2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n=0,\\ \qquad\vdots\\ nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0,\end{cases}\quad(n\geqslant 2)$$

试问 a 取何值时,该方程组有非零解,并求出其通解.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【解】 设齐次方程组的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$，由

$$|\boldsymbol{A}|=\left[a+\frac{1}{2}(n+1)n\right]a^{n-1}$$

那么，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|=0\Leftrightarrow a=0$ 或 $a=-\frac{1}{2}(n+1)n$.

当 $a=0$ 时，对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1\\2&2&2&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n&n&\cdots&n\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$$

故方程组的同解方程组为

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$$

由此得基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1=(-1,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=(-1,0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$$

于是方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\eta}_{n-1}，\text{其中 } k_1,\cdots,k_{n-1} \text{ 为任意常数}$$

当 $a=-\frac{1}{2}(n+1)n$ 时，对系数矩阵作初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1+a&1&1&\cdots&1\\2&2+a&2&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n&n&\cdots&n+a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1+a&1&1&\cdots&1\\-2a&a&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-na&0&0&\cdots&a\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1+a&1&1&\cdots&1\\-2&1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-n&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&0&0&\cdots&0\\-2&1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-n&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$$

故方程组的同解方程组为

$$\begin{cases}-2x_1+x_2=0\\-3x_1+x_3=0\\\quad\vdots\\-nx_1+x_n=0\end{cases}$$

由此得基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}=(1,2,\cdots,n)^{\mathrm{T}}$$

于是方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{\eta}，\text{其中 } k \text{ 为任意常数}$$

7 (2005，21题，9分) 已知3阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第1行是 (a,b,c)，a,b,c 不全为零，矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{bmatrix}$ (k 为常数)，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

【分析】 本题没有完整的矩阵 $\boldsymbol{A}$，因此求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解不是用加减消元来实现，而应当利用解的结构要由秩入手，另外对 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 要意识到 $\boldsymbol{B}$ 的每一列都是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

【解】 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 知 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant 3$，又 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O},\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，故 $1\leqslant r(\boldsymbol{A})\leqslant 2,1\leqslant r(\boldsymbol{B})\leqslant 2$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(1) 如果 $k \neq 9$，必有 $r(\boldsymbol{B}) = 2$. 此时 $r(\boldsymbol{A}) = 1$. 由于 $n - r(\boldsymbol{A}) = 3 - 1 = 2$，又因 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$ 知 $\boldsymbol{B}$ 的列向量是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解. 故 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的通解为：$k_1(1,2,3)^{\mathrm{T}} + k_2(3,6,k)^{\mathrm{T}}, k_1, k_2$ 为任意常数.

(2) 如果 $k = 9$，则 $r(\boldsymbol{B}) = 1$. 此时 $r(\boldsymbol{A}) = 1$ 或 2.

若 $r(\boldsymbol{A}) = 2$，则 $n - r(\boldsymbol{A}) = 1$. $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的通解为 $k(1,2,3)^{\mathrm{T}}, k$ 为任意常数；

若 $r(\boldsymbol{A}) = 1$，则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 与 $ax + by + cz = 0$ 同解. 由 $n - r(\boldsymbol{A}) = 2$. 不妨设 $a \neq 0$，那么 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的通解为　$k_1(-b,a,0)^{\mathrm{T}} + k_2(-c,0,a)^{\mathrm{T}}, k_1, k_2$ 为任意常数.

【评注】 有的考生不知道 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$ 时，$\boldsymbol{B}$ 的每一列都是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解，多数考生分析、讨论不严谨.

练习题

1. (1989，数四，3 分) 设 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 有非零解的充分必要条件是

(A) $r = n$.　　(B) $r \geqslant n$.　　(C) $r < n$.　　(D) $r > n$.

2. (1994，数四，8 分) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系. 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1$ 也是该方程组的一个基础解系.

练习题参考答案

1.【答案】 C.

【解析】 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按列分块，有 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$，则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的向量形式为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{0}$$

那么，$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关

$$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) < n$$

$$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}) < n$$

故应选(C).

注意，n 元方程组只是强调有 n 个未知数而方程的个数不一定是 n，因此，系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不一定是 n 阶方阵，所以我们应当用 $r(\boldsymbol{A}) < n$. 而有些同学特别爱用行列式 $|\boldsymbol{A}| = 0$，这里是要小心的.

2.【证明】 由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$，知 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解.

同理知 $\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1$ 也都是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解.

若 $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) + k_2(\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) + k_3(\boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1) = \boldsymbol{0}$，即

$$(k_1 + k_3)\boldsymbol{\alpha}_1 + (k_1 + k_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + (k_2 + k_3)\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0}$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是基础解系，知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 故知

$$\begin{cases} k_1 \quad + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 \quad = 0 \\ \quad k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$

因为系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

所以方程组只有零解 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. 从而 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

由已知，$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系含三个线性无关的解向量，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

二、非齐次方程组的求解

试题特点

记住解的结构

$$\boldsymbol{\alpha}+k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的特解，$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

往届考生在加减消元时计算错误较多(一定要多动手认真做)；讨论参数时不能丢三落四，要严谨.

求 $\boldsymbol{A}$ 的秩、求特解、求基础解系、讨论参数是复习时要注意的知识点.

8 (1987，九题，8 分) 问 a,b 为何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\ x_2+2x_3+2x_4=1,\\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b,\\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1\end{cases}$ 有唯一解，无解，有无穷多解？并求出有无穷多解时的通解.

【解】 对增广矩阵作初等行变换，有

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\3&2&1&a&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\0&-1&-2&a-3&-1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&a-1&0&b+1\\0&0&0&a-1&0\end{bmatrix}$$

当 $a\neq 1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=4$，方程组有唯一解.

当 $a=1$ 时，$b\neq -1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=2,r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，方程组无解.

当 $a=1,b=-1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$，方程组有无穷多解.

方程组的通解为

$$(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}}+k_1(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(1,-2,0,1)^{\mathrm{T}},k_1,k_2\text{ 为任意常数}$$

9 (1989，七题，6 分) 问 λ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_3=\lambda,\\ 4x_1+x_2+2x_3=\lambda+2,\\ 6x_1+x_2+4x_3=2\lambda+3\end{cases}$ 有解，并求出解的一般形式.

【解】 对方程组的增广矩阵作初等行变换，有

$$\begin{bmatrix}1&0&1&\lambda\\4&1&2&\lambda+2\\6&1&4&2\lambda+3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&\lambda\\0&1&-2&-3\lambda+2\\0&1&-2&-4\lambda+3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&\lambda\\0&1&-2&-3\lambda+2\\0&0&0&-\lambda+1\end{bmatrix}$$

由于方程组有解的充要条件是 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})$，故仅当 $-\lambda+1=0$，即 $\lambda=1$ 时，方程组有解. 此时秩 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2<n=3$，故方程组有无穷多解.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

由同解方程组

$$\begin{cases} x_1 \quad +x_3=1 \\ x_2-2x_3=-1 \end{cases}$$

令 $x_3=t$，解之得原方程组的通解

$$\begin{cases} x_1=-t+1, \\ x_2=2t-1, \\ x_3=t, \end{cases} t \text{ 为任意常数或 } \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, t \text{ 为任意常数}$$

10 (1990，二(5)题，3分) 已知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，k_1,k_2 为任意常数，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解是

(A) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.　　(B) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.

(C) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.　　(D) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.

【答案】 B.

【解析】 本题考查解的性质与解的结构. 从 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，知 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解形式为

$$k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\xi}$$

其中，$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，$\boldsymbol{\xi}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解.

由解的性质知：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2},\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2$ 都是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，$\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解.

那么(A)中没有特解 $\boldsymbol{\xi}$，(C)中既没有特解 $\boldsymbol{\xi}$，且 $\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 也不是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解. (D)中虽有特解，但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2$ 的线性相关性不能判定，故(A)(C)(D)均不正确.

(B)中，$\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的线性无关的解，是基础解系. 故应选(B).

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

11 (1995，试卷Ⅱ，7分) 设线性方程组 $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3 \quad +x_4=1, \\ \quad\quad x_2+ax_3-ax_4=-1, \\ x_1+2x_2 \quad\quad +3x_4=3. \end{cases}$ 问 a 为何值时方程组有解？并在有解时求出方程组的通解.

【解】 对增广矩阵作初等行变换，有

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & -a & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & -a & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & a-2 & 2-a & 1 \end{array}\right]$$

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

若 $a=2$，则 $r(\boldsymbol{A})=2,r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，方程组无解.

若 $a\neq 2,r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3<4$，方程组有无穷多解.

$$\overline{\boldsymbol{A}} \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dfrac{1}{a-2} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 3 & \dfrac{7a-10}{a-2} \\ & 1 & 0 & 0 & \dfrac{2-2a}{a-2} \\ & & 1 & -1 & \dfrac{1}{a-2} \end{array}\right]$$

令 $x_4=0$，得 $x_3=\dfrac{1}{a-2}$，$x_2=\dfrac{2-2a}{a-2}$，$x_1=\dfrac{7a-10}{a-2}$.

于是得到 $Ax=b$ 的解

$$\boldsymbol{\alpha}=\left(\frac{7a-10}{a-2},\frac{2-2a}{a-2},\frac{1}{a-2},0\right)^{\mathrm{T}}$$

令 $x_4=1$，对 $Ax=0$ 求出 $x_3=1$，$x_2=0$，$x_1=-3$，得到导出组的基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}=(-3,0,1,1)^{\mathrm{T}}$$

所以方程组的通解为 $\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\eta}$，$k$ 为任意常数.

12 (2000，一(4)题，3分) 已知方程组 $\begin{bmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}$ 无解，则 $a=$ _____.

【答案】 -1.

【解析】 方程组无解的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})$. 故应对增广矩阵作初等行变换，由于

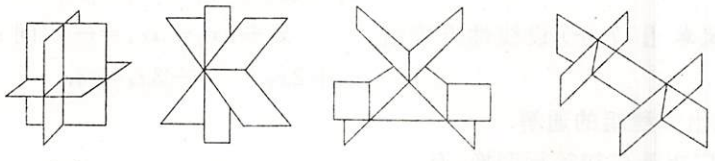
$$\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&1&1\\2&3&a+2&3\\1&a&-2&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&0&a^2-2a-3&a-3\end{array}\right]$$

若 $a=-1$，则

$$\overline{\boldsymbol{A}}\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&1&1\\&-1&-1&1\\&&&-4\end{array}\right]$$

于是有 $r(\boldsymbol{A})=2$，$r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，从而方程组无解，故应填：$a=-1$.

13 (2002，二(4)题，3分) 设有三个不同平面的方程 $a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=b_i$，$i=1,2,3$，它们所组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都为2，则这三个平面可能的位置关系为



(A)　(B)　(C)　(D)

【答案】 B.

【解析】 因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$，说明方程组有无穷多解，所以三个平面有公共交点且不唯一，因此应当选(B).

(A) 表示方程组有唯一解，其充要条件是 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$.

(C) 中三个平面没有公共交点，即方程组无解，又因三个平面中任两个都不平行，故 $r(\boldsymbol{A})=2$ 和 $r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，且 $\boldsymbol{A}$ 中任意两个行向量都线性无关.

类似地，(D) 中有两个平面平行，故 $r(\boldsymbol{A})=2$，$r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，$\boldsymbol{A}$ 中有两个行向量共线.

14 (2002，九题，6分) 已知4阶方阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为4维列向量，其中 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，如果 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

【分析】 方程组的系数没有具体给出，应当从解的理论，解的结构入手来求解.

【解】 由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关及 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 知，向量组的秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为3. 因此 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中只包含一个向量. 那么由

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$$

知，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系是$(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$.

再由 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ 知，$(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解. 故 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解是

$$k\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\text{其中 } k \text{ 为任意常数}$$

【评注】　因为方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的向量形式为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$$

那么利用 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 及 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关可以得到

$$(2x_1+x_2-3)\boldsymbol{\alpha}_2+(-x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_3+(x_4-1)\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$$

故知

$$\begin{cases}2x_1+x_2-3=0\\-x_1+x_3=0\\x_4-1=0\end{cases}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

于是 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 与上述方程组同解，解此方程组就可得到 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

15 (2003，十题，8 分) 已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1:ax+2by+3c=0$$
$$l_2:bx+2cy+3a=0$$
$$l_3:cx+2ay+3b=0$$

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a+b+c=0$.

【证明】　必要性：若三条直线交于一点，则线性方程组

$$\begin{cases}ax+2by=-3c\\bx+2cy=-3a\\cx+2ay=-3b\end{cases}\tag{1}$$

有唯一解，故 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$. 于是 $|\overline{\boldsymbol{A}}|=0$.

$$\text{由于 } |\overline{\boldsymbol{A}}|=\begin{vmatrix}a&2b&-3c\\b&2c&-3a\\c&2a&-3b\end{vmatrix}=6(a+b+c)\begin{vmatrix}1&1&-1\\b&c&-a\\c&a&-b\end{vmatrix}$$
$$=6(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$
$$=3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\tag{2}$$

由 l_1,l_2,l_3 是三条不同直线，知 $a=b=c$ 不成立，那么 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0$.

故必有 $a+b+c=0$.

充分性:若 $a+b+c=0$,由(2)知 $|\overline{A}|=0$,故秩 $r(\overline{A})<3$.

由 $\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 2(ac-b^2) = -2[a(a+b)+b^2]$

$$= -2\left[\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2\right] \neq 0$$

(否则 $a=b=c=0$.)知秩 $r(\boldsymbol{A})=2$.于是 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$.

因此,方程组(1)有唯一解,即三条直线 l_1,l_2,l_3 交于一点.

16 (2006,20题,9分)已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1, \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1, \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}$$

有3个线性无关的解.

(Ⅰ)证明方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=2$;

(Ⅱ)求 a,b 的值及方程组的通解.

【分析】 本题考查含参数的非齐次线性方程组的求解问题,那么如何求参数 a 和 b?题目给的追加信息是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有3个线性无关的解,如何用这信息?其实问题(Ⅰ)$r(\boldsymbol{A})=2$ 就是提示.

【解】 (Ⅰ)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是非齐次方程组的3个线性无关的解,那么 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 线性无关的解,所以 $n-r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$,即 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$.

显然矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有二阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ 不为0,又有 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$,从而秩 $r(\boldsymbol{A})=2$.

(Ⅱ)对增广矩阵作初等行变换,有

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ a & 1 & 3 & b & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1-a & 3-a & b-a & a+1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 4-2a & b+4a-5 & 4-2a \end{array}\right].$$

由题设和(Ⅰ)知,$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$,故有

$$4-2a=0, b+4a-5=0$$

解出 $a=2,b=-3$,

此时 $\overline{\boldsymbol{A}} \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

那么 $\boldsymbol{\alpha}=(2,-3,0,0)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解,且 $\boldsymbol{\eta}_1=(-2,1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=(4,-5,0,1)$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,所以方程组的通解是 $\boldsymbol{\alpha}+k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2$ (k_1,k_2 为任意常数).

【评注】 通过本题要体会如何用两个条件把 $r(\boldsymbol{A})=2$ 夹逼出来的方法.不少考生把题目中的"有3个线性无关的解"理解为"恰有3个线性无关的解",这就改变了(Ⅰ)证明的难度和命题的原意.大家要认真审题,准确理解题意.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

17 (2008,21 题,12 分) 设 n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{bmatrix}_{n\times n},\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

(Ⅰ) 证明行列式 $|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$;

(Ⅱ) 当 a 为何值时,该方程组有唯一解,并求 x_1;

(Ⅲ) 当 a 为何值时,该方程组有无穷多解,并求通解.

【分析】 本题考查 n 阶行列式的计算和方程组的求解. 作为"三对角"行列式可用数学归纳法或"三角化";对于唯一解应利用克拉默法则.

【解】 (Ⅰ) 用数学归纳法. 记 n 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的值为 $D_n=(n+1)a^n$,

当 $n=1$ 时 $D_1=2a$,命题 $D_n=(n+1)a^n$ 正确;

当 $n=2$ 时,$D_2=\begin{vmatrix} 2a & 1 \\ a^2 & 2a \end{vmatrix}=3a^2$,命题正确.

设 $n<k$ 时 $D_n=(n+1)a^n$,命题正确.

当 $n=k$ 时,按第一列展开,则有

$$D_k=2a\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{k-1}+a^2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{k-1}$$

$$=2aD_{k-1}-a^2D_{k-2}=2a(ka^{k-1})-a^2[(k-1)a^{k-2}]=(k+1)a^k$$

命题正确.

所以 $|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$.

(Ⅱ) 据(Ⅰ)由克拉默法则,$|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 方程组有唯一解,故 $a\neq 0$ 时方程组有唯一解,且用克拉默法则,有

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ 0 & 2a & 1 & & \\ 0 & a^2 & 2a & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}}{D_n}=\frac{na^{n-1}}{(n+1)a^n}=\frac{n}{(n+1)a}$$

(Ⅲ) 当 $a=0$ 时,方程组为 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$,由 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=n-1$,方程组有无穷多解. 按解的结构,其通解为 $(0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}+k(1,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$,$k$ 为任意常数.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)
微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

【评注】 本题的“三对角”行列式也可用逐行相加的技巧将其上三角化，即把第一行的$-\frac{1}{2}a$倍加至第二行，再把新第二行的$-\frac{2}{3}a$倍加至第三行，….

$$|A|=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_n=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_n$$

$$=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & & \\ & 0 & \frac{4}{3}a & 1 & & \\ & & a^2 & 2a & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_n=\cdots$$

$$=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & & \\ & 0 & \frac{4}{3}a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & \frac{n}{n-1}a & 1 \\ & & & & 0 & \frac{n+1}{n}a \end{vmatrix}_n=(n+1)a^n.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

本题难度系数数一 0.305，数二 0.270，数三 0.273，是 2008 年考题中得分率较低的题目之一.

三、公共解与同解

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

试题特点

如果已知两个方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)，那么将其联立$\begin{cases}(\text{Ⅰ})\\(\text{Ⅱ})\end{cases}$，其联立方程组的解就是(Ⅰ)与(Ⅱ)的公共解.

如果已知(Ⅰ)与(Ⅱ)的基础解系分别是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$和$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$，则可设公共解为$\boldsymbol{\gamma}$，那么

$$\boldsymbol{\gamma}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2$$

由此得$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3-l_1\boldsymbol{\beta}_1-l_2\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{0}$，解出$k_1,k_2,k_3,l_1,l_2$可求出公共解$\boldsymbol{\gamma}$.

这两种常见的出题方法应当把握. 而处理同解的方法，往往是代入来处理，即把(Ⅰ)的解代入

(Ⅱ),把(Ⅱ)的解代入(Ⅰ)

18 (1994,八题,8分)设四元齐次线性方程组(Ⅰ)为:$\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_2-x_4=0.\end{cases}$又已知某线性齐次方程组(Ⅱ)的通解为$k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}$.

(1)求线性方程组(Ⅰ)的基础解系;

(2)问线性方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)是否有非零公共解?若有,则求出所有的非零公共解.若没有,则说明理由.

【解】 (1)由已知,(Ⅰ)的系数矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\end{bmatrix}$$

由于$n-r(\boldsymbol{A})=2$,x_3,x_4可为自由变量,故(Ⅰ)的基础解系可取为

$$(0,0,1,0),(-1,1,0,1)$$

(2)方程组(Ⅰ)与方程组(Ⅱ)有非零公共解.

将(Ⅱ)的通解$x_1=-k_2$,$x_2=k_1+2k_2$,$x_3=k_1+2k_2$,$x_4=k_2$代入方程组(Ⅰ),则有

$$\begin{cases}-k_2+k_1+2k_2=0\\k_1+2k_2-k_2=0\end{cases}$$

解出$k_1=-k_2$.

那么当$k_1=-k_2\neq 0$时,向量

$$k_1(0,1,1,0)+k_2(-1,2,2,1)=k_1(1,-1,-1,-1)$$

是(Ⅰ)与(Ⅱ)的非零公共解.

微信公众号【顶尖考研】(ID:dijky66)

【评注】 由于(Ⅰ)的通解是$l_1(0,0,1,0)+l_2(-1,1,0,1)$,(Ⅱ)的通解是$k_1(0,1,1,0)+k_2(-1,2,2,1)$,因此若令公共解为$\gamma$,则

$$\gamma=l_1(0,0,1,0)+l_2(-1,1,0,1)=k_1(0,1,1,0)+k_2(-1,2,2,1)$$

只要能求出不全为0的l_1,l_2,则$\gamma\neq\mathbf{0}$,且γ是(Ⅰ)的解,也是(Ⅱ)的解.由此可得l_1,l_2,k_1,k_2的齐次方程组

$$\begin{bmatrix}0&-1&0&1\\0&1&-1&-2\\1&0&-1&-2\\0&1&0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-2\\&1&0&-1\\&&1&1\\&&&0\end{bmatrix}$$

可见当$k_1=-k_2\neq 0$时,有非零公共解,下略.

19 (2003,二(5)题,4分)设有齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$和$\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$,其中$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$均为$m\times n$阶矩阵,现有4个命题:

① 若$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的解均是$\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$的解,则秩$(\boldsymbol{A})\geqslant$秩$(\boldsymbol{B})$;

② 若秩$(\boldsymbol{A})\geqslant$秩$(\boldsymbol{B})$,则$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的解均是$\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$的解;

③ 若$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$与$\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$同解,则秩$(\boldsymbol{A})=$秩$(\boldsymbol{B})$;

④ 若秩$(\boldsymbol{A})=$秩$(\boldsymbol{B})$,则$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$与$\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$同解.

以上命题中正确的是

(A)①②.　　(B)①③.　　(C)②④.　　(D)③④.

【答案】 B.

【解析】 显然命题④错误,因此排除(C)(D).对于(A)与(B)其中必有一个正确,因此命题

① 必正确，那么 ② 与 ③ 哪一个命题正确呢？

由命题 ①，“若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解，则秩$(\boldsymbol{A})\geqslant$秩$(\boldsymbol{B})$”正确，知“若 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，则秩$(\boldsymbol{B})\geqslant$秩$(\boldsymbol{A})$”正确，可见“若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解，则秩$(\boldsymbol{A})=$秩$(\boldsymbol{B})$”正确. 即命题 ③ 正确，所以应当选(B).

20 (2007，21 题，11 分) 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2+ax_3=0, \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases} \tag{①}$$

与方程

$$x_1+2x_2+x_3=a-1 \tag{②}$$

有公共解，求 a 的值及所有公共解.

【分析】 本题考查两个方程组的公共解问题，应当有两种思路：一个是 ① 与 ② 联立方程组的解就是公共解；一个是先求 ① 的解然后代入到 ② 中来确定公共解.

【解】 (方法一) 因为方程组 ① 与 ② 的公共解，即为联立方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2+ax_3=0, \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0, \\ x_1+2x_2+x_3=a-1 \end{cases} \tag{③}$$

的解.

对方程组 ③ 的增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 施以初等行变换，有

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & a^2-1 & 3(1-a) \end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 1-a \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2) \end{array}\right]$$

由于方程组 ③ 有解，故 ③ 的系数矩阵的秩等于增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 的秩，于是$(a-1)(a-2)=0$，即 $a=1$ 或 $a=2$.

当 $a=1$ 时，$\overline{\boldsymbol{A}}\to\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$，

因此 ① 与 ② 的公共解为：$\boldsymbol{x}=k\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，其中 k 为任意常数.

当 $a=2$ 时，$\overline{\boldsymbol{A}}\to\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$，

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

因此 ① 与 ② 有唯一的公共解为：$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$.

（方法二）　先求出方程组 ① 的解，其系数行列式 $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{vmatrix}=(a-1)(a-2)$.

当 $a\neq 1, a\neq 2$ 时，方程组 ① 只有零解，但此时 $\boldsymbol{x}=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$ 不是方程 ② 的解. 所以公共解发生在 $a=1$ 或 $a=2$ 时：

当 $a=1$ 时，对方程组 ① 的系数矩阵施以初等行变换，

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&4&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

因此 ① 的通解为 $\boldsymbol{x}=k\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，其中 k 为任意常数.

此解也满足方程 ②，所以方程组 ① 与 ② 的所有公共解为：$\boldsymbol{x}=k\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，其中 k 为任意常数.

当 $a=2$ 时，对线性方程组 ① 的系数矩阵施以初等行变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&4&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

得到方程组 ① 的通解是 $\boldsymbol{x}=k(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$，$k$ 为任意常数，将其代入方程组 ② 有

$$0+2(-k)+k=1$$

得 $k=-1$，因此 ① 与 ② 的公共解唯一为 $\boldsymbol{x}=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

【评注】 这是给了两个方程组求公共解的题，大家还要会没有给两个方程组的题，例如 2002 年数四考题.

练习题

1.（2000，数三，3 分）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，则对于线性方程组（Ⅰ）：$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 和（Ⅱ）：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，必有

(A)（Ⅱ）的解是（Ⅰ）的解，（Ⅰ）的解也是（Ⅱ）的解.

(B)（Ⅱ）的解是（Ⅰ）的解，但（Ⅰ）的解不是（Ⅱ）的解.

(C)（Ⅰ）的解不是（Ⅱ）的解，（Ⅱ）的解也不是（Ⅰ）的解.

(D)（Ⅰ）的解是（Ⅱ）的解，但（Ⅱ）的解不是（Ⅰ）的解.

2.（2002，数四，8 分）设 4 元齐次线性方程组（Ⅰ）为

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=0\\x_1+2x_2+x_3-x_4=0\end{cases}$$

而已知另一 4 元齐次线性方程组（Ⅱ）的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-1,a+2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,2,4,a+8)^{\mathrm{T}}$$

(1) 求方程组（Ⅰ）的一个基础解系；

(2) 当 a 为何值时,方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)有非零公共解?在有非零公共解时,求出全部非零公共解.

练习题参考答案

1.【答案】 A.

【解析】 若 $\boldsymbol{\eta}$ 是(Ⅰ)的解,则 $\boldsymbol{A\eta}=\boldsymbol{0}$,那么

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A\eta})=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$$

即 $\boldsymbol{\eta}$ 是(Ⅱ)的解.

若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是(Ⅱ)的解,有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{0}$,用 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 左乘得

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha}=0,\text{即}(\boldsymbol{A\alpha})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A\alpha})=0$$

亦即 $\boldsymbol{A\alpha}$ 自己的内积$(\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A\alpha})=0$,故必有 $\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{\alpha}$ 是(Ⅰ)的解.

所以(Ⅰ)与(Ⅱ)同解,故应选(A).

【评注】 若 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$,则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$,可见 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$.

2.【解】 (1) 对方程组(Ⅰ)的系数矩阵作初等行变换,有

$$\begin{bmatrix}2&3&-1&0\\1&2&1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1&-1\\&1&3&-2\end{bmatrix}$$

由于 $n-r(\boldsymbol{A})=4-2=2$,基础解系由 2 个线性无关的解向量所构成,取 x_3,x_4 为自由变量,所以

$$\boldsymbol{\beta}_1=(5,-3,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(-3,2,0,1)^{\mathrm{T}}$$

是方程组(Ⅰ)的基础解系.

(2) 设 $\boldsymbol{\eta}$ 是方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)的非零公共解,则

$$\boldsymbol{\eta}=k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2$$

其中 k_1,k_2 与 l_1,l_2 均不全为零的常数.

由此得齐次方程组(Ⅲ)

$$\begin{cases}5k_1-3k_2-2l_1+l_2=0\\-3k_1+2k_2+l_1-2l_2=0\\k_1-(a+2)l_1-4l_2=0\\k_2-l_1-(a+8)l_2=0\end{cases}$$

有非零解.对系数矩阵作初等行变换,有

$$\begin{bmatrix}5&-3&-2&1\\-3&2&1&-2\\1&0&-a-2&-4\\0&1&-1&-a-8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-a-2&-4\\0&1&-1&-a-8\\0&2&-3a-5&-14\\0&-3&5a+8&21\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&-a-2&-4\\0&1&-1&-a-8\\0&0&-3a-3&2a+2\\0&0&5a+5&-3a-3\end{bmatrix}$$

当且仅当 $a+1=0$ 时,$r(\text{Ⅲ})<4$,方程组有非零解.

此时,(Ⅲ)的同解方程组是

$$\begin{cases}k_1-l_1-4l_2=0\\k_2-l_1-7l_2=0\end{cases}$$

于是

$$\boldsymbol{\eta}=(l_1+4l_2)\boldsymbol{\beta}_1+(l_1+7l_2)\boldsymbol{\beta}_2=l_1(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)+l_2(4\boldsymbol{\beta}_1+7\boldsymbol{\beta}_2)$$

$$=l_1\begin{bmatrix}2\\-1\\1\\1\end{bmatrix}+l_2\begin{bmatrix}-1\\2\\4\\7\end{bmatrix}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

第五章　特征值与特征向量

本章导读

特征值和特征向量是线性代数的重要内容之一，也是考研的重点之一，它涉及到行列式；矩阵；相关、无关；秩；基础解系；…… 一系列问题，知识点多，综合性强，必须好好复习.

首先要掌握求特征值、特征向量的各种方法；第二是相似，把握住和对角矩阵相似的充分必要条件，会求可逆矩阵 P；第三（可能更重要），利用实对称矩阵的隐含信息处理求特征值、特征向量，用正交矩阵相似对角化等一系列问题.

一、特征值、特征向量的概念与计算

试题特点

常见的命题形式：

1. 用定义 $A\alpha=\lambda\alpha,\alpha\neq 0$ 推理、分析、判断.

2. 由 $|\lambda E-A|=0$ 和 $(\lambda_i E-A)x=0$ 求基础解系.

3. 通过相似 $P^{-1}AP=B$.

(1) 如 $A\alpha=\lambda\alpha$，则 $B(P^{-1}\alpha)=\lambda(P^{-1}\alpha)$，

(2) 如 $B\alpha=\lambda\alpha$，则 $A(P\alpha)=\lambda(P\alpha)$，

特别地，如 $r(A)=1$，有

$$|\lambda E-A|=\lambda^n-\sum a_{ii}\lambda^{n-1},\lambda_1=\sum a_{ii},\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$$

1 (1987，试卷 Ⅱ，6 分) 设 λ_1,λ_2 为 n 阶方阵 A 的特征值，且 $\lambda_1\neq\lambda_2$，而 x_1,x_2 分别为对应的特征向量，试证明 x_1+x_2 不是 A 的特征向量.

【证明】 (反证法) 若 x_1+x_2 是 A 的特征向量，它所对应的特征值为 λ，则

$$A(x_1+x_2)=\lambda(x_1+x_2)$$

由已知又有

$$A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2$$

两式相减得

$$(\lambda-\lambda_1)x_1+(\lambda-\lambda_2)x_2=0$$

由 $\lambda_1\neq\lambda_2$，知 $\lambda-\lambda_2,\lambda-\lambda_2$ 不全为零，于是 x_1,x_2 线性相关，这与不同特征值的特征向量线性无关相矛盾. 所以，x_1+x_2 不是 A 的特征向量.

2 (1989，八题，8 分) 假设 λ 为 n 阶可逆矩阵 A 的一个特征值，证明：

(1) $\dfrac{1}{\lambda}$ 为 A^{-1} 的特征值.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

(2) $\frac{|A|}{\lambda}$ 为 A 的伴随矩阵 A^* 的特征值.

【证明】 (1) 由 λ 是 A 的特征值可知,存在非零向量 α 使 $A\alpha=\lambda\alpha$,两端左乘 A^{-1},得

$$\alpha=\lambda A^{-1}\alpha$$

因为 $\alpha\neq 0$,故 $\lambda\neq 0$,于是有

$$A^{-1}\alpha=\frac{1}{\lambda}\alpha$$

按特征值定义知 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值.

(2) 由于 $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$,据(1)有

$$\frac{A^*}{|A|}\alpha=\frac{1}{\lambda}\alpha$$

从而得 $A^*\alpha=\frac{|A|}{\lambda}\alpha$. 即 $\frac{|A|}{\lambda}$ 为伴随矩阵 A^* 的特征值.

3 (1998,一(4)题,3分)设 A 为 n 阶矩阵 $|A|\neq 0$,A^* 为 A 的伴随矩阵,E 为 n 阶单位矩阵. 若 A 有特征值 λ,则 $(A^*)^2+E$ 必有特征值_____.

【答案】 $\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2+1$.

【解析】 本题考查相关矩阵特征值之间的关系.

$$A\text{ 有特征值 }\lambda \Rightarrow A^*\text{ 有特征值 }\frac{|A|}{\lambda}$$

$$\Rightarrow (A^*)^2\text{ 有特征值 }\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2$$

$$\Rightarrow (A^*)^2+E\text{ 有特征值 }\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2+1.$$

故应填:$\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2+1$.

4 (1999,一(4)题,3分)设 n 阶矩阵 A 的元素全为 1,则 A 的 n 个特征值是_____.

【答案】 $n,0,0,\cdots,0(n-1\text{ 个})$.

【解析】 因为 $r(A)=1$,所以 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^n-n\lambda^{n-1}$$

因此,A 的 n 个特征值是,$n,0,0,\cdots,0(n-1\text{ 个})$.

注意,若 $r(A)=1$,则

$$|\lambda E-A|=\lambda^n-\sum a_{ii}\lambda^{n-1}$$

5 (1999,十题,8分)设矩阵 $A=\begin{bmatrix}a & -1 & c\\ 5 & b & 3\\ 1-c & 0 & -a\end{bmatrix}$,其行列式 $|A|=-1$,又 A 的伴随矩阵 A^* 有一个特征值 λ_0,属于 λ_0 的一个特征向量为 $\alpha=(-1,-1,1)^T$,求 a,b,c 和 λ_0 的值.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【解】　因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}^*$ 属于特征值 λ_0 的特征向量，即

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha} \tag{1}$$

根据 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 及已知条件 $|\boldsymbol{A}|=-1$，用 $\boldsymbol{A}$ 左乘(1)式两端有

$$-\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$$

即

$$\lambda_0\begin{bmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

由此可得

$$\begin{cases}\lambda_0(-a+1+c)=1 & (2)\\ \lambda_0(-5-b+3)=1 & (3)\\ \lambda_0(-1+c-a)=-1 & (4)\end{cases}$$

(2)－(4)得 $\lambda_0=1$. 将 $\lambda_0=1$ 代入(3)得 $b=-3$，代入(2)得 $a=c$.

由 $|\boldsymbol{A}|=-1$ 和 $a=c$ 有

$$\begin{vmatrix}a&-1&a\\5&-3&3\\1-a&0&-a\end{vmatrix}=a-3=-1$$

故 $a=c=2$. 因此

$$a=2,b=-3,c=2,\lambda_0=1$$

6　(2003，九题，10分) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$，求 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值与特征向量，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为3阶单位矩阵.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【解】　由于

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&-2\\-2&\lambda-3&-2\\-2&-2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-7)$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=7$.

因为 $|\boldsymbol{A}|=\prod\lambda_i=7$，若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\boldsymbol{\alpha}$. 所以，$\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为：7，7，1.

由于 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$，即 $\boldsymbol{A}^*$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，故 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 7，7，1. 从而 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值为 9，9，3.

因为

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$$

按定义可知矩阵 $\boldsymbol{B}$ 属于特征值 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 的特征向量是 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$. 因此 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 属于特征值 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}+2$ 的特征向量是 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$.

由于

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

当 $\lambda=1$ 时，由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，

$$\begin{bmatrix}-2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & -2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

得到属于$\lambda=1$的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

当$\lambda=7$时，由$(7\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，

$$\begin{bmatrix}4 & -2 & -2\\ -2 & 4 & -2\\ -2 & -2 & 4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

得到属于$\lambda=7$的特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

那么

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 0\end{bmatrix},\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{bmatrix},\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

因此，$\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$属于特征值$\lambda=9$的全部特征向量为

$$k_1\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{bmatrix},k_1,k_2\text{是不全为零的任意常数}$$

而$\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$属于特征值$\lambda=3$的全部特征向量为

$$k_3\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix},k_3\text{为非零的任意常数}$$

7 (2008,13题,4分) 设$\boldsymbol{A}$为2阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$为线性无关的2维列向量，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，则$\boldsymbol{A}$的非零特征值为_____.

【答案】 1.

【解析】 根据已知条件本题有两种解法.

(方法一) 用定义，由

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$$

知$\boldsymbol{A}$的特征值为1和0.因此$\boldsymbol{A}$的非零特征值为1.

(方法二) 利用相似，有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{0},2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

可知$\boldsymbol{A}\sim\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，亦可得$\boldsymbol{A}$的特征值1和0，因此$\boldsymbol{A}$的非零特征值为1.

【评注】　要掌握定义法，$A\alpha=\lambda\alpha,\alpha\neq 0$，通过恒等变形推导出特征值、特征向量的信息.若已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，又有

$$A\alpha_1=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3,A\alpha_2=b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+b_3\alpha_3,A\alpha_3=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3$$

的信息一定不要忘记这有相似的背景.

$$\begin{aligned}A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)&=(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)\\&=(a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3,b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+b_3\alpha_3,c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3)\\&=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}\end{aligned}$$

即 $P^{-1}AP=B$，其中 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),B=\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}$.

练习题

1.(1991，数四，4 分) 已知向量 $\alpha=(1,k,1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$$

的逆矩阵 A^{-1} 的特征向量，试求常数 k 的值.

2.(1992，数四，3 分) 矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$ 的非零特征值是_____.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

练习题参考答案

1.【解】　设 λ_0 是 α 所属的特征值，即

$$A^{-1}\alpha=\lambda_0\alpha$$

于是

$$\alpha=\lambda_0A\alpha$$

即

$$\lambda_0\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\k\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\k\\1\end{bmatrix}$$

由此得

$$\begin{cases}\lambda_0(2+k+1)=1\\\lambda_0(1+2k+1)=k\\\lambda_0(1+k+2)=1\end{cases}$$

由

$$\frac{3+k}{2+2k}=\frac{1}{k}$$

解出 $k=-2$ 或 $k=1$.

2.【答案】　4.

【解析】　由矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-4 & \lambda-4 & \lambda-4 & \lambda-4\\ -1 & \lambda-1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-4)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-4)\lambda^3$$

知矩阵 A 的特征值是 $\lambda_1=4,\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$. 故应填:4.

【评注】 若 $r(A)=1$,则 $|\lambda E-A|=\lambda^n-\sum a_{ii}\lambda^{n-1}$,于是矩阵 A 的特征值是 $\lambda_1=\sum a_{ii},\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$,现 A 的秩为 1,$\sum a_{ii}=4$,故知应填:4.

二、相似与相似对角化

试题特点

围绕相似定义 $P^{-1}AP=B$,相似的性质设计试题,或者考查判断是否和对角矩阵相似.

$A\sim\Lambda\Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量

$\Leftrightarrow$ 如 λ 是 A 的 k 重特征值,则 λ 有 k 个线性无关的特征向量.

如 A 有 n 个不同的特征值 $\Rightarrow A\sim\Lambda$.

8 (1988,八题,8 分) 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & x\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & y & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$ 相似,

(1) 求 x 与 y;

(2) 求一个满足 $P^{-1}AP=B$ 的可逆矩阵 P.

【解】 (1) 因为 $A\sim B$,故 $\sum a_{ii}=\sum b_{ii}$ 且 $|A|=|B|$,

$$\begin{cases}2+0+x=2+y+(-1)\\ -2=-2y\end{cases}$$

所以 $x=0,y=1$.

(2) 因为 B 是对角矩阵,知 A 的特征值是:2,1,-1.

对 $\lambda=2$,由 $(2E-A)x=0$ 得特征向量 $\alpha_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$.

对 $\lambda=1$,由 $(E-A)x=0$ 得特征向量 $\alpha_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$.

对 $\lambda=-1$,由 $(-E-A)x=0$ 得特征向量 $\alpha_3=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

那么,令 $P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$,有

$$P^{-1}AP=B$$

9 (1992,九题,7 分) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$,对应的特征向量依次为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{bmatrix}1\\3\\9\end{bmatrix}$,又向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}$.

(1) 将 $\boldsymbol{\beta}$ 用 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性表出;

(2) 求 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}$($n$ 为自然数).

【解】 (1) 设 $\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\xi}_1+x_2\boldsymbol{\xi}_2+x_3\boldsymbol{\xi}_3$,对增广矩阵$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}]$作初等行变换,有

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&1\\1&4&9&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-2\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

解出 $x_3=1,x_2=-2,x_1=2$,故

$$\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\xi}_1-2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3$$

(2) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_i=\lambda_i\boldsymbol{\xi}_i$ 得 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_i=\lambda_i^n\boldsymbol{\xi}_i(i=1,2,3)$. 根据(1) 结论 $\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\xi}_1-2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3$ 有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{\xi}_1-2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3)=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1-2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_3$$

于是

$$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_1-2\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\xi}_3=2\lambda_1^n\boldsymbol{\xi}_1-2\lambda_2^n\boldsymbol{\xi}_2+\lambda_3^n\boldsymbol{\xi}_3$$

$$=2\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}-2\cdot2^n\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}+3^n\begin{bmatrix}1\\3\\9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{bmatrix}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

10 (1997,七(2) 题,6 分) 已知 $\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{bmatrix}$ 的一个特征向量.

(1) 试确定参数 a,b 及特征向量 $\boldsymbol{\xi}$ 所对应的特征值;

(2) 问 $\boldsymbol{A}$ 能否相似于对角阵?说明理由.

【解】 (1) 设 $\boldsymbol{\xi}$ 是属于特征值 λ_0 的特征向量,即

$$\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=\lambda_0\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

即

$$\begin{cases}2-1-2=\lambda_0\\5+a-3=\lambda_0\\-1+b+2=-\lambda_0\end{cases}$$

解得 $\lambda_0=-1,a=-3,b=0$.

(2) 因为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-2\\-5&\lambda+3&-3\\1&0&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3$$

知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$.

由于

$$r(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r\begin{bmatrix}-3&1&-2\\-5&2&-3\\1&0&1\end{bmatrix}=2$$

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

从而 $\lambda=-1$ 只有一个线性无关的特征向量，故 $\boldsymbol{A}$ 不能相似对角化.

11 (2000，十一题，8 分) 某试验性生产线每年一月份进行熟练工与非熟练工的人数统计，然后将 $\frac{1}{6}$ 熟练工支援其他生产部分，其缺额由招收新的非熟练工补齐. 新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有 $\frac{2}{5}$ 成为熟练工. 设第 n 年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为 x_n 和 y_n，记成向量 $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$.

(1) 求 $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ 的关系式并写成矩阵形式：$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$；

(2) 验证 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的两个线性无关的特征向量，并求出相应的特征值；

(3) 当 $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 时，求 $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix}$.

【解】 (1) 按题意有 $\begin{cases} x_{n+1}=\frac{5}{6}x_n+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}x_n+y_n\right) \\ y_{n+1}=\frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}x_n+y_n\right) \end{cases}$ 化简得 $\begin{cases} x_{n+1}=\frac{9}{10}x_n+\frac{2}{5}y_n, \\ y_{n+1}=\frac{1}{10}x_n+\frac{3}{5}y_n. \end{cases}$

对其用矩阵表示即为

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

于是 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$.

(2) 令 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2]=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，则由 $|\boldsymbol{P}|=5\neq 0$ 知，$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 线性无关.

因 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}=\boldsymbol{\eta}_1$，故 $\boldsymbol{\eta}_1$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，且相应的特征值 $\lambda_1=1$.

因 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}_2$，故 $\boldsymbol{\eta}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，且相应的特征值 $\lambda_2=\frac{1}{2}$.

(3) $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}=\boldsymbol{A}^2\begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix}=\cdots=\boldsymbol{A}^{n-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}=\boldsymbol{A}^n\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$，有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

于是 $$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}^n\boldsymbol{P}^{-1}$$

又 $$\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 4\end{bmatrix}$$

故 $$\boldsymbol{A}^n=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4+\left(\frac{1}{2}\right)^n & 4-4\left(\frac{1}{2}\right)^n\\ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n & 1+4\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{bmatrix}$$

因此 $$\begin{bmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}^n\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}8-3\left(\frac{1}{2}\right)^n\\ 2+3\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{bmatrix}.$$

12 (2001，十题，8 分) 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 3 维向量 $\boldsymbol{x}$，使得向量组 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$ 线性无关，且满足 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{Ax}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}$.

(1) 记 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{x},\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}]$，求 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}$；

(2) 计算行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$.

【分析】 本题 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，要通过 $\boldsymbol{P}$ 来求 $\boldsymbol{B}$. 由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 没有具体给出，因而应从定义出发. 注意，若 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$，则 $\boldsymbol{P}$ 的列向量是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，而 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 时，$\boldsymbol{P}$ 的列向量不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，这一点不要混淆.

微信公众号【打生考研】(ID: djky66)

【解】 (1)(方法一) 由于 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$，即

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{x},\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}]=[\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}]=[\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x},3\boldsymbol{Ax}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}]$$

$$=[\boldsymbol{x},\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}]\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

所以 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}$.

(方法二) 由于 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{x},\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}]$ 可逆，那么 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}$，即 $\boldsymbol{P}^{-1}[\boldsymbol{x},\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}]=\boldsymbol{E}$.

所以 $$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Ax}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

于是 $$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{-1}[\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x}]$$

$$=\boldsymbol{P}^{-1}[\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x},3\boldsymbol{Ax}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}]$$

$$=[\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x},\boldsymbol{P}^{-1}(3\boldsymbol{Ax}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x})]$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

(2) 由(1)知 $A\sim B$,那么 $A+E\sim B+E$,从而

$$|A+E|=|B+E|=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&3\\0&1&-1\end{vmatrix}=-4$$

13 (2002,十题,8分) 设 A,B 为同阶方阵.

(1) 如果 A,B 相似,试证 A,B 的特征多项式相等;

(2) 举一个2阶方阵的例子说明(1)的逆命题不成立;

(3) 当 A,B 均为实对称矩阵时,试证(1)的逆命题成立.

【证明】 (1) 若 A,B 相似,那么存在可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP=B$,故

$$\begin{aligned}|\lambda E-B|&=|\lambda E-P^{-1}AP|=|P^{-1}\lambda EP-P^{-1}AP|\\&=|P^{-1}(\lambda E-A)P|=|P^{-1}||\lambda E-A||P|\\&=|\lambda E-A|\end{aligned}$$

(2) 令 $A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$,那么

$$|\lambda E-A|=\lambda^2=|\lambda E-B|$$

但 A,B 不相似. 否则,存在可逆矩阵 P,使

$$P^{-1}AP=B=O$$

从而 $A=POP^{-1}=O$,矛盾,亦可从 $r(A)=1,r(B)=0$ 知 A 与 B 不相似.

(3) 由 A,B 均为实对称矩阵知,A,B 均相似于对角阵. 若 A,B 的特征多项式相等,记特征多项式的根为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$,则有

$$A\text{ 相似于}\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix},B\text{ 也相似于}\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}$$

即存在可逆矩阵 P,Q 使

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}=Q^{-1}BQ$$

于是 $(PQ^{-1})^{-1}A(PQ^{-1})=B$.

由 PQ^{-1} 为可逆矩阵知,A 与 B 相似.

14 (2004,21题,9分) 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&a&5\end{bmatrix}$ 的特征方程有一个二重根,求 a 的值,并讨论 A 是否可相似对角化.

【解】 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&3\\1&\lambda-4&3\\-1&-a&\lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&2-\lambda&0\\1&\lambda-4&3\\-1&-a&\lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a)$$

微信公众号:[考研数学](ID: djky66)

若 $\lambda=2$ 是特征方程的二重根，则有 $2^2-16+18+3a=0$，解得 $a=-2$.

当 $a=-2$ 时，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2,2,6，矩阵 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&3\\1&-2&3\\-1&2&-3\end{bmatrix}$ 的秩为 1，故 $\lambda=2$ 对应的线性无关的特征向量有两个，从而 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化.

若 $\lambda=2$ 不是特征方程的二重根，则 $\lambda^2-8\lambda+18+3a$ 为完全平方，从而 $18+3a=16$，解得 $a=-\frac{2}{3}$.

当 $a=-\frac{2}{3}$ 时，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2,4,4，矩阵 $4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&-2&3\\1&0&3\\-1&\frac{2}{3}&-1\end{bmatrix}$ 的秩为 2，故 $\lambda=4$ 对应的线性无关的特征向量只有一个，从而 $\boldsymbol{A}$ 不可相似对角化.

练习题

1.(1997，数四，9 分)设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，且

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{bmatrix}$$

(1) 求 a,b 的值.

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

2.(1999，数四，7 分)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&2&-2\\-k&-1&k\\4&2&-3\end{bmatrix}$，问当 k 为何值时，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵？并求出 $\boldsymbol{P}$ 和相应的对角矩阵.

练习题参考答案

1.【分析】 $\boldsymbol{B}$ 是对角矩阵，那么 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似时的矩阵 $\boldsymbol{P}$ 就是由 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量所构成，求矩阵 $\boldsymbol{P}$ 也就是求 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

【解】 (1) 由于 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，故

$$\begin{cases}1+4+a=2+2+b\\6(a-1)=|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|=4b\end{cases}$$

解出 $a=5,b=6$.

(2) 因为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值，故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=6$.

当 $\lambda=2$ 时，由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，

$$\begin{bmatrix}1&1&-1\\-2&-2&2\\3&3&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得到基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$$

即为矩阵 A 的属于特征值 $\lambda=2$ 的线性无关的特征向量.

当 $\lambda=6$ 时,由 $(6E-A)x=0$,

$$\begin{bmatrix}5&1&-1\\-2&2&2\\3&3&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&3&2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

其基础解系为

$$\alpha_3=(1,-2,3)^{\mathrm{T}}$$

即为矩阵 A 属于特征值 $\lambda=6$ 的特征向量.

那么,令

$$P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{bmatrix}$$

则有 $P^{-1}AP=B$.

2.【分析】 因为 $A\sim\Lambda\Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量,而对于 $P^{-1}AP=\Lambda$,其中 Λ 的对角线上的元素是 A 的全部特征值,P 的每一列是矩阵 A 的对应特征值的线性无关的特征向量,因此,本题应当从矩阵 A 的特征值、特征向量入手,分析 k 的取值对相似对角化的影响?

【解】 由矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&2\\k&\lambda+1&-k\\-4&-2&\lambda+3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&2\\0&\lambda+1&-k\\\lambda-1&-2&\lambda+3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&2\\0&\lambda+1&-k\\0&0&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+1)^2$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

得知矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=-1$.

由于 $A\sim\Lambda$,故 $\lambda=-1$ 时,矩阵 A 必有 2 个线性无关的特征向量,因此秩 $r(-E-A)=1$. 由

$$-E-A=\begin{bmatrix}-4&-2&2\\k&0&-k\\-4&-2&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-4&-2&2\\k&0&-k\\0&0&0\end{bmatrix}$$

知,$k=0$.

当 $\lambda=1$ 时,由 $(E-A)x=0$,

$$\begin{bmatrix}-2&-2&2\\0&2&0\\-4&-2&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得到矩阵 A 属于特征值 $\lambda=1$ 的特征向量 $\alpha_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda=-1$ 时,由 $(-E-A)x=0$,

$$\begin{bmatrix}-4&-2&2\\0&0&0\\-4&-2&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得到矩阵 A 属于特征值 $\lambda=-1$ 的线性无关的特征向量 $\alpha_2=(-1,2,0)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$.

那么,令

$$P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&2&1\\1&0&1\end{bmatrix}$$

有 $$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{bmatrix}$$

【评注】 本题得分率不高，人均仅 2.2 分. 有的同学是不会计算含有参数 k 的特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$，有的同学不知用什么方法来确定 k 的取值. 其实，早在 94 年就出现了用相似对角化理论，利用秩来确定参数的思想方法.

三、实对称矩阵

试题特点

实对称矩阵有几个重要的定理，例如：实对称矩阵一定和对角矩阵相似（不管特征值有没有重根）；实对称矩阵特征值不同时特征向量必相互正交（由此有内积为 0，从而可构造齐次方程组求特征向量）；实对称矩阵可以用正交矩阵来相似对角化. 试题就是围绕这些定理来设计的. 考研的重点，特别要复习好综合性强的解答题.

15 (1995，八题，7 分) 设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$，对应于 λ_1 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{A}$.

【解】 设属于 $\lambda=1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，由于实对称矩阵的不同特征值所对应的特征向量相互正交，故

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_1=x_2+x_3=0$$

从而 $$\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_3=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$$

是属于 $\lambda=1$ 的线性无关的特征向量. 于是

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3]=[-\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3]$$

$$\boldsymbol{A}=[-\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3][\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3]^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\-1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{bmatrix}$$

16 (2006，21 题，9 分) 设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3，向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的两个解.

（Ⅰ）求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量；

（Ⅱ）求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$.

【分析】 本题矩阵 $\boldsymbol{A}$ 未知，而（Ⅰ）要求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值、特征向量. 因而要有用定义法分析、推导的构思.

【解】 （Ⅰ）因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3，即有 $\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\\3\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，所以 3 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky68)

特征值，$\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 属于 3 的特征向量.

又 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{\alpha}_2$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于 $\lambda=0$ 的两个线性无关的特征向量. 因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 3,0,0.

$\lambda=3$ 的特征向量为 $k(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，其中 $k\neq 0$ 为常数；

$\lambda=0$ 的特征向量为 $k_1(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}+k_2(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$，其中 k_1,k_2 是不全为 0 的常数.

（Ⅱ）因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 不正交，故要 Schmidt 正交化.

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}-\frac{-3}{6}\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

单位化

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

那么令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$，得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 3\end{bmatrix}$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【评注】 本题也可先求出矩阵 $\boldsymbol{A}$，然后来完成（Ⅰ）和（Ⅱ），这样工作量会大一些，

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{bmatrix}$，由题设有 $\begin{cases}a_{11}+a_{12}+a_{13}=3,\\ a_{12}+a_{22}+a_{23}=3,\\ a_{13}+a_{23}+a_{33}=3,\end{cases}$

又由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$ 有

$$\begin{cases}-a_{11}+2a_{12}-a_{13}=0,\\ -a_{12}+2a_{22}-a_{23}=0,\\ -a_{13}+2a_{23}-a_{33}=0\end{cases}\quad\text{和}\quad\begin{cases}-a_{12}+a_{13}=0,\\ -a_{22}+a_{23}=0,\\ -a_{23}+a_{33}=0,\end{cases}$$

联立这九个方程可得

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

进而由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\boldsymbol{0}\cdots$ 可完成本题.

当特征值有重根时，要小心此时的特征向量垂直吗？是否有 Schmidt 正交化的考点？

17（2007，22 题，11 分）设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1 的一个特征向量，记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

（Ⅰ）验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量，并求 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值与特征向量；

（Ⅱ）求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

【解】（Ⅰ）由 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 知 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}=\lambda^n\boldsymbol{\alpha}$. 那么

$$\boldsymbol{B\alpha}_1=(\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{A}^5\boldsymbol{\alpha}_1-4\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_1=(\lambda_1^5-4\lambda_1^3+1)\boldsymbol{\alpha}_1=-2\boldsymbol{\alpha}_1$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 属于特征值 $\mu_1=-2$ 的特征向量.

类似地，若 $\boldsymbol{A\alpha}_2=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{A\alpha}_3=\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3$，有

$$\boldsymbol{B\alpha}_2=(\lambda_2^5-4\lambda_2^3+1)\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{B\alpha}_3=(\lambda_3^5-4\lambda_3^3+1)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_3$$

因此，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\mu_1=-2,\mu_2=\mu_3=1$.

由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵知矩阵 $\boldsymbol{B}$ 也是对称矩阵，设矩阵 $\boldsymbol{B}$ 属于特征值 $\mu=1$ 的特征向量是 $\boldsymbol{\beta}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，那么因为实对称矩阵特征值不同特征向量相互正交，有

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=x_1-x_2+x_3=0$$

所以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 属于特征值 $\mu=1$ 的线性无关的特征向量是 $\boldsymbol{\beta}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

因而，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 属于特征值 $\mu_1=-2$ 的特征向量是 $k_1(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，其中 k_1 是不为 0 的任意常数.

矩阵 $\boldsymbol{B}$ 属于特征值 $\mu=1$ 的特征向量是 $k_2(1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_3(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，其中 k_2,k_3 是不全为 0 的任意常数.

（Ⅱ）由 $\boldsymbol{B\alpha}_1=-2\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{B\beta}_2=\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{B\beta}_3=\boldsymbol{\beta}_3$ 有 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(-2\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$. 那么

$$\boldsymbol{B}=(-2\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}-2&1&-1\\2&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-2&1&-1\\2&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&2&1\\-1&1&2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{bmatrix}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【评注】本题求矩阵 $\boldsymbol{B}$，亦可用 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{\Lambda}$ 或 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{BQ}=\boldsymbol{\Lambda}$ 的方法来实现，例如，令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$ 有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\cdots\cdots$. 作为复习，这里的计算建议同学动手具体做做.

要想到用正交内积为 0 来求特征向量.

练习题

(2004，数四，13 分) 设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，$\lambda_1=\lambda_2=6$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,2,-3)^{\mathrm{T}}$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 6 的特征向量.

（Ⅰ）求 $\boldsymbol{A}$ 的另一特征值和对应的特征向量；

（Ⅱ）求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

练习题参考答案

【解】（Ⅰ）由秩 $r(\boldsymbol{A})=2$，知 $|\boldsymbol{A}|=0$，所以 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的另一特征值.

因为 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 是实对称矩阵 A 的二重特征值，故 A 的属于特征值 $\lambda=6$ 的线性无关的特征向量有 2 个. 因此 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 必线性相关，而 α_1,α_2 是 A 的属于特征值 $\lambda=6$ 的线性无关的特征向量.

设 $\lambda=0$ 所对应的特征向量为 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，由于实对称矩阵不同特征值的特征向量相互正交，故有

$$\begin{cases}\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha=x_1+x_2=0\\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha=2x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$$

解此方程组得基础解系 $\alpha=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$，那么矩阵 A 属于特征值 $\lambda=0$ 的特征向量为 $k(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$，k 是不为零的任意常数.

(Ⅱ) 令 $P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha]$，则

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

所以

$$A=P\begin{bmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&0\end{bmatrix}P^{-1}$$

又

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

故

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&0\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0&3&-3\\1&-1&2\\-1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&2&2\\2&4&-2\\2&-2&4\end{bmatrix}$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

【评注】 如果 λ 是 A 的 k 重特征值，那么 λ 至多有 k 个线性无关的特征向量，而作为实对称矩阵，则 k 重特征值必有 k 个线性无关的特征向量. 上述定理保证了本题中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 一定线性相关.

在矩阵 A 的求解上，亦可用矩阵方程来处理. 由 $A\alpha_1=6\alpha_1,A\alpha_2=6\alpha_2,A\alpha=0\alpha$，有

$$A[\alpha_1,\alpha_2,\alpha]=[6\alpha_1,6\alpha_2,0]$$

从而

$$A=[6\alpha_1,6\alpha_2,0][\alpha_1,\alpha_2,\alpha]^{-1}$$

第六章　二次型

本章导读

二次型实际上是特征值的几何应用，复习二次型就一定要搞清它与特征值、特征向量之间的内在联系.

考点主要有三个：一个是二次型化标准形的正、反两方面的问题，依托的是特征值、特征向量相似对角化的理论与方法；一个是二次型的正定性，既有正定的判定，又有正定性质的运用，也都会涉及特征值；第三是合同，它是由二次型经坐标变换引申出来的概念.

数学一中还常有二次型与二次曲面相沟通的试题.

一、二次型概念与标准形

试题特点

用正交变换化二次型为标准形，求其标准形就是求二次型矩阵 A 的特征值，求坐标变换就是求 A 的特征向量.

若求二次型的表达式就是求矩阵 A，这样的试题一般都是实对称矩阵试题的翻版.

1 (1990，八题，8 分) 求一个正交变换化二次型

$$f = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

为标准形.

【解】　二次型的矩阵是

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

其特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda - 4 & 4 \\ -2 & 4 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 9)$$

所以 A 的特征值是 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 9$.

对于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$，由 $(0E - A)x = 0$，即

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 4 \\ -2 & 4 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

得到基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,0,1)^{\mathrm{T}}$，即为属于特征值 $\lambda=0$ 的特征向量.

对于 $\lambda_3=9$，由 $(9\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{bmatrix}8&2&-2\\2&5&4\\-2&4&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&5&4\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得到基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-2,2)^{\mathrm{T}}$.

由于不同特征值的特征向量已经正交，只需对 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交化.

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,0)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)},\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{5}(-2,4,5)^{\mathrm{T}}$$

把 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化，有

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3\sqrt{5}}\\\frac{4}{3\sqrt{5}}\\\frac{5}{3\sqrt{5}}\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

那么经正交变换

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}&-\frac{2}{3\sqrt{5}}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{4}{3\sqrt{5}}&-\frac{2}{3}\\0&\frac{5}{3\sqrt{5}}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$$

二次型 f 化为标准形

$$f=9y_3^2$$

2 (1993，七题，8 分) 已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3(a>0)$$

通过正交变换化成标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求参数 a 及所用的正交变换矩阵.

【解】 二次型 f 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{bmatrix}$$

它的特征方程是

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-3&-a\\0&-a&\lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda+9-a^2)=0$$

f 经正交变换化为标准形，那么标准形中平方项的系数 1,2,5 就是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

把 $\lambda=1$ 代入特征方程，得

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

$$a^2-4=0\Rightarrow a=\pm 2$$

因 $a>0$，故知 $a=2$.

这时
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{bmatrix}$$

对 $\lambda_1=1$，由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，

$$\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&-2\\0&-2&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

解得 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

对 $\lambda_2=2$，由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&-2\\0&-2&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

解得 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$.

对 $\lambda_3=5$，由 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，

$$\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&-2\\0&-2&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

解得 $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$.

将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化，得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

故所用的正交变换矩阵为

$$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3]=\begin{bmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

【评注】 利用二次型矩阵与标准形矩阵(在正交变换下)相似，即

$$\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&5\end{bmatrix}$$

从而 $|\boldsymbol{A}|=10$，求 a，这样解更简捷.

3 (1996，九题，8 分) 已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$$

的秩为 2.

(1) 求参数 c 及此二次型对应矩阵的特征值;

(2) 指出方程 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种二次曲面.

【解】 (1) 二次型矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{bmatrix}$$

因为二次型秩 $r(f)=r(\boldsymbol{A})=2$. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有 2 阶子式非零,故 $r(\boldsymbol{A})=2\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|=0$.

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{vmatrix}=24(c-3)$$

解出 $c=3$. 再由 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-5&1&-3\\1&\lambda-5&3\\-3&3&\lambda-3\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$$

求得二次型矩阵的特征值为:0,4,9.

(2) 因为二次型经正交变换可化 $4y_2^2+9y_3^2$,故 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 即

$$4y_2^2+9y_3^2=1$$

表示椭圆柱面.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

4 (1998,十题,6 分) 已知二次曲面方程

$$x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$$

可以经过正交变换

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{bmatrix}$$

化为椭圆柱面方程 $\eta^2+4\zeta^2=4$,求 a,b 的值和正交矩阵 $\boldsymbol{P}$.

【解】 经正交变换化二次型为标准形,二次型矩阵与标准形矩阵既合同又相似. 于是

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&b&1\\b&a&1\\1&1&1\end{bmatrix}\sim\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&4\end{bmatrix}$$

从而

$$\begin{cases}1+a+1=0+1+4\\|\boldsymbol{A}|=(b-1)^2=|\boldsymbol{B}|=0\end{cases}$$

解出 $a=3,b=1$.

由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 解出 $\lambda=0$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$.

由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 解出 $\lambda=1$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

由 $(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 解出 $\lambda=4$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$.

特征值不同特征向量已正交,将其单位化有

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^{\mathrm{T}}$$

那么 $$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$$

为所用正交矩阵.

5 (2002,一(4)题,3分)已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 可化成标准形 $f=6y_1^2$,则 $a=$_____.

【答案】 2.

【解析】 因为二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经正交变换化为标准形时,标准形中平方项的系数就是二次型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,所以 6,0,0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

又因 $\sum a_{ii}=\sum\lambda_i$,故

$$a+a+a=6+0+0$$

从而知 $a=2$.

由于经正交变换化二次型为标准形时,二次型矩阵与标准形矩阵不仅合同而且还相似,亦可由

$$\begin{bmatrix}a & 2 & 2\\ 2 & a & 2\\ 2 & 2 & a\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}6 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{bmatrix}$$

来求 a.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

6 (2005,20题,9分)已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$,把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化成标准形;

(Ⅲ)求方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

【解】 (Ⅰ)二次型矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$,由于二次型 f 的秩为 2,

即 $r(\boldsymbol{A})=2$,所以有 $|\boldsymbol{A}|=2\begin{vmatrix}1-a & 1+a\\ 1+a & 1-a\end{vmatrix}=-8a=0$,得 $a=0$.

(Ⅱ)当 $a=0$ 时,由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2=0$,

知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 2,2,0.

对 $\lambda=2$,由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$,

得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

对 $\lambda=0$，由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，$\begin{bmatrix}-1&-1&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，

得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$.

由于特征向量已经两两正交，只需单位化，于是有

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\gamma}_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\end{bmatrix}$，那么，经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 有

$$f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+2y_2^2$$

（Ⅲ）（方法一） 由（Ⅱ）知，在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下，$f(x_1,x_2,x_3)=0$ 化成 $2y_1^2+2y_2^2=0$，解之得 $y_1=0,y_2=0,y_3=t$（t 为任意实数），从而

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}0\\0\\t\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)\begin{bmatrix}0\\0\\t\end{bmatrix}=t\boldsymbol{\gamma}_3=t(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$$

即方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解是 $k(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$，k 为任意实数.

（方法二） 由于 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2=(x_1+x_2)^2+2x_3^2=0$，所以

$$\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_3=0\end{cases}$$

其通解为 $\boldsymbol{x}=k(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，其中 k 为任意常数.

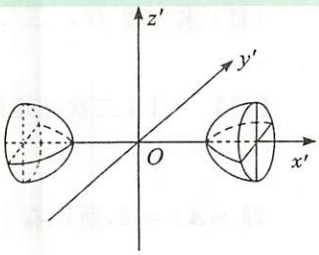
微信公众号【考研】(ID: djky66)

【评注】 本题的前两问是常规题，也是常见的，只要按步骤处理即可，要注意对（Ⅲ）的理解.

7 （2008，6题，4分）设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶实对称矩阵，如果二次曲面方程

$$(x,y,z)\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=1$$

在正交变换下的标准方程的图形如图所示，则 $\boldsymbol{A}$ 的正特征值的个数为



(A)0. (B)1.

(C)2. (D)3.

【答案】 B.

【解析】 本题把线性代数与解析几何的内容有机的联系起来，首先要明白所给图形是什么曲面？其标准方程是什么？

双叶双曲面，标准方程是：$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=1$，

其次，二次型经正交变换化为标准形时，其平方项的系数就是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，所以应选(B).

【评注】　很多考生选择(C)，是不是把标准方程记成了

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

而忽略了本题的条件是 $x^{\mathrm{T}}Ax=1$.

二、二次型的正定

试题特点

围绕正定的定义“$\forall x\neq 0$ 必有 $x^{\mathrm{T}}Ax>0$”设计的试题一般难度较大，用特征值、顺序主子式的考题是容易的.

复习时，注意考定义法的题

8 (1991，八题，6 分) 设 A 是 n 阶正定矩阵，E 是 n 阶单位矩阵，证明 $A+E$ 的行列式大于 1.

【说明】　本题解答请参看第 212 页第 4 题，本题考查的是正定矩阵的性质：特征值全大于 0，以及 $|A|=\prod\lambda_i$，当然也可用实对称矩阵必可相似对角化等.

9 (1999，十一题，6 分) 设 A 为 m 阶实对称矩阵且正定，B 为 $m\times n$ 实矩阵，B^{T} 为 B 的转置矩阵，试证：$B^{\mathrm{T}}AB$ 为正定矩阵的充分必要条件是 B 的秩 $r(B)=n$.

【证明】　必要性：设 $B^{\mathrm{T}}AB$ 为正定矩阵，按定义 $\forall x\neq 0$，恒有 $x^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}AB)x>0$.

即 $\forall x\neq 0$，恒有 $(Bx)^{\mathrm{T}}A(Bx)>0$. 即 $\forall x\neq 0$，恒有 $Bx\neq 0$.

因此，齐次线性方程组 $Bx=0$ 只有零解，从而 $r(B)=n$.

充分性：因 $(B^{\mathrm{T}}AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}AB$，知 $B^{\mathrm{T}}AB$ 为实对称矩阵.

若 $r(B)=n$，则齐次方程组 $Bx=0$ 只有零解，那么 $\forall x\neq 0$ 必有 $Bx\neq 0$.

又 A 为正定矩阵，所以对于 $Bx\neq 0$. 恒有

$$(Bx)^{\mathrm{T}}A(Bx)>0$$

即当 $x\neq 0$ 时，$x^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}AB)x>0$，故 $B^{\mathrm{T}}AB$ 为正定矩阵.

练习题

1. (1997，数三，3 分) 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 是正定的，则 t 的取值范围是_____.

2. (1998，数三，7 分) 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，矩阵 $B=(kE+A)^2$，其中 k 为实数，E 为单位矩阵. 求对角矩阵 Λ，使 B 与 Λ 相似，并求 k 为何值时，B 为正定矩阵.

练习题参考答案

1.【答案】　$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$.

【解析】 二次型 f 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & \frac{t}{2}\\ 0 & \frac{t}{2} & 1\end{bmatrix}$$

因为 f 正定 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的顺序主子式全大于零. 又

$$\Delta_1=2,\Delta_2=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1,\Delta_3=|\boldsymbol{A}|=1-\frac{1}{2}t^2$$

故 f 正定 $\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}t^2>0$,即 $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$.

【评注】 本题若用配方法,有

$$\begin{aligned}f&=2\left(x_1+\frac{1}{2}x_2\right)^2+\frac{1}{2}(x_2+tx_3)^2+\left(1-\frac{1}{2}t^2\right)x_3^2\\&=2y_1^2+\frac{1}{2}y_2^2+\left(1-\frac{1}{2}t^2\right)y_3^2\end{aligned}$$

因此,f 正定 $\Leftrightarrow p=3\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}t^2>0$.

2.【分析】 由于 $\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵,$\boldsymbol{B}$ 必可相似对角化,而对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 即由 $\boldsymbol{B}$ 的特征值组成,只要求出 $\boldsymbol{B}$ 的特征值即知 $\boldsymbol{A}$,又因正定的充分必要条件是特征值全大于 0,k 的值亦可求出.

【解】 由于 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,有

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=[(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^2]^{\mathrm{T}}=[(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}]^2=(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^2=\boldsymbol{B}$$

即 $\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵,故 $\boldsymbol{B}$ 必可相似对角化.

由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2$$

可得到 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0$.

那么,$k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $k+2,k+2,k$,而 $(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^2$ 的特征值是 $(k+2)^2,(k+2)^2,k^2$.

故

$$\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}(k+2)^2 & & \\ & (k+2)^2 & \\ & & k^2\end{bmatrix}$$

因为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 正定的充分必要条件是特征值全大于 0,可见当 $k\neq -2$ 且 $k\neq 0$ 时,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 正定.

三、合同矩阵

试题特点

不是重点,填空、选择为主.

$$\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}\Leftrightarrow p_{\boldsymbol{A}}=p_{\boldsymbol{B}},q_{\boldsymbol{A}}=q_{\boldsymbol{B}}$$

通过什么来确定正、负惯性指数?特征值!!!有时也可用配方法.

注意相似与合同的联系和区别.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

10 (2001,二(4)题,3分) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$

(A) 合同且相似.　　(B) 合同但不相似.

(C) 不合同但相似.　　(D) 不合同且不相似.

【答案】 A.

【解析】 由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^4-4\lambda^3=0$,知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 4,0,0,0. 又因 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,$\boldsymbol{A}$ 必能相似对角化,所以 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相似.

作为实对称矩阵,当 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 时,知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值,从而二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 有相同的正负惯性指数. 因此 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同.

所以本题应当选(A).

注意:实对称矩阵合同时,它们不一定相似,但相似时一定合同. 例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\text{与}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}$$

它们的特征值不同,故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不相似,但它们的正惯性指数均为 2,负惯性指数均为 0. 所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同.

11 (2007,8题,4分) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$

(A) 合同且相似.　　(B) 合同,但不相似.

(C) 不合同,但相似.　　(D) 既不合同,也不相似.

【答案】 B.

【解析】 根据相似的必要条件:$\sum a_{ii}=\sum b_{ii}$,易见 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 肯定不相似,由此可排除(A)与(C). 而合同的充分必要条件是有相同的正惯性指数、负惯性指数. 为此可以用特征值加以判断. 由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&1\\1&\lambda-2&1\\1&1&\lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&\lambda&\lambda\\1&\lambda-2&1\\1&1&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)^2$$

知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 3,3,0. 故二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的正惯性指数 $p=2$,负惯性指数 $q=0$. 而二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 的正惯性指数亦为 $p=2$,负惯性指数 $q=0$,所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同,故应选(B).

【评注】 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似,则 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 必合同,(因为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}\Rightarrow\lambda_A=\lambda_B\Rightarrow p_A=p_B,q_A=q_B\Rightarrow\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$) 但合同不一定相似,一般情况通过特征值来判断合同是方便的.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

练习题

1. (1997,数三,3分) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶可逆矩阵,则

(A) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.　　(B) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

(C) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$,使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$.　　(D) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

2. (2001,数三,8分) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵,秩$(\boldsymbol{A})=n$,A_{ij} 是 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式($i,j=$

$1,2,\cdots,n$). 二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|A|}x_ix_j.$$

(1) 记 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,把 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 写成矩阵形式,并证明二次型 $f(x)$ 的矩阵为 A^{-1};

(2) 二次型 $g(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 与 $f(x)$ 的规范形是否相同?说明理由.

练习题参考答案

1.【答案】 D.

【解析】 矩阵乘法没有交换律,故(A) 不正确.

两个可逆矩阵不一定相似,因为特征值可以不一样. 故(B) 不正确.

两个可逆矩阵所对应的二次型的正、负惯性指数可以不同,因而不一定合同. 例如

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\text{与}B=\begin{bmatrix}-1&0\\0&3\end{bmatrix}$$

既不相似也不合同.

A 与 B 等价,即 A 经初等变换可得到 B,即有初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,Q_1,Q_2,\cdots$,使

$$P_s\cdots P_2P_1AQ_1Q_2\cdots Q_t=B$$

亦即有可逆矩阵 P 和 Q 使 $PAQ=B$.

另一方面,A 与 B 等价 $\Leftrightarrow r(A)=r(B)$,从而知(D) 正确. 故应选(D).

2.【分析】 如果 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$,其中 A 是实对称矩阵,那么 $x^{\mathrm{T}}Ax$ 就是二次型 $f(x)$ 的矩阵表示,为此应读出双和号的含义. 两个二次型如果其正负惯性指数相同,它们的规范形就一样,反之亦然. 而根据惯性定理,经坐标变换二次型的正负惯性指数不变,因而规范形相同.

【解】 由于

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|A|}x_ix_j$$

$$=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{n1}&A_{n2}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

因为 $r(A)=n$,知 A 可逆,又因 A 是实对称的,有

$$(A^{-1})^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^{-1}=A^{-1}$$

得知 $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$ 是实对称矩阵,于是 A^* 是对称的,故二次型 $f(x)$ 的矩阵是 A^{-1}.

(2) 经坐标变换 $x=A^{-1}y$,有

$$g(x)=x^{\mathrm{T}}Ax=(A^{-1}y)^{\mathrm{T}}A(A^{-1}y)$$

$$=y^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}}y=y^{\mathrm{T}}A^{-1}y=f(y)$$

即 $g(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的规范形.

微信公众号:顶尖考研 (ID:dijk966)

第三部分　概率论与数理统计

第一章　随机事件和概率

本章导读

本章是概率论与数理统计的基础，近几年单独出本章的考题较少，平均 2 ～ 3 年一个小题，大多作为基本知识点出现在以后的各章考题中. 应该将本章中重点的基本概念、基本理论和基本方法理解透彻和熟练掌握.

试题特点

本章的考题大多是选择题或填空题，考核重点有事件的关系和运算，概率的性质，概率的五大公式(加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式以及贝叶斯公式)，古典概型和伯努利概型.

一部分考生对古典概型中的难题感到困难，其实考试大纲对古典概型和几何概型的要求是只要会计算一般难度的题型就可以，因此不必刻意去做各种复杂的题型.

本章的选择题或填空题一般会综合 3 ～ 4 个考点，计算量不太大.

考题详析

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

一、事件关系、概率性质和五大公式

1 (1987，十(2)题，2 分) 三个箱子，第一个箱子有 4 个黑球 1 个白球，第二个箱子中有 3 个黑球 3 个白球，第三个箱子中有 3 个黑球 5 个白球. 现随机地取一个箱子，再从这个箱子中取出 1 个球，这个球为白球的概率等于_____. 已知取出的球是白球，此球属于第二个箱子的概率为_____.

【答案】 $\frac{53}{120}$；$\frac{20}{53}$.

【解析】 设事件 A—— 取出球为白球，事件 B_i—— 球取自第 i 箱，$i=1,2,3$.

根据全概率公式：$P(A)=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)+P(B_3)P(A\mid B_3)$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{8}=\frac{8+20+25}{120}=\frac{53}{120};$$

根据贝叶斯公式：$P(B_2 \mid A)=\dfrac{P(B_2)P(A \mid B_2)}{\sum\limits_{i=1}^{3}P(B_i)P(A \mid B_i)}=\dfrac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{53}{120}}=\dfrac{20}{53}$.

2 (1989，十(1)题，2分) 已知随机事件 A 的概率 $P(A)=0.5$，随机事件 B 的概率 $P(B)=0.6$ 及条件概率 $P(B \mid A)=0.8$，则和事件 $A \cup B$ 的概率 $P(A \cup B)=$ _____.

【答案】 0.7.

【解析】 $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B \mid A)$

$=0.5+0.6-0.5\times0.8=0.7$.

3 (1989，十(2)题，2分) 甲、乙两人独立地对同一目标射击一次，其命中率分别为 0.6 和 0.5，现已知目标被命中，则它是甲射中的概率为_____.

【答案】 0.75.

【解析】 设事件 A—— 甲射中，事件 B—— 乙射中. 显然 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.5$.

目标被命中即事件 $A \cup B$ 发生，已知目标被命中的条件下甲射中的概率应为

$$P(A \mid A \cup B)=\frac{P(A(A \cup B))}{P(A \cup B)}=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(AB)}$$

$$=\frac{0.6}{0.6+0.5-P(A)P(B)}=\frac{0.6}{0.8}=0.75.$$

4 (1990，十(2)题，2分) 设随机事件 A，B 及其和事件 $A \cup B$ 的概率分别是 0.4，0.3 和 0.6，若 $\overline{B}$ 表示 B 的对立事件，那么积事件 $A\overline{B}$ 的概率 $P(A\overline{B})=$ _____.

【答案】 0.3.

【解析】 (方法一) $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，即 $0.6=0.4+0.3-P(AB)$，$P(AB)=0.1$. $P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.4-0.1=0.3$.

(方法二) $P(A \cup B)=P(A\overline{B})+P(B)$，即有 $0.6=P(A\overline{B})+0.3$，$P(A\overline{B})=0.3$.

5 (1992，十(1)题，3分) 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{12}$，则事件 A，B，C 全不发生的概率为_____.

【答案】 $\dfrac{5}{12}$.

【解析】 A，B，C 全不发生的事件为 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$，其概率为

$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-P(A \cup B \cup C)$

$=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)]$

$=1-\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}+0\right]=1-\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$

【评注】 本题原题…$P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{6}$…，这里改为…$P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{12}$…，因为按原题就有 $P(C)=\dfrac{1}{4}>P(AC \cup BC)=P(AC)+P(BC)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$，这是不可能的.

6 (1993，十(1)题，3分) 一批产品共有10个正品和2个次品，任意抽取两次，每次抽一个，抽出后不再放回，则第二次抽出的是次品的概率为_____.

【答案】 $\frac{1}{6}$.

【解析】 （方法一） 设 A_i——第 i 次抽得是次品，$i=1,2$.

显然 $A_1,\overline{A}_1$ 是 Ω 的完备事件组，根据全概率公式：

$$P(A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2\mid \overline{A}_1)=\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{11}+\frac{10}{12}\cdot\frac{2}{11}=\frac{1}{6}$$

（方法二） 又考虑第二次取 10 个正品 2 个次品每一个都等可能被取到 $P(A_2)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

7 (1994，十(1) 题，3 分) 已知 A,B 两个事件满足条件 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$，且 $P(A)=p$，则 $P(B)=$_____.

【答案】 $1-p$.

【解析】 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)$，

得 $P(A)+P(B)=1$，$P(B)=1-P(A)=1-p$.

8 (1996，十(1) 题，3 分) 设工厂 A 和工厂 B 的产品的次品率分别为 1% 和 2%，现从由 A 厂和 B 厂的产品分别占 60% 和 40% 的一批产品中随机抽取一件，发现是次品，则该次品是 A 厂生产的概率是_____.

【答案】 $\frac{3}{7}$.

【解析】 设事件 A——产品由 A 生产，则 $\overline{A}$——产品由 B 生产，显然 $A,\overline{A}$ 是 Ω 的完备事件组.

事件 B——取的产品为次品.

现取得一产品发现为次品，则该次品属 A 生产的概率应为 $P(A\mid B)$.

根据贝叶斯公式

$$P(A\mid B)=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid \overline{A})}=\frac{0.6\times 0.01}{0.6\times 0.01+0.4\times 0.02}=\frac{0.6}{0.6+0.8}=\frac{3}{7}$$

9 (1998，二(5) 题，3 分) 设 A,B 是两个随机事件，且 $0<P(A)<1$，$P(B)>0$，$P(B\mid A)=P(B\mid \overline{A})$，则必有

(A) $P(A\mid B)=P(\overline{A}\mid B)$.　　(B) $P(A\mid B)\neq P(\overline{A}\mid B)$.

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$.　　(D) $P(AB)\neq P(A)P(B)$.

【答案】 C.

【解析】 $P(B\mid A)=P(B\mid \overline{A})$　即　$\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$

所以 $P(AB)[1-P(A)]=P(A)[P(B)-P(AB)]$

因此 $P(AB)-P(AB)P(A)=P(A)P(B)-P(A)P(AB)$，即 $P(AB)=P(A)P(B)$.

10 (1999，一(5) 题，3 分) 设两两相互独立的三事件 A,B,C 满足条件：$ABC=\varnothing$，$P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$，且已知 $P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$，则 $P(A)=$_____.

【答案】 $\frac{1}{4}$.

【解析】 设 $P(A)=x$，

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$$

$$=x+x+x-x^2-x^2-x^2+0=\frac{9}{16},$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

$x^2-x+\frac{3}{16}=0,\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)=0$

解得 $x=\frac{1}{4}$ 和 $x=\frac{3}{4}$，而题给 $P(A)<\frac{1}{2}$，所以得 $P(A)=\frac{1}{4}$.

【评注】 本题中条件 $P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$，其实没有必要，因为解出 $P(A)=\frac{3}{4}$ 是不满足条件 $\frac{9}{16}=P(A\cup B\cup C)\geqslant P(A)=\frac{3}{4}$.

11 (2000，一(5)题，3分) 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$，A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，则 $P(A)=$ _____.

【答案】 $\frac{2}{3}$.

【解析】 (方法一) A,B 独立，$P(AB)=P(A)P(B)$.

即 $P(A-B)=P(B-A)$. $P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$

也就有 $P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)$，所以 $P(A)=P(B)$，记 $P(A)=x$.

A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$，即 $P(\overline{A}\,\overline{B})=\frac{1}{9}$，所以

$$\frac{8}{9}=1-P(\overline{A}\,\overline{B})=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

因此 $\frac{8}{9}=x+x-x^2,x^2-2x+\frac{8}{9}=0$

解得 $x=\frac{2}{3}$ 和 $x=\frac{4}{3}$(不能超过1)，

所以 $P(A)=\frac{2}{3}$.

(方法二) $P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$，即 $P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)$，所以 $P(A)=P(B)$，

$P(\overline{A}\,\overline{B})=\frac{1}{9}$，$A,B$ 独立，$\overline{A},\overline{B}$ 也独立，$P(\overline{A})=P(\overline{B})$，

所以 $[P(\overline{A})]^2=\frac{1}{9}$，

$P(\overline{A})=\frac{1}{3}$，$P(A)=\frac{2}{3}$.

12 (2003，十一题，10分) 已知甲、乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有3件合格品和3件次品，乙箱中仅装有3件合格品. 从甲箱中任取3件产品放入乙箱后，求：

(1) 乙箱中次品件数 X 的数学期望；

(2) 从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

【解】 (1) 求 $E(X)$，先求 X 的分布，X 可能取值为 0,1,2,3.

$P\{X=Y_2\}=\frac{C_3^kC_3^{3-k}}{C_6^3},k=0,1,2,3.$

即

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

$E(X)=0\cdot\frac{1}{20}+1\cdot\frac{9}{20}+2\cdot\frac{9}{20}+3\cdot\frac{1}{20}=\frac{3}{2}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(2) 设 A 表示事件“从乙箱中任意取出的一件产品是次品”，根据全概率公式

$$P(A)=\sum_{k=0}^{3}P\{X=k\}P\{A\mid X=k\}=\sum_{k=0}^{3}P\{X=k\}\frac{k}{6}=\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{3}kP\{X=k\}=\frac{1}{6}E(X)=\frac{1}{4}$$

13 (2006，13 题，4 分) 设 A,B 为随机事件，且 $P(B)>0,P(A\mid B)=1$，则必有

(A) $P(A\cup B)>P(A)$.　　(B) $P(A\cup B)>P(B)$.

(C) $P(A\cup B)=P(A)$.　　(D) $P(A\cup B)=P(B)$.

【答案】 C.

【解析】 本题考查条件概率和概率的加法公式.

由 $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=1$，得到 $P(AB)=P(B)$，再根据加法公式，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)$$

答案应选(C).

二、古典概型、几何概型和伯努利概型

14 (1987，十(1) 题，2 分) 设在一次试验中，事件 A 发生的概率为 p，现进行 n 次独立试验，则 A 至少发生一次的概率为_____；而事件 A 至多发生一次的概率为_____.

【答案】 $1-(1-p)^n$；　$(1-p)^n+np(1-p)^{n-1}$.

【解析】 可以看成是 n 次独立重复试验的伯努利模型.

A 至少发生一次可以看成一次也没发生的对立事件，一次也没发生的概率为 $(1-p)^n$.

其对立事件为 $1-(1-p)^n$；

A 至多发生一次，有二种可能：一次也没发生或者只发生了一次，其概率为 $(1-p)^n+np(1-p)^{n-1}$.

15 (1988，十(1) 题，2 分) 设在三次独立试验中，事件 A 出现的概率相等，若已知 A 至少出现一次的概率等于 $\dfrac{19}{27}$，则事件 A 在一次试验中出现的概率为_____.

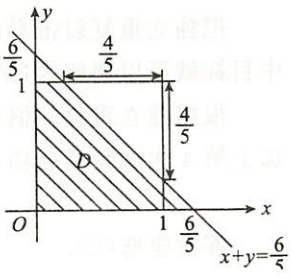
【答案】 $\dfrac{1}{3}$.

【解析】 可以看成是三次独立重复试验的伯努利模型.

设事件 A 在一次试验中出现的概率为 $P\{A\}=p$. 已知在三次独立试验中 A 至少出现一次的概率为 $\dfrac{19}{27}$，则在三次独立试验中一次也没出现的概率为 $(1-p)^3=1-\dfrac{19}{27}=\dfrac{8}{27}$，

解得 $1-p=\dfrac{2}{3}$，$p=\dfrac{1}{3}$.

16 (1988，十(2) 题，2 分) 在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数，则事件“两数之和小于 $\dfrac{6}{5}$”的概率为_____.



【答案】 $\dfrac{17}{25}$.

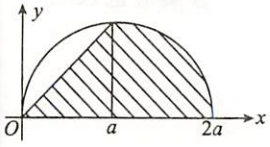
【解析】 本题是几何型概率题，不妨假定随机地取出两个数分别为

X 和 Y，它们应是相互独立的. 如果把 (X,Y) 看成平面上一个点的坐标，则由于 $0<X<1,0<Y<1$，所以 (X,Y) 为平面上正方形 $0<X<1,0<Y<1$ 中的一个点，而满足“两数之和小于 $\frac{6}{5}$”的点 (X,Y) 对应于正方形中 $X+Y<\frac{6}{5}$ 的区域.

$$P\{X+Y<\frac{6}{5}\}=\frac{D\text{ 的面积}}{\text{单位正方形面积}}=\frac{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}}{1}=\frac{17}{25}$$

17 (1991，十(2) 题，3 分) 随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$ (a 为正常数) 内掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与该区域的面积成正比. 则原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为_____.

【答案】 $\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$.



【解析】 半圆即基本事件空间 Ω 的面积为 $\frac{1}{2}\pi a^2$.

所求概率为 $\dfrac{\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}\pi a^2}{\frac{1}{2}\pi a^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$.

18 (1997，一(5) 题，3 分) 袋中有 50 个乒乓球，其中 20 个是黄球，30 个是白球. 今有两人依次随机地从袋中各取一球，取后不放回，则第二个人取得黄球的概率是_____.

微信公众号【原来考研】(ID：djky66)

【答案】 $\frac{2}{5}$.

【解析】 (方法一) 设 A_i——第 i 次取得黄球，$i=1,2$.

显然 $A_1,\overline{A}_1$ 是 Ω 的完备事件组，根据全概率公式：

$$P(A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)=\frac{20}{50}\cdot\frac{19}{49}+\frac{30}{50}\cdot\frac{20}{49}=\frac{2}{5}$$

(方法二) 又考虑第二次取 20 个黄球和 30 个白球，每一个都等可能被取到，$P(A_2)=\frac{20}{50}=\frac{2}{5}$.

19 (2007，9 题，4 分) 某人向同一目标独立重复射击，每次射击命中目标的概率为 $p(0<p<1)$，则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为

(A) $3p(1-p)^2$.　　(B) $6p(1-p)^2$.

(C) $3p^2(1-p)^2$.　　(D) $6p^2(1-p)^2$.

【答案】 C.

【解析】 本题考查事件的独立性，独立重复试验.

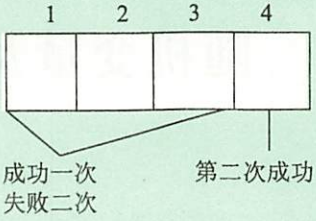
把独立重复射击看成独立重复试验，射击命中目标看成试验成功. 第 4 次射击恰好是第 2 次命中目标就可以理解为：第 4 次试验为成功，而前三次试验中必有 1 次成功，2 次失败.

根据独立重复的伯努利试验，前 3 次试验中有 1 次成功和 2 次失败，其概率为 $C_3^1p(1-p)^2$，再加上第 4 次试验是成功，其概率为 p. 根据独立性，第 4 次射击为第 2 次命中目标的概率为

$$C_3^1p(1-p)^2\cdot p=3p^2(1-p)^2.$$

答案应选(C).

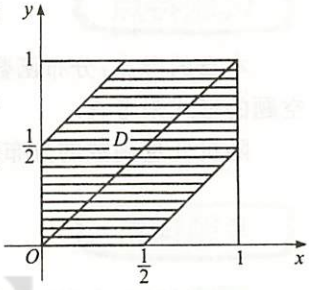
【评注】　求解这类问题关键在于分析好各次试验的结构，这时可以作如下图分析：



20 (2007，16 题，4 分) 在区间(0，1) 中随机地取两个数，则这两个数之差的绝对值小于$\frac{1}{2}$ 的概率为_____.

【答案】　$\frac{3}{4}$.

【解析】　本题是几何型概率题. 不妨假定随机地取出两个数分别为 X 和 Y，它们应是相互独立的，如果把(X,Y) 看成平面上一个点的坐标，则由于 $0<X<1,0<Y<1$，所以(X,Y) 为平面上正方形 $0<X<1$，$0<Y<1$ 中的一个点. 而满足 X 与 Y 两个数之差的绝对值小于$\frac{1}{2}$ 的点 (X,Y) 对应于正方形中 $|X-Y|<\frac{1}{2}$ 的区域.



在区间(0，1) 中随机选取的所有可能的两个数 X 和 Y，可以将点(X,Y) 看成右图单位正方形里的点. 满足 $|X-Y|<\frac{1}{2}$ 的点的区域就是图中阴影标出的区域 D. 根据几何型概率

$$P\left\{|X-Y|<\frac{1}{2}\right\}=\frac{D\text{ 的面积}}{\text{单位正方形面积}}=\frac{1-2\times\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{1}=\frac{3}{4}$$

答案应填$\frac{3}{4}$.

【评注】　几何型概率题的求解关键在于如何将满足条件的可能结果与某区域中的一个点对应起来，这区域可能是一维的，也可能是二维的，甚至可能是三维的，然后求出题目要求的区域和可能结果所对应区域长度或面积或体积之比.

微信公众号【阿芳考研】(ID: djky66)

第二章　随机变量及其分布

本章导读

本章作为基础渗透到以后的各章考题中，尤其是第三章多维随机变量及其分布. 近几年的考题大多在多维随机变量这章中，多维要会做当然一维也要会做，尤其是多维随机变量函数的分布的考题近年考得较多，不过没有一维的基础，多维就无法掌握.

试题特点

本章的考点：分布函数、分布律、概率密度，常考的一些分布的性质. 这些考点常以选择题或填空题的形式来考查.

随机变量函数的分布常出现在解答题中.

考题详析

1 (1988，十(3)题，2分) 设随机变量 X 服从均值为 10，均方差为 0.02 的正态分布，已知

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du,\quad \Phi(2.5)=0.9938$$

则 X 落在区间(9.95，10.05) 内的概率为_____.

【答案】 0.9876.

【解析】
$$\begin{aligned}P\{9.95<X<10.05\}&=P\{9.95<X\leqslant 10.05\}\\&=P\{-0.05<X-10\leqslant 0.05\}\\&=P\left\{-2.5<\frac{X-10}{0.02}\leqslant 2.5\right\}\end{aligned}$$

$X\sim N(10,(0.02)^2)$，所以 $\dfrac{X-10}{0.02}\sim N(0,1)$，因此 $P\left\{-2.5<\dfrac{X-10}{0.02}\leqslant 2.5\right\}=2\Phi(2.5)-1$，

$P\{9.95<X<10.05\}=2\Phi(2.5)-1=2\cdot 0.9938-1=0.9876.$

2 (1988，十一题，6分) 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$，求随机变量 $Y=1-\sqrt[3]{X}$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

【解】 设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，$-\infty<y<+\infty$，则

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{1-\sqrt[3]{X}\leqslant y\}=P\{1-y\leqslant\sqrt[3]{X}\}\\&=P\{(1-y)^3\leqslant X\}=\int_{(1-y)^3}^{+\infty}\frac{dx}{\pi(1+x^2)}\\&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\arctan(1-y)^3\right],\ -\infty<y<+\infty\end{aligned}$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{3}{\pi}\frac{(1-y)^2}{1+(1-y)^6}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

3 (1989,十(3)题,2分)若随机变量ξ在区间(1,6)上服从均匀分布,则方程$x^2+\xi x+1=0$有实根的概率是_____.

【答案】 0.8.

【解析】 方程$x^2+\xi x+1=0$有实根的充要条件:判别式$\xi^2-4\geqslant 0$.

方程有实根的概率是$P\{\xi^2-4\geqslant 0\}=P\{\xi\geqslant 2\}+P\{\xi\leqslant -2\}=\dfrac{6-2}{6-1}+0=\dfrac{4}{5}=0.8$.

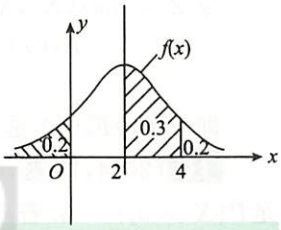
4 (1990,十(1)题,2分)已知随机变量X的概率密度函数$f(x)=\dfrac{1}{2}e^{-|x|}$,$-\infty<x<+\infty$,则$X$的概率分布函数$F(x)=$_____.

【答案】 $\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{x}, & x<0,\\ 1-\dfrac{1}{2}e^{-x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$

【解析】 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(u)du$,当$x<0$时,$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{2}e^{-|u|}du=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}e^{u}du=\dfrac{1}{2}e^{x}$.

当$x\geqslant 0$时,$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{2}e^{-|u|}du=1-\int_{x}^{+\infty}\dfrac{1}{2}e^{-u}du=1-\dfrac{1}{2}e^{-x}$.

5 (1991,十(1)题,3分)若随机变量X服从均值为2,方差为σ^2的正态分布,且$P\{2<X<4\}=0.3$,则$P\{X<0\}=$_____.



【答案】 0.2.

【解析】 $X\sim N(2,\sigma^2)$,其概率密度$f(x)$在$x=2$对称.

$P\{X<0\}=P\{X>4\}=\dfrac{1}{2}-P\{2<X<4\}=0.2$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky6)

【评注】 本题也可用积分来解$P\{2<X<4\}=\int_{2}^{4}f(x)dx$,$P\{X<0\}=\int_{-\infty}^{0}f(x)dx$.

利用对称性和积分代换也可求出$P\{X<0\}$,稍繁些.

6 (1993,十(2)题,3分)设随机变量X服从(0,2)上的均匀分布,则随机变量$Y=X^2$在(0,4)内的概率分布密度$f_Y(y)=$_____.

【答案】 $\dfrac{1}{4\sqrt{y}}$.

【解析】 设Y在(0,4)内的分布函数为$F_Y(y)$,当$0<y<4$时,

$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y\}=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}=P\{0\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}=\dfrac{\sqrt{y}}{2}$

故$f_Y(y)=F_Y'(y)=\dfrac{1}{4\sqrt{y}}$,$0<y<4$.

7 (1995,十一题,6分)设随机变量X的概率密度为$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$求随机变量$Y=e^X$的概率密度$f_Y(y)$.

【解】 设随机变量$Y=e^X$的分布函数为$F_Y(y)$,则$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{e^X\leqslant y\}$,

因为$f_X(x)=0$,$x<0$,所以$X\geqslant 0$,$Y=e^X\geqslant 1$.

当$y<1$时$F_Y(y)=P\{e^X\leqslant 1\}=0$;

当$1\leqslant y$时$F_Y(y)=P\{e^X\leqslant y\}=P\{X\leqslant\ln y\}=\int_{-\infty}^{\ln y}f_X(x)dx=\int_{0}^{\ln y}e^{-x}dx=1-\dfrac{1}{y}$.

总之$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ 1-\dfrac{1}{y}, & 1\leqslant y,\end{cases}$ $f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ \dfrac{1}{y^2}, & y\geqslant 1.\end{cases}$

8 (2002,一(5)题,3分)设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$,且二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为 $\frac{1}{2}$,则 $\mu=$ _____.

【答案】 4.

【解析】 二次方程无实根 $b^2-4ac<0$,即 $4^2-4X<0$,所以 $X>4$,

无实根的概率 $P\{X>4\}=\frac{1}{2}$,$\mu=4$.

9 (2002,二(5)题,3分)设 X_1 和 X_2 是任意两个相互独立的连续型随机变量,它们的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$,分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$,则

(A) $f_1(x)+f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

(B) $f_1(x)f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

(C) $F_1(x)+F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

(D) $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

【答案】 D.

【解析】 $X_1\sim F_1(x)$ 和 $X_2\sim F_2(x)$,且 X_1,X_2 相互独立.

令 $Z=\max(X_1,X_2)$,则 Z 的分布函数 $F_Z(x)$ 为

$$F_Z(x)=P\{Z\leqslant x\}=P\{\max(X_1,X_2)\leqslant x\}=P\{X_1\leqslant x,X_2\leqslant x\}$$
$$=P\{X_1\leqslant x\}P\{X_2\leqslant x\}=F_1(x)F_2(x)$$

即 $F_1(x)F_2(x)$ 是 $\max(X_1,X_2)$ 的分布函数.

10 (2004,13题,4分)设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$,对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$,数 u_α 满足 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$.若 $P\{|X|<x\}=\alpha$,则 x 等于

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$. (B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$. (C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$. (D) $u_{1-\alpha}$.

【答案】 C.

【解析】 $\alpha=P\{|X|<x\}=1-P\{|X|\geqslant x\}=1-P\{X\geqslant x\}-P\{X\leqslant -x\}=1-2P\{X\geqslant x\}$

故 $2P\{X\geqslant x\}=1-\alpha$,$P\{X\geqslant x\}=\frac{1-\alpha}{2}$,$P\{X>x\}=P\{X\geqslant x\}=\frac{1-\alpha}{2}$,$x=u_{\frac{1-\alpha}{2}}$.

11 (2006,14题,4分)设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$,Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$,且 $P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$,则必有

(A) $\sigma_1<\sigma_2$. (B) $\sigma_1>\sigma_2$. (C) $\mu_1<\mu_2$. (D) $\mu_1>\mu_2$.

【答案】 A.

【解析】 由于 X 与 Y 的分布不同,不能直接判断 $P\{|X-\mu_1|<1\}$ 和 $P\{|Y-\mu_2|<1\}$ 的大小与参数的关系,如果将其标准化,就可以方便地比较.

$P\{|X-\mu_1|<1\}=P\left\{\left|\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\right|<\frac{1}{\sigma_1}\right\}$.随机变量 $\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\sim N(0,1)$,且其概率密度函数是偶函数.故

$$P\left\{\left|\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\right|<\frac{1}{\sigma_1}\right\}=2P\left\{0<\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}<\frac{1}{\sigma_1}\right\}=2\left[\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)-\Phi(0)\right]=2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)-1$$

同理,$P\{|Y-\mu_2|<1\}=2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right)-1$.

因为 $\Phi(x)$ 是单调增加函数,当 $P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$ 时,

$$2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)-1>2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right)-1$$

即 $\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)>\Phi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right)$,所以 $\frac{1}{\sigma_1}>\frac{1}{\sigma_2}$,即 $\sigma_1<\sigma_2$.答案应选(A).

微信公众号【顾天考研】(ID:djky66)

第三章　多维随机变量及其分布

本章导读

本章是概率论重点之一，也是每年必考的内容，且往往是解答题. 尤其要注意 ① 二维随机变量的函数 $Z=g(X,Y)$ 的分布函数 $F_Z(y)$ 求法；② 二维随机变量 (X,Y) 的两个分量之间的关系，包括 X 与 Y 的相互独立的条件及不独立时的条件概率分布和条件概率密度等，都是这几年常考的内容.

试题特点

试题一般只涉及两维随机变量. 很少讨论三个随机变量的情况.

在涉及二维离散型随机变量的题中，常要考生自己建立分布，计算边缘分布，条件分布. 在涉及二维连续型随机变量的题中，常要考生熟练地应用二重积分和二次积分来计算边缘密度，条件密度.

独立性及不相关性是一对重要概念，要掌握它们的关系及判定方法. 特别是对二维正态分布及其参数做独立性和不相关性的判定.

对二维均匀分布，密度函数是常数，如何判定该常数，以及在积分时如何利用这一特性，应予以充分注意.

考题详析

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

一、(X,Y) 的概率分布，X 与 Y 相互独立性

1 (1995，十(2)题，3分) 设 X 和 Y 为两个随机变量，且

$$P\{X\geqslant 0,Y\geqslant 0\}=\frac{3}{7},P\{X\geqslant 0\}=P\{Y\geqslant 0\}=\frac{4}{7}$$

则 $P\{\max(X,Y)\geqslant 0\}=$ _____.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【答案】 $\frac{5}{7}$.

【解析】
$$\begin{aligned}P\{\max(X,Y)\geqslant 0\}&=P\{X\geqslant 0\cup Y\geqslant 0\}\\&=P\{X\geqslant 0\}+P\{Y\geqslant 0\}-P\{X\geqslant 0,Y\geqslant 0\}\\&=\frac{4}{7}+\frac{4}{7}-\frac{3}{7}=\frac{5}{7}.\end{aligned}$$

2 (1998，一(5)题，3分) 设平面区域 D 由曲线 $y=\frac{1}{x}$ 及直线 $y=0,x=1,x=\mathrm{e}^2$ 所围成，二维随机变量 (X,Y) 在区域 D 上服从均匀分布，则 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度在 $x=2$ 处的值为_____.

【答案】 $\frac{1}{4}$.

【解析】 D 由 $y=\frac{1}{x},y=0,x=1$ 和 $x=\mathrm{e}^2$ 所围成的区域，其面积 $S_D=\int_1^{\mathrm{e}^2}\left(\frac{1}{x}-0\right)\mathrm{d}x=$

$\ln x\Big|_1^{e^2}=2.$

(X,Y) 的概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

(X,Y) 关于 X 的边缘概率密度在 $x=2$ 处的值为

$$f_X(2)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(2,y)\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

3 (1999,二(5)题,3分) 设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$,则

(A)$P\{X+Y\leqslant 0\}=\frac{1}{2}$. (B)$P\{X+Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2}$.

(C)$P\{X-Y\leqslant 0\}=\frac{1}{2}$. (D)$P\{X-Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2}$.

【答案】 B.

【解析】 $X\sim N(0,1),Y\sim N(1,1),X$ 与 Y 独立,所以 $X+Y\sim N(1,2),X-Y\sim N(-1,2)$. 就有 $P\{X+Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2}$.

4 (1999,十二题,8分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,下表列出了二维随机变量 (X,Y) 联合分布律及关于 X 和关于 Y 的边缘分布律中的部分数值,试将其余数值填入表中的空白处.

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}$
x_1		$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$			
$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$			1

【解】 设 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=P_{ij},i=1,2,j=1,2,3$,因 X,Y 独立,就有 $P_{ij}=P_{i\cdot}P_{\cdot j}$.

因此 $\frac{P_{11}}{P_{21}}=\frac{P_{1\cdot}P_{\cdot 1}}{P_{2\cdot}P_{\cdot 1}}=\frac{P_{1\cdot}}{P_{2\cdot}},\frac{P_{12}}{P_{22}}=\frac{P_{1\cdot}P_{\cdot 2}}{P_{2\cdot}P_{\cdot 2}}=\frac{P_{1\cdot}}{P_{2\cdot}},\frac{P_{13}}{P_{23}}=\frac{P_{1\cdot}P_{\cdot 3}}{P_{2\cdot}P_{\cdot 3}}=\frac{P_{1\cdot}}{P_{2\cdot}}$.

总之 $\frac{P_{11}}{P_{21}}=\frac{P_{12}}{P_{22}}=\frac{P_{13}}{P_{23}}=\frac{P_{1\cdot}}{P_{2\cdot}}$,即 (X,Y) 的分布律中两行对应概率一定成比例.

同时,独立时 (X,Y) 两列对应的概率也一定成比例.

首先有

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P_{i\cdot}$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$			
$P_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$			1

其次,X,Y 独立,

$\frac{P_{12}}{P_{11}}=\frac{P_{22}}{P_{21}}=\frac{P_{\cdot 2}}{P_{\cdot 1}}$,所以

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P_{i\cdot}$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$		
$P_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$		1

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

再进一步有

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P_{i\cdot}$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$		
$P_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

最后求得

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P_{i\cdot}$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$P_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

5 (2001,十一题,7 分) 设某班车起点站上客人数 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布,每位乘客在中途下车的概率为 $p(0<p<1)$,且中途下车与否相互独立,以 Y 表示在中途下车的人数. 求:

(1) 在发车时有 n 个乘客的条件下,中途有 m 人下车的概率;

(2) 二维随机变量 (X,Y) 的概率分布.

【解】 (1) 在发车时有 n 个乘客,他们在中途下车与否是相互独立的,概率均为 p,所以可以将每位乘客下车与否看成是一次伯努利试验. 记 $C_0^0=1$,则在发车时有 n 个乘客的条件下,有 m 个人下车的概率为

$$P\{Y=m\mid X=n\}=C_n^m p^m(1-p)^{n-m},0\leqslant m\leqslant n,n=0,1,2,\cdots$$

(2) $P\{X=n,Y=m\}=P\{X=n\}P\{Y=m\mid X=n\}$

$$=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}C_n^m p^m(1-p)^{n-m},0\leqslant m\leqslant n,n=0,1,2,\cdots$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

6 (2003,一(5) 题,4 分) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

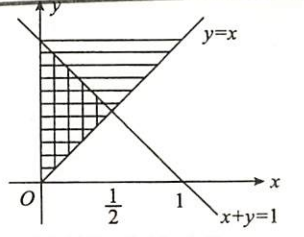
则 $P\{X+Y\leqslant 1\}=$ _____.

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

【答案】 $\frac{1}{4}$.

【解析】 $P\{X+Y\leqslant 1\}=\iint\limits_{x+y\leqslant 1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{1-x}6x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}6x(1-2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.$$



7 (2005,6 题,4 分) 从数 1,2,3,4 中任取一个数,记为 X,再从 1,2,…,X 中任一个数,记为 Y,则 $P\{Y=2\}=$ _____.

【答案】 $\frac{13}{48}$.

【解析】 先取一个数为 X,后取数为 Y. 显然 Y 是受 X 的取值影响. 现求 $Y=2$ 的概率,这就涉及 X 可能取 2,3 或 4.

(方法一) 先求出 (X,Y) 的概率分布. 因为 X 是等可能地取 1,2,3,4. 故 (X,Y) 关于 X 的边缘分布必有 $P\{X=i\}=\frac{1}{4},i=1,2,3,4$. 而 Y 只从 $1\sim X$ 中取,又是等可能取 1,2,…,X,概率必

为$\frac{1}{4X}$，所以 $P\{X=i,Y=j\}=\begin{cases}0, & j>i\\ \frac{1}{4i}, & j\leqslant i\end{cases}$ 即：

X \ Y	1	2	3	4	
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$

故 $P\{Y=2\}=\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}=\frac{13}{48}$.

（方法二） 用全概率公式

$$P\{Y=2\}=\sum_{i=1}^{4}P\{X=i\}P\{Y=2\mid X=i\}$$
$$=\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{4}P\{Y=2\mid X=i\}$$
$$=\frac{1}{4}\left(0+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{13}{48}.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID：diky66)

8 （2005，13题，4分）设二维随机变量(X,Y)的概率分布为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立，则

(A) $a=0.2,b=0.3$.　　(B) $a=0.4,b=0.1$.

(C) $a=0.3,b=0.2$.　　(D) $a=0.1,b=0.4$.

【答案】 B.

【解析】 显然，$0.4+a+b+0.1=1$，可知$a+b=0.5$. 再由事件$\{X=0\}$和$\{X+Y=1\}$相互独立可以求出a,b.

（方法一） 由独立性可知

$$P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0\}P\{X+Y=1\}$$

而
$$P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}=a$$

$$P\{X=0\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}=0.4+a$$

$$P\{X+Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=a+b=0.5$$

代入独立性等式，得 $a=(0.4+a)\times 0.5$，解得 $a=0.4$. 再由 $a+b=0.5$ 得 $b=0.1$.

（方法二）　如果把独立性理解为

$$P\{X+Y=1\mid X=0\}=P\{X+Y=1\},$$

即 $P\{Y=1\mid X=0\}=P\{X+Y=1\}=a+b=0.5$，所以，

$$P\{Y=0\mid X=0\}=1-P\{Y=1\mid X=0\}=0.5,$$

即 $P\{Y=1\mid X=0\}=P\{Y=0\mid X=0\}=0.5$，从而，$P\{X=0,Y=1\}=P\{X=0,Y=0\}$，即 $a=0.4$，又因 $a+b=0.5$，得 $b=0.1$.

【评注】　也可以把本题的独立性理解成下列各式中任一个：

(1) $P\{X=0,X+Y\neq 1\}=P\{X=0\}P\{X+Y\neq 1\}$；

(2) $P\{X=1,X+Y=1\}=P\{X=1\}P\{X+Y=1\}$；

(3) $P\{X+Y=1\mid X=1\}=P\{X+Y=1\}$.

各有相应的解法.

9　(2006，6 题，4 分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布，则 $P\{\max\{X,Y\}\leqslant 1\}=$ _____.

【答案】　$\frac{1}{9}$.

【解析】　本题考查均匀分布，两个随机变量的独立性和它们的简单函数的分布.

事件 $\{\max\{X,Y\}\leqslant 1\}=\{X\leqslant 1,Y\leqslant 1\}=\{X\leqslant 1\}\cap\{Y\leqslant 1\}$，又根据 X,Y 相互独立，均服从均匀分布，可以直接写出 $P\{X\leqslant 1\}=\frac{1}{3}$.

$$P\{\max\{X,Y\}\leqslant 1\}=P\{X\leqslant 1,Y\leqslant 1\}=P\{X\leqslant 1\}P\{Y\leqslant 1\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}.$$

10　(2007，10 题，4 分) 设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，且 X 与 Y 不相关，$f_X(x)$，$f_Y(y)$ 分别表示 X,Y 的概率密度，则在 $Y=y$ 的条件下，X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x\mid y)$ 为

(A) $f_X(x)$.　　(B) $f_Y(y)$.　　(C) $f_X(x)f_Y(y)$.　　(D) $\frac{f_X(x)}{f_Y(y)}$.

【答案】　A.

【解析】　二维正态分布随机变量 (X,Y) 中，X 与 Y 的独立等价于 X 与 Y 不相关. 而对任意两随机变量 X 与 Y，如果它们相互独立，则有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$.

根据条件概率密度的定义，当在 $Y=y$ 的条件下，如果 $f_Y(y)\neq 0$，则

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{f_X(x)f_Y(y)}{f_Y(y)}=f_X(x)$$

现 $f_Y(y)$ 显然不为 0，因此 $f_{X|Y}(x\mid y)=f_X(x)$. 答案应选(A).

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【评注】　因为 X,Y 不相关，(X,Y) 又服从二维正态分布，故 X 与 Y 相互独立. 直观上考虑 Y 的取值不影响 X 的取值，所以 $f_{X|Y}(x\mid y)=f_X(x)$.

对于不要求解题过程的选择题也是一种好方法.

11 (2008,7 题,4 分) 设随机变量 X,Y 独立同分布,且 X 的分布函数为 $F(x)$,则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为

(A) $F^2(x)$.　　(B) $F(x)F(y)$.

(C) $1-[1-F(x)]^2$.　　(D) $[1-F(x)][1-F(y)]$.

【答案】 A.

【解析】 随机变量 $Z=\max(X,Y)$ 的分布函数 $F_Z(x)$ 应为 $F_Z(x)=P\{Z\leqslant x\}$,由此定义不难推出 $F_Z(x)$.

$$F_Z(x)=P\{Z\leqslant x\}=P\{\max(X,Y)\leqslant x\}=P\{X\leqslant x,Y\leqslant x\}$$
$$=P\{X\leqslant x\}P\{Y\leqslant x\}=F(x)F(x)=F^2(x).$$

故答案应选(A).

【评注】 不难验证(B)选项中,$F(x)F(y)$ 恰是二维随机变量 (X,Y) 的分布函数.(C)选项中,$1-[1-F(x)]^2$ 是随机变量 $\min(X,Y)$ 的分布函数.(D)选项中,$[1-F(x)][1-F(y)]$ 本身不是分布函数,因它不满足分布函数的充要条件.

二、二维随机变量的函数 $Z=g(X,Y)$ 的分布

微信公众号【顶尖考研】(ID: dijky66)

12 (1987,十一题,6 分) 设随机变量 X,Y 相互独立,其概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$$

求随机变量 $Z=2X+Y$ 的概率密度函数.

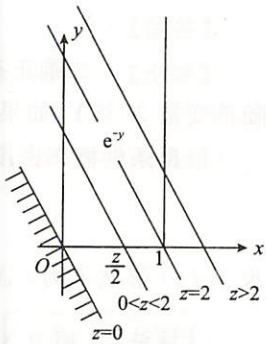
【分析】 由于随机变量 X,Y 相互独立,所以二元随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0\leqslant x\leqslant 1,y>0,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

设随机变量 $Z=2X+Y$ 的分布函数为 $F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}$,概率密度为 $f_Z(z)=F_Z'(z)$,

则 $F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{2X+Y\leqslant z\}=\iint\limits_{2x+y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【解】 (方法一) $F_Z(z)=\iint\limits_{2x+y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{2x+y\leqslant z}f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$



当 $z\leqslant 0$ 时,$F_Z(z)=0$;

当 $0<z\leqslant 2$ 时,$F_Z(z)=\int_0^{\frac{z}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{z-2x}e^{-y}\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{z}{2}}(1-e^{2x-z})\mathrm{d}x$

$$=\frac{z}{2}-\frac{e^{-z}}{2}(e^z-1)=\frac{z}{2}+\frac{1}{2}(e^{-z}-1);$$

当 $2<z$ 时,$F_Z(z)=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{z-2x}e^{-y}\mathrm{d}y=\int_0^1(1-e^{2x-z})\mathrm{d}x$

$$=1-\int_0^1 e^{2x-z}\mathrm{d}x=1-\frac{e^{-z}}{2}(e^2-1).$$

总之，$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}(z+e^{-z}-1), & 0<z\leqslant 2,\\ 1-\frac{e^{-z}}{2}(e^2-1), & 2<z.\end{cases}$　$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}(1-e^{-z}), & 0<z\leqslant 2,\\ \frac{1}{2}(e^2-1)e^{-z}, & 2<z.\end{cases}$

（方法二）$F_Z(z)=\iint\limits_{2x+y\leqslant z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{2x+y\leqslant z} f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{d}x\int_0^{z-2x} f_Y(y)\mathrm{d}y$

$f_Z(z)=F_Z'(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-2x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f_Y(z-2x)\mathrm{d}x$

当 $z\leqslant 0$ 时，$0\leqslant x\leqslant 1$，所以 $z-2x\leqslant 0$，$f_Y(z-2x)=0$，$f_Z(z)=0$；

当 $0<z\leqslant 2$ 时，$0\leqslant x\leqslant \frac{z}{2}$ 时，$f_Y(z-2x)=e^{-(z-2x)}$；

$\frac{z}{2}<x\leqslant 1$ 时，$f_Y(z-2x)=0$，

$$f_Z(z)=\int_0^{\frac{z}{2}} e^{-(z-2x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(1-e^{-z})$$

当 $2<z$ 时，$f_Z(z)=\int_0^1 e^{-(z-2x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(e^2-1)e^{-z}$；

总之 $f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}(1-e^{-z}), & 0<z\leqslant 2,\\ \frac{1}{2}(e^{-2}-1)e^{-z}, & 2<z.\end{cases}$

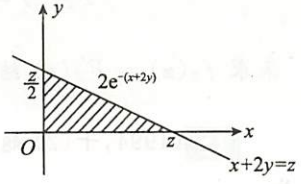
微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

13（1991，十一题，6 分）设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求随机变量 $Z=X+2Y$ 的分布函数.

【解】　设 Z 的分布函数为



$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+2Y\leqslant z\}=\iint\limits_{x+2y\leqslant z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

当 $z\leqslant 0$ 时，$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=0$.

当 $z>0$ 时，$F_Z(z)=\int_0^z \mathrm{d}x\int_0^{\frac{z-x}{2}} 2e^{-(x+2y)}\mathrm{d}y$

$=\int_0^z e^{-x}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{z-x}{2}} 2e^{-2y}\mathrm{d}y=\int_0^z (e^{-x}-e^{-z})\mathrm{d}x$

$=1-e^{-z}-ze^{-z}$.

所以 $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0\\ 1-(1+z)e^{-z}, & z>0\end{cases}$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

14（1992，十一题，6 分）设随机变量 X 与 Y 独立，X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，Y 服从 $[-\pi,\pi]$ 上的均匀分布，试求 $Z=X+Y$ 的概率分布密度（计算结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示，其中 $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$）.

【分析】 X 的概率密度为 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$-\infty<x<+\infty$.

Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & -\pi\leqslant y\leqslant\pi,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

X 与 Y 独立，(X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & -\infty<x<+\infty,-\pi\leqslant y\leqslant\pi\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

【解】 （方法一） $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-\frac{(z-y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}}^{\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\Phi\left(\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

（方法二） $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_{z-\pi}^{z+\pi}\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}}^{\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\Phi\left(\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

【评注】 本题也可用定义法，

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}=\iint\limits_{x+y\leqslant z}f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

来求 $f_Z(z)=F_Z'(z)$ 结果一样.

15 (1994，十(2)题，3分) 设相互独立的两个随机变量 X,Y 具有同一分布律，且 X 的分布律为

X	0	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

则随机变量 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布律为_____.

【答案】

Z	0	1
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

【解析】 $Z=\max(X,Y)$，Z 可能取值为 0 和 1.

$$P\{Z=0\}=P\{\max(X,Y)=0\}=P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

$$P\{Z=1\}=1-P\{Z=0\}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

所以

Z	0	1
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

16 (2005，22 题，9 分) 设二维随机变量(X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

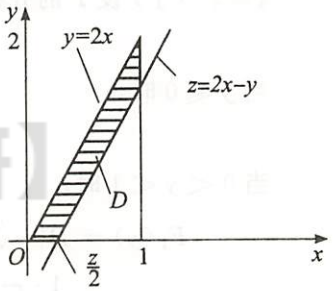
求：(Ⅰ)(X,Y) 的边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$；

(Ⅱ)$Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

【分析】 本题涉及公式为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y,\quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=\iint\limits_{2x-y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad f_Z(z)=F_Z'(z).$$



微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

【解】 (Ⅰ)$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^{2x}\mathrm{d}y, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$$=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{\frac{y}{2}}^{1}\mathrm{d}x, & 0<y<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}1-\frac{y}{2}, & 0<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅱ) 当 $z\leqslant 0$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $0<z<2$ 时，$F_Z(z)=P\{2X-Y\leqslant z\}=\iint\limits_{2x-y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=1-\iint\limits_{2x-y>z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1-\int_{\frac{z}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{2x-z}\mathrm{d}y=z-\frac{z^2}{4};$$

当 $z\geqslant 2$ 时，$F_Z(z)=1$.

所以

$$f_Z(z)=\begin{cases}1-\frac{z}{2}, & 0<z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【评注】 由于 $f(x,y)$ 是均匀分布密度，积分 $\iint\limits_{2x-y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 可以不必求积，而看成求面积 $\iint\limits_{2x-y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=S_D=1-(1-\frac{z}{2})^2=z-\frac{z^2}{4}$.

17 (2006,22 题,9 分) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<0,\\ \frac{1}{4}, & 0\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

令 $Y=X^2$,$F(x,y)$ 为二维随机变量(X,Y) 的分布函数. 求:

(Ⅰ)Y 的概率密度 $f_Y(y)$;

(Ⅱ)$F\left(-\frac{1}{2},4\right)$.

【分析】 $f_Y(y)=F_Y'(y)$,而 $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y\}$. 由于 $f_X(x)$ 是分段函数,所以在计算 $P\{X^2\leqslant y\}$ 时,要相应分段讨论. 求

$$F\left(-\frac{1}{2},4\right)=P\left\{X\leqslant-\frac{1}{2},Y\leqslant 4\right\}=P\left\{X\leqslant-\frac{1}{2},X^2\leqslant 4\right\}$$

只是与 X 有关,不必先求出 $F(x,y)$ 函数.

【解】 (Ⅰ)设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$,则

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y\}$$

当 $y\leqslant 0$ 时,

$$F_Y(y)=0,f_Y(y)=0$$

当 $0<y<1$ 时,

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}=P\{-\sqrt{y}\leqslant X<0\}+P\{0\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{y}+\frac{1}{4}\sqrt{y}=\frac{3}{4}\sqrt{y}\end{aligned}$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{3}{8\sqrt{y}}$$

当 $1\leqslant y<4$ 时,

$$F_Y(y)=P\{-1\leqslant X<0\}+P\{0\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{y}$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{8\sqrt{y}}$$

当 $y\geqslant 4$ 时,

$$F_Y(y)=1,f_Y(y)=0$$

故 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{8\sqrt{y}}, & 0<y<1\\ \frac{1}{8\sqrt{y}}, & 1\leqslant y<4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(Ⅱ)$F\left(-\frac{1}{2},4\right)=P\left\{X\leqslant-\frac{1}{2},Y\leqslant 4\right\}=P\left\{X\leqslant-\frac{1}{2},X^2\leqslant 4\right\}$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

$$= P\left\{X \leqslant -\frac{1}{2}, -2 \leqslant X \leqslant 2\right\} = P\left\{-2 \leqslant X \leqslant -\frac{1}{2}\right\}$$

$$= P\left\{-1 < X \leqslant -\frac{1}{2}\right\} = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$$

18 (2007,23 题,11 分) 设二维随机变量(X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} 2-x-y, & 0<x<1, 0<y<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(Ⅰ) 求 $P\{X>2Y\}$;

(Ⅱ) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

【分析】 本题考查二维随机变量相关事件的概率和两个随机变量简单函数的分布.

计算 $P\{X>2Y\}$ 可用公式

$$P\{X>2Y\} = \iint\limits_{x>2y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

求 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$,可用两个随机变量和的概率密度的一般公式求解.

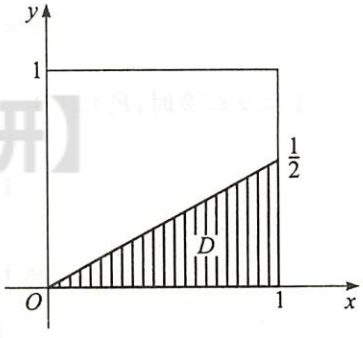
$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x$$

此公式简单,但讨论具体的积分上下限会较复杂.

另一种方法可用定义先求出

$$F_Z(z) = P\{Z \leqslant z\} = P\{X+Y \leqslant z\}$$

然后 $f_Z(z) = F_Z'(z)$.



【解】 (Ⅰ) $P\{X>2Y\} = \iint\limits_{x>2y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \iint\limits_{D} (2-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\frac{1}{2}x} (2-x-y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \left(x - \frac{5}{8}x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{7}{24}.$$

其中 D 为区域:$1>x>2y>0$.

(Ⅱ)〔方法一〕 根据两个随机变量和的概率密度的一般公式有

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x$$

先考虑被积函数 $f(x,z-x)$ 中第一个自变量 x 的变化范围,根据题设条件只有当 $0<x<1$ 时 $f(x,z-x)$ 才不等于 0. 因此,不妨将积分范围改成:

$$f_Z(z) = \int_0^1 f(x,z-x)\mathrm{d}x$$

现在考虑被积函数 $f(x,z-x)$ 中第二个变量 $z-x$. 显然,只有当 $0<z-x<1$ 时,$f(x,z-x)$ 才不等于 0,且为 $2-x-(z-x)=2-z$. 为此,我们将 z 分段讨论:

$z \leqslant 0$ 时,由于 $0<x<1$,故 $z-x<0$,所以 $f_Z(z)=0$;

$0<z \leqslant 1$ 时,$f_Z(z) = \int_0^z (2-z)\mathrm{d}x = 2z-z^2$;

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

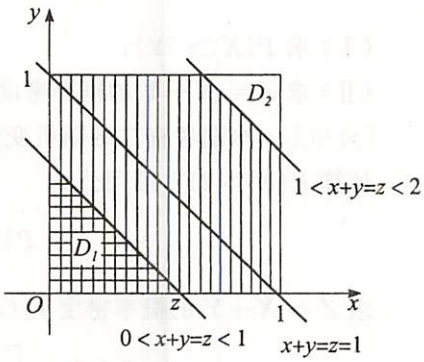
$1<z\leqslant 2$ 时，$f_Z(z)=\int_{z-1}^{1}(2-z)\mathrm{d}x=4-4z+z^2$；

$z>2$ 时，由于 $0<x<1$，故 $z-x>1$，所以 $f_Z(z)=0$. 总之，

$$f_Z(z)=\begin{cases}2z-z^2, & 0<z\leqslant 1,\\ 4-4z+z^2, & 1<z\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（方法二） $F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}$

$$=\iint\limits_{x+y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$



$z\leqslant 0$ 时，$F_Z(z)=0$；

$0<z\leqslant 1$ 时，$F_Z(z)=\iint\limits_{x+y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^z\mathrm{d}x\int_0^{z-x}(2-x-y)\mathrm{d}y$$

$$=z^2-\frac{1}{3}z^3;$$

$1<z\leqslant 2$ 时，$F_Z(x)=\iint\limits_{x+y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=1-\iint\limits_{x+y\geqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=1-\int_{z-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{z-x}^{1}(2-x-y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{3}z^3-2z^2+4z-\frac{5}{3};$$

$z>2$ 时，$F_Z(z)=1$.

所以

$$f_Z(z)=\begin{cases}2z-z^2, & 0<z\leqslant 1,\\ 4-4z+z^2, & 1<z\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

19 (2008，22 题，11 分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 的概率分布为 $P\{X=i\}=\frac{1}{3}$ $(i=-1,0,1)$，Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 记 $Z=X+Y$.

（Ⅰ）求 $P\left\{Z\leqslant\frac{1}{2}\middle|X=0\right\}$；

（Ⅱ）求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$.

【分析】 本题考查均匀分布，随机变量的独立性，条件概率和随机变量简单函数的分布.

求 $P\left\{Z\leqslant\frac{1}{2}\middle|X=0\right\}$ 时，由于 $Z=X+Y$，且 X 与 Y 又独立，所以

微信公众号【顶尖考研】(ID: dijy66)

$$P\left\{Z\leqslant\frac{1}{2}\,\middle|\,X=0\right\}=P\left\{X+Y\leqslant\frac{1}{2}\,\middle|\,X=0\right\}=P\left\{Y\leqslant\frac{1}{2}\,\middle|\,X=0\right\}=P\left\{Y\leqslant\frac{1}{2}\right\}.$$

再利用 Y 均匀分布特性求 Z 的分布，即求 $F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}$. 可以将事件“$X+Y\leqslant z$”分解成

$$\{X+Y\leqslant z\}=\{X+Y\leqslant z,X=-1\}\cup\{X+Y\leqslant z,X=0\}\cup\{X+Y\leqslant z,X=1\}$$

就不难进一步求解.

【解】 (Ⅰ)$P\left\{Z\leqslant\frac{1}{2}\,\middle|\,X=0\right\}=P\left\{X+Y\leqslant\frac{1}{2}\,\middle|\,X=0\right\}$

$$=P\left\{Y\leqslant\frac{1}{2}\,\middle|\,X=0\right\}=P\left\{Y\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}.$$

(Ⅱ)$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}$

$$=P\{X+Y\leqslant z,X=-1\}+P\{X+Y\leqslant z,X=0\}+P\{X+Y\leqslant z,X=1\}$$

$$=P\{Y\leqslant z+1,X=-1\}+P\{Y\leqslant z,X=0\}+P\{Y\leqslant z-1,X=1\}$$

$$=P\{Y\leqslant z+1\}P\{X=-1\}+P\{Y\leqslant z\}P\{X=0\}+P\{Y\leqslant z-1\}P\{X=1\}$$

$$=\frac{1}{3}[P\{Y\leqslant z+1\}+P\{Y\leqslant z\}+P\{Y\leqslant z-1\}]$$

$$=\frac{1}{3}[F_Y(z+1)+F_Y(z)+F_Y(z-1)],$$

其中 $F_Y(z)$ 为 Y 的分布函数，由此得到

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\frac{1}{3}[f_Y(z+1)+f_Y(z)+f_Y(z-1)]=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1\leqslant z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

【评注】 ① 本题主要考查条件概率和独立性的运用，关键在于

$$P\left\{X+Y\leqslant\frac{1}{2}\,\middle|\,X=0\right\}=P\left\{Y\leqslant\frac{1}{2}\,\middle|\,X=0\right\}=P\left\{Y\leqslant\frac{1}{2}\right\}$$

② 在求 $F_Z(z)$ 时，也可用全概率公式：

$$P\{Z\leqslant z\}=\sum_{i=-1}^{1}P\{X=i\}P\{X+Y\leqslant z\mid X=i\}=\frac{1}{3}\sum_{i=-1}^{1}P\{Y\leqslant z-i\mid X=i\}$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{i=-1}^{1}P\{Y\leqslant z-i\}=\frac{1}{3}\sum_{i=-1}^{1}F_Y(z-i)$$

一般地说，如果 $Z=X+Y$，其中 X 是离散型随机变量，X 和 Y 又独立，常常采用本题所用的方法求解 $F_Z(z)$.

③ 当得到 $F_Z(z)=\frac{1}{3}[F_Y(z+1)+F_Y(z)+F_Y(z-1)]$ 后，就有

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\frac{1}{3}[f_Y(z+1)+f_Y(z)+f_Y(z-1)]$$

严格地说，$F_Y'(z)=f_Y(z)$ 只有当 $z\neq0$ 和 $z\neq1$ 时成立，因在 $z=0$ 和 $z=1$ 处 $f_Y(z)$ 不连续. 实际上，$F'_Y(z)$ 在 $z=0$ 和 $z=1$ 处不存在. 但作为密度函数，$f_Y(z)$ 个别点的取值并不影响 $f_Y(z)$ 和 $F_Y(z)$ 的概率性质，就直接写成 $F'_Y(z)=f_Y(z)$ 处处成立.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

第四章　随机变量的数字特征

本章导读

本章是概率论的重点之一，有相当多的考题涉及这章内容. 求随机变量的数字特征，包括数学期望、方差、矩、协方差、相关系数，所有这些数字特征都是求期望，求随机变量函数的数学期望.

试题特点

本章的试题除了求一些给定随机变量的数学期望外，很多题的数学期望或方差的计算都与常用分布有关，应该牢记常用分布的参数和它们的概率意义. 有些常用分布的参数就是该随机变量的数学期望或方差. 也应该会用数字特征的基本性质，会求一般随机变量函数的数学期望.

考题详析

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

一、数学期望与方差

1 (1987，十(3)题，2分) 已知连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}$，则 X 的数学期望为_____；X 的方差为_____.

【答案】 1；　$\frac{1}{2}$.

【解析】 正态分布随机变量 $N(\mu,\sigma^2)$ 的概率密度函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$-\infty<x<+\infty$.

对此可以看出本题 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2\cdot\frac{1}{2}}}\sim N\left(1,\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)$.

而正态 $N(\mu,\sigma^2)$ 的数学期望为 μ，方差为 σ^2，故 $E(X)=1$，$D(X)=\frac{1}{2}$.

2 (1989，十一题，6分) 设随机变量 X 与 Y 独立，且 X 服从均值为1，标准差(均方差)为 $\sqrt{2}$ 的正态分布，而 Y 服从标准正态分布. 试求随机变量 $Z=2X-Y+3$ 的概率密度函数.

【分析】 由相互独立两个正态随机变量的线性组合仍为正态分布，故 $Z=2X-Y+3$ 也一定为正态分布，求 Z 的概率密度函数只要确定 $E(Z)$ 和 $D(Z)$ 即可. 已知 $X\sim N(1,2)$ 和 $Y\sim N(0,1)$.

【解】 $E(Z)=E(2X-Y+3)=2E(X)-E(Y)+3=2-0+3=5$.

$D(Z)=D(2X)+D(Y)+0=4D(X)+1=8+1=9$，故 $Z\sim N(5,9)$.

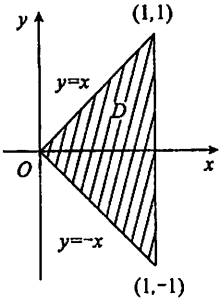
Z 的概率密度函数 $f_Z(z)=\dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-5)^2}{18}}$，$-\infty<z<+\infty$.

3 (1990，十(3)题，2分) 已知随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布，且随机变量 $Z=3X-2$，则 $E(Z)=$ _____.

【答案】 4.

【解析】 $E(X)=2$，$E(Z)=E(3X-2)=3E(X)-2=6-2=4$.

4 (1990，十一题，6分) 设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D:0<x<1$，$|y|<x$ (如右图) 内服从均匀分布，求关于 X 的边缘概率密度函数及随机变量 $Z=2X+1$ 的方差 $D(Z)$.



【分析】 区域 D 如图所示，其面积为 1，所以 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\ |y|<x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

设 X 的边缘概率密度函数 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$.

【解】 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{-x}^{x}1\mathrm{d}x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

$$D(Z)=D(2X+1)=4D(X)=4\{E(X^2)-[E(X)]^2\}$$

$$=4\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X(x)\mathrm{d}x-\left[\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x\right]^2\right\}$$

$$=4\left[\int_0^1 2x^3\mathrm{d}x-\left(\int_0^1 2x^2\mathrm{d}x\right)^3\right]=4\left[\frac{1}{2}-\frac{4}{9}\right]=\frac{2}{9}$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

5 (1992，十(2)题，3分) 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布，则数学期望 $E(X+e^{-2X})=$ _____.

【答案】 $\dfrac{4}{3}$.

【解析】 $E(X+e^{-2X})=E(X)+E(e^{-2X})=1+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x}f(x)\mathrm{d}x$

$$=1+\int_0^{+\infty}e^{-2x}e^{-x}\mathrm{d}x=1+\int_0^{+\infty}e^{-3x}\mathrm{d}x=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}.$$

6 (1995，十(1)题，3分) 设 X 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数，每次射中目标的概率为 0.4，则 X^2 的数学期望 $E(X^2)=$ _____.

【答案】 18.4.

【解析】 $X\sim B(10,0.4)$　$E(X)=np=10\times0.4=4$

$$D(X)=np(1-p)=10\times0.4\times0.6=2.4$$

$$E(X^2)=D(X)+(E(X))^2=2.4+(4)^2=18.4$$

7 (1996，十(2)题，3分) 设 ξ,η 是两个相互独立且均服从正态分布 $N\left(0,\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)$ 的随机变量，则随机变量 $|\xi-\eta|$ 的数学期望 $E(|\xi-\eta|)=$ _____.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【答案】 $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

【解析】 ξ 与 η 相互独立，且都服从 $N\left(0,\frac{1}{2}\right)$，所以 $\xi-\eta$ 也服从正态分布，记 $Z=\xi-\eta$，则 $Z\sim N(0,1)$.

$$E(|\xi-\eta|)=E(|Z|)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|z|}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=2\int_0^{+\infty}\frac{z}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}d\left(\frac{z^2}{2}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

8 (1996，十一题，6分) 设 ξ,η 是相互独立且服从同一分布的两个随机变量，已知 ξ 的分布律为 $P\{\xi=i\}=\frac{1}{3}$，$i=1,2,3$，又设 $X=\max\{\xi,\eta\}$，$Y=\min\{\xi,\eta\}$.

(1) 写出二维随机变量 (X,Y) 的分布律：

Y \ X	1	2	3
1			
2			
3			

微信公众号【顶尖考研】

(2) 求随机变量 X 的数学期望 $E(X)$.

【解】 (1)

ξ	1	2	3
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

，

η	1	2	3
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

，ξ,η 独立.

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{\max(\xi,\eta)=1,\min(\xi,\eta)=1\}$$

$$=P\{\xi=1,\eta=1\}=P\{\xi=1\}P\{\eta=1\}=\frac{1}{9}.$$

$$P\{X=1,Y=2\}=P\{\max(\xi,\eta)=1,\min(\xi,\eta)=2\}=0.$$

同理，$P\{X=1,Y=3\}=P\{X=2,Y=3\}=0$，

$$P\{X=2,Y=1\}=P\{\max(\xi,\eta)=2,\min(\xi,\eta)=1\}=P\{\xi=2,\eta=1\}+P\{\xi=1,\eta=2\}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

同理，$P\{X=3,Y=1\}=P\{X=3,Y=2\}=\frac{2}{9}$.

总之，

Y \ X	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$
2	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
3	0	0	$\frac{1}{9}$

(2)

Y \ X	1	2	3	
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	
2	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	
3	0	0	$\frac{1}{9}$	

则

Y \ X	1	2	3	
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	
2	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	
3	0	0	$\frac{1}{9}$	
	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{5}{9}$	

$$E(X)=\frac{1}{9}\cdot 1+\frac{3}{9}\cdot 2+\frac{5}{9}\cdot 3=\frac{21}{9}.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

9 (1997,二(5)题,3分) 设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 的方差分别为 4 和 2,则随机变量 $3X-2Y$ 的方差是

(A)8.　　(B)16.　　(C)28.　　(D)44.

【答案】 D.

【解析】 $D(3X-2Y)=9D(X)+4D(Y)=9\times 4+4\times 2=44.$

10 (1997,九题,7分) 从学校乘汽车到火车站的途中有 3 个交通岗,假设在各个交通岗遇到红灯的事件是相互独立的,并且概率都是 $\frac{2}{5}$,设 X 为途中遇到红灯的次数,求随机变量 X 的分布律、分布函数和数学期望.

【解】 汽车每遇到一次红灯,可以看成一次独立重复试验,X 服从二项分布 $B\left(3,\frac{2}{5}\right)$,$X$ 的可能取值为 0,1,2,3.

$$P\{X=0\}=\left(1-\frac{2}{5}\right)^3=\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$$

$$P\{X=1\}=C_3^1\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{54}{125}$$

$$P\{X=2\}=C_3^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\frac{3}{5}=\frac{36}{125}$$

$$P\{X=3\}=\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{8}{125}$$

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

总之 X 的分布律

X	0	1	2	3
p	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

X 的分布函数 $F(x)=P\{X\leqslant x\}=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{27}{125}, & 0\leqslant x<1\\ \frac{27}{125}+\frac{54}{125}, & 1\leqslant x<2\\ \frac{27}{125}+\frac{54}{125}+\frac{36}{125}, & 2\leqslant x<3\\ 1, & 3\leqslant x\end{cases}=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{27}{125}, & 0\leqslant x<1,\\ \frac{81}{125}, & 1\leqslant x<2,\\ \frac{117}{125}, & 2\leqslant x<3,\\ 1, & 3\leqslant x.\end{cases}$

X 的数学期望 $E(X)=0\cdot\frac{27}{125}+1\cdot\frac{54}{125}+2\cdot\frac{26}{125}+3\cdot\frac{8}{125}=\frac{150}{125}=\frac{6}{5}$

数学期望可用 $B(n,p)$ 的期望 $E(X)=n\cdot p=3\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$.

11 (1998,十三题,6分) 设两个随机变量 X,Y 相互独立,且都服从均值为0,方差为 $\frac{1}{2}$ 的正态分布,求随机变量 $|X-Y|$ 的方差.

【解】 令 $Z=X-Y$,由于 $X\sim N\left(0,\frac{1}{2}\right),Y\sim N\left(0,\frac{1}{2}\right)$,且 X 和 Y 相互独立,故 $Z\sim N(0,1)$.

$$D(|X-Y|)=D(|Z|)=E(|Z|^2)-[E(|Z|)]^2=E(Z^2)-[E(|Z|)]^2$$

而 $E(Z^2)=D(Z)=1$,以及 $E(|Z|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}ze^{-\frac{z^2}{2}}dz=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

总之 $D(|X-Y|)=1-\frac{2}{\pi}$.

12 (2000,十二题,8分) 某流水生产线上每个产品不合格的概率为 $p(0<p<1)$,各产品合格与否相互独立,当出现一个不合格产品时即停机检修. 设开机后第一次停机时已生产了的产品个数为 X,求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$.

【分析】 求 X 的期望、方差,先得求出 X 的分布,显然,X 是一个离散型随机变量,取值范围为 $1,2,3,\cdots$,生产线上每生产一个产品可以理解为一次试验,且是独立重复试验. 如果 $X=k$,就是第 k 个产品为次品而停机,前 $k-1$ 个产品必为合格品,如果生产一个次品看成一次试验成功,概率为 p,则前 $k-1$ 次试验均失败,概率为 $(1-p)^{k-1}$,所以

$$P\{X=k\}=pq^{k-1},k=1,2,\cdots$$

其中 $q=1-p$.

【解】 X 的分布为 $P\{X=k\}=pq^{k-1},k=1,2,\cdots$,此分布为几何分布.

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}kpq^{k-1}=p\sum_{k=1}^{\infty}(q^k)'_q=p\Big(\sum_{k=1}^{\infty}q^k\Big)'_q=p\Big(\sum_{k=0}^{\infty}q^k\Big)'_q=p\Big(\frac{1}{1-q}\Big)'_q$$

$$=p\cdot\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}.$$

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2pq^{k-1}=p\sum_{n=p}^{\infty}(kq^k)'_q=p\Big[q\Big(\sum_{n=1}^{\infty}q^k\Big)'_q\Big]'_q=p\Big[\frac{q}{(1-q)^2}\Big]'=\frac{2-p}{p^2}$$

所以 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

13 (2002,十一题,7 分) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0\leqslant x\leqslant\pi\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

对 X 独立地重复观察 4 次,用 Y 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数,求 Y^2 的数学期望.

【解】 观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 发生的概率 $P\left\{X>\frac{\pi}{3}\right\}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$,

$Y\sim B\left(4,\frac{1}{2}\right)$,因此 $E(Y)=4\times\frac{1}{2}=2$,$D(Y)=4\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=1$.

$$E(Y^2)=D(Y)+[E(Y)]^2=1+2^2=5$$

14 (2004,6 题,4 分) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布,则 $P\{X>\sqrt{D(X)}\}=$_____.

【答案】 $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

【解析】 X 服从参数为 λ 的指数分布,故 $D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$.

$$P\{X>\sqrt{D(X)}\}=P\left\{X>\frac{1}{\lambda}\right\}=\int_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

15 (2008,14 题,4 分) 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布,则 $P\{X=E(X^2)\}=$_____.

【答案】 $\frac{1}{2\mathrm{e}}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【解析】 $X\sim P(\lambda)$,则有 $P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$,$k=0,1,2,\cdots$

且 $E(X)=\lambda$,$D(X)=\lambda$,现 $\lambda=1$,直接代入即可.

$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=1+1^2=2$,所以

$$P\{X=E(X^2)\}=P\{X=2\}=\frac{1^2}{2!}\mathrm{e}^{-1}=\frac{1}{2\mathrm{e}}$$

二、协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)$

16 (1993,十一题,6 分) 设随机变量 X 的概率分布密度为 $f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$,$-\infty<x<+\infty$.

(1) 求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$;

(2) 求 X 与 $|X|$ 的协方差,并问 X 与 $|X|$ 是否不相关?

(3) 问 X 与 $|X|$ 是否相互独立?为什么?

【解】 (1) 因为 $xf(x)$ 是奇函数,所以 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=0$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x-0=\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2$$

所以 $E(X)=0$,$D(X)=2$.

(2) X 与 $|X|$ 的协方差 $\mathrm{Cov}(X,|X|)=E(X|X|)-E(X)E(|X|)$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x|x|f(x)\mathrm{d}x-0=0$$

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

注意 $x|x|f(x)$ 也是奇函数，协方差为 0，则相关系数 $\rho=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,|X|)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(|X|)}}$ 也为 0.

X 与 $|X|$ 不相关.

(3) 显然事件 $\{|X|\leqslant 1\}$ 被包含在事件 $\{X\leqslant 1\}$ 内，$0<P\{|X|<1\}\leqslant P\{X<1\}<1$.

如果 $X|X|$ 相互独立，则 $P\{X\leqslant 1,|X|\leqslant 1\}=P\{X\leqslant 1\}P\{|X|\leqslant 1\}$，

而 $P\{X\leqslant 1,|X|\leqslant 1\}=P\{|X|\leqslant 1\}$，所以应有 $P\{X\leqslant 1\}=1$ 这是不可能的，反证了 X，$|X|$ 不独立.

17 (2004，14 题，4 分) 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$ 独立同分布，且其方差为 $\sigma^2>0$. 令 $Y=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，则

(A)$\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\dfrac{\sigma^2}{n}$.　　(B)$\mathrm{Cov}(X,Y)=\sigma^2$.

(C)$D(X_1+Y)=\dfrac{n+2}{n}\sigma^2$.　　(D)$D(X_1-Y)=\dfrac{n+1}{n}\sigma^2$.

【答案】 A.

【解析】 $\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\mathrm{Cov}\left(X_1,\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\mathrm{Cov}\left(X_1,\dfrac{1}{n}X_1\right)+\mathrm{Cov}\left(X_1,\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=2}^{n}X_i\right)$

$$=\frac{1}{n}\mathrm{Cov}(X_1,X_1)+0=\frac{\sigma^2}{n}.$$

18 (2005，23 题，9 分) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，记 $Y_i=X_i-\overline{X},i=1,2,\cdots,n$.

求 (Ⅰ) Y_i 的方差 $D(Y_i),i=1,2,\cdots,n$；

(Ⅱ) Y_1 与 Y_n 的协方差 $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)$.

【分析】 随机变量的方差、协方差.

求 $D(Y_i)$ 时，$Y_i=X_i-\overline{X}$，而 $\overline{X}$ 中又有 X_i 的成分，因而 X_i 与 $\overline{X}$ 不独立. 故

$$D(Y_i)=D(X_i-\overline{X})\neq D(X_i)+D(\overline{X}).$$

应该将 $\overline{X}$ 中的 X_i 成分与 X_i 合并，再用 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的相互独立性求解. 求 $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)$ 也用类似的方法.

【解】 (Ⅰ) $D(Y_i)=D(X_i-\overline{X})=D\left[\left(1-\dfrac{1}{n}\right)X_i-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}X_j\right]$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)^2D(X_i)+\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}D(X_j)$$

$$=\frac{(n-1)^2}{n^2}+\frac{n-1}{n^2}=\frac{n-1}{n},\qquad i=1,2,3,\cdots,n.$$

(Ⅱ) $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)=E[Y_1-E(Y_1)][Y_n-E(Y_n)]=E(Y_1Y_n)=E(X_1-\overline{X})(X_n-\overline{X})$

$$=E(X_1X_n-X_1\overline{X}-X_n\overline{X}+\overline{X}^2)=E(X_1X_n)-E(X_1\overline{X})-E(X_n\overline{X})+E(\overline{X}^2)$$

$$=E(X_1)E(X_n)-2E(X_1\overline{X})+D(\overline{X})+[E(\overline{X})]^2$$

$$=0-2\times\frac{1}{n}E\left(X_1^2+\sum_{j=2}^{n}X_1X_j\right)+D(\overline{X})+0$$

$$=-\frac{2}{n}\times(1+0)+\frac{1}{n}=-\frac{1}{n}.$$

【评注】 (1) 计算过程中用到 $E(X_i)=E(\overline{X})=E(Y_i)=0$.

(2) 在(Ⅱ)的计算中,由对称性得 $E(X_1\overline{X})=E(X_n\overline{X})$.

(3) 协方差的计算,一般有几种途径:

$$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)=E[Y_1-E(Y_1)][Y_n-E(Y_n)]=\cdots$$

$$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)=\mathrm{Cov}(X_1-\overline{X},X_n-\overline{X})=\cdots$$

$$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)=E(Y_1Y_n)-E(Y_1)E(Y_n)=\cdots$$

至于选择哪一种方便要具体分析,本题由于 $E(Y_i)=0$,所以选择

$$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)=E(Y_1Y_n)=E(X_1-\overline{X})(X_n-\overline{X})=\cdots$$

如果选

$$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)=\mathrm{Cov}(X_1-\overline{X},X_n-\overline{X})$$

$$=\mathrm{Cov}(X_1,X_n)-\mathrm{Cov}(X_1,\overline{X})-\mathrm{Cov}(X_n,\overline{X})+\mathrm{Cov}(\overline{X},\overline{X})=\cdots$$

也可以同样求得结果.

(4) 在本题求解过程中将 $Y_i=X_i-\overline{X}=(1-\frac{1}{n})X_i-\frac{1}{n}\sum\limits_{j\neq i}X_j$

即将原来不独立的 X_i 和 $\overline{X}$,改成独立的 $(1-\frac{1}{n})X_i-\frac{1}{n}\sum\limits_{j\neq i}X_j$ 两部分,这种基本运算方法在历年考题中常有涉及.应该掌握.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

三、相关系数 ρ_{XY}

19 (1994,十一题,6 分) 已知随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布,并且 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(1,3^2)$ 和 $N(0,4^2)$,X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$,设 $Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$.

(1) 求 Z 的数学期望 $E(Z)$ 和方差 $D(Z)$;

(2) 求 X 与 Z 的相关系数 ρ_{XZ};

(3) 问 X 与 Z 是否相互独立?为什么?

【解】 (1) $(X,Y)\sim N(1,0;9,16;-\frac{1}{2})$ 知

$$E(Z)=E\left(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=\frac{E(X)}{3}+\frac{E(Y)}{2}=\frac{1}{3}+\frac{0}{2}=\frac{1}{3},$$

$$D(Z)=D\left(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=\frac{D(X)}{9}+\frac{D(Y)}{4}+2\mathrm{Cov}\left(\frac{X}{3},\frac{Y}{2}\right)=1+4+\frac{1}{3}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$$

$$=1+4-2=3.$$

$$(2)\rho_{XZ}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Z)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Z)}},$$

$$\mathrm{Cov}(X,Z)=\mathrm{Cov}\left(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=\frac{1}{3}\mathrm{Cov}(X,X)+\frac{1}{2}\mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$=\frac{1}{3}D(X)+\frac{1}{2}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=3-3=0$$

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

所以 $\rho_{XZ}=0$.

(3) 因为(X,Y)是正态分布,故$\left(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)$即$(X,Z)$也是正态分布,又$\rho_{XZ}=0$,所以$X$与$Z$相互独立.

20 (2000,二(5)题,3分)设二维随机变量(X,Y)服从二维正态分布,则随机变量$\xi=X+Y$与$\eta=X-Y$不相关的充分必要条件为

(A)$E(X)=E(Y)$. (B)$E(X^2)-[E(X)]^2=E(Y^2)-[E(Y)]^2$.

(C)$E(X^2)=E(Y^2)$. (D)$E(X^2)+[E(X)]^2=E(Y^2)+[E(Y)]^2$.

【答案】 B.

【解析】 $\xi=X+Y$与$\eta=X-Y$不相关充要条件是它们的相关系数为0.

相关系数$\rho_{\xi\eta}=\dfrac{\mathrm{Cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D(\xi)}\sqrt{D(\eta)}}=0$,即

$$\mathrm{Cov}(\xi,\eta)=\mathrm{Cov}(X+Y,X-Y)=\mathrm{Cov}(X,X)-\mathrm{Cov}(X,Y)+\mathrm{Cov}(Y,X)-\mathrm{Cov}(Y,Y)$$
$$=D(X)-D(Y)=0.$$

就是$D(X)=D(Y)$,$E(X^2)-[E(X)]^2=E(Y^2)-[E(Y)]^2$.

21 (2001,二(5)题,3分)将一枚硬币重复掷n次,以X和Y分别表示正面向上和反面向上的次数,则X和Y的相关系数等于

(A)-1. (B)0. (C)$\frac{1}{2}$. (D)1.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: dingjky66)

【答案】 A.

【解析】 $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$,显然$X+Y=n$,$D(Y)=D(n-X)=D(X)$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(X,n-X)=\mathrm{Cov}(X,n)-\mathrm{Cov}(X,X)=-D(X)$$

所以$\rho_{XY}=\dfrac{-D(X)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(X)}}=-1$.

22 (2004,22题,9分)设A,B为随机事件,且$P(A)=\frac{1}{4}$,$P(B\mid A)=\frac{1}{3}$,$P(A\mid B)=\frac{1}{2}$,令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生}\\ 0, & A\text{不发生}\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生}\\ 0, & B\text{不发生}\end{cases}$$

求:(Ⅰ)二维随机变量(X,Y)的概率分布;

(Ⅱ)X与Y的相关系数ρ_{XY}.

【解】 (Ⅰ)由$X=\begin{cases}1, & A,\\ 0, & \overline{A},\end{cases}$ $Y=\begin{cases}1, & B,\\ 0, & \overline{B}\end{cases}$和$P(A)=\frac{1}{4}$得到

X \ Y	$\overline{B}$ 0	B 1	
$\overline{A}$ 0			$\frac{3}{4}$
A 1			$\frac{1}{4}$

再由$P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{3}$,故$P(AB)=\frac{1}{3}P(A)=\frac{1}{12}$.

又因$P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{2}$,故$P(B)=\dfrac{P(AB)}{\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}$.

将$P(AB)=\frac{1}{12}$和$P(B)=\frac{1}{6}$填入分布,得

X \ Y	$\overline{B}$	B	
	0	1	
$\overline{A}$ 0			$\frac{3}{4}$
A 1		$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
		$\frac{1}{6}$	

，进一步有

X \ Y	$\overline{B}$	B	
	0	1	
$\overline{A}$ 0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{4}$
A 1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	

(Ⅱ) $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\dfrac{E(XY)-E(X)\cdot E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$

由于

X	0	1
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

，所以 $E(X)=\frac{1}{4}$，$D(X)=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$.

同理

Y	0	1
P	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

，$E(Y)=\frac{1}{6}$，$D(Y)=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{36}$，$E(XY)=1\cdot P(AB)=\frac{1}{12}$.

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=\frac{1}{12}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{24}.$$

$$\rho_{XY}=\frac{\frac{1}{24}}{\sqrt{\frac{3}{16}}\sqrt{\frac{5}{36}}}=\frac{1}{\sqrt{15}}.$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

23 (2008,8 题,4 分) 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,4)$ 且相关系数 $\rho_{XY}=1$，则

(A) $P\{Y=-2X-1\}=1$.　　(B) $P\{Y=2X-1\}=1$.

(C) $P\{Y=-2X+1\}=1$.　　(D) $P\{Y=2X+1\}=1$.

【答案】 D.

【解析】 先来确定常数 b，由 $P\{Y=aX+b\}=1$. 可得到 $E(Y)=aE(X)+b$，

再因为 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,4)$，所以，$1=a\cdot 0+b$，即得 $b=1$.

现来求常数 a，实际上只要判定 a 的正负号就可以了.

$$1=\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}$$

而

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(X,aX+b)=a\mathrm{Cov}(X,X)=a$$

故 $a>0$. 答案应选(D).

【评注】 从 $1=\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\dfrac{a\mathrm{Cov}(X,X)}{\sqrt{1}\sqrt{4}}=\dfrac{a}{2}$，也可得到 $a=2$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

第五章　大数定律和中心极限定理

本章导读

本章内容不是考试的重点.2001 年考过一次切比雪夫不等式,近十年就没再考过.本章内容包括一个不等式:切比雪夫不等式;三个大数定律:切比雪夫大数定律、伯努利大数定律、辛钦大数定律;二个中心极限定理:棣莫弗 — 拉普拉斯定理、列维 — 林德伯格定理.

试题特点

本章试题大多是简单的选择题和填空题.只要把这些不等式、定律和定理的条件与结论记住就可以了.前几年数三、数四曾经有用中心极限定理来近似计算的解答题.但由于考试时不能使用计算器,因计算量过大这类考题近几年也不太多出现.

考题详析

1 (2001,一(5)题,3 分)设随机变量 X 的方差为 2,则根据切比雪夫不等式有估计 $P\{|X-E(X)|\geqslant 2\}\leqslant$ _____.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djkv66)

【答案】 $\frac{1}{2}$.

【解析】 $P\{|X-E(X)|\geqslant 2\}\leqslant\frac{D(X)}{2^2}=\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}$.

第六章 数理统计的基本概念

本章导读

本章是数理统计的基础，也是重点之一. 数理统计的基本概念包括总体、简单随机样本、统计量、样本均值、样本方差等. 特别对正态总体的分布及其性质应予以充分的注意，对 χ^2 分布、t 分布和 F 分布，要掌握这些分布对应随机变量的典型模式和它们参数的确定.

试题特点

这几年数一的数理统计考一个大题，有时还会有一个填空题或选择题. 一般来说，数理统计是历届考生的薄弱点，很多考生感到公式多不好记，其实只要熟记一个总体的 $\overline{X}, S^2, E(\overline{X}), D(\overline{X})$，$E(X^2)$ 和 χ^2 分布，t 分布，F 分布的典型模式和参数，尤其正态总体抽样分布的一些性质就可以了.

考题详析

1 (2001，十二题，7 分) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$，从该总体中抽取简单随机样本 $X_1, X_2, \cdots, X_{2n}$ $(n\geqslant 2)$，其样本均值为 $\overline{X}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$，求统计量 $Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2$ 的数学期望 $E(Y)$.

【解】 (方法一) 构造一个新的简单随机样本：$(X_1+X_{n+1}), (X_2+X_{n+2}), \cdots, (X_n+X_{2n})$.

可以将此样本看作来自总体 $N(2\mu, 2\sigma^2)$，新样本均值为

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i})=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{2n}X_j=2\overline{X}$$

新样本方差为 $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2=\frac{1}{n-1}Y$.

因此，$E\left(\frac{1}{n-1}Y\right)=2\sigma^2$，即 $E(Y)=2(n-1)\sigma^2$.

(方法二) 记 $\overline{X}'=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, \overline{X}''=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{n+i}$，显然有

$$\overline{X}'+\overline{X}''=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}X_i=2\overline{X}$$

$$E(Y)=E\Big[\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2\Big]=E\Big\{\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\overline{X}')+(X_{n+i}-\overline{X}'')]^2\Big\}$$

$$=E\Big\{\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\overline{X}')^2+2(X_i-\overline{X}')(X_{n+i}-\overline{X}'')+(X_{n+i}-\overline{X}'')^2]\Big\}$$

$$=(n-1)E\Big[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}')^2\Big]+0+(n-1)E\Big[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_{n+i}-\overline{X}'')^2\Big]$$

$$=(n-1)\sigma^2+(n-1)\sigma^2=2(n-1)\sigma^2$$

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

2 (2003,二(6)题,4分)设随机变量 $X \sim t(n)(n>1)$,$Y=\frac{1}{X^2}$,则

(A)$Y \sim \chi^2(n)$. (B)$Y \sim \chi^2(n-1)$. (C)$Y \sim F(n,1)$. (D)$Y \sim F(1,n)$.

【答案】 C.

【解析】 $t(n)$ 的典型模式为 $X=\frac{X_1}{\sqrt{Y_1/n}}$,其中 ①$X_1 \sim N(0,1)$,②$Y_1 \sim \chi^2(n)$,③$X,Y$ 独立.

现 $Y=\frac{1}{X^2}=\frac{Y_1/n}{X_1^2}$ 满足条件 ①$Y_1 \sim \chi^2(n)$,②$X_1^2 \sim \chi^2(1)$,③Y_1,X_1^2 独立.

因此 $Y \sim F(n,1)$.

3 (2005,14题,4分)设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本,$\overline{X}$ 为样本均值,S^2 为样本方差,则

(A)$n\overline{X} \sim N(0,1)$. (B)$nS^2 \sim \chi^2(n)$.

(C)$\frac{(n-1)\overline{X}}{S} \sim t(n-1)$. (D)$\frac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n}X_i^2} \sim F(1,n-1)$.

【答案】 D.

【解析】 有关正态总体 $N(0,1)$ 的常用抽样分布,考生应掌握 $\overline{X} \sim N(0,\frac{1}{n})$,$\overline{X},S^2$ 独立,且 $(n-1)S^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$,以及 $\frac{\overline{X}}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1)$.

用这些性质不难看出(A)(B)(C)均不正确.

$X_1^2 \sim \chi^2(1)$,$\sum\limits_{i=2}^{n}X_i^2 \sim \chi^2(n-1)$ 且 X_1^2 与 $\sum\limits_{i=2}^{n}X_i^2$ 相互独立,因此

$$\frac{X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n}X_i^2\Big/(n-1)}=\frac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n}X_i^2} \sim F(1,n-1).$$

答案应选(D).

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

第七章 参数估计

本章导读

本章内容是考试重点之一，尤其是矩估计法和最大似然估计法是经常考的大题. 有时还会要求验证所得估计量的无偏性. 区间估计常常是对单个正态总体均值求置信区间. 多年来，基本不涉及两个正态总体的参数估计.

试题特点

矩估计法和最大似然估计法一般只对一个参数进行估计，要熟悉离散型和连续型两种不同的形式处理，尤其要正确写出最大似然估计中的似然函数.

估计量的无偏性有时以一个小题单独出现. 结合第六章的一些基本概念，按数学期望求.

考题详析

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

一、参数的矩估计和最大似然估计

1 (1997，十题，5 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 $\theta>-1$ 是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个容量为 n 的简单随机样本，分别用矩估计法和极大似然估计法求 θ 的估计量.

【解】 矩估计量 $\hat{\theta}_1$：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(\theta+1)x^{\theta+1}\mathrm{d}x=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}$.

设 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 为样本均值，令 $\dfrac{\theta+1}{\theta+2}=\overline{X}$，解得 $\theta=\dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$，矩估计量 $\hat{\theta}_1=\dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$.

极大似然估计量 $\hat{\theta}_2$：似然函数 $L=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i)=\begin{cases}(\theta+1)^n\prod\limits_{i=1}^{n}x_i^{\theta}, & 0<\begin{matrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{matrix}<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

当 $0<\begin{matrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{matrix}<1$ 时，$L>0$，$\ln L=n\ln(\theta+1)+\theta\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i$，

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

令$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$,解得$\theta=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$.

从而得θ的最大似然估计量为$\hat{\theta}_2=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$

2 (1999,十三题,6分) 设总体X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{6x}{\theta^3}(\theta-x), & 0<x<\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$是取自总体X的简单随机样本.

(1) 求θ的矩估计量$\hat{\theta}$;

(2) 求$\hat{\theta}$的方差$D(\hat{\theta})$.

【解】 (1)$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\theta}\frac{6x^2}{\theta^3}(\theta-x)\mathrm{d}x=\frac{\theta}{2}$.

记$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$,令$E(X)=\overline{X}$,即$\frac{\theta}{2}=\overline{X}$解得$\theta$的矩估计量为

$$\hat{\theta}=2\overline{X}$$

(2)$\hat{\theta}$的方差$D(\hat{\theta})=D(2\overline{X})=4D(\overline{X})=\frac{4}{n}D(X)$

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$,$E(X)=\frac{\theta}{2}$

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\theta}\frac{6x^3}{\theta^3}(\theta-x)\mathrm{d}x=\frac{6\theta^2}{20}$

所以$D(X)=\frac{6\theta^2}{20}-\left(\frac{\theta}{2}\right)^2=\frac{\theta^2}{20}$

最后得$D(\hat{\theta})=\frac{4}{n}D(X)=\frac{\theta^2}{5n}$.

3 (2000,十三题,6分) 设某种元件的使用寿命X的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\leqslant\theta\end{cases}$$

其中$\theta>0$为未知参数.又设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是X的一组样本观测值,求参数θ的最大似然估计值.

【解】 似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}2^n\mathrm{e}^{-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}, & \begin{matrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{matrix}>\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当$\begin{matrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{matrix}>\theta$时,$L(\theta)>0$,$\ln L(\theta)=n\ln 2-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)$

微信公众号【顶尖考研】(ID: dijy66)

因$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=2n>0$,所以$L(\theta)$单调增加.

由于θ必须满足$\theta<\begin{matrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{matrix}$,因此,当$\theta$取$x_1,x_2,\cdots,x_n$中最小值时,$L(\theta)$取最大值,所以$\theta$的最大似然估计值为

$$\hat{\theta}=\min(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

4 (2002,十二题,7分)设总体X的概率分布为

X	0	1	2	3
p	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中$\theta\left(0<\theta<\frac{1}{2}\right)$是未知参数,利用总体$X$的如下样本值

$$3,1,3,0,3,1,2,3$$

求θ的矩估计值和最大似然估计值.

【解】 矩估计值

$$E(X)=0\times\theta^2+1\times2\theta(1-\theta)+2\times\theta^2+3\times(1-2\theta)=3-4\theta$$

$$\bar{x}=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}+1+3+0+2+3\right)=2$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

令$E(X)=\bar{x}$,即$3-4\theta=2$,解得θ的矩估计值为$\hat{\theta}_1=\frac{1}{4}$.

最大似然估计值

对于给定的样本值,似然函数为$L(\theta)=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4$.

$$\ln L(\theta)=\ln 4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta)$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{6}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=\frac{6-28\theta+24\theta^2}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)}$$

令$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$,解得$\theta_{1,2}=\frac{75\sqrt{13}}{12}$,因$\frac{2+\sqrt{13}}{12}>\frac{1}{2}$不合题意.

所以θ的最大似然估计值为$\hat{\theta}_2=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$.

5 (2004,23题,9分)设总体X的分布函数为

$$F(x;\beta)=\begin{cases}1-\frac{1}{x^\beta}, & x>1\\ 0, & x\leqslant 1\end{cases}$$

其中未知参数$\beta>1$. $X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的简单随机样本.求:

(1)β的矩估计量;

(2)β的最大似然估计量.

【解】 (1)X的概率密度为$f(x;\beta)=\begin{cases}\frac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x>1,\\ 0, & x\leqslant 1.\end{cases}$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\beta)\mathrm{d}x=\int_{1}^{+\infty}x\cdot\frac{\beta}{x^{\beta+1}}\mathrm{d}x=\frac{\beta}{\beta-1}$$

令 $E(X)=\overline{X}$，即 $\frac{\beta}{\beta-1}=\overline{X}$，解得 $\beta=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$

所以 β 的矩估计量 $\hat{\beta}_1=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$.

(2) 似然函数

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta^n}{(x_1x_2\cdots x_n)^{\beta+1}}, & \begin{matrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{matrix}>1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当 $\begin{matrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{matrix}>1$ 时，$L(\beta)>0$，$\ln L(\beta)=n\ln\beta-(\beta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$，$\frac{\mathrm{d}\ln L(\beta)}{\mathrm{d}\beta}=\frac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$，

解得 $\beta=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$，则 β 的最大似然估计量 $\hat{\beta}_2=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

6 (2006，23 题，9 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1,\\ 1-\theta, & 1\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

微信公众号【顶尖考研】

其中 θ 是未知参数 $(0<\theta<1)$. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，记 N 为样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中小于 1 的个数. 求 θ 的最大似然估计.

【分析】 最大似然估计的关键是写出似然函数. 样本值中 x_i 小于 1 的概率为 θ，x_i 大于等于 1 的概率为 $(1-\theta)$. 因此，似然函数应为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\theta^N(1-\theta)^{n-N}$$

【解】 似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\theta^N(1-\theta)^{n-N}$$

取对数，得

$$\ln L(\theta)=N\ln\theta+(n-N)\ln(1-\theta)$$

两边对 θ 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{N}{\theta}-\frac{n-N}{1-\theta}$$

令 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$，得 $\theta=\frac{N}{n}$，显然 $\theta=\frac{N}{n}$，$L(\theta)$ 最大. 所以 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta}=\frac{N}{n}$.

7 (2007，24 题，11 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta}, & 0<x<\theta,\\ \dfrac{1}{2(1-\theta)}, & \theta\leqslant x<1,\\ 0, & \text{其他,}\end{cases}$$

其中参数 $\theta(0<\theta<1)$ 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，$\overline{X}$ 是样本均值.

（Ⅰ）求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$；

（Ⅱ）判断 $4\overline{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量，并说明理由.

【分析】　用矩估计求唯一参数 θ，只要令样本均值 $\overline{X}$ 等于总体的期望 $E(X)$ 就可以求得. 判断 $4\overline{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量，只要判断 $E(4\overline{X}^2)=\theta^2$ 是否成立？

【解】　（Ⅰ）$E(X)=\int_0^{\theta}\frac{x}{2\theta}\mathrm{d}x+\int_{\theta}^{1}\frac{x}{2(1-\theta)}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\theta$，令 $\overline{X}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\theta$，解得 $\theta=2\overline{X}-\frac{1}{2}$.

所以参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=2\overline{X}-\frac{1}{2}$.

（Ⅱ）$E(4\overline{X}^2)=4E(\overline{X}^2)=4[D(\overline{X})+(E(\overline{X}))^2]=4\left[\frac{D(X)}{n}+(E(X))^2\right]$.

由（Ⅰ）知 $E(X)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\theta$. 又有

$$E(X^2)=\int_0^{\theta}\frac{x^2}{2\theta}\mathrm{d}x+\int_{\theta}^{1}\frac{x^2}{2(1-\theta)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\theta}\cdot\frac{\theta^3}{3}+\frac{1}{2(1-\theta)}\cdot\frac{1-\theta^3}{3}=\frac{1}{6}(1+\theta+2\theta^2).$$

$$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{1}{6}(1+\theta+2\theta^2)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\theta\right)^2=\frac{5}{48}-\frac{\theta}{12}+\frac{\theta^2}{12}$$

所以，

$$E(4\overline{X}^2)=4\left[\frac{D(X)}{n}+(E(X))^2\right]=4\left[\frac{5}{48n}-\frac{\theta}{12n}+\frac{\theta^2}{12n}+\frac{1}{16}+\frac{\theta}{4}+\frac{\theta^2}{4}\right]$$

$$=\frac{3n+5}{12n}+\frac{3n-1}{3n}\theta+\frac{3n+1}{3n}\theta^2.$$

因此，$4\overline{X}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计量.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

【评注】　（Ⅱ）证明 $E(4\overline{X}^2)\neq\theta^2$，可以简化计算，$E(4\overline{X}^2)=4E(\overline{X}^2)=4[D(\overline{X})+(E(\overline{X}))^2]$

$=4\left[\frac{D(X)}{n}+(E(X))^2\right]>4(E(X))^2>4\left(\frac{1}{4}+\frac{\theta}{2}\right)^2>\theta^2$.

二、无偏估计量与置信区间

8　(1998，十四题，4 分) 从正态总体 $N(3.4,6^2)$ 中抽取容量为 n 的样本，如果要求其样本均值位于区间 $(1.4,5.4)$ 内的概率不小于 0.95，问样本容量 n 至少应取多大？

附：标准正态分布表

$$\Phi(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

z	1.28	1.645	1.96	2.33
$\Phi(z)$	0.900	0.950	0.975	0.990

【解】　以 $\overline{X}$ 表示该样本均值，则

$$\frac{\overline{X}-3.4}{6}\sqrt{n}\sim N(0,1)$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

从而有 $P\{1.4<\overline{X}<5.4\}=P\{-2<\overline{X}-3.4<2\}=P\{|\overline{X}-3.4|<2\}$

$$=P\left\{\frac{|\overline{X}-3.4|}{6}\sqrt{n}<\frac{2\sqrt{n}}{6}\right\}=2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)-1\geqslant 0.95.$$

故 $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)\geqslant 0.975$，由此得 $\frac{\sqrt{n}}{3}\geqslant 1.96$，即 $n\geqslant(1.96\times 3)^2\approx 34.57$.

所以 n 至少应取 35.

9 (2003，一(6)题，4分) 已知一批零件的长度 X(单位：cm) 服从正态分布 $N(\mu,1)$，从中随机地抽取 16 个零件，得到长度的平均值为 40(cm)，则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是_____.
(注：标准正态分布函数值 $\Phi(1.96)=0.975$，$\Phi(1.65)=0.95$.)

【答案】 (39.51，40.49).

【解析】 正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 已知，μ 的 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left(\overline{X}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

现 $\overline{X}=40$，$n=16$，$\sigma=1$，$u_{\alpha/2}=1.96$，所以 $u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1.96\times\frac{1}{4}=0.49$.

置信区间应为(39.51，40.49).

10 (2003，十二题，8分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\leqslant\theta\end{cases}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

其中 $\theta>0$ 是未知参数. 从总体 X 中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，记 $\hat{\theta}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.

(1) 求总体 X 的分布函数 $F(x)$；

(2) 求统计量 $\hat{\theta}$ 的分布函数 $F_{\hat{\theta}}(x)$；

(3) 如果用 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量，讨论它是否具有无偏性.

【解】 (1)$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}1-e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta,\\ 0, & x\leqslant\theta.\end{cases}$

(2)$F_{\hat{\theta}}(x)=P\{\hat{\theta}\leqslant x\}=P\{\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)\leqslant x\}=1-P\{\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)>x\}$

$=1-P\{X_1>x,X_2>x,\cdots,X_n>x\}=1-P\{X_1>x\}P\{X_2>x\}\cdots P\{X_n>x\}$

$=1-[1-P\{X_1\leqslant x\}][1-P\{X_2\leqslant x\}]\cdots[1-P\{X_n\leqslant x\}]$

$=1-[1-F(x)]^n=\begin{cases}1-e^{-2n(x-\theta)}, & x>\theta,\\ 0, & x\leqslant\theta.\end{cases}$

(3)$\hat{\theta}$ 的概率密度为

$$f_{\hat{\theta}}(x)=F'_{\hat{\theta}}(x)=\begin{cases}2ne^{-2n(x-\theta)}, & x>\theta,\\ 0, & x\leqslant\theta.\end{cases}$$

$$E(\hat{\theta})=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{\hat{\theta}}(x)dx=\int_{\theta}^{+\infty}2nxe^{-2(x-\theta)}dx=\theta+\frac{1}{2n}$$

$$E(\hat{\theta})=\theta+\frac{1}{2n}\neq\theta$$

所以 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量不具有无偏性.

11 (2008,23 题,11 分) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本. 记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2$$

(Ⅰ) 证明 T 是 μ^2 的无偏估计量;

(Ⅱ) 当 $\mu=0,\sigma=1$ 时,求 $D(T)$.

【分析】 (Ⅰ) 证明 T 是 μ^2 的无偏估计量,只要验证 $E(T)=E\left(\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2\right)=\mu^2$. 由 $E(\overline{X})=\mu,D(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n},E(S^2)=\sigma^2$,就不难求得 $E(T)$.

(Ⅱ) 当 $\mu=0,\sigma=1$ 时,总体为标准正态分布 $N(0,1)$,且 $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立. 如果用公式

$$D(T)=E(T^2)-(E(T))^2=E(T^2)=E\left(\overline{X}^4-\frac{2}{n}\overline{X}^2\cdot S^2+\frac{S^4}{n^2}\right)$$

计算会很繁杂.

如果利用 $\overline{X},S^2$ 的独立性,$D(T)=D\left(\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2\right)=D(\overline{X}^2)+\frac{1}{n^2}D(S^2)$,再直接计算

$$D(\overline{X}^2)=D\left(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2+\frac{1}{n^2}\sum_{i\neq j}X_iX_j\right)$$

和 $D(S^2)$ 更困难.

注意到 $\sqrt{n}\,\overline{X}\sim N(0,1)$,即 $n\overline{X}^2\sim\chi^2(1)$,和 $(n-1)S^2\sim\chi^2(n-1)$,而 $D(\chi^2(n))=2n$. 再来计算 $D(T)=D(\overline{X}^2)+\frac{1}{n^2}D(S^2)$ 就不困难了.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【解】 (Ⅰ) $E(T)=E\left(\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2\right)=E(\overline{X}^2)-\frac{1}{n}E(S^2)$

$$=D(\overline{X})+(E(\overline{X}))^2-\frac{1}{n}E(S^2)=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2-\frac{\sigma^2}{n}=\mu^2.$$

所以 T 是 μ^2 的无偏估计量.

(Ⅱ) 当 $\mu=0,\sigma=1$ 时,$\overline{X}\sim N\left(0,\frac{1}{n}\right)$,即有 $n\overline{X}^2\sim\chi^2(1),(n-1)S^2\sim\chi^2(n-1)$.

注意到 $\overline{X}$ 与 S^2 是相互独立的,且 $D(\chi^2(n))=2n$,所以

$$\begin{aligned}D(T)&=D\left(\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2\right)=D(\overline{X}^2)+\frac{1}{n^2}D(S^2)\\&=\frac{1}{n^2}D(n\overline{X}^2)+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{(n-1)^2}D[(n-1)S^2]\\&=\frac{1}{n^2}\times2+\frac{1}{n^2(n-1)^2}\times2(n-1)\\&=\frac{2}{n^2}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=\frac{2}{n(n-1)}.\end{aligned}$$

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

第八章　假设检验

本章导读

假设检验是在历年考题中出现最少的一类内容，1998 年的真题中曾出现过，再就是 2018 年的考题. 假设检验的重点在作出“假设”的基本类型，显著性检验的基本思想，检验的基本步骤，两类错误等.

试题特点

假设检验的情况较多，考试时间有限，又不能使用计算器，所以一般考题考查单个总体的均值较多. 应该记住方差已知和方差未知时，单个正态总体均值的假设检验的假设类型. 统计量选择、检验的基本步骤. 根据显著水平确定拒绝域等.

考题详析

例 (1998，十五题，4 分) 设某次考试的考生成绩服从正态分布，从中随机地抽取 36 位考生的成绩，算得平均成绩为 66.5 分，标准差为 15 分. 问在显著性水平 0.05 下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分?并给出检验过程.

附：t 分布表

$$P\{t(n) \leqslant t_p(n)\} = p$$

n \ p	0.95	0.975
35	1.689 6	2.030 1
36	1.688 3	2.028 1

【解】 设该次考试的考生成绩为 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$. 把从 X 中抽出的容量为 n 的样本均值记为 $\overline{X}$，样本标准差记为 S. 本题是在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下检验假设

$$H_0 : \mu = 70; \quad H_1 : \mu \neq 70$$

拒绝域为

$$|t| = \frac{|\overline{X} - 70|}{S}\sqrt{n} \geqslant t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

由 $n = 36, \bar{x} = 66.5, S = 15, t_{0.975}(36-1) = 2.0301$ 代入得

$$|t| = \frac{|66.5 - 70|}{15}\sqrt{36} = 1.4 < 2.0301$$

所以接受假设 $H_0 : \mu = 70$，即在显著水平 0.05 下，可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分.

金榜时代图书·书目

考研数学系列

书名	作者	出版时间
数学复习全书·基础篇(数学一、二、三通用)	李永乐等	2020年6月
数学基础过关660题(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2020年8月
数学历年真题全精解析·基础篇(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2020年10月
数学公式的奥秘	刘喜波等	2020年10月
数学复习全书(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2020年12月
数学历年真题全精解析(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2021年1月
数学强化通关330题(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2021年1月
高等数学辅导讲义	刘喜波	2021年3月
线性代数辅导讲义	李永乐	2021年3月
概率论与数理统计辅导讲义	王式安	2021年3月
高等数学超精讲	姜晓千	2021年4月
概率论与数理统计辅导讲义	曹显兵	2021年4月
数学决胜冲刺6套卷(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2021年10月
数学临阵磨枪(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2021年10月
经济类联考数学复习全书	李永乐等	2021年4月
农学门类联考数学复习全书	李永乐等	2021年4月

大学数学系列

书名	作者	出版时间
大学数学线性代数辅导	李永乐	2018年12月
大学数学高等数学辅导	章纪民	2021年5月
大学数学概率论与数理统计辅导	刘喜波	2021年5月
线性代数期末高效复习笔记	宋浩	2021年5月
高等数学期末高效复习笔记	宋浩	2021年5月
概率论与数理统计期末高效复习笔记	宋浩	2021年5月

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

考研政治系列

书名	作者	出版时间
思想政治理论大纲命题解析	米鹏	2021 年 5 月
思想政治理论精雕细刻 1000 题	米鹏	2021 年 5 月
思想政治理论大串讲	米鹏	2021 年 10 月
思想政治理论最后 20 天必背 20 题	米鹏	2021 年 10 月
考研政治复习手账	张纹	2021 年 5 月
考研政治时政与大题	张纹	2021 年 10 月
考研政治冲刺预测 5 套卷	张纹	2021 年 10 月
考研政治高分秘训 900 题	桑宏斌	2021 年 2 月

考研英语系列

书名	作者	出版时间
考研英语词汇源来如此	全国考研英语金榜命题研究中心	2020 年 10 月
考研英语语法和长难句实战突破 18 讲	全国考研英语金榜命题研究中心	2020 年 10 月
考研词伙	李超	2019 年 3 月
考研句伙	李超	2019 年 3 月
考研英语阅卷人写作高分万能模板	方妍	2018 年 11 月
考研英语语法长难句抓分攻略	欧阳栾天	2018 年 9 月
考研英语实用语法与疑难句精讲笔记	白子墨	2020 年 12 月
词维风暴	娄晗	2019 年 9 月
词法风暴	娄晗	2020 年 12 月
考研英语长难句核心语法	高维 赵亮	2020 年 11 月
考研英语生猛海词	赵亮 高维	2021 年 3 月
考研英语词汇之杉杉密法	许密杉	2021 年 3 月
考研英语阅读之杉杉密法	许密杉	2021 年 5 月

专业硕士系列

书名	作者	出版时间
逻辑复习指南	房文学	2020 年 12 月
写作复习指南	房文学	2020 年 12 月

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

逻辑狂练 900 题	房文学	2021 年 3 月
逻辑真题超精解	房文学	2021 年 3 月

医师资格考试系列

书名	作者	出版时间
贺银成国家临床执业医师资格考试辅导讲义(上、下册)	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业医师资格考试辅导讲义同步练习	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业医师资格考试全真模拟试卷及精析	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业及助理医师资格考试历年考点精析(上册)试题	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业及助理医师资格考试历年考点精析(下册)答案及精析	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业及助理医师资格考试实践技能应试指南	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试辅导讲义(上、下册)	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试辅导讲义同步练习	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试全真模拟试卷及精析	贺银成	2020 年 12 月
刘应科中医执业(助理)医师实践技能通关掌中宝	刘应科	2020 年 12 月
刘应科中医执业(助理)医师综合笔试通关掌中宝	刘应科	2020 年 12 月

微信公众号【顶尖考研】
(ID: dijky66)

考研西医系列

书名	作者	出版时间
贺银成考研西医临床医学综合能力辅导讲义(上、下册)	贺银成	2021 年 2 月
贺银成考研西医临床医学综合能力辅导讲义同步练习	贺银成	2021 年 3 月
贺银成考研西医临床医学综合能力全真模拟试卷及精析	贺银成	2021 年 3 月
贺银成考研西医临床医学综合能力历年真题精析	贺银成	2021 年 3 月

考研中医系列

书名	作者	出版时间
刘应科考研中医综合教材	刘应科	2020 年 12 月
刘应科考研中医综合教材同步练习 3000 题	刘应科	2021 年 5 月
刘应科考研中医综合历年真题精析及复习思路	刘应科	2021 年 6 月
刘应科考研中医综合终极预测试卷	刘应科	2021 年 12 月

中外名著系列

书名	作者	出版时间
小王子	[法]安托万·德·圣-埃克苏佩里	2018 年 12 月
飞鸟集	[印]泰戈尔	2018 年 12 月
瓦尔登湖	[美]亨利·戴维·梭罗	2018 年 12 月
了不起的盖茨比	[美]弗·司各特·菲茨杰拉德	2018 年 12 月
简·爱	[英]夏洛蒂·勃朗特	2018 年 12 月
老人与海	[美]海明威	2018 年 12 月
月亮和六便士	[英]威廉·萨默塞特·毛姆	2018 年 12 月
呼啸山庄	[英]艾米莉·简·勃朗特	2018 年 12 月
傲慢与偏见	[英]简·奥斯丁	2018 年 12 月
双城记	[英]查尔斯·狄更斯	2019 年 3 月
朝花夕拾·呐喊	鲁迅	2018 年 4 月
呼兰河传	萧红	2018 年 4 月
骆驼祥子	老舍	2018 年 4 月
我这一辈子	老舍	2018 年 4 月
茶馆	老舍	2018 年 4 月

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

以上图书书名及出版时间仅供参考，以实际出版物为准，均属金榜时代(北京)教育科技有限公司！

微信公众号：金榜时代考研
原公众号：金榜图书考研，名称已更换
@金榜时代官方微博
天猫
时代巨流图书专营店
微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

乡村艺术Ke梦想社

音体美教师志愿者招募

不要被摩天大厦挡个正着

去青瓦淡墨乡间

用我们的方式热爱这个时代

TEACH FOR CHINA

招募：乡村小学音体美青年教师志愿者

项目简介

乡村艺术Ke梦想社创办于2017年，旨在改善乡村音体美教师紧缺现状，让乡村儿童感受音体美艺术之美，让更多的孩子，无论出身，都能获得同等的优质教育。梦想社创立之初，便启动了“助力乡村学校音体美课堂”行动计划，截止目前，该计划已牵手近300余名青年志愿者，落地学校已达10所。（详情敬请关注公众号“乡村艺术ke梦想社”）为善益众，求贤若渴，我们，正在远方，等着如诗般的你！

微信公众号【同学考研】(ID: djky66)

成为志愿者你将获得

- 服务学校包吃包住
- 每月1500元补助
- 志愿者服务期间的短期保障保险
- 方寸天地得享人生意趣，大美原乡遍寻香径落花

我们希望你

- 品行端正，有爱心，有耐心
- 身体健康，能适应艰苦乡村环境
- 受过良好教育且有音体美专业特长
- 认真负责，充满正能量，支教有清晰规划
- 吃苦耐劳，乐于助人，有良好的团队合作精神

报名方式

Step 1.

请以“**报名2020乡村艺术Ke梦想社音体美教师志愿者**”为邮件标题，发送邮件至：

CountryClass@126.com

Step 2.

邮件内容：正文简要介绍你对社会公益的理解，参加本次活动的原因及您的一技之长；

附件1：支教课程设计（包括3节课以上的教案或课件）

附件2：个人简历（Word格式）

金榜時代 考研数学系列

书名	出版时间	适用阶段
数学公式的奥秘	2020年3月	全程复习
数学复习全书·基础篇	2020年6月	夯实基础
数学基础过关660题	2020年8月	夯实基础
数学历年真题全精解析·基础篇	2020年10月	夯实基础
数学复习全书	2020年12月	全程复习
数学历年真题全精解析	2021年1月	全程复习
数学强化通关330题	2021年1月	强化提高
高等数学辅导讲义	2021年3月	强化提高
线性代数辅导讲义	2021年3月	强化提高
概率论与数理统计辅导讲义	2021年3月	强化提高
数学决胜冲刺6套卷	2021年10月	冲刺预测
数学临阵磨枪	2021年10月	冲刺预测

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

G20210014

图书售后答疑群
你问我答 全程服务

@清华李永乐考研数学辅导团队
关注作者微博 每周五在线实时答疑

责任编辑 / 张梁
ISBN 978-7-5693-1823-4
定价：69.80元