

“助力乡村学校音体美课堂行动”官方合作图书
V研客及全国各大考研培训学校指定用书

金榜时代TM
GLIST 明德·弘毅·品质 15

金榜时代 考研 数学 系列

数学历年真题 (数学二) 全精解析·基础篇

1987—2008

主编 ◎ 李永乐 王式安

编委 ◎ 李永乐 王式安 刘喜波 宋浩 姜晓千 铁军 李正元 蔡燧林 胡金德

基础阶段 | 要更注重对基本概念的识记，而真题是最好的检验资料

历年真题 | 是题题高标准、道道严要求，高度覆盖考试必备知识点

多练真题 | 做到“自身硬”，才能从容面对新变化、新题型、新调整

无 基 础
不 数 学

本书配套精讲课



扫一扫，码上学习

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS



金榜时代考研数学名师团队



线代王·李永乐 @清华李永乐考研数学辅导团队

微信公众号: 永乐讲线代
B站: 李永乐考研团队



- 原清华大学应用数学系教授
- 北京高教学会数学研究会副理事长
- 广受学生信赖的“线代王”
- 曾任全国硕士研究生入学考试北京地区数学阅卷组组长
- 百万畅销书《线性代数辅导讲义》《考研数学复习全书》主编

李老师作为全国著名的考研数学线性代数辅导专家,对考研数学出题形式、考试重点了如指掌,解题思路极其灵活,辅导针对性极强,效果优良,成绩显著,受到广大学员的交口称赞。其主编的《线性代数辅导讲义》《数学复习全书》《数学基础过关660题》等已被历届考生公认为复习首选辅导书。

前命题组组长·王式安 @清华李永乐考研数学辅导团队 B站:李永乐考研团队



- 原北京理工大学研究生院院长、应用数学系主任、教授
- 享受国务院特殊津贴的数学专家
- 美国哥伦比亚大学、南佛罗里达大学、纽约大学等大学的客座教授
- 1987-2001年间担任全国硕士研究生入学考试数学命题组组长
- 百万畅销书《概率论与数理统计辅导讲义》《考研数学复习全书》主编

王老师凭借多年参加考研数学命题工作的深厚经验,对考研数学的命题思路和命题方向了如指掌。其主编的《概率论与数理统计辅导讲义》《数学复习全书》《数学基础过关660题》等已被历届考生公认为复习首选辅导书。

考研高数“三巨头”——宋浩(考研数学阅卷人) @宋浩老师 B站:宋浩老师官方



- 山东大学数学学院本科研究生、中国科学院博士、副教授、考研数学阅卷人
- 英国Queen Mary University of London访问学者

宋老师上课风趣幽默、由浅入深,能把复杂抽象的数学讲的诙谐有趣,上传至B站的数学视频《线性代数》《微积分》《概率论与数理统计》《高等数学》帮助了全国无数的大学生,总播放量近2000万次。

考研高数“三巨头”——姜晓千(全能名师) @晓千老师 微信公众号:晓千老师



- 中国人民大学金融数学博士
- 全国各大省市考研辅导机构全程主讲
- 新浪、搜狐、腾讯、网易、中国教育在线等各大门户网站特邀访谈嘉宾

姜老师对考研数学历年真题有着极其深入的研究,深受考研学子喜爱。

考研高数“三巨头”——刘喜波(高数波叔) @清华李永乐考研数学辅导团队



- 中国科学院数学博士
- 北方工业大学理学院统计学系系主任、教授

长期从事本科生的教育教学工作,曾荣获学校师德先进个人、十佳班导师等称号,是北京市中青年骨干教师、北京市公共数学优秀教学团队主要成员,主编教材1部、教学参考书3部、教育教学论文集1部、译著2部,参编教学参考书10余部。

金榜图书用户专享福利活动 (适用于:李永乐老师系列课程)

赠送

¥100

代金券

¥200

代金券

¥500

代金券

¥1000

代金券

1.活动参与方式 关注公众号 金榜时代考研 ▶ 回复“22考研上岸”即可参与

2.活动时间 即日起——2021年11月24日 3.兑换方式 扫右侧二维码进群咨询管理员领取代金券



“助力乡村学校音体美课堂行动”官方合作图书
V 研客及全国考研培训学校指定用书

金榜时代TM
GLIST 明德·弘毅·品质

金 榜 时 代 考 研 数 学 系 列

1987 — 2008

数学历年真题 (数 学 二) 全精解析·基础篇

微信公众号【顶尖考研】

(ID: djky66)

主编 ◎ 李永乐 王式安

编委 ◎ 李永乐 王式安 刘喜波 宋浩 姜晓千 铁军 李正元 蔡燧林 胡金德

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)

@考研路上刚刚启程的你

勿谓今日不学而有来日，勿谓今年不学而有来年。日月逝矣，岁不我延。



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

书名	本书特点	本书使用说明
《数学复习全书》	系统全面·深入细致·结构科学 (推荐使用时间:2021年2月—2021年7月)	
	本书为作者团队扛鼎之作,常年稳居各大平台考研图书畅销榜前列,主编之一的李永乐老师更是入选2019年“当当20周年白金作家”,考研界仅两位作者获此殊荣。 本书从基本理论、基础知识、基本方法出发,全面、深入、细致地讲解考研数学大纲要求的所有考点,不提供花拳绣腿的不实用技巧,也不提倡误人子弟的费时背书法,而是扎扎实实地带同学们深入每一个考点背后,找到它们之间的关联、逻辑,让同学们从知识点零碎、概念不清楚、期末考试过后即忘的“低级”水平,提升到考研必需的高度。	利用《数学复习全书·基础篇》把基本知识“捡”起来之后,再使用本书。本书有知识点的详细讲解和相应的练习题,有利于同学们建立考研知识体系和框架,打好基础。 在《数学基础过关660题》中若遇到不会做的题,可以放到这里来做。以章或节为单位,学习新内容前要复习前面的内容,按照一定的规律来复习。基础薄弱或中等偏下的考生,务必要利用考研当年上半年的时间,整体吃透书中的理论知识,摸清例题设置的原理和必要性,特别是对大纲中要求的基本概念、理论、方法要系统地理解和掌握。
《数学历年真题全精解析》	真题真练·总结规律·提升技巧 (推荐使用时间:2021年7月—2021年11月)	
	本书完整收录2009—2021年考研数学的全部试题,将真题按考点分类,还精选了其他卷的试题作为练习题。力争做到考点全覆盖,题型多样,重点突出,不简单重复。书中的每道题给出的参考答案有常用、典型的解法,也有技巧性强的特殊解法。分析过程逻辑严谨、思路清晰,具有很强的可操作性。通过学习本书,考生可以独立完成对同类题的解答。	边做题、边总结,遇到“卡壳”的知识点、题目,回到《数学复习全书》和之前听过的基础课、强化课中去补,争取把每个真题知识点吃透、搞懂,不留死角。 通过做真题,进一步提高解题能力和技巧,满足实际考试的要求。第一阶段,浏览每年真题,熟悉题型和常考点。第二阶段,进行专项复习。
《高等数学辅导讲义》 《线性代数辅导讲义》 《概率论与数理统计辅导讲义》	经典讲义·专项突破·强化提高 (推荐使用时间:2021年7月—2021年10月)	
	三本讲义分别由作者的教学讲稿改编而成,系统阐述了考研数学的基础知识。书中例题都经过严格筛选、归纳,是多年经验的总结,对同学们的重点、难点的把握准确,有针对性。适合认真研读,做到举一反三。	哪科较薄弱,精研哪本。搭配《数学强化通关330题》一起使用,先复习讲义上的知识点,做章节例题、练习,再去听相关章节的强化课,做《数学强化通关330题》的相关习题,更有利于知识的巩固和提高。
《数学强化通关330题》	综合训练·突破重点·强化提高 (推荐使用时间:2021年5月—2021年10月)	
	本书为强化阶段的练习题,综合训练必备。具有典型性、针对性、技巧性、综合性等特点,可以帮助同学们突破重点、难点,熟悉解题思路和方法,增强应试能力。	本书与《数学基础过关660题》互为补充,包含选择题、填空题和解答题。搭配《高等数学辅导讲义》《线性代数辅导讲义》《概率论与数理统计辅导讲义》使用,效果更佳。
《数学决胜冲刺6套卷》	冲刺模拟·有的放矢·高效提分 (推荐使用时间:2021年11月—2021年12月)	
	通过整套题的训练,对所学知识进行系统总结和梳理。不同于重点题型的练习,套卷练习需要考生调用全部知识,并综合应用。必要时应复习基本概念、公式、定理,做到准确记忆。	在精研真题之后,用模拟卷练习,找漏洞,保持手感。不要掐时间、估分,遇到不会的题目,回归基础,翻看以前的学习笔记,把每道题吃透。
《数学临阵磨枪》	查漏补缺·问题清零·从容应战 (推荐使用时间:考前20天)	
	本书是常用定理公式、基础知识的清单。最后阶段,大部分考生缺乏信心,感觉没复习完,本来会做的题目,因为紧张、压力,也容易出错。本书能帮助考生在考前查漏补缺,确保基础知识不丢分。	本书搭配《数学决胜冲刺6套卷》使用。上考场前,可以再次回忆、翻看本书。

“助力乡村学校音体美课堂行动”官方合作图书
V研客及全国考研培训学校指定用书

金榜时代TM
GLIST 明德·弘毅·品质

金 榜 时 代 考 研 数 学 系 列

1987 — 2008

数学历年真题

(数 学 二)

全精解析·基础篇

微信公众号【顶尖考研】

(ID: djky66)

主编 ◎ 李永乐 王式安

编委 ◎ 李永乐 王式安 刘喜波 宋浩 姜晓千 铁军 李正元 蔡燧林 胡金德

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)

@考研路上刚刚启程的你

勿谓今日不学而有来日，勿谓今年不学而有来年。日月逝矣，岁不我延。



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学历年真题全精解析. 基础篇. 数学二/李永乐, 王式安主编. —西安: 西安交通大学出版社, 2020. 10

ISBN 978-7-5693-1824-1

I. ①数… II. ①李… ②王… III. ①高等数学—研究生—入学考试—题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2020)第 189418 号

微信公众号【顶尖考研】

(ID: djky66)

书 名 数学历年真题全精解析·基础篇·数学二
主 编 李永乐 王式安
责任编辑 雷萧屹

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路 1 号 邮政编码 710048)

网 址 <http://www.xjupress.com>

电 话 (029)82668357 82667874(发行中心)

(029)82668315(总编办)

传 真 (029)82668280

印 刷 天津市蓟县宏图印务有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 18 字数 427 千字

版次印次 2020 年 10 月第 1 版 2020 年 10 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5693-1824-1

定 价 69.80 元

如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系调换。

版权所有 侵权必究

金榜时代™ 考研数学系列图书

内容简介及使用说明

考研数学满分 150 分,在考研成绩中的比重很大;同时又因数学学科本身的特点,考生的成绩历年来千差万别,数学成绩好在考研中很占优势,因此有“得数学者考研成”之说。既然数学对考研成绩如此重要,那么就有必要探讨一下影响数学成绩的主要因素。

本系列图书作者根据多年的命题经验和阅卷经验,发现考研数学命题的灵活性非常大,不仅表现在一个知识点与多个知识点的考查难度不同,更表现在对多个知识的综合考查上,这些题目在表达上多一个字或多一句话,难度都会变得截然不同。正是这些综合型题目拉开了考试成绩的距离,而构成这些难点的主要因素,实际上是最基础的基本概念、定理和公式的综合。同时,从阅卷反映的情况来看,考生答错题目的主要原因也是对基本概念、定理和公式记忆和掌握得不够熟练。总结为一句话,那就是:要想数学拿高分,就必须熟练掌握、灵活运用基本概念、定理和公式。

基于此,李永乐考研数学辅导团队结合多年的考研辅导和研究经验,精心编写了本系列图书,目的在于帮助考生有计划、有步骤地完成数学复习,从基本概念、定理和公式的记忆,到对其的熟练运用,循序渐进。以下介绍本系列图书的主要特点和使用说明,供考生复习时参考。

书名	本书特点	本书使用说明
《数学复习全书·基础篇》	内容基础·提炼精准·易学易懂(推荐使用时间:2020年6月—2020年12月)	
	本书根据大纲的考试范围将考研所需复习内容提炼出来,形成考研数学的基础内容和复习逻辑,实现大学数学同考研数学之间的顺利过渡,开启考研复习第一篇章。	考生复习过本校大学数学教材后,即可使用本书。如果大学没学过数学或者本校课本是自编教材,与考研大纲差别较大,也可使用本书替代大学数学教材。
《数学基础过关660题》	题目经典·体系完备·逻辑清晰(推荐使用时间:2020年9月—2021年4月)	
	本书是主编团队 20 年的经典之作,一直被模仿,从未被超越。年销量达百万余册,是当之无愧的考研数学头号畅销书,拥有无数甘当“自来水”的粉丝读者,口碑爆棚,考研数学不可不入!“660”也早已成为考研数学的年度关键词。 本书重基础,重概念,重理论,一旦你拥有了《数学复习全书》《数学基础过关660题》教你的思维方式、知识逻辑、做题方法,你就能基础稳固、思维灵活,对知识、定理、公式的理解提升到新的高度,避免陷入复习中后期“基础不牢,地动山摇”的窘境。	本书与《数学复习全书·基础篇》搭配使用,在完成对基础知识的学习后,有针对性地做一些练习。帮助考生熟练掌握定理、公式和解题技巧,加强知识点的前后联系,将之体系化、系统化,分清重难点,让复习周期尽量缩短。 虽说书中都是选择题和填空题,同学们不要轻视,也不要一开始就盲目做题。看到一道题,要能分辨出是考哪个知识点,考什么,然后在做题过程中看看自己是否掌握了这个知识点,应用的定理、公式的条件是否熟悉,这样才算真正做好了一道题。
《数学历年真题全精解析·基础篇》	分类详解·注重基础·突出重点(推荐使用时间:2020年6月—2020年12月)	
	本书精选精析 1987—2008 年考研数学真题,帮助考生提前了解大学水平考试与硕士研究生选拔考试的差别,不会盲目自信,也不会妄自菲薄,真正跨入考研的门槛。	本书与《数学复习全书·基础篇》《数学基础过关660题》搭配使用,复习完一章,即可做相应的章节真题。不会做的题目做好笔记,二轮复习时的继续练习。

书名	本书特点	本书使用说明
《数学复习全书》	系统全面·深入细致·结构科学 (推荐使用时间:2021年2月—2021年7月)	
	本书为作者团队扛鼎之作,常年稳居各大平台考研图书畅销榜前列,主编之一的李永乐老师更是入选2019年“当当20周年白金作家”,考研界仅两位作者获此殊荣。 本书从基本理论、基础知识、基本方法出发,全面、深入、细致地讲解考研数学大纲要求的所有考点,不提供花拳绣腿的不实用技巧,也不提倡误人子弟的费时背书法,而是扎扎实实地带同学们深入每一个考点背后,找到它们之间的关联、逻辑,让同学们从知识点零碎、概念不清楚、期末考试过后即忘的“低级”水平,提升到考研必需的高度。	利用《数学复习全书·基础篇》把基本知识“捡”起来之后,再使用本书。本书有知识点的详细讲解和相应的练习题,有利于同学们建立考研知识体系和框架,打好基础。 在《数学基础过关660题》中若遇到不会做的题,可以放到这里来做。以章或节为单位,学习新内容前要复习前面的内容,按照一定的规律来复习。基础薄弱或中等偏下的考生,务必要利用考研当年上半年的时间,整体吃透书中的理论知识,摸清例题设置的原理和必要性,特别是对大纲中要求的基本概念、理论、方法要系统地理解和掌握。
《数学历年真题全精解析》	真题真练·总结规律·提升技巧 (推荐使用时间:2021年7月—2021年11月)	
	本书完整收录2009—2021年考研数学的全部试题,将真题按考点分类,还精选了其他卷的试题作为练习题。力争做到考点全覆盖,题型多样,重点突出,不简单重复。书中的每道题给出的参考答案有常用、典型的解法,也有技巧性强的特殊解法。分析过程逻辑严谨、思路清晰,具有很强的可操作性。通过学习本书,考生可以独立完成对同类题的解答。	边做题、边总结,遇到“卡壳”的知识点、题目,回到《数学复习全书》和之前听过的基础课、强化课中去补,争取把每个真题知识点吃透、搞懂,不留死角。 通过做真题,进一步提高解题能力和技巧,满足实际考试的要求。第一阶段,浏览每年真题,熟悉题型和常考点。第二阶段,进行专项复习。
《高等数学辅导讲义》 《线性代数辅导讲义》 《概率论与数理统计辅导讲义》	经典讲义·专项突破·强化提高 (推荐使用时间:2021年7月—2021年10月)	
	三本讲义分别由作者的教学讲稿改编而成,系统阐述了考研数学的基础知识。书中例题都经过严格筛选、归纳,是多年经验的总结,对同学们的重点、难点的把握准确,有针对性。适合认真研读,做到举一反三。	哪科较薄弱,精研哪本。搭配《数学强化通关330题》一起使用,先复习讲义上的知识点,做章节例题、练习,再去听相关章节的强化课,做《数学强化通关330题》的相关习题,更有利于知识的巩固和提高。
《数学强化通关330题》	综合训练·突破重点·强化提高 (推荐使用时间:2021年5月—2021年10月)	
	本书为强化阶段的练习题,综合训练必备。具有典型性、针对性、技巧性、综合性等特点,可以帮助同学们突破重点、难点,熟悉解题思路和方法,增强应试能力。	本书与《数学基础过关660题》互为补充,包含选择题、填空题和解答题。搭配《高等数学辅导讲义》《线性代数辅导讲义》《概率论与数理统计辅导讲义》使用,效果更佳。
《数学决胜冲刺6套卷》	冲刺模拟·有的放矢·高效提分 (推荐使用时间:2021年11月—2021年12月)	
	通过整套题的训练,对所学知识进行系统总结和梳理。不同于重点题型的练习,套卷练习需要考生调用全部知识,并综合应用。必要时应复习基本概念、公式、定理,做到准确记忆。	在精研真题之后,用模拟卷练习,找漏洞,保持手感。不要掐时间、估分,遇到不会的题目,回归基础,翻看以前的学习笔记,把每道题吃透。
《数学临阵磨枪》	查漏补缺·问题清零·从容应战 (推荐使用时间:考前20天)	
	本书是常用定理公式、基础知识的清单。最后阶段,大部分考生缺乏信心,感觉没复习完,本来会做的题目,因为紧张、压力,也容易出错。本书能帮助考生在考前查漏补缺,确保基础知识不丢分。	本书搭配《数学决胜冲刺6套卷》使用。上考场前,可以再次回忆、翻看本书。

无_{基础}不数学

——金榜时代

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

前 言

本书是考研数学基础阶段的复习用书,和《数学复习全书(基础篇)》《数学基础过关 660 题》组成一个完备的学习环,从“学”到“练”再到“测”,一环扣一环,循环往复,螺旋进步。本书的一个重要作用就是检测复习的效果,找准复习方向。

本书的编写团队在近几年的教学过程中发现,许多同学开始复习都挺早,但复习的效果却没有明显的提高。综合分析发现,考生盲目复习,没有目的,东一榔头西一棒子,到后期强化阶段,做题有思路没办法,一些基础的计算做不出,简单的概念也没有记住,导致不能再进一步。

如果能在基础阶段就做做真题,看看自己复习的程度与考试程度之间的差距,会让同学们更清醒地认识到自己的不足。同学们要明确,研究生招生是为高校选拔人才,相应的招生考试也是选拔性的考试,就是通过考试成绩来区分考生层次。考题的命制就很讲究,要体现题目的区分度,要在众多的考生中筛选出优秀的同学。命题老师研究的是考生群体,往往抓住大多数考生容易出错的点,理解不到位的点,通过综合几个“基础概念”来出题,能比较准确地考出同学们的真实能力。考试大纲上规定的考点,这些内容在各版教材、辅导书上都是一样的。那么如何选取具体考点,以及针对具体考点如何出题,才是关键。通过真题研究与练习,在做题过程中不断体会和总结,就能大致知道命题老师是怎样设置“陷阱”的。虽然考过的题大多不会再考,但“重者恒重”,也就是说考试的核心内容基本是固定的,每年考查形式虽有变化,但涉及的主要知识点却是不变的,少数情况下还有重复的原题。所以,从某种程度上讲,真题的作用真的很大。

全书共分两篇。第一篇按年份给出 1987—2008 年的真题,可以宏观地看出试卷的结构、考题的分配比例;第二篇是将真题按考点所属内容分类并进行解析,是本书的精华部分。第二篇有如下主要编排:

1. 本章导读

设置本部分的目的是使考生明白此章的考试内容和考试重点,从而在复习时目标明确。

2. 试题特点

本部分总结了本章知识点的历年考试出题规律,并分析可能的出题点。

3. 考题详析

本部分对历年真题的题型进行归纳分类,总结各种题型的解题方法。这些解法均来自各位专家多年教学实践总结和长期命题阅卷经验。针对以往考生在解题过程中普遍存在的问题及常犯的错误,我们给出相应的注意事项,对每一道真题都给出解题思路分析,以便考生真正地理解和掌握解题方法。

4. 练习题

为了使考生更好地巩固所学知识,提高实际解题能力,本书作者从1987—2008年的真题其他卷别的试题中精心选取同类考题作为练习题,供考生练习,使考生在熟练掌握基本知识的基础上,能够有所巩固。同时,每道练习题都配备了详细的参考答案和解析,以便考生解答疑难问题时能及时得到详尽的指导。

再唠叨一下,本书虽然定位是基础复习阶段使用,但并不是让同学们一上来就做真题,特别是基础不好的同学,一定要先过一遍知识点,再通过做题加深理解。书中对考题做了分类,总有些类型的题目特别多,几乎是年年都要考查的,对于这样的内容,一定要多练多做,并且熟记涉及的基础知识、基本概念、基本原理或定理。

做题时,不能先看答案,一定要自己动手写,再比较自己写出来的答案和参考答案,看基本思路是否相符,方法是否一致。如果自己做的答案和参考答案相差甚远,一定要搞清问题出在哪里,是审题错误还是知识理解错误,是题型特点没掌握还是答题方法不熟悉。弄清问题症结所在,然后下功夫解决这个问题,千万不能只满足于知道这个题目答案,只关注做了多少道题,而忽视自己做题的质量和目的。

另外,为了更好地帮助同学们进行复习,“李永乐考研数学辅导团队”特在新浪微博上开设答疑专区,同学们在考研数学复习中,遇到问题,均可在线留言,团队老师将尽心为你解答。

对于本书可能存在的不足与问题,恳请读者批评指正。

在计划出版本书之后,就一直有同学在关心这本书的进度。现在终于要和大家见面了,衷心希望这本书能帮到同学们。祝同学们复习顺利,心想事成,考研成功!

编者

2020年10月

目录 Contents

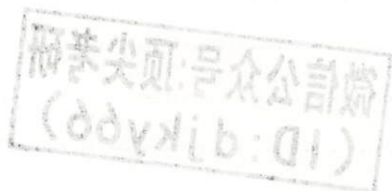
第一篇 历年真题

1987 年全国硕士研究生招生考试数学(二)试题	3
1988 年全国硕士研究生招生考试数学(二)试题	5
1989 年全国硕士研究生招生考试数学(二)试题	7
1990 年全国硕士研究生招生考试数学(二)试题	9
1991 年全国硕士研究生招生考试数学(二)试题	11
1992 年全国硕士研究生招生考试数学(二)试题	13
1993 年全国硕士研究生招生考试数学(二)试题	15
1994 年全国硕士研究生招生考试数学(二)试题	17
1995 年全国硕士研究生招生考试数学(二)试题	19
1996 年全国硕士研究生招生考试数学(二)试题	21
1997 年全国硕士研究生招生考试数学(二)试题	23
1998 年全国硕士研究生招生考试数学(二)试题	26
1999 年全国硕士研究生招生考试数学(二)试题	29
2000 年全国硕士研究生招生考试数学(二)试题	32
2001 年全国硕士研究生招生考试数学(二)试题	35
2002 年全国硕士研究生招生考试数学(二)试题	38
2003 年全国硕士研究生招生考试数学(二)试题	41
2004 年全国硕士研究生招生考试数学(二)试题	44
2005 年全国硕士研究生招生考试数学(二)试题	47
2006 年全国硕士研究生招生考试数学(二)试题	50
2007 年全国硕士研究生招生考试数学(二)试题	53
2008 年全国硕士研究生招生考试数学(二)试题	56

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

第二篇 真题解析

第一部分 高等数学	61
第一章 函数、极限、连续	61
第二章 一元函数微分学	89
第三章 一元函数积分学	141
第四章 多元函数微分学	189
第五章 二重积分	195
第六章 常微分方程	200
第二部分 线性代数	224
第一章 行列式	224
第二章 矩阵	229
第三章 向量	241
第四章 线性方程组	252
第五章 特征值与特征向量	266
第六章 二次型	275



第一篇



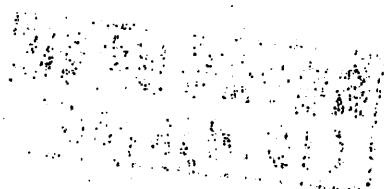
微信公众号【顶尖考研】

(ID: djky66)
历年真题
1987—2008

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

顶尖考研公众号
(ID: djky66)



1987 年全国硕士研究生招生考试 数学(二) 试题

一、填空题(本题满分 15 分,每小题 3 分)

(1) 设 $y = \ln(1+ax)$, 其中 a 为非零常数, 则 $y' =$ _____, $y'' =$ _____.

P96, 16 题

(2) 曲线 $y = \arctan x$ 在横坐标为 1 的点处的切线方程是 _____; 法线方程是 _____.

P107, 53 题

(3) 积分中值定理的条件是 _____, 结论是 _____.

P148, 22 题

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n+1} \right)^n =$ _____.

P73, 37 题

(5) $\int f'(x) dx =$ _____; $\int_a^b f'(2x) dx =$ _____.

P152, 34 题

二、计算题(本题满分 6 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$.

答案对应的
页码与题号

P65, 14 题

三、计算题(本题满分 7 分)

设 $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

P96, 17 题

四、计算题(本题满分 8 分)

计算定积分 $\int_0^1 x \arcsin x dx$.

P152, 35 题

五、解答题(本题满分 8 分)

设 D 是由曲线 $y = \sin x + 1$ 与三条直线 $x = 0, x = \pi, y = 0$ 所围成的曲边梯形, 求 D 绕 Ox 轴旋转一周所生成的旋转体的体积.

P174, 93 题

六、证明题(本题满分 10 分)

(1) 证明: 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导, 且导数 $f'(x)$ 恒大于零, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增加.

(2) 若 $g(x)$ 在 $x = c$ 处二阶导数存在, 且 $g'(c) = 0, g''(c) < 0$, 则 $g(c)$ 为 $g(x)$ 的一个极大值.

P110, 64 题

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

七、计算题(本题满分 10 分)

计算 $\int \frac{1}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx$, 其中 a, b 是不全为 0 的非负数.

P141, 1 题

八、解答题(本题满分 10 分)

(1) 求微分方程 $x \frac{dy}{dx} = x - y$ 满足条件 $y|_{x=\sqrt{2}} = 0$ 的特解.

P200, 1 题

(2) 求微分方程 $y'' + 2y' + y = xe^x$ 的通解.

P208, 25 题

九、选择题(本题满分 16 分, 每小题 4 分)

(1) $f(x) = |x \sin x| e^{\cos x} (-\infty < x < +\infty)$ 是

(A) 有界函数.

(B) 单调函数.

(C) 周期函数.

(D) 偶函数.

P61, 1 题

(2) 函数 $f(x) = x \sin x$

(A) 当 $x \rightarrow \infty$ 时为无穷大.

(B) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

(C) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界.

(D) 当 $x \rightarrow \infty$ 时有有限极限.

P63, 7 题

(3) 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x) - f(a-x)}{x}$ 等于

(A) $f'(a)$.

(B) $2f'(a)$.

(C) 0.

(D) $f'(2a)$.

P89, 1 题

(4) 设 $I = t \int_0^{\frac{\pi}{t}} f(tx) dx$, 其中 $f(x)$ 连续, $s > 0, t > 0$, 则 I 的值

(A) 依赖于 s, t .

(B) 依赖于 s, t, x .

(C) 依赖于 t, x , 不依赖于 s .

(D) 依赖于 s , 不依赖于 t .

P159, 55 题

十、解答题(本题满分 10 分)

在第一象限内求曲线 $y = -x^2 + 1$ 上的一点, 使该点处的切线与所给曲线及两坐标轴所围成的图形面积为最小, 并求此最小面积.

P174, 94 题



1988 年全国硕士研究生招生考试 数学(二) 试题

一、填空题(本题满分 20 分,每小题 4 分)

(1) 设 $f(x) = \begin{cases} 2x+a, & x \leq 0 \\ e^x(\sin x + \cos x), & x > 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 则 $a =$ _____.

P83, 58 题

(2) 设 $f(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2tx}$, 则 $f'(t) =$ _____.

P96, 18 题

(3) 设 $f(x)$ 连续, 且 $\int_0^{x^3-1} f(t) dt = x$, 则 $f(7) =$ _____.

(此题有误, 将题中条件改成 $\int_0^{x^3-1} f(t) dt = x - 1$)

P159, 56 题

(4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x} =$ _____.

P65, 15 题

(5) $\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx =$ _____.

P153, 36 题

二、选择题(本题满分 20 分,每小题 4 分)

(1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x + 1$ 的图形在点 $(0, 1)$ 处切线与 x 轴交点坐标是

(A) $\left(-\frac{1}{6}, 0\right)$.

(B) $(-1, 0)$.

(C) $\left(\frac{1}{6}, 0\right)$.

(D) $(1, 0)$.

P107, 54 题

(2) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上皆可导, 且 $f(x) < g(x)$, 则必有

(A) $f(-x) > g(-x)$.

(B) $f'(x) < g'(x)$.

(C) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

(D) $\int_0^x f(t) dt < \int_0^x g(t) dt$.

P148, 23 题

(3) 若函数 $y = f(x)$, 有 $f'(x_0) = \frac{1}{2}$, 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 该函数在 $x = x_0$ 处的微分 dy

(A) 与 Δx 是等价无穷小.

(B) 与 Δx 是同阶无穷小.

(C) 是比 Δx 低阶的无穷小.

(D) 是比 Δx 高阶的无穷小.

P90, 2 题

(4) 由曲线 $y = \sin^{\frac{3}{2}} x (0 \leq x \leq \pi)$ 与 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体体积为

(A) $\frac{4}{3}$.

(B) $\frac{4}{3}\pi$.

(C) $\frac{2}{3}\pi^2$.

(D) $\frac{2}{3}\pi$.

P175, 95 题

(5) 设函数 $y = f(x)$ 是微分方程 $y'' - 2y' + 4y = 0$ 的一个解, 且 $f(x_0) > 0$, $f'(x_0) = 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处

(A) 有极大值.

(B) 有极小值.

(C) 某邻域内单调增加.

(D) 某邻域内单调减少.

P111, 65 题

三、解答题(本题满分 15 分,每小题 5 分)

(1) 已知 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1 - x$ 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

P62, 2 题

(2) 已知 $y = 1 + xe^{xy}$, 求 $y' \Big|_{x=0}$ 及 $y'' \Big|_{x=0}$.

P97, 19 题

(3) 求微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x(x^2+1)}$ 的通解(一般解).

P200, 2 题

四、解答题(本题满分 12 分)

作函数 $y = \frac{6}{x^2 - 2x + 4}$ 的图形, 并填写下表.

单调增加区间		(1 分)
单调减少区间		(2 分)
极值点		(3 分)
极值		(4 分)
凹(∪) 区间		(6 分)
凸(∩) 区间		(7 分)
拐点		(9 分)
渐近线		(10 分)

P117, 84 题

五、解答题(本题满分 8 分)

将长为 a 的铁丝切成两段, 一段围成正方形, 另一段围成圆形, 问这两段铁丝各长为多少时, 正方形与圆形的面积之和为最小.

P111, 66 题

六、解答题(本题满分 10 分)

设函数 $y = y(x)$ 满足微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$, 且其图形在点 $(0, 1)$ 处的切线与曲线 $y = x^2 - x + 1$ 在该点的切线重合, 求函数 $y = y(x)$.

P208, 26 题

七、计算题(本题满分 7 分)

设 $x \geq -1$, 求 $\int_{-1}^x (1 - |t|) dt$.

P159, 57 题

八、解答题(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有连续导数, 且 $m \leq f(x) \leq M$.

(1) 求 $\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{4a^2} \int_{-a}^a [f(t+a) - f(t-a)] dt$;

(2) 证明 $\left| \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(t) dt - f(x) \right| \leq M - m (a > 0)$.

P148, 24 题

1989 年全国硕士研究生招生考试 数学(二) 试题

一、填空题(本题满分 21 分,每小题 3 分)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x =$ _____.

P66, 16 题

(2) $\int_0^{\pi} t \sin t dt =$ _____.

P153, 37 题

(3) 曲线 $y = \int_0^x (t-1)(t-2)dt$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程是 _____.

P159, 58 题

(4) 设 $f(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$, 则 $f'(0) =$ _____.

P97, 20 题

(5) 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(t)dt$, 则 $f(x) =$ _____.

P153, 38 题

(6) 设 $f(x) = \begin{cases} a + bx^2, & x \leq 0, \\ \frac{\sin bx}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则常数 a 与 b 应满足的关系是 _____.

P83, 59 题

(7) 设 $\tan y = x + y$, 则 $dy =$ _____.

P97, 21 题

二、解答题(本题满分 20 分,每小题 4 分)

(1) 已知 $y = \arcsin e^{-\sqrt{x}}$, 求 y' .

P97, 22 题

(2) 求 $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

P142, 2 题

(3) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (2 \sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}}$.

P66, 17 题

(4) 已知 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = \arctan t, \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

P98, 23 题

(5) 已知 $f(2) = \frac{1}{2}, f'(2) = 0$ 及 $\int_0^2 f(x)dx = 1$, 求 $\int_0^1 x^2 f''(2x)dx$.

P154, 39 题

三、选择题(本题满分 18 分,每小题 3 分)

(1) 当 $x > 0$ 时, 曲线 $y = x \sin \frac{1}{x}$

(A) 有且仅有水平渐近线.

(B) 有且仅有铅直渐近线.

(C) 既有水平渐近线, 也有铅直渐近线.

(D) 既无水平渐近线, 也无铅直渐近线.

P118, 85 题

(2) 若 $3a^2 - 5b < 0$, 则方程 $x^5 + 2ax^3 + 3bx + 4c = 0$

(A) 无实根.

(B) 有唯一实根.

(C) 有三个不同实根.

(D) 有五个不同实根.

P131, 115 题

(3) 曲线 $y = \cos x \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$ 与 x 轴所围成的图形, 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积为

(A) $\frac{\pi}{2}$.(B) π .(C) $\frac{\pi^2}{2}$.(D) π^2 .

P75, 96 题

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

- (4) 设两函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $x = a$ 处取得极大值, 则函数 $F(x) = f(x)g(x)$ 在 $x = a$ 处
 (A) 必取极大值. (B) 必取极小值.
 (C) 不可能取极值. (D) 是否取极值不能确定. P111, 67 题
- (5) 微分方程 $y'' - y = e^x + 1$ 的一个特解应具有形式(式中 a, b 为常数).
 (A) $ae^x + b$. (B) $axe^x + b$. (C) $ae^x + bx$. (D) $axe^x + bx$. P209, 27 题

- (6) 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 的某个邻域内有定义, 则 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导的一个充分条件是
 (A) $\lim_{h \rightarrow +\infty} h \left[f\left(a + \frac{1}{h}\right) - f(a) \right]$ 存在. (B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a+h)}{h}$ 存在.
 (C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ 存在. (D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{h}$ 存在. P90, 3 题

四、解答题(本题满分 6 分)

求微分方程 $xy' + (1-x)y = e^{2x}$ ($0 < x < +\infty$) 满足 $y(1) = 0$ 的特解. P200, 3 题

五、解答题(本题满分 7 分)

设 $f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t)dt$, 其中 $f(x)$ 为连续函数, 求 $f(x)$. P209, 28 题

六、证明题(本题满分 7 分)

证明: 方程 $\ln x = \frac{x}{e} - \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内有且仅有两个不同实根. P132, 116 题

七、解答题(本题满分 11 分)

对函数 $y = \frac{x+1}{x^2}$ 填写下表

单调减区间		(2 分)
单调增区间		(3 分)
极值点		(4 分)
极值		(5 分)
凹区间		(7 分)
凸区间		(8 分)
拐点		(9 分)
渐近线		(11 分)

P118, 86 题

八、解答题(本题满分 10 分)

设抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过原点, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时 $y \geq 0$, 又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x = 1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$. 试确定 a, b, c 的值, 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小. P175, 97 题

1990 年全国硕士研究生招生考试 数学(二) 试题

一、填空题(本题满分 15 分,每小题 3 分)

(1) 曲线 $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ 上对应于 $t = \frac{\pi}{6}$ 处的法线方程是_____.

P107, 55 题

(2) 设 $y = e^{\tan \frac{1}{x}} \cdot \sin \frac{1}{x}$, 则 $y' =$ _____.

P98, 24 题

(3) $\int_0^1 x \sqrt{1-x} dx =$ _____.

P154, 40 题

(4) 下列两个积分大小关系式: $\int_{-2}^{-1} e^{-x^3} dx$ _____ $\int_{-2}^{-1} e^{x^3} dx$.

P149, 25 题

(5) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则函数 $f[f(x)] =$ _____.

P62, 3 题

二、选择题(本题满分 15 分,每小题 3 分)

(1) 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - ax - b \right) = 0$, 其中 a, b 是常数, 则

(A) $a = 1, b = 1$.(B) $a = -1, b = 1$.(C) $a = 1, b = -1$.(D) $a = -1, b = -1$.

P76, 43 题

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则 $d\left[\int f(x) dx\right]$ 等于

(A) $f(x)$.(B) $f(x) dx$.(C) $f(x) + C$.(D) $f'(x) dx$.

P142, 3 题

(3) 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数, 且 $f'(x) = [f(x)]^2$, 则当 n 为大于 2 的正整数时, $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 为

(A) $n! [f(x)]^{n+1}$.(B) $n [f(x)]^{n+1}$.(C) $[f(x)]^{2n}$.(D) $n! [f(x)]^{2n}$.

P98, 25 题

(4) 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $F(x) = \int_x^{e^{-x}} f(t) dt$, 则 $F'(x)$ 等于

(A) $-e^{-x} f(e^{-x}) - f(x)$.(B) $-e^{-x} f(e^{-x}) + f(x)$.(C) $e^{-x} f(e^{-x}) - f(x)$.(D) $e^{-x} f(e^{-x}) + f(x)$.

P160, 59 题

(5) 设 $F(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0 \\ f(0), & x = 0, \end{cases}$ 其中 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, $f'(0) \neq 0, f(0) = 0$, 则 $x = 0$ 是 $F(x)$ 的

(A) 连续点.

(B) 第一类间断点.

(C) 第二类间断点.

(D) 连续点或间断点不能由此确定.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

P84, 60 题

三、解答题(本题满分 25 分,每小题 5 分)

(1) 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = 9$, 求常数 a .

P77, 44 题

(2) 求由方程 $2y - x = (x - y)\ln(x - y)$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的微分 dy .

P98, 26 题

(3) 求曲线 $y = \frac{1}{1+x^2} (x > 0)$ 的拐点.

P119, 87 题

(4) 计算 $\int \frac{\ln x}{(1-x)^2} dx$.

P142, 4 题

(5) 求微分方程 $x \ln x dy + (y - \ln x) dx = 0$ 满足条件 $y \Big|_{x=e} = 1$ 的特解.

P201, 4 题

四、解答题(本题满分 9 分)

在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的第一象限部分上求一点 P , 使该点处的切线, 椭圆及两坐标轴所围图形的面积为最小(其中 $a > 0, b > 0$).

P176, 98 题

五、证明题(本题满分 9 分)

证明: 当 $x > 0$ 时, 有不等式 $\arctan x + \frac{1}{x} > \frac{\pi}{2}$.

P128, 107 题

六、解答题(本题满分 9 分)

设 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt$, 其中 $x > 0$, 求 $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$.

P160, 60 题

七、解答题(本题满分 9 分)

过点 $P(1, 0)$ 作抛物线 $y = \sqrt{x-2}$ 的切线, 该切线与上述抛物线及 x 轴围成一平面图形, 求此图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.

P176, 99 题

八、解答题(本题满分 9 分)

求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = e^{ax}$ 的通解, 其中 a 为实数.

P209, 29 题

答案对应的
页码与题号



1991 年全国硕士研究生招生考试 数学(二) 试题

一、填空题(本题满分 15 分,每小题 3 分)

(1) 设 $y = \ln(1 + 3^{-x})$, 则 $dy =$ _____.

P98, 27 题

(2) 曲线 $y = e^{-x^2}$ 的上凸区间是 _____.

P119, 88 题

(3) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx =$ _____.

P172, 84 题

(4) 质点以 $t \sin t^2$ 米/秒做直线运动, 则从时刻 $t_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 秒到 $t_2 = \sqrt{\pi}$ 秒内质点所经过的路程等于 _____ 米.

P176, 100 题

(5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{x + e^{\frac{1}{x}}} =$ _____.

P66, 18 题

二、选择题(本题满分 15 分,每小题 3 分)

(1) 若曲线 $y = x^2 + ax + b$ 和 $2y = -1 + xy^3$ 在点 $(1, -1)$ 处相切, 其中 a, b 是常数, 则

(A) $a = 0, b = -2$.

(B) $a = 1, b = -3$.

(C) $a = -3, b = 1$.

(D) $a = -1, b = -1$.

P108, 56 题

(2) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$ 记 $F(x) = \int_0^x f(t) dt, 0 \leq x \leq 2$, 则

(A) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{3} + 2x - \frac{x^2}{2}, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

(B) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \\ -\frac{7}{6} + 2x - \frac{x^2}{2}, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

(C) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{x^2}{2}, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

(D) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2x - \frac{x^2}{2}, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

P160, 61 题

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, $x_0 \neq 0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点, 则

(A) x_0 必是 $f(x)$ 的驻点.

(B) $-x_0$ 必是 $-f(-x)$ 的极小值点.

(C) $-x_0$ 必是 $-f(x)$ 的极小值点.

(D) 对一切 x 都有 $f(x) \leq f(x_0)$.

P112, 68 题

(4) 设 D 是 xOy 平面上以 $(1, 1), (-1, 1)$ 和 $(-1, -1)$ 为顶点的三角区域, D_1 是 D 在第一象限的部分, 则 $\iint_D (xy + \cos x \sin y) dx dy$ 等于

(A) $2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy.$

(B) $2 \iint_{D_1} xy dx dy.$

(C) $4 \iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y) dx dy.$

(D) 0.

P196, 3 题

- (5) 如右图, x 轴上的一线密度为常数 μ , 长度为 l 的细杆, 有一质量为 m 的质点到杆右端的距离为 a , 已知引力系数为 k , 则质点和细杆之间引力的大小为

(A) $\int_{-l}^0 \frac{km\mu dx}{(a-x)^2}$. (B) $\int_0^l \frac{km\mu dx}{(a-x)^2}$. (C) $2\int_{-\frac{l}{2}}^0 \frac{km\mu dx}{(a+x)^2}$. (D) $2\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{km\mu dx}{(a+x)^2}$.

P176, 101 题

三、解答题(本题满分 25 分, 每小题 5 分)

(1) 设 $\begin{cases} x = t \cos t, \\ y = t \sin t, \end{cases}$ 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

P98, 28 题

(2) 计算 $\int_1^4 \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})}$.

P154, 41 题

(3) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2(e^x - 1)}$.

P66, 19 题

(4) 求 $\int x \sin^2 x dx$.

P142, 5 题

(5) 求微分方程 $xy' + y = xe^x$ 满足 $y(1) = 1$ 的特解.

P201, 5 题

四、证明题(本题满分 9 分)

利用导数证明: 当 $x > 1$ 时, $\frac{\ln(1+x)}{\ln x} > \frac{x}{1+x}$.

P128, 108 题

五、解答题(本题满分 9 分)

求微分方程 $y'' + y = x + \cos x$ 的通解.

P210, 30 题

六、解答题(本题满分 9 分)

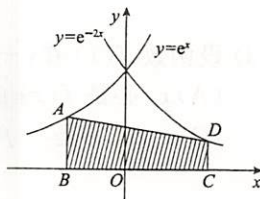
曲线 $y = (x-1)(x-2)$ 和 x 轴围成一平面图形, 求此平面图形绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积.

P177, 102 题

七、解答题(本题满分 9 分)

如右图, A, D 分别是曲线 $y = e^x$ 和 $y = e^{-2x}$ 上的点, AB 和 DC 均垂直 x 轴, 且 $|AB| : |DC| = 2 : 1$, $|AB| < 1$. 求点 B 和 C 的横坐标, 使梯形 $ABCD$ 的面积最大.

P112, 69 题



八、计算题(本题满分 9 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足 $f(x) = f(x-\pi) + \sin x$, 且 $f(x) = x, x \in [0, \pi)$, 计算 $\int_{\pi}^{3\pi} f(x) dx$.

P154, 42 题

1992 年全国硕士研究生招生考试 数学(二) 试题

一、填空题(本题满分 15 分,每小题 3 分)

- (1) 设 $\begin{cases} x = f(t) - \pi, \\ y = f(e^{3t} - 1), \end{cases}$ 其中 f 可导,且 $f'(0) \neq 0$, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} =$ _____. P99,29 题
- (2) 函数 $y = x + 2\cos x$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 _____. P112,70 题
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{e^x - \cos x} =$ _____. P66,20 题
- (4) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2 + 1)} =$ _____. P172,85 题
- (5) 由曲线 $y = xe^x$ 与直线 $y = ex$ 所围成图形的面积 $S =$ _____. P177,103 题

二、选择题(本题满分 15 分,每小题 3 分)

- (1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - \sin x$ 是 x^2 的
(A) 低阶无穷小. (B) 高阶无穷小.
(C) 等价无穷小. (D) 同阶但非等价无穷小. P78,47 题
- (2) 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ x^2 + x, & x > 0, \end{cases}$ 则
(A) $f(-x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0, \\ -(x^2 + x), & x > 0. \end{cases}$ (B) $f(-x) = \begin{cases} -(x^2 + x), & x < 0, \\ -x^2, & x \geq 0. \end{cases}$
(C) $f(-x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ x^2 - x, & x > 0. \end{cases}$ (D) $f(-x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$ P62,4 题

- (3) 当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $\frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限
(A) 等于 2. (B) 等于 0.
(C) 为 ∞ . (D) 不存在但不为 ∞ . P66,21 题

- (4) 设 $f(x)$ 连续, $F(x) = \int_0^{x^2} f(t^2) dt$, 则 $F'(x)$ 等于
(A) $f(x^4)$. (B) $x^2 f(x^4)$.
(C) $2xf(x^4)$. (D) $2xf(x^2)$. P161,62 题
- (5) 若 $f(x)$ 的导函数是 $\sin x$, 则 $f(x)$ 有一个原函数为
(A) $1 + \sin x$. (B) $1 - \sin x$.
(C) $1 + \cos x$. (D) $1 - \cos x$. P142,6 题

三、解答题(本题满分 25 分,每小题 5 分)

- (1) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+x}{6+x} \right)^{\frac{x-1}{2}}$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

(2) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y - xe^y = 1$ 所确定, 求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0}$ 的值.

P99, 30 题

(3) 求 $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

P143, 7 题

(4) 求 $\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin x} dx$.

P155, 43 题

(5) 求微分方程 $(y - x^3)dx - 2xdy = 0$ 的通解.

P201, 6 题

四、计算题(本题满分 9 分)

设 $f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x \leq 0, \\ e^{-x}, & x > 0, \end{cases}$ 求 $\int_1^3 f(x-2)dx$.

P155, 44 题

五、解答题(本题满分 9 分)

求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = xe^x$ 的通解.

P210, 31 题

六、计算题(本题满分 9 分)

计算曲线 $y = \ln(1-x^2)$ 上相应于 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 的一段弧的长度.

P177, 104 题

七、解答题(本题满分 9 分)

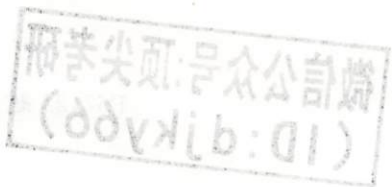
求曲线 $y = \sqrt{x}$ 的一条切线 l , 使该曲线与切线 l 及直线 $x = 0, x = 2$ 所围成图形面积最小.

P177, 105 题

八、证明题(本题满分 9 分)

设 $f''(x) < 0, f(0) = 0$, 证明对任何 $x_1 > 0, x_2 > 0$, 有 $f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$.

P135, 123 题



1993 年全国硕士研究生招生考试 数学(二) 试题

一、填空题(本题满分 15 分,每小题 3 分)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \underline{\hspace{2cm}}.$

P67, 23 题

(2) 函数 $y = y(x)$ 由方程 $\sin(x^2 + y^2) + e^x - xy^2 = 0$ 所确定, 则 $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}.$

P99, 31 题

(3) 设 $F(x) = \int_1^x \left(2 - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt (x > 0)$, 则函数 $F(x)$ 的单调减少区间是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

P113, 71 题

(4) $\int \frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

P143, 8 题

(5) 已知曲线 $y = f(x)$ 过点 $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$, 且其上任意一点 (x, y) 处的切线斜率为 $x \ln(1 + x^2)$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

P201, 7 题

二、选择题(本题满分 15 分,每小题 3 分)

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 变量 $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 是

(A) 无穷小.

(B) 无穷大.

(C) 有界的, 但不是无穷小.

(D) 无界的, 但不是无穷大.

P63, 8 题

(2) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1}, & x \neq 1, \\ 2, & x = 1, \end{cases}$ 则在点 $x = 1$ 处函数 $f(x)$

(A) 不连续.

(B) 连续, 但不可导.

(C) 可导, 但导数不连续.

(D) 可导, 且导数连续.

P84, 61 题

(3) 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$ 设 $F(x) = \int_1^x f(t) dt (0 \leq x \leq 2)$, 则 $F(x)$ 为

(A) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & 0 \leq x < 1, \\ x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$

(B) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}, & 0 \leq x < 1, \\ x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$

(C) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & 0 \leq x < 1, \\ x - 1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$

(D) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}, & 0 \leq x < 1, \\ x - 1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$

P161, 63 题

(4) 设常数 $k > 0$, 函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点个数为

(A) 3.

(B) 2.

(C) 1.

(D) 0. P132, 117 题

(5) 若 $f(x) = -f(-x)$, 在 $(0, +\infty)$ 内 $f'(x) > 0, f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内

(A) $f'(x) < 0, f''(x) < 0.$ (B) $f'(x) < 0, f''(x) > 0.$ (C) $f'(x) > 0, f''(x) < 0.$ (D) $f'(x) > 0, f''(x) > 0.$

P119, 89 题

三、解答题(本题满分 25 分,每小题 5 分)

(1) 设 $y = \sin[f(x^2)]$, 其中 f 具有二阶导数, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

P99, 32 题

(2) 求 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 100} + x)$.

P67, 24 题

(3) 求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1 + \cos 2x} dx$.

P155, 45 题

(4) 求 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3} dx$.

P172, 86 题

(5) 求微分方程 $(x^2 - 1)dy + (2xy - \cos x)dx = 0$ 满足初始条件 $y(0) = 1$ 的特解.

P202, 8 题

四、解答题(本题满分 9 分)

设二阶常系数线性微分方程 $y'' + \alpha y' + \beta y = \gamma e^x$ 的一个特解为 $y = e^{2x} + (1+x)e^x$. 试确定常数 α, β, γ , 并求该方程的通解.

P211, 32 题

五、解答题(本题满分 9 分)

设平面图形 A 由 $x^2 + y^2 \leq 2x$ 与 $y \geq x$ 所确定, 求图形 A 绕直线 $x = 2$ 旋转一周所得旋转体的体积.

P178, 106 题

六、解答题(本题满分 9 分)

作半径为 r 的球的外切正圆锥, 问此圆锥的高 h 为何值时, 其体积最小, 并求出该最小值.

P113, 72 题

七、证明题(本题满分 9 分)

设 $x > 0$, 常数 $a > e$. 证明: $(a+x)^a < a^{a+x}$.

P128, 109 题

八、证明题(本题满分 9 分)

设 $f'(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 且 $f(0) = 0$, 证明: $\left| \int_0^a f(x) dx \right| \leq \frac{Ma^2}{2}$, 其中 $M = \max_{0 \leq x \leq a} |f'(x)|$.

P169, 79 题

1994 年全国硕士研究生招生考试 数学(二) 试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 若 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x + e^{2ax} - 1}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则 $a =$ _____.

P84, 62 题

(2) 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t - \ln(1+t), \\ y = t^3 + t^2 \end{cases}$ 所确定, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} =$ _____.

P99, 33 题

(3) $\frac{d}{dx} \left(\int_0^{\cos 3x} f(t) dt \right) =$ _____.

P161, 64 题

(4) $\int x^3 e^{x^2} dx =$ _____.

P143, 9 题

(5) 微分方程 $ydx + (x^2 - 4x)dy = 0$ 的通解为 _____.

P202, 9 题

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax + bx^2)}{x^2} = 2$, 则

(A) $a = 1, b = -\frac{5}{2}$.

(B) $a = 0, b = -2$.

(C) $a = 0, b = -\frac{5}{2}$.

(D) $a = 1, b = -2$.

P77, 45 题

(2) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x^3, & x \leq 1, \\ x^2, & x > 1, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的

(A) 左、右导数都存在.

(B) 左导数存在, 但右导数不存在.

(C) 左导数不存在, 但右导数存在.

(D) 左、右导数都不存在.

P90, 4 题

(3) 设 $y = f(x)$ 是满足微分方程 $y'' + y' - e^{\sin x} = 0$ 的解, 且 $f'(x_0) = 0$, 则 $f(x)$ 在

(A) x_0 某邻域内单调增加.

(B) x_0 某邻域内单调减少.

(C) x_0 处取得极小值.

(D) x_0 处取得极大值.

P113, 73 题

(4) 曲线 $y = e^{\frac{1}{x}} \arctan \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)(x+2)}$ 的渐近线有

(A) 1 条.

(B) 2 条.

(C) 3 条.

(D) 4 条.

P120, 90 题

(5) 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} \cos^4 x dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + \cos^4 x) dx$, $P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin^3 x - \cos^4 x) dx$, 则有

(A) $N < P < M$.

(B) $M < P < N$.

(C) $N < M < P$.

(D) $P < M < N$.

三、解答题(本题共 5 小题,每小题 5 分,满分 25 分)

(1) 设 $y = f(x+y)$, 其中 f 具有二阶导数, 且其一阶导数不等于 1, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$. P100, 34 题

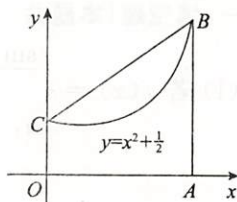
(2) 计算 $\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}} dx$. P155, 46 题

(3) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n} \right)$. P73, 38 题

(4) 求 $\int \frac{dx}{\sin 2x + 2 \sin x}$. P143, 10 题

(5) 如右图, 设曲线方程为 $y = x^2 + \frac{1}{2}$, 梯形 $OABC$ 的面积为 D , 曲边梯

形 $OABC$ 的面积为 D_1 , 点 A 的坐标为 $(a, 0)$, $a > 0$, 证明: $\frac{D}{D_1} < \frac{3}{2}$.



P179, 107 题

四、解答题(本题满分 9 分)

设当 $x > 0$ 时, 方程 $kx + \frac{1}{x^2} = 1$ 有且仅有一个解, 求 k 的取值范围. P132, 118 题

五、解答题(本题满分 9 分)

设 $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$,

- (1) 求函数的增减区间及极值;
- (2) 求函数图像的凹凸区间及拐点;
- (3) 求渐近线;
- (4) 作出函数图形.

P120, 91 题

六、解答题(本题满分 9 分)

求微分方程 $y'' + a^2 y = \sin x$ 的通解, 其中常数 $a > 0$. P211, 33 题

七、证明题(本题满分 9 分)

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续且递减, 证明: 当 $0 < \lambda < 1$ 时, $\int_0^\lambda f(x) dx \geq \lambda \int_0^1 f(x) dx$.

P169, 80 题

八、解答题(本题满分 9 分)

求曲线 $y = 3 - |x^2 - 1|$ 与 x 轴围成的封闭图形绕直线 $y = 3$ 旋转所得的旋转体体积.

P179, 108 题

1995 年全国硕士研究生招生考试 数学(二) 试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $y = \cos x^2 \sin^2 \frac{1}{x}$, 则 $y' =$ _____.

P100, 35 题

(2) 微分方程 $y'' + y = -2x$ 的通解为 _____.

P211, 34 题

(3) 曲线 $\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ 在 $t = 2$ 处的切线方程为 _____.

P108, 57 题

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right) =$ _____.

P74, 39 题

(5) 曲线 $y = x^2 e^{-x^2}$ 的渐近线方程为 _____.

P121, 92 题

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

- (1) 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, $f(x)$ 为连续函数, 且 $f(x) \neq 0$, $\varphi(x)$ 有间断点, 则

(A) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点.(B) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点.(C) $f[\varphi(x)]$ 必有间断点.(D) $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点.

P84, 63 题

- (2) 曲线 $y = x(x-1)(2-x)$ 与 x 轴所围图形面积可表示为

(A) $-\int_0^2 x(x-1)(2-x)dx.$

(B) $\int_0^1 x(x-1)(2-x)dx - \int_1^2 x(x-1)(2-x)dx.$

(C) $-\int_0^1 x(x-1)(2-x)dx + \int_1^2 x(x-1)(2-x)dx.$

(D) $\int_0^2 x(x-1)(2-x)dx.$

P179, 109 题

- (3) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且对任意 x_1, x_2 , 当 $x_1 > x_2$ 时, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则

(A) 对任意 x , $f'(x) > 0$.(B) 对任意 x , $f'(-x) \leq 0$.(C) 函数 $f(-x)$ 单调增加.(D) 函数 $-f(-x)$ 单调增加.

P113, 74 题

- (4) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上 $f''(x) > 0$, 则 $f'(1), f'(0), f(1) - f(0)$ 或 $f(0) - f(1)$ 的大小顺序是

(A) $f'(1) > f'(0) > f(1) - f(0).$ (B) $f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0).$ (C) $f(1) - f(0) > f'(1) > f'(0).$ (D) $f'(1) > f(0) - f(1) > f'(0).$

P114, 75 题

- (5) 设 $f(x)$ 可导, $F(x) = f(x)(1 + |\sin x|)$. 若 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 则必有

(A) $f(0) = 0.$ (B) $f'(0) = 0.$ (C) $f(0) + f'(0) = 0.$ (D) $f(0) - f'(0) = 0.$

P91, 5 题

三、解答题(本题共 6 小题,每小题 5 分,满分 30 分)

(1) 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x(1 - \cos \sqrt{x})}$.

P67, 25 题

(2) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)} = e^y$ 确定, 其中 f 具有二阶导数, 且 $f' \neq 1$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

P100, 36 题

(3) 设 $f(x^2 - 1) = \ln \frac{x^2}{x^2 - 2}$, 且 $f[\varphi(x)] = \ln x$, 求 $\int \varphi(x) dx$.

P144, 11 题

(4) 设 $f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 试讨论 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

P91, 6 题

(5) 求摆线 $\begin{cases} x = 1 - \cos t, \\ y = t - \sin t \end{cases}$, 一拱 ($0 \leq t \leq 2\pi$) 的弧长.

P180, 110 题

(6) 设单位质点在水平面内做直线运动, 初速度 $v|_{t=0} = v_0$. 已知阻力与速度成正比(比例常数为 1), 问 t 为多少时此质点的速度为 $\frac{v_0}{3}$? 并求到此时刻该质点所经过的路程.

P216, 49 题

四、解答题(本题满分 8 分)

求函数 $f(x) = \int_0^{x^2} (2-t)e^{-t} dt$ 的最大值和最小值.

P114, 76 题

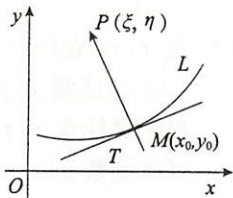
五、解答题(本题满分 8 分)

设 $y = e^x$ 是微分方程 $xy' + p(x)y = x$ 的一个解, 求此微分方程满足条件 $y|_{x=\ln 2} = 0$ 的特解.

P202, 10 题

六、解答题(本题满分 8 分)

如右图, 设曲线 L 的方程 $y = f(x)$, 且 $y'' > 0$, 又 MT, MP 分别为该曲线在点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线和法线. 已知线段 MP 的长度为 $\frac{(1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{y_0''}$ (其中 $y_0' = y'(x_0), y_0'' = y''(x_0)$), 试推导出点 $P(\xi, \eta)$ 的坐标表达式.



P121, 93 题

七、计算题(本题满分 8 分)

设 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t} dt$, 计算 $\int_0^\pi f(x) dx$.

P155, 47 题

八、证明题(本题满分 8 分)

设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 且 $f''(x) > 0$, 证明: $f(x) \geq x$.

P135, 124 题

1996 年全国硕士研究生招生考试 数学(二) 试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $y = (x + e^{-\frac{x}{2}})^{\frac{2}{3}}$, 则 $y' \Big|_{x=0} =$ _____.

P101, 37 题

(2) $\int_{-1}^1 (x + \sqrt{1-x^2})^2 dx =$ _____.

P156, 48 题

(3) 微分方程 $y'' + 2y' + 5y = 0$ 的通解为 _____.

P211, 35 题

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sin \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right) - \sin \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] =$ _____.

P67, 26 题

(5) 由曲线 $y = x + \frac{1}{x}$, $x = 2$ 及 $y = 2$ 所围图形的面积 $S =$ _____.

P180, 111 题

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x - (ax^2 + bx + 1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小, 则

(A) $a = \frac{1}{2}, b = 1$.

(B) $a = 1, b = 1$.

(C) $a = -\frac{1}{2}, b = -1$.

(D) $a = -1, b = 1$.

P78, 48 题

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta, \delta)$ 内有定义, 若当 $x \in (-\delta, \delta)$ 时, 恒有 $|f(x)| \leq x^2$, 则 $x = 0$ 必是 $f(x)$ 的

(A) 间断点.

(B) 连续而不可导的点.

(C) 可导的点, 且 $f'(0) = 0$.

(D) 可导的点, 且 $f'(0) \neq 0$.

P91, 7 题

(3) 设 $f(x)$ 处处可导, 则

(A) 当 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, 必有 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$.

(B) 当 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$, 必有 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

(C) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$.

(D) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

P136, 125 题

(4) 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内, 方程 $|x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x = 0$

(A) 无实根.

(B) 有且仅有一个实根.

(C) 有且仅有两个实根.

(D) 有无穷多个实根.

P133, 119 题

(5) 设 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(x) < f(x) < m$ (m 为常数), 由曲线 $y = g(x), y = f(x), x = a$ 及 $x = b$ 所围平面图形绕直线 $y = m$ 旋转而成的旋转体体积为

(A) $\int_a^b \pi [2m - f(x) + g(x)][f(x) - g(x)] dx$.

(B) $\int_a^b \pi [2m - f(x) - g(x)][f(x) - g(x)] dx$.

(C) $\int_a^b \pi [m - f(x) + g(x)][f(x) - g(x)] dx$.

(D) $\int_a^b \pi [m - f(x) - g(x)][f(x) - g(x)] dx$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

三、解答题(本题共 6 小题,每小题 5 分,满分 30 分)

(1) 计算 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}} dx$.

P156, 49 题

(2) 求 $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

P144, 12 题

(3) 设 $\begin{cases} x = \int_0^t f(u^2) du, \\ y = [f(t^2)]^2, \end{cases}$ 其中 $f(u)$ 具有二阶导数, 且 $f(u) \neq 0$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

P161, 65 题

(4) 求函数 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ 在 $x=0$ 点处带拉格朗日型余项的 n 阶泰勒展开式.

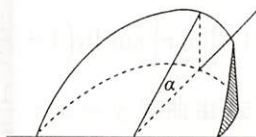
P136, 126 题

(5) 求微分方程 $y'' + y' = x^2$ 的通解.

P212, 36 题

(6) 设有一正椭圆柱体, 其底面的长、短轴分别为 $2a, 2b$, 用过此柱体底面的短轴且与底面成 α 角 ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) 的平面截此柱体, 得一楔形体(如图), 求此楔形体的体积 V .

P181, 113 题



四、计算题(本题满分 8 分)

计算不定积分 $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx$.

P144, 13 题

五、解答题(本题满分 8 分)

设函数 $f(x) = \begin{cases} 1-2x^2, & x < -1, \\ x^3, & -1 \leq x \leq 2, \\ 12x-16, & x > 2. \end{cases}$

(1) 写出 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式;

(2) $g(x)$ 是否有间断点、不可导点? 若有, 指出这些点.

P92, 8 题

六、解答题(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 由方程 $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$ 所确定, 试求 $y = y(x)$ 的驻点, 并判别它是否为极值点.

P114, 77 题

七、解答题(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上具有二阶导数, 且 $f(a) = f(b) = 0, f'(a)f'(b) > 0$, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$ 和 $\eta \in (a, b)$ 使 $f(\xi) = 0$ 及 $f''(\eta) = 0$.

P136, 127 题

八、解答题(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 为连续函数,

(1) 求初值问题 $\begin{cases} y' + ay = f(x), \\ y|_{x=0} = 0 \end{cases}$ 的解 $y(x)$, 其中 a 是正常数;

(2) 若 $|f(x)| \leq k$ (k 为常数), 证明当 $x \geq 0$ 时, 有 $|y(x)| \leq \frac{k}{a}(1 - e^{-ax})$.

P202, 11 题

1997 年全国硕士研究生招生考试 数学(二) 试题

一、填空题(本题满分 15 分,每小题 3 分)

- (1) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{x^{-2}}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a =$ _____. P85, 64 题
- (2) 设 $y = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$, 则 $y'' \Big|_{x=0} =$ _____. P101, 38 题
- (3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}} =$ _____. P145, 14 题
- (4) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 8} =$ _____. P172, 87 题
- (5) 已知向量组 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 1), \alpha_2 = (2, 0, t, 0), \alpha_3 = (0, -4, 5, -2)$ 的秩为 2, 则 $t =$ _____. P249, 10 题

二、选择题(每小题 3 分,共 15 分)

- (1) 设 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{\tan x} - e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小, 则 n 为
(A) 1. (B) 2.
(C) 3. (D) 4. P78, 49 题
- (2) 设在区间 $[a, b]$ 上函数 $f(x) > 0, f'(x) < 0, f''(x) > 0$. 记 $S_1 = \int_a^b f(x) dx, S_2 = f(b)(b-a), S_3 = \frac{1}{2}[f(a) + f(b)](b-a)$, 则
(A) $S_1 < S_2 < S_3$. (B) $S_2 < S_1 < S_3$.
(C) $S_3 < S_1 < S_2$. (D) $S_2 < S_3 < S_1$. P149, 27 题
- (3) 已知函数 $y = f(x)$ 对一切 x 满足 $xf''(x) + 3x[f'(x)]^2 = 1 - e^{-x}$, 若 $f'(x_0) = 0 (x_0 \neq 0)$, 则
(A) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.
(B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.
(C) $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.
(D) $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(x_0, f(x_0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点. P114, 78 题
- (4) 设 $F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t dt$, 则 $F(x)$
(A) 为正常数. (B) 为负常数.
(C) 恒为零. (D) 不为常数. P150, 28 题
- (5) 设函数 $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0, \\ x+2, & x > 0, \end{cases} f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ -x, & x \geq 0, \end{cases}$ 则 $g[f(x)] =$
(A) $\begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 2-x, & x \geq 0. \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 2-x^2, & x < 0, \\ 2+x, & x \geq 0. \end{cases}$
(C) $\begin{cases} 2-x^2, & x < 0, \\ 2-x, & x \geq 0. \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 2+x, & x \geq 0. \end{cases}$

三、解答题(满分 30 分,每小题 5 分)

(1) 求极限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}}$.

P68, 27 题

(2) 设函数 $y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x = \arctan t, \\ 2y - ty^2 + e^t = 5 \end{cases}$ 所确定, 求 $\frac{dy}{dx}$.

P101, 39 题

(3) 计算 $\int e^{2x}(\tan x + 1)^2 dx$.

P145, 15 题

(4) 求微分方程 $(3x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy = 0$ 的通解.

P203, 12 题

(5) 已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}$, $y_2 = xe^x + e^{-x}$, $y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的三个解, 求此微分方程.

P212, 37 题

(6) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, 且 $A^2 - AB = E$, 其中 E 是 3 阶单位矩阵, 求矩阵 B .

P238, 10 题

四、解答题(本题满分 8 分)

λ 取何值时, 方程组 $\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1, \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$ 无解, 有唯一解或有无穷多解? 并在有无穷多解时写出方程组的通解.

P255, 4 题

五、解答题(本题满分 8 分)

设曲线 L 的极坐标方程 $r = r(\theta)$, $M(r, \theta)$ 为 L 上任一点, $M_0(2, 0)$ 为 L 上一定点. 若极径 OM_0 、 OM 与曲线 L 所围成的曲边扇形面积值等于 L 上 M_0 、 M 两点间弧长值的一半, 求曲线 L 的方程.

P217, 50 题

六、解答题(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 在开区间 $(0, 1)$ 内大于零, 并满足 $xf'(x) = f(x) + \frac{3a}{2}x^2$ (a 为常数), 又曲线 $y = f(x)$ 与 $x = 1, y = 0$ 所围的图形 S 的面积值为 2, 求函数 $y = f(x)$, 并问 a 为何值时, 图形 S 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积最小.

P181, 114 题

七、解答题(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 连续, $\varphi(x) = \int_0^1 f(xt)dt$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ (A 为常数), 求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

P162, 66 题

八、解答题(本题满分 8 分)

就 k 的不同取值情况, 确定方程 $x - \frac{\pi}{2} \sin x = k$ 在开区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内根的个数, 并证明你的结论.

P133, 120 题

(ID: djky66)

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

1998 年全国硕士研究生招生考试 数学(二) 试题

一、填空题(本题满分 15 分,每小题 3 分)

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$ P68,28 题
- (2) 曲线 $y = -x^3 + x^2 + 2x$ 与 x 轴所围成的图形的面积 $A = \underline{\hspace{2cm}}.$ P182,115 题
- (3) $\int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$ P145,16 题
- (4) 设 $f(x)$ 连续,则 $\frac{d}{dx} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt = \underline{\hspace{2cm}}.$ P162,67 题
- (5) 曲线 $y = x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right) (x > 0)$ 的渐近线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$ P121,94 题

二、选择题(本题满分 15 分,每小题 3 分)

- (1) 设数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$,则下列断言正确的是
 (A) 若 $\{x_n\}$ 发散,则 $\{y_n\}$ 必发散.
 (B) 若 $\{x_n\}$ 无界,则 $\{y_n\}$ 必有界.
 (C) 若 $\{x_n\}$ 有界,则 $\{y_n\}$ 必为无穷小.
 (D) 若 $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ 为无穷小,则 $\{y_n\}$ 必为无穷小. P63,9 题
- (2) 函数 $f(x) = (x^2 - x - 2) |x^3 - x|$ 的不可导点的个数为
 (A) 3. (B) 2.
 (C) 1. (D) 0. P93,9 题
- (3) 已知函数 $y = y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y = \frac{y \Delta x}{1 + x^2} + \alpha$,其中 α 是比 $\Delta x (\Delta x \rightarrow 0)$ 的高阶的无穷小,且 $y(0) = \pi$,则 $y(1) =$
 (A) 2π . (B) π .
 (C) $e^{\frac{\pi}{2}}$. (D) $\pi e^{\frac{\pi}{2}}$. P203,13 题
- (4) 设函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 的某个邻域内连续,且 $f(a)$ 为其极大值,则存在 $\delta > 0$,当 $x \in (a - \delta, a + \delta)$ 时,必有
 (A) $(x - a)[f(x) - f(a)] \geq 0$. (B) $(x - a)[f(x) - f(a)] \leq 0$.
 (C) $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(x)}{(t - x)^2} \geq 0 (x \neq a)$. (D) $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(x)}{(t - x)^2} \leq 0 (x \neq a)$. P115,79 题
- (5) 设 A 是任一 $n (n \geq 3)$ 阶方阵, A^* 是其伴随矩阵,又 k 为常数,且 $k \neq 0, \pm 1$,则必有 $(kA)^* =$
 (A) kA^* . (B) $k^{n-1}A^*$.
 (C) $k^n A^*$. (D) $k^{-1}A^*$. P232,5 题

三、解答题(本题满分 5 分)

- 求函数 $f(x) = (1 + x)^{\frac{x}{\tan(x - \frac{\pi}{4})}}$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 内的间断点,并判断其类型. P85,65 题

四、解答题(本题满分 5 分)

确定常数 a, b, c 的值, 使 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt} = c (c \neq 0)$.

P77, 46 题

五、解答题(本题满分 5 分)

利用代换 $y = \frac{u}{\cos x}$ 将方程

$$y'' \cos x - 2y' \sin x + 3y \cos x = e^x$$

化简, 并求出原方程的通解.

P212, 38 题

六、解答题(本题满分 6 分)

计算积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}$.

P172, 88 题

七、解答题(本题满分 6 分)

从船上向海中沉放某种探测仪器, 按探测要求, 需确定仪器的下沉深度 y (从海平面算起) 与下沉速度 v 之间的函数关系. 设仪器在重力作用下, 从海平面由静止开始铅直下沉, 在下沉过程中还受到阻力和浮力的作用. 设仪器在质量为 m , 体积为 B , 海水比重为 ρ , 仪器所受的阻力与下沉速度成正比, 比例系数为 $k (k > 0)$. 试建立 y 与 v 所满足的微分方程, 并求出函数关系式 $y = y(v)$.

P217, 51 题

八、解答题(本题满分 8 分)

设 $y = f(x)$ 是区间 $[0, 1]$ 上的任一非负连续函数.

(1) 试证存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使得在区间 $[0, x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积, 等于在区间 $[x_0, 1]$ 上以 $y = f(x)$ 为曲边的曲边梯形面积.

(2) 又设 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f'(x) > -\frac{2f(x)}{x}$, 证明(1)中的 x_0 是唯一的.

P170, 81 题

九、解答题(本题满分 8 分)

设有曲线 $y = \sqrt{x-1}$, 过原点作其切线, 求由此曲线、切线及 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体的表面积.

P182, 116 题

十、解答题(本题满分8分)

设 $y = y(x)$ 是一向上凸的连续曲线,其上任意一点 (x, y) 处的曲率为 $\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$,且此曲线上点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $y = x + 1$,求该曲线的方程,并求函数 $y = y(x)$ 的极值. P218, 52 题

十一、解答题(本题满分8分)

设 $x \in (0, 1)$, 证明:

(1) $(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$;

(2) $\frac{1}{\ln 2} - 1 < \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$.

P128, 110 题

十二、解答题(本题满分5分)

设 $(2E - C^{-1}B)A^T = C^{-1}$, 其中 E 是 4 阶单位矩阵, A^T 是 4 阶矩阵 A 的转置矩阵,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

求 A .

P238, 11 题

十三、解答题(本题满分6分)

已知 $\alpha_1 = (1, 4, 0, 2)^T$, $\alpha_2 = (2, 7, 1, 3)^T$, $\alpha_3 = (0, 1, -1, a)^T$, $\beta = (3, 10, b, 4)^T$, 问

(1) a, b 取何值时, β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示?

(2) a, b 取何值时, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示?并写出此表示式.

P241, 1 题

1999 年全国硕士研究生招生考试 数学(二) 试题

一、填空题(每小题 3 分,共 15 分)

- (1) 曲线 $\begin{cases} x = e^t \sin 2t, \\ y = e^t \cos t \end{cases}$ 在 $(0,1)$ 处的法线方程为 _____. P108,58 题
- (2) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\ln(x^2 + y) = x^3 y + \sin x$ 确定,则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} =$ _____. P101,40 题
- (3) $\int \frac{x+5}{x^2-6x+13} dx =$ _____. P145,17 题
- (4) 函数 $y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ 在区间 $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ 上的平均值为 _____. P156,50 题
- (5) 微分方程 $y'' - 4y = e^{2x}$ 的通解为 _____. P213,39 题

二、选择题(每小题 3 分,共 15 分)

- (1) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x > 0, \\ x^2 g(x), & x \leq 0, \end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处
(A) 极限不存在. (B) 极限存在,但不连续.
(C) 连续,但不可导. (D) 可导. P93,10 题
- (2) 设 $\alpha(x) = \int_0^{\sin x} \frac{\sin t}{t} dt, \beta(x) = \int_0^{\sin x} (1+t)^{\frac{1}{t}} dt$,则当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的
(A) 高阶无穷小. (B) 低阶无穷小.
(C) 同阶但不等价的无穷小. (D) 等价无穷小. P79,50 题
- (3) 设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,则
(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必是偶函数.
(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必是奇函数.
(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时, $F(x)$ 必是周期函数.
(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时, $F(x)$ 必是单调增函数. P162,68 题
- (4) “对任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$,总存在正整数 N ,当 $n \geq N$ 时,恒有 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon$ ”是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的
(A) 充分条件但非必要条件. (B) 必要条件但非充分条件.
(C) 充分必要条件. (D) 既非充分条件又非必要条件. P64,10 题

- (5) 记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 为 $f(x)$,则方程 $f(x) = 0$ 的根的个数为
(A) 1. (B) 2. (C) 3.

三、解答题(本题满分5分)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \ln(1+x) - x^2}.$$

P68,29 题

四、解答题(本题满分6分)

$$\text{计算} \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx.$$

P173,89 题

五、解答题(本题满分7分)

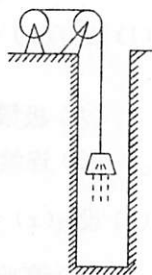
$$\text{求初值问题} \begin{cases} (y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0 (x > 0), \\ y|_{x=1} = 0 \end{cases} \text{的解.}$$

P203,14 题

六、解答题(本题满分7分)

为清除井底的污泥,用缆绳将抓斗放入井底,抓起污泥后提出井口(如右图).已知井深30 m,抓斗自重400 N,缆绳每米重50 N,抓斗抓起的污泥重2 000 N,提升速度为3 m/s.在提升过程中,污泥以20 N/s的速率从抓斗缝隙中漏掉.现将抓起污泥的抓斗提升至井口,问克服重力需作多少焦耳的功?

(说明:①1 N×1 m=1 J;m,N,s,J分别表示米,牛顿,秒,焦耳.②抓斗的高度及位于井口上方的缆绳长度忽略不计.)



P182,117 题

七、解答题(本题满分8分)

$$\text{已知函数 } y = \frac{x^3}{(x-1)^2}, \text{求}$$

- (1) 函数的增减区间及极值;
- (2) 函数图形的凹凸区间及拐点;
- (3) 函数图形的渐近线.

P122,95 题

八、解答题(本题满分8分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数,且 $f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0$,证明:在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 ξ ,使 $f'''(\xi)=3$.

P137,128 题

九、解答题(本题满分8分)

设函数 $y(x)$ ($x \geq 0$) 二阶可导, 且 $y'(x) > 0, y(0) = 1$. 过曲线 $y = y(x)$ 上任意一点 $P(x, y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线, 上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积记为 S_1 , 区间 $[0, x]$ 上以 $y = y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2 , 并设 $2S_1 - S_2$ 恒为 1, 求此曲线 $y = y(x)$ 的方程.

P218, 53 题

十、解答题(本题满分7分)

设 $f(x)$ 是区间 $[0, +\infty)$ 上单调减少且非负连续函数, $a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx$ ($n = 1, 2, \dots$), 证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

P64, 11 题

十一、解答题(本题满分6分)

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 矩阵 X 满足 $A^* X = A^{-1} + 2X$, 其中 A^* 是 A 的伴随矩阵, 求矩阵 X .

P239, 12 题

十二、解答题(本题满分8分)

设向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 1, 3)^T, \alpha_2 = (-1, -3, 5, 1)^T, \alpha_3 = (3, 2, -1, p+2)^T, \alpha_4 = (-2, -6, 10, p)^T$.

- (1) p 为何值时, 该向量组线性无关? 并在此时将向量 $\alpha = (4, 1, 6, 10)^T$ 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出;
- (2) p 为何值时, 该向量组线性相关? 并在此时求出它的秩和一个极大线性无关组.

P249, 11 题

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

2000 年全国硕士研究生招生考试 数学(二) 试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{\ln(1 + 2x^3)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

P69,30 题

(2) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $2^{xy} = x + y$ 所确定,则 $dy|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}.$

P102,41 题

(3) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

P173,90 题

(4) 曲线 $y = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

P122,96 题

(5) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{bmatrix}$, E 为 4 阶单位矩阵,且 $B = (E+A)^{-1}(E-A)$,则 $(E+B)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

P232,6 题

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设函数 $f(x) = \frac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续,且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$,则常数 a, b 满足

(A) $a < 0, b < 0.$

(B) $a > 0, b > 0.$

(C) $a \leq 0, b > 0.$

(D) $a \geq 0, b < 0.$

P85,66 题

(2) 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$,且 $f'(0) = 0$,则

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) 点 $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值,点 $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

P123,97 题

(3) 设函数 $f(x), g(x)$ 是大于零的可导函数,且 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$,则当 $a < x < b$ 时,有

(A) $f(x)g(b) > f(b)g(x).$

(B) $f(x)g(a) > f(a)g(x).$

(C) $f(x)g(x) > f(b)g(b).$

(D) $f(x)g(x) > f(a)g(a).$

P115,80 题

(4) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$,则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6+f(x)}{x^2}$ 为

(A) 0.

(B) 6.

(C) 36.

(D) $\infty.$

P69,31 题

(5) 具有特解 $y_1 = e^{-x}, y_2 = 2xe^{-x}, y_3 = 3e^x$ 的 3 阶常系数齐次线性微分方程是

(A) $y''' - y'' - y' + y = 0.$

(B) $y''' + y'' - y' - y = 0.$

(C) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$

(D) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$

P213,40 题

三、(本题满分5分)

设 $f(\ln x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, 计算 $\int f(x) dx$.

P146, 18 题

四、(本题满分5分)

设 xOy 平面上有正方形 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ 及直线 $l: x + y = t (t \geq 0)$.

若 $S(t)$ 表示正方形 D 位于直线 l 左下方部分的面积, 试求 $\int_0^x S(t) dt (x \geq 0)$.

P163, 69 题

五、(本题满分5分)

求函数 $f(x) = x^2 \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0) (n \geq 3)$.

P102, 42 题

六、(本题满分6分)

设函数 $S(x) = \int_0^x |\cos t| dt$,

(1) 当 n 为正整数, 且 $n\pi \leq x < (n+1)\pi$ 时, 证明 $2n \leq S(x) < 2(n+1)$;

(2) 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{x}$.

P163, 70 题

七、(本题满分7分)

某湖泊的水量为 V , 每年排入湖泊内含污染物 A 的污水量为 $\frac{V}{6}$, 流入湖泊内不含 A 的水量为 $\frac{V}{6}$, 流出湖泊的水量为 $\frac{V}{3}$, 已知 1999 年底湖中 A 的含量为 $5m_0$, 超过国家规定指标. 为了治理污染, 从 2000 年初起, 限定排入湖泊中含 A 污水的浓度不超过 $\frac{m_0}{V}$. 问至多需经过多少年, 湖泊中污染物 A 的含量降至 m_0 以内?(注: 设湖水中 A 的浓度是均匀的.)

P219, 54 题

八、(本题满分6分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 且 $\int_0^\pi f(x) dx = 0$, $\int_0^\pi f(x) \cos x dx = 0$. 试证明: 在 $(0, \pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1, ξ_2 , 使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

P170, 82 题

九、(本题满分7分)

已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数, 它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式

$$f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x) = 8x + a(x)$$

其中 $a(x)$ 是当 $x \rightarrow 0$ 时比 x 高阶的无穷小, 且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程.

P04, 11 题

十、(本题满分 8 分)

设曲线 $y = ax^2 (a > 0, x \geq 0)$ 与 $y = 1 - x^2$ 交于点 A , 过坐标原点 O 和点 A 的直线与曲线 $y = ax^2$ 围成一平面图形. 问 a 为何值时, 该图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积最大? 最大体积是多少?

P183, 118 题

十一、(本题满分 8 分)

函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0) = 1$ 且满足等式

$$f'(x) + f(x) - \frac{1}{x+1} \int_0^x f(t) dt = 0$$

(1) 求导数 $f'(x)$;

(2) 证明: 当 $x \geq 0$ 时, 不等式 $e^{-x} \leq f(x) \leq 1$ 成立.

P207, 22 题

十二、(本题满分 6 分)

设 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$, $A = \alpha\beta^T$, $B = \beta^T\alpha$, 其中 β^T 是 β 的转置,

求解方程 $2B^2A^2x = A^4x + B^4x + \gamma$.

P256, 5 题

十三、(本题满分 7 分)

已知向量组 $\beta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\beta_2 = \begin{bmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\beta_3 = \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 与向量组 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}$ 具

有相同的秩, 且 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 求 a, b 的值.

P250, 12 题

2001 年全国硕士研究生招生考试 数学(二) 试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}{x^2 + x - 2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

P70,32 题

(2) 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $e^{2xy} - \cos(xy) = e - 1$ 所确定,则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的法线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

P108,59 题

(3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + \sin^2 x) \cos^2 x dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

P157,51 题

(4) 过点 $(\frac{1}{2}, 0)$ 且满足关系式 $y' \arcsin x + \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = 1$ 的曲线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

P204,15 题

(5) 设方程 $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ 有无穷多个解,则 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

P257,6 题

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$, 则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于

(A)0.

(B)1.

(C) $\begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} 0, & |x| \leq 1 \\ 1, & |x| > 1 \end{cases}$

P62,6 题

(2) 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x) \ln(1 + x^2)$ 是比 $x \sin x^n$ 高阶的无穷小, $x \sin x^n$ 是比 $(e^{x^2} - 1)$ 高阶的无穷小,则正整数 n 等于

(A)1.

(B)2.

(C)3.

(D)4. P79,51 题

(3) 曲线 $y = (x-1)^2(x-3)^2$ 的拐点个数为

(A)0.

(B)1.

(C)2.

(D)3. P123,98 题

(4) 已知函数 $f(x)$ 在区间 $(1-\delta, 1+\delta)$ 内具有二阶导数, $f'(x)$ 严格单调减少, 且 $f(1) = f'(1) = 1$, 则

(A) 在 $(1-\delta, 1)$ 和 $(1, 1+\delta)$ 内均有 $f(x) < x$.

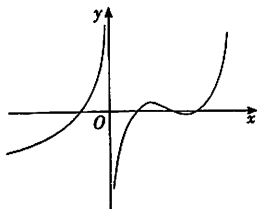
(B) 在 $(1-\delta, 1)$ 和 $(1, 1+\delta)$ 内均有 $f(x) > x$.

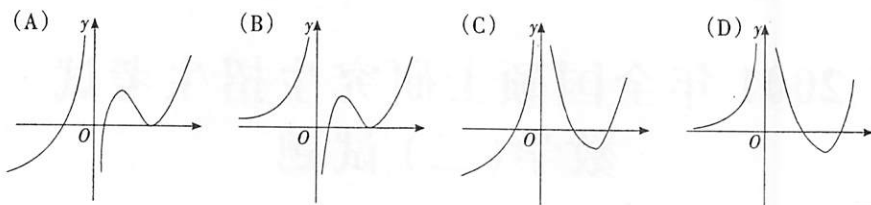
(C) 在 $(1-\delta, 1)$ 内, $f(x) < x$, 在 $(1, 1+\delta)$ 内, $f(x) > x$.

(D) 在 $(1-\delta, 1)$ 内, $f(x) > x$, 在 $(1, 1+\delta)$ 内, $f(x) < x$.

P129,111 题

(5) 已知函数 $y = f(x)$ 在其定义域内可导, 它的图形如下图所示, 则其导函数 $y = f'(x)$ 的图形为





P115, 81 题

三、(本题满分 6 分)

$$\text{求} \int \frac{dx}{(2x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}.$$

P146, 19 题

四、(本题满分 7 分)

求极限 $\lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}}$, 记此极限为 $f(x)$, 求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

P85, 67 题

五、(本题满分 7 分)

设 $\rho = \rho(x)$ 是抛物线 $y = \sqrt{x}$ 上任一点 $M(x, y)$ ($x \geq 1$) 处的曲率半径, $s = s(x)$ 是该抛物线上介于点 $A(1, 1)$ 与 M 之间的弧长, 计算 $3\rho \frac{d^2\rho}{ds^2} - \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2$ 的值.

(在直角坐标系下曲率公式为 $K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$)

P183, 119 题

六、(本题满分 7 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0) = 0$, 且其反函数为 $g(x)$. 若

$$\int_0^{f(x)} g(t) dt = x^2 e^x$$

求 $f(x)$.

P164, 71 题

七、(本题满分 7 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 满足 $f'(x) = g(x), g'(x) = 2e^x - f(x)$, 且 $f(0) = 0, g(0) = 2$.

$$\text{求} \int_0^{\pi} \left[\frac{g(x)}{1+x} - \frac{f(x)}{(1+x)^2} \right] dx.$$

P213, 41 题

八、(本题满分 9 分)

设 L 是一条平面曲线, 其上任意一点 $P(x, y)$ ($x > 0$) 到坐标原点的距离恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距, 且 L 经过点 $(\frac{1}{2}, 0)$.

(1) 试求曲线 L 的方程;

(2) 求 L 位于第一象限部分的一条切线, 使该切线与 L 以及两坐标轴所围图形的面积最小.

P219, 55 题

九、(本题满分7分)

一个半球体状的雪堆,其体积融化的速率与半球面面积 S 成正比,比例常数 $K > 0$. 假设在融化过程中雪堆始终保持半球体状,已知半径为 r_0 的雪堆在开始融化的3小时内,融化了其体积的 $\frac{7}{8}$,问雪堆全部融化需要多少小时?

P220,56题

十、(本题满分8分)

设 $f(x)$ 在区间 $[-a, a]$ ($a > 0$) 上具有二阶连续导数, $f(0) = 0$.

(1) 写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式;

(2) 证明在 $[-a, a]$ 上至少存在一点 η , 使 $a^3 f''(\eta) = 3 \int_{-a}^a f(x) dx$.

P171,83题

十一、(本题满分6分)

已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 且矩阵 X 满足 $AXA + BXB = AXB + BXA + E$,

其中 E 是3阶单位阵,求 X .

P239,13题

十二、(本题满分6分)

已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系,若 $\beta_1 = \alpha_1 + t\alpha_2$, $\beta_2 = \alpha_2 + t\alpha_3$, $\beta_3 = \alpha_3 + t\alpha_4$, $\beta_4 = \alpha_4 + t\alpha_1$, 讨论实数 t 满足什么关系时, $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 也是 $Ax = 0$ 的一个基础解系.

P252,1题

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

2002 年全国硕士研究生招生考试 数学(二) 试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - e^{\tan x}, & x > 0, \\ \arcsin \frac{x}{2}, & \\ ae^{2x}, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续,则 $a =$ _____.

P86, 68 题

(2) 位于曲线 $y = xe^{-x} (0 \leq x < +\infty)$ 下方, x 轴上方的无界图形的面积是 _____.

P184, 120 题

(3) 微分方程 $yy'' + y'^2 = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = \frac{1}{2}$ 的特解是 _____.

P207, 23 题

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{n}} + \sqrt{1 + \cos \frac{2\pi}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \cos \frac{n\pi}{n}} \right] =$ _____.

P150, 29 题

(5) 矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ 的非零特征值是 _____.

P266, 1 题

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设函数 $f(u)$ 可导, $y = f(x^2)$, 当自变量 x 在 $x = -1$ 处取得增量 $\Delta x = -0.1$ 时, 相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1, 则 $f'(1) =$

(A) -1.

(B) 0.1.

(C) 1.

(D) 0.5.

P94, 12 题

(2) 设函数 $f(x)$ 连续, 则下列函数中, 必为偶函数的是

(A) $\int_0^x f(t^2) dt.$

(B) $\int_0^x f^2(t) dt.$

(C) $\int_0^x t[f(t) - f(-t)] dt.$

(D) $\int_0^x t[f(t) + f(-t)] dt.$

P164, 72 题

(3) 设 $y = y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y'' + py' + qy = e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0) = y'(0) = 0$ 的特解, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限

(A) 不存在.

(B) 等于 1.

(C) 等于 2.

(D) 等于 3.

P214, 42 题

(4) 设函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界且可导, 则

(A) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

(B) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

(C) 当 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$.

(D) 当 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$.

P137, 129 题

(5) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 向量 β_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 而向量 β_2 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 则对于任意常数 k , 必有

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性无关.

(B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性相关.

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性无关.

(D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性相关.

P244, 3 题

三、(本题满分 6 分)

已知曲线的极坐标方程是 $r = 1 - \cos \theta$, 求该曲线上对应于 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 处的切线与法线的直角坐标方程.

P109, 60 题

四、(本题满分 7 分)

设 $f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{3}{2}x^2, & -1 \leq x < 0, \\ \frac{xe^x}{(e^x + 1)^2}, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$ 求函数 $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ 的表达式.

P164, 73 题

五、(本题满分 7 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内可导 $f(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, 且满足 $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+hx)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{1}{x}}$, 求 $f(x)$.

P94, 13 题

六、(本题满分 7 分)

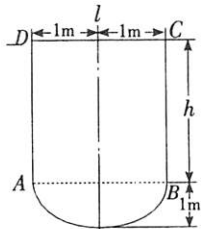
求微分方程 $xdy + (x - 2y)dx = 0$ 的一个解 $y = y(x)$, 使得由曲线 $y = y(x)$ 与直线 $x = 1$, $x = 2$ 以及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周的旋转体体积最小.

P204, 16 题

七、(本题满分 7 分)

某闸门的形状与大小如图所示, 其中直线 l 为对称轴, 闸门的上部为矩形 $ABCD$, 下部由二次抛物线与线段 AB 所围成. 当水面与闸门的上端相平时, 欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为 5 : 4, 闸门矩形部分的高 h 应为多少 m(米)?

P184, 121 题



八、(本题满分 8 分)

设 $0 < x_1 < 3$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$ ($n = 1, 2, \dots$), 证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 并求此极限.

P74, 40 题

九、(本题满分 8 分)

设 $0 < a < b$, 证明不等式

$$\frac{2a}{a^2 + b^2} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

P129, 112 题

十、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数, 且 $f(0) \neq 0, f'(0) \neq 0, f''(0) \neq 0$. 证明: 存在唯一的一组实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 使得当 $h \rightarrow 0$ 时, $\lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0)$ 是比 h^2 高阶的无穷小.

P80, 52 题

十一、(本题满分 6 分)

已知 A, B 为 3 阶矩阵, 且满足 $2A^{-1}B = B - 4E$, 其中 E 是 3 阶单位矩阵.

(1) 证明: 矩阵 $A - 2E$ 可逆;

(2) 若 $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 求矩阵 A .

P239, 14 题

十二、(本题满分 6 分)

已知 4 阶方阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 均为 4 维列向量, 其中 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$, 如果 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 求线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解.

P257, 7 题

2003 年全国硕士研究生招生考试 数学(二) 试题

一、填空题(本题 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分)

- (1) 若 $x \rightarrow 0$ 时, $(1-ax^2)^{\frac{1}{4}} - 1$ 与 $x \sin x$ 是等价无穷小,则 $a =$ _____. P80, 53 题
- (2) 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $xy + 2 \ln x = y^4$ 所确定,则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程是 _____. P109, 61 题
- (3) $y = 2^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 项的系数是 _____. P102, 43 题
- (4) 设曲线的极坐标方程为 $\rho = e^{a\theta}$ ($a > 0$), 则该曲线上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积为 _____. P185, 122 题
- (5) 设 α 为 3 维列向量, α^T 是 α 的转置, 若 $\alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $\alpha^T\alpha =$ _____. P229, 1 题

- (6) 设三阶方阵 A, B 满足 $A^2B - A - B = E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵, 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $|B| =$ _____. P226, 3 题

二、选择题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分)

- (1) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有
- (A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立. (B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立.
- (C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在. (D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在. P64, 12 题

- (2) 设 $a_n = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{n}{n+1}} x^{n-1} \sqrt{1+x^n} dx$, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$ 等于

- (A) $(1+e)^{\frac{3}{2}} + 1$. (B) $(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}} - 1$.
- (C) $(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}} + 1$. (D) $(1+e)^{\frac{3}{2}} - 1$. P75, 41 题

- (3) 已知 $y = \frac{x}{\ln x}$ 是微分方程 $y' = \frac{y}{x} + \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ 的解, 则 $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ 的表达式为

- (A) $-\frac{y^2}{x^2}$. (B) $\frac{y^2}{x^2}$. (C) $-\frac{x^2}{y^2}$. (D) $\frac{x^2}{y^2}$. P204, 17 题

- (4) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其导函数的图形如图所示, 则 $f(x)$ 有

- (A) 一个极小值点和两个极大值点.
- (B) 两个极小值点和一个极大值点.
- (C) 两个极小值点和两个极大值点.
- (D) 三个极小值点和一个极大值点. P116, 82 题

(5) 设 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} dx, I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x} dx$, 则

(A) $I_1 > I_2 > 1$.

(B) $1 > I_1 > I_2$.

(C) $I_2 > I_1 > 1$.

(D) $1 > I_2 > I_1$.

P150, 30 题

(6) 设向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由向量组 II: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 则

(A) 当 $r < s$ 时, 向量组 II 必线性相关.

(B) 当 $r > s$ 时, 向量组 II 必线性相关.

(C) 当 $r < s$ 时, 向量组 I 必线性相关.

(D) 当 $r > s$ 时, 向量组 I 必线性相关.

P245, 4 题

三、(本题满分 10 分)

$$\text{设函数 } f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin x}, & x < 0, \\ 6, & x = 0, \\ \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{x}{4}}, & x > 0. \end{cases}$$

问 a 为何值时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续; a 为何值时, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点? P86, 69 题

四、(本题满分 9 分)

设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 1 + 2t^2 \\ y = \int_1^{1+2\ln t} \frac{e^u}{u} du \end{cases} (t > 1)$ 所确定, 求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=9}$. P103, 44 题

五、(本题满分 9 分)

计算不定积分 $\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx$.

P146, 20 题

六、(本题满分 12 分)

设函数 $y = y(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $y' \neq 0, x = x(y)$ 是 $y = y(x)$ 的反函数.

(1) 试将 $x = x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2 x}{dy^2} + (y + \sin x) \left(\frac{dx}{dy} \right)^3 = 0$ 变换为 $y = y(x)$ 满足的微分方程;

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0) = 0, y'(0) = \frac{3}{2}$ 的解.

P214, 43 题

七、(本题满分 12 分)

讨论曲线 $y = 4 \ln x + k$ 与 $y = 4x + \ln^4 x$ 的交点个数.

P134, 121 题

八、(本题满分 12 分)

设位于第一象限的曲线 $y = f(x)$ 过点 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$, 其上任一点 $P(x, y)$ 处的法线与 y 轴的交点为 Q , 且线段 PQ 被 x 轴平分.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 的方程;

(2) 已知曲线 $y = \sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上的弧长为 l , 试用 l 表示曲线 $y = f(x)$ 的弧长 s .

P220, 57 题

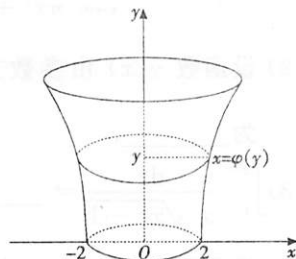
九、(本题满分 10 分)

有一平底容器, 其内侧壁是由曲线 $x = \varphi(y) (y \geq 0)$ 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面(如图), 容器的底面圆的半径为 $2m$. 根据设计要求, 当以 $3m^3/min$ 的速率向容器内注入液体时, 液面的面积将以 $\pi m^2/min$ 的速率均匀扩大(假设注入液体前, 容器内无液体).

(1) 根据 t 时刻液面的面积, 写出 t 与 $\varphi(y)$ 之间的关系式;

(2) 求曲线 $x = \varphi(y)$ 的方程.

(注: m 表示长度单位米, min 表示时间单位分).



P221, 58 题

十、(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 且 $f'(x) > 0$. 若极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在, 证明:

(1) 在 (a, b) 内 $f(x) > 0$;

(2) 在 (a, b) 内存在点 ξ , 使 $\frac{b^2 - a^2}{\int_a^b f(x) dx} = \frac{2\xi}{f(\xi)}$;

(3) 在 (a, b) 内存在与(2)中与 ξ 相异的点 η , 使 $f'(\eta)(b^2 - a^2) = \frac{2\xi}{\xi - a} \int_a^b f(x) dx$.

P138, 130 题

十一、(本题满分 10 分)

若矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & a \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ 相似于对角矩阵 Λ , 试确定常数 a 的值, 并求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP = \Lambda$.

P268, 2 题

十二、(本题满分 8 分)

已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1: ax + 2by + 3c = 0$$

$$l_2: bx + 2cy + 3a = 0$$

$$l_3: cx + 2ay + 3b = 0$$

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a + b + c = 0$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

P258, 8 题

2004 年全国硕士研究生招生考试 数学(二) 试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分)

(1) 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)x}{nx^2+1}$, 则 $f(x)$ 的间断点为 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

P86,70 题

(2) 设函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = t^3 - 3t + 1 \end{cases}$ 确定, 则曲线 $y = y(x)$ 向上凸的 x 取值范围
为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

P124,99 题

(3) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

P173,91 题

(4) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $z = e^{2x-3z} + 2y$ 确定, 则 $3 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

P190,2 题

(5) 微分方程 $(y+x^3)dx - 2xdy = 0$ 满足 $y|_{x=1} = \frac{6}{5}$ 的特解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

P205,18 题

(6) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 矩阵 B 满足 $ABA^* = 2BA^* + E$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵, E 是单位
矩阵, 则 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$.

P226,4 题

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分)

(7) 把 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt$, $\beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt$, $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$ 排列起来, 使排在后面
的是前一个的高阶无穷小, 则正确的排列次序是

(A) α, β, γ .

(B) α, γ, β .

(C) β, α, γ .

(D) β, γ, α .

P80,54 题

(8) 设 $f(x) = |x(1-x)|$, 则

(A) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0, 0)$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(B) $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0, 0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(C) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 且 $(0, 0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(D) $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(0, 0)$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

P124,100 题

(9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right)^2}$ 等于

(A) $\int_1^2 \ln^2 x dx$.

(B) $2 \int_1^2 \ln x dx$.

(C) $2 \int_1^2 \ln(1+x) dx$.

(D) $\int_1^2 \ln^2(1+x) dx$.

P151,31 题

(10) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f'(0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得

(A) $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调增加.

(B) $f(x)$ 在 $(-\delta, 0)$ 内单调减少.

(C) 对任意的 $x \in (0, \delta)$ 有 $f(x) > f(0)$.

(D) 对任意的 $x \in (-\delta, 0)$ 有 $f(x) > f(0)$.

P116,83 题

(11) 微分方程 $y'' + y = x^2 + 1 + \sin x$ 的特解形式可设为

- (A) $y^* = ax^2 + bx + c + x(A\sin x + B\cos x)$.
 (B) $y^* = x(ax^2 + bx + c + A\sin x + B\cos x)$.
 (C) $y^* = ax^2 + bx + c + A\sin x$.
 (D) $y^* = ax^2 + bx + c + A\cos x$.

P215, 44 题

(12) 设函数 $f(u)$ 连续, 区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2y\}$, 则 $\iint_D f(xy) dx dy$ 等于

- (A) $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(xy) dy$.
 (B) $2 \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(xy) dx$.
 (C) $\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r^2 \sin\theta \cos\theta) r dr$.
 (D) $\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r^2 \sin\theta \cos\theta) r dr$.

P195, 1 题

(13) 设 A 是 3 阶方阵, 将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B , 再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C , 则满足 $AQ = C$ 的可逆矩阵 Q 为

- (A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
 (B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
 (C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
 (D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

P229, 2 题

(14) 设 A, B 为满足 $AB = O$ 的任意两个非零矩阵, 则必有

- (A) A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.
 (B) A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.
 (C) A 的行向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.
 (D) A 的行向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.

P245, 5 题

三、解答题(本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)^x - 1 \right]$.

P70, 33 题

(16) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 在区间 $[0, 2]$ 上, $f(x) = x(x^2 - 4)$, 若对任意的 x 都满足 $f(x) = kf(x+2)$, 其中 k 为常数.

(I) 写出 $f(x)$ 在 $[-2, 0)$ 上的表达式;

(II) 问 k 为何值时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.

P95, 14 题

(17) (本题满分 11 分)

设 $f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt$,

(I) 证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数;

(II) 求 $f(x)$ 的值域.

P165, 74 题

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

(18) (本题满分 12 分)

曲线 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 与直线 $x = 0, x = t (t > 0)$ 及 $y = 0$ 围成一曲边梯形. 该曲边梯形绕 x 轴旋转一周得一旋转体, 其体积为 $V(t)$, 侧面积为 $S(t)$, 在 $x = t$ 处的底面积为 $F(t)$.

(I) 求 $\frac{S(t)}{V(t)}$ 的值;

(II) 计算极限 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{S(t)}{F(t)}$.

P185, 123 题

(19) (本题满分 12 分)

设 $e < a < b < e^2$, 证明 $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b - a)$.

P130, 113 题

(20) (本题满分 11 分)

某种飞机在机场降落时, 为了减少滑行距离, 在触地的瞬间, 飞机尾部张开减速伞, 以增大阻力, 使飞机迅速减速并停下. 现有一质量为 9000kg 的飞机, 着陆时的水平速度为 700km/h. 经测试, 减速伞打开后, 飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比(比例系数为 $k = 6.0 \times 10^6$). 问从着陆点算起, 飞机滑行的最长距离是多少?(注: kg 表示千克, km/h 表示千米/小时.)

P222, 59 题

(21) (本题满分 10 分)

设 $z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$, 其中 f 具有连续二阶偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

P191, 3 题

(22) (本题满分 9 分)

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1 & + x_2 & + x_3 & + x_4 = 0 \\ 2x_1 + (2+a)x_2 & & + 2x_3 & + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 & + 3x_2 + (3+a)x_3 & & + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 & + 4x_2 & + 4x_3 + (4+a)x_4 = 0 \end{cases}$$

试问 a 取何值时, 该方程组有非零解, 并求出其通解.

P253, 2 题

(23) (本题满分 9 分)

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{bmatrix}$ 的特征方程有一个二重根, 求 a 的值, 并讨论 A 是否可相似对角化.

P269, 3 题

2005 年全国硕士研究生招生考试 数学(二) 试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分)

- (1) 设 $y = (1 + \sin x)^x$, 则 $dy|_{x=\pi} =$ _____. P103, 45 题
- (2) 曲线 $y = \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为 _____. P124, 101 题
- (3) $\int_0^1 \frac{x dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} =$ _____. P157, 52 题
- (4) 微分方程 $xy' + 2y = x \ln x$ 满足 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 的解为 _____. P206, 19 题
- (5) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x) = kx^2$ 与 $\beta(x) = \sqrt{1+x} \arcsin x - \sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小, 则 $k =$ _____. P81, 55 题
- (6) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为三维列向量, 记矩阵
 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3)$
 如果 $|A| = 1$, 那么 $|B| =$ _____. P227, 5 题

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分)

- (7) 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内
 (A) 处处可导. (B) 恰有一个不可导点.
 (C) 恰有两个不可导点. (D) 至少有三个不可导点. P104, 46 题
- (8) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数, “ $M \Leftrightarrow N$ ” 表示 “ M 的充分必要条件是 N ”, 则必有
 (A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.
 (B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.
 (C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.
 (D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数. P166, 75 题
- (9) 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = \ln(1+t) \end{cases}$ 确定, 则曲线 $y = y(x)$ 在 $x = 3$ 处的法线与 x 轴交点的横坐标是
 (A) $\frac{1}{8} \ln 2 + 3$. (B) $-\frac{1}{8} \ln 2 + 3$.
 (C) $-8 \ln 2 + 3$. (D) $8 \ln 2 + 3$. P104, 47 题
- (10) 设区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, $f(x)$ 为 D 上的正值连续函数, a, b 为常数,
 则 $\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma =$
 (A) $ab\pi$. (B) $\frac{ab}{2}\pi$.
 (C) $(a+b)\pi$. (D) $\frac{a+b}{2}\pi$. P197, 4 题

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

(11) 设函数 $u(x, y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} \psi(t) dt$, 其中函数 φ 具有二阶导数, ψ 具有一阶导数, 则必有

(A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

P191, 4 题

(12) 设函数 $f(x) = \frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}} - 1}$, 则

(A) $x = 0, x = 1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点.

(B) $x = 0, x = 1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(C) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, $x = 1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(D) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点, $x = 1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

P87, 71 题

(13) 设 λ_1, λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值, 对应的特征向量分别为 α_1, α_2 , 则 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件是

(A) $\lambda_1 \neq 0$.

(B) $\lambda_2 \neq 0$.

(C) $\lambda_1 = 0$.

(D) $\lambda_2 = 0$.

P245, 6 题

(14) 设 A 为 $n (n \geq 2)$ 阶可逆矩阵, 交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵, 则

(A) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 B^* .

(B) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 B^* .

(C) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 $-B^*$.

(D) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 $-B^*$.

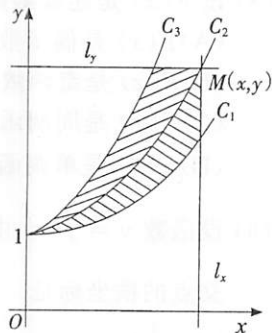
P230, 3 题

三、解答题(本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15) (本题满分 11 分)

设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) \neq 0$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x \int_0^x f(x-t)dt}$.

P166, 76 题



(16) (本题满分 11 分)

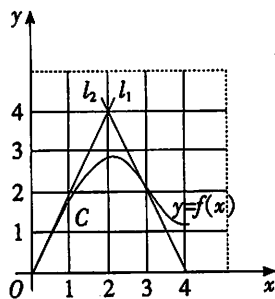
如图所示, C_1 和 C_2 分别是 $y = \frac{1}{2}(1 + e^x)$ 和 $y = e^x$ 的图像, 过点 $(0, 1)$ 的曲线 C_3 是一单调增函数的图像. 过 C_2 上任一点 $M(x, y)$ 分别作垂直于 x 轴和 y 轴的直线 l_x 和 l_y . 记 C_1, C_2 与 l_x 所围图形的面积为 $S_1(x)$; C_2, C_3 与 l_y 所围图形的面积为 $S_2(y)$. 如果总有 $S_1(x) = S_2(y)$, 求曲线 C_3 的方程 $x = \varphi(y)$.

P186, 124 题

(17) (本题满分 11 分)

如图所示, 曲线 C 的方程为 $y = f(x)$, 点 $(3, 2)$ 是它的一个拐点, 直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点 $(0, 0)$ 与 $(3, 2)$ 处的切线, 其交点为 $(2, 4)$. 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数, 计算定积分 $\int_0^3 (x^2 + x) f'''(x) dx$.

P157, 53 题



(18) (本题满分 12 分)

用变量代换 $x = \cos t$ ($0 < t < \pi$) 化简微分方程

$$(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0,$$

并求其满足 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2$ 的特解.

P215, 45 题

(19) (本题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 证明:

(I) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$;

(II) 存在两个不同的点 $\eta, \zeta \in (0, 1)$, 使得 $f'(\eta)f'(\zeta) = 1$.

P138, 131 题

(20) (本题满分 10 分)

已知函数 $z = f(x, y)$ 的全微分 $dz = 2xdx - 2ydy$, 并且 $f(1, 1) = 2$. 求 $f(x, y)$ 在椭圆域

$D = \{(x, y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$ 上的最大值和最小值.

P192, 7 题

(21) (本题满分 9 分)

计算二重积分 $\iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

P198, 6 题

(22) (本题满分 9 分)

确定常数 a , 使向量组 $\alpha_1 = (1, 1, a)^T, \alpha_2 = (1, a, 1)^T, \alpha_3 = (a, 1, 1)^T$ 可由向量组 $\beta_1 = (1, 1, a)^T, \beta_2 = (-2, a, 4)^T, \beta_3 = (-2, a, a)^T$ 线性表示, 但向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

P242, 2 题

(23) (本题满分 9 分)

已知三阶矩阵 A 的第一行是 (a, b, c) , a, b, c 不全为零, 矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{bmatrix}$ (k 为常数), 且

$AB = O$, 求线性方程组 $Ax = 0$ 的通解.

P254, 3 题

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

2006 年全国硕士研究生招生考试 数学(二) 试题

一、填空题(1~6 小题,每小题 4 分,共 24 分)

(1) 曲线 $y = \frac{x + 4\sin x}{5x - 2\cos x}$ 的水平渐近线方程为 _____ . P125,102 题

(2) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} \int_0^x \sin t^2 dt, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续,则 $a =$ _____ . P87,72 题

(3) 反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^2} =$ _____ . P173,92 题

(4) 微分方程 $y' = \frac{y(1-x)}{x}$ 的通解是 _____ . P206,20 题

(5) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y = 1 - xe^y$ 确定,则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} =$ _____ . P105,49 题

(6) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, E 为二阶单位矩阵,矩阵 B 满足 $BA = B + 2E$,则 $|B| =$ _____ .

P227,6 题

二、选择题(7~14 小题,每小题 4 分,共 32 分)

(7) 设函数 $y = f(x)$ 具有二阶导数,且 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量, Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分,若 $\Delta x > 0$,则

(A) $0 < dy < \Delta y$. (B) $0 < \Delta y < dy$.

(C) $\Delta y < dy < 0$. (D) $dy < \Delta y < 0$. P125,103 题

(8) 设 $f(x)$ 是奇函数,除 $x = 0$ 外处处连续, $x = 0$ 是其第一类间断点,则 $\int_0^x f(t) dt$ 是

(A) 连续的奇函数. (B) 连续的偶函数.

(C) 在 $x = 0$ 间断的奇函数. (D) 在 $x = 0$ 间断的偶函数. P167,77 题

(9) 设函数 $g(x)$ 可微, $h(x) = e^{1+g(x)}$, $h'(1) = 1$, $g'(1) = 2$,则 $g(1)$ 等于

(A) $\ln 3 - 1$. (B) $-\ln 3 - 1$.

(C) $-\ln 2 - 1$. (D) $\ln 2 - 1$. P105,48 题

(10) 函数 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + x e^x$ 满足的一个微分方程是

(A) $y'' - y' - 2y = 3xe^x$. (B) $y'' - y' - 2y = 3e^x$.

(C) $y'' + y' - 2y = 3xe^x$. (D) $y'' + y' - 2y = 3e^x$. P215,46 题

(11) 设 $f(x, y)$ 为连续函数,则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ 等于

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$. (B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$.

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$. (D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$. P199,9 题

(12) 设 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x, y) \neq 0$. 已知 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是

- (A) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$.
 (B) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$.
 (C) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$.
 (D) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

P193, 8 题

(13) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 均为 n 维列向量, A 是 $m \times n$ 矩阵, 下列选项正确的是

- (A) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关.
 (B) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关.
 (C) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关.
 (D) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关.

P246, 7 题

(14) 设 A 为三阶矩阵, 将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B , 再将 B 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 C ,

$$\text{记 } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则}$$

$$(A) C = P^{-1}AP.$$

$$(B) C = PAP^{-1}.$$

$$(C) C = P^TAP.$$

$$(D) C = PAP^T.$$

P230, 4 题

三、解答题(15 ~ 23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15) (本题满分 10 分)

试确定常数 A, B, C 的值, 使得

$$e^x(1 + Bx + Cx^2) = 1 + Ax + o(x^3)$$

其中 $o(x^3)$ 是当 $x \rightarrow 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小量.

P81, 56 题

(16) (本题满分 10 分)

$$\text{求 } \int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx.$$

P147, 21 题

(17) (本题满分 10 分)

设区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$, 计算二重积分

$$I = \iint_D \frac{1 + xy}{1 + x^2 + y^2} dx dy$$

P197, 5 题

(18) (本题满分 12 分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n (n = 1, 2, \dots)$.

(I) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求该极限;

(II) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n}}$.

P75, 42 题

(19) (本题满分 10 分)

证明: 当 $0 < a < b < \pi$ 时,

$$b \sin b + 2 \cos b + \pi b > a \sin a + 2 \cos a + \pi a$$

P131, 114 题

(20) (本题满分 12 分)

设函数 $f(u)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

(I) 验证 $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$;

(II) 若 $f(1) = 0, f'(1) = 1$, 求函数 $f(u)$ 的表达式.

P194, 10 题

(21) (本题满分 12 分)

已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = 4t - t^2, \end{cases} (t \geq 0).$

(I) 讨论 L 的凹凸性;

(II) 过点 $(-1, 0)$ 引 L 的切线, 求切点 (x_0, y_0) , 并写出切线的方程;

(III) 求此切线与 L (对应于 $x \leq x_0$ 的部分) 及 x 轴所围成的平面图形的面积.

P186, 125 题

(22) (本题满分 9 分)

已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1, \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1. \end{cases}$$

有 3 个线性无关的解.

(I) 证明方程组系数矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$;

(II) 求 a, b 的值及方程组的通解.

P258, 9 题

(23) (本题满分 9 分)

设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 向量 $\alpha_1 = (-1, 2, -1)^T, \alpha_2 = (0, -1, 1)^T$ 是线性方程组 $Ax = 0$ 的两个解.

(I) 求 A 的特征值与特征向量;

(II) 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ , 使得 $Q^T A Q = \Lambda$.

P272, 4 题

2007 年全国硕士研究生招生考试 数学(二) 试题

一、选择题(1~10 小题,每小题 4 分,共 40 分)

(1) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时,与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

(A) $1 - e^{\sqrt{x}}$.

(B) $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$.

(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$.

(D) $1 - \cos \sqrt{x}$.

P83, 57 题

(2) 函数 $f(x) = \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e) \tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的第一类间断点是 $x =$

(A) 0.

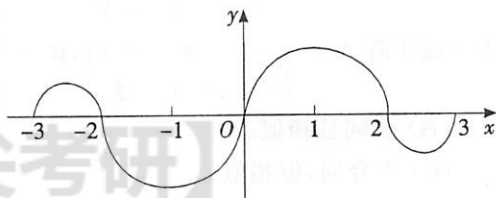
(B) 1.

(C) $-\frac{\pi}{2}$.

(D) $\frac{\pi}{2}$.

P87, 73 题

(3) 如图,连续函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-3, -2]$, $[2, 3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周,在区间 $[-2, 0]$, $[0, 2]$ 上的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周. 设 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则下列结论正确的是



(A) $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$.

(B) $F(3) = \frac{5}{4}F(2)$.

(C) $F(-3) = \frac{3}{4}F(2)$.

(D) $F(-3) = -\frac{5}{4}F(-2)$.

P151, 32 题

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 下列命题错误的是

(A) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$.

(B) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$.

(C) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在.

(D) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

P95, 15 题

(5) 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 渐近线的条数为

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

P126, 104 题

(6) 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上具有二阶导数, 且 $f''(x) > 0$, 令 $u_n = f(n) (n = 1, 2, \dots)$, 则下列结论正确的是

(A) 若 $u_1 > u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛.

(B) 若 $u_1 > u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散.

(C) 若 $u_1 < u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛.

(D) 若 $u_1 < u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散.

P126, 105 题

(7) 二元函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微的一个充分条件是

(A) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} [f(x, y) - f(0, 0)] = 0.$

(B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0, \text{ 且 } \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0.$

(C) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$

(D) $\lim_{x \rightarrow 0} [f'_x(x, 0) - f'_x(0, 0)] = 0, \text{ 且 } \lim_{y \rightarrow 0} [f'_y(0, y) - f'_y(0, 0)] = 0.$

P189, 1 题

(8) 设函数 $f(x, y)$ 连续, 则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy$ 等于

(A) $\int_0^1 dy \int_{\pi + \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx.$

(B) $\int_0^1 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx.$

(C) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi + \arcsin y} f(x, y) dx.$

(D) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx.$

P199, 10 题

(9) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是

(A) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1.$

(B) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1.$

(C) $\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_3 - 2\alpha_1.$

(D) $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + 2\alpha_1.$

P246, 8 题

(10) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 A 与 B

(A) 合同且相似.

(B) 合同, 但不相似.

(C) 不合同, 但相似.

(D) 既不合同, 也不相似.

P275, 6 题

二、填空题 (11 ~ 16 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

(11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3} = \underline{\hspace{2cm}}.$

P70, 34 题

(12) 曲线 $\begin{cases} x = \cos t + \cos^2 t, \\ y = 1 + \sin t \end{cases}$ 上对应于 $t = \frac{\pi}{4}$ 的点处的法线斜率为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

P110, 62 题

(13) 设函数 $y = \frac{1}{2x+3}$, 则 $y^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}.$

P106, 51 题

(14) 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x}$ 的通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}.$

P216, 47 题

(15) 设 $f(u, v)$ 是二元可微函数, $z = f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right)$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}.$

P191, 5 题

(16) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 A^3 的秩为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

P236, 9 题

三、解答题 (17 ~ 24 小题, 共 86 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(17) (本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是区间 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的单调、可导函数, 且满足

$$\int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = \int_0^x t \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} dt$$

其中 f^{-1} 是 f 的反函数, 求 $f(x)$.

P168, 78 题

(18) (本题满分 11 分)

设 D 是位于曲线 $y = \sqrt{x}a^{-\frac{x}{a}}$ ($a > 1, 0 \leq x < +\infty$) 下方, x 轴上方的无界区域.

(I) 求区域 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积 $V(a)$;

(II) 当 a 为何值时, $V(a)$ 最小? 并求此最小值.

P188, 126 题

(19) (本题满分 10 分)

求微分方程 $y''(x + y'^2) = y'$ 满足初始条件 $y(1) = y'(1) = 1$ 的特解.

P208, 24 题

(20) (本题满分 11 分)

已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数, 且 $f'(0) = 1$, 函数 $y = y(x)$ 由方程 $y - xe^{y-1} = 1$ 所确定. 设

$z = f(\ln y - \sin x)$, 求 $\left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=0}, \left. \frac{d^2z}{dx^2} \right|_{x=0}$.

P105, 50 题

(21) (本题满分 11 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值, $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

P139, 132 题

(22) (本题满分 11 分)

设二元函数

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2, & |x| + |y| \leq 1, \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 < |x| + |y| \leq 2, \end{cases}$$

计算二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 2\}$.

P198, 7 题

(23) (本题满分 11 分)

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

与方程

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \quad (2)$$

有公共解, 求 a 的值及所有公共解.

P262, 11 题

(24) (本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2, \alpha_1 = (1, -1, 1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量. 记 $B = A^5 - 4A^3 + E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(I) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量, 并求 B 的全部特征值与特征向量;

(II) 求矩阵 B .

P273, 5 题

2008 年全国硕士研究生招生考试 数学(二) 试题

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分)

(1) 设函数 $f(x) = x^2(x-1)(x-2)$, 则 $f'(x)$ 的零点个数为

- (A) 0. (B) 1.
(C) 2. (D) 3.

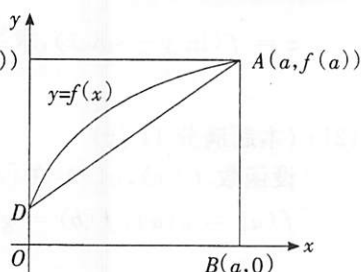
P135, 122 题

(2) 如图, 曲线段的方程为 $y = f(x)$, 函数 $f(x)$ 在区间

$[0, a]$ 上有连续的导数, 则定积分 $\int_0^a xf'(x)dx$ 等于

- (A) 曲边梯形 $ABOD$ 的面积.
(B) 梯形 $ABOD$ 的面积.
(C) 曲边三角形 ACD 的面积.
(D) 三角形 ACD 的面积.

P152, 33 题



(3) 在下列微分方程中, 以 $y = C_1e^x + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x$ (C_1, C_2, C_3 为任意常数) 为通解的是

- (A) $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$. (B) $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$.
(C) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$. (D) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$.

P216, 48 题

(4) 设函数 $f(x) = \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x$, 则 $f(x)$ 有

- (A) 1 个可去间断点, 1 个跳跃间断点. (B) 1 个可去间断点, 1 个无穷间断点.
(C) 2 个跳跃间断点. (D) 2 个无穷间断点.

P88, 74 题

(5) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界, $\{x_n\}$ 为数列, 下列命题正确的是

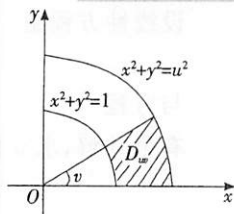
- (A) 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛. (B) 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.
(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛. (D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 收敛.

P65, 13 题

(6) 设函数 $f(x)$ 连续. 若 $F(u, v) = \iint_{D_{uv}} \frac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$, 其中区域 D_{uv} 为图

中阴影部分, 则 $\frac{\partial F}{\partial u} =$

- (A) $vf(u^2)$. (B) $\frac{v}{u}f(u^2)$.
(C) $vf(u)$. (D) $\frac{v}{u}f(u)$.



P196, 2 题

(7) 设 A 为 n 阶非零矩阵, E 为 n 阶单位矩阵. 若 $A^3 = O$, 则

- (A) $E-A$ 不可逆, $E+A$ 不可逆. (B) $E-A$ 不可逆, $E+A$ 可逆.
(C) $E-A$ 可逆, $E+A$ 可逆. (D) $E-A$ 可逆, $E+A$ 不可逆.

P233, 7 题

(8) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, 则在实数域上与 A 合同的矩阵是

(A) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

P276, 7 题

二、填空题(9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

(9) 已知函数 $f(x)$ 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(xf(x))}{(e^{x^2} - 1)f(x)} = 1$, 则 $f(0) =$ _____.

P71, 35 题

(10) 微分方程 $(y + x^2 e^{-x})dx - xdy = 0$ 的通解是 $y =$ _____.

P206, 21 题

(11) 曲线 $\sin(xy) + \ln(y - x) = x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程是 _____.

P110, 63 题

(12) 曲线 $y = (x - 5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点坐标为 _____.

P127, 106 题

(13) 设 $z = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$, 则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} =$ _____.

P192, 6 题

(14) 设三阶矩阵 A 的特征值为 $2, 3, \lambda$. 若行列式 $|2A| = -48$, 则 $\lambda =$ _____.

P227, 7 题

三、解答题(15 ~ 23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15) (本题满分 9 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4}$.

P72, 36 题

(16) (本题满分 10 分)

设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = \int_0^t \ln(1+u) du \end{cases}$ 确定, 其中 $x(t)$ 是初值问题

$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 2te^{-x} = 0, \\ x|_{t=0} = 0 \end{cases}$ 的解. 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

P106, 52 题

(17) (本题满分 9 分)

计算 $\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

P158, 54 题

(18) (本题满分 11 分)

计算 $\iint_D \max\{xy, 1\} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$.

P199, 8 题

(19) (本题满分 11 分)

设 $f(x)$ 是区间 $[0, +\infty)$ 上具有连续导数的单调增加函数, 且 $f(0) = 1$. 对任意的 $t \in [0, +\infty)$, 直线 $x = 0, x = t$, 曲线 $y = f(x)$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周生成一旋转体. 若该旋转体的侧面面积在数值上等于其体积的 2 倍, 求函数 $f(x)$ 的表达式.

P223, 60 题

(20) (本题满分 11 分)

(I) 证明积分中值定理: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则至少存在一点 $\eta \in [a, b]$, 使得 $\int_a^b f(x) dx = f(\eta)(b-a)$;

(II) 若函数 $\varphi(x)$ 具有二阶导数, 且满足 $\varphi(2) > \varphi(1), \varphi(2) > \int_2^3 \varphi(x) dx$, 则至少存在一点 $\xi \in (1, 3)$, 使得 $\varphi''(\xi) < 0$.

P140, 133 题

(21) (本题满分 11 分)

求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在约束条件 $z = x^2 + y^2$ 和 $x + y + z = 4$ 下的最大值与最小值.

P193, 9 题

(22) (本题满分 12 分)

设 n 元线性方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{bmatrix}_{n \times n}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

(I) 证明行列式 $|A| = (n+1)a^n$;

(II) 当 a 为何值时, 该方程组有唯一解, 并求 x_1 ;

(III) 当 a 为何值时, 该方程组有无穷多解, 并求通解.

P259, 10 题

(23) (本题满分 10 分)

设 A 为三阶矩阵, α_1, α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1, 1$ 的特征向量, 向量 α_3 满足 $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$.

(I) 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关;

(II) 令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 求 $P^{-1}AP$.

P247, 9 题

第二篇



微信公众号【顶尖考研】

(ID: djky66) 真题解析

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)



微信公众号【顶尖考研】

(ID: djky66)

顶尖考研公众号
(ID: djky66)

第一部分 高等数学

第一章 函数、极限、连续

本章导读

函数是微积分的研究对象,极限是建立微积分理论和方法的基础,连续性是函数的基本性质,是函数可导和可积的基本条件,连续函数是微积分所讨论的函数的主要类型.因此,函数、极限与函数连续性是本章的主要内容,也是微积分的理论基础.

其主要内容有

- (1) 函数的概念,基本性质及复合函数;
- (2) 极限的概念,性质,存在准则及求极限的方法;无穷小量的概念、性质及阶的比较;
- (3) 连续的概念,间断点及其分类,连续函数的性质(运算性质及有限闭区间上连续函数性质).

试题特点

本章是微积分的基础,每年必考.而本章的特点是基本概念和基本理论非常多,许多考题重点考查这些基本概念和基本理论,从往年试卷分析情况来看,失分率比较高,因此,望考生重视基本概念和基本理论的复习.

本章常考题型

- (1) 求极限;
- (2) 无穷小量及其比较;
- (3) 求间断点及判别间断点类型.

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)

无穷小量比较实际上就是研究“ $\frac{0}{0}$ ”型极限,而间断点类型判定的关键也是求极限,所以,本章常考的三种题型的核心都是求极限.重点是求极限的常用方法(如有理运算,基本极限,等价无穷小代换、洛必达法则等).

考题详析

一、复合函数及函数的几种特性

1 (1987, 九(1)题, 4分) $f(x) = |x \sin x| e^{\cos x} (-\infty < x < +\infty)$ 是

- (A) 有界函数. (B) 单调函数. (C) 周期函数. (D) 偶函数.

【答案】 D.

【解析】

$$\begin{aligned} f(-x) &= |(-x)\sin(-x)| e^{\cos(-x)} \\ &= |x\sin x| e^{\cos x} = f(x) \end{aligned}$$

则 $f(x)$ 为偶函数, 故应选(D).

2 (1988, 三(1) 题, 5 分) 已知 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1 - x$ 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

【解】 由 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1 - x$, $\varphi(x) \geq 0$ 可知

$$e^{\varphi^2(x)} = 1 - x \geq 1$$

则 $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$ ($x \leq 0$).

3 (1990, 一(5) 题, 3 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则 $f[f(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 1.

【解析】 $f[f(x)] = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 1, & |x| > 1, \end{cases}$ 则 $f[f(x)] \equiv 1$.

4 (1992, 二(2) 题, 3 分) 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ x^2 + x, & x > 0, \end{cases}$ 则

$$(A) f(-x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0, \\ -(x^2 + x), & x > 0. \end{cases}$$

$$(B) f(-x) = \begin{cases} -(x^2 + x), & x < 0, \\ -x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$(C) f(-x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ x^2 - x, & x > 0. \end{cases}$$

$$(D) f(-x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

【答案】 D.

【解析】 $f(-x) = \begin{cases} (-x)^2, & -x \leq 0 \\ (-x)^2 + (-x), & -x > 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ x^2 - x, & x < 0. \end{cases}$

故应选(D).

5 (1997, 二(5) 题, 3 分) 设函数 $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0, \\ x+2, & x > 0, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ -x, & x \geq 0, \end{cases}$ 则 $g[f(x)] =$

$$(A) \begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 2-x, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$(B) \begin{cases} 2-x^2, & x < 0, \\ 2+x, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$(C) \begin{cases} 2-x^2, & x < 0, \\ 2-x, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$(D) \begin{cases} 2+x^2, & x < 0, \\ 2+x, & x \geq 0. \end{cases}$$

【答案】 D.

【解析】 当 $x < 0$ 时, $f(x) = x^2 > 0$, 则 $g[f(x)] = x^2 + 2$,
当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = -x \leq 0$,

$$g[f(x)] = 2 - (-x) = 2 + x$$

$$\text{故 } g[f(x)] = \begin{cases} x^2 + 2, & x < 0, \\ 2 + x, & x \geq 0. \end{cases}$$

故应选(D).

6 (2001, 二(1) 题, 3 分) 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于

(A) 0.

(B) 1.

(C) $\begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

(D) $\begin{cases} 0, & |x| \leq 1, \\ 1, & |x| > 1. \end{cases}$

【答案】 B.

【解析】 由 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ 可知

$$f[f(x)] = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 1, & |x| > 1 \end{cases}$$

则 $f[f(x)] = 1$,

从而 $f\{f[f(x)]\} = 1$, 故应选(B).

二、极限的概念、性质及存在准则

7 (1987, 九(2) 题, 4 分) 函数 $f(x) = x \sin x$

(A) 当 $x \rightarrow \infty$ 时为无穷大.

(B) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

(C) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界.

(D) 当 $x \rightarrow \infty$ 时有有限极限.

【答案】 C.

【解析】 对任意正整数 n ,

$$f\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow +\infty \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty)$$

则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界, 故应选(C).

8 (1993, 二(1) 题, 3 分) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 变量 $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 是

(A) 无穷小.

(B) 无穷大.

(C) 有界的, 但不是无穷小.

(D) 无界的, 但不是无穷大.

【答案】 D.

【解析】 令 $x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $y_n = \frac{1}{2n\pi}$, $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$.

则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n \rightarrow 0$, $y_n \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} f(x_n) &= \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2 \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

则当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是无界的, 又

$$f(y_n) = (2n\pi)^2 \sin(2n\pi) = 0$$

则当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 不是无穷大量, 故应选(D).

9 (1998, 二(1) 题, 3 分) 设数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则下列断言正确的是

(A) 若 $\{x_n\}$ 发散, 则 $\{y_n\}$ 必发散.

(B) 若 $\{x_n\}$ 无界, 则 $\{y_n\}$ 必有界.

(C) 若 $\{x_n\}$ 有界, 则 $\{y_n\}$ 必为无穷小.

(D) 若 $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ 为无穷小, 则 $\{y_n\}$ 必为无穷小.

【答案】 D.

【解析】 (方法一) 直接法

若 $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ 为无穷小, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \cdot \frac{1}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0 \cdot 0 = 0$$

即 y_n 为无穷小.

(方法二) 排除法:(A) 选项的反例 $x_n = n, y_n = \frac{1}{n^2}$.

(B) 选项的反例 $x_n = \begin{cases} n, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}, y_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数} \\ n, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$.

(C) 选项的反例 $x_n = \frac{1}{n^2}, y_n = n$.

所以,排除选项(A)(B)(C),故应选(D).

10 (1999,二(4)题,3分)“对任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$,总存在正整数 N ,当 $n \geq N$ 时,恒有 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon$ ”是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的

(A) 充分条件但非必要条件.

(B) 必要条件但非充分条件.

(C) 充分必要条件.

(D) 既非充分条件又非必要条件.

【答案】 C.

【解析】 必要性:由数列极限定义知, $\forall \varepsilon > 0$, 存在 N , 当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon$, 则 $\forall \varepsilon \in (0,1)$, 存在 N , 当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon < 2\varepsilon$.

充分性: $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{3}$, 对此 ε_1 , 存在 N , 当 $n > N$ 时, $|x_n - a| \leq 2\varepsilon_1 = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

故应选(C).

11 (1999,十题,7分) 设 $f(x)$ 是区间 $[0, +\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数, $a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx$ ($n = 1, 2, \dots$), 证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

【证明】 利用单调有界准则证明极限存在.

由于 $f(x)$ 单调减, 则

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1) dx \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \int_k^{k+1} f(k) dx = f(k)$$

因此

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx = \sum_{k=1}^n f(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left[f(k) - \int_k^{k+1} f(x) dx \right] + f(n) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

即数列 $\{a_n\}$ 下有界, 又

$$a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x) dx \leq 0$$

即数列 $\{a_n\}$ 单调减, 由单调有界准则知, 数列 $\{a_n\}$ 必收敛.

12 (2003,二(1)题,4分) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有

(A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立.

(B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在.

(D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在.

【答案】 D.

【解析】(方法一) 直接法

若极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 存在, 设其为 A , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n c_n}{b_n} = \frac{A}{1} = A$$

这与 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$ 矛盾. 故极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在.

或由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n = \infty$.

(方法二) 排除法

(A) 的反例, 设 $a_n = \frac{100}{n}, b_n = \frac{n}{n+1}$, 当 $n=1$ 时 $a_1 = 100 > b_1 = \frac{1}{2}$.

(B) 的反例, 设 $b_n = \frac{n+100}{n}, c_n = n$, 当 $n=1$ 时 $b_1 = 101 > c_1 = 1$.

(C) 的反例, 设 $a_n = \frac{1}{n^2}, c_n = n, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

故应选(D).

13 (2008, 5 题, 4 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界, $\{x_n\}$ 为数列, 下列命题正确的是

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

(B) 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛.

(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 收敛.

【答案】 B.

【解析】(方法一) 由于 $\{x_n\}$ 单调, $f(x)$ 单调有界, 则数列 $\{f(x_n)\}$ 单调有界, 则数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 故应选(B).

(方法二) 排除法: 若取 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$ 和 $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, 则显然 $f(x)$ 单调, $\{x_n\}$ 收敛, 但 $f(x_n) = \begin{cases} 1, & n \text{ 为偶数} \\ -1, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$, 显然 $\{f(x_n)\}$ 不收敛, 这样就排除了(A).

若取 $f(x) = \arctan x, x_n = n$, 则 $f(x_n) = \arctan n$, 显然 $\{f(x_n)\}$ 收敛且单调, 但 $\{x_n\}$ 不收敛, 这样就排除了(C)和(D), 故应选(B).

【评注】 本题主要考查数列收敛的单调有界准则, 是一道基础题, 但本题是当年考卷中四个高等数学选择题中考生做得最差的一个, 难度系数为 0.456.

三、求函数的极限

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

14 (1987, 二题, 6 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$.

【解】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}.$

15 (1988, 一(4) 题, 4 分) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{\tan x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 1.

【解析】 这是一个“ ∞^0 ”

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\tan x \ln \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \ln \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \ln x = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x \quad (\tan x \sim x) \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{\tan x} = e^0 = 1.$$

16 (1989, 一(1) 题, 3 分) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}.$

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 2x} = \frac{1}{2}.$

17 (1989, 二(3) 题, 4 分) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (2 \sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}}.$

【解】 这是一个“ 1^∞ ”型极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2 \sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (2 \sin x + \cos x - 1)]^{\frac{1}{x}}$$

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x + \cos x - 1}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 2 + 0 = 2,$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow 0} (2 \sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}} = e^2.$$

18 (1991, 一(5) 题, 3 分) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{x + e^{\frac{1}{x}}} =$ _____.

【答案】 $-1.$

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{x + e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}} + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1.$

19 (1991, 三(3) 题, 5 分) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2(e^x - 1)}.$

【解】 当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x - 1 \sim x, x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3} = \frac{1}{6}$$

20 (1992, 一(3) 题, 3 分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{e^x - \cos x} =$ _____.

【答案】 0.

【解析】 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{e^x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x + \sin x} = 0.$

21 (1992, 二(3) 题, 3 分) 当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $\frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限

(A) 等于 2.

(B) 等于 0.

(C) 为 ∞ .

(D) 不存在但不为 ∞ .

【答案】 D.

【解析】

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) e^{\frac{1}{x-1}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) e^{\frac{1}{x-1}} = \infty$$

故当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $\frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限不存在但不为 ∞ , 故应选(D).

22 (1992, 三(1)题, 5分) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+x}{6+x} \right)^{\frac{x-1}{2}}$.

【解】 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{-3}{6+x} \right]^{\frac{x-1}{2}}$,

$$\text{又} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3(x-1)}{2(6+x)} = -\frac{3}{2}$$

则原式 $= e^{-\frac{3}{2}}$.

23 (1993, 一(1)题, 3分) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x =$ _____.

【答案】 0.

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$.

24 (1993, 三(2)题, 5分) 求 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 100} + x)$.

【解】 (方法一) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 100} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{100x}{\sqrt{x^2 + 100} - x}$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{100x}{-x \left(\sqrt{1 + \frac{100}{x^2}} + 1 \right)}$
 $= -50$

(方法二) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 100} + x) = -\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{100}{x^2}} - 1 \right)$
 $= -\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{100}{x^2} \right)$ (等价代换)
 $= -50$

25 (1995, 三(1)题, 5分) 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x(1 - \cos \sqrt{x})}$.

【解】 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{1 + (\cos x - 1)}}{x \left[\frac{1}{2} (\sqrt{x})^2 \right]} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{2}(\cos x - 1)}{\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{4}x^2}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{1}{2}$.

26 (1996, 一(4)题, 3分) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sin \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right) - \sin \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] =$ _____.

【答案】 2.

【解析】 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right) - \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{3}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{1}{x}$

$$= 3 - 1 = 2.$$

27 (1997, 三(1) 题, 5 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}}$.

【解】 (方法一) 分子分母同除以 $\sqrt{x^2} = -x$,

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - 1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{\sin x}{x^2}}} = \frac{\sqrt{4} - 1}{1} = 1.$$

(方法二) 拆项

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1}}{\sqrt{x^2 + \sin x}} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + \sin x}} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + \sin x}} \\ &= 2 - 1 + 0 = 1. \end{aligned}$$

28 (1998, 一(1) 题, 3 分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $-\frac{1}{4}.$

【解析】 (方法一) 分子有理化

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2)}{x^2(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2)} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sqrt{1-x^2} - 1)}{x^2} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(-\frac{1}{2}x^2)}{x^2} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(方法二) 洛必达法则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{4} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x}{x} \right] = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(方法三) 泰勒公式

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)}{2!}x^2 + o_1(x^2) \right] + \left[1 - \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)}{2!}x^2 + o_2(x^2) \right] - 2}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{4}x^2 + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

29 (1999, 三题, 5 分) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \ln(1+x) - x^2}.$

【解】 (方法一) 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x[\ln(1+x) - x]} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{x[\ln(1+x) - x]} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\ln(1+x) - x} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\frac{1}{1+x} - 1} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{-x} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(方法二) 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{\xi}}(\tan x - \sin x)}{x[\ln(1+x) - x]}$ (拉格朗日中值定理, ξ 介于 $1 + \tan x$ 与 $1 + \sin x$ 之间)

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{x[\ln(1+x) - x]}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\left(\frac{1}{2}x^2\right)}{x\left(-\frac{1}{2}x^2\right)} = -\frac{1}{2}$$

30 (2000, 一(1) 题, 3 分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{\ln(1+2x^3)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $-\frac{1}{6}.$

【解析】(方法一) 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{2x^3}$ (等价代换)

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{6x^2} \quad (\text{洛必达}) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{6x^2} \quad \left(\frac{1}{1+x^2} - 1 \sim -x^2\right) \\
&= -\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

(方法二) 由于当 $x \rightarrow 0$ 时, $\arctan x - x \sim -\frac{1}{3}x^3$, $\ln(1+2x^3) \sim 2x^3$, 则

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3}{2x^3} = -\frac{1}{6}.$$

31 (2000, 二(4) 题, 3 分) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6+f(x)}{x^2}$ 为

(A) 0.

(B) 6.

(C) 36.

(D) ∞ .

【答案】 C.

【解析】(方法一) $0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x - 6x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + xf(x)}{x^3} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6}(6x)^3}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6+f(x)}{x^2}
\end{aligned}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$= -36 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2}$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} = 36.$$

(方法二) 由泰勒公式知

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[6x - \frac{(6x)^3}{3!} + o(x^3) \right] + xf(x)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-36x^3 + o(x^3)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} - 36 \end{aligned}$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} = 36.$$

32 (2001, (1) 题, 3 分) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}{x^2 + x - 2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $-\frac{\sqrt{2}}{6}.$

【解析】 (方法一) 原式 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3-x) - (1+x)}{(x+2)(x-1)[\sqrt{3-x} + \sqrt{1+x}]}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{(x+2)(\sqrt{3-x} + \sqrt{1+x})} = \frac{-2}{6\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{6}$$

(方法二) 原式 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{-1}{2\sqrt{3-x}} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{2x+1} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}}{3}$

$$= -\frac{1}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{6}$$

(方法三) 原式 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{\xi}}[(3-x) - (1+x)]}{(x+2)(x-1)}$ (ξ 介于 $3-x$ 与 $1+x$ 之间)

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{x+2} = -\frac{\sqrt{2}}{6}$$

33 (2004, 15 题, 10 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2+\cos x}{3} \right)^x - 1 \right].$

【解】 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{x \ln \frac{2+\cos x}{3}}{x^3}} - 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{2+\cos x}{3}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[1 + \frac{\cos x - 1}{3} \right]}{x^2}$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{6}$$

34 (2007, 11 题, 4 分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $-\frac{1}{6}.$

【解析】 (方法一) 这是一个 $\frac{0}{0}$ 型极限, 一种方法是用洛必达法则; 另一种方法是用泰勒公式, 本题不能对 $\arctan x$ 和 $\sin x$ 用等价无穷小代换, 因为它们是相减的关系.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \cos x}{3x^2} \quad (\text{洛必达法则}) \\&= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - x^2 \cos x}{x^2(1+x^2)} \\&= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} - \cos x \right) \\&= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = -\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

(方法二) 利用泰勒公式求解,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^2)$$

则

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right] - \left[x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right]}{x^3} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) x^3 + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

(方法三) 拆项用等价无穷小代换

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3} \\&= -\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

【评注】 这是一个 $\frac{0}{0}$ 型极限, 方法一是用洛必达法则, 有理运算法则及等价无穷小代换; 方法二是用泰勒公式, 方法三中用到两个等价代换, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x - x \sim \frac{1}{3}x^3$, $x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$.

35 (2008, 9 题, 4 分) 已知函数 $f(x)$ 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(xf(x))}{(e^{x^2} - 1)f(x)} = 1$, 则 $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 2.

【解析】 由于函数 $f(x)$ 连续, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, 从而 $\lim_{x \rightarrow 0} xf(x) = 0$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$1 - \cos(xf(x)) \sim \frac{1}{2}x^2 f^2(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(xf(x))}{(e^{x^2} - 1)f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 f^2(x)}{x^2 f(x)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2} f(0) = 1$$

则 $f(0) = 2$.

【评注】 本题是一个 $\frac{0}{0}$ 型极限,主要是利用等价无穷小代换求解.

常用的等价无穷小:当 $x \rightarrow 0$ 时

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \ln(1+x) \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2; (1+x)^a - 1 \sim ax; a^x - 1 \sim x \ln a (a > 0, a \neq 1)$$

还有若 $\alpha(x) \rightarrow 0$, 则 $\alpha(x) + o(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$.

注意:在乘除法中可用等价无穷小代换,而在加减法中不要用等价无穷小代换.

36 (2008, 15 题, 9 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4}$.

【解】 (方法一) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] x}{x^4}$ (等价无穷小代换)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos(\sin x) \cdot \cos x}{3x^2} \quad (\text{洛必达法则})$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin x)}{x^2} \quad (\text{极限为非零常数因子极限先求})$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \sin^2 x}{x^2} \quad (\text{等价无穷小代换})$$

$$= \frac{1}{6}.$$

(方法二) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{\sin^4 x}$ (等价无穷小代换)

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t}{t^3} \quad (\text{变量代换 } \sin x = t)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{3t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}t^2}{3t^2} = \frac{1}{6}.$$

(方法三) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x^3}$

由泰勒公式 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ 知

$$\sin(\sin x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3!} + o(\sin^3 x)$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \left[\sin x - \frac{1}{6} \sin^3 x + o(x^3) \right]}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6} \sin^3 x + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

(方法四) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x^3}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \xi \cdot (x - \sin x)}{x^3} \quad (\text{拉格朗日中值定理})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{6}.$$

(方法五) 由于当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$, 则 $\sin x - \sin(\sin x) \sim \frac{1}{6}\sin^3 x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}\sin^3 x \cdot \sin x}{x^4} = \frac{1}{6}$$

【评注】 ① 本题是一个“ $\frac{0}{0}$ ”型极限, (方法一) 主要是用洛必达法则和等价无穷小代换;

(方法二) 主要是利用变量代换和等价无穷小代换; (方法三) 主要是利用泰勒公式; (方法四) 主要是利用拉格朗日中值定理, (方法五) 最简单.

② 考卷中出现一些典型错误, 例如

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin^2 x}{x^4} - \frac{\sin(\sin x) \sin x}{x^4} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

这种错误说明考生对极限的最基本的运算法则和等价无穷小代换的基本原则掌握不够.

另一种典型的错误是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \dots = \frac{1}{6}$$

答案正确, 但方法有问题, 一种理解是 $\sin x \sim x$, $\sin(\sin x) \sim \sin x$, 但这是在减法中用等价代换; 另一种理解是 $\sin x - \sin(\sin x) \sim x - \sin x$, 此时, 解法正确, 但该结论需证明.

微信公众号【顶尖考研】

四、求数列的极限

(ID: diky66)

37 (1987, 一(4) 题, 3 分) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n+1} \right)^n = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $e^{-3}.$

【解析】 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{n+1} \right)^n,$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n}{n+1} = -3$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n+1} \right)^n = e^{-3}.$

【评注】 本题是一个“ 1^∞ ”型极限, 求这种极限的三部曲是:

- (1) 写标准型: $1^\infty = \lim (1 + \alpha)^\beta$;
- (2) 求极限: $\lim \alpha\beta = A$;
- (3) 写结果: $1^\infty = e^A.$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

38 (1994, 三(3) 题, 5 分) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n} \right).$

【解】 这是一个“ 1^∞ ”型极限.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n} \right) - 1 \right] \right\}^n$$

$$\text{又 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n} \right) - 1 \right] \cdot n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n} \right) - \tan \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{n}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sec^2 \xi \cdot \frac{2}{n}}{\frac{1}{n}} \quad \left(\frac{\pi}{4} < \xi < \frac{\pi}{4} + \frac{2}{n} \right) \\
 &= 2 \sec^2 \frac{\pi}{4} = 4
 \end{aligned}$$

则原式 $= e^4$.

【评注】 本题中用到拉格朗日中值定理, 求极限时如果出现同一函数在两点函数值的差 $f(b) - f(a)$ 就可以考虑拉格朗日中值定理.

39 (1995, 一(4) 题, 3 分) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{1}{2}.$

【解析】 由于

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \\
 &\geq \frac{1}{n^2 + n + n} + \frac{2}{n^2 + n + n} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \\
 &= \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2 + n + n}
 \end{aligned}$$

又 $\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n}$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 1} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + 1} \\
 &= \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2 + n + 1}
 \end{aligned}$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2 + n + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2 + n + n} = \frac{1}{2}$, 则原式 $= \frac{1}{2}$.

40 (2002, 八题, 8 分) 设 $0 < x_1 < 3$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$ ($n = 1, 2, \cdots$), 证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 并求此极限.

【解】 由 $0 < x_1 < 3$ 知 $x_1, 3 - x_1$ 均为正数, 故

$$0 < x_2 = \sqrt{x_1(3-x_1)} \leq \frac{1}{2}(x_1 + 3 - x_1) = \frac{3}{2}$$

设当 $k > 1$ 时, $0 < x_k \leq \frac{3}{2}$, 则

$$0 < x_{k+1} = \sqrt{x_k(3-x_k)} \leq \frac{1}{2}(x_k + 3 - x_k) = \frac{3}{2}$$

故由归纳法知, 对任意正整数 $n > 1$, 均有

$$0 < x_n \leq \frac{3}{2}$$

即数列 $\{x_n\}$ 为有界数列.

又, 当 $n > 1$ 时,

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n(3-x_n)} - x_n = \frac{\sqrt{x_n(3-2x_n)}}{\sqrt{3-x_n} + \sqrt{x_n}} \geq 0$$

故当 $n > 1$ 时, $x_{n+1} \geq x_n$, 即数列 $\{x_n\}$ 单调增加. 则由单调有界准则知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 由 $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$ 得

$$a = \sqrt{a(3-a)}$$

解得 $a = \frac{3}{2}$, $a = 0$ (舍去). 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{3}{2}$.

【评注】 证明 $\{x_n\}$ 单调增加也可利用 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \sqrt{\frac{3}{x_n} - 1} \geq \sqrt{\frac{3}{3/2} - 1} = 1$.

41 (2003, 二(2) 题, 4 分) 设 $a_n = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{n}{n+1}} x^{n-1} \sqrt{1+x^n} dx$, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$ 等于

(A) $(1+e)^{\frac{3}{2}} + 1$.

(B) $(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}} - 1$.

(C) $(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}} + 1$.

(D) $(1+e)^{\frac{3}{2}} - 1$.

【答案】 B.

【解析】

$$a_n = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{n}{n+1}} x^{n-1} \sqrt{1+x^n} dx$$

$$= \frac{3}{2n} \int_0^{\frac{n}{n+1}} \sqrt{1+x^n} d(1+x^n)$$

$$= \frac{1}{n} (1+x^n)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{n}{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]$$

$$= (1+e^{-1})^{\frac{3}{2}} - 1$$

故应选(B).

42 (2006, 18 题, 12 分) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_1 < \pi$, $x_{n+1} = \sin x_n$ ($n = 1, 2, \dots$).

(I) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求该极限;

(II) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

【分析】 由于数列是由递推关系给出的, 通常用单调有界准则证明极限存在, 并求出极限. 由于(II)中的极限是一个“ 1^∞ ”型, 可将其化为函数的极限, 再利用重要极限或取对数的方法便可求出此极限.

(I) **【证明】** 用归纳法证明 $\{x_n\}$ 单调减少且下有界.

由于 $\sin x < x$, $x \in (0, \pi)$, 则由 $0 < x_1 < \pi$ 知, $0 < x_2 = \sin x_1 < x_1 < \pi$,

设 $0 < x_n < \pi$, 则 $0 < x_{n+1} = \sin x_n < x_n < \pi$.

所以, $\{x_n\}$ 单调减少且下有界, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在,

记 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, 由 $x_{n+1} = \sin x_n$ 知 $a = \sin a$ 所以, $a = 0$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

(II)【解】(方法一) 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin x_n}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$,

所以,考虑函数极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln \sin x}{x^2}}$, 又

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{\sin x - x}{x} \right)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \quad (\text{等价无穷小代换}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = -\frac{1}{6}, \end{aligned}$$

则 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$.

(方法二) 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ 为“ 1^∞ ”型极限, 且

$$\left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \left(1 + \frac{\sin x - x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

而 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^3} = -\frac{1}{6}$ (等价无穷小代换),

则 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$.

【评注】 本题是一道综合题, 主要考查数列极限存在的单调有界准则, 数列极限转化为函数极限, “ 1^∞ ”型极限的求法——基本极限, 洛必达法则等. 考生的典型错误是不将原题中数列极限转化为函数极限, 直接对数列极限用洛必达法则.

五、确定极限中的参数

43 (1990, 二(1)题, 3分) 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{1+x} - ax - b \right) = 0$, 其中 a, b 是常数, 则

(A) $a = 1, b = 1$. (B) $a = -1, b = 1$. (C) $a = 1, b = -1$. (D) $a = -1, b = -1$.

【答案】 C.

【解析】(方法一) $0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{1+x} - ax - b \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - (ax+b)(1+x)}{1+x}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-a)x^2 - (a+b)x - b}{1+x}$$

则 $1-a=0, a+b=0$, 由此得 $a=1, b=-1$, 故选(C).

(方法二) 由 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{1+x} - ax - b \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x^2-1)+1}{1+x} - ax - b \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x-1 + \frac{1}{1+x} - ax - b \right) = 0$$

可知 $1-a=0, -1-b=0$, 则 $a=1, b=-1$. 故应选(C).

44 (1990, 三(1)题, 5分) 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = 9$, 求常数 a .

【解】

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2a}{x-a} \right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2ax}{x-a} = 2a$$

则 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = e^{2a} = 9, a = \ln 3$.

45 (1994, 二(1)题, 3分) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax + bx^2)}{x^2} = 2$, 则

(A) $a = 1, b = -\frac{5}{2}$. (B) $a = 0, b = -2$. (C) $a = 0, b = -\frac{5}{2}$. (D) $a = 1, b = -2$.

【答案】 A.

【解析】 (方法一) 利用泰勒公式得

$$2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax + bx^2)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right] - (ax + bx^2)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-a)x - \left(\frac{1}{2} + b \right)x^2 + o(x^2)}{x^2}$$

由此可知, $1-a=0, -\left(\frac{1}{2}+b\right)=2$, 则

$$a = 1, b = -\frac{5}{2}$$

故应选(A).

(方法二) 从原题四个选项可知, a 就两个值 0 和 1, 显然 $a = 0$ 不满足题设, 则 $a = 1$, 此时有

$$2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (x + bx^2)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x - b}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} - b = -\frac{1}{2} - b$$

则 $b = -\frac{5}{2}$.

46 (1998, 四题, 5分) 确定常数 a, b, c 的值, 使 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt} = c (c \neq 0)$.

【解】 由于 $x \rightarrow 0$ 时, $ax - \sin x \rightarrow 0$, 且极限 c 不为零, 则 $\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt \rightarrow 0$, 故必有 $b = 0$.

由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos x}{x^2} = c (c \neq 0)$$

故必有 $a = 1, c = \frac{1}{2}$.

六、无穷小量及其阶的比较

47 (1992, 二(1) 题, 3 分) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - \sin x$ 是 x^2 的

(A) 低阶无穷小.

(B) 高阶无穷小.

(C) 等价无穷小.

(D) 同阶但非等价无穷小.

【答案】 B.

【解析】 (方法一) 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{2x} = 0$$

则当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - \sin x$ 是 x^2 的高阶无穷小.

(方法二) 由于当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$$

故应选(B).

48 (1996, 二(1) 题, 3 分) 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x - (ax^2 + bx + 1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小, 则

(A) $a = \frac{1}{2}, b = 1$.

(B) $a = 1, b = 1$.

(C) $a = -\frac{1}{2}, b = -1$.

(D) $a = -1, b = 1$.

【答案】 A.

【解析】 (方法一) $e^x - (ax^2 + bx + 1) = \left[1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right] - (ax^2 + bx + 1)$

$$= \left(\frac{1}{2} - a\right)x^2 + (1 - b)x + o(x^2)$$

由题设知,

$$\frac{1}{2} - a = 0, 1 - b = 0$$

则 $a = \frac{1}{2}, b = 1$.

(方法二) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (ax^2 + bx + 1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2ax - b}{2x}$

由此可知, $b = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2ax - b}{2x} = \frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} - 2a \right] = \frac{1}{2} (1 - 2a) = 0$$

$a = \frac{1}{2}$, 故应选(A).

49 (1997, 二(1) 题, 3 分) 设 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{\tan x} - e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小, 则 n 为

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

【答案】 C.

【解析】 (方法一) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x [e^{\tan x - x} - 1]}{x^n}$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^n} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3}{x^n} \\
 &= \frac{1}{3} \quad (n=3)
 \end{aligned}$$

(方法二) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x [\tan x - x]}{x^n}$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^n} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3}{x^n} \\
 &= \frac{1}{3} \quad (n=3)
 \end{aligned}$$

50 (1999, 二(2) 题, 3 分) 设 $\alpha(x) = \int_0^{5x} \frac{\sin t}{t} dt$, $\beta(x) = \int_0^{\sin x} (1+t)^{\frac{1}{t}} dt$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的

(A) 高阶无穷小.

(B) 低阶无穷小.

(C) 同阶但不等价的无穷小.

(D) 等价无穷小.

【答案】 C.

【解析】 (方法一) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{5x} \frac{\sin t}{t} dt}{\int_0^{\sin x} (1+t)^{\frac{1}{t}} dt}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5}{(1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \cdot \cos x} = \frac{5}{e}$$

则当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的同阶但非等价无穷小.

(方法二) 由于 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^{\frac{1}{t}}}{e} = 1$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\alpha(x) = \int_0^{5x} \frac{\sin t}{t} dt \sim \int_0^{5x} 1 dt = 5x$$

$$\beta(x) = \int_0^{\sin x} (1+t)^{\frac{1}{t}} dt \sim \int_0^{\sin x} e dx = e \sin x \sim ex$$

则 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的同阶但非等价无穷小, 故应选(C).

【评注】 方法二中用到一个常用的结论: 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内连续, 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} =$

1, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^x f(t) dt \sim \int_0^x g(t) dt$.

51 (2001, 二(2) 题, 3 分) 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x) \ln(1 + x^2)$ 是比 $x \sin x^n$ 高阶的无穷小, 而 $x \sin x^n$ 是比 $(e^{x^2} - 1)$ 高阶的无穷小, 则正整数 n 等于

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

【答案】 B.

【解析】 由于当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$(1 - \cos x) \ln(1 + x^2) \sim \frac{1}{2}x^2 \cdot x^2 = \frac{1}{2}x^4$$

$$x \sin x^n \sim x^{n+1}$$

$$e^{x^2} - 1 \sim x^2$$

由 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x) \ln(1 + x^2)$ 是比 $x \sin x^n$ 高阶的无穷小, $n+1 < 4$, 由 $x \sin x^n$ 是比 $e^{x^2} - 1$ 高阶的无穷小, $2 < n+1$, 则 $n+1 = 3$, 即 $n = 2$, 故选(B).

52 (2002, 十题, 8分) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数, 且 $f(0) \neq 0$, $f'(0) \neq 0$, $f''(0) \neq 0$. 证明: 存在唯一的一组实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 使得当 $h \rightarrow 0$ 时, $\lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0)$ 是比 h^2 高阶的无穷小.

【解】 由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内有连续 2 阶导数, 根据泰勒公式, 当 $h \rightarrow 0$ 时

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2}h^2 + o(h^2)$$

$$f(2h) = f(0) + f'(0)(2h) + \frac{f''(0)}{2}(2h)^2 + o(h^2)$$

$$f(3h) = f(0) + f'(0)(3h) + \frac{f''(0)}{2}(3h)^2 + o(h^2)$$

代入计算可得

$$\begin{aligned} \lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0) &= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 1)f(0) + (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3)f'(0)h + \\ &\quad \frac{1}{2}(\lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3)f''(0)h^2 + o(h^2) \end{aligned}$$

所以, 若是题中结论成立, 则 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 应满足方程组

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

由于该方程组的系数行列式不为零(等于 2), 则 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是唯一存在的.

【评注】 本题也可不用泰勒公式而用洛必达法则.

53 (2003, 一(1)题, 4分) 若 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - ax^2)^{\frac{1}{4}} - 1$ 与 $x \sin x$ 是等价无穷小, 则 $a =$ _____.

【答案】 -4.

【解析】 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$(1 - ax^2)^{\frac{1}{4}} - 1 \sim -\frac{a}{4}x^2$$

$$x \sin x \sim x^2$$

$$(1 - ax^2)^{\frac{1}{4}} - 1 \sim x \sin x$$

$$-\frac{a}{4}x^2 \sim x^2$$

又
则

故 $a = -4$.

54 (2004, 7题, 4分) 把 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt$, $\beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt$, $\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$ 排列起来, 使排在后面的是前一个的高阶无穷小, 则正确的排列次序是

(A) α, β, γ .

(B) α, γ, β .

(C) β, α, γ .

(D) β, γ, α .

【答案】 B.

【解析】(方法一) 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{\int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x^2}{2x \tan x} = \infty$$

则当 $x \rightarrow 0^+$ 时, β 是比 α 高阶的无穷小, 则排除(C) 和(D) 选项.

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\beta}{\gamma} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt}{\int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \tan x}{\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2}{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x^{\frac{3}{2}}} = 0$$

则当 $x \rightarrow 0^+$ 时, β 是比 γ 高阶的无穷小, 则排除(A), 故应选(B).

事实上, 由 β 是比 γ 高阶的无穷小就能排除(A)(C)(D) 三个选项, 故应选(B).

(方法二) 利用结论: 设在 $x=0$ 某邻域内 $f(x)$ 连续, $\varphi(x)$ 可导, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 x 的 n 阶无穷小, $\varphi(x)$ 是 x 的 m 阶无穷小, 则 $\int_0^{\varphi(x)} f(t) dt$ 是 x 的 $m(n+1)$ 阶无穷小, 则

$$\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt, m(n+1) = 1(0+1) = 1$$

$$\beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt, m(n+1) = 2\left(\frac{1}{2} + 1\right) = 3$$

$$\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt, m(n+1) = \frac{1}{2}(3+1) = 2$$

则正确排序为 α, γ, β .

故应选(B).

55 (2005, 5 题, 4 分) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x) = kx^2$ 与 $\beta(x) = \sqrt{1+x\arcsin x} - \sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小, 则 $k =$ _____.

【答案】 $\frac{3}{4}$.

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x\arcsin x} - \sqrt{\cos x}}{kx^2}$
 $= \frac{1}{k} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x\arcsin x - \cos x}{x^2(\sqrt{1+x\arcsin x} + \sqrt{\cos x})}$ (分子有理化)
 $= \frac{1}{2k} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\arcsin x}{x^2} \right)$
 $= \frac{1}{2k} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{3}{4k} = 1,$

则 $k = \frac{3}{4}$.

56 (2006, 15 题, 10 分) 试确定常数 A, B, C 的值, 使得

$$e^x(1+Bx+Cx^2) = 1+Ax+o(x^3)$$

其中 $o(x^3)$ 是当 $x \rightarrow 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小量.

【解】(方法一) 由题设知 $e^x(1+Bx+Cx^2) - (1+Ax) = o(x^3)$, 即

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(1+Bx+Cx^2) - (1+Ax)}{x^3} = 0$$

则 $0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(1+Bx+Cx^2) - (1+Ax)}{x^3}$ ($\frac{0}{0}$ 型)

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(1+Bx+Cx^2+B+2Cx)-A}{3x^2} \quad (\text{洛必达法则})$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0} 3x^2 = 0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x(1+Bx+Cx^2+B+2Cx)-A = 1+B-A=0$$

此时

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x[(1+B)+(B+2C)x+Cx^2]-A}{3x^2} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x[2C+1+2B+(B+4C)x+Cx^2]}{6x} \quad (\text{洛必达法则}) \end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} e^x[2C+1+2B+(B+4C)x+Cx^2] &= 2C+1+2B=0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} e^x \frac{[2C+1+2B+(B+4C)x+Cx^2]}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(B+4C)+2Cx}{6} \quad (\text{洛必达法则}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

得 $B+4C=0$.

由上述结果可得方程组

$$\begin{cases} 1+B-A=0, \\ 2B+2C+1=0, \\ B+4C=0, \end{cases}$$

解得 $A=\frac{1}{3}, B=-\frac{2}{3}, C=\frac{1}{6}$.

(方法二) 由题设知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(1+Bx+Cx^2)-(1+Ax)}{x^3} = 0$$

则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+Bx+Cx^2)-e^{-x}(1+Ax)}{x^3} = 0$$

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+Bx+Cx^2)-e^{-x}(1+Ax)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(B+2Cx)+e^{-x}[(1-A)+Ax]}{3x^2} \quad (B+1-A=0) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2C+e^{-x}(2A-1-Ax)}{6x} \quad (2C+2A-1=0) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}(1-3A+Ax)}{6} = \frac{1-3A}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 1+B-A=0, \\ 2A+2C-1=0, \\ 1-3A=0 \end{cases} \quad \text{得 } A=\frac{1}{3}, B=-\frac{2}{3}, C=\frac{1}{6}.$$

(方法三) 由泰勒公式知 $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$,

$$\begin{aligned} \text{则 } e^x(1+Bx+Cx^2) &= 1+(B+1)x+\left(\frac{1}{2}+B+C\right)x^2+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}B+C\right)x^3+o(x^3) \\ &= 1+Ax+o(x^3) \end{aligned}$$

比较等式两端同次幂的系数得

$$\begin{cases} B+1=A, \\ \frac{1}{2}+B+C=0, \\ \frac{1}{6}+\frac{1}{2}B+C=0. \end{cases}$$

解得 $A = \frac{1}{3}, B = -\frac{2}{3}, C = \frac{1}{6}$.

57 (2007, 1 题, 4 分) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

(A) $1 - e^{\sqrt{x}}$. (B) $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$. (C) $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$. (D) $1 - \cos \sqrt{x}$.

【答案】 B.

【解析】 (方法一) $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}} = \ln(1+x) - \ln(1-\sqrt{x}) \sim \sqrt{x}$ (当 $x \rightarrow 0^+$).

事实上, $\ln(1+x) \sim x$, 即当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\ln(1+x)$ 是 x 的 1 阶无穷小, $-\ln(1-\sqrt{x}) \sim \sqrt{x}$, 即 $-\ln(1-\sqrt{x})$ 是 x 的 $\frac{1}{2}$ 阶无穷小, 几个不同阶的无穷小量的代数和其阶数由其中阶数最低的项来决定.

故应选(B).

(方法二) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $1 - e^{\sqrt{x}} \sim -\sqrt{x}$, $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1 \sim \frac{1}{2}\sqrt{x}$, $1 - \cos \sqrt{x} \sim \frac{1}{2}x$, 则选项

(A)(C)(D) 均不正确, 故应选(B).

微信公众账号【顶尖考研】

七、函数连续性及间断点类型

58 (1988, 一(1) 题, 4 分) 设 $f(x) = \begin{cases} 2x+a, & x \leq 0 \\ e^x(\sin x + \cos x), & x > 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 则 $a =$ _____.

【答案】 1.

【解析】 要使 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 只要 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 又

$$f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x(\sin x + \cos x) = 1$$

$$f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x+a) = a$$

$$f(0) = a$$

则 $a = 1$.

59 (1989, 一(6) 题, 3 分) 设 $f(x) = \begin{cases} a+bx^2, & x \leq 0 \\ \frac{\sin bx}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则常数 a 与 b 应满足的关系是_____.

【答案】 $a = b$.

【解析】 显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 处左连续, 只要 $f(x)$ 在 $x=0$ 处右连续即可,

$$f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin bx}{x} = b$$

$$f(0) = a$$

由 $f(0^+) = f(0)$ 可知 $a = b$.

60 (1990, 二(5) 题, 3 分) 设 $F(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0 \\ f(0), & x = 0 \end{cases}$, 其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, $f'(0) \neq 0$, $f(0) = 0$, 则 $x=0$ 是 $F(x)$ 的

(A) 连续点.

(B) 第一类间断点.

(C) 第二类间断点.

(D) 连续点或间断点不能由此确定.

【答案】 B.

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) \neq 0$.

又 $F(0) = f(0) = 0$, 则 $x=0$ 为 $F(x)$ 的可去间断点, 故应选(B).

61 (1993, 二(2) 题, 3 分) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$, 则在点 $x=1$ 处函数 $f(x)$

(A) 不连续.

(B) 连续, 但不可导.

(C) 可导, 但导数不连续.

(D) 可导, 且导数连续.

【答案】 A.

【解析】 由于 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1)}{x - 1} = -2$$

则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续, 故应选(A).

62 (1994, 一(1) 题, 3 分) 若 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x + e^{2ax} - 1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$, 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则 $a =$ _____.

【答案】 -2.

【解析】 由于 $\frac{\sin 2x + e^{2ax} - 1}{x}$ 是初等函数, 因此, 在 $x \neq 0$ 处处连续, 要使 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 那只须 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 即只须

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$\begin{aligned} \text{又} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + e^{2ax} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2ax} - 1}{x} \\ &= 2 + 2a \end{aligned}$$

$f(0) = a$, 只要 $2 + 2a = a$, 从而有 $a = -2$.

63 (1995, 二(1) 题, 3 分) 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, $f(x)$ 为连续函数, 且 $f(x) \neq 0$, $\varphi(x)$ 有间断点, 则

(A) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点.

(B) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点.

(C) $f[\varphi(x)]$ 必有间断点.

(D) $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点.

【答案】 D.

【解析】 (方法一) 反证法: 若 $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 没有间断点, 则 $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必为连续函数, 又 $f(x)$ 为连续函数, 则

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} \cdot f(x) = \varphi(x)$$

必为连续函数,这与题设 $\varphi(x)$ 有间断点矛盾.

(方法二) 排除法: 设 $f(x) \equiv 1, \varphi(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$, 则 $\varphi[f(x)] \equiv 1, f[\varphi(x)] \equiv 1, \varphi^2(x) \equiv 1$ 都是连续函数, 则(A)(B)(C) 都不正确, 故应选(D).

64 (1997, 一(1) 题, 3 分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{x^{-2}}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$, 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a =$ _____.

【答案】 $e^{-\frac{1}{2}}$.

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (\cos x - 1)]^{\frac{1}{x^2}}$

又 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e^{-\frac{1}{2}}$; 又 $\because a = f(0)$, 则 $a = e^{-\frac{1}{2}}$.

65 (1998, 三题, 5 分) 求函数 $f(x) = (1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 内的间断点, 并判断其类型.

【解】 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 内的间断点为 $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

在 $x = \frac{\pi}{4}$ 处, $f\left(\frac{\pi}{4}^+\right) = +\infty$, 在 $x = \frac{5\pi}{4}$ 处, $f\left(\frac{5\pi}{4}^+\right) = +\infty$,

故 $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ 为第二类间断点.

在 $x = \frac{3\pi}{4}$ 处, $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} f(x) = 1$, 在 $x = \frac{7\pi}{4}$ 处, $\lim_{x \rightarrow \frac{7\pi}{4}} f(x) = 1$,

故 $x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ 为可去间断点.

66 (2000, 二(1) 题, 3 分) 设函数 $f(x) = \frac{x}{a + e^{bx}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, 则常数 a, b 满足

(A) $a < 0, b < 0$.

(B) $a > 0, b > 0$.

(C) $a \leq 0, b > 0$.

(D) $a \geq 0, b < 0$.

【答案】 D.

【解析】 由于 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, 则 $b < 0$. 此时, $0 < e^{bx} < +\infty$, 又 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 所以 $a + e^{bx} \neq 0$, 则 $a \geq 0$, 故应选(D).

67 (2001, 四题, 7 分) 求极限 $\lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}}$, 记此极限为 $f(x)$, 求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

【解】 由于 $\lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}} = \lim_{t \rightarrow x} \left(1 + \frac{\sin t - \sin x}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}}$,

又 $\lim_{t \rightarrow x} \frac{\sin t - \sin x}{\sin x} \cdot \frac{x}{\sin t - \sin x} = \frac{x}{\sin x}$

则 $f(x) = \lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}} = e^{\frac{x}{\sin x}}$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

由于 $f(x) = e^{\frac{x}{\sin x}}$ 是初等函数, 则除 $x = 0, \pm k\pi (k = 1, 2, \dots)$ 外处处连续, 又

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{x}{\sin x}} = e$$

则 $x = 0$ 为可去间断点, 而在 $x = k\pi$ 处 ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 处 $f(x)$ 的左、右极限有一个是 ∞ , 则这些间断点都是第二类间断点.

68 (2002, 一(1) 题, 3 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^{\tan x}}{\arcsin \frac{x}{2}}, & x > 0, \\ ae^{2x}, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a =$ _____.

【答案】 -2.

【解析】

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{\tan x}}{\arcsin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\tan x}{\frac{x}{2}} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} ae^{2x} = a$$

由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$ 得, $a = -2$.

69 (2003, 三题, 10 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1 + ax^3)}{x - \arcsin x}, & x < 0, \\ 6, & x = 0, \\ \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{x}{4}}, & x > 0. \end{cases}$ 问 a 为何值时, $f(x)$ 在

$x = 0$ 处连续; a 为何值时, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点?

【解】

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1 + ax^3)}{x - \arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^3}{-\frac{1}{6}x^3} = -6a$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{x}{4}} = 4 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x^2} \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ae^{ax} + 2x - a}{2x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} (a^2 e^{ax} + 2) = 2(a^2 + 2) \end{aligned}$$

令 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, 则 $-6a = 2a^2 + 4$, 得 $a = -1, a = -2$.

当 $a = -1$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 6 = f(0)$, 即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续.

当 $a = -2$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 12 \neq f(0)$, 因而, $x = 0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点.

70 (2004, 1 题, 4 分) 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)x}{nx^2 + 1}$, 则 $f(x)$ 的间断点为 $x =$ _____.

【答案】 0.

【解析】 由题设知 $f(0) = 0$, 当 $x \neq 0$ 时

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)x}{nx^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - \frac{1}{n})x}{x^2 + \frac{1}{n}} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

即

显然 $x=0$ 是 $f(x)$ 唯一的间断点.

71 (2005, 12 题, 4 分) 设函数 $f(x) = \frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}} - 1}$, 则

(A) $x=0, x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点.

(B) $x=0, x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

【答案】 D.

【解析】 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{x}{x-1}} = 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$, $x=0$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点, 又

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{x}{x-1}} &= 0, & \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= -1, \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{x}{x-1}} &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= 0, \end{aligned}$$

则 $x=1$ 为 $f(x)$ 的第一类(跳跃)间断点.

【评注】 一种典型的错误是由 $\lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{x}{x-1}} = \infty$, 得 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$.

72 (2006, 2 题, 4 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} \int_0^x \sin t^2 dt, & x \neq 0, \\ a, & x = 0, \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{3}$.

【解析】 由连续的定义知

$$a = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

73 (2007, 2 题, 4 分) 函数 $f(x) = \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e) \tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的第一类间断点是 $x =$

(A) 0.

(B) 1.

(C) $-\frac{\pi}{2}$.

(D) $\frac{\pi}{2}$.

【答案】 A.

【解析】 (方法一) 由 $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ 得

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}} + e}{e^{\frac{1}{x}} - e} \cdot \frac{\tan x}{x} = \frac{e}{-e} \times 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} + e}{e^{\frac{1}{x}} - e} \cdot \frac{\tan x}{x} = 1 \times 1 = 1$$

则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点. 故应选(A).

(方法二) 由于

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e) \tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e) \tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e) \tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)} = \infty$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

则 $x=1, x=\pm\frac{\pi}{2}$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点, 由排除法可知应选(A).

74 (2008, 4 题, 4 分) 设函数 $f(x) = \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x$, 则 $f(x)$ 有

(A) 1 个可去间断点, 1 个跳跃间断点.

(B) 1 个可去间断点, 1 个无穷间断点.

(C) 2 个跳跃间断点.

(D) 2 个无穷间断点.

【答案】 A.

【解析】 显然 $f(x)$ 只有两个间断点 $x=0$ 和 $x=1$, 因为

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} \ln|x| \cdot \sin x \quad \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x-1|} = 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln|x| \cdot x \quad (\text{等价无穷小代换}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \quad (\text{洛必达法则}) \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} x = 0\end{aligned}$$

则 $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点, 又

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x = \sin 1 \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln[1+(x-1)]}{x-1} \\ &= \sin 1 \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} \quad (\text{等价无穷小代换}) \\ &= \sin 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x = \sin 1 \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln[1+(x-1)]}{-(x-1)} \\ &= \sin 1 \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{-(x-1)} = -\sin 1\end{aligned}$$

则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点, 故应选(A).

【评注】 部分考生只考虑 $x=1$ 时 $f(x)$ 的分母为零和 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln|x| = \infty$, 没有仔细分析就选择了(B) 或(D). 判断间断点类型一定要在求出极限后再下结论.

第二章 一元函数微分学

本章导读

导数与微分是微分学的两个基本概念,是研究函数局部性质的基础.微分中值定理建立了函数和导数之间的联系,是利用导数研究函数基本性质的理论基础.

其主要内容

- (1) 导数与微分的概念及其几何意义;
- (2) 连续、可导、可微之间的关系;
- (3) 微分法(有理运算,复合函数,隐函数,参数方程等);
- (4) 微分中值定理(罗尔,拉格朗日,柯西,泰勒);
- (5) 函数基本性质及判定(单调性,极值与最值,曲线的凹凸性与拐点,渐近线).

试题特点

本章考试内容多,考题比例大(一般 20 分左右),有基本概念——导数与微分;基本方法——微分法,基本理论——微分中值定理,应用——函数性质.

本章常考题型

- (1) 导数概念;
- (2) 微分法(复合函数,隐函数,参数方程);
- (3) 函数的单调性与极值;
- (4) 曲线的凹向与拐点;
- (5) 方程的根;
- (6) 证明函数不等式;
- (7) 微分中值定理证明题.

后三种题型是难点,考研试卷最难的题经常出在这一章,那就是与微分中值定理有关的证明题.

考题详析

一、导数与微分的概念

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

- 1** (1987, 九(3) 题, 4 分) 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x) - f(a-x)}{x}$ 等于
- (A) $f'(a)$. (B) $2f'(a)$. (C) 0. (D) $f'(2a)$.

【答案】 B.

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x) - f(a-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x) - f(a)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a-x) - f(a)}{x}$
 $= f'(a) + f'(a) = 2f'(a)$

故应选(B).

2 (1988, 二(3) 题, 3 分) 若函数 $f(x)$ 有 $f'(x_0) = \frac{1}{2}$, 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 在 x_0 处的微分 dy 是

(A) 与 Δx 等价的无穷小.

(B) 与 Δx 同阶的无穷小.

(C) 比 Δx 低阶的无穷小.

(D) 比 Δx 高阶的无穷小.

【答案】 B.

【解析】 由 $f'(x_0) = \frac{1}{2}$ 知

$$dy = f'(x_0)\Delta x = \frac{1}{2}\Delta x$$

$$\text{又 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{dy}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x} = \frac{1}{2}.$$

则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, dy 是与 Δx 同阶的无穷小.

3 (1989, 三(6) 题, 3 分) 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是

(A) $\lim_{h \rightarrow +\infty} h \left[f\left(a + \frac{1}{h}\right) - f(a) \right]$ 存在.

(B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a+h)}{h}$ 存在.

(C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ 存在.

(D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{h}$ 存在.

【答案】 D.

【解析】 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{-h}$
 $\stackrel{\text{令 } -h = \Delta x}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$
 $= f'(a)$

则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{h}$ 存在是 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的充分条件, 故应选(D).

【评注】 (A) 选项不能选的原因是这里当 $h \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{1}{h} \rightarrow 0^+$, 所以该极限存在能得到

$f(x)$ 在 $x=a$ 处右导数存在, 而不能得到 $f'(a)$ 存在; (B) 选项的反例是 $f(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ 1, & x \neq a \end{cases}$;

(C) 选项的反例是 $f(x) = |x-a|$.

4 (1994, 二(2) 题, 3 分) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x^3, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的

(A) 左、右导数都存在.

(B) 左导数存在, 但右导数不存在.

(C) 左导数不存在, 但右导数存在.

(D) 左、右导数都不存在.

【答案】 B.

【解析】(方法一) 由导数定义知

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}}{x - 1} \\ &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x + 1) = 2 \\ f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - \frac{2}{3}}{x - 1} = \infty \end{aligned}$$

故应选(B).

(方法二)

$$f'_-(1) = \left(\frac{2}{3}x^3 \right)' \Big|_{x=1} = 2x^2 \Big|_{x=1} = 2$$

$$\text{又} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1 \neq f(1) = \frac{2}{3}$$

则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处非右连续, 从而 $f'_+(1)$ 不存在, 故应选(B).

5 (1995, 二(5) 题, 3 分) 设 $f(x)$ 可导, $F(x) = f(x)(1 + |\sin x|)$. 若 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 则必有

(A) $f(0) = 0$.

(B) $f'(0) = 0$.

(C) $f(0) + f'(0) = 0$.

(D) $f(0) - f'(0) = 0$.

【答案】 A.

【解析】 $F(x) = f(x) + |\sin x| f(x)$, 由于 $f(x)$ 可导, 则 $F(x)$ 可导等价于 $|\sin x| f(x)$ 可导, 令 $\varphi(x) = |\sin x| f(x)$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x| f(x)}{x} = \begin{cases} f(0), & x \rightarrow 0^+ \\ -f(0), & x \rightarrow 0^- \end{cases}$$

$\varphi(x)$ 在 $x=0$ 可导的充要条件是 $f(0) = 0$, 故应选(A).

6 (1995, 三(4) 题, 5 分) 设 $f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 试讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

【解】 当 $x \neq 0$ 时,

$$f'(x) = \arctan \frac{1}{x^2} + \frac{-\frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^4}} = \arctan \frac{1}{x^2} - \frac{2x^2}{1 + x^4}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arctan \frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \arctan \frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{又} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\arctan \frac{1}{x^2} - \frac{2x^2}{1 + x^4} \right) = \frac{\pi}{2} = f'(0)$$

则 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

7 (1996, 二(2) 题, 3 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta, \delta)$ 内有定义, 若当 $x \in (-\delta, \delta)$ 时, 恒有 $|f(x)| \leq x^2$, 则 $x=0$ 必是 $f(x)$ 的

(A) 间断点.

(B) 连续而不可导的点.

(C) 可导的点, 且 $f'(0) = 0$.

(D) 可导的点, 且 $f'(0) \neq 0$.

【答案】 C.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

【解析】(方法一) 直接法

在 $|f(x)| \leq x^2$ 中, 令 $x = 0$ 得,

$$|f(0)| \leq 0$$

从而有 $f(0) = 0$

$$0 \leq \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \left| \frac{x^2}{x} \right| = |x| \rightarrow 0 \text{ (当 } x \rightarrow 0 \text{)}$$

由夹逼定理知

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

故应选(C).

(方法二) 排除法: 取 $f(x) \equiv 0$, 显然满足题设条件, 此时, $f'(0) = 0$, 则选项(A)(B)(D) 都不正确, 故应选(C).

8 (1996, 五题, 8分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x^2, & x < -1, \\ x^3, & -1 \leq x \leq 2, \\ 12x - 16, & x > 2. \end{cases}$

(1) 写出 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式;

(2) $g(x)$ 是否有间断点、不可导点? 若有, 指出这些点.

【解】(1) $g(x) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{1-x}{2}}, & x < -1, \\ \sqrt[3]{x}, & -1 \leq x \leq 8, \\ \frac{x+16}{12}, & x > 8. \end{cases}$

(2) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} -\sqrt{\frac{1-x}{2}} = -1$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \sqrt[3]{x} = -1$$

则 $g(x)$ 在 $x = -1$ 处连续.

$$\lim_{x \rightarrow 8^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 8^-} \sqrt[3]{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 8^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 8^+} \frac{x+16}{12} = 2$$

则 $g(x)$ 在 $x = 8$ 连续, 故 $g(x)$ 处处连续.

$$g'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{-\sqrt{\frac{1-x}{2}} + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\frac{1}{2}(1+x)}{(x+1)\left(\sqrt{\frac{1-x}{2}} + 1\right)} = \frac{1}{4}$$

$$g'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{1}{3}$$

则 $g'(-1)$ 不存在.

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \infty$$

$$g'_-(8) = \lim_{x \rightarrow 8^-} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8} = \frac{1}{12}$$

$$g'_+(8) = \lim_{x \rightarrow 8^+} \frac{\frac{x+16}{12} - 2}{x-8} = \lim_{x \rightarrow 8^+} \frac{x-8}{12(x-8)} = \frac{1}{12}$$

$$\text{则 } g'(8) = \frac{1}{12}.$$

综上所述, $g(x)$ 处处连续, 没有间断点; $g(x)$ 不可导点是 $x = -1$ 及 $x = 0$.

- 9** (1998, 二(2) 题, 3 分) 函数 $f(x) = (x^2 - x - 2) |x^3 - x|$ 不可导点的个数是
 (A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

【答案】 B.

【解析】 (方法一) 若去掉 $|x^3 - x|$ 的绝对值, $f(x)$ 是一个分段函数, 每一段上都是多项式函数. 因此, $f(x)$ 只可能在分段函数分界点处出现不可导, 即只可能在 $x^3 - x = 0$, 即 $x = -1, 0, 1$ 这三处出现不可导点. 又

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-2) |x^3 - x|}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x-2) |x^3 - x| = 0 \end{aligned}$$

$$\text{则 } f'(-1) = 0.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - x - 2) |x^2 - 1| |x|}{x} \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 2, & x \rightarrow 0^- \\ -2, & x \rightarrow 0^+ \end{cases} \end{aligned}$$

则 $f'(0)$ 不存在.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - x - 2) |x(x+1)| |x-1|}{x-1} \\ &= -4 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1} = \begin{cases} 4, & x \rightarrow 1^- \\ -4, & x \rightarrow 1^+ \end{cases} \end{aligned}$$

则 $f'(1)$ 不存在.

故应选(B).

(方法二) 由于 $f(x) = (x^2 - x - 2) |x| |x-1| |x+1|$,

并且我们知道 $|x|$ 在 $x = 0$ 处不可导, 而 $x|x|$ 在 $x = 0$ 处可导. 因此

$$|x| |x-1| |x+1|$$

在 $x = -1, x = 0, x = 1$ 不可导, 乘了因子 $(x^2 - x - 2)$ 会不会改变这三个点的可导性, 关键是 $x^2 - x - 2$ 中是否含有绝对值中的这三个因子, $x, x-1, x+1$, 又

$$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$$

所以 $f(x) = (x^2 - x - 2) |x^3 - x|$ 在 $x = 0, x = 1$ 不可导, $x = -1$ 处可导, 故应选(B).

- 10** (1999, 二(1) 题, 3 分) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}}, & x > 0, \\ x^2 g(x), & x \leq 0, \end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数, 则 $f(x)$ 在

$x = 0$ 处

- (A) 极限不存在.
 (C) 连续, 但不可导.

- (B) 极限存在, 但不连续.
 (D) 可导.

【答案】 D.

【解析】 $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x - 0}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x\sqrt{x}} = 0$

$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 g(x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} xg(x) = 0$

则 $f'(0) = 0$, 故应选(D).

11 (2000, 九题, 7分) 已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数, 它在 $x = 0$ 的某个邻域内满足关系式

$$f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x) = 8x + \alpha(x)$$

其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \rightarrow 0$ 时比 x 高阶的无穷小, 且 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程.

【解】 由 $\lim_{x \rightarrow 0} [f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x)] = \lim_{x \rightarrow 0} [8x + \alpha(x)]$ 得 $f(1) - 3f(1) = 0$, 故 $f(1) = 0$. 又

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{8x}{\sin x} + \frac{\alpha(x)}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} \right] = 8$$

令 $\sin x = t$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x)}{\sin x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1 + t) - f(1)}{t} + 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1 - t) - f(1)}{-t} = 4f'(1)$$

所以, $f'(1) = 2$.

由于 $f(x + 5) = f(x)$, 所以, $f(6) = f(1) = 0, f'(6) = f'(1) = 2$, 故所求切线方程为

$$y = 2(x - 6)$$

12 (2002, 二(1)题, 3分) 设函数 $f(u)$ 可导, $y = f(x^2)$ 当自变量 x 在 $x = -1$ 处取得增量 $\Delta x = -0.1$ 时, 相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1, 则 $f'(1) =$

(A) -1. (B) 0.1. (C) 1. (D) 0.5.

【答案】 D.

【解析】 $y = f(x^2)$, 则 $dy = 2xf'(x^2)dx$.

$$0.1 = -2f'(1) \cdot (-0.1)$$

则 $f'(1) = 0.5$.

故应选(D).

13 (2002, 五题, 7分) 已知函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内可导, $f(x) > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, 且满足

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{1}{x}}, \text{ 求 } f(x).$$

【解】
$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[1 + \frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)} \right]^{\frac{1}{h}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)} \cdot \frac{1}{h} = \frac{x}{f(x)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{hx}$$

$$= \frac{xf'(x)}{f(x)}$$

则 $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{xf'(x)}{f(x)}}$, 从而有 $e^{\frac{xf'(x)}{f(x)}} = e^{\frac{1}{x}}$, 即

$$\frac{xf'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x}, \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x^2}$$

两端积分得 $\ln f(x) = -\frac{1}{x} + C, f(x) = e^C e^{-\frac{1}{x}}$.

又 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, 则 $e^C = 1, C = 0, f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$.

14 (2004, 16 题, 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 在区间 $[0, 2]$ 上, $f(x) = x(x^2 - 4)$, 若对任意的 x 都满足 $f(x) = kf(x+2)$, 其中 k 为常数.

(1) 写出 $f(x)$ 在 $[-2, 0)$ 上的表达式;

(2) 问 k 为何值时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.

【解】 (1) 当 $-2 \leq x < 0$ 时, $0 \leq x+2 < 2$, 则

$$\begin{aligned} f(x) &= kf(x+2) = k(x+2)[(x+2)^2 - 4] \\ &= kx(x+2)(x+4) \end{aligned}$$

(2) 由(1)可知, 当 $-2 \leq x \leq 2$ 时,

$$f(x) = \begin{cases} kx(x+2)(x+4), & -2 \leq x < 0 \\ x(x^2 - 4), & 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$\text{则 } f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{kx(x+2)(x+4)}{x} = 8k$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x^2 - 4)}{x} = -4$$

令 $f'_-(0) = f'_+(0)$ 得, $k = -\frac{1}{2}$. 即当 $k = -\frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.

15 (2007, 4 题, 4 分) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 下列命题错误的是

(A) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$.

(B) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$.

(C) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在.

(D) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在.

【答案】 D.

【解析】 (方法一) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 又 $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 又 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, 故 $f(0) = 0$, 命题(A) 正确.

同理, 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + f(-x)] = f(0) + f(0) = 0$, 则 $f(0) = 0$, 故命题(B) 正确.

若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 由(A) 选项的讨论知 $f(0) = 0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

存在, 由导数定义知, $f'(0)$ 存在, 故命题(C) 正确, 由排除法知应选(D).

(方法二) 虽然有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x} - \frac{f(-x) - f(0)}{x} \right)$$

但 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ 存在, 不能保证 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ 或 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(-x) - f(0)}{x}$ 一定存在, 故 $f'(0)$ 不一定存在. 如 $f(x) = |x|$, 虽然 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - |-x|}{x} = 0$ 存在, 但 $f'(0)$ 不存在, 故命题(D) 不正确, 应选(D).

【评注】 方法一中多次用到一个基本结论: 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$; 由方法二可得到一个基本结论:

若 $f'(x_0)$ 存在, 则极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$ 一定存在, 但反之则不然.

该知识点在考卷中多次考到, 望考生重视.

虽然本题涉及的知识(概念、理论) 都是最基本的, 但考生出错较多, 说明部分考生基础不够扎实.

二、导数与微分计算

16 (1987, - (1) 题, 3 分) 设 $y = \ln(1 + ax)$, 其中 a 为非零常数, 则 $y' =$ _____, $y'' =$ _____.

【答案】 $\frac{a}{1+ax}, -\frac{a^2}{(1+ax)^2}$.

【解析】 由 $y = \ln(1 + ax)$ 可知

$$y' = \frac{a}{1+ax}$$

$$y'' = -\frac{a^2}{(1+ax)^2}$$

17 (1987, 三题, 7 分) 设 $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

【解】

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{5 \sin t}{5(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin t}{1 - \cos t} \right) \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{\cos t(1 - \cos t) - \sin^2 t}{(1 - \cos t)^2} \cdot \frac{1}{5(1 - \cos t)}$$

$$= \frac{-1}{5(1 - \cos t)^2}$$

18 (1988, - (2) 题, 4 分) 若 $f(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2tx}$, 则 $f'(t) =$ _____.

【答案】 $e^{2t}(2t + 1)$.

【解析】 由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2tx}{x} = 2t$, 则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2tx} = e^{2t}$$

$$f(t) = te^{2t}$$

则 $f'(t) = e^{2t} + 2te^{2t} = e^{2t}(2t+1)$.

19 (1988, 三(2) 题, 5 分) 已知 $y = 1 + xe^{xy}$, 求 $y' \Big|_{x=0}$ 及 $y'' \Big|_{x=0}$.

【解】 由 $y = 1 + xe^{xy}$ 可知, 当 $x = 0$ 时, $y = 1$.

等式 $y = 1 + xe^{xy}$ 两端对 x 求导得

$$y' = e^{xy} + xe^{xy}(y + xy') \quad ①$$

将 $x = 0, y = 1$ 代入上式得

$$y' \Big|_{x=0} = 1$$

将 $xe^{xy} = y - 1$ 代入 ① 式得

$$y' = e^{xy} + (y-1)(y + xy')$$

上式两端对 x 求导得

$$y'' = e^{xy}(y + xy') + y'(y + xy') + (y-1)(2y' + xy'')$$

将 $x = 0, y = 1, y'(0) = 1$ 代入上式得

$$y''(0) = 2$$

20 (1989, 一(4) 题, 3 分) 设 $f(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$, 则 $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $n!$.

【解析】 (方法一) $f(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$ 是一个多项式函数, 则 $f'(0)$ 应等于 x 的一次项的系数, $f(x)$ 的一次项应为 $n!x$, 则 $f'(0) = n!$.

(方法二) 用导数定义

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (x+1)(x+2)\cdots(x+n) \\ &= n! \end{aligned}$$

21 (1989, 一(7) 题, 3 分) 设 $\tan y = x + y$, 则 $dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\cot^2 y dx$ 或 $\frac{1}{(x+y)^2} dx$.

【解析】 等式 $\tan y = x + y$ 两端微分得

$$\sec^2 y dy = dx + dy$$

$$(\sec^2 y - 1) dy = dx$$

$$\tan^2 y dy = dx$$

$$dy = \cot^2 y dx$$

$$\text{或 } dy = \frac{1}{\tan^2 y} dx = \frac{1}{(x+y)^2} dx.$$

22 (1989, 二(1) 题, 4 分) 已知 $y = \arcsin e^{-\sqrt{x}}$, 求 y' .

$$\text{【解】 } y' = \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2\sqrt{x}}}} e^{-\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{-1}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{-e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(1-e^{-2\sqrt{x}})}.$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

23 (1989, 二(4) 题, 4 分) 已知 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = \arctan t \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

【解】

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1}{2t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2t}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{2t^2} \cdot \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} = -\frac{1+t^2}{4t^3}$$

24 (1990, 一(2) 题, 3 分) 设 $y = e^{\tan \frac{1}{x}} \cdot \sin \frac{1}{x}$, 则 $y' =$ _____.

【答案】 $-\frac{1}{x^2} e^{\tan \frac{1}{x}} \left(\sec^2 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)$.

【解析】 $y' = e^{\tan \frac{1}{x}} \sec^2 \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \sin \frac{1}{x} + e^{\tan \frac{1}{x}} \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$
 $= -\frac{1}{x^2} e^{\tan \frac{1}{x}} \left(\sec^2 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)$

25 (1990, 二(3) 题, 3 分) 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数, 且 $f'(x) = [f(x)]^2$, 则当 n 为大于 2 的正整数时, $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 为

(A) $n! [f(x)]^{n+1}$. (B) $n [f(x)]^{n+1}$. (C) $[f(x)]^{2n}$. (D) $n! [f(x)]^{2n}$.

【答案】 A.

【解析】 由 $f'(x) = [f(x)]^2$ 知

$$f''(x) = 2f(x)f'(x) = 2f(x)[f(x)]^2 = 2f^3(x)$$

$$f'''(x) = 2 \cdot 3f^2(x)f'(x) = 3! [f(x)]^4$$

由数学归纳法可知

$$f^{(n)}(x) = n! [f(x)]^{n+1}$$

故应选(A).

26 (1990, 三(2) 题, 5 分) 求由方程 $2y - x = (x - y)\ln(x - y)$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的微分 dy .

【解】 等式 $2y - x = (x - y)\ln(x - y)$ 两端微分得

$$\begin{aligned} 2dy - dx &= \left[\ln(x - y) + \frac{x - y}{x - y} \right] (dx - dy) \\ &= [\ln(x - y) + 1](dx - dy) \end{aligned}$$

由上式解得 $dy = \left(1 - \frac{1}{\ln(x - y) + 3} \right) dx$ 或 $= \frac{x}{2x - y} dx$

27 (1991, 一(1) 题, 3 分) 设 $y = \ln(1 + 3^{-x})$, 则 $dy =$ _____.

【答案】 $-\frac{\ln 3}{3^x + 1} dx$.

【解析】 $dy = \frac{-3^{-x} \ln 3}{1 + 3^{-x}} dx = -\frac{\ln 3}{3^x + 1} dx$.

28 (1991, 三(1) 题, 5 分) 设 $\begin{cases} x = t \cos t, \\ y = t \sin t, \end{cases}$ 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

【解】 $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t + t \cos t}{\cos t - t \sin t}$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{(2\cos t - t\sin t)(\cos t - t\sin t) - (-2\sin t - t\cos t)(\sin t + t\cos t)}{(\cos t - t\sin t)^2} \cdot \frac{1}{\cos t - t\sin t} \\ &= \frac{2+t^2}{(\cos t - t\sin t)^3}\end{aligned}$$

29 (1992, 一(1)题, 3分) 设 $\begin{cases} x = f(t) - \pi, \\ y = f(e^{3t} - 1), \end{cases}$ 其中 f 可导, 且 $f'(0) \neq 0$, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} =$ _____.

【答案】 3.

【解析】

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3e^{3t}f'(e^{3t}-1)}{f'(t)}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = \frac{3f'(0)}{f'(0)} = 3$$

30 (1992, 三(2)题, 5分) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y - xe^y = 1$ 所确定, 求 $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0}$ 的值.

【解】 将 $x = 0$ 代入方程 $y - xe^y = 1$, 得 $y = 1$.

方程 $y - xe^y = 1$ 两端对 x 求导得

$$y' - e^y - xe^y y' = 0 \quad ①$$

将 $x = 0, y = 1$ 代入 ① 式得

$$y'(0) = e$$

① 式两端再对 x 求导得

$$y'' - e^y y' - e^y y' - x(e^y y')' = 0$$

将 $x = 0, y = 1, y'(0) = e$ 代入上式得

$$y''(0) = 2e^2$$

31 (1993, 一(2)题, 3分) 函数 $y = y(x)$ 由方程 $\sin(x^2 + y^2) + e^x - xy^2 = 0$ 所确定, 则 $\frac{dy}{dx}$

= _____.

【答案】 $\frac{y^2 - e^x - 2x\cos(x^2 + y^2)}{2y\cos(x^2 + y^2) - 2xy}$.

【解析】 方程 $\sin(x^2 + y^2) + e^x - xy^2 = 0$ 两端对 x 求导得

$$\cos(x^2 + y^2)(2x + 2yy') + e^x - y^2 - 2xyy' = 0$$

由上式解得

$$y' = \frac{y^2 - e^x - 2x\cos(x^2 + y^2)}{2y\cos(x^2 + y^2) - 2xy}$$

32 (1993, 三(1)题, 5分) 设 $y = \sin[f(x^2)]$, 其中 f 具有二阶导数, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

【解】 $\frac{dy}{dx} = \cos[f(x^2)]f'(x^2) \cdot 2x = 2xf'(x^2)\cos[f(x^2)]$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2f'(x^2)\cos[f(x^2)] + 4x^2 f''(x^2)\cos[f(x^2)] - 4x^2 f'^2(x^2)\sin[f(x^2)]$$

$$= 2f'(x^2)\cos[f(x^2)] + 4x^2[f''(x^2)\cos[f(x^2)] - f'^2(x^2)\sin[f(x^2)]]$$

33 (1994, 一(2)题, 3分) 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t - \ln(1+t), \\ y = t^3 + t^2 \end{cases}$ 所确定, 则 $\frac{d^2y}{dx^2} =$ _____.

【答案】 $\frac{(t+1)(6t+5)}{t}$.

【解析】 $\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3t^2+2t}{1-\frac{1}{1+t}} = 3t^2+5t+2$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}(3t^2+5t+2) \cdot \frac{dt}{dx} = (6t+5) \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{1+t}} = \frac{(t+1)(6t+5)}{t}$$

34 (1994, 三(1)题, 5分) 设 $y = f(x+y)$, 其中 f 具有二阶导数, 且其一阶导数不等于 1, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

【解】 等式 $y = f(x+y)$ 两端对 x 求导, 则

$$\begin{aligned} y' &= (1+y')f' \\ \text{则 } y' &= \frac{f'}{1-f'} = -1 + \frac{1}{1-f'} \\ y'' &= -\frac{-f''}{(1-f')^2}(1+y') = \frac{f''}{(1-f')^3} \end{aligned}$$

35 (1995, 一(1)题, 3分) 设 $y = \cos(x^2)\sin^2 \frac{1}{x}$, 则 $y' =$ _____.

【答案】 $-2x\sin(x^2)\sin^2 \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\sin \frac{2}{x}\cos(x^2)$.

【解析】 $y' = -2x\sin(x^2)\sin^2 \frac{1}{x} + \cos(x^2)2\sin \frac{1}{x}\cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$
 $= -2x\sin(x^2)\sin^2 \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\sin \frac{2}{x}\cos(x^2)$

36 (1995, 三(2)题, 5分) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)} = e^y$ 确定, 其中 f 具有二阶导数, 且 $f' \neq 1$, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

【解】 (方法一) 方程 $xe^{f(y)} = e^y$ 两端取对数, 得

$$\ln x + f(y) = y$$

等式两端对 x 求导得

$$\frac{1}{x} + f'(y)y' = y'$$

则

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x(1-f'(y))} \\ y'' &= -\frac{1-f'(y)-xf''(y)y'}{x^2(1-f'(y))^2} = -\frac{(1-f'(y))^2-f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^3} \end{aligned}$$

(方法二) 方程 $xe^{f(y)} = e^y$ 两端对 x 求导得

$$e^{f(y)} + xe^{f(y)}f'(y)y' = e^y y'$$

$$\text{则 } y' = \frac{e^{f(y)}}{e^y - xe^{f(y)}f'(y)} = \frac{1}{x(1-f'(y))}.$$

以下同方法一.

37 (1996, (1) 题, 3 分) 设 $y = (x + e^{-\frac{x}{2}})^{\frac{2}{3}}$, 则 $y' \Big|_{x=0} =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{3}$.

【解析】 $y' \Big|_{x=0} = \frac{2}{3} (x + e^{-\frac{x}{2}})^{-\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}\right) \Big|_{x=0} = \frac{1}{3}$.

38 (1997, (2) 题, 3 分) 设 $y = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$, 则 $y'' \Big|_{x=0} =$ _____.

【答案】 $-\frac{3}{2}$.

【解析】 (方法一) $y = \frac{1}{2} [\ln(1-x) - \ln(1+x^2)]$

$$y' = \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} \right] = -\frac{1}{2(1-x)} - \frac{x}{1+x^2}$$

$$y'' = -\frac{1}{2(1-x)^2} - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$y'' \Big|_{x=0} = -\frac{3}{2}$$

(方法二) $y = \frac{1}{2} [\ln(1-x) - \ln(1+x^2)]$

$$= \frac{1}{2} \left[-x - \frac{x^2}{2} + o_1(x^2) - x^2 + o_2(x^2) \right]$$

$$= -\frac{x}{2} - \frac{3}{4}x^2 + o(x^2)$$

$$\text{则 } y'' \Big|_{x=0} = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot (2!) = -\frac{3}{2}.$$

【评注】 方法二是用泰勒公式, 比方法一简单.

39 (1997, (2) 题, 5 分) 设函数 $y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x = \arctan t, \\ 2y - ty^2 + e^t = 5 \end{cases}$ 所确定, 求 $\frac{dy}{dx}$.

【解】 $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$

等式 $2y - ty^2 + e^t = 5$ 两端对 t 求导得

$$2 \frac{dy}{dt} - y^2 - 2ty \frac{dy}{dt} + e^t = 0$$

$$\text{则 } \frac{dy}{dt} = \frac{y^2 - e^t}{2(1-ty)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(y^2 - e^t)(1+t^2)}{2(1-ty)}$$

40 (1999, (2) 题, 3 分) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\ln(x^2 + y) = x^3 y + \sin x$ 确定, 则 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} =$ _____.

【答案】 1.

【解析】 由方程 $\ln(x^2 + y) = x^3 y + \sin x$ 知, 当 $x = 0$ 时, $y = 1$. 该方程两端对 x 求导得

$$\frac{2x + y'}{x^2 + y} = 3x^2 y + x^3 y' + \cos x$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

将 $x = 0, y = 1$ 代入上式得 $y'(0) = 1$.

41 (2000, (2) 题, 3 分) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $2^{xy} = x + y$ 所确定, 则 $dy|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(\ln 2 - 1)dx$.

【解析】 将 $x = 0$ 代入方程 $2^{xy} = x + y$ 得 $y = 1$, 方程 $2^{xy} = x + y$ 两端对 x 求导得

$$2^{xy} \ln 2 (y + xy') = 1 + y'$$

将 $x = 0, y = 1$ 代入上式得

$$y'(0) = \ln 2 - 1$$

故 $dy|_{x=0} = (\ln 2 - 1)dx$.

42 (2000, 五题, 5 分) 求函数 $f(x) = x^2 \ln(1+x)$ 在 $x = 0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0) (n \geq 3)$.

【解】 (方法一) 由莱布尼茨公式

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$$

令 $u = x^2, v = \ln(1+x)$, 则

$$u' = 2x, u'' = 2, u''' = 0, \dots$$

$$v' = \frac{1}{1+x} = (x+1)^{-1}, v'' = (-1)(x+1)^{-2}$$

$$v^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! (x+1)^{-n}$$

$$f^{(n)}(0) = C_n^2 u''(0) v^{(n-2)}(0)$$

$$= \frac{n(n-1)}{2!} \cdot 2 \cdot (-1)^{n-1} (n-3)!$$

$$= \frac{(-1)^{n-1} n!}{n-2}$$

(方法二) 由麦克劳林公式知

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

及

$$x^2 \ln(1+x) = x^2 \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n) \right]$$

$$= x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{n+2}}{n} + o(x^{n+2})$$

$$= x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{(n-2)} + o(x^n)$$

比较 x^n 的系数得

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-2)}$$

$$\text{则 } f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1} n!}{n-2}.$$

43 (2003, (3) 题, 4 分) $y = 2^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 项的系数是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{(\ln 2)^n}{n!}$.

【解析】 $y = f(x)$ 的麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$2^x = e^{x \ln 2} = 1 + (\ln 2)x + \frac{(\ln 2)^2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(\ln 2)^n}{n!}x^n + o(x^n)$$

则 x^n 的系数为 $\frac{(\ln 2)^n}{n!}$.

或令 $f(x) = 2^x$, 则 $f'(x) = 2^x \ln 2$, $f''(x) = 2^x (\ln 2)^2$, 一般的

$$f^{(n)}(x) = 2^x (\ln 2)^n$$

$$f^{(n)}(0) = (\ln 2)^n$$

x^n 的系数为 $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(\ln 2)^n}{n!}$.

44 (2003, 四题, 9 分) 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 1 + 2t^2 \\ y = \int_1^{1+2\ln t} \frac{e^u}{u} du \end{cases} (t > 1)$ 所确定, 求

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=9}.$$

【解】 由 $x = 1 + 2t^2$ 知, 当 $x = 9$ 时, $t = 2$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{e^{1+2\ln t}}{1+2\ln t} \cdot \frac{2}{t}}{4t} = \frac{e}{2(1+2\ln t)}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{e}{2(1+2\ln t)} \right] \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{e \cdot \frac{2}{t}}{2(1+2\ln t)^2} \cdot \frac{1}{4t} = -\frac{e}{4t^2(1+2\ln t)^2} \\ \text{则 } \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=9} &= -\frac{e}{4t^2(1+2\ln t)^2} \Big|_{t=2} = -\frac{e}{16(1+2\ln 2)^2}. \end{aligned}$$

45 (2005, 1 题, 4 分) 设 $y = (1 + \sin x)^x$, 则 $dy \Big|_{x=\pi} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\pi dx$.

【解析】 (方法一) $y = e^{x \ln(1+\sin x)}$

$$y' = e^{x \ln(1+\sin x)} \left[\ln(1+\sin x) + \frac{x \cos x}{1+\sin x} \right], \text{ 则}$$

$$\left. y' \right|_{x=\pi} = -\pi, \quad dy \Big|_{x=\pi} = -\pi dx.$$

(方法二) 由 $y = (1 + \sin x)^x$ 知, $\ln y = x \ln(1 + \sin x)$.

$$\text{则 } \frac{y'}{y} = \ln(1 + \sin x) + \frac{x \cos x}{1 + \sin x}$$

$$y' = (1 + \sin x)^x \left[\ln(1 + \sin x) + \frac{x \cos x}{1 + \sin x} \right]$$

$$dy \Big|_{x=\pi} = -\pi dx.$$

(方法三) 令 $1 + \sin x = u$, $x = v$, 则 $y = u^v$

$$y' = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dx} = vu^{v-1} \cos x + u^v \ln u$$

$$= x(1 + \sin x)^{x-1} \cos x + (1 + \sin x)^x \ln(1 + \sin x)$$

$$\left. y' \right|_{x=\pi} = -\pi, \quad dy \Big|_{x=\pi} = -\pi dx.$$

【评注】 本题属幂指函数求微分,关键是求导数.题中所给三种方法是幂指函数求导数常用的三种方法.

46 (2005,7题,4分) 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内

- (A) 处处可导.
- (B) 恰有一个不可导点.
- (C) 恰有两个不可导点.
- (D) 至少有三个不可导点.

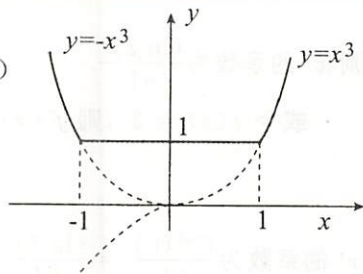
【答案】 C.

【解析】 先求极限得到 $f(x)$ 的表达式,然后再讨论 $f(x)$ 的可导性.

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max_{1 \leq i \leq m} a_i (a_i > 0)$ 知

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+|x|^{3n}} = \max\{1, |x|^3\} = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1. \\ |x|^3, & |x| > 1. \end{cases}$$

由 $y = f(x)$ 的表达式和其图形可知, $f(x)$ 在 $x = \pm 1$ 处不可导(尖点),在其余点均可导,故应选(C).



【评注】 本题求得 $f(x)$ 的表达式后,也可根据表达式确定各点的可导性,由其表达式知, $f(x)$ 不可导点最多两个,即 $x = \pm 1$,其余点均可导,又由 $f(x)$ 表达式知 $f(x)$ 为偶函数,则 $f(x)$ 在 $x = \pm 1$ 两点处可导性相同,因此,只需讨论 $x = 1$ 处的可导性.

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-1}{x-1} = 0, f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3-1}{x-1} = 3$$

则 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处不可导,从而在 $x = -1$ 处也不可导.

47 (2005,9题,4分) 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t, \\ y = \ln(1+t), \end{cases}$ 确定,则曲线 $y = y(x)$ 在 $x = 3$ 处的法线与 x 轴交点的横坐标是

- (A) $\frac{1}{8} \ln 2 + 3$.
- (B) $-\frac{1}{8} \ln 2 + 3$.
- (C) $-8 \ln 2 + 3$.
- (D) $8 \ln 2 + 3$.

【答案】 A.

【解析】 由 $x = 3$ 得, $3 = t^2 + 2t$, 解之得 $t = 1$ 和 $t = -3$, 由 $y = \ln(1+t)$ 知应取 $t = 1$, 此时 $y = \ln 2$.

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = \left. \frac{1}{2t+2} \right|_{t=1} = \frac{1}{8}$$

则曲线在点 $(3, \ln 2)$ 处的法线方程为

$$y - \ln 2 = -8(x - 3)$$

令 $y = 0$, 得 $x = \frac{1}{8} \ln 2 + 3$.

故应选(A).

- 48** (2006, 9 题, 4 分) 设函数 $g(x)$ 可微, $h(x) = e^{1+g(x)}$, $h'(1) = 1$, $g'(1) = 2$, 则 $g(1)$ 等于
 (A) $\ln 3 - 1$. (B) $-\ln 3 - 1$.
 (C) $-\ln 2 - 1$. (D) $\ln 2 - 1$.

【答案】 C.

【解析】 等式: $h(x) = e^{1+g(x)}$ 两端求导得 $h'(x) = e^{1+g(x)} g'(x)$,
 上式中令 $x = 1$ 得

$$h'(1) = e^{1+g(1)} g'(1)$$

即

$$1 = e^{1+g(1)} \cdot 2$$

由上式解得

$$g(1) = -\ln 2 - 1$$

【评注】 本题主要考查复合函数求导.

- 49** (2006, 5 题, 4 分) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y = 1 - xe^y$ 确定, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-e$.

【解析】 在等式 $y = 1 - xe^y$ 中令 $x = 0$, 得 $y = 1$.

等式 $y = 1 - xe^y$ 两端对 x 求导得

$$y' = -e^y - xe^y y'$$

将 $x = 0, y = 1$ 代入上式得

$$y'(0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = -e$$

【评注】 本题是隐函数求导的基本题, 但仍有部分考生未能给出正确答案, 主要是没有将 $x = 0$ 代入方程求出 $y = 1$.

- 50** (2007, 20 题, 11 分) 已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数, 且 $f'(0) = 1$, 函数 $y = y(x)$ 由方程 $y - xe^{y-1} = 1$ 所确定. 设 $z = f(\ln y - \sin x)$, 求 $\left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=0}$, $\left. \frac{d^2 z}{dx^2} \right|_{x=0}$.

【分析】 由 $z = f(\ln y - \sin x)$ 知 z 是 x, y 的函数, 又 $y = y(x)$ 是由方程 $y - xe^{y-1} = 1$ 确定的函数, 则 z 是 x 的函数.

【解】 在 $y - xe^{y-1} = 1$ 中, 令 $x = 0$ 得 $y = 1$.

方程 $y - xe^{y-1} = 1$ 两端对 x 求导得

$$y' - e^{y-1} - xe^{y-1} y' = 0, \text{ 即 } (2-y)y' - e^{y-1} = 0$$

将 $x = 0, y = 1$ 代入上式得 $y'(0) = 1$.

等式 $(2-y)y' - e^{y-1} = 0$ 两端再对 x 求导得

$$-y'^2 + (2-y)y'' - e^{y-1} y' = 0$$

将 $x = 0, y = 1, y'(0) = 1$ 代入上式得 $y''(0) = 2$.

又 $\frac{dz}{dx} = f'(\ln y - \sin x) \left(\frac{y'}{y} - \cos x \right)$ 则

$$\left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 z}{dx^2} &= f''(\ln y - \sin x) \left(\frac{y'}{y} - \cos x \right)^2 + f'(\ln y - \sin x) \left[\frac{y''}{y} - \frac{(y')^2}{y^2} + \sin x \right] \\ \left. \frac{d^2 z}{dx^2} \right|_{x=0} &= f'(0)(2-1) = f'(0) = 1\end{aligned}$$

【评注】 本题是复合函数与隐函数求导的综合题. 在隐函数求导中, 为求 y'' , 可在等式 $y' - e^{y-1} - xe^{y-1}y' = 0$ 两端再对 x 求导, 但运算较繁, 本题求解中将原方程 $y - xe^{y-1} = 1$ 代入上式, 即将 $xe^{y-1} = y - 1$ 代入得 $(2-y)y' - e^{y-1} = 0$, 该式两端对 x 求导就简单多了.

51 (2007, 13 题, 4 分) 设函数 $y = \frac{1}{2x+3}$, 则 $y^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{(-1)^n 2^n n!}{3^{n+1}}$.

【解析】 先求一阶导数 y' , 二阶导数 y'' , 然后归纳 n 阶导数.

【解】 $y = \frac{1}{2x+3} = (2x+3)^{-1}$

则 $y' = (-1)(2x+3)^{-2} \cdot 2$

$$y'' = (-1) \cdot (-2)(2x+3)^{-3} \cdot 2^2$$

由此可归纳得

$$y^{(n)} = (-1)^n n! (2x+3)^{-(n+1)} \cdot 2^n$$

则

$$y^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n 2^n n!}{3^{n+1}}$$

52 (2008, 16 题, 10 分) 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = \int_0^{t^2} \ln(1+u) du \end{cases}$ 确定, 其中 $x(t)$ 是

$$\text{初值问题} \begin{cases} \frac{dx}{dt} - 2te^{-x} = 0, \\ x|_{t=0} = 0 \end{cases} \text{的解. 求 } \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

【分析】 求分离变量初值问题的解, 求由参数方程确定的函数的二阶导数.

【解】 由 $\frac{dx}{dt} - 2te^{-x} = 0$ 得 $e^x dx = 2t dt$, 积分并由初始条件 $x|_{t=0} = 0$, 得 $e^x = 1 + t^2$, 即 $x = \ln(1 + t^2)$.

$$\text{(方法一)} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\ln(1+t^2) \cdot 2t}{\frac{2t}{1+t^2}} = (1+t^2) \ln(1+t^2),$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{dt} [(1+t^2) \ln(1+t^2)]}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t \ln(1+t^2) + 2t}{\frac{2t}{1+t^2}} \\ &= (1+t^2) [\ln(1+t^2) + 1] = (x+1)e^x.\end{aligned}$$

(方法二) 由参数方程求 $y = y(x)$ 的二阶导数公式(下式中, 右上'表示对 t 的导数):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{x' y'' - x'' y'}{(x')^3}$$

再以 $x' = \frac{2t}{1+t^2}$, $x'' = \frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}$, $y' = 2t \ln(1+t^2)$, $y'' = 2 \ln(1+t^2) + \frac{4t^2}{1+t^2}$ 代入即得.

三、导数的几何意义及相关变化率

53 (1987, 一(2) 题, 3 分) 曲线 $y = \arctan x$ 在横坐标为 1 的点处的切线方程是_____ ; 法线方程是_____.

【答案】 $y - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(x - 1), y - \frac{\pi}{4} = -2(x - 1).$

【解析】 曲线 $y = \arctan x$ 在 $x = 1$ 处切线斜率为

$$y' \Big|_{x=1} = \frac{1}{1+x^2} \Big|_{x=1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{又 } y(1) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4},$$

则所求切线方程为

$$y - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(x - 1)$$

所求法线方程为

$$y - \frac{\pi}{4} = -2(x - 1)$$

54 (1988, 二(1) 题, 4 分) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x + 1$ 的图形在点 $(0, 1)$ 处切线与 x 轴交点坐标是

(A) $(-\frac{1}{6}, 0)$. (B) $(-1, 0)$. (C) $(\frac{1}{6}, 0)$. (D) $(1, 0)$.

【答案】 A.

【解析】 $f'(0) = (x^2 + x + 6) \Big|_{x=0} = 6$

则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为

$$y - 1 = 6x$$

令 $y = 0$, 得 $x = -\frac{1}{6}$.

则所求点为 $(-\frac{1}{6}, 0)$, 故应选(A).

55 (1990, 一(1) 题, 3 分) 曲线 $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ 上对应于 $t = \frac{\pi}{6}$ 点处的法线方程为_____.

【答案】 $y - \frac{1}{8} = \sqrt{3}(x - \frac{3\sqrt{3}}{8}).$

【解析】 $t = \frac{\pi}{6}$ 时, $x = \frac{3\sqrt{3}}{8}, y = \frac{1}{8}.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3\sin^2 t \cos t}{3\cos^2 t (-\sin t)}$$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{t=\frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

则 $t = \frac{\pi}{6}$ 处法线方程为

$$y - \frac{1}{8} = \sqrt{3}\left(x - \frac{3\sqrt{3}}{8}\right) \text{ 或 } y = \sqrt{3}x - 1.$$

56 (1991, 二(1) 题, 3 分) 若曲线 $y = x^2 + ax + b$ 和 $2y = -1 + xy^3$ 在点 $(1, -1)$ 处相切, 其中 a, b 是常数, 则

(A) $a = 0, b = -2$.

(B) $a = 1, b = -3$.

(C) $a = -3, b = 1$.

(D) $a = -1, b = -1$.

【答案】 D.

【解析】 由于曲线 $y = x^2 + ax + b$ 过点 $(1, -1)$, 则

$$-1 = 1 + a + b$$

又两曲线在点 $(1, -1)$ 相切, 则

$$y' \Big|_{x=1} = 2x + a \Big|_{x=1} = 2 + a$$

等式 $2y = -1 + xy^3$ 两端对 x 求导得

$$2y' = y^3 + 3xy^2 \cdot y'$$

将 $x = 1, y = -1$ 代入上式得

$$y' \Big|_{x=1} = 1$$

则 $2 + a = 1$, 从而 $a = -1$, 再由 $-1 = 1 + a + b$ 知 $b = -1$.

57 (1995, 一(3) 题, 3 分) 曲线 $\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ 在 $t = 2$ 处的切线方程为_____.

【答案】 $3x - y - 7 = 0$ 或 $y - 8 = 3(x - 5)$.

【解析】 所求曲线在 $t = 2$ 处切线斜率为

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{t=2} = \frac{3t^2}{2t} \Big|_{t=2} = 3$$

且当 $t = 2$ 时, $x = 5, y = 8$, 则所求切线方程为

$$y - 8 = 3(x - 5)$$

58 (1999, 一(1) 题, 3 分) 曲线 $\begin{cases} x = e^t \sin 2t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$ 在 $(0, 1)$ 处的法线方程为_____.

【答案】 $y + 2x - 1 = 0$.

【解析】 点 $(0, 1)$ 对应参数 $t = 0$, 则曲线在点 $(0, 1)$ 处切线斜率为

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{t=0} = \frac{e^t \cos t - e^t \sin t}{e^t \sin 2t + 2e^t \cos 2t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{2}$$

则该点处法线斜率为 -2 , 法线方程为

$$y - 1 = (-2)(x - 0)$$

即 $y + 2x - 1 = 0$.

59 (2001, 一(2) 题, 3 分) 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $e^{2x+y} - \cos(xy) = e - 1$ 所确定, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 1)$ 处的法线方程为_____.

【答案】 $x - 2y + 2 = 0$.

【解析】 方程 $e^{2x+y} - \cos(xy) = e - 1$ 两端对 x 求导, 得

$$e^{2x+y}(2 + y') + \sin(xy)[y + xy'] = 0$$

将 $x=0, y=1$ 代入上式得

$$e(2+y'(0))=0$$

则 $y'(0)=-2$, 则所求法线斜率为 $\frac{1}{2}$, 法线方程为

$$y-1=\frac{1}{2}x$$

即 $x-2y+2=0$.

60 (2002, 三题, 6分) 已知曲线的极坐标方程是 $r=1-\cos\theta$, 求该曲线上对应于 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 处的切线与法线的直角坐标方程.

【解】 由直角坐标和极坐标的关系

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

得到该曲线的参数方程

$$\begin{cases} x=(1-\cos\theta)\cos\theta=\cos\theta-\cos^2\theta \\ y=(1-\cos\theta)\sin\theta=\sin\theta-\sin\theta\cos\theta \end{cases}$$

将 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 代入上式得切点 $(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4})$.

由参数方程求导公式得切线斜率为

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \frac{\cos\theta - \cos^2\theta + \sin^2\theta}{-\sin\theta + 2\cos\theta\sin\theta} \bigg|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} = 1$$

所以, 切线的直角坐标方程为

$$y - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = x - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} \right)$$

$$\text{即 } x - y + \frac{5}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4} = 0.$$

法线的直角坐标方程为

$$y - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = - \left[x - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} \right) \right]$$

$$\text{即 } x + y + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0.$$

61 (2003, 一(2)题, 4分) 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $xy+2\ln x=y^4$ 所确定, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程是_____.

【答案】 $x-y=0$.

【解析】 方程 $xy+2\ln x=y^4$ 两端对 x 求导得

$$y+xy'+\frac{2}{x}=4y^3y'$$

将 $x=1, y=1$ 代入上式得 $y'(1)=1$, 则所求切线方程为

$$y-1=1\cdot(x-1)$$

即 $x-y=0$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

62 (2007, 12题, 4分) 曲线 $\begin{cases} x = \cos t + \cos^2 t, \\ y = 1 + \sin t \end{cases}$ 上对应于 $t = \frac{\pi}{4}$ 的点处的法线斜率为_____.

【答案】 $1 + \sqrt{2}$.

【解析】 先求切线的斜率 k , 由于

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\cos t}{-\sin t - 2\sin t \cos t}$$

$$\text{则 } k = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{1+\sqrt{2}},$$

故曲线上对应 $t = \frac{\pi}{4}$ 处的法线斜率为 $1 + \sqrt{2}$.

63 (2008, 11题, 4分) 曲线 $\sin(xy) + \ln(y-x) = x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程是_____.

【答案】 $y = x + 1$.

【解析】 先求曲线 $\sin(xy) + \ln(y-x) = x$ 在点 $(0, 1)$ 处切线斜率 $y'(0)$.

等式 $\sin(xy) + \ln(y-x) = x$ 两端对 x 求导得

$$\cos(xy) \cdot (y + xy') + \frac{y' - 1}{y - x} = 1$$

在上式中令 $x = 0, y = 1$ 得 $y'(0) = 1$, 于是该曲线在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $y - 1 = x$, 即 $y = x + 1$.

四、函数的单调性、极值与最值

64 (1987, 六题, 10分) (1) (5分) 证明: 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导, 且导数 $f'(x)$ 恒大于零, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增加.

(2) (5分) 若 $g(x)$ 在 $x = c$ 处二阶导数存在, 且 $g'(c) = 0, g''(c) < 0$, 则 $g(c)$ 为 $g(x)$ 的一个极大值.

【证明】 (1) 在 (a, b) 内任取两点 x_1 和 x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 由拉格朗日定理知, 存在 $\xi \in (x_1, x_2)$, 使

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

由于 $f'(x) > 0$, 则

$$f(x_2) > f(x_1)$$

即 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增加.

(2) 由于 $g''(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{g'(x) - g'(c)}{x - c}$, 又 $g''(c) < 0$, 由极限保号性知: 存在 c 点的去心邻域 $\dot{U}(c, \delta)$, 在该去心邻域内

$$\frac{g'(x) - g'(c)}{x - c} < 0$$

即 $\frac{g'(x)}{x - c} < 0$, 则当 $c - \delta < x < c$ 时, $g'(x) > 0, g(x)$ 单调增, $g(x) < g(c)$.

当 $c < x < c + \delta$ 时, $g'(x) < 0, g(x)$ 单调减, $g(c) > g(x)$, 由极值定义可知, $g(c)$ 为 $g(x)$ 的一个极大值.

也可利用泰勒公式

$$g(x) = g(c) + g'(c)(x-c) + \frac{g''(c)}{2!}(x-c)^2 + o(x-c)^2$$

$$\text{即 } g(x) - g(c) = \frac{g''(c)}{2}(x-c)^2 + o(x-c)^2$$

由于当 $x \rightarrow c$ 时, $o(x-c)^2$ 是比 $\frac{g''(c)}{2}(x-c)^2$ 更高阶的无穷小, 则在 c 点的某去心邻域内等式右端正负号由 $\frac{g''(c)}{2}(x-c)^2$ 所确定, 又 $g''(c) < 0$, 则在该去心邻域内

$$\frac{g''(c)}{2}(x-c)^2 < 0$$

即 $g(x) - g(c) < 0, g(x) < g(c)$. 故 $g(c)$ 为 $g(x)$ 的一个极大值.

65 (1988, 二(5) 题, 3 分) 设 $y = f(x)$ 是方程 $y'' - 2y' + 4y = 0$ 的一个解, 且 $f(x_0) > 0$, $f'(x_0) = 0$, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处

(A) 取得极大值.

(B) 取得极小值.

(C) 某邻域内单调增加.

(D) 某邻域内单调减少.

【答案】 A.

【解析】 由于 $y = f(x)$ 是方程 $y'' - 2y' + 4y = 0$ 的解, 则

$$f''(x) - 2f'(x) + 4f(x) = 0$$

上式中令 $x = x_0$, 则

$$f''(x_0) - 2f'(x_0) + 4f(x_0) = 0$$

$$f''(x_0) = -4f(x_0) < 0$$

故函数 $f(x)$ 在 x_0 点取极大值.

66 (1988, 五题, 8 分) 将长为 a 的铁丝切成两段, 一段围成正方形, 另一段围成圆形, 问这两段铁丝各长为多少时, 正方形与圆形的面积之和为最小.

【解】 设圆形的周长为 x , 则正方形的周长为 $a - x$, 圆形与正方形面积之和为 y , 则

$$y = \pi \left(\frac{x}{2\pi} \right)^2 + \left(\frac{a-x}{4} \right)^2 = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{x^2}{16} - \frac{a}{8}x + \frac{a^2}{16}$$

$$y' = \frac{x}{2\pi} + \frac{x}{8} - \frac{a}{8}$$

$$\text{令 } y' = 0, \text{ 得 } x = \frac{\pi a}{4 + \pi}.$$

$$y'' = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{8} > 0$$

则 y 在 $x = \frac{\pi a}{4 + \pi}$ 处取极小值. 由于极值点唯一, 则此极小值为 y 的最小值.

67 (1989, 三(4) 题, 3 分) 设两函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $x = a$ 处取得极大值, 则函数 $F(x) = f(x)g(x)$ 在 $x = a$ 处

(A) 必取极大值.

(B) 必取极小值.

(C) 不可能取极值.

(D) 是否取极值不能确定.

【答案】 D.

【解析】 令 $f(x) = 1 - x^2, g(x) = 1 - x^2$, 显然 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x = 0$ 都取得极大值.

$$f(x)g(x) = (1 - x^2)^2$$

也在 $x = 0$ 处取极大值.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

令 $f(x) = -x^2, g(x) = -x^2$ 都在 $x = 0$ 处取极大值, 但

$$f(x)g(x) = x^4$$

在 $x = 0$ 处取极小值, 综上所述, 选项(A)(B)(C) 都不正确, 故应选(D).

68 (1991, 二(3) 题, 3 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, $x_0 \neq 0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点, 则

(A) x_0 必是 $f(x)$ 的驻点.

(B) $-x_0$ 必是 $-f(-x)$ 的极小值点.

(C) $-x_0$ 必是 $-f(x)$ 的极小值点.

(D) 对一切 x 都有 $f(x) \leq f(x_0)$.

【答案】 B.

【解析】 (方法一) 令 $g(x) = -f(-x)$, 由于 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点, 则在 x_0 某邻域内有

$$f(x) \leq f(x_0)$$

从而有

$$-f(x) \geq -f(x_0)$$

即

$$g(-x) \geq g(-x_0)$$

则 $-x_0$ 为 $-f(-x)$ 的极小值.

(方法二) 注意 $y = f(-x)$ 和 $y = f(x)$ 的图形关于 y 轴对称, $y = -f(x)$ 与 $y = f(x)$ 的图形关于 x 轴对称.

如图 1, 可知 $-f(-x)$ 在 $-x_0$ 取极小值.

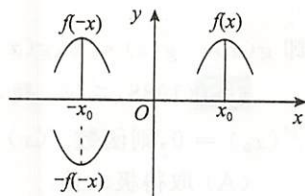


图 1

69 (1991, 七题, 9 分) 如图 2, A, D 分别是曲线 $y = e^x$ 和 $y = e^{-2x}$ 上的点, AB 和 DC 均垂直 x 轴, 且 $|AB| : |DC| = 2 : 1, |AB| < 1$. 求点 B 和 C 的横坐标, 使梯形 ABCD 的面积最大.

【解】 设 B, C 点的横坐标分别为 x_1, x ,

则 $e^{x_1} = 2e^{-2x}$, 得 $x_1 = \ln 2 - 2x$,

$$BC = x - x_1 = 3x - \ln 2 \quad (x > 0)$$

梯形 ABCD 的面积

$$S = \frac{3}{2}(3x - \ln 2)e^{-2x} \quad (x > 0)$$

$$S' = \frac{3}{2}(3 - 6x + 2\ln 2)e^{-2x}$$

令 $S' = 0$, 得 $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\ln 2$.

当 $x < \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\ln 2$ 时, $S' > 0$, 当 $x > \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\ln 2$ 时, $S' < 0$, 所以, $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\ln 2$ 为极大值点, 又极值点唯一, 故 $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\ln 2$ 为最大值点, $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\ln 2, x_1 = \frac{1}{3}\ln 2 - 1$ 时, 梯形 ABCD 面积最大.

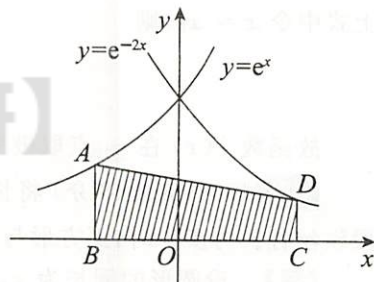


图 2

70 (1992, 一(2) 题, 3 分) 函数 $y = x + 2\cos x$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为_____.

【答案】 $\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$.

【解析】 $y' = 1 - 2\sin x$, 令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{\pi}{6}$.

$$\text{又 } y(0) = 2, y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2},$$

比较以上三点函数值,可见最大值为 $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$.

71 (1993, 一(3) 题, 3 分) 设 $F(x) = \int_1^x \left(2 - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt (x > 0)$, 则函数 $F(x)$ 的单调减少区间是

【答案】 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

【解析】 $F'(x) = \left(2 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) (x > 0)$, 令 $2 - \frac{1}{\sqrt{x}} < 0$, 得 $0 < x < \frac{1}{4}$, 则 $F(x)$ 单调减少区间是 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

72 (1993, 六题, 9 分) 作半径为 r 的球的外切正圆锥, 问此圆锥的高 h 为何值时, 其体积最小, 并求出该最小值.

【解】 设圆锥底面圆半径为 R , 如图 3, $BC = R$, $OD = r$, $AC = h$.

由于 $\frac{BC}{AC} = \frac{OD}{AD}$, 则

$$\frac{R}{h} = \frac{r}{\sqrt{(h-r)^2 - r^2}}$$

从而 $R = \frac{rh}{\sqrt{h^2 - 2hr}}$, 于是圆锥体积为

$$V(h) = \frac{\pi}{3} R^2 h = \frac{\pi r^2}{3} \frac{h^2}{h - 2r} \quad (2r < h < +\infty)$$

$$V'(h) = \frac{\pi r^2}{3} \frac{h^2 - 4rh}{(h - 2r)^2},$$

令 $V'(h) = 0$ 得, $h_1 = 4r$, $h_2 = 0$ (舍去).

由于圆锥最小体积一定存在, 且 $h = 4r$ 是 $V(h)$ 在 $(2r, +\infty)$ 内唯一可能取得极值的点, 所以,

当 $h = 4r$ 时, $V(h)$ 取最小值, $V(4r) = \frac{8\pi r^3}{3}$.

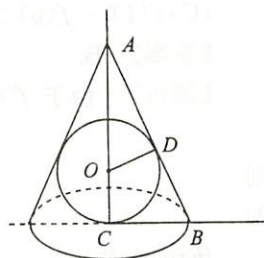


图 3

73 (1994, 二(3) 题, 3 分) 设 $y = f(x)$ 是满足微分方程 $y'' + y' - e^{\sin x} = 0$ 的解, 且 $f'(x_0) = 0$, 则 $f(x)$ 在

(A) x_0 某邻域内单调增加.

(B) x_0 某邻域内单调减少.

(C) x_0 处取得极小值.

(D) x_0 处取得极大值.

【答案】 C.

【解析】 由于 $y = f(x)$ 满足方程 $y'' + y' - e^{\sin x} = 0$, 则

$$f''(x) + f'(x) - e^{\sin x} \equiv 0$$

在上式中令 $x = x_0$, 则

$$f''(x_0) + f'(x_0) - e^{\sin x_0} = 0$$

又 $f'(x_0) = 0$, 则

$$f''(x_0) = e^{\sin x_0} > 0$$

则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取极小值, 故应选(C).

74 (1995, 二(3) 题, 3 分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且对任意 x_1, x_2 , 当 $x_1 > x_2$ 时, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则

(A) 对任意 x , $f'(x) > 0$.

(B) 对任意 x , $f'(-x) \leq 0$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

(C) 函数 $f(-x)$ 单调增加.

(D) 函数 $-f(-x)$ 单调增加.

【答案】 D.

【解析】 (方法一) 直接法: 对任意的 x_1, x_2 , 当 $x_1 > x_2$ 时, $-x_1 < -x_2$, 从而有

$$f(-x_1) < f(-x_2)$$

$$-f(-x_1) > -f(-x_2)$$

则

即 $-f(-x)$ 单调增加, 故应选(D).

(方法二) 排除法: 令 $f(x) = x^3$, 显然满足题设条件, 但

$$f'(x) = 3x^2 \geq 0, f'(-x) = 3(-x)^2 = 3x^2 \geq 0$$

$f(-x) = -x^3$ 单调减少, 则选项(A)(B)(C) 都不正确, 故应选(D).

75 (1995, 二(4) 题, 3 分) 设在 $[0, 1]$ 上 $f''(x) > 0$, 则 $f'(0), f'(1), f(1) - f(0)$ 或 $f(0) - f(1)$ 的大小顺序是

(A) $f'(1) > f'(0) > f(1) - f(0)$.

(B) $f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$.

(C) $f(1) - f(0) > f'(1) > f'(0)$.

(D) $f'(1) > f(0) - f(1) > f'(0)$.

【答案】 B.

【解析】 由于 $f''(x) > 0$, 则 $f'(x)$ 单调增, 又

$$f(1) - f(0) = f'(\xi) \quad 0 < \xi < 1$$

$$f'(1) > f'(\xi) > f'(0)$$

$$f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$$

则

即

故应选(B).

76 (1995, 四题, 8 分) 求函数 $f(x) = \int_0^{x^2} (2-t)e^{-t} dt$ 的最大值和最小值.

【解】 由于 $f(x)$ 是偶函数, 所以, 只需求 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的最大值与最小值.

令 $f'(x) = 2x(2-x^2)e^{-x^2} = 0$, 得 $x = \sqrt{2}$.

$$f(\sqrt{2}) = \int_0^2 (2-t)e^{-t} dt = -(2-t)e^{-t} \Big|_0^2 - \int_0^2 e^{-t} dt = 1 + e^{-2}$$

$$f(0) = 0$$

$$f(+\infty) = \int_0^{+\infty} (2-t)e^{-t} dt = -(2-t)e^{-t} \Big|_0^{+\infty} + e^{-t} \Big|_0^{+\infty} = 1$$

比较以上三点值可知, $f(x)$ 最大值为 $1 + e^{-2}$, 最小值为 0.

77 (1996, 六题, 8 分) 设函数 $f(x)$ 由方程 $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$ 所确定, 试求 $y = y(x)$ 的驻点, 并判别它是否为极值点.

【解】 方程 $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$ 两端对 x 求导得

$$6y^2 y' - 4yy' + 2y + 2xy' - 2x = 0 \quad (*)$$

令 $y' = 0$, 得 $y = x$, 将此代入原方程有 $2x^3 - x^2 - 1 = 0$, 从而解得唯一的驻点 $x = 1$.

(*) 式两端再对 x 求导得

$$(3y^2 - 2y + x)y'' + 2(3y - 1)y'^2 + 2y' - 1 = 0$$

因此, $y'' \Big|_{(1,1)} = \frac{1}{2} > 0$.

故驻点 $x = 1$ 是 $y = y(x)$ 的极小值点.

78 (1997, 二(3) 题, 3 分) 已知函数 $y = f(x)$ 对一切 x 满足 $xf''(x) + 3x[f'(x)]^2 = 1 - e^{-x}$, 若 $f'(x_0) = 0 (x_0 \neq 0)$, 则

(A) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(D) $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(x_0, f(x_0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

【答案】 B.

【解析】 在 $xf''(x) + 3x[f'(x)]^2 = 1 - e^{-x}$ 中令 $x = x_0$, 则

$$\begin{aligned} x_0 f''(x_0) &= 1 - e^{-x_0} \\ f''(x_0) &= \frac{1 - e^{-x_0}}{x_0} > 0 \quad (x_0 \neq 0) \end{aligned}$$

又 $f'(x_0) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取极小值, 故应选(B).

79 (1998, 二(4) 题, 3 分) 设函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 的某个邻域内连续, 且 $f(a)$ 为其极大值, 则存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (a - \delta, a + \delta)$ 时, 必有

(A) $(x - a)[f(x) - f(a)] \geq 0$.

(B) $(x - a)[f(x) - f(a)] \leq 0$.

(C) $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(x)}{(t - x)^2} \geq 0 (x \neq a)$.

(D) $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(x)}{(t - x)^2} \leq 0 (x \neq a)$.

【答案】 C.

【解析】 由于 $f(x)$ 在 $x = a$ 某邻域内连续, 且 $x \neq a$, 则

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(x)}{(t - x)^2} = \frac{f(a) - f(x)}{(a - x)^2}$$

又 $f(a)$ 为 $f(x)$ 极大值, 则 $f(a) \geq f(x)$, 从而

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(x)}{(t - x)^2} \geq 0$$

故应选(C).

80 (2000, 二(3) 题, 3 分) 设函数 $f(x), g(x)$ 是恒大于零的可导函数, 且 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$, 则当 $a < x < b$ 时, 有

(A) $f(x)g(b) > f(b)g(x)$.

(B) $f(x)g(a) > f(a)g(x)$.

(C) $f(x)g(x) > f(b)g(b)$.

(D) $f(x)g(x) > f(a)g(a)$.

【答案】 A.

【解析】 令 $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, (a \leq x \leq b)$, 由题设知

$$F'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} < 0, (a < x < b)$$

则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减, 从而, 当 $a < x < b$ 时 $F(b) < F(x)$, 即

$$\frac{f(b)}{g(b)} < \frac{f(x)}{g(x)}$$

故 $f(x)g(b) > f(b)g(x)$.

81 (2001, 二(5) 题, 3 分) 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导, $y = f(x)$ 的图形图 4 所示,

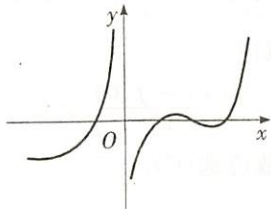
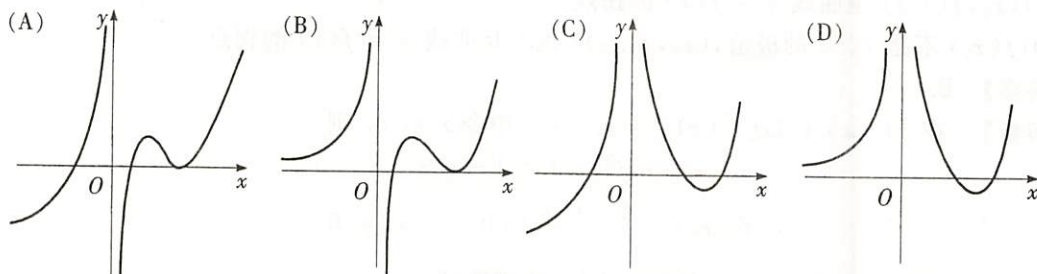


图 4

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

则导函数 $y = f'(x)$ 的图形为



【答案】 D.

【解析】 由 $y = f(x)$ 的图形可知, 当 $x < 0$ 时, $f(x)$ 单调增, 因此, $f'(x) > 0$, 即曲线 $y = f'(x)$ 应在 x 轴上方, 所以(A)(C) 都不正确; 又当 $x > 0$ 时, $f(x)$ 先增, 然后减, 最后增, 因此, $f'(x)$ 先正, 然后负, 最后为正, 显然(B) 不正确, 故应选(D).

82 (2003, 二(4) 题, 4 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其导函数的图形如图 5 所示, 则 $f(x)$ 有

- (A) 一个极小值点和两个极大值点.
- (B) 两个极小值点和一个极大值点.
- (C) 两个极小值点和两个极大值点.
- (D) 三个极小值点和一个极大值点.

【答案】 C.

【解析】 如图 6 在 A 点左侧 $f'(x) > 0$, 在 A 点右侧 $f'(x) < 0$, 所以点 A 为 $f(x)$ 的极大值点; 同理可知点 B, C 都是 $f(x)$ 的极小值点; 在点 O 左侧 $f'(x) > 0$, 右侧 $f'(x) < 0$, 而 $f(x)$ 在点 O 连续, 所以点 O 也是 $f(x)$ 的极大值点. 故应选(C).

83 (2004, 10 题, 4 分) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f'(0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得

- (A) $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调增加.
- (B) $f(x)$ 在 $(-\delta, 0)$ 内单调减少.
- (C) 对任意的 $x \in (0, \delta)$, 有 $f(x) > f(0)$.
- (D) 对任意的 $x \in (-\delta, 0)$, 有 $f(x) > f(0)$.

【答案】 C.

【解析】 由 $f'(0) > 0$ 知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} > 0$$

由极限保号性知, 在 $x = 0$ 某邻域内

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} > 0$$

因此, 在 $(0, \delta)$ 内, $f(x) > f(0)$, 故应选(C).

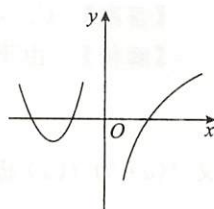


图 5

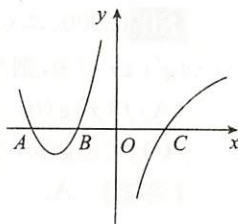


图 6

【评注】 本题不能选(A),也就是说由 $f'(0) > 0$ 得不到 $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调增加. 例如

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = 1 > 0, \text{ 当 } x \neq 0 \text{ 时, } f'(x) = 1 + 4x \sin \frac{1}{x} - 2 \cos \frac{1}{x}.$$

因此, $f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = 1 - 2 = -1 < 0$, 由于 $\frac{1}{2n\pi} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 说明在 $x = 0$ 的任何邻域内都有使 $f'(x) < 0$ 的点, 则 $f(x)$ 在该邻域不单调.

五、曲线的凹向、拐点及渐近线

84 (1988, 四题, 12 分) 作函数 $y = \frac{6}{x^2 - 2x + 4}$ 的图形, 并填写下表.

单调增加区间	
单调减少区间	
极值点	
极值	
凹(∪) 区间	
凸(∩) 区间	
拐点	
渐近线	

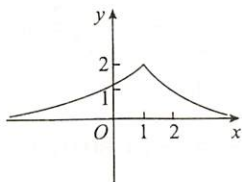
【解】

$$y' = \frac{12(1-x)}{(x^2 - 2x + 4)^2}, y'' = \frac{36x(x-2)}{(x^2 - 2x + 4)^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{x^2 - 2x + 4} = 0$$

则原曲线有水平渐近线 $y = 0$.

函数图像为:



单调增加区间	$(-\infty, 1)$
单调减少区间	$(1, +\infty)$
极值点	1
极值	2
凹(∪) 区间	$(-\infty, 0), (2, +\infty)$
凸(∩) 区间	$(0, 2)$
拐点	$(0, \frac{3}{2}), (2, \frac{3}{2})$
渐近线	$y = 0$

85 (1989, 三(1) 题, 3 分) 当 $x > 0$ 时, 曲线 $y = x \sin \frac{1}{x}$

(A) 有且仅有水平渐近线.

(B) 有且仅有铅直渐近线.

(C) 既有水平渐近线, 也有铅直渐近线.

(D) 既无水平渐近线, 又无铅直渐近线.

【答案】 A.

【解析】 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = 1$,

则曲线 $y = x \sin \frac{1}{x}$ 有水平渐近线 $y = 1$.

显然该曲线无铅直渐近线, 故应选(A).

86 (1989, 七题, 11 分) 对函数 $y = \frac{x+1}{x^2}$ 填写下表

单调减少区间	
单调增加区间	
极值点	
极值	
凹(∪) 区间	
凸(∩) 区间	
拐点	
渐近线	

【解】 $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}, y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} = -\frac{x+2}{x^3}, y'' = \frac{2}{x^3} + \frac{6}{x^4} = \frac{2(x+3)}{x^4}$

令 $y' = 0$ 得 $x = -2$; 令 $y'' = 0$ 得 $x = -3$.

则该函数在 $(-2, 0)$ 上单调增, 在 $(-\infty, -2)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调减, 在 $x = -2$ 取极小值 $-\frac{1}{4}$;

其图形在 $(-3, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上是凹的, 在 $(-\infty, -3)$ 上是凸的, 拐点为 $(-3, -\frac{2}{9})$.

又 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$.

则该曲线有水平渐近线 $y = 0$ 和铅直渐近线 $x = 0$.

单调减少区间	$(-\infty, -2), (0, +\infty)$
单调增加区间	$(-2, 0)$
极值点	-2
极值	$-\frac{1}{4}$
凹(∪) 区间	$(-3, 0), (0, +\infty)$
凸(∩) 区间	$(-\infty, -3)$
拐点	$(-3, -\frac{2}{9})$
渐近线	$x = 0$ 和 $y = 0$

87 (1990, 三(3) 题, 5 分) 求曲线 $y = \frac{1}{1+x^2} (x > 0)$ 的拐点.

【解】

$$y' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$y'' = -\frac{2(1+x^2)^2 - 2x(1+x^2) \cdot 4x}{(1+x^2)^4}$$

$$= \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}, y = \frac{3}{4}$, y'' 在 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 两侧变号, 则点 $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4})$ 为曲线 $y = \frac{1}{1+x^2}$ 的拐点.

88 (1991, 一(2) 题, 3 分) 曲线 $y = e^{-x^2}$ 的上凸区间是_____.

【答案】 $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

【解析】

$$y' = -2xe^{-x^2}$$

$$y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, 当 $x \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ 时, $y'' < 0$, 曲线 $y = e^{-x^2}$ 是上凸的.

89 (1993, 二(5) 题, 3 分) 若 $f(x) = -f(-x)$, 在 $(0, +\infty)$ 内 $f'(x) > 0, f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内

(A) $f'(x) < 0, f''(x) < 0$.

(B) $f'(x) < 0, f''(x) > 0$.

(C) $f'(x) > 0, f''(x) < 0$.

(D) $f'(x) > 0, f''(x) > 0$.

【答案】 C.

【解析】 (方法一) 直接法:

等式 $f(x) = -f(-x)$ 两边对 x 求导得

$$f'(x) = f'(-x), f''(x) = -f''(-x)$$

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $-x \in (0, +\infty)$, 则

$$f'(x) = f'(-x) > 0$$

$$f''(x) = -f''(-x) < 0$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

故应选(C).

【方法二】 直接法:(几何法)由题设可知, $f(x)$ 为奇函数, 在 $(0, +\infty)$ 上函数单调增加, 曲线 $y = f(x)$ 是凹的, 如图 1 所示, 由此可知在区间 $(-\infty, 0)$ 上, 函数 $f(x)$ 单调增加, 曲线 $y = f(x)$ 是凸的, 则在 $(-\infty, 0)$ 上 $f'(x) > 0, f''(x) < 0$

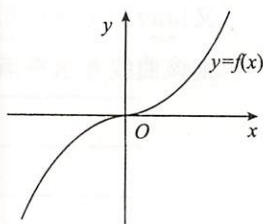


图 1

故应选(C).

【方法三】 排除法: 令 $f(x) = x^3$, 显然满足题设条件, 而在 $(-\infty, 0)$ 上 $f'(x) = 3x^2 > 0, f''(x) = 6x < 0$

则选项(A)(B)(D) 均不正确, 故应选(C).

90 (1994, 二(4) 题, 3 分) 曲线 $y = e^{\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)(x+2)}$ 的渐近线有

(A) 1 条.

(B) 2 条.

(C) 3 条.

(D) 4 条.

【答案】 B.

【解析】 由于

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)(x+2)} = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2}} \arctan \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)(x+2)} = \infty$$

则该曲线有水平渐近线 $y = \frac{\pi}{4}$ 和铅直渐近线 $x = 0$, 虽然原题中当 $x = 1, x = -2$ 时分母为零, 但

$\lim_{x \rightarrow 1} y$ 与 $\lim_{x \rightarrow -2} y$ 都不是无穷, 原曲线的渐近线有两条, 故应选(B).

91 (1994, 五题, 9 分) 设 $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$,

(1) 求函数的增减区间及极值;

(2) 求函数图像的凹凸区间及拐点;

(3) 求渐近线;

(4) 作出函数图形.

【解】 (1) 定义域 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$$y' = 1 - \frac{8}{x^3}, y'' = \frac{24}{x^4}$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 2$. 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} y = \infty$, 则 $x = 0$ 为铅直渐近线, 又

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} = 0$$

则 $y = x$ 为其斜渐近线, 草图如图 2.

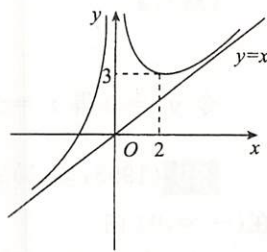


图 2

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
y'	+	不存在	-	0	+
y''	+	不存在	+		+
y		无定义		极小	

92 (1995, (5) 题, 3 分) 曲线 $y = x^2 e^{-x^2}$ 的渐近线方程为_____.

【答案】 $y = 0$.

【解析】 由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0$,

则该曲线有水平渐近线 $y = 0$.

93 (1995, 六题, 8 分) 如图 3, 设曲线 L 的方程 $y = f(x)$, 且 $y'' > 0$, 又 MT, MP 分别为该曲线在点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线和法线. 已知线段 MP 的长度为 $\frac{(1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{y_0''}$ (其中 $y_0' = y'(x_0), y_0'' = y''(x_0)$), 试推导出点 $P(\xi, \eta)$ 的坐标表达式.

【解】 由题设知

$$(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 = \frac{(1+y_0'^2)^3}{y_0''^2} \quad (1)$$

又 $PM \perp MT$, 所以

$$y_0' = -\frac{x_0 - \xi}{y_0 - \eta} \quad (2)$$

由 (1) 式和 (2) 式解得

$$(y_0 - \eta)^2 = \frac{(1+y_0'^2)^2}{y_0''^2}$$

由于 $y'' > 0$, 则曲线 L 是凹的, 故 $y_0 - \eta < 0$, 从而 $y_0 - \eta = -\frac{1+y_0'^2}{y_0''}$.

又 $x_0 - \xi = -y_0'(y_0 - \eta) = \frac{y_0'(1+y_0'^2)}{y_0''}$, 于是

$$\begin{cases} \xi = x_0 - \frac{y_0'(1+y_0'^2)}{y_0''} \\ \eta = y_0 + \frac{(1+y_0'^2)}{y_0''} \end{cases}.$$

94 (1998, (5) 题, 3 分) 曲线 $y = x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$ ($x > 0$) 的渐近线方程为_____.

【答案】 $y = x + \frac{1}{e}$.

【解析】 (方法一) 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(e + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{e + \frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = 0$

所以, 无铅直渐近线.

又 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(e + \frac{1}{x}\right) = \ln e = 1 = a$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right) - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\ln\left(e + \frac{1}{x}\right) - \ln e \right]$$

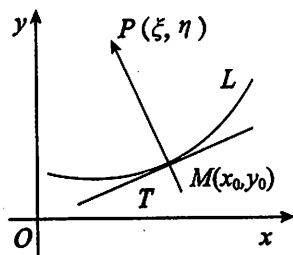


图 3

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{ex} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(\frac{1}{ex} \right) = \frac{1}{e} = b$$

则该曲线有斜渐近线 $y = x + \frac{1}{e}$.

$$\begin{aligned} (\text{方法二}) \quad y &= x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right) = x \left[\ln e + \ln \left(1 + \frac{1}{ex} \right) \right] = x + x \ln \left(1 + \frac{1}{ex} \right) \\ &= x + x \cdot \frac{1}{ex} + x \cdot o \left(\frac{1}{x} \right) = x + \frac{1}{e} + x \cdot o \left(\frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

故该曲线有斜渐近线 $y = x + \frac{1}{e}$.

【评注】 方法二中用到求斜渐近线的一个结论:若 $f(x) = ax + b + o(x)$, 其中 $\lim_{x \rightarrow \infty} o(x) = 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 有斜渐近线 $y = ax + b$.

95 (1999, 七题, 8分) 已知函数 $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$, 求

- (1) 函数的增减区间及极值;
- (2) 函数图形的凹凸区间及拐点;
- (3) 函数图形的渐近线.

【解】 函数定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

$$y' = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得驻点 } x = 0 \text{ 及 } x = 3.$$

$$y'' = \frac{6x}{(x-1)^4}, \text{ 令 } y'' = 0, \text{ 得 } x = 0, \text{ 列表如下.}$$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	+	0	+	-	0	+
y''	-	0	+	+	+	+
y		拐点			极小值	

由此可知

- (1) 函数的单调增加区间为 $(-\infty, 1)$ 和 $(3, +\infty)$, 单调减少区间为 $(1, 3)$, 极小值为 $y|_{x=3} = \frac{27}{4}$.
- (2) 函数图形在区间 $(-\infty, 0)$ 内是凸的, 在区间 $(0, 1), (1, +\infty)$ 内是凹的, 拐点为 $(0, 0)$.
- (3) 由 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$, 则 $x = 1$ 是函数图形的铅直渐近线.

又

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [y - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^3}{(x-1)^2} - x \right] = 2$$

故 $y = x + 2$ 是函数图形的斜渐近线.

96 (2000, 一(4)题, 3分) 曲线 $y = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线方程为_____.

【答案】 $y = 2x + 1$.

【解析】 (方法一) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} = 2 = a$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} [y - ax] &= \lim_{x \rightarrow \infty} [(2x - 1)e^{\frac{1}{x}} - 2x] \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} 2x(e^{\frac{1}{x}} - 1) - \lim_{x \rightarrow \infty} 2x \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} 2x \left(\frac{1}{x}\right) - 1 = 2 - 1 = 1 = b\end{aligned}$$

则该曲线的斜渐近线方程为 $y = 2x + 1$.

(方法二) 由于当 $x \rightarrow \infty$ 时, $e^{\frac{1}{x}} - 1 \sim \frac{1}{x}$, 则

$$e^{\frac{1}{x}} - 1 = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \text{ 即 } e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

从而有

$$\begin{aligned}y &= (2x - 1)e^{\frac{1}{x}} = (2x - 1) \left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\&= 2x + 1 + 2x \cdot o\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

其中当 $x \rightarrow \infty$ 时, $2x \cdot o\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow 0$, 则所求斜渐近线为 $y = 2x + 1$.

97 (2000, 二(2) 题, 3 分) 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$, 且 $f'(0) = 0$, 则

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) 点 $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, 点 $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

【答案】 C.

【解析】 由 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$, 又 $f'(0) = 0$, 则

$$f''(0) + [f'(0)]^2 = 0$$

从而有 $f''(0) = 0$.

等式 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$ 两端对 x 求导得

$$f'''(x) + 2f'(x)f''(x) = 1$$

上式中令 $x = 0$, 得 $f'''(0) = 1 \neq 0$,

则 $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点, 故应选 (C).

【评注】 为什么等式 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$ 两端可以再对 x 求导呢? 这是由于 $f''(x) = x - [f'(x)]^2$, 由题设知这个等式右端可导, 从而左端也可导.

98 (2001, 二(3) 题, 3 分) 曲线 $y = (x-1)^2(x-3)^2$ 的拐点个数为

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

【答案】 C.

【解析】 由 $y = (x-1)^2(x-3)^2$ 知

$$y' = 2(x-1)(x-3)^2 + 2(x-1)^2(x-3) = 4(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$y'' = 4[(x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-1)(x-2)]$$

$$= 4[3x^2 - 12x + 11]$$

$$y''' = 24(x-2)$$

令 $y'' = 0$, 得 $3x^2 - 12x + 11 = 0$, 其中 $\Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \cdot 3 \cdot 11 = 12 > 0$. 所以 $y'' = 0$ 有两个不等实根, 设其分别为 x_1 和 x_2 , 又 $y''(2) = -4 \neq 0$, 则 $x_1 \neq 2, x_2 \neq 2$, 则

$$y'''(x_1) \neq 0, y'''(x_2) \neq 0$$

故原曲线有两个拐点.

99 (2004, 2 题, 4 分) 设函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = t^3 - 3t + 1 \end{cases}$ 确定, 则曲线 $y = y(x)$ 向上凸的 x 取值范围为_____.

【答案】 $(-\infty, 1)$ 或 $(-\infty, 1]$.

【解析】

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 - 3}{3t^2 + 3} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{4t}{3(t^2 + 1)^3}$$

由 $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ 知, $t < 0$. 又 $x'(t) = 3t^2 + 3 > 0$, 则 $x(t)$ 为定义上的单调增加函数, $t = 0$ 时, $x = 1$.

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (t^3 + 3t + 1) = -\infty$$

故 x 的取值范围为 $(-\infty, 1)$ 或 $(-\infty, 1]$.

100 (2004, 8 题, 4 分) 设 $f(x) = |x(1-x)|$, 则

(A) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0, 0)$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(B) $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0, 0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(C) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 且 $(0, 0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(D) $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(0, 0)$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

【答案】 C.

【解析】 (方法一) 令 $\varphi(x) = x(x-1)$, 则 $y = \varphi(x) = x(x-1)$ 是与 x 轴相交于 $x_1 = 0$ 和 $x_2 = 1$, 开口向上的抛物线(如图 4). 而 $y = |x(1-x)| = |\varphi(x)|$. 如图 5, 由图不难看出, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点, $(0, f(0))$ 也是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

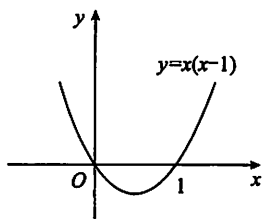


图 4

$$(方法二) f(x) = |x(1-x)| = \begin{cases} x^2 - x, & x < 0, x > 1 \\ x - x^2, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

则

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 0, x > 1 \\ 1 - 2x, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 2, & x < 0, x > 1 \\ -2, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 且在 $x = 0$ 两侧 $f'(x)$ 变号, 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点; 在 $x = 0$ 两侧 $f''(x)$ 变号, 则 $(0, f(0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

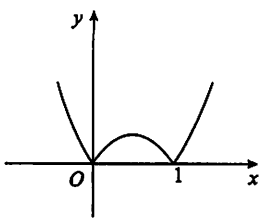


图 5

101 (2005, 2 题, 4 分) 曲线 $y = \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为_____.

【答案】 $y = x + \frac{3}{2}$.

【解析】 因为 $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} = 1$,

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{3}{2} \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} \quad (\text{等价无穷小代换}) \\
 &= \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

故斜渐近线方程为 $y = x + \frac{3}{2}$.

【评注】 本题属基本题,主要考查斜渐近线的概念和求法.典型的错误是部分考生求出 a 后, b 却没求对,问题的关键是求极限的基本功不够扎实;还有考生粗心大意,填 $x + \frac{3}{2}$,而漏掉“ $y =$ ”.本题得分较低.

102 (2006, 1 题, 4 分) 曲线 $y = \frac{x + 4\sin x}{5x - 2\cos x}$ 的水平渐近线方程为_____.

【答案】 $y = \frac{1}{5}$.

【解析】 由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 4\sin x}{5x - 2\cos x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{4\sin x}{x}}{5 - \frac{2\cos x}{x}} = \frac{1}{5}$, 其中 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x} = 0$, 都是无穷小量与有界变量之积.

故曲线的水平渐近线方程为 $y = \frac{1}{5}$.

【评注】 本题求解中的极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 4\sin x}{5x - 2\cos x}$ 虽然是“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”,但不能用洛必达法则,原因是分子分母分别求导数以后的极限不存在.

103 (2006, 7 题, 4 分) 设函数 $y = f(x)$ 具有二阶导数,且 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量, Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分,若 $\Delta x > 0$, 则

(A) $0 < dy < \Delta y$.

(B) $0 < \Delta y < dy$.

(C) $\Delta y < dy < 0$.

(D) $dy < \Delta y < 0$.

【答案】 A.

【解析】 (方法一) 由题设条件知, $y = f(x)$ 单调增加且是凹的,再由 $\Delta y, dy$ 的几何意义,如图所示,有 $0 < dy < \Delta y$.

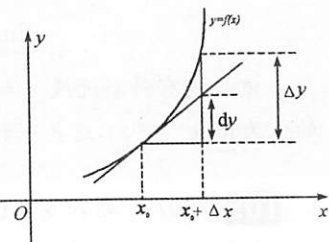
故应选(A).

(方法二) 排除法:取 $f(x) = x^2, x \in (0, +\infty)$,显然满足题设条件,取 $x_0 = 1$, 则

$$dy = f'(x_0)dx = 2dx = 2\Delta x,$$

$$\begin{aligned}
 \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (1 + \Delta x)^2 - 1^2 \\
 &= \Delta x(2 + \Delta x) = 2\Delta x + (\Delta x)^2
 \end{aligned}$$

由于 $\Delta x > 0$, 则 $0 < dy < \Delta y$.



排除(B)(C)(D),故应选(A).

(方法三) 由 $f'(x) > 0, \Delta x > 0$ 知

$$dy = f'(x_0)\Delta x > 0$$

又 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(c)\Delta x, (x_0 < c < x_0 + \Delta x),$

由于 $f''(x) > 0$, 则 $f'(x)$ 单调增加, $f'(c) > f'(x_0)$, 从而有

$$f'(x_0)\Delta x < f'(c)\Delta x$$

故 $0 < dy < \Delta y$.

104 (2007, 5 题, 4 分) 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 渐近线的条数为

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

【答案】 D.

【解析】 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) \right] = \infty$, 则 $x = 0$ 为曲线的铅直渐近线;

由于 $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) \right] = 0$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$) 则 $y = 0$ 为曲线的水平渐近线;

由于 $-\infty$ 一侧已有水平渐近线, 则斜渐近线只可能出现在 $+\infty$ 一侧, 又

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x^2} + \frac{\ln(1 + e^x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) - x \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) - \ln e^x \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) \right] = 0,$$

则曲线有斜渐近线 $y = x$, 故该曲线有三条渐近线, 应选(D).

【评注】 本题是一道基本题, 但得分率很低, 难度系数为 0.220. 其主要原因是很多考生选择了(C), 少了一条渐近线. 原因可能是考生认为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) \right] = \infty$$

则该曲线没有水平渐近线, 又

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{x^2} + \frac{\ln(1 + e^x)}{x} \right] = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (y - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) - \ln e^x \right] = 0.$$

该曲线有斜渐近线 $y = x$, 这样就少了一条水平渐近线, 选择了(C). 其问题的关键是考生错误的认为 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$, 这是一种“经典”的错误. 正确的是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, 但 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

105 (2007, 6 题, 4 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $f''(x) > 0$, 令 $u_n = f(n)$ ($n = 1, 2, \dots$), 则下列结论正确的是

(A) 若 $u_1 > u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛.

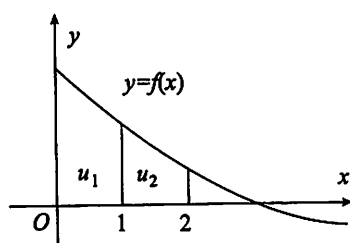
(B) 若 $u_1 > u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散.

(C) 若 $u_1 < u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛.

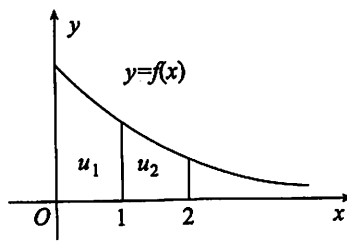
(D) 若 $u_1 < u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散.

【答案】 D.

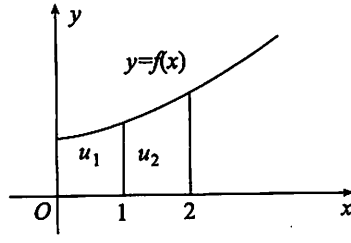
【解析】 (方法一) 图示法: 由 $f''(x) > 0$, 知, 曲线 $y = f(x)$ 是凹的,



1



2



3

显然,图 1 排除选项(A),其中 $u_n = f(n) \rightarrow -\infty$;图 2 排除选项(B),其中 $u_n = f(n) \rightarrow 0$;图 3 排除选项(C),其中 $u_n = f(n) \rightarrow +\infty$.

故应选(D).

(方法二) 排除法,取 $f(x) = (x-2)^2$,显然在 $(0, +\infty)$, $f''(x) = 2 > 0$, $f(1) = 1 > f(2) = 0$,但 $u_n = f(n) = (n-2)^2 \rightarrow +\infty$,排除(A).

取 $f(x) = \frac{1}{x}$,在 $(0, +\infty)$ 上, $f''(x) > 0$,且 $f(1) = 1 > f(2) = \frac{1}{2}$,但 $u_n = f(n) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$,排除(B).

取 $f(x) = e^x$,在 $(0, +\infty)$ 上, $f''(x) = e^x > 0$,且 $f(1) = e < f(2) = e^2$,但 $u_n = f(n) = e^n \rightarrow +\infty$,排除(C),故应选(D).

(方法三) 直接法,直接证明(D) 正确.

由拉格朗日中值定理知

$$u_2 - u_1 = f(2) - f(1) = f'(c) > 0, (1 < c < 2)$$

当 $n > 2$ 时,

$$\begin{aligned} f(n) &= f(n) - f(2) + f(2) \\ &= f'(\xi)(n-2) + f(2) \quad (2 < \xi < n) \end{aligned}$$

由于 $f''(x) > 0$,且 $\xi > c$,则 $f'(\xi) > f'(c) > 0$,从而有

$$f(n) > f'(c)(n-2) + f(2) \rightarrow +\infty$$

则有 $u_n = f(n) \rightarrow +\infty$.

【评注】 本题显然是图示法和排除法比较简单.由于大部分考生对这两种方法不熟悉,而证明(D) 正确又有一定难度,部分考生只能猜答案,准确率较低.

1106 (2008,12 题,4 分) 曲线 $y = (x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点坐标为_____.

【答案】 $(-1, -6)$.

【解析】 本题主要考查拐点的概念和判定及导数计算,拐点只可能在两种点上出现,二阶导数为零的点和二阶导数不存在的点.

$$\begin{aligned} y &= x^{\frac{5}{3}} - 5x^{\frac{2}{3}} \\ y' &= \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}} \\ y'' &= \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{10(x+1)}{9\sqrt[3]{x^4}} \end{aligned}$$

显然 $y''(-1) = 0$, $y''(0)$ 不存在,由 y'' 的表达式可知在 $x = -1$ 两侧 y'' 变号,而在 $x = 0$ 两侧 y'' 不变号,则 $(-1, -6)$ 为拐点.

【评注】 部分考生计算错误,答案不对;也有不少考生填 $x = -1$,这是一种典型的错误,拐点是曲线上的点,要用两个坐标来表示,即 $(-1, -6)$,而 $x = -1$ 是 x 轴上的点.

六、证明函数不等式

107 (1990, 五题, 9分) 证明: 当 $x > 0$ 时, 有不等式 $\arctan x + \frac{1}{x} > \frac{\pi}{2}$.

【证明】 令 $f(x) = \arctan x + \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$, 则 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} < 0$.

则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调减, 又

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\arctan x + \frac{1}{x} \right) = \frac{\pi}{2}$$

则当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) > \frac{\pi}{2}$. 即当 $x > 0$ 时

$$\arctan x + \frac{1}{x} > \frac{\pi}{2}$$

108 (1991, 四题, 9分) 利用导数证明: 当 $x > 1$ 时, 有不等式 $\frac{\ln(1+x)}{\ln x} > \frac{x}{1+x}$.

【证明】 证明 $\frac{\ln(1+x)}{\ln x} > \frac{x}{1+x}$ 等价于证明 $(1+x)\ln(1+x) > x\ln x$.

因此, 令 $f(x) = x\ln x$, 只要证明当 $x > 1$ 时 $f(x)$ 单调增, 由于

$$f'(x) = \ln x + 1 > 0 \quad (x > 1)$$

则 $f(x)$ 单调增, $f(x+1) > f(x)$, 即

$$(1+x)\ln(1+x) > x\ln x$$

原题得证.

109 (1993, 七题, 9分) 设 $x > 0$, 常数 $a > e$. 证明: $(a+x)^a < a^{a+x}$.

【证明】 因为 $y = \ln x$ 是单调增函数, 所以欲证 $(a+x)^a < a^{a+x}$, 只须证

$$a\ln(a+x) < (a+x)\ln a$$

设 $f(x) = (a+x)\ln a - a\ln(a+x)$, 则

$$f'(x) = \ln a - \frac{a}{a+x}$$

又 $\ln a > \ln e = 1, \frac{a}{a+x} < 1$, 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调增,

又 $f(0) = 0$, 则当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$,

即 $a\ln(a+x) < (a+x)\ln a$,

故 $(a+x)^a < a^{a+x}$.

110 (1998, 十一题, 8分) 设 $x \in (0, 1)$, 证明:

$$(1)(1+x)\ln^2(1+x) < x^2;$$

$$(2) \frac{1}{\ln 2} - 1 < \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} < \frac{1}{2}.$$

【证明】 (1) 令 $\varphi(x) = (1+x)\ln^2(1+x) - x^2$, 则有 $\varphi(0) = 0$,

$$\varphi'(x) = \ln^2(1+x) + 2\ln(1+x) - 2x, \varphi'(0) = 0$$

$$\varphi''(x) = \frac{2}{1+x}[\ln(1+x) - x] < 0$$

所以, $\varphi'(x) < 0$, 从而 $\varphi(x) < 0$, 即 $(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$.

(2) 令 $f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}, x \in (0, 1]$, 则有

$$f'(x) = \frac{(1+x)\ln^2(1+x) - x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}$$

由(1)知, $f'(x) < 0, (x \in (0, 1))$, 于是 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调减. 又 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上连续, 且

$$f(1) = \frac{1}{\ln 2} - 1, \text{ 又}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

则当 $x \in (0, 1)$ 时, $\frac{1}{\ln 2} - 1 < \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$.

111 (2001, 二(4)题, 3分) 已知函数 $f(x)$ 在区间 $(1-\delta, 1+\delta)$ 内具有二阶导数, $f'(x)$ 严格单调减少, 且 $f(1) = f'(1) = 1$, 则

(A) 在 $(1-\delta, 1)$ 和 $(1, 1+\delta)$ 内均有 $f(x) < x$.

(B) 在 $(1-\delta, 1)$ 和 $(1, 1+\delta)$ 内均有 $f(x) > x$.

(C) 在 $(1-\delta, 1)$ 内, $f(x) < x$, 在 $(1, 1+\delta)$ 内, $f(x) > x$.

(D) 在 $(1-\delta, 1)$ 内, $f(x) > x$, 在 $(1, 1+\delta)$ 内, $f(x) < x$.

【答案】 A.

【解析】 (方法一) 令 $F(x) = f(x) - x, x \in (1-\delta, 1+\delta)$, 则

$$F'(x) = f'(x) - 1, F'(1) = f'(1) - 1 = 0, F(1) = 0$$

又 $f'(x)$ 严格单调减少, 则

当 $x \in (1-\delta, 1)$ 时, $F'(x) > 0$, 则 $F(x)$ 单调增, 又 $F(1) = 0$, 则 $F(x) < 0$, 即 $f(x) < x$;

当 $x \in (1, 1+\delta)$ 时, $F'(x) < 0$, 则 $F(x)$ 单调减, 又 $F(1) = 0$, 则 $F(x) < 0$, 即 $f(x) < x$, 故选(A).

(方法二) 由于 $f(x)$ 二阶可导, 且 $f'(x)$ 严格单调减少, 则 $f''(x) \leq 0$, 从而曲线 $y = f(x)$ 在区间 $(1-\delta, 1+\delta)$ 上是凸的, 因此, 在区间 $(1-\delta, 1+\delta)$ 上的曲线 $y = f(x)$ 位于曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 1)$ 处切线下方, 而该切线方程为 $y - 1 = (x - 1)$, 即 $y = x$, 从而在 $(1-\delta, 1)$ 和 $(1, 1+\delta)$ 内 $f(x) < x$.

(方法三) 排除法: 令 $f(x) = -(x-1)^2 + x$, 则 $f''(x) = -2 < 0$,

从而 $f'(x)$ 严格单调减少, 且 $f'(1) = f(1) = 1$, 显然, 在 $(1-\delta, 1)$ 和 $(1, 1+\delta)$ 内均有 $f(x) < x$, 则排除(B)(C)(D)选项, 故应选(A).

112 (2002, 九题, 8分) 设 $0 < a < b$, 证明不等式

$$\frac{2a}{a^2 + b^2} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

【证明】 先证左边不等式, 由拉格朗日中值定理知, 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} = \frac{1}{\xi} > \frac{1}{b}$$

由于 $a^2 + b^2 > 2ab$, 所以 $\frac{1}{b} > \frac{2a}{a^2 + b^2}$, 从而有

$$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} > \frac{2a}{a^2 + b^2}$$

再证右边不等式, 设 $f(x) = \ln x - \ln a - \frac{x-a}{\sqrt{ax}}$ ($x > a > 0$).

因为

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{a}{2x\sqrt{x}} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{ax} - x - a}{2x\sqrt{ax}} \\ &= -\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})^2}{2x\sqrt{ax}} < 0 \end{aligned}$$

故当 $x > a$ 时, $f(x)$ 单调减, 又 $f(a) = 0$, 所以, 当 $x > a$ 时, $f(x) < f(a) = 0$, 即

$$\ln x - \ln a < \frac{x-a}{\sqrt{ax}}$$

特别地, 当 $x = b > a$ 时, 有 $\ln b - \ln a < \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$

即

$$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

113 (2004, 19 题, 12 分) 设 $e < a < b < e^2$, 证明 $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$.

【证明】(方法一) 对函数 $\ln^2 x$ 在区间 $[a, b]$ 上应用拉格朗日中值定理, 得

$$\ln^2 b - \ln^2 a = \frac{2\ln \xi}{\xi}(b-a) \quad (e < a < \xi < b < e^2)$$

设 $f(t) = \frac{\ln t}{t}$, 则 $f'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2}$.

当 $t > e$ 时, $f'(t) < 0$, 故 $f(t)$ 单调减少, 所以 $f(\xi) > f(b) > f(e^2)$, 即

$$\frac{\ln \xi}{\xi} > \frac{\ln e^2}{e^2} = \frac{2}{e^2}$$

$$\ln^2 b - \ln^2 a = \frac{2\ln \xi}{\xi}(b-a) > \frac{4}{e^2}(b-a)$$

(方法二) 设 $f(x) = \ln^2 x - \frac{4}{e^2}x$, 则

$$f'(x) = \frac{2}{x} \ln x - \frac{4}{e^2}, f''(x) = 2 \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

当 $x > e$ 时, $f''(x) < 0$, $f'(x)$ 单调减少, 所以当 $e < x < e^2$ 时,

$$f'(x) > f'(e^2) = \frac{4}{e^2} - \frac{4}{e^2} = 0$$

即当 $e < a < b < e^2$ 时, $f(b) > f(a)$, 即

$$\ln^2 b - \frac{4}{e^2}b > \ln^2 a - \frac{4}{e^2}a$$

故 $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$.

114 (2006, 19 题, 10 分) 证明: 当 $0 < a < b < \pi$ 时,

$$b \sin b + 2 \cos b + \pi b > a \sin a + 2 \cos a + \pi a$$

【分析】 若令 $f(x) = x \sin x + 2 \cos x + \pi x$, 则本题要证的不等式为 $f(b) > f(a)$. 一种证明思路是证明 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调增, 另一种证明思路是利用拉格朗日中值定理证明 $f(b) - f(a) > 0$.

【证明】 (方法一) 设 $f(x) = x \sin x + 2 \cos x + \pi x, x \in [0, \pi]$, 则

$$f'(x) = \sin x + x \cos x - 2 \sin x + \pi = x \cos x - \sin x + \pi$$

$$f''(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x < 0, x \in (0, \pi)$$

则 $f'(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调减少, 从而有

$$f'(x) > f'(\pi) = 0, x \in (0, \pi)$$

因此, $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调增加, 当 $0 < a < b < \pi$ 时,

$$f(b) > f(a)$$

即 $b \sin b + 2 \cos b + \pi b > a \sin a + 2 \cos a + \pi a$.

(方法二) 令 $\varphi(x) = x \sin x + 2 \cos x, x \in [0, \pi]$.

在 $[a, b]$ 上对 $\varphi(x)$ 用拉格朗日中值定理得

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)(b - a), c \in (a, b) \subset (0, \pi)$$

即

$$b \sin b + 2 \cos b - a \sin a - 2 \cos a = (c \cos c - \sin c)(b - a)$$

令 $g(x) = x \cos x - \sin x, x \in [0, \pi]$, 则

$$g'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x < 0, x \in (0, \pi)$$

$g(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调减少, 则

$$g(c) = c \cos c - \sin c > g(\pi) = -\pi$$

从而有 $b \sin b + 2 \cos b - a \sin a - 2 \cos a > -\pi(b - a)$, 即

$$b \sin b + 2 \cos b + \pi b > a \sin a + 2 \cos a + \pi a$$

【评注】 本题方法一是利用单调性证明不等式, 方法二是利用拉格朗日中值定理证明不等式, 这是证明函数不等式最常用的两种方法.

七、方程根的存在性与个数

115 (1989, 三(2) 题, 3 分) 若 $3a^2 - 5b < 0$, 则方程 $x^5 + 2ax^3 + 3bx + 4c = 0$

(A) 无实根.

(B) 有唯一实根.

(C) 有三个不同实根.

(D) 有五个不同实根.

【答案】 B.

【解析】 令 $f(x) = x^5 + 2ax^3 + 3bx + 4c$

由于 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 则方程

$$x^5 + 2ax^3 + 3bx + 4c = 0$$

至少有一个实根, 又

$$f'(x) = 5x^4 + 6ax^2 + 3b$$

$$(6a)^2 - 4 \times 5 \times 3b = 36a^2 - 60b = 12(3a^2 - 5b) < 0$$

则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调增, 综上所述, 方程

$$x^5 + 2ax^3 + 3bx + 4c = 0$$

有且仅有一个实根, 故选(B).

1116 (1989, 六题, 7分) 证明方程 $\ln x = \frac{x}{e} - \int_0^x \sqrt{1 - \cos 2x} dx$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内有且仅有两个不同的实根.

【证明】 $\int_0^x \sqrt{1 - \cos 2x} dx = \int_0^x \sqrt{2\sin^2 x} dx = \sqrt{2} \int_0^x \sin x dx = 2\sqrt{2}.$

令 $f(x) = \frac{x}{e} - \ln x - 2\sqrt{2},$

$f'(x) = \frac{1}{e} - \frac{1}{x},$ 令 $f'(x) = 0,$ 得 $x = e.$

当 $0 < x < e$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减; 当 $e < x < +\infty$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增. 则 $f(x)$ 在区间 $(0, e)$ 和 $(e, +\infty)$ 内分别至多有一个零点, 即原方程至多两个实根.

又 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, f(e) = -2\sqrt{2} < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

则 $f(x)$ 在区间 $(0, e)$ 和 $(e, +\infty)$ 上分别至少有一个零点. 综上所述, 方程

$$\ln x = \frac{x}{e} - \int_0^x \sqrt{1 - \cos 2x} dx$$

在区间 $(0, +\infty)$ 内有且仅有两个实根.

1117 (1993, 二(4)题, 3分) 设常数 $k > 0$, 函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点个数

为 (A)3.

(B)2.

(C)1.

(D)0.

【答案】 B.

【解析】 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e},$ 令 $f'(x) = 0,$ 得 $x = e,$ 则

当 $x \in (0, e)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调增, $f(x)$ 在该区间最多一个零点;

当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调减, $f(x)$ 在该区间最多一个零点.

又 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - \frac{x}{e} + k) = -\infty$

$$f(e) = k > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - \frac{x}{e} - k) = -\infty$$

则 $f(x)$ 在区间 $(0, e)$ 和 $(e, +\infty)$ 分别至少有一个零点, 综上所述, $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且仅有两个零点, 故应选(B).

1118 (1994, 四题, 9分) 设当 $x > 0$ 时, 方程 $kx + \frac{1}{x^2} = 1$ 有且仅有一个解, 求 k 的取值范围.

【解】 当 $x > 0$ 时, 方程 $kx + \frac{1}{x^2} = 1$ 与方程 $k = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}$ 同解, 令 $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}$, 则方程 $k = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}$ 的根在几何上就是曲线 $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}$ 与直线 $y = k$ 的交点处的 x 坐标.

$$y' = -\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} = \frac{3-x^2}{x^4}$$

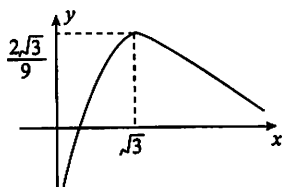
令 $y' = 0$ 得 $x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3}$ (舍去), 则

当 $x \in (0, \sqrt{3})$ 时, $y' > 0, y(x)$ 单调增,

当 $x \in (\sqrt{3}, +\infty)$ 时, $y' < 0, y(x)$ 单调减.

又 $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) = -\infty, y(\sqrt{3}) = \frac{2}{3^{3/2}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$, 则曲线

$y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}$ 如右图, 由右图不难看出要使曲线 $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}$ 与直线 $y = k$



有且仅有一个交点, 则 $k = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ 或 $k \leq 0$.

119 (1996, 二(4) 题, 3 分) 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内, 方程 $|x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x = 0$

(A) 无实根.

(B) 有且仅有一个实根.

(C) 有且仅有两个实根.

(D) 有无穷多个实根.

【答案】 C.

【解析】 令 $f(x) = |x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x$, 显然 $f(x)$ 是偶函数, 又 $f(0) = -1 < 0$, 只要考查 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上零点个数即可.

当 $x \in (0, +\infty)$ 时,

$$f(x) = x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{2}} - \cos x$$

$f(0) = -1 < 0, f(1) = 2 - \cos 1 > 0$. 又

$$f'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \sin x > 0, \quad x \in (0, 1)$$

则 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有且仅有一个零点.

当 $x > 1$ 时,

$$f(x) = x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{2}} - \cos x > 2 - \cos x > 0$$

故 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有且仅有一个零点, 原方程有且仅有两个实根.

120 (1997, 八题, 8 分) 就 k 的不同取值情况, 确定方程 $x - \frac{\pi}{2} \sin x = k$ 在开区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内根的个数, 并证明你的结论.

【解】 令 $f(x) = x - \frac{\pi}{2} \sin x$, 则 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上连续.

由 $f'(x) = 1 - \frac{\pi}{2} \cos x = 0$, 得 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 有唯一驻点 $x_0 = \arccos \frac{2}{\pi}$.

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调减.

当 $x \in (x_0, \frac{\pi}{2})$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调增.

又 $f(x_0) = x_0 - \frac{\pi}{2} \sin x_0 = y_0, f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$

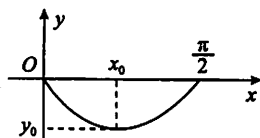
则 $y = f(x), x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 的图形如右图.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

当 $y_0 < k < 0$ 时,原方程在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 有两个不同实根.

当 $k = y_0$ 时,原方程在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 有唯一实根.

当 $k \geq 0$ 或 $k < y_0$ 时,原方程在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内无实根.



121 (2003, 七题, 12 分) 讨论曲线 $y = 4\ln x + k$ 与 $y = 4x + \ln^4 x$ 的交点个数.

【解】 (方法一) 问题等价于讨论方程 $\ln^4 x - 4\ln x + 4x - k = 0$ 有几个不同的实根.

设 $\varphi(x) = \ln^4 x - 4\ln x + 4x - k$, 则

$$\varphi'(x) = \frac{4}{x} \ln^3 x - \frac{4}{x} + 4 = \frac{4}{x} (\ln^3 x - 1 + x)$$

令 $\varphi'(x) = 0$ 得驻点 $x = 1$.

当 $0 < x < 1$ 时, $\varphi'(x) < 0$, $\varphi(x)$ 单调减少; 当 $x > 1$ 时, $\varphi'(x) > 0$, $\varphi(x)$ 单调增, 故 $\varphi(1) = 4 - k$ 为 $\varphi(x)$ 最小值.

当 $k < 4$ 时, $\varphi(x) = 0$ 无实根, 即两条曲线无交点.

当 $k = 4$ 时, $\varphi(x) = 0$ 有唯一实根, 即两曲线只有一个交点.

当 $k > 4$ 时, 即 $4 - k < 0$, 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln x (\ln^3 x - 4) + 4x - k] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln x (\ln^3 x - 4) + 4x - k] = +\infty$$

故 $\varphi(x) = 0$ 有两个实根, 分别位于 $(0, 1)$ 与 $(1, +\infty)$ 内, 即两曲线有两个交点.

(方法二) 问题等价于讨论方程

$$k = 4x - 4\ln x + \ln^4 x$$

的实根个数, 令 $\ln x = t$, 则

$$k = 4e^t - 4t + t^4, t \in (-\infty, +\infty)$$

问题等价于直线 $y = k$ 和曲线 $y = 4e^t - 4t + t^4$ 交点个数, 令 $f(t) = 4e^t - 4t + t^4, t \in (-\infty, +\infty)$, 则

$$f'(t) = 4e^t - 4 + 4t^3$$

显然, $f'(0) = 0$, 又 $f(0) = 4$.

$$f''(t) = 4e^t + 12t^2 > 0$$

则 $f'(t)$ 严格单调增,

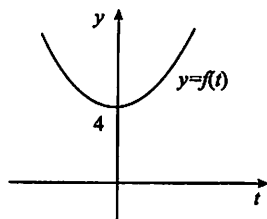
当 $t < 0$ 时, $f'(t) < 0$, $f(t)$ 单调减; 当 $t > 0$ 时, $f'(t) > 0$, $f(t)$ 单调增.

又
$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (4e^t - 4t + t^4) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (4e^t - 4t + t^4) = +\infty$$

则曲线 $y = 4e^t - 4t + t^4$ 如右图. 由图可知:

当 $k < 4$ 时, 直线 $y = k$ 与曲线 $y = 4e^t - 4t + t^4$ 无交点, 即原曲线无交点.



同理可得

当 $k = 4$ 时, 原曲线有一个交点;

当 $k > 4$ 时, 原曲线有两个交点.

122 (2008, 1 题, 4 分) 设函数 $f(x) = x^2(x-1)(x-2)$, 则 $f'(x)$ 的零点个数为

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

【答案】 D.

【解析】 由于 $f(0) = f(1) = f(2) = 0$, 则由罗尔定理可知, $f'(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 和 $(1, 2)$ 内至少各有一个零点, 又

$$f'(x) = 2x[(x-1)(x-2)] + x^2[(x-1)(x-2)]'$$

显然 $f'(0) = 0$, 则 $f'(x)$ 至少有三个零点, 由于 $f(x)$ 是四次多项式, 则 $f'(x) = 0$ 为三次方程, 最多三个实根, 故 $f'(x)$ 有且仅有三个零点.

【评注】 (1) 也可直接计算: $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2$,

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 4x = x(4x^2 - 9x + 4)$$

得 $f'(x)$ 有三个零点.

(2) 本题事实上就是方程 $f'(x) = 0$ 根的个数的问题, 本题中在说明根的存在时, 利用了罗尔定理.

八、微分中值定理有关的证明题

123 (1992, 八题, 9 分) 设 $f''(x) < 0$, $f(0) = 0$, 证明对任何 $x_1 > 0, x_2 > 0$, 有

$$f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$$

【证明】 (方法一) 对 $f(x)$ 分别在区间 $[0, x_1]$ 和 $[x_2, x_1 + x_2]$ 上用拉格朗日中值定理得 (这里不妨设 $x_1 \leq x_2$)

$$f(x_1) = f(x_1) - f(0) = f'(\xi_1)x_1, \xi_1 \in (0, x_1)$$

$$f(x_1 + x_2) - f(x_2) = f'(\xi_2)x_1, \xi_2 \in (x_2, x_1 + x_2)$$

又 $f''(x) < 0$, 则 $f'(x)$ 单调减少, 于是 $f'(\xi_2) < f'(\xi_1)$, 则

$$f(x_1 + x_2) - f(x_2) < f(x_1)$$

即 $f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$.

(方法二) 只要证明当 $x > 0$ 时, $f(x_1 + x) < f(x_1) + f(x)$.

$$\text{令 } \varphi(x) = f(x) + f(x_1) - f(x_1 + x),$$

$$\text{则 } \varphi'(x) = f'(x) - f'(x_1 + x).$$

由于 $f''(x) < 0$, 则 $f'(x_1 + x) < f'(x)$, 于是

$$\varphi'(x) > 0, (x > 0)$$

则 $\varphi(x)$ 单调增, 又 $\varphi(0) = f(x_1) - f(x_1) = 0$,

故当 $x > 0$ 时, $\varphi(x) > 0$, 原式得证.

124 (1995, 八题, 8 分) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 且 $f''(x) > 0$, 证明: $f(x) \geq x$.

【证明】 (方法一) 因为 $f(x)$ 有一阶连续导数, 所以由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ 知, $f(0) = 0$.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

令 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F(0) = 0$.

$F'(x) = f'(x) - 1$, 所以 $F'(0) = 0$, 又 $F''(x) = f''(x) > 0$ 知 $F(0)$ 是 $F(x)$ 的极小值和 $F'(x)$ 单调, 故 $F(x)$ 只有一个驻点, 从而 $F(0)$ 是 $F(x)$ 的最小值.

(方法二) 因为 $f(x)$ 有一阶连续导数, 所以由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ 知 $f(0) = 0$, 又

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

由 $f(x)$ 的泰勒公式知

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2}x^2 \\ &= x + \frac{f''(\xi)}{2}x^2 \quad (\xi \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}) \end{aligned}$$

因为 $f''(\xi) > 0$, 所以 $f(x) \geq x$.

125 (1996, 二(3) 题, 3 分) 设 $f(x)$ 处处可导, 则

- (A) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, 必有 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$. (B) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$, 必有 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
(C) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$. (D) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

【答案】 D.

【解析】 (方法一) 直接法

由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$, 则存在 $x_0 > 0$, 当 $x > x_0$ 时, $f'(x) > M$.

对 $f(x)$ 在 $[x_0, x]$ 上用拉格朗日中值定理得

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) > f(x_0) + M(x - x_0) \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow +\infty)$$

则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 故应选(D).

(方法二) 排除法:

令 $f(x) = x$, 显然(A)和(C)不正确.

令 $f(x) = e^{-x}$, 显然(B)不正确, 故应选(D).

126 (1996, 三(4) 题, 5 分) 求函数 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ 在 $x=0$ 点处带拉格朗日型余项的 n 阶泰勒展开式.

【解】 $f(x) = \frac{2}{1+x} - 1 = 2(x+1)^{-1} - 1$

则

$$f'(x) = 2(-1)(x+1)^{-2}$$

$$f''(x) = 2(-1)(-2)(x+1)^{-3}$$

一般的

$$f^{(k)}(x) = 2(-1)^k k! \frac{1}{(x+1)^{k+1}}$$

$$f^{(k)}(0) = 2(-1)^k k! \quad (1 \leq k \leq n)$$

$$\text{则 } f(x) = 1 - 2x + 2x^2 + \cdots + (-1)^n 2x^n + \frac{(-1)^{n+1} 2x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}} \quad (0 < \theta < 1).$$

127 (1996, 七题, 8 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上具有二阶导数, 且 $f(a) = f(b) = 0$, $f'(a)f'(b) > 0$, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$ 和 $\eta \in (a, b)$ 使 $f(\xi) = 0$ 及 $f''(\eta) = 0$.

【证明】 (方法一) 先用反证法证明存在 $\xi \in (a, b)$ 使 $f(\xi) = 0$. 若不存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = 0$, 则在 (a, b) 内恒有 $f(x) > 0$ 或 $f(x) < 0$. 不妨设 $f(x) > 0$, 则

$$f'(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{x-b} \leq 0$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{x-a} \geq 0$$

从而有 $f'(a)f'(b) \leq 0$, 这与题设 $f'(a)f'(b) > 0$ 相矛盾. 从而证得在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使 $f(\xi) = 0$.

再由 $f(a) = f(\xi) = f(b)$ 及罗尔定理知, 存在 $\eta_1 \in (a, \xi)$ 和 $\eta_2 \in (\xi, b)$, 使 $f'(\eta_1) = f'(\eta_2) = 0$. 又在区间 $[\eta_1, \eta_2]$ 上对 $f'(x)$ 应用罗尔定理知, 存在 $\eta \in (\eta_1, \eta_2)$, 使 $f''(\eta) = 0$. 原题得证.

(方法二) 不妨设 $f'(a) > 0, f'(b) > 0$. 即

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{x-a} > 0, \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{x-b} > 0$$

故存在 $x_1 \in (a, a+\delta_1)$ 和 $x_2 \in (b-\delta_2, b)$, 使 $f(x_1) > 0$ 及 $f(x_2) < 0$, 其中 δ_1 和 δ_2 为充分小的正数, 显然, $x_1 < x_2$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上应用零点定理知, 存在 $\xi \in (x_1, x_2)$, 使 $f(\xi) = 0$.

以下同方法一.

128 (1999, 八题, 8 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上具有三阶连续导数, 且 $f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$, 证明: 在开区间 $(-1, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f'''(\xi) = 3$.

【证明】 由麦克劳林公式得

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3$$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间, $x \in [-1, 1]$.

分别令 $x = -1$ 和 $x = 1$, 并结合已知条件得

$$0 = f(-1) = f(0) + \frac{1}{2}f''(0) - \frac{1}{6}f'''(\xi_1) \quad (-1 < \xi_1 < 0)$$

$$1 = f(1) = f(0) + \frac{1}{2}f''(0) + \frac{1}{6}f'''(\xi_2) \quad (0 < \xi_2 < 1)$$

两式相减得 $f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2) = 6$.

由 $f'''(x)$ 的连续性知, $f'''(x)$ 在闭区间 $[\xi_1, \xi_2]$ 上有最大值和最小值, 设它们分别为 M 和 m , 则有

$$m \leq \frac{1}{2}[f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)] \leq M$$

再由连续函数介值定理知, 至少存在一点 $\xi \in [\xi_1, \xi_2] \subset (-1, 1)$, 使

$$f'''(\xi) = \frac{1}{2}[f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)] = 3$$

129 (2002, 二(4) 题, 3 分) 设函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界且可导, 则

(A) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$. (B) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

(C) 当 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$. (D) 当 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.

【答案】 B.

【解析】 (方法一) 直接法: 由拉格朗日中值定理知

$$\frac{f(2x) - f(x)}{x} = f'(\xi) \quad (x < \xi < 2x)$$

又 $f(x)$ 有界, 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = 0$$

从而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(\xi) = 0$, 又 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在, 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(\xi) = 0$$

故应选(B).

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

(方法二) 排除法

取 $f(x) = \frac{\sin x^2}{x}$, 则显然 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界且可导, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x^2}{x} = 0$. 而

$$f'(x) = 2\cos x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2}$$

又 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x^2}{x^2} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2\cos x^2$ 不存在, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 不存在, 排除(A).

又 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x^2}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1$. 故排除(C)和(D).

130 (2003, 十题, 10分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 且 $f'(x)$

> 0 . 若极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在, 证明:

(1) 在 (a, b) 内 $f(x) > 0$;

(2) 在 (a, b) 内存在点 ξ , 使 $\frac{b^2 - a^2}{\int_a^b f(x) dx} = \frac{2\xi}{f(\xi)}$;

(3) 在 (a, b) 内存在与(2)中与 ξ 相异的点 η , 使 $f'(\eta)(b^2 - a^2) = \frac{2\xi}{\xi - a} \int_a^b f(x) dx$.

【证明】(1) 因为 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在, 故 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(2x-a) = 0$. 由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 从而 $f(a) = 0$, 又 $f'(x) > 0$ 知 $f(x)$ 在 (a, b) 上单调增加, 故

$$f(x) > f(a) = 0, x \in (a, b)$$

(2) 设 $F(x) = x^2, g(x) = \int_a^x f(t) dt (a \leq x \leq b)$, 则 $g'(x) = f(x) > 0 (a < x < b)$, 由柯西中值定理知, 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\begin{aligned} \frac{F(b) - F(a)}{g(b) - g(a)} &= \frac{F'(\xi)}{g'(\xi)} \\ \frac{b^2 - a^2}{\int_a^b f(x) dx} &= \frac{2\xi}{f(\xi)} \end{aligned}$$

(3) 因 $f(\xi) = f(\xi) - f(a)$, 在 $[a, \xi]$ 上应用拉格朗日中值定理, 在 (a, ξ) 内至少存在一点 η , 使 $f(\xi) = f'(\eta)(\xi - a)$

由(2)的结论得

$$\frac{b^2 - a^2}{\int_a^b f(x) dx} = \frac{2\xi}{\xi - a} \frac{1}{f'(\eta)}$$

即 $f'(\eta)(b^2 - a^2) = \frac{2\xi}{\xi - a} \int_a^b f(x) dx$.

131 (2005, 19题, 12分) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$. 证明:

(I) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$;

(II) 存在两个不同的点 $\eta, \xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\eta)f'(\xi) = 1$.

【证明】(I) 令 $F(x) = f(x) - 1 + x, x \in [0, 1]$ 由题设知, $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 又 $F(0) = f(0) - 1 = -1 < 0, F(1) = f(1) - 1 = 0$

由连续函数的零点定理知, 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $F(\xi) = 0$

即 $f(\xi) = 1 - \xi$.

(II) 在区间 $[0, \xi]$ 和 $[\xi, 1]$ 上分别对 $f(x)$ 用拉格朗日中值定理得

$$\frac{f(\xi) - f(0)}{\xi} = f'(\eta) \quad \eta \in (0, \xi)$$

$$\frac{f(1) - f(\xi)}{1 - \xi} = f'(\zeta) \quad \zeta \in (\xi, 1)$$

$$\begin{aligned} \text{此时, } f'(\eta)f'(\zeta) &= \frac{f(\xi) - f(0)}{\xi} \cdot \frac{f(1) - f(\xi)}{1 - \xi} \\ &= \frac{f(\xi)}{1 - \xi} \cdot \frac{1 - f(\xi)}{\xi} = 1. \end{aligned}$$

132 (2007, 21 题, 11 分) 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值, $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

【分析】若令 $F(x) = f(x) - g(x)$, 则本题要证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $F''(\xi) = 0$, 又 $F(a) = F(b) = 0$, 若能证明存在 $\eta \in (a, b)$, 使 $F(\eta) = 0$, 对 $F(x)$ 反复用罗尔定理可证明本题.

【证明】(方法一) 令 $F(x) = f(x) - g(x)$, 则 $F(a) = F(b) = 0$.

设 $f(x), g(x)$ 在 (a, b) 内的最大值为 M , 且分别在 $\alpha \in (a, b), \beta \in (a, b)$ 取到, 即 $f(\alpha) = M, g(\beta) = M$.

若 $\alpha = \beta$, 取 $\eta = \alpha$, 则 $F(\eta) = 0$;

若 $\alpha \neq \beta$, 则

$$F(\alpha) = f(\alpha) - g(\alpha) = M - g(\alpha) \geq 0$$

$$F(\beta) = f(\beta) - g(\beta) = f(\beta) - M \leq 0$$

此时, 由连续函数介值定理知在 α 与 β 之间至少存在点 η , 使

$$F(\eta) = 0$$

综上所述, 存在 $\eta \in (a, b)$, 使 $F(\eta) = 0$,

由罗尔定理知存在 $\xi_1 \in (a, \eta), \xi_2 \in (\eta, b)$, 使得

$$F'(\xi_1) = 0, F'(\xi_2) = 0$$

再由罗尔定理得, 存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$, 使得 $F''(\xi) = 0$, 即

$$f''(\xi) = g''(\xi)$$

(方法二) 为证明存在 $\eta \in (a, b)$ 使 $F(\eta) = 0$, 用反证法.

假设不存在 $\eta \in (a, b)$, 使 $F(\eta) = 0$, 由 $F(x)$ 的连续性知对一切 $x \in (a, b)$, $F(x)$ 恒大于零或恒小于零, 不妨设 $F(x) > 0$.

设 $g(x)$ 在 $x_0 \in (a, b)$ 取到最大值, 则

$$F(x_0) = f(x_0) - g(x_0) > 0, \text{ 即 } f(x_0) > g(x_0)$$

从而可知 $f(x)$ 在 (a, b) 上的最大值必大于 $g(x)$ 在 (a, b) 上最大值, 这与题设矛盾,

故存在 $\eta \in (a, b)$, 使 $F(\eta) = 0$.

以下同方法一.

【评注】 本题证明完全的考生并不多, 错误多种多样, 主要有

(1) 部分考生将题设“存在相等的最大值”误解为“不但最大值相等, 而且取得最大值的点也相同”即存在 $\eta \in (a, b)$, 使

$$f(\eta) = \max_{[a, b]} f(x) = g(\eta) = \max_{[a, b]} g(x)$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

这样 $f(\eta) = g(\eta)$, 证明就简单多了, 这显然是错误的.

(2) 有些考生不考虑题设条件, 直接用柯西定理(柯西定理要求某函数导数不为零). 可能是受“只要题中有两个函数的导数等式, 就用柯西中值定理”的误导.

(3) 还有考生见到题目条件中有二阶可导, 就想到用泰勒公式, 这同样是受某些参考书中的“解题套路”的影响.

133 (2008, 20 题, 11 分) (I) 证明积分中值定理: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则至少存在一个点 $\eta \in [a, b]$, 使得 $\int_a^b f(x) dx = f(\eta)(b-a)$.

(II) 若函数 $\varphi(x)$ 具有二阶导数, 且满足 $\varphi(2) > \varphi(1)$, $\varphi(2) > \int_2^3 \varphi(x) dx$, 则至少存在一个点 $\xi \in (1, 3)$, 使得 $\varphi''(\xi) < 0$.

【证明】 (I) 设 M 与 m 为连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最大值和最小值, 则

$$m \leq f(x) \leq M, x \in [a, b]$$

由定积分性质得

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

$$\text{即 } m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq M,$$

则由连续函数的介值定理, 至少存在一点 $\eta \in [a, b]$, 使得

$$f(\eta) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$$

$$\text{即 } \int_a^b f(x) dx = f(\eta)(b-a).$$

(II) 由(I)的结论可知, 存在 $\eta \in [2, 3]$, 使

$$\int_2^3 \varphi(x) dx = \varphi(\eta)(3-2) = \varphi(\eta)$$

又由 $\varphi(2) > \int_2^3 \varphi(x) dx = \varphi(\eta)$ 知, $\eta \in (2, 3]$.

对 $\varphi(x)$ 在 $[1, 2]$ 和 $[2, \eta]$ 上分别应用拉格朗日中值定理, 并注意到 $\varphi(1) < \varphi(2)$, $\varphi(\eta) < \varphi(2)$,

$$\frac{\varphi(2) - \varphi(1)}{2-1} = \varphi'(\xi_1) > 0, (1 < \xi_1 < 2)$$

$$\frac{\varphi(\eta) - \varphi(2)}{\eta-2} = \varphi'(\xi_2) < 0, (2 < \xi_2 < \eta)$$

在区间 $[\xi_1, \xi_2]$ 上对 $\varphi''(x)$ 应用拉格朗日中值定理得

$$\frac{\varphi'(\xi_2) - \varphi'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} = \varphi''(\xi) < 0, \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (1, 3)$$

第三章 一元函数积分学

本章导读

一元函数积分学是微积分的另一个主要内容. 与微分学不同, 积分是研究函数整体性质的. 其中不定积分是微分的逆运算, 定积分是一种和式的极限, 微积分基本定理和牛顿—莱布尼茨公式阐明了微分学和积分学的内在联系, 换元法和分部积分法是计算不定积分和定积分的两种主要方法, 微元法是用定积分解决几何、物理等问题的一种常用的基本方法. 一元函数积分是多元函数积分的基础.

其主要内容

- (1) 不定积分与原函数的概念, 求不定积分的两种主要方法——换元法, 分部积分法;
- (2) 定积分的概念、性质及计算方法(换元、分部), 变上限积分及其导数;
- (3) 反常积分的概念与计算;
- (4) 定积分应用(几何, 物理).

试题特点

定积分与不定积分是积分学的两个基本概念, 计算不定积分和定积分是微积分的一种基本运算, 是考研的一个重点, 定积分应用是考研试卷中应用题考的最多的一个内容.

本章常考题型

- (1) 不定积分、定积分及反常积分的计算;
- (2) 变上限积分及其应用;
- (3) 用定积分计算几何、物理量;
- (4) 一元微积分学的综合题.

考题详析

一、不定积分的计算

 (1987, 七题, 10分) 计算 $\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$, 其中 a, b 为不全为零的非负常数.

【解】 若 $a = 0, b \neq 0$, 则

$$\text{原式} = \int \frac{dx}{b^2 \cos^2 x} = \frac{1}{b^2} \tan x + C$$

若 $a \neq 0, b = 0$, 则

$$\text{原式} = \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x} = -\frac{1}{a^2} \cot x + C$$

若 $a \neq 0$, 且 $b \neq 0$, 则

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \frac{1}{a^2 \tan^2 x + b^2} dx = \int \frac{d \tan x}{a^2 \tan^2 x + b^2} \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{d(a \tan x)}{(a \tan x)^2 + b^2} = \frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{a \tan x}{b}\right) + C\end{aligned}$$

2 (1989, 二(2) 题, 4 分) 求 $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

【解】 $\int \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int \frac{d \ln x}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} + C.$

3 (1990, 二(2) 题, 3 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则 $d[\int f(x) dx]$ 等于

(A) $f(x)$.

(B) $f(x) dx$.

(C) $f(x) + C$.

(D) $f'(x) dx$.

【答案】 B.

【解析】 $d[\int f(x) dx] = d[F(x) + C] = F'(x) dx = f(x) dx$

故应选(B).

4 (1990, 三(4) 题, 5 分) 计算 $\int \frac{\ln x}{(1-x)^2} dx$.

【解】
$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{(1-x)^2} dx &= \int \ln x d \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{\ln x}{1-x} - \int \frac{dx}{x(1-x)} \\ &= \frac{\ln x}{1-x} - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{1-x} \\ &= \frac{\ln x}{1-x} - \ln x + \ln |1-x| + C \\ &= \frac{\ln x}{1-x} + \ln \frac{|1-x|}{x} + C\end{aligned}$$

5 (1991, 三(4) 题, 5 分) 求 $\int x \sin^2 x dx$.

【解】
$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int x \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int x dx - \frac{1}{4} \int x \sin 2x \\ &= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} x \sin 2x + \frac{1}{4} \int \sin 2x dx \\ &= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + C\end{aligned}$$

6 (1992, 二(5) 题, 3 分) 若 $f(x)$ 的导函数是 $\sin x$, 则 $f(x)$ 有一个原函数为

(A) $1 + \sin x$.

(B) $1 - \sin x$.

(C) $1 + \cos x$.

(D) $1 - \cos x$.

【答案】 B.

【解析】 由 $f(x)$ 的导函数是 $\sin x$, 即 $f'(x) = \sin x$, 得

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \sin x dx = -\cos x + C_1$$

所以 $f(x)$ 有原函数

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx = \int (-\cos x + C_1) dx \\ &= -\sin x + C_1 x + C_2 \end{aligned}$$

若令 $C_1 = 0, C_2 = 1$ 得 $f(x) = 1 - \sin x$. 故应选(B).

【评注】 本题也可直接验证. 由于 $(1 + \sin x)'' \neq \sin x, (1 + \cos x)'' \neq \sin x, (1 - \cos x)'' \neq \sin x$, 则选项(A)(C)(D) 都不正确, 故应选(B).

7 (1992, 三(3) 题, 5 分) 求 $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

【解析】 (方法一) 原式 $= \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx^2$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int \frac{(1+x^2) - 1}{\sqrt{1+x^2}} d(1+x^2) \\ &= \frac{1}{2} \int \sqrt{1+x^2} d(1+x^2) - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{1+x^2} + C \end{aligned}$$

(方法二) 令 $1+x^2 = t$, 则 $2x dx = dt$,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{2} \int \frac{t-1}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} \\ &= \frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} - \sqrt{t} + C = \frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{1+x^2} + C \end{aligned}$$

8 (1993, 一(4) 题, 3 分) $\int \frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C$.

【解析】 $\int \frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x^{\frac{3}{2}}} dx = - \int \frac{d \cos x}{\cos^{\frac{3}{2}} x} = 2 \cos^{-\frac{1}{2}} x + C$.

9 (1994, 一(4) 题, 3 分) $\int x^3 e^{x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{2} (x^2 - 1) e^{x^2} + C$.

【解析】 $\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int x^2 d e^{x^2} = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \int x e^{x^2} dx$

$$= \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C = \frac{1}{2} e^{x^2} (x^2 - 1) + C$$

10 (1994, 三(4) 题, 5 分) 求 $\int \frac{dx}{\sin 2x + 2 \sin x}$.

【解析】 (方法一) 原式 $= \int \frac{dx}{2 \sin x (\cos x + 1)} = \frac{1}{4} \int \frac{d(\frac{x}{2})}{\sin \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}} = \frac{1}{4} \int \frac{d \tan \frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}}$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2}} d \tan \frac{x}{2} = \frac{1}{8} \tan^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

$$\begin{aligned}
 (\text{方法二}) \quad \text{原式} &= \int \frac{dx}{2\sin x(\cos x + 1)} = \int \frac{\sin x dx}{2(1 - \cos^2 x)(\cos x + 1)} \\
 &\stackrel{\cos x = u}{=} -\frac{1}{2} \int \frac{du}{(1 - u^2)(1 + u)} \\
 &= -\frac{1}{4} \int \frac{(1 - u) + (1 + u)}{(1 - u^2)(1 + u)} du \\
 &= -\frac{1}{4} \left[\int \frac{du}{(1 + u)^2} + \int \frac{du}{1 - u^2} \right] \\
 &= -\frac{1}{4} \left[-\frac{1}{1 + u} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + u}{1 - u} \right] + C \\
 &= \frac{1}{4(1 + \cos x)} - \frac{1}{8} \ln \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} + C
 \end{aligned}$$

11 (1995, 三(3) 题, 5 分) 设 $f(x^2 - 1) = \ln \frac{x^2}{x^2 - 2}$, 且 $f[\varphi(x)] = \ln x$, 求 $\int \varphi(x) dx$.

【解】 由于 $f(x^2 - 1) = \ln \frac{(x^2 - 1) + 1}{(x^2 - 1) - 1}$, 则

$$f(x) = \ln \frac{x + 1}{x - 1}$$

又

$$f[\varphi(x)] = \ln \frac{\varphi(x) + 1}{\varphi(x) - 1} = \ln x$$

从而

$$\frac{\varphi(x) + 1}{\varphi(x) - 1} = x, \varphi(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$$

于是 $\int \varphi(x) dx = \int \frac{x + 1}{x - 1} dx = 2 \ln(x - 1) + x + C$.

12 (1996, 三(2) 题, 5 分) 求 $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$.

【解析】 (方法一) 原式 $= \int \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \tan x - \frac{1}{\cos x} + C$

$$\begin{aligned}
 (\text{方法二}) \quad \text{原式} &= \int \frac{dx}{1 + 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2} = \int \frac{\sec^2 \frac{x}{2}}{\left(1 + \tan \frac{x}{2}\right)^2} dx \\
 &= 2 \int \frac{d\left(1 + \tan \frac{x}{2}\right)}{\left(1 + \tan \frac{x}{2}\right)^2} = -\frac{2}{1 + \tan \frac{x}{2}} + C
 \end{aligned}$$

13 (1996, 四题, 8 分) 计算不定积分 $\int \frac{\arctan x}{x^2(1 + x^2)} dx$.

$$\begin{aligned}
 \text{【解析】} \quad (\text{方法一}) \quad \text{原式} &= \int \frac{\arctan x}{x^2} dx - \int \frac{\arctan x}{1 + x^2} dx \\
 &= -\int \arctan x d \frac{1}{x} - \frac{1}{2} (\arctan x)^2 \\
 &= -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{dx}{x(1 + x^2)} - \frac{1}{2} (\arctan x)^2 \\
 &= -\frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1 + x^2} + C
 \end{aligned}$$

(方法二) 令 $x = \tan t$, 则 $dx = \sec^2 t dt$.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int t(\csc^2 t - 1) dt = - \int t \cot t - \frac{1}{2} t^2 \\
 &= -t \cot t + \int \frac{\cos t}{\sin t} dt - \frac{1}{2} t^2 \\
 &= -t \cot t + \ln |\sin t| - \frac{1}{2} t^2 + C
 \end{aligned}$$

14 (1997, 一(3) 题, 3 分) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\arcsin \frac{x-2}{2} + C$ 或 $2\arcsin \frac{\sqrt{x}}{2} + C.$

【解析】 (方法一) 原式 $= \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}} = \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{4-(x-2)^2}} = \arcsin \frac{x-2}{2} + C.$

(方法二) 原式 $= \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{4-(\sqrt{x})^2})} = \int \frac{2d\sqrt{x}}{\sqrt{4-(\sqrt{x})^2}} = 2\arcsin \frac{\sqrt{x}}{2} + C.$

15 (1997, 三(3) 题, 5 分) 计算 $\int e^{2x}(\tan x + 1)^2 dx.$

【解】

$$\begin{aligned}
 \int e^{2x}(\tan x + 1)^2 dx &= \int e^{2x}(\tan^2 x + 2\tan x + 1) dx \\
 &= \int e^{2x} \sec^2 x dx + 2 \int e^{2x} \tan x dx \\
 &= \int e^{2x} d\tan x + 2 \int e^{2x} \tan x dx \\
 &= e^{2x} \tan x - 2 \int e^{2x} \tan x dx + 2 \int e^{2x} \tan x dx \\
 &= e^{2x} \tan x + C
 \end{aligned}$$

16 (1998, 一(3) 题, 3 分) $\int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $-\cot x \ln \sin x - \cot x - x + C.$

【解析】

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x} dx &= - \int \ln \sin x \cot x \\
 &= - \cot x \ln \sin x + \int \cot x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} dx \\
 &= - \cot x \ln \sin x + \int (\csc^2 x - 1) dx \\
 &= - \cot x \ln \sin x - \cot x - x + C
 \end{aligned}$$

17 (1999, 一(3) 题, 3 分) $\int \frac{x+5}{x^2-6x+13} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{1}{2} \ln(x^2 - 6x + 13) + 4\arctan \frac{x-3}{2} + C.$

【解析】

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int \frac{x-3}{x^2-6x+13} dx + \int \frac{8}{x^2-6x+13} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2-6x+13)}{x^2-6x+13} + 8 \int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2+4} \\
 &= \frac{1}{2} \ln(x^2-6x+13) + 4\arctan \frac{x-3}{2} + C
 \end{aligned}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

18 (2000, 三题, 5 分) 设 $f(\ln x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, 计算 $\int f(x) dx$.

【解】 令 $\ln x = t$, 则 $x = e^t, f(t) = \frac{\ln(1+e^t)}{e^t}$.

$$\begin{aligned}\int f(x) dx &= \int \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} dx = - \int \ln(1+e^x) de^{-x} \\ &= -e^{-x} \ln(1+e^x) + \int \frac{1}{1+e^x} dx \\ &= -e^{-x} \ln(1+e^x) + \int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right) dx \\ &= -e^{-x} \ln(1+e^x) + x - \ln(1+e^x) + C \\ &= x - (1+e^{-x}) \ln(1+e^x) + C\end{aligned}$$

19 (2001, 三题, 6 分) 求 $\int \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

【解】 令 $x = \tan t$, 则 $dx = \sec^2 t dt$.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \frac{\sec^2 t dt}{(2\tan^2 t + 1)\sec t} = \int \frac{dt}{\cos t(2\tan^2 t + 1)} \\ &= \int \frac{\cos t dt}{2\sin^2 t + \cos^2 t} = \int \frac{d\sin t}{1 + \sin^2 t} \\ &= \arctan(\sin t) + C = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) + C.\end{aligned}$$

20 (2003, 五题, 9 分) 计算不定积分 $\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx$.

【解】 (方法一) 设 $x = \tan t$, 则

$$\begin{aligned}\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx &= \int \frac{e^t \tan t}{(1+\tan^2 t)^{3/2}} \cdot \sec^2 t dt \\ &= \int e^t \sin t dt \\ &= \frac{1}{2} e^t (\sin t - \cos t) + C \\ &= \frac{1}{2} e^{\arctan x} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) + C\end{aligned}$$

(方法二)

$$\begin{aligned}\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx &= \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} de^{\arctan x} \\ &= \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx \\ &= \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} de^{\arctan x} \\ &= \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx\end{aligned}$$

移项整理得

$$\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \frac{(x-1)e^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C$$

21 (2006, 16 题, 10 分) 求 $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx$.

【解】 (方法一)
$$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx = - \int \arcsin e^x d(e^{-x})$$

$$= - \frac{\arcsin e^x}{e^x} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}},$$

令 $\sqrt{1-e^{2x}} = t$, 则 $dx = \frac{-t}{1-t^2} dt$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-t}{1+t} \right| + C$$

则
$$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx = - \frac{\arcsin e^x}{e^x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1-e^{2x}}}{1+\sqrt{1-e^{2x}}} + C.$$

计算积分 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ 还有另一方法.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \int \frac{-de^{-x}}{\sqrt{(e^{-x})^2-1}} = -\ln(e^{-x} + \sqrt{e^{-2x}-1}) + C$$

注意: 这里用了积分公式 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$.

(方法二) 令 $e^x = t$, 则 $dx = \frac{1}{t} dt$,

$$\begin{aligned} \int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx &= \int \frac{\arcsin t}{t^2} dt = - \int \arcsin t d\left(\frac{1}{t}\right) \\ &= - \frac{\arcsin t}{t} + \int \frac{dt}{t \sqrt{1-t^2}} \\ &= - \frac{\arcsin t}{t} + \int \frac{dt}{t^2 \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 - 1}} \quad (\text{本题中 } t > 0) \\ &= - \frac{\arcsin t}{t} - \int \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 - 1}} \\ &= - \frac{\arcsin t}{t} - \ln\left(\frac{1}{t} + \sqrt{\frac{1}{t^2} - 1}\right) + C \\ &= - \frac{\arcsin e^x}{e^x} - \ln(e^{-x} + \sqrt{e^{-2x}-1}) + C. \end{aligned}$$

(方法三) 令 $\arcsin e^x = t$, 则 $x = \ln \sin t$, $dx = \frac{\cos t}{\sin t} dt$.

$$\begin{aligned} \int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx &= \int \frac{t}{\sin t} \cdot \frac{\cos t}{\sin t} dt = - \int t d\left(\frac{1}{\sin t}\right) = - \frac{t}{\sin t} + \int \frac{dt}{\sin t} \\ &= - \frac{t}{\sin t} + \ln |\csc t - \cot t| + C \\ &= - \frac{\arcsin e^x}{e^x} + \ln \left| \frac{1}{e^x} - \frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{e^x} \right| + C. \end{aligned}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

【评注】 本题用到几个常用的积分公式

$$(1) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C;$$

$$(2) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C;$$

$$(3) \int \frac{dx}{\sin x} = -\ln |\csc x + \cot x| + C = \ln |\csc x - \cot x| + C.$$

二、定积分概念、性质及几何意义

22 (1987, 一(3)题, 3分) 定积分中值定理的条件是_____, 结论是_____.

【答案】 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续; 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$.

23 (1988, 二(2)题, 4分) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上皆可导, 且 $f(x) < g(x)$, 则必有

(A) $f(-x) > g(-x)$.

(B) $f'(x) < g'(x)$.

(C) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

(D) $\int_0^x f(t) dt < \int_0^x g(t) dt$.

【答案】 C.

【解析】 由于 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导, 则必连续, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$$

又

$$f(x) < g(x) \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

【评注】 由于 $f(x) < g(x), x \in (-\infty, +\infty)$, 则 $f(-x) < g(-x)$, 则(A)不正确; 若令 $f(x) = -e^{-x}, g(x) = e^{-x}$, 则对一切 x , 有 $f(x) < g(x)$, 但 $f'(x) = e^{-x}, g'(x) = -e^{-x}$, 则有 $f'(x) > g'(x)$, 从而(B)不正确. (D) 选项中加个条件 $x > 0$ 才正确.

24 (1988, 八题, 8分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有连续导数, 且 $m \leq f(x) \leq M$.

(1) 求 $\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{4a^2} \int_{-a}^a [f(t+a) - f(t-a)] dt$;

(2) 证明 $\left| \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(t) dt - f(x) \right| \leq M - m (a > 0)$.

【解】 (1) 由积分中值定理可知, 存在 $\xi \in [-a, a]$

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a [f(t+a) - f(t-a)] dt &= 2a[f(\xi+a) - f(\xi-a)] \\ &= 4a^2 f'(c) \end{aligned}$$

其中 $\xi - a < c < \xi + a$, 这里用了拉格朗日中值定理. 则

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{4a^2} \int_{-a}^a [f(t+a) - f(t-a)] dt = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{4a^2 f'(c)}{4a^2} = f'(0)$$

(2) 由于 $m \leq f(x) \leq M$, 则

$$2am \leq \int_{-a}^a f(x) dx \leq 2aM$$

$$m \leq \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(x) dx \leq M$$

$$-M \leq -f(x) \leq -m$$

$$-(M-m) \leq \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(x) dx - f(x) \leq M-m$$

$$\left| \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(x) dx - f(x) \right| \leq M-m (a > 0)$$

【25】(1990, (4) 题, 3 分) 下列两个积分大小关系式: $\int_{-2}^{-1} e^{-x^3} dx$ _____ $\int_{-2}^{-1} e^{x^3} dx$.

【答案】 >.

【解析】 当 $-2 \leq x \leq -1$ 时,

$$-x^3 > x^3$$

$$e^{-x^3} > e^{x^3}$$

则

$$\text{从而有 } \int_{-2}^{-1} e^{-x^3} dx > \int_{-2}^{-1} e^{x^3} dx.$$

【26】(1994, (5) 题, 3 分) 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} \cos^4 x dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + \cos^4 x) dx$, $P =$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin^3 x - \cos^4 x) dx, \text{ 则有}$$

$$(A) N < P < M.$$

$$(B) M < P < N.$$

$$(C) N < M < P.$$

$$(D) P < M < N.$$

【答案】 D.

【解析】 由 $\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(x) \text{ 为奇函数} \\ 2 \int_0^a f(x) dx, & \text{当 } f(x) \text{ 为偶函数} \end{cases}$ 可知

$$M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} \cos^4 x dx = 0$$

$$N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + \cos^4 x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx > 0$$

$$P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin^3 x - \cos^4 x) dx = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx < 0$$

则 $P < M < N$, 故应选(D).

【27】(1997, (2) 题, 3 分) 设在区间 $[a, b]$ 上函数 $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$. 令 $S_1 = \int_a^b f(x) dx$, $S_2 = f(b)(b-a)$, $S_3 = \frac{1}{2}[f(a) + f(b)](b-a)$, 则

$$(A) S_1 < S_2 < S_3.$$

$$(B) S_2 < S_1 < S_3.$$

$$(C) S_3 < S_1 < S_2.$$

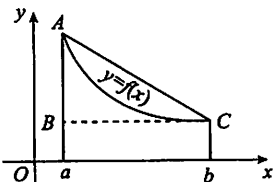
$$(D) S_2 < S_3 < S_1.$$

【答案】 B.

【解析】 由 $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$ 可知曲线 $y = f(x)$ 如图.

$S_1 = \int_a^b f(x) dx$ 为曲线 $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ 及 x 轴围成曲边梯形

面积.



$S_2 = f(b)(b-a)$ 为线段 BC 与 $x=a, x=b$ 及 x 轴所围矩形面积.

$S_3 = \frac{1}{2}[f(b)+f(a)](b-a)$ 为线段 AC 与 $x=a, x=b$ 及 x 轴围成梯形的面积. 如图易得

$$S_2 < S_1 < S_3$$

故应选(B).

28 (1997, 二(4) 题, 3 分) 设 $F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t dt$, 则 $F(x)$

(A) 为正常数.

(B) 为负常数.

(C) 恒为零.

(D) 不为常数.

【答案】 A.

【解析】 (方法一) 由于 $e^{\sin t} \sin t$ 为以 2π 为周期的函数, 则

$$I = \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t dt = \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt$$

为常数, 也可由 $\frac{d}{dx} \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t dt = e^{\sin(x+2\pi)} \sin(x+2\pi) - e^{\sin x} \sin x \equiv 0$, 则 $I \equiv C$.

$$I = I(0) = \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt = - \int_0^{2\pi} e^{\sin t} d\cos t$$

$$= -\cos t e^{\sin t} \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos^2 t e^{\sin t} dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t e^{\sin t} dt > 0$$

则 I 为正常数, 故应选(A).

29 (2002, 一(4) 题, 3 分) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{n}} + \sqrt{1 + \cos \frac{2\pi}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \cos \frac{n\pi}{n}} \right] = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$

【解析】 由定积分定义知

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \cos \frac{k\pi}{n}} \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos x} dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} dx = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sin \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \end{aligned}$$

30 (2003, 二(5) 题, 4 分) 设 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} dx, I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x} dx$, 则

(A) $I_1 > I_2 > 1$.

(B) $1 > I_1 > I_2$.

(C) $I_2 > I_1 > 1$.

(D) $1 > I_2 > I_1$.

【答案】 B.

【解析】 当 $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ 时, $x < \tan x$, 则

$$\frac{\tan x}{x} > \frac{x}{\tan x}$$

所以

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} dx > \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x} dx = I_2$$

由此可排除选项(C)和(D).

又因为当 $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ 时, $\frac{x}{\tan x} < 1$, 则

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x} dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4} < 1$$

则排除(A),故应选(B).

31 (2004, 9 题, 4 分) $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right)^2}$ 等于

- (A) $\int_1^2 \ln^2 x dx$. (B) $2 \int_1^2 \ln x dx$. (C) $2 \int_1^2 \ln(1+x) dx$. (D) $\int_1^2 \ln^2(1+x) dx$.

【答案】 B.

【解析】
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right)^2} \\ = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{n}{n}\right) \right] \\ = 2 \int_1^2 \ln x dx \end{aligned}$$

故应选(B).

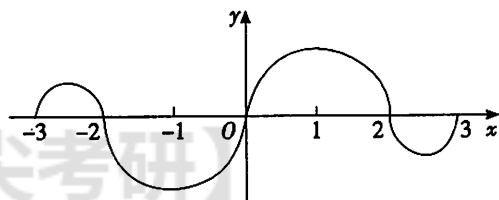
32 (2007, 3 题, 4 分) 如图所示, 连续函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-3, -2]$, $[2, 3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周, 在区间 $[-2, 0]$, $[0, 2]$ 上的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周, 设 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则下列结论正确的是

(A) $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$.

(B) $F(3) = \frac{5}{4}F(2)$.

(C) $F(-3) = \frac{3}{4}F(2)$.

(D) $F(-3) = -\frac{5}{4}F(-2)$.



【答案】 C.

【解析】 (方法一) 四个选项中出现的 $F(x)$ 在四个点上的函数值可根据定积分的几何意义确定.

$$F(3) = \int_0^3 f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt + \int_2^3 f(t) dt = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3}{8}\pi$$

$$F(2) = \int_0^2 f(t) dt = \frac{\pi}{2}$$

$$F(-2) = \int_0^{-2} f(t) dt = -\int_{-2}^0 f(t) dt = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$F(-3) = \int_0^{-3} f(t) dt = -\int_{-3}^0 f(t) dt = -\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{8}\pi$$

则 $F(-3) = \frac{3}{4}F(2)$,

故应选(C).

(方法二) 由定积分几何意义知 $F(2) > F(3) > 0$, 排除(B).

又由 $f(x)$ 的图形可知 $f(x)$ 为奇函数, 则 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 为偶函数, 从而

$$F(-3) = F(3) > 0, F(-2) = F(2) > 0$$

显然排除(A)和(D), 故选(C).

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

【评注】(1) 部分考生选(A), 可能是没注意到 $F(-2) = \int_0^{-2} f(t) dt = -\int_{-2}^0 f(t) dt = \frac{\pi}{2}$, 误以为 $F(-2) = \int_0^{-2} f(t) dt = -\frac{\pi}{2}$;

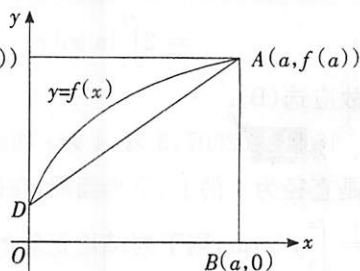
(2) 方法二简单, 这里用到一个基本结论: 设 $f(x)$ 是连续函数, 则

$$f(x) \text{ 为奇函数} \Rightarrow F(x) = \int_0^x f(t) dt \text{ 为偶函数}$$

$$f(x) \text{ 为偶函数} \Rightarrow F(x) = \int_0^x f(t) dt \text{ 为奇函数}$$

33 (2008, 2 题, 4 分) 如图所示, 曲线段的方程为 $y = f(x)$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上有连续的导数,

则定积分 $\int_0^a x f'(x) dx$ 等于



(A) 曲边梯形 ABOD 的面积.

(B) 梯形 ABOD 的面积.

(C) 曲边三角形 ACD 的面积.

(D) 三角形 ACD 的面积.

【答案】 C.

【解析】
$$\begin{aligned} \int_0^a x f'(x) dx &= \int_0^a x df(x) \\ &= x f(x) \Big|_0^a - \int_0^a f(x) dx \\ &= a f(a) - \int_0^a f(x) dx \end{aligned}$$

其中 $a f(a)$ 等于矩形 ABOD 的面积, $\int_0^a f(x) dx$ 等于曲边梯形 ABOD 的面积. 因此, $\int_0^a x f'(x) dx$ 等于曲边三角形 ACD 的面积, 故应选(C).

三、定积分计算

34 (1987, - (5) 题, 3 分) $\int f'(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$; $\int_a^b f'(2x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $f(x) + C, \frac{1}{2}[f(2b) - f(2a)]$.

【解析】
$$\begin{aligned} \int f'(x) dx &= f(x) + C \\ \int_a^b f'(2x) dx &= \frac{1}{2} \int_a^b f'(2x) d2x = \frac{1}{2} f(2x) \Big|_a^b \\ &= \frac{1}{2} [f(2b) - f(2a)] \end{aligned}$$

35 (1987, 四题, 8 分) 计算定积分 $\int_0^1 x \arcsin x dx$.

【解】 (方法一) $\int_0^1 x \arcsin x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \arcsin x dx^2$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^2}{2} \arcsin x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x^2-1)+1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx - \frac{1}{2} \arcsin x \Big|_0^1 \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

【方法二】 令 $x = \sin t$, 则 $dx = d\sin t$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x \arcsin x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t d\sin t = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t d\sin^2 t \\
&= \frac{t}{2} \sin^2 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

【评注】 本题方法一中 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx > \frac{\pi}{4}$, 这里利用了定积分几何意义.

方法二中 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$, 这里用了结论

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3}, & n \text{ 为奇数} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

36 (1988, 一(5) 题, 4 分) $\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2(e^2 + 1)$.

【解析】 $\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx \xrightarrow{\sqrt{x}=t} \int_0^2 2te^t dt = 2 \int_0^2 t de^t = 2 \left[te^t \Big|_0^2 - \int_0^2 e^t dt \right] = 2(e^2 + 1)$.

37 (1989, 一(2) 题, 3 分) $\int_0^{\pi} t \sin t dt = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 π .

【解析】 (方法一) $\int_0^{\pi} t \sin t dt = - \int_0^{\pi} t d\cos t = -t \cos t \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos t dt = \pi + \sin t \Big|_0^{\pi} = \pi$.

(方法二) $\int_0^{\pi} t \sin t dt = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin t dt = \frac{\pi}{2} \cdot 2 = \pi$.

【评注】 方法二中用到公式 $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$.

38 (1989, 一(5) 题, 3 分) 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(t) dt$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x - 1$.

【解析】 等式 $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(t) dt$ 两端从 0 到 1 积分, 注意 $\int_0^1 f(t) dt$ 是常数, 则

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x dx + 2 \int_0^1 f(t) dt$$

$$= \frac{1}{2} + 2 \int_0^1 f(t) dt$$

$$\text{则} \int_0^1 f(x) dx = -\frac{1}{2},$$

$$f(x) = x + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = x - 1$$

39 (1989, 二(5) 题, 4 分) 已知 $f(2) = \frac{1}{2}$, $f'(2) = 0$ 及 $\int_0^2 f(x) dx = 1$, 求 $\int_0^1 x^2 f''(2x) dx$.

$$\begin{aligned} \text{【解】} \quad \int_0^1 x^2 f''(2x) dx &\stackrel{2x=t}{=} \frac{1}{8} \int_0^2 t^2 f''(t) dt = \frac{1}{8} \int_0^2 t^2 df'(t) \\ &= \frac{1}{8} \left[t^2 f'(t) \Big|_0^2 - 2 \int_0^2 t f'(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{8} \left[0 - 2 \int_0^2 t df(t) \right] \\ &= -\frac{1}{4} \left[t f(t) \Big|_0^2 - \int_0^2 f(t) dt \right] \\ &= -\frac{1}{4} [1 - 1] = 0 \end{aligned}$$

40 (1990, 一(3) 题, 3 分) $\int_0^1 x \sqrt{1-x} dx =$ _____.

【答案】 $\frac{4}{15}$.

【解析】 令 $\sqrt{1-x} = t$, 则 $1-x = t^2$, $-dx = 2t dt$.

$$\int_0^1 x \sqrt{1-x} dx = 2 \int_0^1 t^2 (1-t^2) dt = 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{4}{15}$$

41 (1991, 三(2) 题, 5 分) 计算 $\int_1^4 \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})}$.

【解】 令 $\sqrt{x} = t$, 则 $x = t^2$, $dx = 2t dt$

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})} &= \int_1^2 \frac{2t}{t^2(1+t)} dt = 2 \int_1^2 \frac{1}{t(1+t)} dt \\ &= 2 \ln \frac{t}{1+t} \Big|_1^2 = 2 \ln \frac{4}{3} \end{aligned}$$

42 (1991, 八题, 9 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足 $f(x) = f(x-\pi) + \sin x$ 且 $f(x) = x, x \in [0, \pi)$, 计算 $\int_{-\pi}^{3\pi} f(x) dx$.

$$\begin{aligned} \text{【解】 (方法一)} \quad \int_{-\pi}^{3\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{3\pi} [f(x-\pi) + \sin x] dx \\ &= \int_{-\pi}^{3\pi} f(x-\pi) dx \stackrel{x-\pi=t}{=} \int_0^{2\pi} f(t) dt \\ &= \int_0^{\pi} f(t) dt + \int_{\pi}^{2\pi} [f(t-\pi) + \sin t] dt \\ &= \frac{\pi^2}{2} - 2 + \int_{\pi}^{2\pi} f(t-\pi) dt \\ &\stackrel{t-\pi=u}{=} \frac{\pi^2}{2} - 2 + \int_0^{\pi} f(u) du \\ &= \pi^2 - 2 \end{aligned}$$

(方法二) 当 $x \in [\pi, 2\pi)$ 时, $x - \pi \in [0, \pi)$, 则

$$f(x) = f(x - \pi) + \sin x = x - \pi + \sin x$$

当 $x \in [2\pi, 3\pi)$ 时 $x - \pi \in [\pi, 2\pi)$

$$f(x) = f(x - \pi) + \sin x = (x - \pi) - \pi + \sin(x - \pi) + \sin x = x - 2\pi$$

则

$$\int_{\pi}^{3\pi} f(x) dx = \int_{\pi}^{2\pi} (x - \pi + \sin x) dx + \int_{2\pi}^{3\pi} (x - 2\pi) dx = \pi^2 - 2$$

43 (1992, 三(4) 题, 5 分) 求 $\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin x} dx$.

【解】 由于 $1 - \sin x = 1 - 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$

$$= \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2$$

则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^{\pi} \sqrt{\left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2} dx = \int_0^{\pi} \left| \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) dx \\ &= 4(\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

【评注】 $\int_0^{\pi} \sqrt{\left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2} dx = \int_0^{\pi} \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) dx$ 这是一种“经典”错误. 因为 $\sqrt{x^2} = |x|$.

44 (1992, 四题, 9 分) 设 $f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x \leq 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$, 求 $\int_1^3 f(x-2) dx$.

【解】 令 $x-2=t$, 则 $dx=dt$,

$$\text{原式} = \int_{-1}^1 f(t) dt = \int_{-1}^0 (1+t^2) dt + \int_0^1 e^{-t} dt = \frac{7}{3} - \frac{1}{e}.$$

45 (1993, 三(3) 题, 5 分) 求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1 + \cos 2x} dx$.

$$\begin{aligned} \text{【解】 原式} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{2\cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan x \\ &= \frac{1}{2} x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \ln \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2 \end{aligned}$$

46 (1994, 三(2) 题, 5 分) 计算 $\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}} dx$.

【解】 令 $x^2 = \sin t$, 则 $2x dx = \cos t dt$,

$$\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{32}$$

47 (1995, 七题, 8 分) 设 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t} dt$, 计算 $\int_0^{\pi} f(x) dx$.

$$\begin{aligned} \text{【解析】 (方法一)} \quad \int_0^{\pi} f(x) dx &= x f(x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{\pi - x} dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\pi - t} dt - \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{\pi - x} dx \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{\pi - x} \sin x dx = \int_0^{\pi} \sin x dx = 2 \end{aligned}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$\begin{aligned}
 \text{【方法二】 } \int_0^{\pi} f(x) dx &= \int_0^{\pi} f(x) d(x - \pi) \\
 &= (x - \pi) f(x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{(x - \pi) \sin x}{\pi - x} dx \\
 &= \int_0^{\pi} \sin x dx = 2
 \end{aligned}$$

48 (1996, - (2) 题, 3 分) $\int_{-1}^1 (x + \sqrt{1-x^2})^2 dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 2.

【解析】
$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 (x + \sqrt{1-x^2})^2 dx &= \int_{-1}^1 (x^2 + 2x\sqrt{1-x^2} + 1 - x^2) dx \\
 &= \int_{-1}^1 1 dx = 2
 \end{aligned}$$

49 (1996, 三(1) 题, 5 分) 计算 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}} dx.$

【解】 (方法一) 原式 $= \int_0^{\ln 2} e^{-x} \sqrt{e^{2x}-1} dx = - \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^{2x}-1} de^{-x}$

$$\begin{aligned}
 &= -e^{-x} \sqrt{e^{2x}-1} \Big|_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} \\
 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \ln(e^x + \sqrt{e^{2x}-1}) \Big|_0^{\ln 2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \ln(2 + \sqrt{3})
 \end{aligned}$$

(方法二) 令 $e^{-x} = \sin t$, 则 $dx = \frac{-\cos t}{\sin t} dt$

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin t} dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt \\
 &= -\ln(\csc t + \cot t) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

(方法三) 令 $\sqrt{1-e^{-2x}} = u$, 则 $x = -\frac{1}{2} \ln(1-u^2)$, $dx = \frac{u}{1-u^2} du$

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{u^2}{1-u^2} du = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{1-u^2} \\
 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \ln(2 + \sqrt{3})
 \end{aligned}$$

50 (1999, - (4) 题, 3 分) 函数 $y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ 在区间 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 上的平均值为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{\sqrt{3}+1}{12}\pi.$

【解析】 由平均值定义知

$$\bar{y} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = (1 + \sqrt{3}) \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

令 $x = \sin t$, 则 $dx = \cos t dt$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 t \cos t}{\cos t} dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) dt = \frac{\pi}{12}$$

则 $\bar{y} = \frac{\sqrt{3}+1}{12}\pi$.

51 (2001, 一(3)题, 3分) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + \sin^2 x) \cos^2 x dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{\pi}{8}.$

【解析】 由于 $x^3 \cos^2 x$ 为奇函数, $\sin^2 x \cos^2 x$ 为偶函数, 则

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + \sin^2 x) \cos^2 x dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x (1 - \sin^2 x) dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right] = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

52 (2005, 3题, 4分) $\int_0^1 \frac{x dx}{(2-x^2) \sqrt{1-x^2}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{\pi}{4}.$

【解析】 (方法一) 由于被积函数中有 $\sqrt{1-x^2}$, 则考虑三角代换 $x = \sin t$, 则 $dx = \cos t dt$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x dx}{(2-x^2) \sqrt{1-x^2}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t \cos t}{(2-\sin^2 t) \cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{2-\sin^2 t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-d \cos t}{1+\cos^2 t} = -\arctan \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

(方法二) $\int_0^1 \frac{x dx}{(2-x^2) \sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 \frac{\frac{1}{2} dx^2}{(2-x^2) \sqrt{1-x^2}}$

令 $\sqrt{1-x^2} = t$, 则 $x^2 = 1-t^2, dx^2 = -2t dt$

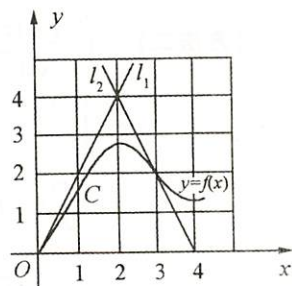
$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\frac{1}{2} dx^2}{(2-x^2) \sqrt{1-x^2}} &= \int_1^0 \frac{-\frac{1}{2} dt}{(1+t^2)t} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \arctan t \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

53 (2005, 17题, 11分) 如图所示, 曲线 C 的方程为 $y = f(x)$, 点 $(3, 2)$ 是它的一个拐点, 直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点 $(0, 0)$ 与 $(3, 2)$ 处的切线, 其交点为 $(2, 4)$. 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数, 计算定积分

$$\int_0^3 (x^2 + x) f'''(x) dx.$$

【分析】 本题要求的是幂函数与 $f(x)$ 的高阶导数乘积的定积分, 通常的做法是用分部积分法, 并从图中得到 $f(x)$ 的相关导数值和函数值

【解】 由点 $(3, 2)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点知 $f''(3) = 0$. 由于直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点 $(0, 0)$ 与 $(3, 2)$ 处的切线, 且由图中不难看出直线 l_1 与 l_2 的斜率分别为 2 和 -2 知, $f'(0) = 2, f'(3) = -2$, 且由图



不难看出 $f(0) = 0, f(3) = 2$. 则

$$\begin{aligned}
 \int_0^3 (x^2 + x) f'''(x) dx &= \int_0^3 (x^2 + x) df''(x) \\
 &= (x^2 + x) f''(x) \Big|_0^3 - \int_0^3 (2x + 1) f''(x) dx \\
 &= - \int_0^3 (2x + 1) df'(x) \\
 &= - (2x + 1) f'(x) \Big|_0^3 + 2 \int_0^3 f'(x) dx \\
 &= - [7 \times (-2) - 2] + 2 \int_0^3 f'(x) dx \\
 &= 16 + 2f(x) \Big|_0^3 \\
 &= 16 + 2(2 - 0) = 20.
 \end{aligned}$$

【评注】 本题是一道微积分学的综合题, 主要考查分部积分法和导数的几何意义. 与一般题不同的是, 本题中 $f(x), f'(x), f''(x)$ 在相关点的值不是直接给出, 而是隐含在图形中, 考生的错误主要是两种:

- (1) 有些考生误认为 $y = f(x)$ 是三次曲线, 从而假设 $y = ax^3 + bx^2 + cx$;
- (2) 由于概念不清, $f'(0), f'(3), f''(3)$ 求错.

54 (2008, 17 题, 9 分) 计算 $\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

【解】 (方法一) 令 $x = \sin t$, 则 $dx = \cos t dt$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \sin^2 t \cos t}{\cos t} dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{t}{2} - \frac{t \cos 2t}{2} \right) dt \\
 &= \frac{t^2}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin 2t dt \\
 &= \frac{\pi^2}{16} - \frac{t \sin 2t}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt \\
 &= \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{8} \cos 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

(方法二) $\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 \frac{(x^2 - 1) \arcsin x + \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= - \int_0^1 (\sqrt{1-x^2} \arcsin x) dx + \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= - x(\sqrt{1-x^2} \arcsin x) \Big|_0^1 + \int_0^1 \left(\frac{-x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + x \right) dx + \frac{1}{2} \arcsin^2 x \Big|_0^1
 \end{aligned}$$

$$= -\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx + \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8}.$$

移项得 $2\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8}$, 则

$$\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}$$

四、变上限积分函数及其应用

55 (1987, 九(4)题, 4分) 设 $I = t \int_0^{\frac{t}{s}} f(tx) dx$, 其中 $f(x)$ 连续, $s > 0, t > 0$, 则 I 的值

(A) 依赖于 s, t .

(B) 依赖于 s, t, x .

(C) 依赖于 t, x , 不依赖于 s .

(D) 依赖于 s 不依赖于 t .

【答案】 D.

【解析】 令 $tx = u$, 则 $t dx = du$

$$I = \int_0^s f(u) du$$

显然, I 只与 s 有关, 故应选(D).

56 (1988, 一(3)题, 4分) 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $\int_0^{x^3-1} f(t) dt = x$, 则 $f(7) =$ _____.

(此题有误, 满足条件的 $f(x)$ 不存在. 将题中条件改成 $\int_0^{x^3-1} f(t) dt = x-1$)

【答案】 $\frac{1}{12}$.

【解析】 等式 $\int_0^{x^3-1} f(t) dt = x-1$ 两端对 x 求导得

$$3x^2 f(x^3-1) = 1$$

上式中令 $x = 2$ 得

$$12f(7) = 1$$

则 $f(7) = \frac{1}{12}$.

57 (1988, 七题, 7分) 设 $x \geq -1$, 求 $\int_{-1}^x (1-|t|) dt$.

【解】 当 $-1 \leq x < 0$ 时

$$\int_{-1}^x (1-|t|) dt = \int_{-1}^x (1+t) dt = \frac{1}{2}(1+t)^2 \Big|_{-1}^x = \frac{1}{2}(1+x)^2$$

当 $x \geq 0$ 时

$$\int_{-1}^x (1-|t|) dt = \int_{-1}^0 (1+t) dt + \int_0^x (1-t) dt = 1 - \frac{1}{2}(1-x)^2$$

58 (1989, 一(3)题, 3分) 曲线 $y = \int_0^x (t-1)(t-2) dt$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程是_____.

【答案】 $y = 2x$.

【解析】 所求切线的斜率为

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$y' \Big|_{x=0} = (x-1)(x-2) \Big|_{x=0} = 2$$

则所求切线方程为

$$y = 2x$$

59 (1990, 二(4) 题, 3 分) 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $F(x) = \int_x^{e^{-x}} f(t) dt$, 则 $F'(x)$ 等于

(A) $-e^{-x}f(e^{-x}) - f(x)$.

(B) $-e^{-x}f(e^{-x}) + f(x)$.

(C) $e^{-x}f(e^{-x}) - f(x)$.

(D) $e^{-x}f(e^{-x}) + f(x)$.

【答案】 A.

【解析】 $F'(x) = f(e^{-x})(-e^{-x}) - f(x) = -e^{-x}f(e^{-x}) - f(x)$, 故选(A).

60 (1990, 六题, 9 分) 设 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt$, 其中 $x > 0$, 求 $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$.

【解】 (方法一) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{1+t} dt \xrightarrow{\text{令 } t = \frac{1}{u}} \int_1^x \frac{-\ln u}{1 + \frac{1}{u}} \left(-\frac{1}{u^2}\right) du$

$$= \int_1^x \frac{\ln u}{u(1+u)} du$$

$$\begin{aligned} \text{则 } f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) &= \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt + \int_1^x \frac{\ln t}{t(1+t)} dt = \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln^2 t \Big|_1^x = \frac{1}{2} \ln^2 x \end{aligned}$$

(方法二) 令 $F(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt + \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{1+t} dt$, 则

$$F'(x) = \frac{\ln x}{1+x} + \frac{\ln \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\ln x}{x}$$

则

$$F(x) = \int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$$

又 $F(1) = 0$, 则 $C = 0$,

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x$$

61 (1991, 二(2) 题, 3 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$ 记 $F(x) = \int_0^x f(t) dt, 0 \leq x \leq 2$, 则

(A) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{3} + 2x - \frac{x^2}{2}, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

(B) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \\ -\frac{7}{6} + 2x - \frac{x^2}{2}, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

(C) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{x^2}{2}, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

(D) $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2x - \frac{x^2}{2}, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

【答案】 B.

【解析】 (方法一) 由 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ 知

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \begin{cases} \int_0^x t^2 dt, & 0 \leq x \leq 1 \\ \int_0^1 t^2 dt + \int_1^x (2-t) dt, & 1 < x \leq 2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{7}{6} + 2x - \frac{x^2}{2}, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

故应选(B).

【方法二】 注意 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ 是 $[0, 2]$ 上的连续函数, 则 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 在 $[0, 2]$ 上可导. 但(A)(C)(D)选项中的 $F(x)$ 在 $x=1$ 处不连续, 则这几个选项都不正确, 故应选(B).

62 (1992, 二(4)题, 3分) 设 $f(x)$ 连续, $F(x) = \int_0^{x^2} f(t^2) dt$, 则 $F'(x)$ 等于

- (A) $f(x^4)$. (B) $x^2 f(x^4)$. (C) $2xf(x^4)$. (D) $2xf(x^2)$.

【答案】 C.

【解析】

$$F'(x) = f(x^4) \cdot 2x = 2xf(x^4)$$

故应选(C).

63 (1993, 二(3)题, 3分) 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$, 设 $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ ($0 \leq x \leq 2$),

则 $F(x)$ 为

- (A) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$
 (C) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & 0 \leq x < 1 \\ x-1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}, & 0 \leq x < 1 \\ x-1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

【答案】 D.

【解析】 (方法一) 由题设知

$$F(x) = \begin{cases} \int_1^x t^2 dt, & 0 \leq x < 1 \\ \int_1^x 1 dt, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}, & 0 \leq x < 1 \\ x-1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

故应选(D).

【方法二】 显然 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ 是 $[0, 2]$ 上的连续函数, 则 $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ 应在 $[0, 2]$ 上可导, 又(A)(B)(C)选项中的 $F(x)$ 在 $x=1$ 处不连续, 所以也不可导, 则这几个选项都不正确, 故应选(D).

64 (1994, 一(3)题, 3分) $\frac{d}{dx} \left(\int_0^{\cos 3x} f(t) dt \right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-3\sin 3x f(\cos 3x)$.

【解析】 $\frac{d}{dx} \left(\int_0^{\cos 3x} f(t) dt \right) = f(\cos 3x) \cdot (-\sin 3x) \cdot 3 = -3\sin 3x f(\cos 3x)$.

65 (1996, 三(3)题, 5分) 设 $\begin{cases} x = \int_0^t f(u^2) du, \\ y = [f(t^2)]^2, \end{cases}$ 其中 $f(u)$ 具有二阶导数, 且 $f(u) \neq 0$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

【解】 $\frac{dx}{dt} = f(t^2), \frac{dy}{dt} = 4tf(t^2)f'(t^2)$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = 4tf'(t^2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}[4tf'(t^2)] \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{4[f'(t^2) + 2t^2f''(t^2)]}{f(t^2)}$$

66 (1997, 七题, 8分) 设函数 $f(x)$ 连续, $\varphi(x) = \int_0^1 f(xt) dt$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ (A 为常数), 求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

【解】 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ 可知, $f(0) = 0, \varphi(0) = 0$. 令 $u = xt$, 则

$$\varphi(x) = \frac{\int_0^x f(u) du}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\text{从而 } \varphi'(x) = \frac{xf(x) - \int_0^x f(u) du}{x^2} \quad (x \neq 0).$$

由导数定义有

$$\varphi'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{A}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{又} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \int_0^x f(u) du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2} \\ &= A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} = \varphi'(0) \end{aligned}$$

从而可知 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

67 (1998, 一(4)题, 3分) 设 $f(x)$ 连续, 则 $\frac{d}{dx} \int_0^x tf(x^2 - t^2) dt =$ _____.

【答案】 $xf(x^2)$.

【解析】 令 $x^2 - t^2 = u$, 则 $-2tdt = du$,

$$\int_0^x tf(x^2 - t^2) dt = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} f(u) du$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^x tf(x^2 - t^2) dt = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} f(u) du = xf(x^2)$$

68 (1999, 二(3)题, 3分) 设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必是偶函数.

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必是奇函数.

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时, $F(x)$ 必是周期函数.

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时, $F(x)$ 必是单调增函数.

【答案】 A.

【解析】 (方法一) 直接法

由于 $f(x)$ 连续, 则 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 由于 $f(x)$ 是奇函数, 则 $F(x)$ 是偶函数, $F(x) + C$ 仍是偶函数, 故应选(A).

(方法二) 排除法

$f(x) = x^2$ 为偶函数, $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 但 $F(x)$ 不是奇函数, 则(B)不

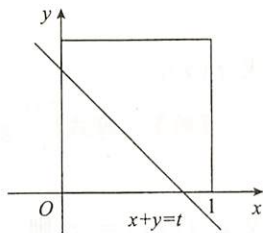
正确;取 $f(x) = 1 + \cos x$ 是周期函数,但 $F(x) = x + \sin x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,但 $F(x) = x + \sin x$ 不是周期函数,从而(C)不正确;取 $f(x) = x$,显然是单调增,但 $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,但 $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ 不单调,则(D)不正确,故应选(A).

【评注】 方法一中用到一个基本结论:设 $f(x)$ 连续,则当 $f(x)$ 为奇函数时, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 为偶函数;当 $f(x)$ 为偶函数时, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 为奇函数.

69 (2000, 四题, 5 分) 设 xOy 平面上有正方形 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ 及直线 $l: x + y = t (t \geq 0)$. 若 $S(t)$ 表示正方形 D 位于直线 l 左下方部分的面积, 试求 $\int_0^x S(t)dt, (x \geq 0)$.

【解】 如右图, 由题设知

$$S(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ -\frac{t^2}{2} + 2t - 1, & 1 < t \leq 2 \\ 1, & t > 2 \end{cases}$$



所以, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$\int_0^x S(t)dt = \int_0^x \frac{1}{2}t^2 dt = \frac{1}{6}x^3$$

当 $1 < x \leq 2$ 时,

$$\begin{aligned} \int_0^x S(t)dt &= \int_0^1 \frac{1}{2}t^2 dt + \int_1^x \left(-\frac{t^2}{2} + 2t - 1\right) dt \\ &= -\frac{x^3}{6} + x^2 - x + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

当 $x > 2$ 时,

$$\int_0^x S(t)dt = \int_0^2 S(t)dt + \int_2^x 1 dt = x - 1$$

因此

$$\int_0^x S(t)dt = \begin{cases} \frac{1}{6}x^3, & 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - x + \frac{1}{3}, & 1 < x \leq 2 \\ x - 1, & x > 2 \end{cases}$$

70 (2000, 六题, 6 分) 设函数 $S(x) = \int_0^x |\cos t| dt$,

(1) 当 n 为正整数, 且 $n\pi \leq x < (n+1)\pi$ 时, 证明 $2n \leq S(x) < 2(n+1)$;

(2) 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{x}$.

【解】 (1) 因为 $|\cos x| \geq 0$, 且 $n\pi \leq x < (n+1)\pi$, 所以

$$\int_0^{n\pi} |\cos x| dx \leq S(x) \leq \int_0^{(n+1)\pi} |\cos x| dx$$

又因为 $|\cos x|$ 是以 π 为周期的周期函数, 则

$$\int_0^{n\pi} |\cos x| dx = n \int_0^{\pi} |\cos x| dx = 2n$$

$$\int_0^{(n+1)\pi} |\cos x| dx = (n+1) \int_0^{\pi} |\cos x| dx = 2(n+1)$$

因此, 当 $n\pi \leq x < (n+1)\pi$ 时,

$$2n \leq S(x) < 2(n+1)$$

(2) 由(1)知, 当 $n\pi \leq x < (n+1)\pi$ 时, 有

$$\frac{2n}{(n+1)\pi} < \frac{S(x)}{x} < \frac{2(n+1)}{n\pi}$$

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 由夹逼原理知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{x} = \frac{2}{\pi}$$

71 (2001, 六题, 7分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0) = 0$, 且其反函数为 $g(x)$. 若

$$\int_0^{f(x)} g(t) dt = x^2 e^x$$

求 $f(x)$.

【解】 等式 $\int_0^{f(x)} g(t) dt = x^2 e^x$ 两端对 x 求导得

$$g[f(x)] f'(x) = x^2 e^x + 2x e^x$$

又 $g[f(x)] = x$, 则

$$x f'(x) = x^2 e^x + 2x e^x$$

当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = 2e^x + x e^x$.

上式两端积分得

$$f(x) = (x+1)e^x + C$$

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 故由 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(x+1)e^x + C] = 0$, 则 $C = -1$, 因此,

$$f(x) = (x+1)e^x - 1$$

72 (2002, 二(2)题, 3分) 设函数 $f(x)$ 连续, 则下列函数中, 必为偶函数的是

(A) $\int_0^x f(t^2) dt.$

(B) $\int_0^x f^2(t) dt.$

(C) $\int_0^x t[f(t) - f(-t)] dt.$

(D) $\int_0^x t[f(t) + f(-t)] dt.$

【答案】 D.

【解析】 由于 $f(t) + f(-t)$ 是偶函数, 则 $t[f(t) + f(-t)]$ 是奇函数, 则

$$\int_0^x t[f(t) + f(-t)] dt$$

必为偶函数.

【评注】 本题中用到一个基本结论: 设 $f(x)$ 连续, 则当 $f(x)$ 为奇函数时, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

为偶函数; 当 $f(x)$ 为偶函数时, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 为奇函数.

73 (2002, 四题, 7分) 设 $f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{3}{2}x^2, & -1 \leq x < 0, \\ \frac{x e^x}{(e^x + 1)^2}, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$ 求函数 $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ 的

表达式.

【解】 当 $-1 \leq x < 0$ 时,

$$F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt = \int_{-1}^x \left(2t + \frac{3}{2}t^2 \right) dt = \frac{1}{2}x^3 + x^2 - \frac{1}{2}$$

当 $0 \leq x \leq 1$ 时

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-1}^x f(t) dt = \int_{-1}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt \\ &= \left(t^2 + \frac{1}{2}t^3 \right) \Big|_{-1}^0 + \int_0^x \frac{te^t}{(e^t+1)^2} dt \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{t}{e^t+1} \Big|_0^x + \int_0^x \frac{dt}{e^t+1} \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x+1} + \int_0^x \frac{e^t}{e^t(e^t+1)} dt \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x+1} + \int_0^x \left(\frac{1}{e^t} - \frac{1}{e^t+1} \right) de^t \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x+1} + \ln \frac{e^t}{e^t+1} \Big|_0^x \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x+1} + \ln \frac{e^x}{e^x+1} - \ln \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{所以 } F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{2} + x^2 - \frac{1}{2}, & -1 \leq x < 0, \\ -\frac{x}{e^x+1} + \ln \frac{e^x}{e^x+1} + \ln 2 - \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

74 (2004, 17 题, 11 分) 设 $f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt$,

(1) 证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数;

(2) 求 $f(x)$ 的值域.

【证明】 (1)

$$f(x+\pi) = \int_{x+\pi}^{x+\frac{3}{2}\pi} |\sin t| dt$$

设 $t = \pi + u$, 则

$$f(x+\pi) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin u| du = f(x)$$

所以, $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数.

(2) 由于 $f(x)$ 以 π 为周期, 所以, 只需在 $[0, \pi]$ 上讨论其值域, 又

$$f'(x) = \left| \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right| - |\sin x| = |\cos x| - |\sin x|$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{3\pi}{4}$, 且

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin t dt = \sqrt{2}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} |\sin t| dt = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \sin t dt - \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \sin t dt = 2 - \sqrt{2}$$

$$\text{又 } f(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = 1, f(\pi) = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} (-\sin t) dt = 1.$$

由此可知, $f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的最小值为 $2 - \sqrt{2}$, 最大值为 $\sqrt{2}$. 故 $f(x)$ 的值域为 $[2 - \sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

75 (2005, 8 题, 4 分) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数, “ $M \Leftrightarrow N$ ” 表示 M 的充分必要条件是 N , 则必有

- (A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.
 (B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.
 (C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.
 (D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数.

【答案】 A.

【解析】 (方法一) 若 $F(x)$ 是偶函数, 由导函数的一个基本结论“可导的偶函数其导函数为奇函数”知, $F'(x) = f(x)$ 为奇函数, 反之,

若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $\int_0^x f(t) dt$ 为偶函数, $f(x)$ 的任意原函数 $F(x)$ 可表示为

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt + C$$

则 $F(x)$ 是偶函数.

故应选(A).

【方法二】 排除法: 取 $f(x) = \cos x + 1$, $F(x) = \sin x + x + 1$, 显然 $f(x)$ 连续, $F'(x) = f(x)$, 且 $f(x)$ 是偶函数, 周期函数, 但 $F(x)$ 不是奇函数 ($F(0) \neq 0$), 也不是周期函数, 排除(B) 和(C) 选项.

若取 $f(x) = x$, $F(x) = \frac{1}{2}x^2$, 排除(D), 故应选(A).

【评注】 本题主要考查函数和其原函数之间的关系, 主要结论有:

- (1) 可导的偶函数的导函数为奇函数, 而可导的奇函数的导函数为偶函数;
- (2) 奇函数的原函数都是偶函数, 而偶函数的原函数之一为奇函数;
- (3) 可导的周期函数其导函数仍为周期函数(但周期函数的原函数并不一定是周期函数, (方法二) 中已给出反例).

本题可直接利用(1) 和(2) 得出选项(A) 正确.

76 (2005, 15 题, 11 分) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) \neq 0$, 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t) dt}{x \int_0^x f(x-t) dt}.$$

【分析】 本题属于“ $\frac{0}{0}$ ”型极限, 而极限式中含有变上限积分, 常用的方法是洛必达法则, 分子被积式中含有 $(x-t)$ 应拆项, 分母被积式中含有 $f(x-t)$ 应做变量代换.

【解】 (方法一) 令 $x-t=u$, 则 $dt=-du$

$$\int_0^x f(x-t) dt = -\int_x^0 f(u) du = \int_0^x f(u) du$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t) dt}{x \int_0^x f(x-t) dt} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt}{x \int_0^x f(u) du} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt + xf(x) - xf(x)}{\int_0^x f(u) du + xf(x)} \quad (\text{洛必达法则}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{\int_0^x f(u) du + xf(x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(\xi)}{xf(\xi) + xf(x)} \quad (\text{积分中值定理}) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\xi)}{f(\xi) + f(x)} = \frac{f(0)}{f(0) + f(0)} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(方法二) 在分母的积分中, 令 $x-t=u$, 则

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t) dt}{x \int_0^x f(x-t) dt} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x tf(t) dt}{x \int_0^x f(u) du} = 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x tf(t) dt}{x \int_0^x f(u) du} \\
&= 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x tf(t) dt}{x^2 f(0)} \quad (\text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } \int_0^x f(u) du \sim xf(0)) \\
&= 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{2xf(0)} \quad (\text{洛必达法则}) \\
&= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

【评注】 本题是一道综合题, 主要考查洛必达法则, 积分中值定理, 变上限积分求导及定积分的换元法. 但做完整的考生并不多, 主要问题是

(1) 部分考生没有注意到题目只假设 $f(x)$ 连续, 并没假设 $f(x)$ 可导, 在后面不是用积分中值定理, 而是继续用洛必达法则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{\int_0^x f(u) du + xf(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{f(x) + f(x) + xf'(x)} = \frac{f(0)}{2f(0)} = \frac{1}{2}.$$

(2) 部分考生没有对分母上的积分用变量代换, 而是直接求导数

$$\frac{d}{dx} \int_0^x f(x-t) dt = f(x-x) = f(0). \text{ 虽然也得到正确答案, 但方法是错误的.}$$

77 (2006, 8 题, 4 分) 设 $f(x)$ 是奇函数, 除 $x=0$ 外处处连续, $x=0$ 是其第一类间断点, 则

$$\int_0^x f(t) dt \text{ 是}$$

(A) 连续的奇函数.

(B) 连续的偶函数.

(C) 在 $x=0$ 间断的奇函数.

(D) 在 $x=0$ 间断的偶函数.

【答案】 B.

【解析】 (方法一) 排除法: 选一个符合题设条件的具体函数, 取

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

$$\text{则 } F(x) = \int_0^x f(t) dt = \begin{cases} \int_0^x 1 dt, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ \int_0^x (-1) dt, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases} = |x|.$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

是一个连续的偶函数,排除选项(A)、(C)、(D),故应选(B).

(方法二) 利用变上限积分函数的两个基本结论:

(1) 若 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的可积函数,则 $\int_a^x f(t)dt$ 为 $[a, b]$ 上的连续函数;

(2) 若 $f(x)$ 是奇函数,则 $\int_0^x f(t)dt$ 为偶函数;若 $f(x)$ 是偶函数,则 $\int_0^x f(t)dt$ 为奇函数.

由于 $f(x)$ 是奇函数,则 $\int_0^x f(t)dt$ 为偶函数.

又 $f(x)$ 除 $x=0$ 外处处连续, $x=0$ 是其第一类间断点,则 $f(x)$ 可积,从而 $\int_0^x f(t)dt$ 为连续函数.

即 $\int_0^x f(t)dt$ 为连续的偶函数,故应选(B).

【评注】 本题主要考查变上限积分函数的性质.(方法二)中关于变上限积分函数的两个基本结论比较常用,望考生注意.

78 (2007, 17 题, 10 分) 设 $f(x)$ 是区间 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上的单调、可导函数,且满足

$$\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = \int_0^x t \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} dt$$

其中 f^{-1} 是 $f(x)$ 的反函数,求 $f(x)$.

【分析】 题设中给出了关于 $f(x)$ 的变上限积分等式,通常是等式两端求导,然后解出 $f(x)$.

【解】 等式 $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = \int_0^x t \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} dt$ 两端对 x 求导,得

$$f^{-1}[f(x)]f'(x) = x \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$$

即
$$xf'(x) = x \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}, x \in [0, \frac{\pi}{4}]$$

则
$$f(x) = \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \ln(\sin x + \cos x) + C$$

由原题设知 $\int_0^{f(0)} f^{-1}(t)dt = 0$,

因为 $f(x)$ 是 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上的单调可导函数,则 $f^{-1}(t)$ 的值域为 $[0, \frac{\pi}{4}]$,它是单调,非负的,故必有 $f(0) = 0$,从而

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [\ln(\sin x + \cos x) + C] = C = 0$$

则
$$f(x) = \ln(\sin x + \cos x), x \in [0, \frac{\pi}{4}]$$

【评注】 考生的主要错误有

(1) 变上限积分等式两端求导出错;

(2) 比较多的考生只求出了 $f(x)$ 的一般形式,没从已知等式求出 $f(0) = 0$,从而没确定出 C .

五、与定积分有关的证明题

79 (1993, 八题, 9分) 设 $f'(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 且 $f(0) = 0$, 证明: $\left| \int_0^a f(x) dx \right| \leq \frac{Ma^2}{2}$, 其中

$$M = \max_{0 \leq x \leq a} |f'(x)|.$$

【证明】 (方法一) 任取 $x \in (0, a]$, 由拉格朗日中值定理知

$$f(x) = f(x) - f(0) = f'(\xi)x \quad (0 < \xi < x)$$

$$\text{所以 } \left| \int_0^a f(x) dx \right| = \left| \int_0^a f'(\xi)x dx \right| \leq \int_0^a |f'(\xi)| x dx \leq M \int_0^a x dx = \frac{M}{2} a^2.$$

【方法二】 设 $x \in [0, a]$, 由 $f(0) = 0$ 知

$$\int_0^x f'(t) dt = f(x) - f(0) = f(x)$$

$$\text{则 } |f(x)| = \left| \int_0^x f'(t) dt \right| \leq \int_0^x |f'(t)| dt \leq \int_0^x M dt = Mx,$$

$$\text{于是 } \left| \int_0^a f(x) dx \right| \leq \int_0^a |f(x)| dx \leq \int_0^a Mx dx = \frac{M}{2} a^2.$$

80 (1994, 七题, 9分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续且递减, 证明: 当 $0 < \lambda < 1$ 时,

$$\int_0^\lambda f(x) dx \geq \lambda \int_0^1 f(x) dx$$

【证明】 (方法一) 令 $x = \lambda t$, 则 $dx = \lambda dt$

$$\int_0^\lambda f(x) dx = \lambda \int_0^1 f(\lambda t) dt = \lambda \int_0^1 f(\lambda x) dx$$

由于 $0 < \lambda < 1$, $f(x)$ 递减, 则 $f(\lambda x) \geq f(x)$.

从而有

$$\lambda \int_0^1 f(\lambda x) dx \geq \lambda \int_0^1 f(x) dx$$

$$\text{即 } \int_0^\lambda f(x) dx \geq \lambda \int_0^1 f(x) dx$$

【方法二】 由于 $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^\lambda f(x) dx + \int_\lambda^1 f(x) dx$, 则

$$\begin{aligned} \int_0^\lambda f(x) dx - \lambda \int_0^1 f(x) dx &= (1-\lambda) \int_0^\lambda f(x) dx - \lambda \int_\lambda^1 f(x) dx \\ &= (1-\lambda) \lambda f(\xi_1) - \lambda(1-\lambda) f(\xi_2) \end{aligned}$$

这里用了积分中值定理, 其中 $0 < \xi_1 < \lambda$, $\lambda < \xi_2 < 1$. 由于 $f(x)$ 递减, 则 $f(\xi_1) \geq f(\xi_2)$, 故

$$\int_0^\lambda f(x) dx \geq \lambda \int_0^1 f(x) dx$$

【方法三】 令 $\varphi(\lambda) = \int_0^\lambda f(x) dx - \lambda \int_0^1 f(x) dx \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$, 则

$$\varphi'(\lambda) = f(\lambda) - \int_0^1 f(x) dx = f(\lambda) - f(\xi) \quad (0 < \xi < 1)$$

由于 $f(x)$ 递减, 则当 $\lambda \in (0, \xi)$ 时, $\varphi'(\lambda) \geq 0$, $\varphi(\lambda)$ 递增, 当 $\lambda \in (\xi, 1)$ 时, $\varphi'(\lambda) \leq 0$, $\varphi(\lambda)$ 递减, 则 $\varphi(\lambda)$ 在 $[0, 1]$ 上的最小值必在区间 $[0, 1]$ 端点取得, 又

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0$$

即当 $\lambda \in [0, 1]$ 时, $\varphi(\lambda) \geq 0$, 原题得证.

81 (1998, 八题, 8分) 设 $y = f(x)$ 是区间 $[0, 1]$ 上的任一非负连续函数.

(1) 试证存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使得在区间 $[0, x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积, 等于在区间 $[x_0, 1]$ 上以 $y = f(x)$ 为曲边的曲边梯形面积.

(2) 又设 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f'(x) > -\frac{2f(x)}{x}$, 证明(1)中的 x_0 是唯一的.

【证明】(方法一) (1) 设 $F(x) = \int_x^1 f(t)dt$, 则 $F(0) = F(1) = 0$, 且 $F'(x) = \int_x^1 f(t)dt - xf(x)$. 对 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上应用罗尔定理知, 存在一点 $x_0 \in (0, 1)$, 使 $F'(x_0) = 0$, 因而

$$\int_{x_0}^1 f(x)dx - x_0 f(x_0) = 0$$

即矩形面积 $x_0 f(x_0)$ 等于曲边梯形面积 $\int_{x_0}^1 f(x)dx$.

(2) 设 $\varphi(x) = \int_x^1 f(t)dt - xf(x)$, 则当 $x \in (0, 1)$ 时, 有

$$\varphi'(x) = -f(x) - f(x) - xf'(x) < 0$$

所以, $\varphi(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调减少, 故此时(1)中的 x_0 是唯一的.

(方法二) (1) 设在区间 $(a, 1)$ ($a \geq \frac{1}{2}$) 内取 x_1 . 若在区间 $[x_1, 1]$ 上 $f(x) \equiv 0$, 则 $(x_1, 1)$ 内任一点都可作为 x_0 , 否则可设 $f(x_2) > 0$ 为连续函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1, 1]$ 上的最大值, $x_2 \in [x_1, 1]$.

在区间 $[0, x_2]$ 上, 作辅助函数 $\varphi(x) = \int_x^1 f(t)dt - xf(x)$, 则 $\varphi(x)$ 连续, 且 $\varphi(0) > 0$, 又

$$\varphi(x_2) = \int_{x_2}^1 f(t)dt - x_2 f(x_2) \leq (1 - 2x_2)f(x_2) < 0$$

因而, 由闭区间上的连续函数的介值定理, 存在点 $x_0 \in (0, x_2) \subset (0, 1)$, 使 $\varphi(x_0) = 0$, 即

$$\int_{x_0}^1 f(t)dt = x_0 f(x_0)$$

(2) 证法同上.

82 (2000, 八题, 6分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 且 $\int_0^\pi f(x)dx = 0$, $\int_0^\pi f(x)\cos xdx = 0$.

试证: 在 $(0, \pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1, ξ_2 , 使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

【解】(方法一) 令 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $0 \leq x \leq \pi$, 则有 $F(0) = 0, F(\pi) = 0$.

又因为

$$0 = \int_0^\pi f(x)\cos xdx = \int_0^\pi \cos x dF(x)$$

$$= F(x)\cos x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi F(x)\sin xdx$$

$$= \int_0^\pi F(x)\sin xdx$$

$$= \pi F(\xi)\sin \xi, \quad (0 < \xi < \pi)$$

又 $\sin \xi \neq 0$, 则 $F(\xi) = 0$.

由此可得

$$F(0) = F(\xi) = F(\pi) = 0 \quad (0 < \xi < \pi)$$

再对 $F(x)$ 在 $[0, \xi], [\xi, \pi]$ 上用罗尔定理知, 至少存在 $\xi_1 \in (0, \xi), \xi_2 \in (\xi, \pi)$, 使

$$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$$

$$f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$$

即

(方法二) 由积分中值定理知

$$0 = \int_0^{\pi} f(x) dx = \pi f(\xi_1) \quad (0 < \xi_1 < \pi)$$

则 $f(\xi_1) = 0$.

若在 $(0, \pi)$ 内 $f(x) = 0$ 仅有一个实根 $x = \xi_1$, 则由 $\int_0^{\pi} f(x) dx = 0$ 可知, $f(x)$ 在 $(0, \xi_1)$ 与 (ξ_1, π) 异号. 不妨设在 $(0, \xi_1)$ 内 $f(x) > 0$, 在 (ξ_1, π) 内 $f(x) < 0$, 于是再由 $\int_0^{\pi} f(x) \cos x dx = 0$ 及 $\cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上的单调性知

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{\pi} f(x) [\cos x - \cos \xi_1] dx \\ &= \int_0^{\xi_1} f(x) [\cos x - \cos \xi_1] dx + \int_{\xi_1}^{\pi} f(x) [\cos x - \cos \xi_1] dx \end{aligned}$$

由于这里 $\int_0^{\xi_1} f(x) [\cos x - \cos \xi_1] dx > 0$, $\int_{\xi_1}^{\pi} f(x) [\cos x - \cos \xi_1] dx > 0$. 上式左、右两端矛盾, 从而可知, 在 $(0, \pi)$ 内除 ξ_1 外, $f(x) = 0$ 至少还有另一实根 ξ_2 . 故知存在 $\xi_1, \xi_2 \in (0, \pi)$, 且 $\xi_1 \neq \xi_2$, 使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

83 (2001, 十题, 8分) 设 $f(x)$ 在区间 $[-a, a]$ ($a > 0$) 上具有二阶连续导数, $f(0) = 0$,

(1) 写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式;

(2) 证明在 $[-a, a]$ 上至少存在一点 η , 使 $a^3 f''(\eta) = 3 \int_{-a}^a f(x) dx$.

【解】 (1) 对任意 $x \in [-a, a]$,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2 = f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2$$

其中 ξ 在 0 与 x 之间.

$$\begin{aligned} (2) \quad \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^a f'(0)x dx + \int_{-a}^a \frac{f''(\xi)}{2!}x^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a f''(\xi)x^2 dx \end{aligned}$$

因为 $f''(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续, 故对任意 $x \in [-a, a]$, $m \leq f''(x) \leq M$, 其中 M, m 分别为 $f''(x)$ 在 $[-a, a]$ 上的最大值和最小值. 所以

$$m \int_0^a x^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{-a}^a x^2 f''(\xi) dx \leq M \int_0^a x^2 dx$$

即

$$m \leq \frac{3}{a^3} \int_{-a}^a f(x) dx \leq M$$

因而由 $f''(x)$ 的连续性知, 至少存在一点 $\eta \in [-a, a]$,

使

$$f''(\eta) = \frac{3}{a^3} \int_{-a}^a f(x) dx$$

即

$$a^3 f''(\eta) = 3 \int_{-a}^a f(x) dx$$

六、反常积分的概念与计算

84 (1991, - (3) 题, 3 分) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 1.

【解析】
$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx &= -\int_1^{+\infty} \ln x d\frac{1}{x} = -\left.\frac{\ln x}{x}\right|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \\ &= -\left.\frac{1}{x}\right|_1^{+\infty} = 1\end{aligned}$$

85 (1992, - (4) 题, 3 分) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2+1)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{1}{2} \ln 2.$

【解析】 原式 $= \int_1^{+\infty} \frac{(1+x^2) - x^2}{x(x^2+1)} dx = \left(\ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)\right) \Big|_1^{+\infty}$
 $= \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Big|_1^{+\infty} = \ln 1 - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \ln 2$

86 (1993, 三 (4) 题, 5 分) 求 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3} dx.$

【解】 原式 $= \int_0^{+\infty} \frac{(x+1) - 1}{(1+x)^3} dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x)^3}\right) dx$
 $= \left(-\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2(1+x)^2}\right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$

87 (1997, - (4) 题, 3 分) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+8} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{\pi}{8}.$

【解析】 原式 $= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{4+(x+2)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{d(x+2)}{4+(x+2)^2} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x+2}{2} \Big|_0^{+\infty}$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}$

88 (1998, 六题, 6 分) 计算积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}.$

【解】 $x=1$ 为被积函数无穷间断点, 则

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-x}} \\ \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} = \arcsin(2x-1) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{\pi}{2} \\ \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-x}} &= \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}} = \ln \left[\left(x - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} \right] \Big|_1^{\frac{3}{2}} = \ln(2+\sqrt{3})\end{aligned}$$

因此 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}} = \frac{\pi}{2} + \ln(2+\sqrt{3})$.

89 (1999, 四题, 6分) 计算 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$.

【解】 原式 $= -\int_1^{+\infty} \arctan x d\frac{1}{x}$
 $= -\frac{1}{x} \arctan x \Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)}$
 $= \frac{\pi}{4} + \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$

90 (2000, 一(3)题, 3分) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}} =$ _____.

【答案】 $\frac{\pi}{3}$.

【解析】 (方法一) 令 $\sqrt{x-2} = t$, 则 $x = 2+t^2, dx = 2tdt$.

原式 $= \int_0^{+\infty} \frac{2t}{t(t^2+9)} dt = 2 \cdot \frac{1}{3} \arctan \frac{t}{3} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{3}$.

(方法二) 原式 $= 2 \int_2^{+\infty} \frac{d\sqrt{x-2}}{9+(\sqrt{x-2})^2} = 2 \cdot \frac{1}{3} \arctan \frac{\sqrt{x-2}}{3} \Big|_2^{+\infty} = \frac{\pi}{3}$.

91 (2004, 3题, 4分) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} =$ _____.

【答案】 $\frac{\pi}{2}$.

【解析】 (方法一) 令 $x = \sec t, dx = \sec t \tan t dt$, 于是

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec t \cdot \tan t}{\sec t \cdot \tan t} dt = \frac{\pi}{2}$$

(方法二) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 - (\frac{1}{x})^2}} = -\int_1^{+\infty} \frac{d\frac{1}{x}}{\sqrt{1 - (\frac{1}{x})^2}}$
 $= -\arcsin \frac{1}{x} \Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$.

92 (2006, 3题, 4分) 反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)^2} =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$.

【解析】 (方法一) $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)^2} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{xdx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$
 $= \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{1+x^2} \right) \Big|_0^a = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{1+a^2} \right)$
 $= \frac{1}{2}$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$\begin{aligned}
 \text{(方法二)} \quad \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^2} &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2} \\
 &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{1+x^2} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

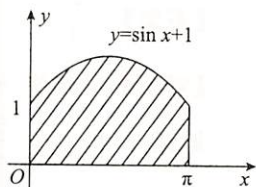
【评注】 本题主要考查反常积分的概念与计算. 方法二简单.

七、定积分的应用

93 (1987, 五题, 8分) 设 D 是由曲线 $y = \sin x + 1$ 与三条直线 $x = 0, x = \pi, y = 0$ 所围成的曲边梯形, 求 D 绕 Ox 轴旋转一周所生成的旋转体的体积.

【解】 本题中 D 如右图所示, 则所求旋转体体积为

$$\begin{aligned}
 V_x &= \pi \int_0^{\pi} (\sin x + 1)^2 dx \\
 &= \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx + 2\pi \int_0^{\pi} \sin x dx + \pi^2 \\
 &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx + 4\pi + \pi^2 \\
 &= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + 4\pi + \pi^2 \\
 &= \frac{\pi}{2} (8 + 3\pi)
 \end{aligned}$$



94 (1987, 十题, 10分) 在第一象限内, 求曲线 $y = -x^2 + 1$ 上的一点, 使该点处的切线与所给曲线及两坐标轴所围成的图形面积为最小, 并求此最小面积.

【解】 设所求点为 (x_1, y_1) , 于是 $y' \Big|_{x=x_1} = -2x_1$.

过点 (x_1, y_1) 的切线方程为

$$y - y_1 = -2x_1(x - x_1)$$

令 $x = 0$, 得切线在 y 轴上的截距 $b = x_1^2 + 1$,

令 $y = 0$, 得切线在 x 轴上的截距 $a = \frac{x_1^2 + 1}{2x_1}$,

则切线与两坐标轴围成的三角形面积为

$$S = \frac{1}{2} ab = \frac{(x_1^2 + 1)^2}{4x_1}$$

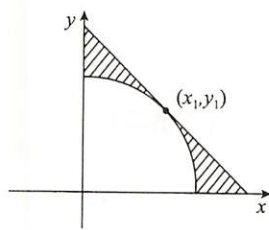
由于抛物线 $y = -x^2 + 1$ 与两坐标轴在第一象限所围图形面积为定值, 所以, 只要 S 最小即可, 又

$$S = \frac{1}{4} \left(x_1^3 + 2x_1 + \frac{1}{x_1} \right)$$

令

$$\begin{aligned}
 S'(x_1) &= \frac{1}{4} \left(3x_1^2 + 2 - \frac{1}{x_1^2} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(3x_1 - \frac{1}{x_1} \right) \left(x_1 + \frac{1}{x_1} \right) = 0
 \end{aligned}$$

得 $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.



再由 $S''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{4}\left(6x_1 + \frac{2}{x_1^3}\right)\Big|_{x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}} > 0$, 则点 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3}\right)$ 为所求.

则求面积最小值为

$$S\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \int_0^1 (-x^2 + 1)dx = \frac{2}{9}(2\sqrt{3} - 3)$$

95 (1988, 二(4)题, 4分) 由曲线 $y = \sin^{\frac{3}{2}}x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 与 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体体积为

(A) $\frac{4}{3}$.

(B) $\frac{4}{3}\pi$.

(C) $\frac{2}{3}\pi^2$.

(D) $\frac{2}{3}\pi$.

【答案】 B.

【解析】 所求体积为

$$V_x = \pi \int_0^\pi y^2 dx = \pi \int_0^\pi \sin^3 x dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = 2\pi \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

故选(B).

96 (1989, 三(3)题, 3分) 曲线 $y = \cos x$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) 与 x 轴所围成的图形, 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积为

(A) $\frac{\pi}{2}$.

(B) π .

(C) $\frac{\pi^2}{2}$.

(D) π^2 .

【答案】 C.

【解析】 所求体积为

$$V = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2}$$

故选(C).

97 (1989, 八题, 10分) 设抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过原点, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时 $y \geq 0$, 又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x = 1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$. 试确定 a, b, c 的值, 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

【解】 由抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过原点可知, $c = 0$.

由 $S = \int_0^1 (ax^2 + bx) dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{1}{3}$ 得 $b = \frac{2}{3}(1 - a)$.

$$V_x = \pi \int_0^1 (ax^2 + bx)^2 dx = \pi \left(\frac{1}{5}a^2 + \frac{ab}{2} + \frac{1}{3}b^2 \right)$$

$$= \pi \left[\frac{1}{5}a^2 + \frac{1}{3}a(1-a) + \frac{4}{27}(1-a)^2 \right]$$

$$= \pi \left(\frac{2}{135}a^2 - \frac{1}{27}a + \frac{4}{27} \right)$$

$$V'_a = \pi \left(\frac{4}{135}a - \frac{1}{27} \right) = 0$$

得 $a = -\frac{5}{4}, b = \frac{3}{2}$.

$$V''\left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{4\pi}{135} > 0$$

所以,当 $a = -\frac{5}{4}, b = \frac{3}{2}$ 时,体积 V 最小.

98 (1990, 四题, 9分) 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的第一象限部分上求一点 P , 使该点处的切线, 椭圆及两坐标轴所围图形的面积为最小 (其中 $a > 0, b > 0$).

【解】 设 $P(x_0, y_0)$ 为所求点, 则此点处椭圆的切线方程为

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

令 $x = 0$ 得该切线在 y 轴上截距为 $\frac{b^2}{y_0}$. 令 $y = 0$ 得该切线在 x 轴上截距为 $\frac{a^2}{x_0}$.

所围图形面积为 $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{x_0} \cdot \frac{b^2}{y_0} - \frac{1}{4} \pi ab, x_0 \in (a, b)$.

$$\text{设 } S_1 = x_0 y_0 = ab \cdot \frac{x_0}{a} \cdot \frac{y_0}{b} \leq \frac{ab}{2} \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \right) = \frac{ab}{2}.$$

上式等号成立, 即 S_1 达到最大值当且仅当 $\frac{x_0}{a} = \frac{y_0}{b}$, 又 $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, 则 $\frac{x_0^2}{a^2} = \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{1}{2}$, 由此得

$$x_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}, y_0 = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

此时, S_1 最大, S 最小.

99 (1990, 七题, 9分) 过点 $P(1, 0)$ 作抛物线 $y = \sqrt{x-2}$ 的切线, 该切线与上述抛物线及 x 轴围成一平面图形, 求此图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.

【解析】 设过点 $P(1, 0)$ 作抛物线 $y = \sqrt{x-2}$ 的切线的切点为 $(x_0, \sqrt{x_0-2})$, 由 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$ 得, 切线方程为 $y - \sqrt{x_0-2} = \frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}(x - x_0)$.

此切线过点 $(1, 0)$, 即

$$0 - \sqrt{x_0-2} = \frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}(1 - x_0)$$

得 $x_0 = 3$.

则切点为 $(3, 1)$, 切线方程为 $y = \frac{1}{2}(x - 1)$, 于是

$$V_x = \pi \int_1^3 \frac{1}{4}(x-1)^2 dx - \pi \int_2^3 (\sqrt{x-2})^2 dx = \frac{\pi}{6}$$

100 (1991, 一(4)题, 3分) 质点以 $t \sin t^2$ 米/秒做直线运动, 则从时刻 $t_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 秒到 $t_2 = \sqrt{\pi}$ 秒内质点所经过的路程等于_____米.

【答案】 $\frac{1}{2}$.

【解析】 由题意知所求路程为

$$S = \int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}} t \sin t^2 dt = -\frac{1}{2} \cos t^2 \Big|_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}} = -\frac{1}{2}(-1 - 0) = \frac{1}{2}$$

101 (1991, 二(5)题, 3分) 如右图, x 轴上的一线密度为常数 μ , 长度为 l 的细杆, 有一质量为 m 的质点到杆右端的距离为 a , 已知引力系数为 k , 则质点和细杆之间引力的大小为



(A) $\int_{-l}^0 \frac{km\mu dx}{(a-x)^2}$

(B) $\int_0^l \frac{km\mu dx}{(a-x)^2}$

(C) $\int_{-\frac{l}{2}}^0 \frac{km\mu dx}{(a+x)^2}$

(D) $2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{km\mu dx}{(a+x)^2}$

【答案】 A.

【解析】 如右图建立坐标系, 则区间 $[x, x+dx]$ 对应的细棒对质点的引力近似等于

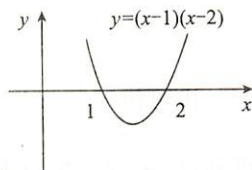
$$dF = \frac{km\mu dx}{(a-x)^2}$$

则所求引力为 $F = \int_{-l}^0 \frac{km\mu dx}{(a-x)^2}$.

102 (1991, 六题, 9分) 曲线 $y = (x-1)(x-2)$ 和 x 轴围成一平面图形, 求此平面图形绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积.

【解】 曲线 $y = (x-1)(x-2)$ 如右图, 所求体积为

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_1^2 x |(x-1)(x-2)| dx \\ &= 2\pi \int_1^2 x(x-1)(2-x) dx = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

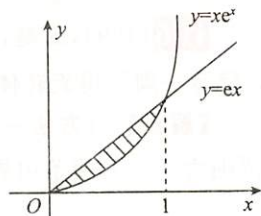


103 (1992, 一(5)题, 3分) 由曲线 $y = xe^x$ 与直线 $y = ex$ 所围成图形的面积 $S =$ _____.

【答案】 $\frac{e}{2} - 1$.

【解析】 所围图形如右图, 由 $xe^x = ex$ 得两曲线交点为 $(0, 0), (1, e)$. 则所围图形的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (ex - xe^x) dx \\ &= \left(\frac{e}{2}x^2 - xe^x + e^x \right) \Big|_0^1 = \frac{e}{2} - 1 \end{aligned}$$



104 (1992, 六题, 9分) 计算曲线 $y = \ln(1-x^2)$ 上相应于 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 的一段弧的长度.

【解析】 利用弧长计算公式 $s = \int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx$,

这里

$$y' = \frac{-2x}{1-x^2}$$

$$1+y'^2 = 1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}$$

则

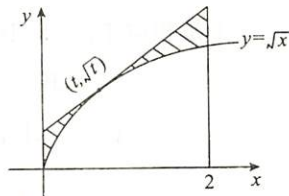
$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2-(1-x^2)}{1-x^2} dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2} - \frac{1}{2} = \ln \frac{1+x}{1-x} \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = \ln 3 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

105 (1992, 七题, 9分) 求曲线 $y = \sqrt{x}$ 的一条切线 l , 使该曲线与切线 l 及直线 $x=0, x=2$ 所围成平面图形面积最小.

【解析】 如右图, 设切点为 $(t, \sqrt{t})$, 则

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

曲线 $y = \sqrt{x}$ 在点 $(t, \sqrt{t})$ 处的切线方程为



$$y - \sqrt{t} = \frac{1}{2\sqrt{t}}(x - t)$$

即

$$y = \frac{1}{2\sqrt{t}}x + \frac{\sqrt{t}}{2}$$

曲线 $y = \sqrt{x}$ 与切线 l 及 $x = 0, x = 2$ 所围成平面图形面积为

$$S(t) = \int_0^2 \left[\frac{1}{2\sqrt{t}}x + \frac{\sqrt{t}}{2} - \sqrt{x} \right] dx = \frac{1}{\sqrt{t}} + \sqrt{t} - \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$S'(t) = -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$$

令 $S'(t) = 0$, 得 $t = 1$. 因为 $S''(1) > 0$, 故 $t = 1$ 时, $S(t)$ 取最小值. 此时, 切线 l 的方程为 $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$.

也可由

$$S(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} + \sqrt{t} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \geq 2 \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \sqrt{t} - \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

可知, $t = 1$ 时, $S(t)$ 最小.

【评注】 由于抛物线 $y = \sqrt{x}$ 与 x 轴及 $x = 2$ 围成图形面积是定值, 本题只要切线 l 与两坐标轴及 $x = 2$ 所围梯形面积最小即可.

106 (1993, 五题, 9 分) 设平面图形 A 由 $x^2 + y^2 \leq 2x$ 与 $y \geq x$ 所确定, 求图形 A 绕直线 $x = 2$ 旋转一周所得旋转体的体积.

【解析】 (方法一) A 的图形如右图所示, 取 y 为积分变量, 它的变化范围为 $[0, 1]$, 两条边界曲线方程分别为

$$x = 1 - \sqrt{1 - y^2}, x = y$$

于是相应于 $[0, 1]$ 区间上任一小区间 $[y, y+dy]$ 的薄片的体积微元为

$$\begin{aligned} dV &= \{ \pi [2 - (1 - \sqrt{1 - y^2})]^2 - \pi (2 - y)^2 \} dy \\ &= 2\pi [\sqrt{1 - y^2} - (y - 1)^2] dy \end{aligned}$$

于是所求体积为

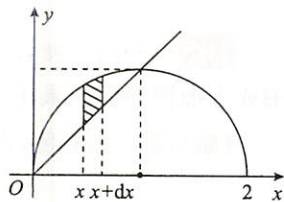
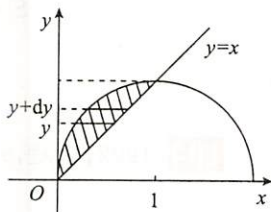
$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 [\sqrt{1 - y^2} - (y - 1)^2] dy \\ &= 2\pi \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}(y - 1)^3 \right] \Big|_0^1 \\ &= 2\pi \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \right] = \frac{\pi^2}{2} - \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

(方法二) 如右图, 取 x 为积分变量, 它的变化范围为 $[0, 1]$, A 的两条边界曲线方程分别为

$$y = \sqrt{2x - x^2}, y = x$$

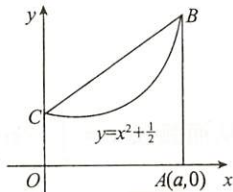
于是相应于 $[0, 1]$ 区间上小区间 $[x, x+dx]$ 薄圆筒的体积微元为

$$\begin{aligned} dV &= 2\pi(2 - x)(\sqrt{2x - x^2} - x) dx \\ V &= 2\pi \int_0^1 (2 - x)(\sqrt{2x - x^2} - x) dx \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= 2\pi \left[\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (2-2x) \sqrt{2x-x^2} dx - \int_0^1 (2x-x^2) dx \right] \\
&= 2\pi \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} (2x-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 - \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 \right] \\
&= 2\pi \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \right] \\
&= \frac{\pi^2}{2} - \frac{2\pi}{3}
\end{aligned}$$

107 (1994, 三(5)题, 5分) 如右图, 设曲线方程为 $y = x^2 + \frac{1}{2}$, 梯形 $OABC$ 的面积为 D , 曲线梯形 $OABC$ 的面积为 D_1 , 点 A 的坐标为 $(a, 0)$, $a > 0$, 证明: $\frac{D}{D_1} < \frac{3}{2}$.



【证明】 $D_1 = \int_0^a \left(x^2 + \frac{1}{2} \right) dx = \frac{a^3}{3} + \frac{a}{2} = \frac{a(2a^2+3)}{6}$

$$D = \frac{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + a^2 \right)}{2} a = \frac{a(1+a^2)}{2}$$

则

$$\frac{D}{D_1} = \frac{3}{2} \frac{a^2+1}{a^2+\frac{3}{2}} < \frac{3}{2}$$

108 (1994, 八题, 9分) 求曲线 $y = 3 - |x^2 - 1|$ 与 x 轴围成封闭图形绕直线 $y = 3$ 旋转一周所得旋转体体积.

【解】 如右图, $\widehat{AB}$ 的方程为: $y = x^2 + 2$ ($-1 \leq x \leq 1$), $\widehat{BC}$ 的方程为 $y = 4 - x^2$ ($1 \leq x \leq 2$).

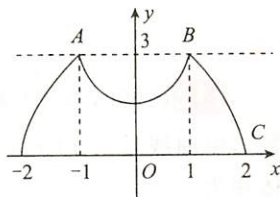
设旋转体在区间 $[0, 1]$ 上的体积为 V_1 , 在区间 $[1, 2]$ 上的体积为 V_2 , 则它们的体积元分别为

$$dV_1 = \pi \{ 3^2 - [3 - (x^2 + 2)]^2 \} dx$$

$$dV_2 = \pi \{ 3^2 - [3 - (4 - x^2)]^2 \} dx$$

$$V = 2(V_1 + V_2)$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \int_0^1 \{ 3^2 - [3 - (x^2 + 2)]^2 \} dx + 2\pi \int_1^2 \{ 3^2 - [3 - (4 - x^2)]^2 \} dx \\
&= 2\pi \int_0^2 (8 + 2x^2 - x^4) dx = \frac{448}{15} \pi
\end{aligned}$$



109 (1995, 二(2)题, 3分) 曲线 $y = x(x-1)(2-x)$ 与 x 轴所围图形面积可表示为

(A) $-\int_0^2 x(x-1)(2-x) dx$.

(B) $\int_0^1 x(x-1)(2-x) dx - \int_1^2 x(x-1)(2-x) dx$.

(C) $-\int_0^1 x(x-1)(2-x) dx + \int_1^2 x(x-1)(2-x) dx$.

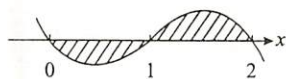
(D) $\int_0^2 x(x-1)(2-x) dx$.

【答案】 C.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

【解析】 曲线 $y = x(x-1)(x-2)$ 与 x 轴所围成图形如右图, 则

$$S = -\int_0^1 x(x-1)(x-2)dx + \int_1^2 x(x-1)(x-2)dx.$$



110 (1995, 三(5)题, 5分) 求摆线 $\begin{cases} x = 1 - \cos t, \\ y = t - \sin t \end{cases}$ 一拱 ($0 \leq t \leq 2\pi$) 的弧长.

【解析】 $\frac{dx}{dt} = \sin t, \frac{dy}{dt} = 1 - \cos t$, 所以,

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{\sin^2 t + (1 - \cos t)^2} dt \\ &= \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = 2 \sin \frac{t}{2} dt \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \end{aligned}$$

从而弧长 $s = \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{t}{2} dt = 8$.

111 (1996, 一(5)题, 3分) 由曲线 $y = x + \frac{1}{x}$, $x = 2$ 及 $y = 2$ 所围图形的面积 $S =$ _____.

【答案】 $\ln 2 - \frac{1}{2}$.

【解析】 $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$, 则

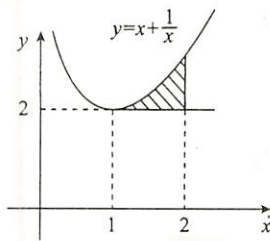
当 $x \in (0, 1)$ 时, $y' < 0$, y 单调递减,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $y' > 0$, y 单调递增.

$$y(1) = 2$$

则所求面积为

$$S = \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x} - 2 \right) dx = \ln 2 - \frac{1}{2}$$



112 (1996, 二(5)题, 3分) 设 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(x) < f(x) < m$ (m 为常数), 由曲线 $y = g(x), y = f(x), x = a$ 及 $x = b$ 所围平面图形绕直线 $y = m$ 旋转而成的旋转体体积为

(A) $\int_a^b \pi [2m - f(x) + g(x)][f(x) - g(x)] dx.$

(B) $\int_a^b \pi [2m - f(x) - g(x)][f(x) - g(x)] dx.$

(C) $\int_a^b \pi [m - f(x) + g(x)][f(x) - g(x)] dx.$

(D) $\int_a^b \pi [m - f(x) - g(x)][f(x) - g(x)] dx.$

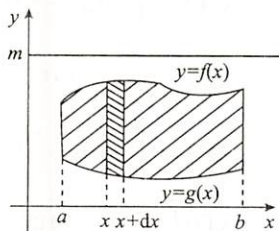
【答案】 B.

【解析】 如右图, 区间 $[x, x+dx]$ 上对应的体积微元为

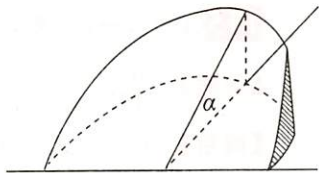
$$\begin{aligned} dV &= \pi [m - g(x)]^2 dx - \pi [m - f(x)]^2 dx \\ &= \pi [2m - f(x) - g(x)][f(x) - g(x)] dx \end{aligned}$$

$$V = \int_a^b \pi [2m - f(x) - g(x)][f(x) - g(x)] dx$$

故应选 (B).



113 (1996, 三(6) 题, 5 分) 设有一正圆柱体, 其底面的长、短轴分别为 $2a, 2b$, 用过此柱体底面的短轴且底面成 α 角 ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) 的平面截此柱体, 得一楔形体 (如右图), 求此楔形体的体积 V .



【解】 底面椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 以垂直于 y 轴的平面截此楔形体所得截面为直角三角形, 其一直角边的长为 $a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$, 另一直角边为 $a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \tan \alpha$, 则截面面积为

$$S(y) = \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \tan \alpha$$

楔形体体积为

$$V = 2 \int_0^b \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \tan \alpha dy = \frac{2a^2b}{3} \tan \alpha$$

114 (1997, 六题, 8 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 在开区间 $(0, 1)$ 内大于零, 并满足 $xf'(x) = f(x) + \frac{3a}{2}x^2$ (a 为常数), 又曲线 $y = f(x)$ 与 $x = 1, y = 0$ 所围的图形 S 的面积值为 2, 求函数 $y = f(x)$, 并问 a 为何值时, 图形 S 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积最小.

【解】 由题设知, 当 $x \neq 0$ 时,

$$\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{3a}{2}$$

即

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{x} \right] = \frac{3}{2}a$$

据此并由 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性, 得

$$f(x) = \frac{3}{2}ax^2 + Cx, x \in [0, 1]$$

又由已知条件得

$$2 = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}ax^2 + Cx \right) dx = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}C$$

即 $C = 4 - a$.

$$\text{因此 } f(x) = \frac{3}{2}ax^2 + (4 - a)x.$$

旋转体的体积为

$$\begin{aligned} V(a) &= \pi \int_0^1 f^2(x) dx = \pi \int_0^1 \left[\frac{3}{2}ax^2 + (4 - a)x \right]^2 dx \\ &= \left(\frac{1}{30}a^2 + \frac{1}{3}a + \frac{16}{3} \right) \pi \end{aligned}$$

$$\text{由 } V'(a) = \left(\frac{1}{15}a + \frac{1}{3} \right) \pi = 0 \text{ 得 } a = -5,$$

$$\text{又 } V''(a) = \frac{\pi}{15} > 0,$$

故 $a = -5$ 时, 旋转体体积最小.

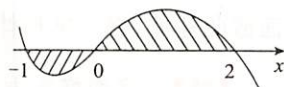
115 (1998, (2) 题, 3 分) 曲线 $y = -x^3 + x^2 + 2x$ 与 x 轴所围成的图形的面积 $A =$ _____.

【答案】 $\frac{37}{12}$.

【解析】 $y = -x^3 + x^2 + 2x = -x(x+1)(x-2)$

则其图形如右图,

则所求面积为



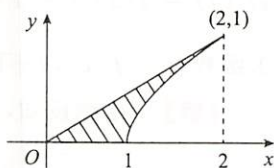
$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 (-y) dx + \int_0^2 y dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - 2x) dx + \int_0^2 (-x^3 + x^2 + 2x) dx \\ &= \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12} \end{aligned}$$

116 (1998, 九题, 8 分) 设有曲线 $y = \sqrt{x-1}$, 过原点作其切线, 求由此曲线、切线及 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体的表面积.

【解】 设切点为 $(x_0, \sqrt{x_0-1})$, 则过原点的切线方程为 $y = \frac{1}{2\sqrt{x_0-1}}x$.

再将点 $(x_0, \sqrt{x_0-1})$ 代入上式, 解得 $x_0 = 2, y_0 = \sqrt{x_0-1} = 1$, 则上述切线方程为 $y = \frac{1}{2}x$.

如右图, 曲线 $y = \sqrt{x-1} (1 \leq x \leq 2)$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转面的面积



$$S_1 = \int_1^2 2\pi y \sqrt{1+y'^2} dx = \pi \int_1^2 \sqrt{4x-3} dx = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5}-1)$$

由直线段 $y = \frac{1}{2}x (0 \leq x \leq 2)$ 绕 x 轴旋转一周所得到的旋转面的面积

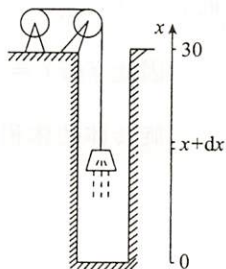
$$S_2 = \int_0^2 2\pi \cdot \frac{1}{2}x \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} dx = \sqrt{5}\pi$$

因此, 所求旋转体的表面积为

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\pi}{6} (11\sqrt{5}-1)$$

117 (1999, 六题, 7 分) 为清除井底的污泥, 用缆绳将抓斗放入井底, 抓起污泥后提出井口 (见图). 已知井深 30m, 抓斗自重 400N, 缆绳每米重 50N, 抓斗抓起的污泥重 2000N, 提升速度为 3m/s, 在提升过程中, 污泥以 20N/s 的速率从抓斗缝隙中漏掉, 现将抓起污泥的抓斗提升至井口, 问克服重力需做多少焦耳的功?

(说明: ① $1\text{N} \times 1\text{m} = 1\text{J}$; 其中 m, N, s, J 分别表示米, 牛顿, 秒, 焦耳. ② 抓斗的高度及位于井口上方的缆绳长度忽略不计.)



【解】 (方法一) 作 x 轴如图所示, 将抓起污泥的抓斗提升到井口所作功

$$W = W_1 + W_2 + W_3$$

其中 W_1 是克服抓斗自重作的功; W_2 是克服缆绳重力所做的功; W_3 是提出污泥所作的功, 由题意知

$$W_1 = 400 \times 30 = 12000$$

$$dW_2 = 50(30 - x)dx$$

从而

$$W_2 = \int_0^{30} 50(30 - x)dx = 22500$$

在时间间隔 $[t, t + dt]$ 内提升污泥所作的功为 $dW_3 = 3(2000 - 20t)dt$.

$$W_3 = \int_0^{10} 3(2000 - 20t)dt = 57000$$

则共需作功

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = 12000 + 22500 + 57000 = 91500(\text{J})$$

(方法二) 以时间 t 为积分变量, 在时间间隔 $[t, t + dt]$ 内克服重力所作的功为

$$dW = [400 + (30 - 3t)50 + (2000 - 20t)]3dt$$

$$W = \int_0^{10} [400 + (30 - 3t)50 + (2000 - 20t)]3dt = 91500(\text{J})$$

118 (2000, 十题, 8分) 设曲线 $y = ax^2 (a > 0, x \geq 0)$ 与 $y = 1 - x^2$ 交于点 A , 过坐标原点 O 和点 A 的直线与曲线 $y = ax^2$ 围成一平面图形. 问 a 为何值时, 该图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积最大? 最大体积是多少?

【解】 当 $x \geq 0$ 时, 由 $\begin{cases} y = ax^2 \\ y = 1 - x^2 \end{cases}$, 解得 $x = \frac{1}{\sqrt{1+a}}, y = \frac{a}{1+a}$, 故直线 OA 的方程为

$$y = \frac{ax}{\sqrt{1+a}}$$

旋转体体积

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}} \left(\frac{a^2 x^2}{1+a} - a^2 x^4 \right) dx \\ &= \pi \left[\frac{a^2}{3(1+a)} x^3 - \frac{a^2}{5} x^5 \right] \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}} \\ &= \frac{2\pi}{15} \cdot \frac{a^2}{(1+a)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{da} &= \frac{2\pi}{15} \cdot \frac{2a(1+a)^{\frac{5}{2}} - a^2 \cdot \frac{5}{2}(1+a)^{\frac{3}{2}}}{(1+a)^5} \\ &= \frac{\pi(4a - a^2)}{15(1+a)^{\frac{7}{2}}} \quad (a > 0) \end{aligned}$$

令 $\frac{dV}{da} = 0$, 并由 $a > 0$ 得唯一驻点 $a = 4$.

由题意知, 此旋转体在 $a = 4$ 时取最大值, 最大值为

$$V = \frac{2\pi}{15} \cdot \frac{16}{5^{\frac{5}{2}}} = \frac{32\sqrt{5}}{1875}\pi$$

119 (2001, 五题, 7分) 设 $\rho = \rho(x)$ 是抛物线 $y = \sqrt{x}$ 上任一点 $M(x, y) (x \geq 1)$ 处的曲率半径, $s = s(x)$ 是该抛物线上介于点 $A(1, 1)$ 与 M 之间的弧长, 计算 $3\rho \frac{d^2\rho}{ds^2} - \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2$ 的值.

$$\left[\text{在直角坐标系下曲率公式为 } K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right].$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

【解】 由 $y = \sqrt{x}$ 知, $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $y'' = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$,

该抛物线在点 $M(x, y)$ 处的曲率半径为

$$\rho = \rho(x) = \frac{1}{K} = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} = \frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}}$$

抛物线上 $\widehat{AM}$ 的弧长

$$s = s(x) = \int_1^x \sqrt{1+y'^2} dt = \int_1^x \sqrt{1+\frac{1}{4t}} dt$$

$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{\frac{d\rho}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}(4x+1)^{\frac{1}{2}} \cdot 4}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}} = 6\sqrt{x}$$

$$\frac{d^2\rho}{ds^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d\rho}{ds} \right) \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dx}} = \frac{6}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}} = \frac{6}{\sqrt{4x+1}}$$

$$\text{因此, } 3\rho \frac{d^2\rho}{ds^2} - \left(\frac{d\rho}{ds} \right)^2 = 3 \cdot \frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{6}{\sqrt{4x+1}} - 36x = 9.$$

120 (2002, 一(2) 题, 3 分) 位于曲线 $y = xe^{-x} (0 \leq x < +\infty)$ 下方, x 轴上方的无界图形的面积是_____.

【答案】 1.

【解析】 所求面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{+\infty} xe^{-x} dx = - \int_0^{+\infty} x de^{-x} \\ &= -xe^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \\ &= 0 + (-e^{-x}) \Big|_0^{+\infty} \\ &= 1 \end{aligned}$$

121 (2002, 七题, 7 分) 某闸门的形状与大小如图所示, 其中直线 l 为对称轴, 闸门的上部为矩形 $ABCD$, 下部由二次抛物线与线段 AB 所围成. 当水面与闸门的上端相平时, 欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为 5:4, 闸门矩形部分的高 h 应为多少 m(米)?

【解】 坐标系建立如右图, 则闸门下部抛物线的方程为

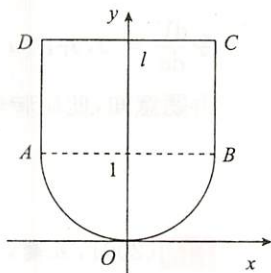
$$y = x^2 \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

由水侧压力公式知, 闸门矩形部分所承受的水压力为

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_1^{h+1} 2\rho g[(h+1)-y] dy \\ &= 2\rho g \left[(h+1)y - \frac{1}{2}y^2 \right] \Big|_1^{h+1} = \rho gh^2 \end{aligned}$$

同理, 闸门下部所承受的压力为

$$\begin{aligned} F_2 &= \int_0^1 2\rho g[(h+1)-y] \sqrt{y} dy \\ &= 2\rho g \left[\frac{2}{3}(h+1)y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} \right] \Big|_0^1 \end{aligned}$$



$$= 4\rho g \left(\frac{1}{3}h + \frac{2}{15} \right)$$

由于 $\frac{F_1}{F_2} = \frac{5}{4}$, 则 $\frac{\rho g h^2}{4\rho g \left(\frac{1}{3}h + \frac{2}{15} \right)} = \frac{5}{4}$, 即 $3h^2 - 5h - 2 = 0$.

解得 $h = 2, h = -\frac{1}{3}$ (舍去). 因此, 闸门矩形部分高为 2 m.

122 (2003, 一(4)题, 4分) 设曲线的极坐标方程为 $\rho = e^{a\theta}$ ($a > 0$), 则该曲线上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积为_____.

【答案】 $\frac{1}{4a}(e^{4\pi a} - 1)$.

【解析】 所围面积为

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (e^{a\theta})^2 d\theta = \frac{1}{4a} (e^{4\pi a} - 1)$$

123 (2004, 18题, 12分) 曲线 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 与直线 $x = 0, x = t$ ($t > 0$) 及 $y = 0$ 围成一曲边梯形. 该曲边梯形绕 x 轴旋转一周得一旋转体, 其体积为 $V(t)$, 侧面积为 $S(t)$, 在 $x = t$ 处的底面积为 $F(t)$.

(1) 求 $\frac{S(t)}{V(t)}$ 的值;

(2) 计算极限 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{S(t)}{F(t)}$.

【解】 (1)

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^t 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} dx \\ &= 2\pi \int_0^t \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \sqrt{1 + \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}} dx \\ &= 2\pi \int_0^t \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 dx \\ V(t) &= \pi \int_0^t \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 dx \end{aligned}$$

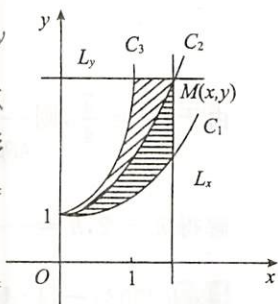
所以 $\frac{S(t)}{V(t)} = 2$.

$$(2) F(t) = \pi y^2 \Big|_{x=t} = \pi \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^2.$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{S(t)}{F(t)} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2\pi \int_0^t \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 dx}{\pi \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2\pi \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^2}{2\pi \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right) \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}} = 1 \end{aligned}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

124 (2005, 16 题, 11 分) 如图所示, C_1 和 C_2 分别是 $y = \frac{1}{2}(1 + e^x)$ 和 $y = e^x$ 的图像, 过点 $(0, 1)$ 的曲线 C_3 是一单调增函数图像. 过 C_2 上任一点 $M(x, y)$ 分别作垂直于 x 轴和 y 轴的直线 L_x 和 L_y . 记 C_1, C_2 与 L_x 所围图形的面积为 $S_1(x)$; C_2, C_3 与 L_y 所围图形的面积为 $S_2(y)$. 如果总有 $S_1(x) = S_2(y)$, 求曲线 C_3 的方程 $x = \varphi(y)$.



【分析】 先写出 $S_1(x)$ 和 $S_2(y)$ 的积分表达式, 然后等式 $S_1(x) = S_2(y)$ 两边对 x 求导, 解出 $x = \varphi(y)$.

【解】 由题设知

$$S_1(x) = \int_0^x [e^t - \frac{1}{2}(1 + e^t)] dt,$$

$$S_2(y) = \int_1^y [\ln t - \varphi(t)] dt.$$

又 $S_1(x) = S_2(y)$, 则

$$\int_0^x (\frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}) dt = \int_1^y [\ln t - \varphi(t)] dt$$

等式两端对 x 求导, 得

$$\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2} = [\ln y - \varphi(y)] \frac{dy}{dx}$$

由 $y = e^x$ 得

$$\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2} = [x - \varphi(e^x)]e^x$$

于是

$$\varphi(e^x) = x + \frac{1}{2e^x} - \frac{1}{2}$$

从而

$$\varphi(y) = \ln y + \frac{1}{2y} - \frac{1}{2}$$

故曲线 C_3 的方程为 $x = \ln y + \frac{1}{2y} - \frac{1}{2}$.

125 (2006, 21 题, 12 分) 已知曲线 L 的方程为: $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = 4t - t^2 \end{cases} (t \geq 0)$.

(I) 讨论 L 的凹凸性;

(II) 过点 $(-1, 0)$ 引 L 的切线, 求切点 (x_0, y_0) , 并写出切线的方程;

(III) 求此切线与 L (对应于 $x \leq x_0$ 的部分) 及 x 轴所围成的平面图形的面积.

【分析】 为确定 L 的凹凸性, 须先求二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 并确定其正负, 要解第 (II) 问, 首先要求出曲线上点 (x_0, y_0) 对应的参数 t_0 处的斜率, 然后求出切线方程, 由 (I) 和 (II) 可知所求平面图形的基本形状, 从而求出其面积.

【解】 (方法一) (I) 由于

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{4-2t}{2t} = \frac{2}{t} - 1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{2}{t} - 1 \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \left(-\frac{2}{t^2} \right) \cdot \frac{1}{x'(t)} = -\frac{1}{t^3}$$

当 $t > 0$ 时, $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, 故 L 是凸的;

(II) 当 $t=0$ 时, $x'(0)=0, y'(0)=4, x(0)=1, y(0)=0, \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = \infty$, 则当 $t=0$ 时, L 在对应点处切线方程为 $x=1$, 不合题意, 故设切点 (x_0, y_0) 对应的参数为 $t_0 > 0$, 则 L 在 (x_0, y_0) 处的切线方程为

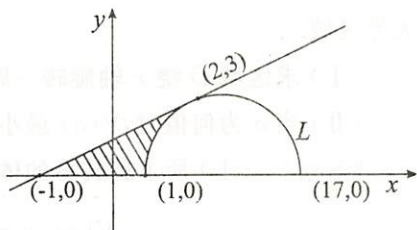
$$y - (4t_0 - t_0^2) = \left(\frac{2}{t_0} - 1 \right) (x - t_0^2 - 1)$$

令 $x=-1, y=0$, 得 $t_0^2 + t_0 - 2 = 0$, 解得 $t_0 = 1$ 或 $t_0 = -2$ (舍去)

由 $t_0 = 1$ 知, 切点为 $(2, 3)$, 且切线方程为 $y = x + 1$.

(III) 令 $y = 4t - t^2 = 0$, 得 $t_1 = 0, t_2 = 4$, 对应曲线 L 与 x 轴的两个交点 $(1, 0)$ 和 $(17, 0)$, 由以上讨论知曲线 L 和所求的切线如图所示, 故所求平面图形的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 (x+1) dx - \int_1^2 y dx \\ &= \frac{9}{2} - \int_0^1 (4t - t^2) d(t^2 + 1) \\ &= \frac{9}{2} - \int_0^1 (4t - t^2) \cdot 2t dt \\ &= \frac{7}{3}. \end{aligned}$$



(方法二) (I) 同方法一.

(II) 由 $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = 4t - t^2 \end{cases} (t \geq 0)$ 知 $t = \sqrt{x-1}$, 所以

$$y = 4t - t^2 = 4\sqrt{x-1} - (x-1)$$

由于当 $x_0 = 1$ 时, L 在对应点处切线方程为 $x=1$, 不合题意, 故可设 L 在点 (x_0, y_0) 处的切线方程为

$$y - y_0 = \left(\frac{2}{\sqrt{x_0-1}} - 1 \right) (x - x_0), (x_0 > 1)$$

将 $x=-1, y=0$ 代入上式, 得

$$-y_0 = \left(\frac{2}{\sqrt{x_0-1}} - 1 \right) (-1 - x_0)$$

$$-4\sqrt{x_0-1} + (x_0 - 1) = \frac{-2 + \sqrt{x_0-1}}{\sqrt{x_0-1}} (x_0 + 1)$$

整理得 $(x_0 - 1) + \sqrt{x_0-1} - 2 = 0$, 即 $(\sqrt{x_0-1} + 2)(\sqrt{x_0-1} - 1) = 0$, 解得 $x_0 = 2$, 并得 $y_0 = 3$, 因此切线方程为 $y = x + 1$.

(III) 在 $y = 4\sqrt{x-1} - (x-1)$ 中令 $y=0$, 得 L 与 x 轴的交点为 $(1, 0)$ 和 $(17, 0)$, 故所求平面图形的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 (x+1) dx - \int_1^2 [4\sqrt{x-1} - (x-1)] dx \\ &= \frac{9}{2} - \left[\frac{8}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}(x-1)^2 \right] \Big|_1^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{13}{6} = \frac{7}{3}.$$

【评注】 本题主要考查的是参数方程确定的函数的导数,参数方程所表示的曲线的切线及所围的面积.由于曲线是用参数方程表示的,因此,在解第(Ⅱ)(Ⅲ)两问时应用参数方程比较方便,即方法一较方便,而把参数方程化为直角坐标方程(即方法二)稍繁一些.

考生的问题主要是

- (1) 部分考生将参数方程二阶导数求错;
- (2) 不少考生搞不清参数方程所表示的曲线 L 的基本形状,当然面积也就求错了.

126 (2007, 18 题, 11 分) 设 D 是位于曲线 $y = \sqrt{x}a^{-\frac{x}{a}} (a > 1, 0 \leq x < +\infty)$ 下方, x 轴上方的无界区域.

- (Ⅰ) 求区域 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积 $V(a)$;
- (Ⅱ) 当 a 为何值时, $V(a)$ 最小? 并求此最小值.

【解法】 (Ⅰ) 所求旋转体的体积为

$$\begin{aligned} V(a) &= \pi \int_0^{+\infty} y^2(x) dx = \pi \int_0^{+\infty} xa^{-\frac{x}{a}} dx \\ &= -\frac{a\pi}{\ln a} \int_0^{+\infty} x d(a^{-\frac{x}{a}}) \\ &= -\frac{a\pi}{\ln a} (xa^{-\frac{x}{a}}) \Big|_0^{+\infty} + \frac{a\pi}{\ln a} \int_0^{+\infty} a^{-\frac{x}{a}} dx \\ &= \pi \left(\frac{a}{\ln a} \right)^2. \end{aligned}$$

$$(Ⅱ) V'(a) = 2\pi \frac{a(\ln a - 1)}{\ln^3 a}.$$

令 $V'(a) = 0$, 得 $\ln a = 1$, 从而 $a = e$.

当 $1 < a < e$ 时, $V'(a) < 0$, $V(a)$ 单调减少;

当 $a > e$ 时, $V'(a) > 0$, $V(a)$ 单调增加, 所以, $a = e$ 时, $V(a)$ 最小, 最小体积为

$$V(e) = \pi \left(\frac{e}{\ln e} \right)^2 = \pi e^2$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

第四章 多元函数微分学

本章导读

本章主要研究二元函数的偏导数、全微分等概念,要掌握计算它们的各种方法以及它们的应用.一元函数中的许多结论可以推广到二元函数中来,但有些结论是不成立的.二元函数微分学要比一元函数的微分学要复杂的多,我们要掌握它们的共同规律,踏踏实实地做一些题目,一定会收到预期的效果.

试题特点

每年试题一般是一个大题、一个小题,分数约占试卷的8%,主要考查复合函数求偏导数及多元函数的极值,难度不是很大.一定要熟练掌握复合函数求偏导数的公式,特别要注意抽象函数求高阶偏导数的题目,以及复合函数求偏导数的方法在隐函数求偏导中的应用.同时,多元函数微分学在几何中的应用和求函数的极值、最值也是考研数学的一个重点.

考题详析

一、基本概念及性质

1 (2007, 7题, 4分) 二元函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微的一个充分条件是

- (A) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} [f(x, y) - f(0, 0)] = 0$.
 (B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$, 且 $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0$.
 (C) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$.
 (D) $\lim_{x \rightarrow 0} [f'_x(x, 0) - f'_x(0, 0)] = 0$, 且 $\lim_{y \rightarrow 0} [f'_y(0, y) - f'_y(0, 0)] = 0$.

【答案】 C.

【解析】 事实上, 由 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ 可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + 0^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2}}{x} = 0$$

即 $f'_x(0, 0) = 0$,

同理有 $f'_y(0, 0) = 0$. 从而

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{[f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0)] - (f'_x(0, 0)\Delta x + f'_y(0, 0)\Delta y)}{\rho} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0)}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0. \end{aligned}$$

根据可微的判定条件可知函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微, 故应选(C).

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

【评注】 1. 二元函数连续或偏导数存在均不能推出可微, 只有当一阶偏导数连续时, 才可微.

2. 本题也可用排除法, (A) 是函数在 $(0,0)$ 连续的定义; (B) 是函数在 $(0,0)$ 处偏导数存在的条件; (D) 说明一阶偏导数 $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$ 存在, 但不能推导出两个一阶偏导函数 $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续, 所以 (A)(B)(D) 均不能保证 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, 故应选 (C).

二、求多元函数的偏导数及全微分

2 (2004, 4 题, 4 分) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $z = e^{2x-3z} + 2y$ 确定, 则 $3 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

【答案】 2.

【解析】 此题可利用复合函数求偏导法、公式法或全微分公式求解.

(方法一) 在 $z = e^{2x-3z} + 2y$ 的两边分别对 x, y 求偏导, z 为 x, y 的函数.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{2x-3z} \left(2 - 3 \frac{\partial z}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{2x-3z} \left(-3 \frac{\partial z}{\partial y} \right) + 2$$

从而

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{1+3e^{2x-3z}}$$

$$\text{所以 } 3 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2 \cdot \frac{1+3e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}} = 2.$$

(方法二) 令 $F(x, y, z) = e^{2x-3z} + 2y - z = 0$,

$$\text{则 } \frac{\partial F}{\partial x} = e^{2x-3z} \cdot 2, \frac{\partial F}{\partial y} = 2, \frac{\partial F}{\partial z} = e^{2x-3z}(-3) - 1,$$

$$\text{所以 } \frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = - \frac{e^{2x-3z} \cdot 2}{-(1+3e^{2x-3z})} = \frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = - \frac{2}{-(1+3e^{2x-3z})} = \frac{2}{1+3e^{2x-3z}},$$

$$\text{从而 } 3 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2 \left(\frac{3e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}} + \frac{1}{1+3e^{2x-3z}} \right) = 2.$$

(方法三) 利用全微分公式, 得

$$\begin{aligned} dz &= e^{2x-3z} (2dx - 3dz) + 2dy = 2e^{2x-3z} dx + 2dy - 3e^{2x-3z} dz \\ (1+3e^{2x-3z}) dz &= 2e^{2x-3z} dx + 2dy \end{aligned}$$

$$\text{所以 } dz = \frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}} dx + \frac{2}{1+3e^{2x-3z}} dy,$$

$$\text{即 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{1+3e^{2x-3z}},$$

$$\text{从而 } 3 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2.$$

【评注】 此题属于典型的隐函数求偏导.

3 (2004, 21 题, 10 分) 设 $z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$, 其中 f 具有连续二阶偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

【分析】 利用复合函数求偏导和混合偏导的方法直接计算.

【解】

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 2xf'_1 + ye^{xy}f'_2 \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -2yf'_1 + xe^{xy}f'_2 \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= 2x[f''_{11} \cdot (-2y) + f''_{12} \cdot xe^{xy}] + e^{xy}f'_2 + xy e^{xy}f'_2 + ye^{xy}[f''_{21} \cdot (-2y) + f''_{22} \cdot xe^{xy}] \\ &= -4xyf''_{11} + 2(x^2 - y^2)e^{xy}f''_{12} + xy e^{2xy}f''_{22} + e^{xy}(1 + xy)f'_2\end{aligned}$$

【评注】 此题属求抽象复合函数高阶偏导数的常规题型.

4 (2005, 11 题, 4 分) 设函数 $u(x, y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} \psi(t) dt$, 其中函数 φ 具有二阶导数, ψ 具有一阶导数, 则必有

- (A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. (B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.
(C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. (D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

【答案】 B.

【解析】 因为 $\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(x+y) + \varphi'(x-y) + \psi(x+y) - \psi(x-y)$,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(x+y) - \varphi'(x-y) + \psi(x+y) + \psi(x-y),$$

于是 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''(x+y) + \varphi''(x-y) + \psi'(x+y) - \psi'(x-y),$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \varphi''(x+y) - \varphi''(x-y) + \psi'(x+y) + \psi'(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi''(x+y) + \varphi''(x-y) + \psi'(x+y) - \psi'(x-y),$$

可见有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, 应选(B).

【评注】 本题综合考查了复合函数求偏导和隐函数求偏导以及高阶偏导的计算. 作为做题技巧, 也可取 $\varphi(t) = t^2, \psi(t) = 1$, 则 $u(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2y$, 容易验算只有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 成立, 同样可找到正确选项(B).

5 (2007, 15 题, 4 分) 设 $f(u, v)$ 是二元可微函数, $z = f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right)$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} =$

【答案】 $-2\left(f'_1 \frac{y}{x} - f'_2 \frac{x}{y}\right)$.

【解析】 利用求导公式可得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}f'_1 + \frac{1}{y}f'_2, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}f'_1 - \frac{x}{y^2}f'_2$$

所以

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = -2\left(f'_1 \frac{y}{x} - f'_2 \frac{x}{y}\right).$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

【评注】 二元复合函数求偏导时,最好设出中间变量,注意计算的正确性.

6 (2008,13题,4分) 设 $z = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,2)} =$ _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2 - 1)$.

【解析】 两边取对数得 $\ln z = \frac{x}{y} \ln \frac{y}{x} \Rightarrow y \ln z = x(\ln y - \ln x)$,
对 x 求偏导,得

$$y \cdot \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{z} = \ln y - \ln x + x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) = \ln y - \ln x - 1$$

当 $x = 1, y = 2$ 时,有 $z = \sqrt{2}$,代入上式得 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,2)} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2 - 1)$.

【评注】 二元函数 $z = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$ 对 x 求偏导,应当作幂指函数求导,可先取对数或化为指数函数再求导.

三、多元函数的极值

7 (2005,20题,10分) 已知函数 $z = f(x, y)$ 的全微分 $dz = 2xdx - 2ydy$, 并且 $f(1,1) = 2$. 求 $f(x, y)$ 在椭圆域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$ 上的最大值和最小值.

【分析】 根据全微分和初始条件可先确定 $f(x, y)$ 的表达式. 而 $f(x, y)$ 在椭圆域上的最大值和最小值,可能在区域的内部达到,也可能在区域的边界上达到,且在边界上的最值又转化为求条件极值.

【解】 由题设,知 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$,

于是 $f(x, y) = x^2 + C(y)$, 且 $C'(y) = -2y$, 从而 $C(y) = -y^2 + C$,
再由 $f(1,1) = 2$, 得 $C = 2$, 故 $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$.

令 $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ 得可能极值点为 $x = 0, y = 0$.

且 $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(0,0)} = 2, B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(0,0)} = 0, C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(0,0)} = -2$,

从而 $\Delta = B^2 - AC = 4 > 0$, 所以点 $(0,0)$ 不是极值点,从而也非最值点.

再考虑其在边界曲线 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 上的情形: 令拉格朗日函数为

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1),$$

$$\text{解} \quad \begin{cases} F'_x = \frac{\partial f}{\partial x} + 2\lambda x = 2(1+\lambda)x = 0, \\ F'_y = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\lambda y}{2} = -2y + \frac{1}{2}\lambda y = 0, \\ F'_\lambda = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0, \end{cases}$$

得可能极值点 $x=0, y=2, \lambda=4; x=0, y=-2, \lambda=4; x=1, y=0, \lambda=-1; x=-1, y=0, \lambda=-1$. 代入 $f(x, y)$ 得 $f(0, \pm 2) = -2, f(\pm 1, 0) = 3$,

可见 $z = f(x, y)$ 在区域 $D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$ 内的最大值为 3, 最小值为 -2.

【评注】 本题综合考查了多元函数微分学的知识, 涉及到多个重要基础概念, 特别是通过偏导数反求函数关系, 要求考生真正理解并掌握了相关知识.

8 (2006, 12 题, 4 分) 设 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x, y) \neq 0$, 已知 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是

- (A) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$. (B) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$.
(C) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$. (D) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

【答案】 D.

【解析】 作拉格朗日函数 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$, 并记对应 x_0, y_0 的参数 λ 的值为 λ_0 , 则

$$\begin{cases} F'_x(x_0, y_0, \lambda_0) = 0, \\ F'_y(x_0, y_0, \lambda_0) = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} f'_x(x_0, y_0) + \lambda_0 \varphi'_x(x_0, y_0) = 0, \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda_0 \varphi'_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

消去 λ_0 , 得

$$f'_x(x_0, y_0) \varphi'_y(x_0, y_0) - f'_y(x_0, y_0) \varphi'_x(x_0, y_0) = 0$$

整理得 $f'_x(x_0, y_0) = \frac{1}{\varphi'_y(x_0, y_0)} f'_y(x_0, y_0) \varphi'_x(x_0, y_0)$. (因为 $\varphi'_y(x, y) \neq 0$),

若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$. 故选(D).

【评注】 本题考查了二元函数极值的必要条件和拉格朗日乘数法.

9 (2008, 21 题, 11 分) 求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在约束条件 $z = x^2 + y^2$ 和 $x + y + z = 4$ 下的最大和最小值.

【解】 设拉格朗日函数为

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(z - x^2 - y^2) + \mu(x + y + z - 4)$$

$$\text{令 } \begin{cases} F'_x(x, y, z) = 2x - 2\lambda x + \mu = 0, \\ F'_y(x, y, z) = 2y - 2\lambda y + \mu = 0, \\ F'_z(x, y, z) = 2z + \lambda + \mu = 0, \\ F'_\lambda(x, y, z) = z - x^2 - y^2 = 0, \\ F'_\mu(x, y, z) = x + y + z - 4 = 0. \end{cases}$$

$$\text{得 } \begin{cases} x = -2, \\ y = -2, \text{ 或 } \\ z = 8, \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \\ z = 2. \end{cases}$$

故最大值、最小值分别为 $u_{\max} = (-2)^2 + (-2)^2 + 8^2 = 72, u_{\min} = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$.

【评注】 本题考查两个约束条件 $\begin{cases} \varphi(x, y, z) = 0, \\ \psi(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 下的函数 $u = f(x, y, z)$ 的条件极值问题, 可类似地构造拉格朗日函数

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z) + \mu\psi(x, y, z)$$

解出可能极值点后, 直接代入目标函数计算函数值再比较大小确定相应的极值(或最值)即可.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

四、反问题

10 (2006, 20 题, 12 分) 设函数 $f(u)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

(I) 验证 $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$;

(II) 若 $f(1) = 0, f'(1) = 1$, 求函数 $f(u)$ 的表达式.

【分析】 利用复合函数偏导数计算方法求出 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 代入 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 即可得 (I). 按常规方法解 (II) 即可.

【解】 (I) 设 $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'(u) \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + f'(u) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2}$$

$$= f''(u) \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} + f'(u) \cdot \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u) \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2} + f'(u) \cdot \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

将 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 代入 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 得

$$f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$$

(II) 令 $f'(u) = p$, 则 $p' + \frac{p}{u} = 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{du}{u}$, 两边积分得

$$\ln p = -\ln u + \ln C_1$$

即 $p = \frac{C_1}{u}$, 亦即 $f'(u) = \frac{C_1}{u}$.

由 $f'(1) = 1$ 可得 $C_1 = 1$. 所以有 $f'(u) = \frac{1}{u}$, 两边积分得

$$f(u) = \ln u + C_2$$

由 $f(1) = 0$ 可得 $C_2 = 0$, 故 $f(u) = \ln u$.

【评注】 本题为基础题型, 着重考查多元复合函数的偏导数的计算及可降阶方程的求解.

第五章 二重积分

本章导读

本章考查的重点是二重积分的计算,除了掌握基本的计算方法,需注意对称性、拆分区域、拆分函数、交换积分次序、交换积分坐标系等的应用.

试题特点

从2004年起增加了二重积分的内容,是数学二重要的考试知识点,每年试题一般是一个大题、一个小题,分数约占总分的9%,主要集中在二重积分计算的考查,往往在被积函数和积分区域设置障碍,因而要掌握一定的方法和技巧.另外,被积函数为抽象函数的二重积分值得关注.

考题详析

一、二重积分的概念、性质与基本计算

1 (2004, 12题, 4分) 设函数 $f(u)$ 连续, 区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2y\}$, 则 $\iint_D f(xy) dx dy$ 等于

$$(A) \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(xy) dy.$$

$$(B) 2 \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(xy) dx.$$

$$(C) \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r^2 \sin\theta \cos\theta) dr.$$

$$(D) \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r^2 \sin\theta \cos\theta) r dr.$$

【答案】 D.

【解析】 将二重积分化为累次积分的方法是: 先画出积分区域的示意图, 再选择直角坐标系和极坐标系, 并在两种坐标系下化为累次积分.

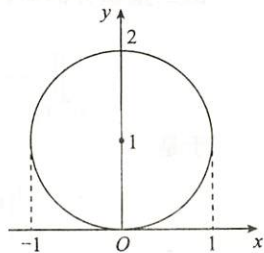
积分区域见图.

在直角坐标系下,

$$\begin{aligned} \iint_D f(xy) dx dy &= \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} f(xy) dx \\ &= \int_{-1}^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(xy) dy \end{aligned}$$

故应排除(A)、(B).

在极坐标系下, $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$,



微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$\iint_D f(xy) dx dy = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r^2 \sin\theta \cos\theta) r dr,$$

故应选(D).

2 (2008, 6 题, 4 分) 设 $f(x)$ 连续, 若 $F(u, v) = \iint_{D_{uv}} \frac{f(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$, 其中区域 D_{uv} 为图中阴影部分, 则 $\frac{\partial F}{\partial u}$

影部分, 则 $\frac{\partial F}{\partial u}$

(A) $vf(u^2)$.

(B) $\frac{v}{u}f(u^2)$.

(C) $vf(u)$.

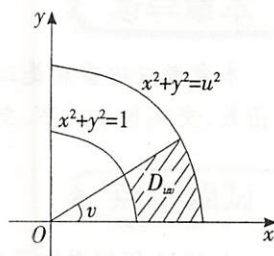
(D) $\frac{v}{u}f(u)$.

【答案】 A.

【解析】 利用极坐标, 有

$$F(u, v) = \int_0^v d\theta \int_1^u \frac{f(r^2)}{r} r dr = v \int_1^u f(r^2) dr$$

于是 $\frac{\partial F}{\partial u} = vf(u^2)$, 故应选(A).



二、利用区域的对称性及函数的奇偶性计算积分

3 (1991, 二(4) 题, 3 分) 设 D 是 xOy 平面上以 $(1, 1)$, $(-1, 1)$ 和 $(-1, -1)$ 为顶点的三角形区域, D_1 是 D 的第一象限的部分, 则 $\iint_D (xy + \cos x \sin y) dx dy$ 等于

(A) $2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy$.

(B) $2 \iint_{D_1} xy dx dy$.

(C) $4 \iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y) dx dy$.

(D) 0.

【答案】 A.

【解析】 根据被积函数的特点, 把积分区域划分, 再利用二重积分的对称性. 把积分区域 D 划分为如图 $D = D_1 + D_2 + D_3 + D_4$.

$$\text{令 } I_1 = \iint_D xy dx dy, I_2 = \iint_D \cos x \sin y dx dy.$$

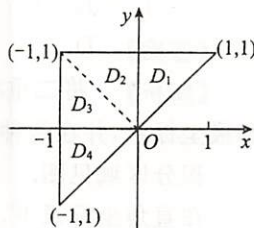
$$\text{由二重积分的对称性 } \iint_{D_1+D_2} xy dx dy = \iint_{D_3+D_4} xy dx dy = 0,$$

$$\iint_{D_3+D_4} \cos x \sin y dx dy = 0, \iint_{D_1+D_2} \cos x \sin y dx dy = 2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy$$

于是

$$\iint_D (xy + \cos x \sin y) dx dy = I_1 + I_2 = 2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy$$

故应选(A).



4 (2005, 10 题, 4 分) 设区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, $f(x)$ 为 D 上的正值连续函数, a, b 为常数, 则 $\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma =$

(A) $ab\pi$.(B) $\frac{ab}{2}\pi$.(C) $(a+b)\pi$.(D) $\frac{a+b}{2}\pi$.**【答案】** D.**【解析】** 由轮换对称性, 有

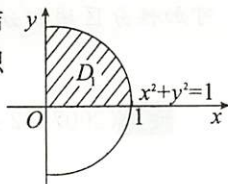
$$\begin{aligned} \iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma &= \iint_D \frac{a\sqrt{f(y)} + b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)} + \sqrt{f(x)}} d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \iint_D \left[\frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} + \frac{a\sqrt{f(y)} + b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)} + \sqrt{f(x)}} \right] d\sigma \\ &= \frac{a+b}{2} \iint_D d\sigma = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{1}{4} \pi \cdot 2^2 = \frac{a+b}{2} \pi. \end{aligned}$$

【评注】 被积函数含有抽象函数时, 一般考虑用对称性分析. 特别, 当具有轮换对称性 (x, y 互换, D 保持不变) 时, 往往用如下方法:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(y, x) dx dy = \frac{1}{2} \iint_D [f(x, y) + f(y, x)] dx dy.$$

5 (2006, 17 题, 10 分) 设区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$, 计算二重积分 $\iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} dx dy$.

【分析】 由于积分区域 D 关于 x 轴对称, 故可先利用二重积分的对称性结论简化所求积分, 又积分区域为圆域的一部分, 则将其化为极坐标系下累次积分即可.



【解】 积分区域 D 如图所示. 因为区域 D 关于 x 轴对称,

函数 $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ 是变量 y 的偶函数,

函数 $g(x, y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$ 是变量 y 的奇函数. 则

$$\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy = 2 \iint_{D_1} \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{r}{1+r^2} dr = \frac{\pi \ln 2}{2}$$

$$\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} dx dy = 0$$

$$\text{故 } \iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} dx dy = \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy + \iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} dx dy = \frac{\pi \ln 2}{2}.$$

【评注】 只要见到积分区域具有对称性的二重积分计算问题, 就要想到考查被积函数或其代数部分的每一部分是否具有奇偶性, 以便简化计算.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

三、分块函数积分的计算

6 (2005, 21 题, 9 分) 计算二重积分 $\iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma$, 其中

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

【分析】 被积函数含有绝对值, 应当作分区域函数看待, 利用积分的可加性分区域积分即可.

【解】 记 $D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, (x, y) \in D\}$,

$$D_2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 > 1, (x, y) \in D\},$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } \iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma &= -\iint_{D_1} (x^2 + y^2 - 1) dx dy + \iint_{D_2} (x^2 + y^2 - 1) dx dy \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (r^2 - 1) r dr + \iint_{D_2} (x^2 + y^2 - 1) dx dy - \iint_{D_1} (x^2 + y^2 - 1) dx dy \\ &= \frac{\pi}{8} + \int_0^1 dx \int_0^1 (x^2 + y^2 - 1) dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (r^2 - 1) r dr \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

【评注】 形如积分 $\iint_D |f(x, y)| d\sigma$, $\iint_D \max\{f(x, y), g(x, y)\} d\sigma$, $\iint_D \min\{f(x, y), g(x, y)\} d\sigma$, $\iint_D [f(x, y)] d\sigma$, $\iint_D \operatorname{sgn}\{f(x, y) - g(x, y)\} d\sigma$ 等的被积函数均应当作分区域函数看待, 利用积分的可加性分区域积分.

7 (2007, 22 题, 11 分) 设二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} x^2, & |x| + |y| \leq 1, \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 < |x| + |y| \leq 2, \end{cases}$ 计算二重

积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 2\}$.

【分析】 由于积分区域关于 x, y 轴均对称, 所以利用二重积分的对称性结论简化所求积分.

【解】 因为被积函数关于 x, y 均为偶函数, 且积分区域关于 x, y 轴均对称, 所以

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 4 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma, \text{ 其中 } D_1 \text{ 为 } D \text{ 在第一象限内的部分.}$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma &= \iint_{x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0} x^2 d\sigma + \iint_{1 < x+y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\sigma \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2 dy + \left(\int_0^1 dx \int_{1-x}^{2-x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy \right) \\ &= \frac{1}{12} + \sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

所以

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \frac{1}{3} + 4\sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2})$$

【评注】 被积函数包含 $\sqrt{x^2+y^2}$ 时,可考虑用极坐标,解答如下:

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{1 \leq x+y \leq 2 \\ x>0, y>0}} f(x,y) d\sigma &= \iint_{\substack{1 \leq x+y \leq 2 \\ x>0, y>0}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}} dr \\ &= \sqrt{2} \ln(1+\sqrt{2}). \end{aligned}$$

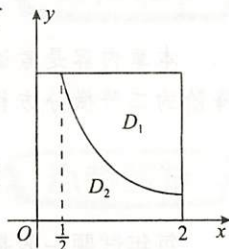
8 (2008, 18 题, 11 分) 计算 $\iint_D \max(xy, 1) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$.

【分析】 被积函数 $f(x, y) = \max(xy, 1)$ 是分区域函数, 要利用积分的可加性分区域积分.

【解】 $\max(xy, 1) = \begin{cases} xy, & xy \geq 1, \\ 1, & xy < 1, \end{cases}$

记 $D_1 = \{(x, y) | xy \geq 1, (x, y) \in D\}$, $D_2 = \{(x, y) | xy < 1, (x, y) \in D\}$, 则

$$\begin{aligned} \iint_D \max(xy, 1) dx dy &= \iint_{D_1} xy dx dy + \iint_{D_2} 1 dx dy \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 xy dy + \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^2 dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_0^{\frac{1}{x}} dy \\ &= \frac{15}{4} - \ln 2 + 1 + 2 \ln 2 = \frac{19}{4} + \ln 2. \end{aligned}$$



四、交换积分次序及坐标系

9 (2006, 11 题, 4 分) 设 $f(x, y)$ 为连续函数, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ 等于

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$

(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$

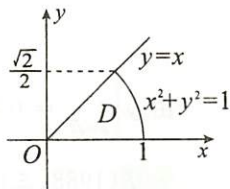
(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$

【答案】 C.

【解析】 由题设可知积分区域 D 如图所示, 显然是 Y 型域, 则

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$$

故选 C.



【评注】 本题为基本题型, 关键是首先画出积分区域的图形.

10 (2007, 8 题, 4 分) 设函数 $f(x, y)$ 连续, 则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy$ 等于

(A) $\int_0^1 dy \int_{\pi+\arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx.$

(B) $\int_0^1 dy \int_{\pi-\arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx.$

(C) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y} f(x, y) dx.$

(D) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y} f(x, y) dx.$

【答案】 B.

【解析】 由题设可知, $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \sin x \leq y \leq 1$, 则 $0 \leq y \leq 1, \pi - \arcsin y \leq x \leq \pi$,

故应选(B).

第六章 常微分方程

本章导读

本章内容是考试的重要组成部分,特别在数学二所占份额更大,主要侧重于一阶微分方程、可降阶的二阶微分方程及二阶常系数线性微分方程的求解,微分方程的应用多涉及几何方面.

试题特点

每年试题一般是一个大题、一个小题,分数约占试卷的10%,难度不是很大.除了各种微分方程的求解,对常系数线性微分方程解的结构及性质的考查也是测试的一个重要方面.特别是近几年涉及几何应用的题目较多.

考题详析

一、一阶微分方程的求解

1 (1987,八(1)题,5分) 求微分方程 $x \frac{dy}{dx} = x - y$ 满足条件 $y|_{x=\sqrt{2}} = 0$ 的特解.

【分析】 此题为一阶线性方程,可利用公式法求出方程的通解,再求满足初始条件的特解.

【解】 原方程变形为 $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 1$,由一阶线性方程通解公式得

$$y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(\int e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right) = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2} x^2 + C \right)$$

由 $y|_{x=\sqrt{2}} = 0$ 得 $C = -1$, 所求的解为 $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{x}$.

2 (1988,三(3)题,5分) 求微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x(x^2+1)}$ 的通解(一般解).

【分析】 此题为一阶线性微分方程,可利用公式法求出方程的通解.

【解】 由一阶线性方程通解公式得

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(\int \frac{1}{x(x^2+1)} e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right) = \frac{1}{x} \left(\int \frac{1}{x^2+1} dx + C \right) \\ &= \frac{1}{x} (\arctan x + C) \end{aligned}$$

3 (1989,四题,6分) 求微分方程 $xy' + (1-x)y = e^{2x}$ ($0 < x < +\infty$) 满足 $y(1) = 0$ 的特解.

【分析】 此题为一阶线性方程,可利用公式法求出方程满足初始条件的特解.

【解】 原方程变形为 $y' + \left(\frac{1}{x} - 1\right)y = \frac{1}{x}e^{2x}$,

由一阶线性方程通解公式得

$$y = e^{-\int(\frac{1}{x}-1)dx} \left(\int \frac{1}{x} e^{2x} e^{\int(\frac{1}{x}-1)dx} dx + C \right) = e^{-\ln x+x} \left(\int \frac{1}{x} e^{2x} e^{\ln x-x} dx + C \right) \\ = \frac{e^x}{x} (e^x + C)$$

由 $y(1) = 0$ 得 $C = -e$, 所求的特解为 $y = \frac{e^x}{x} (e^x - e)$.

4 (1990, 三(5)题, 5分) 求微分方程 $x \ln x dy + (y - \ln x) dx = 0$ 满足条件 $y|_{x=e} = 1$ 的特解.

【分析】 此题为一阶线性方程, 可利用公式法求出方程满足初始条件的特解.

【解】 原方程变形为 $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x \ln x} y = \frac{1}{x}$,

由一阶线性方程通解公式得

$$y = e^{-\int \frac{1}{x \ln x} dx} \left(\int \frac{1}{x} e^{\int \frac{1}{x \ln x} dx} dx + C \right) = \frac{1}{\ln x} \left(\frac{1}{2} \ln^2 x + C \right) = \frac{1}{2} \ln x + \frac{C}{\ln x}$$

由 $y|_{x=e} = 1$ 得 $C = \frac{1}{2}$, 所求的特解为 $y = \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2 \ln x}$.

5 (1991, 三(5)题, 5分) 求微分方程 $xy' + y = xe^x$ 满足 $y(1) = 1$ 的特解.

【分析】 此题为一阶线性方程, 可利用公式法求出方程满足初始条件的特解.

【解】 原方程变形为 $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y = e^x$,

由一阶线性方程通解公式得

$$y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(\int e^x e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right) = \frac{1}{x} (xe^x - e^x + C)$$

由 $y(1) = 1$ 得 $C = 1$, 所求的特解为 $y = \frac{1}{x} (xe^x - e^x + 1)$.

6 (1992, 三(5)题, 5分) 求微分方程 $(y - x^3) dx - 2x dy = 0$ 的通解.

【分析】 此题为一阶线性方程, 可利用公式法求出方程的通解.

【解】 原方程变形为 $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x} y = -\frac{1}{2} x^2$, 由一阶线性方程通解公式得

$$y = e^{\int \frac{1}{2x} dx} \left(\int -\frac{1}{2} x^2 e^{-\int \frac{1}{2x} dx} dx + C \right) = \sqrt{x} \left(-\frac{1}{2} \int x^{\frac{3}{2}} dx + C \right) = C\sqrt{x} - \frac{1}{5} x^3$$

7 (1993, 一(5)题, 3分) 已知曲线 $y = f(x)$ 过点 $(0, -\frac{1}{2})$, 且其上任一点 (x, y) 处的切线斜率为 $x \ln(1+x^2)$, 则 $f(x) =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2} (1+x^2) \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2}$.

【解析】 由导数的几何意义建立微分方程, 解方程求出 $f(x)$.

由已知得

$$y' = x \ln(1+x^2)$$

于是

$$y = \int x \ln(1+x^2) dx = \frac{1}{2} \int \ln(1+x^2) d(1+x^2) \\ = \frac{1}{2} (1+x^2) \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} x^2 + C$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

代入条件 $y(0) = -\frac{1}{2}$, 得 $C = -\frac{1}{2}$. 所以 $f(x) = \frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

8 (1993, 三(5)题, 5分) 求微分方程 $(x^2-1)dy + (2xy - \cos x)dx = 0$ 满足初始条件 $y(0) = 1$ 的特解.

【分析】 此题为一阶线性方程的初值问题. 可利用公式法求出方程的通解, 再利用初值条件确定通解中的任意常数而得特解.

【解】 原方程变形为 $\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{x^2-1}y = \frac{\cos x}{x^2-1}$, 由一阶线性方程通解公式得

$$y = e^{-\int \frac{2x}{x^2-1} dx} \left[\int \frac{\cos x}{x^2-1} e^{\int \frac{2x}{x^2-1} dx} dx + C \right] = \frac{1}{x^2-1} (\sin x + C)$$

初始条件 $y(0) = 1$, 得 $C = -1$.

从而所求的解为 $y = \frac{1}{x^2-1} (\sin x - 1)$.

9 (1994, 一(5)题, 3分) 微分方程 $ydx + (x^2 - 4x)dy = 0$ 的通解为_____.

【答案】 $y^4(4-x) = Cx$, C 为任意常数.

【解析】 分离变量, 原方程变为

$$\frac{1}{y} dy = \frac{1}{x(4-x)} dx$$

两边积分 $\ln y = \frac{1}{4} \ln \frac{x}{4-x} + \frac{1}{4} \ln C$, 即原方程通解为 $y^4(4-x) = Cx$, C 为任意常数.

10 (1995, 五题, 8分) 设 $y = e^x$ 是微分方程 $xy' + p(x)y = x$ 的一个解, 求此微分方程满足条件 $y|_{x=\ln 2} = 0$ 的特解.

【分析】 将 $y = e^x$ 代入微分方程求出 $p(x)$, 然后再求一阶线性微分方程的特解.

【解】 把 $y = e^x$ 代入微分方程 $xy' + p(x)y = x$ 中, 得 $p(x) = xe^{-x} - x$.

原方程变为 $y' + (e^{-x} - 1)y = 1$, 解此一阶线性微分方程

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int (e^{-x}-1) dx} \left(C + \int e^{\int (e^{-x}-1) dx} dx \right) = e^{-e^{-x}+x} \left(C + \int e^{-e^{-x}-x} dx \right) \\ &= e^{-e^{-x}+x} \left(C - \int e^{-e^{-x}} de^{-x} \right) \\ &= e^{-e^{-x}+x} (C + e^{-e^{-x}}) = Ce^{-e^{-x}+x} + e^x \end{aligned}$$

利用 $y|_{x=\ln 2} = 0$ 得 $C = -e^{-\frac{1}{2}}$, 于是所求特解为 $y = -e^{-\frac{1}{2}}e^{-e^{-x}+x} + e^x$.

11 (1996, 八题, 8分) 设 $f(x)$ 为连续函数,

(1) 求初值问题 $\begin{cases} y' + ay = f(x) \\ y|_{x=0} = 0 \end{cases}$ 的解 $y(x)$, 其中 a 是正常数;

(2) 若 $|f(x)| \leq k$ (k 为常数), 证明当 $x \geq 0$ 时, 有 $|y(x)| \leq \frac{k}{a}(1 - e^{-ax})$.

【解】 (1) 根据一阶非齐次线性微分方程的通解公式, 得

$$y(x) = e^{-\int a dx} \left[\int f(x) e^{\int a dx} dx + C \right] = e^{-ax} \left[\int f(x) e^{ax} dx + C \right] = e^{-ax} [F(x) + C]$$

其中 C 为任意常数, $F(x)$ 为 $f(x)e^{ax}$ 的任一原函数.

因为 $y(0) = 0$, 得 $C = -F(0)$. 于是,

$$y(x) = e^{-ax} [F(x) - F(0)] = e^{-ax} \int_0^x f(t) e^{at} dt$$

(2) 由(1)的结果, 易知

$$|y(x)| \leq e^{-ax} \int_0^x |f(t)| e^{at} dt \leq k e^{-ax} \int_0^x e^{at} dt = \frac{k}{a} (1 - e^{-ax})$$

12 (1997, 三(4)题, 5分) 求微分方程 $(3x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy = 0$ 的通解.

【分析】 该方程是齐次微分方程, 按固定方法求解.

【解】 原方程变为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 2xy - y^2}{-x^2 + 2xy} = \frac{3 + 2\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{-1 + 2\frac{y}{x}}$$

$$\text{令 } u = \frac{y}{x}, \text{ 有 } u + x \frac{du}{dx} = \frac{3 + 2u - u^2}{-1 + 2u}, \text{ 即 } \frac{1 - 2u}{1 + u - u^2} du = -\frac{3}{x} dx,$$

$$\text{两边积分 } \ln|1 + u - u^2| = -3\ln|x| + \ln C_1, \text{ 即 } 1 + u - u^2 = \pm \frac{C_1}{x^3},$$

$$\text{代入 } u = \frac{y}{x}, \text{ 原方程的通解为 } x^2 + xy - y^2 = \frac{C}{x} (C = \pm C_1).$$

13 (1998, 二(3)题, 3分) 已知函数 $y = y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y = \frac{y\Delta x}{1+x^2} + \alpha$, 且当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, α 是 Δx 的高阶无穷小, $y(0) = \pi$, 则 $y(1)$ 等于

(A) 2π .

(B) π .

(C) $e^{\frac{\pi}{4}}$.

(D) $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$.

【答案】 D.

【解析】 由题设可知函数 $y = y(x)$ 在点 x 处可微, 根据微分与导数的关系, 可得 $y' = \frac{y}{1+x^2}$,

解此可分离变量方程. 分离变量得 $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x^2}$, 两边积分得 $\ln y = \arctan x + \ln C$, 即 $y = Ce^{\arctan x}$.

代入 $y(0) = \pi$, 得 $C = \pi$, 于是 $y = \pi e^{\arctan x}$, $y(1) = \pi e^{\frac{\pi}{4}}$, 故选 (D).

【评注】 由 $\Delta y = \frac{y\Delta x}{1+x^2} + \alpha$, 根据导数定义得

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{y}{1+x^2} + \frac{\alpha}{\Delta x} \right] = \frac{y}{1+x^2}$$

另外, 从本题可知, 由函数在任意点 x 处的微分或导数定义, 可构造微分方程, 这样可将微分或导数的定义与微分方程结合起来, 构造较综合的题目.

14 (1999, 五题, 7分) 求初值问题 $\begin{cases} (y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0 (x > 0) \\ y|_{x=1} = 0 \end{cases}$ 的解.

【分析】 按齐次微分方程求解即可.

【解】 原方程变为 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$, 令 $u = \frac{y}{x}$, 有可分离变量微分方程

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{x} dx$$

两边积分 $\ln(u + \sqrt{1+u^2}) = \ln x + \ln C$, 即 $u + \sqrt{1+u^2} = Cx$, 亦是 $y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$, 代入初值条件 $y|_{x=1} = 0$, 得 $C = 1$, 所求特解为 $y + \sqrt{x^2 + y^2} = x^2$, 化简为 $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

15 (2001, 一(4)题, 3分) 过点 $(\frac{1}{2}, 0)$ 且满足关系式 $y' \arcsin x + \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = 1$ 的曲线方程为 _____.

【答案】 $y \arcsin x = x - \frac{1}{2}$.

【解析】 本题是求满足初值条件 $y|_{x=\frac{1}{2}} = 0$ 的一阶线性微分方程的特解.

原方程变形为

$$y' + \frac{y}{\arcsin x \sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\arcsin x}$$

$$\begin{aligned} \text{方程的通解为 } y &= e^{-\int \frac{1}{\arcsin x \sqrt{1-x^2}} dx} \left(C + \int \frac{1}{\arcsin x} e^{\int \frac{1}{\arcsin x \sqrt{1-x^2}} dx} dx \right) \\ &= \frac{1}{\arcsin x} (C + x) \end{aligned}$$

由 $y|_{x=\frac{1}{2}} = 0$ 有 $C = -\frac{1}{2}$, 所求曲线方程为 $y \arcsin x = x - \frac{1}{2}$.

16 (2002, 六题, 7分) 求微分方程 $xdy + (x-2y)dx = 0$ 的一个解 $y = y(x)$, 使得由曲线 $y = y(x)$ 与直线 $x = 1, x = 2$ 以及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周的旋转体体积最小.

【分析】 先求微分方程的通解, 根据条件再求 $y = y(x)$.

【解】 原方程变为 $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = -1$, 则

$$y = e^{\int -\frac{2}{x} dx} \left(C - \int e^{\frac{2}{x}} dx \right) = x^2 \left(C + \frac{1}{x} \right) = x + Cx^2$$

旋转体的体积为

$$V(C) = \int_1^2 \pi (x + Cx^2)^2 dx = \pi \left(\frac{31}{5}C^2 + \frac{15}{2}C + \frac{7}{3} \right)$$

令 $V'(C) = \pi \left(\frac{62}{5}C + \frac{15}{2} \right) = 0$, 得 $C = -\frac{75}{124}$, 而 $V''(C) = \frac{62}{5}\pi > 0$, $C = -\frac{75}{124}$ 为最小值点.

所求为 $y = x - \frac{75}{124}x^2$.

【评注】 在解微分方程时, 也可看作齐次微分方程.

17 (2003, 二(3)题, 4分) 已知 $y = \frac{x}{\ln x}$ 是微分方程 $y' = \frac{y}{x} + \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ 的解, 则 $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ 的表达式为

(A) $-\frac{y^2}{x^2}$.

(B) $\frac{y^2}{x^2}$.

(C) $-\frac{x^2}{y^2}$.

(D) $\frac{x^2}{y^2}$.

【答案】 A.

【解析】 将 $y = \frac{x}{\ln x}$ 代入微分方程, 再令 φ 的中间变量为 u , 求出 $\varphi(u)$ 的表达式, 进而可计算

出 $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$.

将 $y = \frac{x}{\ln x}$ 代入微分方程 $y' = \frac{y}{x} + \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, 得

$$\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = \frac{1}{\ln x} + \varphi(\ln x), \text{ 即 } \varphi(\ln x) = -\frac{1}{\ln^2 x}$$

令 $\ln x = u$, 有 $\varphi(u) = -\frac{1}{u^2}$, 故 $\varphi\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{y^2}{x^2}$. 应选(A).

【评注】 本题巧妙地将微分方程的解与求函数关系结合起来, 具有一定的综合性.

18 (2004, 5 题, 4 分) 微分方程 $(y+x^3)dx - 2xdy = 0$ 满足 $y|_{x=1} = \frac{6}{5}$ 的特解为_____.

【答案】 $y = \frac{1}{5}x^3 + \sqrt{x}$.

【解析】 此题为一阶线性方程的初值问题. 可以利用常数变易法或公式法求出方程的通解, 再利用初值条件确定通解中的任意常数而得特解.

(方法一) 原方程变形为 $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x}y = \frac{1}{2}x^2$,

先求齐次方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x}y = 0$ 的通解:

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{2x}dx$$

积分得 $\ln y = \frac{1}{2}\ln x + \ln c \Rightarrow y = c\sqrt{x}$.

设 $y = c(x)\sqrt{x}$ 为非齐次方程的通解, 代入方程得

$$c'(x)\sqrt{x} + c(x)\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x}c(x)\sqrt{x} = \frac{1}{2}x^2$$

从而 $c'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$,

积分得 $c(x) = \int \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}dx + C = \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$,

于是非齐次方程的通解为

$$y = \sqrt{x}\left(\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} + C\right) = C\sqrt{x} + \frac{1}{5}x^3$$

$$y|_{x=1} = \frac{6}{5}, \quad C = 1$$

故所求通解为 $y = \sqrt{x} + \frac{1}{5}x^3$.

(方法二) 原方程变形为 $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x}y = \frac{1}{2}x^2$,

由一阶线性方程通解公式得

$$\begin{aligned} y &= e^{\int \frac{1}{2x}dx} \left[\int \frac{1}{2}x^2 e^{-\int \frac{1}{2x}dx} dx + C \right] \\ &= e^{\frac{1}{2}\ln x} \left[\int \frac{1}{2}x^2 e^{-\frac{1}{2}\ln x} dx + C \right] \end{aligned}$$

$$= \sqrt{x} \left[\int \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} dx + C \right] = \sqrt{x} \left[\frac{1}{5} x^{\frac{5}{2}} + C \right]$$

$$y(1) = \frac{6}{5} \Rightarrow C = 1$$

从而所求的解为 $y = \sqrt{x} + \frac{1}{5} x^3$.

19 (2005, 4 题, 4 分) 微分方程 $xy' + 2y = x \ln x$ 满足 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 的解为_____.

【答案】 $y = \frac{1}{3} x \ln x - \frac{1}{9} x$.

【解析】 原方程等价于

$$y' + \frac{2}{x} y = \ln x,$$

$$\begin{aligned} \text{于是通解为 } y &= e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left[\int \ln x \cdot e^{\frac{2}{x} dx} dx + C \right] = \frac{1}{x^2} \cdot \left[\int x^2 \ln x dx + C \right] \\ &= \frac{1}{3} x \ln x - \frac{1}{9} x + C \frac{1}{x^2}, \end{aligned}$$

由 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 得 $C = 0$, 故所求解为 $y = \frac{1}{3} x \ln x - \frac{1}{9} x$.

【评注】 本题虽属基本题型,但在用相关公式时应注意先化为标准型.另外,本题也可如下求解:原方程可化为

$$x^2 y' + 2xy = x^2 \ln x, \text{ 即 } [x^2 y]' = x^2 \ln x, \text{ 两边积分得}$$

$$x^2 y = \int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C,$$

再代入初始条件即可得所求解为 $y = \frac{1}{3} x \ln x - \frac{1}{9} x$.

20 (2006, 4 题, 4 分) 微分方程 $y' = \frac{y(1-x)}{x}$ 的通解是_____.

【答案】 $y = Cx e^{-x} (x \neq 0)$, C 为任意常数.

【解析】 原方程等价于 $\frac{dy}{y} = \left(\frac{1}{x} - 1 \right) dx$, 两边积分得 $\ln y = \ln x - x + C_1$, 整理得

$$y = Cx e^{-x}, (C = e^{C_1})$$

21 (2008, 10 题, 4 分) 微分方程 $(y + x^2 e^{-x}) dx - x dy = 0$ 的通解是 $y =$ _____.

【答案】 $x(C - e^{-x})$, C 为任意常数.

【解析】 原方程可改写为

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x} \cdot y = x e^{-x}$$

于是通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left[\int x e^{-x} e^{\frac{1}{x} dx} dx + C \right] \\ &= x \left(\int e^{-x} dx + C \right) = x(C - e^{-x}) \end{aligned}$$

二、可降阶的二阶微分方程的求解

22 (2000, 十一题, 8分) 函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0) = 1$ 且满足等式

$$f'(x) + f(x) - \frac{1}{x+1} \int_0^x f(t) dt = 0$$

(1) 求导数 $f'(x)$;

(2) 证明: 当 $x \geq 0$ 时, 不等式 $e^{-x} \leq f(x) \leq 1$ 成立.

【解】 (1) 由题设知

$$(x+1)f'(x) + (x+1)f(x) - \int_0^x f(t) dt = 0$$

上式两边对 x 求导, 得 $(x+1)f''(x) = -(x+2)f'(x)$.

设 $u = f'(x)$, 则有 $\frac{du}{dx} = -\frac{x+2}{x+1}u$, 解得

$$f'(x) = u = \frac{Ce^{-x}}{x+1}$$

由 $f(0) = 1$, 及 $f'(0) + f(0) = 0$, 知 $f'(0) = -1$, 从而 $C = -1$.

因此

$$f'(x) = -\frac{e^{-x}}{x+1}$$

(2) **【方法一】** 当 $x \geq 0$ 时, $f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 单调减少, 又 $f(0) = 1$, 所以 $f(x) \leq f(0) = 1$.

设 $\varphi(x) = f(x) - e^{-x}$, 则 $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(x) \geq 0$, 即 $\varphi(x)$ 单调增加, 因而

$$\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0, \text{ 即有 } f(x) \geq e^{-x}$$

综上所述, 当 $x \geq 0$ 时, 成立不等式 $e^{-x} \leq f(x) \leq 1$.

【方法二】 由于 $\int_0^x f'(t) dt = f(x) - f(0) = f(x) - 1$, 所以

$$f(x) = 1 - \int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1} dt$$

注意到当 $x \geq 0$ 时, $0 \leq \int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1} dt \leq \int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x}$, 因而

$$e^{-x} \leq f(x) \leq 1$$

23 (2002, 一(3)题, 3分) 微分方程 $yy'' + y'^2 = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = \frac{1}{2}$ 的特解是_____.

【答案】 $y^2 = x+1$ 或 $y = \sqrt{x^2+1}$.

【解析】 这是不显含 x 的可降阶的二阶微分方程, 令 $y' = p$ 降为一阶微分方程.

$$yp \frac{dp}{dy} + p^2 = 0, \text{ 有 } p = 0 \text{ 或 } y \frac{dp}{dy} + p = 0$$

显然 $p = 0$ 不满足初始条件 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = \frac{1}{2}$,

因此必有 $y \frac{dp}{dy} + p = 0$, 即 $\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{y}$, 两边积分得

$p = \frac{C_1}{y}$, 即 $y' = \frac{C_1}{y}$, 代入初始条件 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = \frac{1}{2}$, 得 $C_1 = \frac{1}{2}$.

于是 $y' = \frac{1}{2y}$, 即 $2ydy = dx$, 两边积分得 $y^2 = x + C_2$, 代入 $y|_{x=0} = 1$,

得 $C_2 = 1$, 故所求特解为 $y^2 = x + 1$ 或 $y = \sqrt{x+1}$.

24 (2007, 19 题, 10 分) 求微分方程 $y''(x+y'^2) = y'$ 满足初始条件 $y(1) = y'(1) = 1$ 的特解.

【分析】 本题为不含 y 的可降阶方程, 令 $y' = p$, 然后求解方程.

【解】 设 $y' = p$, 于是 $y'' = p'$, 原方程变为 $p'(x+p^2) = p$, 则 $\frac{dx}{dp} = \frac{x}{p} + p$.

解之得 $x = p(p + C_1)$, 将 $p(1) = 1$ 代入左式得 $C_1 = 0$,

于是 $x = p^2 \Rightarrow y' = \sqrt{x} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_2$, 结合 $y(1) = 1$ 得 $C_2 = \frac{1}{3}$,

故 $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}$.

三、高阶常系数线性微分方程的求解

25 (1987, 八(2) 题, 5 分) 求微分方程 $y'' + 2y' + y = xe^x$ 的通解(一般解).

【分析】 本题求二阶常系数非齐次微分方程的通解, 可利用二阶常系数非齐次微分方程解的结构求解, 即先求出对应齐次方程的通解 $\bar{y}$, 然后求出非齐次微分方程的一个特解 y^* , 则其通解为 $y = \bar{y} + y^*$.

【解】 对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0, \text{ 得 } \lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

则对应齐次方程的通解为 $\bar{y} = (C_1 + C_2x)e^{-x}$.

可设原方程的特解为 $y^* = (Ax + B)e^x$, 代入原方程有 $(4Ax + 4A + 4B)e^x = xe^x$, 得 $A = \frac{1}{4}$,

$$B = -\frac{1}{4},$$

故原方程的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + \frac{1}{4}(x-1)e^x$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

26 (1988, 六题, 10 分) 设函数 $y = y(x)$ 满足微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$, 且其图形在点 $(0, 1)$ 处的切线与曲线 $y = x^2 - x + 1$ 在该点的切线重合, 求函数 $y = y(x)$.

【分析】 本题实际上是求二阶常系数非齐次微分方程的一个特解, 初值条件由题意确定为 $y(0) = 1, y'(0) = -1$.

【解】 对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0, \text{ 得 } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

则对应齐次方程的通解为 $\bar{y} = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

可设原方程的特解为 $y^* = Axe^x$, 代入原方程得 $A = -2$,

故原方程的通解为 $y = C_1e^x + C_2e^{2x} - 2xe^x$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

所求函数对应的曲线在点 $(0, 1)$ 处的切线与曲线 $y = x^2 - x + 1$ 在该点的切线重合, 有 $y(0) = 1, y'(0) = -1$, 得 $C_1 = 1, C_2 = 0$, 故所求的函数为 $y = (1 - 2x)e^x$.

【评注】 注意利用函数 $y = y(x)$ 的图形在点 $(0, 1)$ 处的切线与曲线 $y = x^2 - x + 1$ 在该点的切线重合确定微分方程初值条件的方式.

27 (1989, 三(5)题, 3分) 微分方程 $y'' - y = e^x + 1$ 的一个特解应具有形式(式中 a, b 为常数)

- (A) $ae^x + b$. (B) $axe^x + b$. (C) $ae^x + bx$. (D) $axe^x + bx$.

【答案】 B.

【解析】 利用叠加性写出二阶常系数非齐次线性微分方程的一个特解.

特征方程 $\lambda^2 - 1 = 0$ 的根为 $\lambda_{1,2} = \pm 1$.

方程 $y'' - y = e^x$ 的特解可设为 $y_1^* = axe^x$.

方程 $y'' - y = 1$ 的特解可设为 $y_2^* = b$.

所以原方程的特解可为 $y^* = y_1^* + y_2^* = axe^x + b$.

答案选(B).

28 (1989, 五题, 7分) 设 $f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t)dt$, 其中 $f(x)$ 为连续函数, 求 $f(x)$.

【分析】 先在等式两边对 x 求导, 消去变限积分, 将原方程化为关于未知函数 $f(x)$ 的微分方程, 再求解该微分方程.

【解】 $f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t)dt$ 化为

$$f(x) = \sin x - x \int_0^x f(t)dt + \int_0^x tf(t)dt \quad (1)$$

两边对 x 求导得

$$f'(x) = \cos x - \int_0^x f(t)dt - xf(x) + xf(x)$$

即

$$f'(x) = \cos x - \int_0^x f(t)dt \quad (2)$$

两边再对 x 求导得

$$f''(x) + f(x) = -\sin x$$

令 $x = 0$, 由(1)(2)式, 得 $f(0) = 0, f'(0) = 1$.

于是, 原问题就转化为求微分方程 $f''(x) + f(x) = -\sin x$ 满足初始条件 $f(0) = 0, f'(0) = 1$ 的特解.

方程 $f''(x) + f(x) = -\sin x$ 对应的齐次方程的特征方程为 $\lambda^2 + 1 = 0$, 特征根为 $\lambda_{1,2} = \pm i$, 故对应的齐次方程通解为 $C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

因为 $\pm i$ 是特征根, 因此原方程的特解可设为 $y^* = x(A \cos x + B \sin x)$, 代入方程得 $A = \frac{1}{2}$, $B = 0$, 所以方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} x \cos x$$

代入初始条件 $f(0) = 0, f'(0) = 1$, 得 $C_1 = 0, C_2 = \frac{1}{2}$, 从而 $f(x) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} x \cos x$.

【评注】 此题是一个积分方程, 但要注意题中隐含的初值条件 $f(0) = 0, f'(0) = 1$.

29 (1990, 八题, 9分) 求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = e^{ax}$ 的通解, 其中 a 为实数.

【分析】 先求对应二阶常系数齐次线性微分方程的通解, 再讨论 a 的取值求二阶常系数非齐

次线性微分方程的特解.

【解】 特征方程 $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ 的根为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$,

齐次线性微分方程的通解为 $\bar{y} = (C_1 + C_2x)e^{-2x}$.

当 $a \neq -2$ 时, 非齐次方程的特解可设为 $y^* = Ae^{ax}$, 代入方程得 $A = \frac{1}{(a+2)^2}$,

于是所求方程的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^{-2x} + \frac{1}{(a+2)^2}e^{ax}$.

当 $a = -2$ 时, 非齐次方程的特解可设为 $y^* = A_1x^2e^{-2x}$, 代入方程得 $A_1 = \frac{1}{2}$,

于是所求方程的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2e^{-2x}$.

综上所述, 原方程的通解为

$$y = \begin{cases} (C_1 + C_2x)e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2e^{-2x}, & a = -2 \\ (C_1 + C_2x)e^{-2x} + \frac{1}{(a+2)^2}e^{ax}, & a \neq -2 \end{cases}$$

30 (1991, 五题, 9 分) 求 $y'' + y = x + \cos x$ 的通解.

【分析】 先求二阶常系数齐次线性微分方程的通解, 再利用叠加性求二阶常系数非齐次线性微分方程的特解.

【解】 特征方程 $\lambda^2 + 1 = 0$ 的根为 $\lambda_{1,2} = \pm i$.

齐次线性微分方程的通解为 $\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

方程 $y'' + y = x$ 的特解可设为 $y_1^* = Ax + B$, 代入方程得 $A = 1, B = 0$.

方程 $y'' + y = \cos x$ 的特解可设为 $y_2^* = x(C \cos x + D \sin x)$, 代入方程得

$$C = 0, D = \frac{1}{2}$$

所以原方程的特解为 $y^* = y_1^* + y_2^* = x + \frac{1}{2}x \sin x$

原方程的通解为 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x + \frac{1}{2}x \sin x$.

31 (1992, 五题, 9 分) 求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = xe^x$ 的通解.

【分析】 本题是求解二阶常系数非齐次微分方程的通解, 利用二阶常系数非齐次微分方程解的结构求解, 即先求出对应齐次方程的通解 $\bar{y}$, 然后求出非齐次微分方程的一个特解 y^* , 则其通解为 $y = \bar{y} + y^*$.

【解】 对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0, \text{ 得 } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

则对应齐次方程的通解为 $\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

可设原方程的特解为 $y^* = x(Ax + B)e^x$, 代入原方程得 $-2Ax + 2A - B = x$.

$$\text{解 } \begin{cases} -2A = 1 \\ 2A - B = 0 \end{cases}, \text{ 有 } A = -\frac{1}{2}, B = -1.$$

故原方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)e^x$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

32 (1993, 四题, 9分) 设二阶常系数线性微分方程 $y'' + \alpha y' + \beta y = \gamma e^x$ 的一个特解为 $y = e^{2x} + (1+x)e^x$. 试确定常数 α, β, γ , 并求该方程的通解.

【分析】 将 $y = e^{2x} + (1+x)e^x$ 代入原方程, 待定系数确定 α, β, γ , 再求方程的通解.

或从 $y = e^{2x} + (1+x)e^x = e^{2x} + e^x + xe^x$ 看出特征方程的根, 进而确定 α, β, γ .

【解】 (方法一) 将 $y = e^{2x} + (1+x)e^x$ 代入原方程, 得

$$(4 + 2\alpha + \beta)e^{2x} + (3 + 2\alpha + \beta)e^x + (1 + \alpha + \beta)xe^x = \gamma e^x$$

可得 $4 + 2\alpha + \beta = 0, 3 + 2\alpha + \beta = \gamma, 1 + \alpha + \beta = 0$, 解得 $\alpha = -3, \beta = 2, \gamma = -1$.

从而原方程为 $y'' - 3y' + 2y = -e^x$, 对应齐次方程的通解为

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

由已知所求微分方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + e^{2x} + (1+x)e^x$.

(方法二) 由 $y = e^{2x} + (1+x)e^x = e^{2x} + e^x + xe^x$ 是方程的特解可看出特征方程的根为 1 和 2, 用根与系数的关系得 $\alpha = -3, \beta = 2$.

把特解 xe^x 代入方程 $y'' + \alpha y' + \beta y = \gamma e^x$ 得 $\gamma = -1$.

所求微分方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + xe^x$.

【评注】 本题在求二阶常系数线性微分方程通解时, 不需要再求特解, 用题中已知结果即可. 两种解法得到的通解表面上形式不一样, 实际上是一致的.

33 (1994, 六题, 9分) 求微分方程 $y'' + a^2 y = \sin x$ 的通解, 其中常数 $a > 0$.

【分析】 本题是求解二阶常系数非齐次微分方程的通解, 通解的形式与 a 的取值有关.

【解】 对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2 + a^2 = 0, \text{ 得 } \lambda_{1,2} = \pm ai$$

则对应齐次方程的通解为 $\bar{y} = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax, C_1, C_2$ 为任意常数.

当 $a \neq 1$ 时, 可设非齐次方程的特解为 $y^* = A \cos x + B \sin x$, 代入原方程待定系数得 $A = 0$,

$$B = \frac{1}{a^2 - 1}, \text{ 微分方程的通解为 } y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + \frac{1}{a^2 - 1} \sin x.$$

当 $a = 1$ 时, 可设非齐次方程的特解为 $y^* = x(A_1 \cos x + B_1 \sin x)$, 代入原方程待定系数得

$$A_1 = -\frac{1}{2}, B_1 = 0, \text{ 微分方程的通解为 } y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x.$$

34 (1995, 一(2) 题, 3分) 微分方程 $y'' + y = -2x$ 的通解为_____.

【答案】 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2x, C_1, C_2$ 为任意常数.

【解析】 本题是求解二阶常系数非齐次微分方程的通解, 利用二阶常系数非齐次微分方程解的结构求解.

对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2 + 1 = 0, \text{ 得 } \lambda_{1,2} = \pm i$$

则对应齐次方程的通解为 $\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x, C_1, C_2$ 为任意常数.

可设非齐次方程的特解为 $y^* = Ax + B$, 代入原方程待定系数得 $A = -2, B = 0$.

微分方程 $y'' + y = -2x$ 的通解为 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2x, C_1, C_2$ 为任意常数.

35 (1996, 一(3) 题, 3分) 微分方程 $y'' + 2y' + 5y = 0$ 的通解为_____.

【答案】 $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x), C_1, C_2$ 为任意常数.

【解析】 对应齐次方程的特征方程为

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0, \text{得 } \lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$$

则对应齐次方程的通解为 $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$, C_1, C_2 为任意常数.

36 (1996, 三(5) 题, 5 分) 求微分方程 $y'' + y' = x^2$ 的通解.

【分析】 本题求解二阶常系数非齐次微分方程的通解, 利用二阶常系数非齐次微分方程解的结构求解, 即先求出对应齐次方程的通解 $\bar{y}$, 然后求出非齐次微分方程的一个特解 y^* , 则其通解为 $y = \bar{y} + y^*$.

【解】 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2 + \lambda = 0$, 得 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$,

则对应齐次方程的通解为 $\bar{y} = C_1 + C_2 e^{-x}$.

可设原方程的特解为 $y^* = x(Ax^2 + Bx + C)$, 代入原方程得 $A = \frac{1}{3}, B = -1, C = 2$,

所以原方程的特解为 $y^* = x\left(\frac{1}{3}x^2 - x + 2\right)$.

故原方程的通解为 $y = C_1 + C_2 e^{-x} + x\left(\frac{1}{3}x^2 - x + 2\right)$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

【评注】 本题除了看作典型的二阶常系数线性微分方程外, 还可考虑如下两种解法:

(1) 看作可降阶的缺“ y ”的二阶微分方程, 方法: 令 $p = y'$;

(2) 原方程变形为 $(y' + y)' = x^2$, 有 $y' + y = \frac{1}{3}x^3 + C_1$, 然后再解此一阶线性微分方程.

37 (1997, 三(5) 题, 5 分) 已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}, y_2 = xe^x + e^{-x}, y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的三个解, 求此微分方程.

【分析】 利用线性微分方程解的性质和结构, 先得到常系数线性齐次微分方程, 再求自由项, 得到所求的微分方程.

【解】 设所求的微分方程为 $y'' + py' + qy = f(x)$.

由线性微分方程解的性质 $y_1 - y_3 = e^{-x}, y_3 - y_2 + 2(y_1 - y_3) = e^{2x}$ 是线性齐次微分方程的两个线性无关的解, 则

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$ 是特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的根, 有 $p = -1, q = -2$,

将 $y_1 = xe^x + e^{2x}$ 代入方程 $y'' + py' + qy = f(x)$, 得 $f(x) = (1 - 2x)e^x$,

所求的微分方程为 $y'' - y' - 2y = (1 - 2x)e^x$.

38 (1998, 五题, 5 分) 利用代换 $y = \frac{u}{\cos x}$ 将方程 $y'' \cos x - 2y' \sin x + 3y \cos x = e^x$ 化简, 并求出原方程的通解.

【解】 (方法一) 由 $y = \frac{u}{\cos x}$, 有 $u = y \cos x$, 两边对 x 求导, 得

$$u' = y' \cos x - y \sin x, u'' = y'' \cos x - 2y' \sin x - y \cos x$$

于是原方程化为 $u'' + 4u = e^x$, 易求其通解为 $u = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{e^x}{5}$.

从而原方程的通解为 $y = C_1 \frac{\cos 2x}{\cos x} + C_2 \frac{\sin 2x}{\cos x} + \frac{e^x}{5 \cos x}$.

(方法二) 由 $y = \frac{u}{\cos x}$, 有 $y = u \sec x$, 对 x 求导, 得

$y' = u' \sec x + u \sec x \tan x, y'' = u'' \sec x + 2u' \sec x \tan x + u \sec x \tan^2 x + u \sec^3 x$
代入原方程化为 $u'' + 4u = e^x$,

以下同(方法一).

39 (1999, 一(5) 题, 3 分) $y'' - 4y = e^{2x}$ 的通解为_____.

【答案】 $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{4} x e^{2x}$.

【解析】 利用线性微分方程的通解的结构求解.

先求齐次微分方程 $y'' - 4y = 0$ 的通解 $\bar{y}$.

特征方程为 $\lambda^2 - 4 = 0$, 得 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$. 所以, 齐次微分方程的通解为 $\bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$.

再求非齐次微分方程 $y'' - 4y = e^{2x}$ 的一个特解 y^* . $\lambda_1 = 2$ 是特征方程 $\lambda^2 - 4 = 0$ 的单根, 则设特解的形式为 $y^* = A x e^{2x}$.

将 y^* 代入到原微分方程, 得 $A = \frac{1}{4}$, 原微分方程的通解为 $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{4} x e^{2x}$.

40 (2000, 二(5) 题, 3 分) 具有特解 $y_1 = e^{-x}, y_2 = 2x e^{-x}, y_3 = 3e^x$ 的 3 阶常系数齐次线性微分方程是

(A) $y''' - y'' - y' + y = 0$.

(B) $y''' + y'' - y' - y = 0$.

(C) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

(D) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$.

【答案】 B.

【解析】 先由齐次线性微分方程的解得到对应的特征根, 进而确定特征方程, 最后写出齐次微分方程.

由已知, 特征方程的根为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$,

于是, 特征方程为 $(\lambda + 1)^2(\lambda - 1) = 0$, 即 $\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$.

故所求的常系数齐次线性微分方程是 $y''' + y'' - y' - y = 0$.

41 (2001, 七题, 7 分) 设 $f(x), g(x)$ 满足 $f'(x) = g(x), g'(x) = 2e^x - f(x)$, 且 $f(0) = 0, g(0) = 2$. 求

$$I = \int_0^{\pi} \left[\frac{g(x)}{1+x} - \frac{f(x)}{(1+x)^2} \right] dx$$

【分析】 由题中条件得一微分方程, 求出 $f(x), g(x)$, 再计算定积分.

【解】 由条件 $f'(x) = g(x)$, 得 $f''(x) = g'(x) = 2e^x - f(x)$,

即求解微分方程 $\begin{cases} f''(x) + f(x) = 2e^x \\ f(0) = 0, f'(0) = g(0) = 2 \end{cases}$.

齐次微分方程的特征方程为 $\lambda^2 + 1 = 0, \lambda = \pm i$, 通解为 $\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

因为 1 不是特征方程的解, 故设非齐次微分方程特解 $y^* = A e^x$, 则得 $A = 1$. 于是, 通解为

$$f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^x$$

将条件 $f(0) = 0, f'(0) = g(0) = 2$ 代入到通解中, 得特解 $f(x) = \sin x - \cos x + e^x$, 其中 $C_1 = -1, C_2 = 1$. 从而

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} \frac{(1+x)g(x) - f(x)}{(1+x)^2} dx = \int_0^{\pi} \frac{(1+x)f'(x) - f(x)}{(1+x)^2} dx \\ &= \int_0^{\pi} d\left[\frac{f(x)}{1+x}\right] = \frac{f(x)}{1+x} \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{1+e^{\pi}}{1+\pi}. \end{aligned}$$

42 (2002, 二(3)题, 3分) 设 $y = y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y'' + py' + qy = e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0) = y'(0) = 0$ 的特解, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限

- (A) 不存在. (B) 等于 1. (C) 等于 2. (D) 等于 3.

【答案】 C.

【解析】 此题不需要解微分方程求出 $y(x)$, 而直接用洛必达法则或泰勒公式.

【方法一】 由已知, $y''(0) = 1$. 利用洛必达法则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{y(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{y(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{y'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{y''(x)} = \frac{2}{y''(0)} = 2$$

答案应选(C).

【方法二】 利用泰勒公式

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2 + o(x^2) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \sim \frac{1}{2}x^2$$

$$\text{所以, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{y(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 2.$$

答案应选(C).

43 (2003, 六题, 12分) 设函数 $y = y(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $y' \neq 0$, $x = x(y)$ 是 $y = y(x)$ 的反函数.

(1) 试将 $x = x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2x}{dy^2} + (y + \sin x) \left(\frac{dx}{dy}\right)^3 = 0$ 变换为 $y = y(x)$ 满足的微分方程;

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0) = 0, y'(0) = \frac{3}{2}$ 的解.

【分析】 应注意:

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left(\frac{dx}{dy} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{y'} \right) \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{-y''}{y'^2} \cdot \frac{1}{y'} = -\frac{y''}{(y')^3}$$

然后再代入原方程化简即可.

【解】 (1) 由反函数的求导公式知 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$, 于是有

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left(\frac{dx}{dy} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{y'} \right) \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{-y''}{y'^2} \cdot \frac{1}{y'} = -\frac{y''}{(y')^3}$$

代入原微分方程得

$$y'' - y = \sin x \quad (*)$$

(2) 方程(*)所对应的齐次方程 $y'' - y = 0$ 的通解为

$$Y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

设方程(*)的特解为

$$y^* = A \cos x + B \sin x$$

代入方程(*), 求得 $A = 0, B = -\frac{1}{2}$, 故 $y^* = -\frac{1}{2} \sin x$, 从而 $y'' - y = \sin x$ 的通解是

$$y = Y + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x$$

由 $y(0) = 0, y'(0) = \frac{3}{2}$, 得 $C_1 = 1, C_2 = -1$. 故所求初值问题的解为

$$y = e^x - e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x$$

【评注】 本题的核心是第一步方程变换.

44 (2004, 11 题, 4 分) 微分方程 $y'' + y = x^2 + 1 + \sin x$ 的特解形式可设为

(A) $y^* = ax^2 + bx + c + x(A\sin x + B\cos x)$.

(B) $y^* = x(ax^2 + bx + c + A\sin x + B\cos x)$.

(C) $y^* = ax^2 + bx + c + A\sin x$.

(D) $y^* = ax^2 + bx + c + A\cos x$.

【答案】 A.

【解析】 利用叠加原理确定二阶常系数线性非齐次方程特解的形式.

对应齐次方程 $y'' + y = 0$ 的特征方程为

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

特征根为 $\lambda = \pm i$,

对 $y'' + y = x^2 + 1 = e^0(x^2 + 1)$ 而言, 因 0 不是特征根, 从而其特解形式可设为

$$y_1^* = ax^2 + bx + c$$

对 $y'' + y = \sin x$, 因 i 为特征根, 从而其特解形式可设为

$$y_2^* = x(A\sin x + B\cos x)$$

从而 $y'' + y = x^2 + 1 + \sin x$ 的特解形式可设为

$$y^* = ax^2 + bx + c + x(A\sin x + B\cos x)$$

45 (2005, 18 题, 12 分) 用变量代换 $x = \cos t$ ($0 < t < \pi$) 化简微分方程 $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$, 并求其满足 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2$ 的特解.

【分析】 先将 y', y'' 转化为 $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}$, 再用二阶常系数线性微分方程的方法求解即可.

【解】 $y' = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{\sin t} \frac{dy}{dt},$

$$y'' = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \left[\frac{\cos t}{\sin^2 t} \frac{dy}{dt} - \frac{1}{\sin t} \frac{d^2y}{dt^2} \right] \cdot \left(-\frac{1}{\sin t} \right),$$

代入原方程, 得 $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$.

解此微分方程, 得 $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t = C_1 x + C_2 \sqrt{1-x^2},$

将初始条件 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2$ 代入, 有 $C_1 = 2, C_2 = 1$.

故满足条件的特解为 $y = 2x + \sqrt{1-x^2}.$

【评注】 本题的关键是将 y', y'' 转化为 $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}$, 而这主要是考查复合函数求一、二阶导数.

46 (2006, 10 题, 4 分) 函数 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + x e^x$ 满足的一个微分方程是

(A) $y'' - y' - 2y = 3xe^x.$

(B) $y'' - y' - 2y = 3e^x.$

(C) $y'' + y' - 2y = 3xe^x.$

(D) $y'' + y' - 2y = 3e^x.$

【答案】 D.

【解析】 由所给解的形式,可知原微分方程对应的齐次微分方程的特征根为

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$$

则对应的齐次微分方程的特征方程为 $(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$, 即 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$.

故对应的齐次微分方程为

$$y'' + y' - 2y = 0$$

又 $y^* = xe^x$ 为原微分方程的一个特解,而 $\lambda = 1$ 为特征单根,故原非齐次线性微分方程右端的非齐次项应具有形式 $f(x) = Ce^x$ (C 为常数). 所以综合比较四个选项,应选(D).

【评注】 对于由常系数非齐次线性微分方程的通解反求微分方程的问题,关键是要掌握对应齐次微分方程的特征根和对应特解的关系以及非齐次方程的特解形式.

47 (2007, 14 题, 4 分) 二阶常系数非齐次微分方程 $y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x}$ 的通解为 $y =$ _____.

【答案】 $C_1 e^x + C_2 e^{3x} - 2e^{2x}$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

【解析】 对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$$

则对应齐次方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$.

设原方程的特解为 $y^* = Ae^{2x}$, 代入原方程可得

$$4Ae^{2x} - 8Ae^{2x} + 3Ae^{2x} = 2e^{2x} \Rightarrow A = -2$$

所以原方程的特解为 $y^* = -2e^{2x}$, 故原方程的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - 2e^{2x}, \text{ 其中 } C_1, C_2 \text{ 为任意常数}$$

48 (2008, 3 题, 4 分) 在下列微分方程中, 以 $y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$ (C_1, C_2, C_3 为任意常数) 为通解的是

(A) $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$.

(B) $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$.

(C) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$.

(D) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$.

【答案】 D.

【解析】 由通解表达式 $y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$ 可知其特征根为 $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \pm 2i$. 可见对应特征方程为

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + 4) = \lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0$$

故对应微分方程为 $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$, 应选(D).

【评注】 对于三阶或三阶以上的常系数线性微分方程, 同样应该掌握其特征方程与对应解之间的关系.

四、微分方程的应用

49 (1995, 三(6) 题, 5 分) 设单位质点在水平面内作直线运动, 初速度 $v|_{t=0} = v_0$, 已知阻力与速度成正比(比例常数为 1), 问 t 为多少时此质点的速度为 $\frac{v_0}{3}$? 并求到此时该质点所经过的路程.

【分析】 根据牛顿第二定律建立微分方程.

【解】 设速度为 $v(t)$, 由牛顿第二定律及题意有

$$1. \frac{dv(t)}{dt} = -v(t)$$

解得 $v(t) = Ce^{-t}$, 由 $v|_{t=0} = v_0$, 得 $C = v_0$, 所以 $v(t) = v_0 e^{-t}$.

由 $\frac{v_0}{3} = v_0 e^{-t}$ 得 $t = \ln 3$, 故 t 为 $\ln 3$ 时此质点的速度为 $\frac{v_0}{3}$.

到此时该质点所经过的路程 $s = \int_0^{\ln 3} v_0 e^{-t} dt = \frac{2}{3} v_0$.

50 (1997, 五题, 8分) 设曲线 L 的极坐标方程为 $r = r(\theta)$, $M(r, \theta)$ 为 L 上任一点, $M_0(2, 0)$ 为 L 上一定点. 若极径 OM_0 、 OM 与曲线 L 所围成的曲边扇形面积值等于 L 上 M_0 、 M 两点间弧长值的一半, 求曲线 L 的方程.

【分析】 利用极坐标系下面积和弧长公式列方程, 并求解.

【解】 曲边扇形面积 $S = \frac{1}{2} \int_0^\theta r^2(t) dt$, M_0 、 M 两点间弧长 $l = \int_0^\theta \sqrt{r^2(t) + r'^2(t)} dt$.

由题意知

$$\frac{1}{2} \int_0^\theta r^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^\theta \sqrt{r^2(t) + r'^2(t)} dt$$

两边对 θ 求导, 得 $r^2 = \sqrt{r^2 + r'^2}$, 进而 $r' = \pm r \sqrt{r^2 - 1}$, 分离变量

$$\frac{dr}{r \sqrt{r^2 - 1}} = \pm d\theta, \text{ 即 } \frac{d \frac{1}{r}}{\sqrt{1 - \frac{1}{r^2}}} = \mp d\theta,$$

有 $\arcsin \frac{1}{r} = \mp \theta + C$, L 过点 $M_0(2, 0)$, 得 $C = \frac{\pi}{6}$.

故所求曲线 L 的方程为 $r = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{6} \mp \theta)} = \csc(\frac{\pi}{6} \mp \theta)$. 也可化为直角坐标方程 $x \mp \sqrt{3}y = 2$.

51 (1998, 七题, 6分) 从船上向海中沉放某种探测仪器, 按探测要求, 需确定仪器的下沉深度 y (从海平面算起) 与下沉速度 v 之间的函数关系. 设仪器在重力作用下, 从海平面由静止开始铅直下沉, 在下沉过程中还受到阻力和浮力的作用. 设仪器的质量为 m , 体积为 B , 海水比重为 ρ , 仪器所受的阻力与下沉速度成正比, 比例系数为 k ($k > 0$). 试建立 y 与 v 所满足的微分方程, 并求出函数关系式 $y = y(v)$.

【分析】 由牛顿第二定律列方程, 并求解.

【解】 设沉放点为原点 O , Oy 轴正向垂直向下, 则由牛顿第二定律得

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg - B\rho - kv$$

其中 $v = \frac{dy}{dt}$. 进而 $\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt} = v \frac{dv}{dy}$,

于是所列微分方程化为 $mv \frac{dv}{dy} = mg - B\rho - kv$.

分离变量 $dy = \frac{mv}{mg - B\rho - kv} dv$, 两边积分

$$y = -\frac{mv}{k} - \frac{m(mg - B\rho)}{k^2} \ln(mg - B\rho - kv) + C$$

代入初值条件 $v|_{y=0} = 0$, 得 $C = \frac{m(mg - B\rho)}{k^2} \ln(mg - B\rho)$,

所求的函数关系式为 $y = -\frac{mv}{k} - \frac{m(mg - B\rho)}{k^2} \ln \left(\frac{mg - B\rho - kv}{mg - B\rho} \right)$.

【评注】 本题是一个难度不算太大的物理应用题, 但由于题中涉及较多的抽象字母, 运算稍显繁琐, 应注意计算能力的训练.

52 (1998, 十题, 8分) 设 $y = y(x)$ 是一条向上凸的连续曲线, 其上任意一点 (x, y) 处的曲率为 $\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$, 且此曲线上点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $y = x + 1$, 求该曲线的方程, 并求函数 $y = y(x)$ 的极值.

【分析】 由题中条件建立一个二阶微分方程, 此曲线上点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $y = x + 1$, 有初值条件 $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

【解】 曲线向上凸, 有 $y'' < 0$, 由题意知

$$\frac{-y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

即 $y'' = -(1+y'^2)$, 且满足初值条件 $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

令 $p = y'$, 方程变为 $p' = -(1+p^2)$, 分离变量 $\frac{dp}{1+p^2} = -dx$, 积分得 $\arctan p = -x + C_1$,

代入初值条件 $y(0) = 1, y'(0) = 1$, 得 $C_1 = \frac{\pi}{4}$,

进而 $\arctan y' = -x + \frac{\pi}{4}$, 有 $y' = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$, 亦是 $y = \ln \left| \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \right| + C_2$,

代入 $y(0) = 1$, 有 $C_2 = 1 + \frac{1}{2} \ln 2$, 所求曲线方程为

$$y = \ln \left| \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \right| + 1 + \frac{1}{2} \ln 2$$

此函数是周期为 π 的函数, 考虑 $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$,

$$y = \ln \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + 1 + \frac{1}{2} \ln 2$$

显然 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$, 此时 $y = \ln \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + 1 + \frac{1}{2} \ln 2$ 取到极大值为 $1 + \frac{1}{2} \ln 2$.

【评注】 本题具有一定的综合性, 涉及曲率、二阶微分方程和函数的极值等问题.

53 (1999, 九题, 8分) 设函数 $y(x) (x \geq 0)$ 二阶可导且 $y'(x) > 0, y(0) = 1$. 过曲线 $y = y(x)$ 上任意一点 $P(x, y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线, 上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积记为 S_1 , 区间 $[0, x]$ 上以 $y = y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2 . 并设 $2S_1 - S_2$ 恒为 1, 求此曲线 $y = y(x)$ 的方程.

【分析】 由几何意义, 求出 S_1, S_2 , 利用 $2S_1 - S_2 = 1$ 得到关于 $y(x)$ 的积分方程, 解此方程, 求出 $y = y(x)$.

【解】 设过点 $P(x, y)$ 的切线方程为 $Y - y = y'(x)(X - x)$, 与 x 轴的交点为 $\left(x - \frac{y}{y'}, 0\right)$. 且

由题设, 知 $y(x) > 0$.

因为 $S_1 = \frac{1}{2}y \left| x - \left(x - \frac{y}{y'} \right) \right| = \frac{y^2}{2y'}$, 且 $S_2 = \int_0^x y(t) dt$.

由条件 $2S_1 - S_2 = 1$, 得 $\frac{y^2}{y} - \int_0^x y(t) dt = 1$, 两边对 x 求导, 整理得 $yy'' = y'^2$,

且满足初值条件 $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

令 $y' = \frac{dy}{dx} = p$, 则 $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$. 于是, $yp p' = p^2$, 即 $yp' = p$.

解此微分方程, 得通解为 $y = e^{C_1 + C_2 x}$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

于是, 代入条件 $y(0) = 1, y'(0) = 1$, 满足特定条件的特解为 $y = e^x$.

【评注】 注意积分方程隐含的条件 $y'(0) = 1$.

54 (2000, 七题, 7分) 某湖泊的水量为 V , 每年排入湖泊内含污染物 A 的污水量为 $\frac{V}{6}$, 流入湖泊内不含 A 的水量为 $\frac{V}{6}$, 流出湖泊的水量为 $\frac{V}{3}$. 已知 1999 年底湖中 A 的含量为 $5m_0$, 超过国家规定指标. 为了治理污染, 从 2000 年初起, 限定排入湖泊中含 A 污水的浓度不超过 $\frac{m_0}{V}$. 问至多需经过多少年, 湖泊中污染物 A 的含量降至 m_0 以内? (注: 设湖水中 A 的浓度是均匀的.)

【分析】 由题中条件利用微元法列出微分方程求解.

【解】 设从 2000 年初开始 ($t = 0$), 第 t 年湖泊中污染物 A 的含量为 $m(t)$, 浓度为 $\frac{m}{V}$. 在时间间隔 $[t, t + dt]$ 上, 排入湖泊中 A 的量近似为 $\frac{m_0}{V} \cdot \frac{V}{6} dt = \frac{m_0}{6} dt$, 排出的量近似为 $\frac{m}{V} \cdot \frac{V}{3} dt = \frac{m}{3} dt$. 在时间间隔 $[t, t + dt]$ 上 $m(t)$ 的改变量为 $dm = \left(\frac{m_0}{6} - \frac{m}{3} \right) dt$, 解此变量可分离微分方程得

$$m(t) = \frac{m_0}{2} - Ce^{-\frac{t}{3}}$$

由初始条件 $m(0) = 5m_0$ 求得 $C = -\frac{9}{2}m_0$. 于是 $m(t) = \frac{m_0}{2}(1 + 9e^{-\frac{t}{3}})$.

令 $m(t) = m_0$ 得 $t = 6 \ln 3$, 即至多需经过 $6 \ln 3$ 年, 湖泊中污染物 A 的含量降至 m_0 以内.

55 (2001, 八题, 9分) 设 L 是一条平面曲线, 其上任意一点 $P(x, y) (x > 0)$ 到坐标原点的距离, 恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距, 且 L 经过点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

(1) 试求曲线 L 的方程;

(2) 求 L 位于第一象限部分的一条切线, 使该切线与 L 以及两坐标轴所围图形的面积最小.

【分析】 (1) 列出微分方程求解; (2) 利用面积最小, 求出切线的切点.

【解】 (1) 设曲线 L 过点 $P(x, y)$ 的切线方程为

$$Y - y = y'(X - x)$$

令 $X = 0$ 得 y 轴上的截距为 $y - xy'$. 由题设 $\sqrt{x^2 + y^2} = y - xy'$, 令 $u = \frac{y}{x}$, 得

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -\frac{dx}{x}$$

解之得 $y + \sqrt{x^2 + y^2} = C$, 由 $y\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, 知 $C = \frac{1}{2}$. 故有 $y + \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}$, 即所求曲线 L 的方程 $y = \frac{1}{4} - x^2$.

(2) 设第一象限内曲线 $y = \frac{1}{4} - x^2$ 在点 $P(x, y)$ 处的切线方程为

$$Y - \left(\frac{1}{4} - x^2\right) = -2x(X - x), \text{ 即 } Y = -2xX + x^2 + \frac{1}{4} \left(0 < x \leq \frac{1}{2}\right)$$

它与 x 轴及 y 轴的交点分别为 $\left(\frac{1}{2x}\left(x^2 + \frac{1}{4}\right), 0\right), \left(0, x^2 + \frac{1}{4}\right)$.

$$\text{所求面积为 } S(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2}{2x} - \int_0^{\frac{1}{2x}\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)} \left(\frac{1}{4} - x^2\right) dx.$$

$$\text{令 } S'(x) = \frac{\left(3x^2 - \frac{1}{4}\right)\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)}{4x^2} = 0, \text{ 得 } x = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

当 $0 < x < \frac{\sqrt{3}}{6}$ 时, $S'(x) < 0$; 当 $\frac{\sqrt{3}}{6} < x \leq \frac{1}{2}$ 时, $S'(x) > 0$.

$S(x)$ 在 $x = \frac{\sqrt{3}}{6}$ 时取到最小值, 此时切线方程为 $Y = -\frac{\sqrt{3}}{3}X + \frac{1}{3}$.

【评注】 这是一个综合题, 虽难度不是很大, 但要注意的是曲线上任意点 $P(x, y)$, 切线上的点表示为 (X, Y) .

56 (2001, 九题, 7分) 一个半球体状的雪堆, 其体积融化的速率与半球面面积 S 成正比, 比例常数 $K > 0$. 假设在融化过程中雪堆始终保持半球体状. 已知半径为 r_0 的雪堆在开始融化的 3 小时内, 融化了其体积的 $\frac{7}{8}$, 问雪堆全部融化需要多少小时?

【解】 设半球在融化过程中其半径为 r (r 随时间变化), 体积为 V , 表面积为 S . 由题设有 $\frac{dV}{dt} = -kS$, 注意因 $\frac{dV}{dt} < 0$, 故应添加负号.

而 $V = \frac{2}{3}\pi r^3, S = 2\pi r^2$, 有 $\frac{dr}{dt} = -k, \Rightarrow r = -kt + C$, 即 $r = -kt + C$.

又 $r(0) = r_0, r(3) = \frac{1}{2}r_0$, 得 $C = r_0, k = \frac{1}{6}r_0$, 进而 $r = -\frac{r_0}{6}t + r_0$,

当 $r = 0$ 时, 有 $t = 6$, 故开始后 6 小时可融化完.

57 (2003, 八题, 12分) 设位于第一象限的曲线 $y = f(x)$ 过点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 其上任一点 $P(x, y)$ 处的法线与 y 轴的交点为 Q , 且线段 PQ 被 x 轴平分.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 的方程;

(2) 已知曲线 $y = \sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上的弧长为 l , 试用 l 表示曲线 $y = f(x)$ 的弧长 s .

【分析】 (1) 先求出法线方程与交点坐标 Q , 再由题设线段 PQ 被 x 轴平分, 可转化为微分方程, 求解此微分方程即可得曲线 $y = f(x)$ 的方程. (2) 将曲线 $y = f(x)$ 化为参数方程, 再利用弧长公式 $s = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$ 进行计算即可.

【解】 (1) 曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x, y)$ 处的法线方程为

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$$

其中 (X, Y) 为法线上任意一点的坐标. 令 $X = 0$, 则

$$Y = y + \frac{x}{y'}$$

故 Q 点的坐标为 $(0, y + \frac{x}{y'})$. 由题设知

$$\frac{1}{2} \left(y + y + \frac{x}{y'} \right) = 0, \text{ 即 } 2ydy + xdx = 0$$

积分得 $x^2 + 2y^2 = C$ (C 为任意常数).

由 $y|_{x=-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}$ 知 $C = 1$, 故曲线 $y = f(x)$ 的方程为

$$x^2 + 2y^2 = 1$$

(2) 曲线 $y = \sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上的弧长为

$$l = \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2 x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$$

曲线 $y = f(x)$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{故 } s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t + \frac{1}{2} \cos^2 t} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin^2 t} dt,$$

令 $t = \frac{\pi}{2} - u$, 则

$$s = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1 + \cos^2 u} (-du) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 u} du = \frac{l}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} l$$

【评注】 注意只在第一象限考虑曲线 $y = f(x)$ 的弧长, 所以积分限应从 0 到 $\frac{\pi}{2}$, 而不是从

0 到 2π .

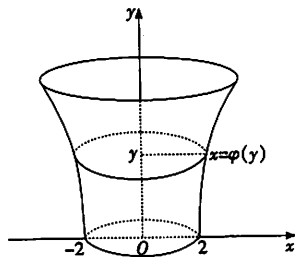
58 (2003, 九题, 10 分) 有一平底容器, 其内侧壁是由曲线 $x = \varphi(y)$ ($y \geq 0$) 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面(如图), 容器的底面圆的半径为 $2m$. 根据设计要求, 当以 $3m^3/\text{min}$ 的速率向容器内注入液体时, 液面的面积将以 $\pi m^2/\text{min}$ 的速率均匀扩大(假设注入液体前, 容器内无液体).

(1) 根据 t 时刻液面的面积, 写出 t 与 $\varphi(y)$ 之间的关系式;

(2) 求曲线 $x = \varphi(y)$ 的方程.

(注: m 表示长度单位米, min 表示时间单位分.)

【分析】 液面的面积将以 $\pi m^2/\text{min}$ 的速率均匀扩大, 因此 t 时刻液面面积应为: $\pi 2^2 + \pi t$, 而液面为圆, 其面积可直接计算出来, 由此可导出 t 与 $\varphi(y)$ 之间的关系式; 又液体的体积可根据旋转体的体积公式用定积分计算, 已知 t 时刻的液体体积为 $3t$, 它们之间也可建立积分关系式, 求导后转化为微分方程求解即可.



【解】 (1) 设在 t 时刻, 液面的高度为 y , 则由题设知此时液面的面积为 $\pi\varphi^2(y) = 4\pi + \pi t$, 从而 $t = \varphi^2(y) - 4$.

(2) 液面的高度为 y 时, 液体的体积为 $\pi \int_0^y \varphi^2(u) du = 3t = 3\varphi^2(y) - 12$.

上式两边对 y 求导, 得

$$\pi\varphi^2(y) = 6\varphi(y)\varphi'(y), \text{ 即 } \pi\varphi(y) = 6\varphi'(y)$$

解此微分方程, 得

$$\varphi(y) = Ce^{\frac{\pi}{6}y}, \text{ 其中 } C \text{ 为任意常数,}$$

由 $\varphi(0) = 2$ 知 $C = 2$, 故所求曲线方程为

$$x = 2e^{\frac{\pi}{6}y}$$

【评注】 作为应用题, 本题比较好地综合考查了定积分在几何上的应用与微分方程的求解.

59 (2004, 20 题, 11 分) 某种飞机在机场降落时, 为了减小滑行距离, 在触地的瞬间, 飞机尾部张开减速伞, 以增大阻力, 使飞机迅速减速并停下来. 现有一质量为 9000kg 的飞机, 着陆时的水平速度为 700km/h . 经测试, 减速伞打开后, 飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比(比例系数为 $k = 6.0 \times 10^6$). 问从着陆点算起, 飞机滑行的最长距离是多少?

注: kg 表示千克, km/h 表示千米/小时.

【分析】 本题属物理应用. 已知加速度或力求运动方程是质点运动学中一类重要的计算, 可利用牛顿第二定律, 建立微分方程, 再求解.

【解】 (方法一) 由题设, 飞机的质量 $m = 9000\text{kg}$, 着陆时的水平速度 $v_0 = 700\text{km/h}$. 从飞机接触跑道开始记时, 设 t 时刻飞机的滑行距离为 $x(t)$, 速度为 $v(t)$.

根据牛顿第二定律, 得

$$m \frac{dv}{dt} = -kv$$

$$\text{又 } \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx},$$

$$dx = -\frac{m}{k} dv$$

$$\text{积分得 } x(t) = -\frac{m}{k}v + C,$$

由于 $v(0) = v_0, x(0) = 0$, 故得 $C = \frac{m}{k}v_0$, 从而

$$x(t) = \frac{m}{k}(v_0 - v(t))$$

当 $v(t) \rightarrow 0$ 时,

$$x(t) \rightarrow \frac{mv_0}{k} = \frac{9000 \times 700}{6.0 \times 10^6} = 1.05\text{km}$$

所以, 飞机滑行的最长距离为 1.05km .

(方法二) 根据牛顿第二定律, 得

$$m \frac{dv}{dt} = -kv$$

$$\text{所以 } \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} dt,$$

两边积分得 $v = Ce^{-\frac{k}{m}t}$,

代入初始条件 $v|_{t=0} = v_0$, 得 $C = v_0$,

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$$

故飞机滑行的最长距离为

$$x = \int_0^{+\infty} v(t) dt = -\frac{mv_0}{k} e^{-\frac{k}{m}t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{mv_0}{k} = 1.05 \text{ km}$$

(方法三) 根据牛顿第二定律, 得

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} \frac{dx}{dt} = 0$$

其特征方程为 $r^2 + \frac{k}{m}r = 0$,

解得 $r_1 = 0, r_2 = -\frac{k}{m}$,

故 $x = C_1 + C_2 e^{-\frac{k}{m}t}$,

由 $x(0) = 0, v(0) = \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} = -\frac{kC_2}{m} e^{-\frac{k}{m}t} \Big|_{t=0} = v_0$, 得 $C_1 = -C_2 = \frac{mv_0}{k}$,

$$x(t) = \frac{mv_0}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

当 $t \rightarrow +\infty$ 时,

$$x(t) \rightarrow \frac{mv_0}{k} = \frac{9000 \times 700}{6.0 \times 10^6} = 1.05 \text{ km}$$

所以, 飞机滑行的最长距离为 1.05 km.

【评注】 此题的考点是由物理问题建立微分方程, 并进一步求解.

60 (2008, 19 题, 11 分) 设 $f(x)$ 是区间 $[0, +\infty)$ 上具有连续导数的单调增加函数, 且 $f(0) = 1$. 对任意的 $t \in [0, +\infty)$, 直线 $x = 0, x = t$, 曲线 $y = f(x)$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周生成一旋转体. 若该旋转体的侧面面积在数值上等于其体积的 2 倍, 求函数 $f(x)$ 的表达式.

【解】 旋转体的体积 $V = \pi \int_0^t f^2(x) dx$, 侧面积 $S = 2\pi \int_0^t f(x) \sqrt{1+f'^2(x)} dx$, 由题设条件知

$$\int_0^t f^2(x) dx = \int_0^t f(x) \sqrt{1+f'^2(x)} dx$$

上式两端对 t 求导得 $f^2(t) = f(t) \sqrt{1+f'^2(t)}$, 即

$$y' = \sqrt{y^2 - 1}$$

由分离变量法解得 $\ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) = t + C_1$, 即

$$y + \sqrt{y^2 - 1} = Ce^t,$$

将 $y(0) = 1$ 代入知 $C = 1$. 故 $y + \sqrt{y^2 - 1} = e^t, y = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$, 于是所求函数为

$$y = f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

第二部分 线性代数

第一章 行列式

本章导读

本章 1999 年开始有考题. 历年来单纯行列式的考题不多, 分值也不大, 相对重要的是抽象型行列式的计算, 另一方面大家要注意如何通过行列式的计算来帮助回答矩阵、向量、方程组、特征值、二次型中的等等问题, 即行列式的应用.

一、数字型行列式的计算

试题特点

对于数字型行列式的计算主要是用按行、按列展开公式, 但在展开之前往往先运用行列式性质对其作恒等变形, 以期某行或某列有较多的零元素, 这时再展开可减轻计算量. 同时, 也要注意一些特殊公式, 如上(下)三角、范德蒙行列式、拉普拉斯展开式的运用.

计算行列式时, 一些常用的技巧有: 把第一行的 k_i 倍加至第 i 行; 把每行都加到第一行; 逐行相加; ...

1 (1999, 二(5)题, 3分) 记行列式

$$\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix} \text{ 为 } f(x), \text{ 则方程}$$

$f(x) = 0$ 的根的个数为

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

【答案】 B.

【解析】 问方程 $f(x) = 0$ 有几个根, 也就是问 $f(x)$ 是 x 的几次多项式. 将第 1 列的 -1 倍依次加至其余各列, 有

说明: 数学二是 1997 年开始考线性代数的, 大纲称其为“线性代数初步”, 涉及行列式、矩阵、向量、方程组四章, 试题 3~4 题, 约 16 分. 2003 年增加特征值, 试题 5 个约 30 分. 2007 年大纲把“初步”取消, 内容上又增加了二次型, 试题 5 个约 34 分.

目前, 数一、数二、数三线性代数大纲要求基本一样. 考题几乎完全相同. 数二由 1997~2008 年的线代考题组成, 题目数量明显不够, 数二同学一定要认真做练习题, 搞清考研的题型、方法、技巧.

$$f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{(2)+(4)} \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

由拉普拉斯展开式知 $f(x)$ 是 2 次多项式, 故应选(B).

【评注】 由于行列式中各项均含有 x , 若直接展开是繁琐的, 故一定要先恒等变形; 也不要错误地认为 $f(x)$ 一定是 4 次多项式.

2 (2008, 22 题, 6 分)(局部) 设 n 元线性方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{bmatrix}_{n \times n}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

证明行列式 $|A| = (n+1)a^n$.

提示: 为证明 $|A| = (n+1)a^n$ 可以用数学归纳法; 或者用逐行相加的技巧, 即把第一行的倍数加到第二行, 再把新第二行倍数加到第三行, $\dots$ 化其为上三角行列式.

详细解答参看第四章线性方程组.

练习题

1. (2001, 数四, 3 分) 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$, 则第 4 行各元素余子式之和的值为_____.

2. (1991, 数四, 3 分) n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$.

练习题参考答案

1. 【答案】 -28.

【解析】 按余子式定义, 即求下列 4 个行列式值之和

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -7 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -56 + 0 + 42 - 14 = -28$$

因为行列式中有较多的零元素, 所以用余子式的定义直接求和并不复杂.

如果利用余子式与代数余子式的关系及代数余子式的性质, 也可如下计算

$$\sum M_{4j} = -A_{41} + A_{42} - A_{43} + A_{44}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -28$$

2.【答案】 $a^n + (-1)^{n+1}b^n$.

【解析】 按第 1 列展开,有

$$D = a \begin{vmatrix} a & b & & \\ & \ddots & & \\ & & a & b \\ & & & a \end{vmatrix} + b(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} b & & & \\ a & b & & \\ & \ddots & & \\ & & a & b \end{vmatrix}$$

$$= a^n + (-1)^{n+1}b^n$$

请思考本题按第 1 行展开与按第 1 列展开哪一种方法更简便?

二、抽象型行列式的计算

试题特点

对于抽象型行列式的计算,有可能考查行列式性质的理解、运用,有可能涉及矩阵的运算,也可能用特征值、相似等处理.这一类题目往往综合性强,涉及知识点多.因此,考生复习时要注意知识的衔接与转换,如果内在联系把握得好,解题时的思路就灵活.这一类题目计算量一般不会太大.

3. (2003, 一(6)题, 4分) 设三阶方阵 A, B 满足 $A^2B - A - B = E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵, 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $|B| =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$.

【解析】 由已知条件有

$$(A^2 - E)B = A + E, \text{ 即 } (A + E)(A - E)B = A + E$$

因为 $A + E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 知 $A + E$ 可逆. 故

$$B = (A - E)^{-1}$$

而 $|A - E| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2$

又因 $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$, 故应填: $\frac{1}{2}$.

4. (2004, 6题, 4分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 矩阵 B 满足 $ABA^* = 2BA^* + E$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵, E 是单位矩阵, 则 $|B| =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{9}$.

【解析】 由于 $AA^* = A^*A = |A|E$, 易见 $|A| = 3$, 用 A 右乘矩阵方程的两端, 有

$$3AB = 6B + A \Rightarrow 3(A - 2E)B = A \Rightarrow 3^3 |A - 2E| |B| = |A|$$

$$\text{又 } |A - 2E| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1, \text{ 故 } |B| = \frac{1}{9}. \text{ 因此应填: } \frac{1}{9}.$$

5 (2005, 6 题, 4 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为三维列向量, 记矩阵

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3)$$

如果 $|A| = 1$, 那么 $|B| =$ _____.

【答案】 2

【解析】 方法一 用行列式的性质, 例如先 3 列 - 2 列再 2 列 - 1 列有

$$\begin{aligned} |B| &= |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3| \\ &= |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_2 + 5\alpha_3| \\ &= |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + 3\alpha_3, 2\alpha_3| = 2 |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_3| \\ &= 2 |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2, \alpha_3| = 2 |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 2 |A|. \end{aligned}$$

方法二 用分块矩阵, 由于

$$B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

两边取行列式, 并用行列式乘法公式, 得

$$|B| = |A| \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2 |A|.$$

【评注】 计算抽象型行列式本题的这两种解法是很重要的.

6 (2006, 6 题, 4 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, E 为二阶单位矩阵, 矩阵 B 满足 $BA = B + 2E$, 则 $|B| =$ _____.

【答案】 2.

【解析】 由 $BA = B + 2E$ 得 $B(A - E) = 2E$, 两边取行列式, 有

$$|B| \cdot |A - E| = |2E| = 4$$

$$\text{因为 } |A - E| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \text{ 所以 } |B| = 2.$$

【评注】 本题考查抽象行列式的计算, 运用的是矩阵运算, 行列式乘法公式等基础知识. 另外 $|kA| = k^n |A|$ 不要出错. 本题难度系数 0.492. 简单题考的不理想要引起警惕.

7 (2008, 14 题, 4 分) 设三阶矩阵 A 的特征值为 2, 3, λ . 若行列式 $|2A| = -48$, 则 $\lambda =$ _____.

【答案】 -1.

【解析】 抽象行列式的计算, 考查行列式的两个基本公式: $|kA| = k^n |A|$; $|A| = \prod \lambda_i$.

$$\text{由 } |2A| = 2^3 |A| = -48 \Rightarrow |A| = -6.$$

又 $|A| = 2 \cdot 3 \cdot \lambda$ 所以 $\lambda = -1$.

练习题

1. (1992, 数三, 3分) 设 A 为 m 阶方阵, B 为 n 阶方阵, 且 $|A| = a, |B| = b, C = \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$, 则 $|C| =$ _____.

2. (2000, 数四, 3分) 已知 4 阶矩阵 A 相似于 B , A 的特征值为 2, 3, 4, 5, E 为 4 阶单位矩阵, 则 $|B - E| =$ _____.

练习题参考答案

1. 【答案】 $(-1)^{mn}ab$.

【解析】 由拉普拉斯展开式, 有

$$|C| = \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| |B| = (-1)^{mn} ab.$$

故应填: $(-1)^{mn}ab$.

2. 【答案】 24.

【解析】 由 $A \sim B$ 得 B 的特征值为 2, 3, 4, 5. 进而知 $B - E$ 的特征值为 1, 2, 3, 4. 故应填: 24.

若用 $B \sim \Lambda = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 3 & & \\ & & 4 & \\ & & & 5 \end{bmatrix}$, 推出 $B - E \sim \Lambda - E$, 进而知 $|B - E| = |\Lambda - E|$, 亦可求出行列式的值.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

第二章 矩阵

本章导读

本章 1997 年开始有考题. 矩阵是线性代数的核心内容, 矩阵的概念、运算及理论贯穿线性代数的始终. 几乎年年都有单纯的矩阵知识的考题, 而且其他考题也回避不了矩阵的知识, 矩阵的重要性不言而喻.

二十多年来, 矩阵的解答题考的很少, 但复习时, 对于填空与选择不要大意失荆州.

一、矩阵运算、初等变换

试题特点

试题简单、基本, 但容易失误. 由于矩阵乘法没有交换律, 没有消去律, 有零因子, 这和大家熟悉的算术运算有很大区别, 试题往往就是考查这里的基本功, 因此复习时对于矩阵的运算要正确, 熟练, 不要眼高手低, 犯低级失误.

矩阵的初等行变换是左乘初等矩阵, 矩阵的初等列变换是右乘初等矩阵, 这里要分清左乘、右乘, 记住初等矩阵的逆矩阵.

例 1 (2003, 一(5) 题, 4 分) 设 α 为 3 维列向量, α^T 是 α 的转置, 若 $\alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 则

$$\alpha^T\alpha = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 3.

【解析】 $A = \alpha\alpha^T$ 是秩为 1 的矩阵, $\alpha^T\alpha$ 是一个数, 这两个符号不要混淆. 且 $\alpha^T\alpha$ 是矩阵 $\alpha\alpha^T$ 的迹.

注意, 若 $r(A) = 1$, 则有 $A = \alpha\beta^T$, 其中 α, β 均为 n 维列向量, 而 $\alpha^T\beta = \beta^T\alpha = \sum a_{ii}$.

故本题应填: 3.

若不熟悉上述关系式, 本题亦可先求出 α :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} [1, -1, 1] = \alpha\alpha^T$$

$$\text{故 } \alpha^T\alpha = (1, -1, 1) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3$$

例 2 (2004, 13 题, 4 分) 设 A 是 3 阶方阵, 将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B , 再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C , 则满足 $AQ = C$ 的可逆矩阵 Q 为

$$(A) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(B) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(C) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(D) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

【答案】 D.

【解析】 按题意,用初等矩阵描述,有

$$A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B, B \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C$$

故

$$A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C$$

从而

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以应选(D).

3 (2005, 14 题, 4 分) 设 A 为 $n(n \geq 2)$ 阶可逆矩阵, 交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B , A^* , B^* 分别为 A , B 的伴随矩阵, 则

(A) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 B^* .

(B) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 B^* .

(C) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 $-B^*$.

(D) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 $-B^*$.

【答案】 C.

【解析】 为书写简捷,不妨设 A 为三阶矩阵, 因为 A 作初等行变换得到 B , 所以用初等矩阵左乘 A 得到 B , 按已知有

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = B. \Rightarrow B^{-1} = A^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = A^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

从而

$$\frac{|B^*|}{|B|} = \frac{|A^*|}{|A|} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

又因 $|A| = -|B|$, 故 $A^* \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -B^*$, 所以应选(C).

【评注】 本题考查初等矩阵的两个定理: 一个是左乘右乘问题, 一个是初等矩阵的逆矩阵公式. 注意求伴随矩阵有两种思路: 一是用定义法, 一是用可逆矩阵来转换($A^* = |A| A^{-1}$).

4 (2006, 14 题, 4 分) 设 A 为三阶矩阵, 将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B , 再将 B 的第 1 列的 -1

倍加到第 2 列得 C , 记 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则

(A) $C = P^{-1}AP$.

(B) $C = PAP^{-1}$.

(C) $C = P^TAP$.

(D) $C = PAP^T$.

【答案】 B.

【解析】 按已知条件,用初等矩阵描述有

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A, \quad C = B \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{于是 } C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = PAP^{-1}, \text{ 所以应选(B).}$$

【评注】 本题考查初等矩阵的左乘右乘问题及初等矩阵逆矩阵的公式.

练习题

1. (2001, 数三, 3分) 设

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 A 可逆, 则 B^{-1} 等于

- (A) $A^{-1}P_1P_2$. (B) $P_1A^{-1}P_2$. (C) $P_1P_2A^{-1}$. (D) $P_2A^{-1}P_1$.

2. (2004, 数三, 4分) 设 n 阶矩阵 A 与 B 等价, 则必有

- (A) 当 $|A| = a (a \neq 0)$ 时, $|B| = a$. (B) 当 $|A| = a (a \neq 0)$ 时, $|B| = -a$.
(C) 当 $|A| \neq 0$ 时, $|B| = 0$. (D) 当 $|A| = 0$ 时, $|B| = 0$.

练习题参考答案

1. 【答案】 C.

【解析】 把矩阵 A 的 1, 4 两列对换, 2, 3 两列对换即得到矩阵 B . 根据初等矩阵的性质, 有

$$B = AP_1P_2 \text{ 或 } B = AP_2P_1$$

$$\text{那么 } B^{-1} = (AP_2P_1)^{-1} = P_1^{-1}P_2^{-1}A^{-1} = P_1P_2A^{-1}.$$

所以应选(C).

【评注】 本题考查初等矩阵的两个定理, 一个是行变换、列变换与左乘、右乘初等矩阵间的关系, 一个是初等矩阵逆矩阵的公式. 复习初等矩阵时应搞清这两个基本定理.

2. 【答案】 D.

【解析】 所谓矩阵 A 与 B 等价, 即 A 经初等变换得到 B . A 与 B 等价的充分必要条件是 A 与 B 有相同的秩.

经过初等变换其行列式的值不一定相等, 例如, 假若把矩阵 A 的第一行乘以 5 可得到 B , 那么 A 与 B 等价, 而 $|A| = a$ 时, $|B| = 5a$. 可知(A)(B) 均不正确.

若 $|A| \neq 0$, 说明 $r(A) = n$, 而 $|B| = 0$, 说明 $r(B) < n$, 因此(C) 不正确.

当 $|A| = 0$ 时, $r(A) < n$, 故 $r(B) < n$, 因而 $|B| = 0$, 即(D) 正确, 应选(D).

二、伴随矩阵、可逆矩阵

试题特点

伴随与可逆是矩阵中最重要的知识点,关键公式: $AA^* = A^*A = |A|E$,进而有

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* \text{ 或 } A^* = |A|A^{-1}$$

涉及伴随与可逆的试题非常多.要想到并灵活运用 $AA^* = A^*A = |A|E$ 这一核心公式.

定义法,单位矩阵恒等变形,可逆的充要条件都是重要的考点.

5 (1998,二(5)题,3分) 设 A 是任一 $n(n \geq 3)$ 阶方阵, A^* 是其伴随矩阵,又 k 为常数,且 $k \neq 0, \pm 1$,则必有 $(kA)^* =$

- (A) kA^* . (B) $k^{n-1}A^*$.
(C) k^nA^* . (D) $k^{-1}A^*$.

【答案】 B.

【解析】 对任何 n 阶矩阵都要成立的关系式,对特殊的 n 阶矩阵自然也要成立.那么,当 A 可逆时,由 $A^* = |A|A^{-1}$ 有

$$(kA)^* = |kA|(kA)^{-1} = k^n|A| \cdot \frac{1}{k}A^{-1} = k^{n-1}A^*$$

故应选(B).

一般地,若 $A = (a_{ij})$,有 $kA = (ka_{ij})$,那么矩阵 kA 的 i 行 j 列元素的代数余子式为

$$\begin{aligned} & (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} ka_{1,1} & \cdots & ka_{1,j-1} & ka_{1,j+1} & \cdots & ka_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i-1,1} & \cdots & ka_{i-1,j-1} & ka_{i-1,j+1} & \cdots & ka_{i-1,n} \\ ka_{i+1,1} & \cdots & ka_{i+1,j-1} & ka_{i+1,j+1} & \cdots & ka_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n,1} & \cdots & ka_{n,j-1} & ka_{n,j+1} & \cdots & ka_{n,n} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{i+j} k^{n-1} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

即 $|kA|$ 中每个元素的代数余子式恰好是 $|A|$ 相应元素的代数余子式的 k^{n-1} 倍,因而,按伴随矩阵的定义知 $(kA)^*$ 的元素是 A^* 对应元素的 k^{n-1} 倍.

6 (2000,一(5)题,3分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{bmatrix}$, E 为 4 阶单位矩阵,且 $B = (E +$

$A)^{-1}(E - A)$,则 $(E + B)^{-1} =$ _____.

【答案】
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

【解析】 虽可以由 A 先求出 $(E+A)^{-1}$, 再作矩阵乘法求出 B , 最后通过求逆得到 $(E+B)^{-1}$. 但这种方法计算量太大.

若用单位矩阵恒等变形的技巧, 我们有

$$\begin{aligned} B+E &= (E+A)^{-1}(E-A)+E \\ &= (E+A)^{-1}[(E-A)+(E+A)] = 2(E+A)^{-1} \end{aligned}$$

所以
$$(E+B)^{-1} = [2(E+A)^{-1}]^{-1} = \frac{1}{2}(E+A)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

或者, 由 $B = (E+A)^{-1}(E-A)$, 左乘 $E+A$ 得

$$(E+A)B = E-A \Rightarrow (E+A)B + (E+A) = E-A + E+A = 2E$$

即有
$$(E+A)(E+B) = 2E$$

下略.

7 (2008, 7 题, 4 分) 设 A 为 n 阶非零矩阵, E 为 n 阶单位矩阵. 若 $A^3 = O$, 则

(A) $E-A$ 不可逆, $E+A$ 不可逆.

(B) $E-A$ 不可逆, $E+A$ 可逆.

(C) $E-A$ 可逆, $E+A$ 可逆.

(D) $E-A$ 可逆, $E+A$ 不可逆.

【答案】 C.

【解析】 判断矩阵 A 可逆通常用定义, 或者用充要条件行列式 $|A| \neq 0$, (当然 $|A| \neq 0$ 又要很多等价的说法). 因为

$$(E-A)(E+A+A^2) = E-A^3 = E, (E+A)(E-A+A^2) = E+A^3 = E$$

所以, 由定义知 $E-A, E+A$ 均可逆. 故选 (C).

【评注】 本题用特征值也是简捷的, 由 $A^3 = O \Rightarrow A$ 的特征值 $\lambda = 0 \Rightarrow E-A$ (或 $E+A$) 特征值均不为 0 $\Rightarrow |E-A| \neq 0$ (或 $|E+A| \neq 0$) $\Rightarrow E-A$ (或 $E+A$) 可逆.

练习题

1. (1993, 数四, 8 分) 已知 3 阶矩阵 A 的逆矩阵为 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, 试求伴随矩阵 A^* 的逆矩阵.

2. (2002, 数四, 3 分) 设 A, B 为 n 阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 对应的伴随矩阵, 分块矩阵 $C = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$, 则 C 的

伴随矩阵 $C^* =$

(A) $\begin{bmatrix} |A|A^* & O \\ O & |B|B^* \end{bmatrix}.$

(B) $\begin{bmatrix} |B|B^* & O \\ O & |A|A^* \end{bmatrix}.$

$$(C) \left[\begin{array}{c|c} A & B^* \\ \hline O & B|A^* \end{array} \right].$$

$$(D) \left[\begin{array}{c|c} B & A^* \\ \hline O & A|B^* \end{array} \right].$$

3. (1992, 数四, 3 分) 设 A 设 $A, B, A+B, A^{-1}+B^{-1}$ 均为 n 阶可逆矩阵, 则 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$ 等于

(A) $A^{-1}+B^{-1}$.

(B) $A+B$.

(C) $A(A+B)^{-1}B$.

(D) $(A+B)^{-1}$.

4. (2002, 数四, 3 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = A^2 - 3A + 2E$, 则 $B^{-1} =$ _____.

练习题参考答案

1.【解】 由 $AA^* = A^*A = |A|E$, 有

$$\frac{A}{|A|}A^* = A^* \frac{A}{|A|} = E$$

按可逆定义, 知

$$(A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|} = |A^{-1}|A$$

由于 $(A^{-1})^{-1} = A$, 求 A^{-1} 的逆矩阵, 有

$$(A^{-1}; E) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

于是 $A = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

又因 $|A^{-1}| = 2$, 故知

$$(A^*)^{-1} = |A^{-1}|A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.【答案】 D.

【解析】 对任何 n 阶矩阵 A, B 关系式要成立, 那么 A, B 可逆时仍应成立, 故可看 A, B 可逆时 $C^* = ?$

由于

$$\begin{aligned} C^* &= |C|C^{-1} = \begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} \\ &= |A||B| \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A||B|A^{-1} & O \\ O & |A||B|B^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

故应选(D).

3.【答案】 C.

【解析】 因为 $A, B, A+B$ 均可逆, 则有

$$\begin{aligned} (A^{-1}+B^{-1})^{-1} &= (EA^{-1}+B^{-1}E)^{-1} \\ &= (B^{-1}BA^{-1}+B^{-1}AA^{-1})^{-1} = [B^{-1}(B+A)A^{-1}]^{-1} \\ &= (A^{-1})^{-1}(B+A)^{-1}(B^{-1})^{-1} = A(A+B)^{-1}B \end{aligned}$$

故应选(C).

注意, 一般情况下 $(A+B)^{-1} \neq A^{-1}+B^{-1}$, 不要与转置的性质相混淆.

4.【答案】 $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

【解析】 因为 $B = (A-2E)(A-E)$, 故

$$B^{-1} = (A - E)^{-1}(A - 2E)^{-1}$$

因此,应求出 $(A - E)^{-1}, (A - 2E)^{-1}$.

$$(A - E)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - 2E)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

所以
$$B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

【评注】 A 是 2 阶矩阵,有 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$,而 2 阶矩阵的伴随矩阵有“主对调,副变号”之规律.

这是许多教材中都出现过的习题,但仍有相当多的考生(约 36%)答错,反映出考生基本运算不熟练,计算能力差,在复习的过程中,要动脑要动手,千万不要眼高手低.

三、矩阵的秩

试题特点

矩阵的秩是重点也是难点,要正确理解矩阵秩的概念

$r(A) = r \Leftrightarrow A$ 中有 r 阶子式不为 0,每个 $r+1$ 阶子式(若还有)全为 0.

在这里要分清“有一个”与“每一个”,当 $r(A) = r$ 时, A 中能否有 $r-1$ 阶子式为 0? 能否有 $r+1$ 阶子式不为 0?

你用行列式来如何描述 $r(A) \geq r$? 如何描述 $r(A) < r$?

要搞清矩阵的秩与向量组秩之间的关系,这种转换是重要的.在线性相关的判断与证明中往往是由矩阵的秩推导向量组的秩,而解方程组时往往由相关、无关推导矩阵的秩.

经初等变换矩阵的秩不变,这是求秩的最重要的方法,有时可以把定义法与初等变换法相结合来分析推导矩阵的秩.

要学会用 ① $|A|$ 是否为 0, ② 相关、无关, ③ 方程组的解; 会用其中的两个信息夹逼求出矩阵 A 的秩.

8 (1998, 数三, 3 分) 设 $n(n \geq 3)$ 阶矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

若矩阵 A 的秩为 $n-1$, 则 a 必为

(A) 1.

(B) $\frac{1}{1-n}$.

(C) -1.

(D) $\frac{1}{n-1}$.

【答案】 B.

【解析】 由于 $|A| = [(n-1)a+1]$

$$= [(n-1)a+1] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= [(n-1)a+1] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1-a & & & \\ & & 1-a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1-a \end{vmatrix}$$

$$= [(n-1)a+1](1-a)^{n-1}$$

由 $r(A) = n-1$ 知 $|A| = 0$, 故 a 取自于 $\frac{1}{1-n}$ 或 1. 显然 $a = 1$ 时,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

而 $r(A) = 1$ 不合题意, 故应选(B).

9 (2007, 16 题, 4 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 A^3 的秩为_____.

【答案】 1.

【解析】 因为 $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

所以 $r(A^3) = 1$.

【评注】 这是基础题, 但考的并不理想, 难度系数是 0.698.

注意, 若 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, 则

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}, \cdots, A^{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$A^n = O$$

练习题

- (1994, 数四, 3分) 设 A, B 都是 n 阶非零矩阵, 且 $AB = O$, 则 A 和 B 的秩
 (A) 必有一个等于 0. (B) 都小于 n .
 (C) 一个小于 n , 一个等于 n . (D) 都等于 n .
- (1995, 数四, 3分) 设矩阵 $A_{m \times n}$ 的秩为 $r(A) = m < n$, E_m 为 m 阶单位矩阵, 下述结论中正确的是
 (A) A 的任意 m 个列向量必线性无关.
 (B) A 的任意一个 m 阶子式不等于零.
 (C) A 通过初等行变换, 必可以化为 (E_m, O) 形式.
 (D) 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 一定有无穷多组解.

3. (1996, 3分) 设 A 是 4×3 矩阵, 且 A 的秩 $r(A) = 2$, 而 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, 则 $r(AB) = \underline{\hspace{2cm}}$.

练习题参考答案

1.【答案】 B.

【解析】 本题主要考查矩阵秩的概念和性质, 还涉及到矩阵运算、可逆、齐次方程组解的概念与性质等知识点.

在中学代数里, 若 $ab = 0$, 我们知道其中至少有一个数为 0, 而作为矩阵 $AB = O$ 就不能说其中至少有一个矩阵是零矩阵, 这种差异要搞清楚. 例如

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

即 $AB = O \nRightarrow A = O$ 或 $B = O$, 那么再按矩阵秩的定义就知 (A) 错误.

又 $r(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ 可逆. 因此对于 $AB = O$, 若其中有一个矩阵的秩为 n , 例如设 $r(A) = n$, 则有

$$B = A^{-1}AB = A^{-1}O = O$$

与已知 $B \neq O$ 相矛盾. 从而可排除 (C)、(D).

对 $AB = O$, 把矩阵 B 与零矩阵均按列分块

$$AB = A(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (A\beta_1, A\beta_2, \dots, A\beta_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

于是 $A\beta_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 即 β_i 是齐次方程组 $Ax = 0$ 的解.

那么, $AB = O$ 意味着 B 的列向量全是齐次方程组 $Ax = 0$ 的解.

因此, $AB = O, B \neq O$ 表明 $Ax = 0$ 有非零解, 从而 $r(A) < n$.

可以继续用非零解的观点来处理秩 $r(B)$, 方法如下:

$$B^T A^T = (AB)^T = O^T = O$$

从 A^T 非零, 知 $r(B^T) < n$, 故 $r(B) < n$.

当然, 本题最简单的方法是用命题:

若 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, $AB = O$, 则 $r(A) + r(B) \leq n$.

再以 A, B 均非零, 按秩的定义有 $r(A) \geq 1, r(B) \geq 1$, 也就不难看出应选 (B).

本题涉及到线性代数中许多基本概念, 思路亦多样化, 知识点的切换较多, 还考查了用基本概念进行推理判断的能力.

2.【答案】 D.

【解析】 因为 A 是 $m \times n$ 矩阵, 秩 $r(A) = m$, 故增广矩阵的秩必为 m . 那么 $r(A) = r(\bar{A}) = m < n$, 所以方程组 $Ax = b$ 必有无穷多组解, 故应选 (D).

3.【答案】 2.

【解析】 因为 B 可逆, 故 $r(AB) = r(A) = 2$.

注意, 若 A 可逆, 则 $r(AB) = r(B), r(BA) = r(B)$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

四、矩阵方程

试题特点

解矩阵方程时,首先要根据矩阵的运算法则、性质把方程化简(特别要注意矩阵的乘法没有交换律),化简之后有三种形式:

$$AX = B; XA = B; AXB = C$$

对于前两个方程,若判断出 A 可逆,则有

$$X = A^{-1}B; X = BA^{-1}$$

对于第三个方程,若 A, B 均可逆,则有 $X = A^{-1}CB^{-1}$.

那么,再通过求逆等运算就可求出 X .

10 (1997, 三(6)题, 5分) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, 且 $A^2 - AB = E$, 其中 E 是 3 阶单位

矩阵, 求矩阵 B .

【解】 由已知有 $AB = A^2 - E$.

因为 $|A| = -1$, 知 A 可逆, 于是 $B = A - A^{-1}$.

又
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

从而
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

【评注】 数学二第 1 年考线性代数, 矩阵中考的就是矩阵方程, 在方程化简中可考查对矩阵运算法则的把握, 在求矩阵 B 时, 又可考查运算能力.

11 (1998, 十二题, 5分) 设 $(2E - C^{-1}B)A^T = C^{-1}$, 其中 E 是 4 阶单位矩阵, A^T 是 4 阶矩阵 A 的转置矩阵, 且

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

求矩阵 A .

【解】 用矩阵 C 左乘已知矩阵方程的两端, 有

$$(2C - B)A^T = E$$

对上式两端取转置, 有

$$A(2C^T - B^T) = E$$

因为 A 是 4 阶方阵, 故

$$A = (2C^T - B^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

12 (1999, 十一题, 6分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 矩阵 X 满足 $A^*X = A^{-1} + 2X$, 其中

A^* 是 A 的伴随矩阵, 求矩阵 X .

【解】 由 $AA^* = |A|E$, 用矩阵 A 左乘方程的两端, 有

$$|A|X = E + 2AX$$

移项得

$$(|A|E - 2A)X = E$$

据可逆定义, 知

$$X = (|A|E - 2A)^{-1}$$

由于

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

故

$$X = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

13 (2001, 十一题, 6分) 已知矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

且矩阵 X 满足

$$AXA + BXB = AXB + BXA + E$$

其中 E 是 3 阶单位阵, 求 X .

【解】 化简矩阵方程, 有

$$AX(A-B) + BX(B-A) = E$$

即

$$(A-B)X(A-B) = E$$

由于

$$|A-B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

所以矩阵 $A-B$ 可逆, 且

$$(A-B)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

于是

$$X = [(A-B)^{-1}]^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

14 (2002, 十一题, 6分) 已知 A, B 为 3 阶矩阵, 且满足 $2A^{-1}B = B - 4E$, 其中 E 是 3 阶单位矩阵.

(1) 证明: 矩阵 $A - 2E$ 可逆;

(2) 若 $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 求矩阵 A .

【解】 (1) 由 $2A^{-1}B = B - 4E$ 左乘 A 知

$$AB - 2B - 4A = O$$

从而

$$(A - 2E)(B - 4E) = 8E$$

或

$$(A - 2E) \cdot \frac{1}{8}(B - 4E) = E$$

故 $A - 2E$ 可逆, 且 $(A - 2E)^{-1} = \frac{1}{8}(B - 4E)$.

(2) 由(1)知 $A = 2E + 8(B - 4E)^{-1}$.

而

$$(B - 4E)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

故

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

第三章 向量

本章导读

本章 1997 年开始有考题. 向量既是重点又是难点, 由于向量的抽象性及逻辑推理上有较高的要求, 同学们在复习时要迎难而上.

考研的重点首先是对线性相关、无关概念的理解与判断, 要清晰选择、填空、证明各类题型的解题思路 and 技巧; 其次, 要把握线性表出问题的处理; 第三, 要理解向量组的极大线性无关组和向量组秩的概念, 会推导和计算.

一、向量的线性表出

试题特点

向量 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表出.

$\Leftrightarrow$ 方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_r\alpha_r = \beta$ 有解.

$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta)$.

☆ 如果已知向量的坐标, 那就通过判断方程组是否有解来回答向量能否线性表出的问题, 不仅要会一个向量 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表出, 还要会分析、讨论一个向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表出的问题.

☆ 如果向量 β 的坐标是未知的, 那就要能用秩、用概念以及相关的定理来推理、分析.

例 1 (1998, 十三题, 6 分) 已知 $\alpha_1 = (1, 4, 0, 2)^T$, $\alpha_2 = (2, 7, 1, 3)^T$, $\alpha_3 = (0, 1, -1, a)^T$, $\beta = (3, 10, b, 4)^T$, 问

(1) a, b 取何值时, β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出?

(2) a, b 取何值时, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出? 并写出此表示式.

【解】 设 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$. 因为对 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta)$ 作初等行变换有

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & -2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{array} \right]$$

所以

(1) 当 $b \neq 2$ 时, 线性方程组 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)x = \beta$ 无解, 此时 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

(2) 当 $b = 2, a \neq 1$ 时, 线性方程组 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)x = \beta$ 有唯一解, 即

$$x = (x_1, x_2, x_3)^T = (-1, 2, 0)^T$$

于是 β 可唯一表示为 $\beta = -\alpha_1 + 2\alpha_2$.

当 $b = 2, a = 1$ 时, 线性方程组 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)x = \beta$ 有无穷多个解, 即

$$x = (x_1, x_2, x_3)^T = k(-2, 1, 1)^T + (-1, 2, 0)^T$$

则 $\beta = (-1 - 2k)\alpha_1 + (2 + k)\alpha_2 + k\alpha_3, k$ 是任意实数.

2 (2005, 22 题, 9 分) 确定常数 a , 使向量组 $\alpha_1 = (1, 1, a)^T, \alpha_2 = (1, a, 1)^T, \alpha_3 = (a, 1, 1)^T$ 可由向量组 $\beta_1 = (1, 1, a)^T, \beta_2 = (-2, a, 4)^T, \beta_3 = (-2, a, a)^T$ 线性表示, 但向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

【解】 (方法一) 因为 4 个三维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ 必线性相关, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则 β 必能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 现 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 必线性相关.

从而

$$|A| = |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(a-1)^2(a+2) = 0$$

解出 $a = 1$ 或 $a = -2$

当 $a = 1$ 时, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = (1, 1, 1)^T$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示, 但 $\beta_2 = (-2, 1, 4)^T$ 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 所以 $a = 1$ 符合题意.

当 $a = -2$ 时, 由于

$$\begin{aligned} (\beta_1, \beta_2, \beta_3 : \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{array} \right], \end{aligned}$$

令 $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 考虑线性方程组 $Bx = \alpha_2$, 因为 $r(B) = 2, r(B : \alpha_2) = 3$, 所以方程组 $Bx = \alpha_2$ 无解, 即 α_2 不能由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示, 与题设矛盾. 因此 $a = 1$.

(方法二) 由于 I: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可由 II: $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出, 知 $r(I) \leq r(II)$, 又因 II 不能由 I 线性表出, 故 $r(I) < r(II)$.

显然 $r(II) \leq 3$. 因此必有 $r(I) < 3$.

那么

$$|A| = |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(a-1)^2(a+2) = 0$$

解得 $a = 1$ 或 $a = -2$.

$$\text{又因 } |B| = |\beta_1, \beta_2, \beta_3| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & a & a \\ a & 4 & a \end{vmatrix} = (a+2)(a-4)$$

当 $a = 1$ 时, $r(I) = 1, r(II) = 3$. (I) 必可由 (II) 表出, 且 (II) 不能由 (I) 表出, 即 $a = 1$ 符合题意.

当 $a = -2$ 时, $r(I) = 2, r(II) = 2$ 不符合 $r(I) < r(II)$ 的要求, 应舍去.

本题难度系数 0.299, 是一个考的不理想的试题.

练习题

1. (2000, 数三、数四, 8分) 设向量组 $\alpha_1 = (a, 2, 10)^T$, $\alpha_2 = (-2, 1, 5)^T$, $\alpha_3 = (-1, 1, 4)^T$, $\beta = (1, b, c)^T$. 试问: 当 a, b, c 满足什么条件时,

- (1) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 且表示唯一?
- (2) β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出?
- (3) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 但表示不唯一? 并求出一般表达式.

2. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 问:

- (1) α_1 能否由 α_2, α_3 线性表出? 证明你的结论;
- (2) α_4 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出? 证明你的结论.

练习题参考答案

1. 【分析】 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出等价于方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$ 是否有解. 通常用增广矩阵作初等行变换来讨论. 本题是三个方程三个未知数, 因而也可从系数行列式讨论.

【解】 设 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$, 系数行列式

$$|A| = |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} a & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -a - 4$$

(1) 当 $a \neq -4$ 时, $|A| \neq 0$, 方程组有唯一解, 即 β 可能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 且表示唯一.

(2) 当 $a = -4$ 时, 对增广矩阵作初等行变换, 有

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 10 & 5 & 4 & c \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 2b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 3b-c-1 \end{array} \right]$$

故当 $3b-c \neq 1$ 时, $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 3$, 方程组无解, 即 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

(3) 若 $a = -4$, 且 $3b-c = 1$, 有 $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 3$, 方程组有无穷多组解, 即 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 且表示法不唯一.

此时, 增广矩阵化简为

$$\bar{A} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & -b-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

取 x_1 为自由变量. 解出

$$x_1 = t, x_2 = -2t - b - 1, x_3 = 2b + 1$$

即 $\beta = t\alpha_1 - (2t + b + 1)\alpha_2 + (2b + 1)\alpha_3$, t 为任意常数.

2. 【解】 (I) α_1 能由 α_2, α_3 线性表出.

因为已知 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 所以 α_2, α_3 线性无关. 又因 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 故 α_1 可以由 α_2, α_3 线性表出.

(II) α_4 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

(反证法) 若 α_4 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 设

$$\alpha_4 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$$

由(I)知, 可设 $\alpha_1 = l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3$, 那么代入上式整理得

$$\alpha_4 = (k_1l_2 + k_2)\alpha_2 + (k_1l_3 + k_3)\alpha_3$$

即 α_4 可以由 α_2, α_3 线性表出, 从而 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 这与已知矛盾.

因此, α_4 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

【评注】对于 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$, 若知 $k_1 \neq 0$, 那么移项处理亦知 α_1 可以由 α_2, α_3 线性表出, 故(I)的证明也可以为:

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 故存在不全为零的数 k_1, k_2, k_3 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$$

成立, 其中必有 $k_1 \neq 0$.

因为若 $k_1 = 0$, 则 k_2, k_3 不全为零, 使 $k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$. 于是 α_2, α_3 线性相关, 进而 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 这与已知矛盾. 故 $k_1 \neq 0$.

由此有 $\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \frac{k_3}{k_1}\alpha_3$, 即 α_1 可以由 α_2, α_3 线性表出.

注意, “若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关, 则 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 且表示法唯一”. 这一定理在考题中多次出现, 应当理解并会运用这一定理.

二、向量组的线性相关和线性无关

试题特点

线性相关是难点之一, 也是历年考生在考试时丢分最多的一个考点.

如存在不全为 0 的数组 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$ 成立, 则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关.

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \text{ 线性相关} \Leftrightarrow \text{齐次方程组} (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = 0 \text{ 有非零解}$$

$$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < s$$

若使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$ 成立, 必有 $k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_s = 0$, 则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \text{ 线性无关} \Leftrightarrow \text{齐次方程组} (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = 0 \text{ 只有零解}$$

$$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s.$$

☆ 证无关, 若用定义法就是设法证 $k_1 = 0, \dots, k_s = 0$; 若用秩, 就是设法证 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s$ (这里就是要通过用矩阵秩的定理、公式转换推导出向量组秩的信息).

3 (2002, 二(5)题, 3分) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 向量 β_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 而向量 β_2 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 则对于任意常数 k , 必有

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性无关.

(B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性相关.

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性无关.

(D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性相关.

【答案】 A.

【解析】 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性无关. 这是因为 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出等同于方程组

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_s\alpha_s = \beta$$

无解. 故 $r(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \neq r(\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta)$. 由 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 知 $r(\alpha_1, \dots, \alpha_s) = s$. 从而

$$r(\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta) = s + 1$$

即 $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性无关.

不论 k 取何值, $k\beta_1$ 总能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示. 但因为 β_2 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 必线性无关. 故(B) 不正确, 即应选(A).

而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 当 $k = 0$ 时线性相关, 当 $k \neq 0$ 时线性无关. 即(C), (D) 均不正确.

【例4】(2003, 二(6) 题, 4 分) 设向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由向量组 II: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 则

(A) 当 $r < s$ 时, 向量组 II 必线性相关.

(B) 当 $r > s$ 时, 向量组 II 必线性相关.

(C) 当 $r < s$ 时, 向量组 I 必线性相关.

(D) 当 $r > s$ 时, 向量组 I 必线性相关.

【答案】 D.

【解析】 根据定理“若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表出, 且 $s > t$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 必线性相关”, 即若多数向量可以由少数向量线性表出, 则这多数向量必线性相关, 故应选(D).

【评注】 建议你举几个例子说明(A), (B), (C) 均不正确.

【例5】(2004, 14 题, 4 分) 设 A, B 为满足 $AB = O$ 的任意两个非零矩阵, 则必有

(A) A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.

(B) A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.

(C) A 的行向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.

(D) A 的行向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.

【答案】 A.

【解析】 设 A 是 $m \times n$, B 是 $n \times s$ 矩阵, 且 $AB = O$, 那么

$$r(A) + r(B) \leq n$$

由于 A, B 均非零, 故 $0 < r(A) < n, 0 < r(B) < n$.

由 $r(A) = A$ 的列秩, 知 A 的列向量组线性相关.

由 $r(B) = B$ 的行秩, 知 B 的行向量组线性相关. 故应选(A).

【例6】(2005, 13 题, 4 分) 设 λ_1, λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值, 对应的特征向量分别为 α_1, α_2 , 则 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件是

(A) $\lambda_1 \neq 0$.

(B) $\lambda_2 \neq 0$.

(C) $\lambda_1 = 0$.

(D) $\lambda_2 = 0$.

【答案】 B.

【解析】 按特征值、特征向量定义

$$A(\alpha_1 + \alpha_2) = A\alpha_1 + A\alpha_2 = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$$

若 $\lambda_2 = 0$, 则 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 即 $\alpha_1, \lambda_1\alpha_1$ 必线性相关. 排除(D).

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

若 $\lambda_1 = 0$, 则 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda_2 \alpha_2$ 必线性无关, 但 $\lambda_1 = 0$ 只是 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关的充分条件, 并不必要. 因此(C)是错误的.

(方法一) (用定义) 设 $k_1 \alpha_1 + k_2 A(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$, 即有

$$(k_1 + \lambda_1 k_2) \alpha_1 + \lambda_2 k_2 \alpha_2 = 0 \quad (1)$$

由于特征值不同特征向量线性无关, 所以 α_1, α_2 线性无关. 由(1)得

$$\begin{cases} k_1 + \lambda_1 k_2 = 0 \\ \lambda_2 k_2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2) \text{ 无关} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (2) \text{ 只有零解} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \lambda_2 \neq 0.$$

$$(方法二) (用秩) \text{ 因为 } (\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)) = (\alpha_1, \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2) \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

那么 $\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关 $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2) = 2$

$$\text{由于 } \alpha_1, \alpha_2 \text{ 线性无关, 故 } \alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2) \text{ 线性无关} \Leftrightarrow r \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = 2 \Leftrightarrow \lambda_2 \neq 0.$$

【评注】 处理相关、无关要会用定义法和秩这些手段.

7 (2006, 13 题, 4 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 均为 n 维列向量, A 是 $m \times n$ 矩阵, 下列选项正确的是

(A) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关.

(B) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关.

(C) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关.

(D) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关.

【答案】 A.

【解析】(方法一) (用定义法)

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 故存在不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 使得

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_s \alpha_s = 0$$

从而有

$$A(k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_s \alpha_s) = A0 = 0$$

亦即

$$k_1 A\alpha_1 + k_2 A\alpha_2 + \dots + k_s A\alpha_s = 0$$

由于 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 不全为 0 而使上式成立, 说明 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关. 故(A)正确.

(方法二) (用秩) 利用分块矩阵有 $(A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s) = A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$, 那么

$$r(A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s) \leq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 有 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < s$,

从而 $r(A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s) < s$, 故 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关, 即应选(A).

【评注】 如令 $A = O$ 易见(B)(D)不正确. 如令 $A = E$ 易见(C)不正确.

8 (2007, 9 题, 4 分) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是

(A) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$.

(B) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$.

(C) $\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_3 - 2\alpha_1$.

(D) $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + 2\alpha_1$.

【答案】 A.

【解析】 因为 $(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_1) = 0$, 所以向量组 $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$ 线性相关, 故应选(A).

(B)(C)(D) 的线性无关性可以用 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)C$ 的方法来处理. 即若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 那么 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关 $\Leftrightarrow |C| \neq 0$. 选项(B)(C)(D) 中的向量有

$$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_3 - 2\alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + 2\alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

由于 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$, 可知(B)(C)(D) 是线性无关的, 故选(A).

【例9】(2008, 23 题, 10 分) 设 A 为三阶矩阵, α_1, α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1, 1$ 的特征向量, 向量 α_3 满足 $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$.

(I) 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关;

(II) 令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 求 $P^{-1}AP$.

【解】 (I) (用定义法) 按特征值定义: $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2$, 如果存在实数 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0 \quad (1)$$

用 A 左乘(1)的两边有

$$-k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3(\alpha_2 + \alpha_3) = 0 \quad (2)$$

(1) - (2) 得

$$2k_1\alpha_1 - k_3\alpha_2 = 0 \quad (3)$$

因为 α_1, α_2 是 A 的属于不同特征值的特征向量, 所以 α_1, α_2 线性无关, 从而 $k_1 = k_3 = 0$.

代入(1)得 $k_2\alpha_2 = 0$, 由于 $\alpha_2 \neq 0$, 所以 $k_2 = 0$, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

(II) 由题设, 可得

$$\begin{aligned} AP &= A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = (-\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3) \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

由(I), P 为可逆矩阵, 从而

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

【评注】 如果已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 且有

$$A\alpha_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + a_{31}\alpha_3, A\alpha_2 = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{32}\alpha_3, A\alpha_3 = a_{13}\alpha_1 + a_{23}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3$$

这就有相似的背景, 这是一常考的知识点, 本题的(I) 实际上是为(II) 作提示的.

当然, 本题(I) 也可用反证法:

若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 由于 α_1, α_2 是矩阵 A 不同特征值的特征向量, α_1, α_2 必线性无关, 那么 α_3 必可由 α_1, α_2 线性表出. 不妨设

$$\alpha_3 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \quad (1)$$

用 A 左乘(1) 得

$$A\alpha_3 = k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 \quad (2)$$

因为 $A\alpha_1 = -\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2, A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$, 有

$$\alpha_2 + \alpha_3 = -k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \quad (3)$$

(3) - (1) 得 $\alpha_2 = -2k_1\alpha_1$.

与 α_1, α_2 线性无关相矛盾. 从而 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

本题难度系数 0.272, 反映的是同学们的推理能力较低.

练习题

1. (2002, 数四, 3 分) 设向量组 $\alpha_1 = (a, 0, c), \alpha_2 = (b, c, 0), \alpha_3 = (0, a, b)$ 线性无关, 则 a, b, c 必满足关系式

2. (1992, 数四, 3 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 均为 n 维列向量, 那么, 下列结论正确的是

(A) 若 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关.

(B) 若对任意一组不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 都有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m \neq 0$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关.

(C) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 则对任意一组不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 都有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$.

(D) 若 $0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \dots + 0\alpha_m = 0$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关.

练习题参考答案

1. 【答案】 $abc \neq 0$.

【解析】 n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关的充分必要条件是行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| \neq 0$. 而

$$|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & a \\ c & 0 & b \end{vmatrix} = 2abc$$

故应填: $abc \neq 0$.

2. 【答案】 B.

【解析】 按向量组线性相关的定义, 若存在不全为零的一组数 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0$$

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关.

选项(A) 没有指明 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 不全为 0, 故(A) 不正确. 选项(C) 要求任意一组不全为 0 的数, 这只能 $\alpha_i (i = 1, \dots, m)$ 全是零向量, 不是线性相关定义所要求的.

对任意一组向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$,

$$0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \dots + 0\alpha_m = 0$$

恒成立. 而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 是否线性相关? 就是问除去上述情况外, 是否还能找到不全为 0 的一组数 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 仍能使

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_m \alpha_m = 0$$

成立.若能则线性相关,若不能即只要 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 不全为 0, 必有

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_m \alpha_m \neq 0$$

可见(B)是线性无关的定义.而(D)没有指明仅当 $k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_m = 0$ 时, $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_m \alpha_m = 0$ 成立.故(D)不正确.所以应选(B).

三、向量组的极大线性无关组与秩

试题特点

向量组的极大无关组或向量组秩的考题虽不多,但是齐次方程组的基础解系实际上就是解向量的极大线性无关组,这在方程组求解和求特征向量时是回避不了的,所以复习时这里的概念、计算、证明仍然要认真对待.

10 (1997, 一(5)题, 3分) 已知向量组 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 1), \alpha_2 = (2, 0, t, 0), \alpha_3 = (0, -4, 5, -2)$ 的秩为 2, 则 $t =$ _____.

【答案】 3.

【解析】 经初等变换向量组的秩不变. 由

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & t & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & t+2 & -2 \\ 0 & -4 & 5 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & t+2 & -2 \\ 0 & 0 & 3-t & 0 \end{bmatrix}$$

知 $t = 3$.

11 (1999, 十二题, 8分) 设向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 1, 3)^T, \alpha_2 = (-1, -3, 5, 1)^T, \alpha_3 = (3, 2, -1, p+2)^T, \alpha_4 = (-2, -6, 10, p)^T$.

(1) p 为何值时, 该向量组线性无关? 并在此时将向量 $\alpha = (4, 1, 6, 10)^T$ 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出.

(2) p 为何值时, 该向量组线性相关? 并在此时求出它的秩和一个极大线性无关组.

【解】 对矩阵 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$ 作初等行变换:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & -6 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 10 & 6 \\ 3 & 1 & p+2 & p & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & -4 & 12 & 2 \\ 0 & 4 & p-7 & p+6 & -2 \end{bmatrix} \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & p-9 & p-2 & -8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p-2 & 1-p \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(1) 当 $p \neq 2$ 时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关. 由 $\alpha = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 + x_4 \alpha_4$, 解得

$$x_1 = 2, x_2 = \frac{3p-4}{p-2}, x_3 = 1, x_4 = \frac{1-p}{p-2}$$

(2) 当 $p = 2$ 时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关. 此时, 向量组的秩等于 3. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (或 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$)

α_4) 为其一个极大线性无关组.

12 (2000, 十三题, 7 分) 已知向量组 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\beta_2 = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta_3 = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 与向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$,

$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$ 具有相同的秩, 且 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 求 a, b 的值.

【解】 因 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 故线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta_3$ 有解. 对增广矩阵施行初等行变换:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 9 & b \\ 2 & 0 & 6 & 1 \\ -3 & 1 & -7 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 9 & b \\ 0 & -6 & -12 & 1-2b \\ 0 & 10 & 20 & 3b \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 9 & b \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2b-1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3b}{10} - \frac{2b-1}{6} \end{array} \right]$$

由非齐次线性方程组有解的条件知 $\frac{3b}{10} - \frac{2b-1}{6} = 0$, 得 $b = 5$.

又 α_1 和 α_2 线性无关, $\alpha_3 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$, 所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩为 2.

由题设知向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的秩也是 2, 从而 $\begin{vmatrix} 0 & a & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, 解之得 $a = 15$.

【评注】 本题亦可由秩相等 $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 及 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$ 入手知

$$|\beta_1, \beta_2, \beta_3| = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

解出 $a = 3b$.

再用 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 从而可用 α_1, α_2 线性表示, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_3$ 线性相关. 于是据

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & b \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

求出 b . 再由 $a = 3b$ 求出 a .

练习题

1. (1990, 数一, 3 分) 已知向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 3, 4)$, $\alpha_2 = (2, 3, 4, 5)$, $\alpha_3 = (3, 4, 5, 6)$, $\alpha_4 = (4, 5, 6, 7)$, 则该向量组的秩是_____.

2. (1994, 数四, 3 分) 设有向量组 $\alpha_1 = (1, -1, 2, 4)$, $\alpha_2 = (0, 3, 1, 2)$, $\alpha_3 = (3, 0, 7, 14)$, $\alpha_4 = (1, -2, 2, 0)$, $\alpha_5 = (2, 1, 5, 10)$, 则该向量组的极大线性无关组是

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

(B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$.

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$.

(D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$.

练习题参考答案

1. 【答案】 2.

【解析】 经初等变换向量组的秩不变. 由

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

知 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = r(A) = 2$.

2. 【答案】 B.

【解析】 这是一道常规题, 按一般方法求解即可.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 & 14 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 - 3\alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_4 - \alpha_1 \\ \alpha_5 - 2\alpha_1 - \alpha_2 \end{array}$$

已能看出秩为 3, 极大线性无关组是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$. 或用列向量作行变换, 有

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

每行第 1 个非零数在第 1, 2, 4 列, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 是极大线性无关组. 因此应选 (B).

【评注】 当选择 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 作为极大线性无关组时, 由第一种方法立即知

$$\alpha_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_4, \quad \alpha_5 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_4$$

即用极大线性无关组表示向量组中每个向量, 那么用第二种方法时, 你如何写出上述表达式?

第四章 线性方程组

本章导读

本章 1997 年开始有考题. 线性方程组是否有解? 若有解, 那么一共有多少解? 有解时怎样求出其所有的解? 如何求齐次方程组的基础解系?

当给出具体的方程组时, 如何加减消元化简(注意只用行变换)? 如何求出所有的解(可能还涉及对一些参数的讨论)?

没有具体的方程组时, 如何利用解的结构(注意对矩阵秩的推断)分析、推导出通解?

面对两个方程组, 如何处理公共解或同解问题?

这一切都是大家在复习方程组时要认真对待的, 方程组历年来都是考试的重点, 其比重大, 分值高, 解答题多, 大家一定要好好复习.

一、齐次方程组、基础解系

试题特点

考查的主要定理是:

(1) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 齐次方程组 $Ax = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow$ 秩 $r(A) < n$;

(2) 齐次方程组 $Ax = 0$ 如有非零解, 则必有无穷多解, 而线性无关的解向量个数为 $n - r(A)$.

求基础解系是重点.

$n - r(A)$ 既表示 $Ax = 0$ 线性无关解向量的个数, 也表示方程组中自由变量的个数, 如何确定自由变量? 如何给自由变量赋值并求解, 是这的基本功.

不论是 $Ax = 0$, 还是 $Ax = b$ 都要涉及求 $Ax = 0$ 的基础解系, 这里的计算一定要过关(正确、熟练).

线性无关的证明题另一种出题方法就是证基础解系.

1 (2001, 十二题, 6 分) 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 若 $\beta_1 = \alpha_1 + t\alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + t\alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + t\alpha_4, \beta_4 = \alpha_4 + t\alpha_1$, 讨论实数 t 满足什么关系时, $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 也是 $Ax = 0$ 的一个基础解系.

【解】 因 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是 $Ax = 0$ 的解, 所以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 也是 $Ax = 0$ 的解.

$$\text{又 } (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \end{bmatrix}, \text{ 而 } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \end{vmatrix} = t^4 - 1,$$

所以 $t \neq \pm 1$ 时, $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 线性无关. 而 $Ax = 0$ 的基础解系由 4 个解向量构成. 因此 $t \neq \pm 1$ 时 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 也是 $Ax = 0$ 的一个基础解系.

2 (2004, 22 题, 9 分) 设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + (3+a)x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + (4+a)x_4 = 0. \end{cases}$$

试问 a 取何值时, 该方程组有非零解, 并求出其通解.

【解】 方程组的系数行列式

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10+a & 10+a & 10+a & 10+a \\ 2 & 2+a & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4+a \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 10+a & 0 & 0 & 0 \\ 2 & a & 0 & 0 \\ 3 & 0 & a & 0 \\ 4 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = (a+10)a^3 \end{aligned}$$

当 $a=0$ 或 $a=-10$ 时, 方程组有非零解.

当 $a=0$ 时, 对系数矩阵 A 作初等行变换, 有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

故方程组的同解方程组为

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

其基础解系为

$$\eta_1 = (-1, 1, 0, 0)^T, \eta_2 = (-1, 0, 1, 0)^T, \eta_3 = (-1, 0, 0, 1)^T.$$

于是所求方程组的通解为

$$x = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3, \text{ 其中 } k_1, k_2, k_3 \text{ 为任意常数.}$$

当 $a=-10$ 时, 对 A 作初等行变换, 有

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -9 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -8 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -7 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -9 & 1 & 1 & 1 \\ 20 & -10 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & -10 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} -9 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

故方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ x_3 = 3x_1 \\ x_4 = 4x_1 \end{cases}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

其基础解系为 $\eta = (1, 2, 3, 4)^T$,

于是所求方程组的通解为 $x = k\eta$, 其中 k 为任意常数.

3 (2005, 23 题, 9 分) 已知三阶矩阵 A 的第 1 行是 (a, b, c) , a, b, c 不全为零, 矩阵

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{bmatrix} \quad (k \text{ 为常数})$$

且 $AB = O$, 求线性方程组 $Ax = 0$ 的通解.

【分析】 本题没有完整的矩阵 A , 因此求方程组 $Ax = 0$ 的解不是用加减消元来实现, 而应当利用解的结构要由秩入手, 另外对 $AB = O$ 要意识到 B 的每一列都是齐次方程组 $Ax = 0$ 的解.

【解】 由 $AB = O$ 知 $r(A) + r(B) \leq 3$, 又 $A \neq O, B \neq O$ 故 $1 \leq r(A) \leq 2, 1 \leq r(B) \leq 2$.

(1) 如果 $k \neq 9$, 必有 $r(B) = 2$. 此时 $r(A) = 1$. 由于 $n - r(A) = 3 - 1 = 2$, 又因 $AB = O$ 知 B 的列向量是 $Ax = 0$ 的解. 故 $Ax = 0$ 的通解为: $k_1(1, 2, 3)^T + k_2(3, 6, k)^T$, k_1, k_2 为任意常数.

(2) 如果 $k = 9$, 则 $r(B) = 1$. 此时 $r(A) = 1$ 或 2 .

若 $r(A) = 2$, 则 $n - r(A) = 1$. $Ax = 0$ 的通解为 $k(1, 2, 3)^T$, k 为任意常数;

若 $r(A) = 1$, 则 $Ax = 0$ 与 $ax + by + cz = 0$ 同解. 由 $n - r(A) = 2$. 不妨设 $a \neq 0$, 那么 $Ax = 0$ 的通解为 $k_1(-b, a, 0)^T + k_2(-c, 0, a)^T$, k_1, k_2 为任意常数.

【评注】 本题难度系数 0.245, 有的考生不知道 $AB = O$ 时, B 的每一列都是齐次方程组 $Ax = 0$ 的解, 多数考生分析、讨论不严谨.

练习题

1. (1989, 数四, 3 分) 设 n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的系数矩阵 A 的秩为 r , 则 $Ax = 0$ 有非零解的充分必要条件是

- (A) $r = n$. (B) $r \geq n$. (C) $r < n$. (D) $r > n$.

2. (1994, 数四, 8 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系. 证明 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 也是该方程组的一个基础解系.

3. (1992, 数三, 3 分) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 仅有零解的充分条件是

- (A) A 的列向量线性无关. (B) A 的列向量线性相关.
(C) A 的行向量线性无关. (D) A 的行向量线性相关.

练习题参考答案

1. 【答案】 C.

【解析】 对矩阵 A 按列分块, 有 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则 $Ax = 0$ 的向量形式为

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n = 0$$

那么, $Ax = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关

$$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) < n$$

$$\Leftrightarrow r(A) < n$$

故应选(C).

注意, n 元方程组只是强调有 n 个未知数而方程的个数不一定是 n , 因此, 系数矩阵 A 不一定是 n 阶方阵, 所以我们应当用 $r(A) < n$. 而有些同学特别爱用行列式 $|A| = 0$, 这里是要小心的.

2.【证明】由 $A(\alpha_1 + \alpha_2) = A\alpha_1 + A\alpha_2 = 0 + 0 = 0$, 知 $\alpha_1 + \alpha_2$ 是 $Ax = 0$ 的解.

同理知 $\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 也都是 $Ax = 0$ 的解.

若 $k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_2 + \alpha_3) + k_3(\alpha_3 + \alpha_1) = 0$, 即

$$(k_1 + k_3)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + (k_2 + k_3)\alpha_3 = 0$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是基础解系, 知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关. 故知

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$

因为系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

所以方程组只有零解 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. 从而 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 线性无关.

由已知, $Ax = 0$ 的基础解系含三个线性无关的解向量, 所以 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系.

3.【答案】 A.

【解析】 齐次方程组 $Ax = 0$ 只有零解 $\Leftrightarrow r(A) = n$.

由于 $r(A) = A$ 的行秩 = A 的列秩, 现 A 是 $m \times n$ 矩阵, $r(A) = n$, 即 A 的列向量线性无关. 故应选(A).

注意, 虽 A 的行秩 = A 的列秩, 但行向量组与列向量组的线性相关性是可以不同的.

二、非齐次方程组的求解

试题特点

记住解的结构

$$\alpha + k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r}$$

其中 α 是 $Ax = b$ 的特解, $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系.

往届考生在加减消元时计算错误较多(一定要多动手做;认真);讨论参数时不能丢三落四, 要严谨.

求 A 的秩、求特解、求基础解系、讨论参数是复习时要注意的知识点.

4 (1997, 四题, 8分) λ 取何值时, 方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1 \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$$

无解, 有唯一解或有无穷多解? 并在有无穷多解时写出方程组的通解.

【解】 对增广矩阵作初等行变换, 有

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & \lambda & -1 & 1 \\ \lambda & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & \lambda & -1 & 1 \\ \lambda + 2 & \lambda - 1 & 0 & 3 \\ -6 & -5\lambda + 5 & 0 & -6 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & \lambda & -1 & 1 \\ \lambda + 2 & \lambda - 1 & 0 & 3 \\ 5\lambda + 4 & 0 & 0 & 9 \end{array} \right]$$

那么, 当 $\lambda = -\frac{4}{5}$ 时, $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 3$, 方程组无解.

当 $\lambda \neq -\frac{4}{5}$ 且 $\lambda \neq 1$ 时, $r(A) = r(\bar{A}) = 3$, 方程组有唯一解.

当 $\lambda = 1$ 时, $r(A) = r(\bar{A}) = 2$, 方程组有无穷多解, 此时, 方程组化简为

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

其通解为 $(1, -1, 0)^T + k(0, 1, 1)^T$, k 为任意常数.

【评注】 习惯上, 消元时先消去 x_1 再消去 x_2 , 考虑到本题中 x_1, x_2 的系数均有参数, 为简单先消去 x_3 .

5 (2000, 十二题, 6 分) 设 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$, $\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$, $A = \alpha\beta^T$, $B = \beta^T\alpha$, 其中 β^T 是 β 的

转置, 求解方程 $2B^2A^2x = A^4x + B^4x + \gamma$.

【解】 由已知得

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2$$

又 $A^2 = \alpha\beta^T\alpha\beta^T = \alpha(\beta^T\alpha)\beta^T = 2A$, 递推地 $A^4 = 2^3A$.

代入原方程, 得

$$16Ax = 8Ax + 16x + \gamma$$

即 $8(A - 2E)x = \gamma$ (其中 E 是 3 阶单位矩阵).

令 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, 代入上式, 得到非齐次线性方程组

$$\begin{cases} -x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

解其对应的齐次方程组, 得通解

$$\xi = k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (k \text{ 为任意常数})$$

显然, 非齐次线性方程组的一个特解为

$$\eta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

于是所求方程的解为 $x = \xi + \eta^*$, 即

$$x = k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, k \text{ 为任意常数}$$

6 (2001, 一(5)题, 3分) 设方程 $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ 有无穷多个解, 则 $a =$ _____.

【答案】 -2 .

【解析】 线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解的充分必要条件是 $r(A) = r(\bar{A}) < n$, 为此我们应当通过对增广矩阵作初等行变换来确定 a 的取值.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & -2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & -2 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 3 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 4+2a \end{array} \right]$$

可见 $r(A) = r(\bar{A}) < 3 \Leftrightarrow a = -2$.

7 (2002, 十二题, 6分) 已知 4 阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 均为 4 维列向量, 其中 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$. 如果 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 求线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解.

【分析】 方程组的系数没有具体给出, 应当从解的理论, 解的结构入手来求解.

【解】 由 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关及 $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$ 知, 向量组的秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3$, 即矩阵 A 的秩为 3. 因此 $Ax = 0$ 的基础解系中只包含一个向量. 那么由

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

知, $Ax = 0$ 的基础解系是 $(1, -2, 1, 0)^T$.

再由 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 知, $(1, 1, 1, 1)^T$ 是 $Ax = \beta$ 的一个特

解. 故 $Ax = \beta$ 的通解是

$$k \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 其中 } k \text{ 为任意常数}$$

【评注】 因为方程组 $Ax = \beta$ 的向量形式为

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

那么利用 $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$ 及 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关可以得到

$$(2x_1 + x_2 - 3)\alpha_2 + (-x_1 + x_3)\alpha_3 + (x_4 - 1)\alpha_4 = 0$$

故知

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \\ x_4 - 1 = 0 \end{cases}$$

于是 $Ax = \beta$ 与上述方程组同解,解此方程组就可得到 $Ax = \beta$ 的通解.

8 (2003, 十二题, 8 分) 已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1: ax + 2by + 3c = 0$$

$$l_2: bx + 2cy + 3a = 0$$

$$l_3: cx + 2ay + 3b = 0$$

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a + b + c = 0$.

【证明】 必要性: 若三条直线交于一点, 则线性方程组

$$\begin{cases} ax + 2by = -3c \\ bx + 2cy = -3a \\ cx + 2ay = -3b \end{cases} \quad (1)$$

有唯一解, 故 $r(A) = r(\bar{A}) = 2$. 于是 $|\bar{A}| = 0$.

$$\begin{aligned} \text{由于 } |\bar{A}| &= \begin{vmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{vmatrix} = 6(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ b & c & -a \\ c & a & -b \end{vmatrix} \\ &= 6(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \\ &= 3(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \end{aligned} \quad (2)$$

由 l_1, l_2, l_3 是三条不同直线, 知 $a = b = c$ 不成立, 那么 $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \neq 0$.
故必有 $a + b + c = 0$.

充分性: 若 $a + b + c = 0$, 由 (2) 知 $|\bar{A}| = 0$, 故秩 $r(\bar{A}) < 3$.

$$\begin{aligned} \text{由 } \begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix} &= 2(ac - b^2) = -2[a(a+b) + b^2] \\ &= -2\left[\left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2\right] \neq 0 \end{aligned}$$

(否则 $a = b = c = 0$.) 知秩 $r(A) = 2$. 于是 $r(A) = r(\bar{A}) = 2$.

因此, 方程组 (1) 有唯一解, 即三条直线 l_1, l_2, l_3 交于一点.

9 (2006, 22 题, 9 分) 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1, \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$$

有 3 个线性无关的解.

(I) 证明方程组系数矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$;

(II) 求 a, b 的值及方程组的通解.

【分析】 本题考查含参数的非齐次线性方程组的求解问题, 那么如何求参数 a 和 b ? 题目给的追加信息是 $Ax = b$ 有 3 个线性无关的解, 如何用这信息? 其实问题 (I) $r(A) = 2$ 就是提示.

【解】 (I) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是非齐次方程组的 3 个线性无关的解, 那么 $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3$, 是 $Ax =$

0 线性无关的解, 所以 $n - r(A) \geq 2$, 即 $r(A) \leq 2$.

显然矩阵 A 中有二阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ 不为 0, 又有 $r(A) \geq 2$, 从而秩 $r(A) = 2$.

(II) 对增广矩阵作初等行变换, 有

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ a & 1 & 3 & b & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1-a & 3-a & b-a & a+1 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 4-2a & b+4a-5 & 4-2a \end{array} \right]. \end{aligned}$$

由题设和 (I) 知, $r(A) = r(\bar{A}) = 2$, 故有

$$4 - 2a = 0, b + 4a - 5 = 0$$

解出 $a = 2, b = -3$,

$$\text{此时 } \bar{A} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

那么 $\alpha = (2, -3, 0, 0)^T$ 是 $Ax = b$ 的解, 且 $\eta_1 = (-2, 1, 1, 0)^T, \eta_2 = (4, -5, 0, 1)^T$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系, 所以方程组的通解是 $\alpha + k_1\eta_1 + k_2\eta_2$ (k_1, k_2 为任意常数).

【评注】 通过本题要体会如何用两个条件把 $r(A) = 2$ 夹逼出来的方法. 不少考生把题目中的“有 3 个线性无关的解”理解为“恰有 3 个线性无关的解”, 这就改变了 (I) 证明的难度和命题的原意. 大家要认真审题, 准确理解题意. 本题难度系数 0.505.

10 (2008, 22 题, 12 分) 设 n 元线性方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{bmatrix}_{n \times n}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

(I) 证明行列式 $|A| = (n+1)a^n$;

(II) 当 a 为何值时, 该方程组有唯一解, 并求 x_1 ;

(III) 当 a 为何值时, 该方程组有无穷多解, 并求通解.

【分析】 本题考查 n 阶行列式的计算和方程组的求解. 作为“三对角”行列式可用数学归纳法或“三角化”; 对于唯一解应利用克拉默法则.

【解】 (I) 用数学归纳法. 记 n 阶行列式 $|A|$ 的值为 $D_n = (n+1)a^n$,

当 $n = 1$ 时 $D_1 = 2a$, 命题 $D_n = (n+1)a^n$ 正确;

当 $n = 2$ 时, $D_2 = \begin{vmatrix} 2a & 1 \\ a^2 & 2a \end{vmatrix} = 3a^2$, 命题正确.

设 $n < k$ 时 $D_n = (n+1)a^n$, 命题正确.

当 $n = k$ 时, 按第一列展开, 则有

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$\begin{aligned}
 D_k &= 2a \begin{vmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & 1 & \\ & a^2 & 2a & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{k-1} + a^2(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & & \\ a^2 & 2a & 1 & \\ & a^2 & 2a & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{k-1} \\
 &= 2aD_{k-1} - a^2D_{k-2} = 2a(ka^{k-1}) - a^2[(k-1)a^{k-2}] = (k+1)a^k,
 \end{aligned}$$

命题正确.

所以 $|A| = (n+1)a^n$.

(II) 据(I)由克拉默法则, $|A| \neq 0$ 方程组有唯一解, 故 $a \neq 0$ 时方程组有唯一解, 且用克拉默法则, 有

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & & \\ 0 & 2a & 1 & \\ 0 & a^2 & 2a & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}}{D_n} = \frac{na^{n-1}}{(n+1)a^n} = \frac{n}{(n+1)a}$$

(III) 当 $a = 0$ 时, 方程组为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

, 由 $r(A) = r(\bar{A}) = n-1$, 方程

组有无穷多解. 按解的结构, 其通解为 $(0, 1, 0, \dots, 0)^T + k(1, 0, 0, \dots, 0)^T$, 其中 k 为任意常数.

【评注】 本题的“三对角”行列式也可用逐行相加的技巧将其上三角化, 即把第一行的 $-\frac{1}{2}a$ 倍加至第二行, 再把新第 2 行的 $-\frac{2}{3}a$ 倍加至第三行, ...

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & 1 & \\ & a^2 & 2a & 1 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_n \\
 &= \begin{vmatrix} 2a & 1 & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & \\ & a^2 & 2a & 1 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_n \\
 &= \begin{vmatrix} 2a & 1 & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & \\ & 0 & \frac{4}{3}a & 1 \\ & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_n \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

$$= \left| \begin{array}{cccc|c} 2a & 1 & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & \\ & 0 & \frac{4}{3}a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & \frac{n}{n-1}a & 1 \\ & & & & 0 & \frac{n+1}{n}a \end{array} \right|_n = (n+1)a^n.$$

本题难度系数数一 0.305, 数二 0.270, 数三 0.273, 是 2008 年考题中得分最低的题目之一。

练习题

1. (1991, 数四, 3 分) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, $Ax = 0$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 所对应的齐次线性方程组, 则下列结论正确的是

- (A) 若 $Ax = 0$ 仅有零解, 则 $Ax = b$ 有唯一解.
 (B) 若 $Ax = 0$ 有非零解, 则 $Ax = b$ 有无穷多个解.
 (C) 若 $Ax = b$ 有无穷多个解, 则 $Ax = 0$ 仅有零解.
 (D) 若 $Ax = b$ 有无穷多个解, 则 $Ax = 0$ 有非零解.

2. (2000, 数三, 数四, 3 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是四元非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的三个解向量, 且秩 $(A) = 3, \alpha_1 = (1, 2, 3, 4)^T, \alpha_2 + \alpha_3 = (0, 1, 2, 3)^T, c$ 表示任意常数, 则线性方程组 $Ax = b$ 的通解 $x =$

(A) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

(B) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$

(C) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$

(D) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$

练习题参考答案

1. 【答案】 D.

【解析】 $Ax = 0$ 仅有零解 $\Leftrightarrow r(A) = n, Ax = b$ 有唯一解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) = n$.

现在的问题是由 $r(A) = n$ 能否推导出 $r(\bar{A}) = n$? 若 A 是 n 阶矩阵, 结论肯定正确, 那么 $m \times n$ 矩阵呢?

考察下面的例子:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

显然 $Ax = 0$ 只有零解, 而 $Ax = b$ 无解, 可见 (A) 不正确.

$Ax = b$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) < n$, 因为 $r(A) < n$, 故 $Ax = 0$ 必有非零解. 所以 (D) 正确. 故应选 (D).

请考生自己举例说明 (B) 是错误的.

2.【答案】 C.

【解析】 方程组 $Ax = b$ 有解,应搞清解的结构.

由于 $n - r(A) = 4 - 3 = 1$,所以通解形式为 $\alpha + k\eta$,其中 α 是特解, η 是导出组 $Ax = 0$ 的基础解系.现在特解可取为 α_1 ,下面应找出 $Ax = 0$ 的一个非零解:

由于 $A\alpha_i = b$,有

$$A[2\alpha_1 - (\alpha_2 + \alpha_3)] = 0$$

即

$$2\alpha_1 - (\alpha_2 + \alpha_3) = (2, 3, 4, 5)^T$$

是 $Ax = 0$ 的一个非零解.故应选(C).

三、公共解与同解

试题特点

如果已知两个方程组(I)和(II),那么将其联立 $\begin{cases} \text{(I)} \\ \text{(II)} \end{cases}$,其联立方程组的解就是(I)与(II)的公共解.

如果已知(I)与(II)的基础解系分别是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和 β_1, β_2 ,则可设公共解为 γ ,那么

$$\gamma = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = l_1\beta_1 + l_2\beta_2$$

由此得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 - l_1\beta_1 - l_2\beta_2 = 0$,解出 k_1, k_2, k_3, l_1, l_2 可求出公共解 γ .

以上这两种常见的出题方法应当把握.

而处理同解的方法,往往是代入来处理,即把(I)的解代入(II),把(II)的解代入(I)

11 (2007, 23 题, 11 分) 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

与方程

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \quad (2)$$

有公共解,求 a 的值及所有公共解.

【分析】 本题考查两个方程组的公共解问题,应当有两种思路:一个是①与②联立方程组的解就是公共解;一个是先求①的解然后代入到②中来确定公共解.

【解】 (方法一) 因为方程组①与②的公共解,即为联立方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1. \end{cases} \quad (3)$$

的解.

对方程组③的增广矩阵 $\bar{A}$ 施以初等行变换,有

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & a^2-1 & 3(1-a) & 0 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1-a \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2) \end{array} \right]$$

由于方程组 ③ 有解,故 ③ 的系数矩阵的秩等于增广矩阵 $\bar{A}$ 的秩,于是 $(a-1)(a-2) = 0$,即 $a = 1$ 或 $a = 2$.

$$\text{当 } a = 1 \text{ 时, } \bar{A} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

因此 ① 与 ② 的公共解为: $x = k \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 其中 k 为任意常数.

$$\text{当 } a = 2 \text{ 时, } \bar{A} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

因此 ① 与 ② 有唯一的公共解为: $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(方法二) 先求出方程组 ① 的解,其系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{vmatrix} = (a-1)(a-2)$.

当 $a \neq 1, a \neq 2$ 时,方程组 ① 只有零解,但此时 $x = (0, 0, 0)^T$ 不是方程 ② 的解. 所以公共解发生在 $a = 1$ 或 $a = 2$ 时:

当 $a = 1$ 时,对方程组 ① 的系数矩阵施以初等行变换,

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

因此 ① 的通解为 $x = k \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 其中 k 为任意常数.

此解也满足方程 ②, 所以方程组 ① 与 ② 的所有公共解为: $x = k \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 其中 k 为任意常数.

当 $a = 2$ 时,对线性方程组 ① 的系数矩阵施以初等行变换

$$A = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

得到方程组 ① 的通解是 $x = k(0, -1, 1)^T$, k 为任意常数, 将其代入方程组 ② 有

$$0 + 2(-k) + k = 1$$

得 $k = -1$, 因此 ① 与 ② 的公共解唯一为 $x = (0, 1, -1)^T$.

【评注】 本题是给了两个方程组求公共解的题, 大家还要会没有给两个方程组的题, 例如 2002 年数四考题.

练习题

1. (2000, 数三, 3 分) 设 A 为 n 阶实矩阵, A^T 是 A 的转置矩阵, 则对于线性方程组 (I): $Ax = 0$ 和 (II): $A^T Ax = 0$, 必有

- (A) (II) 的解是 (I) 的解, (I) 的解也是 (II) 的解.
 (B) (II) 的解是 (I) 的解, 但 (I) 的解不是 (II) 的解.
 (C) (I) 的解不是 (II) 的解, (II) 的解也不是 (I) 的解.
 (D) (I) 的解是 (II) 的解, 但 (II) 的解不是 (I) 的解.

2. (2002, 数四, 8 分) 设 4 元齐次线性方程组 (I) 为

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

而已知另一 4 元齐次线性方程组 (II) 的一个基础解系为

$$\alpha_1 = (2, -1, a+2, 1)^T, \alpha_2 = (-1, 2, 4, a+8)^T$$

- (1) 求方程组 (I) 的一个基础解系;
 (2) 当 a 为何值时, 方程组 (I) 与 (II) 有非零公共解? 在有非零公共解时, 求出全部非零公共解.

练习题参考答案

1. **【答案】** A.

【解析】 若 η 是 (I) 的解, 则 $A\eta = 0$, 那么

$$(A^T A)\eta = A^T (A\eta) = A^T 0 = 0$$

即 η 是 (II) 的解.

若 α 是 (II) 的解, 有 $A^T A\alpha = 0$, 用 α^T 左乘得

$$\alpha^T A^T A\alpha = 0, \text{ 即 } (A\alpha)^T (A\alpha) = 0$$

亦即 $A\alpha$ 自己的内积 $(A\alpha, A\alpha) = 0$, 故必有 $A\alpha = 0$, 即 α 是 (I) 的解.

所以 (I) 与 (II) 同解, 故应选 (A).

【评注】 若 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, 则 $\alpha^T \alpha = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$, 可见 $\alpha^T \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$.

2. **【解】** (1) 对方程组 (I) 的系数矩阵作初等行变换, 有

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

由于 $n - r(A) = 4 - 2 = 2$, 基础解系由 2 个线性无关的解向量所构成, 取 x_3, x_4 为自由变量, 所以

$$\beta_1 = (5, -3, 1, 0)^T, \beta_2 = (-3, 2, 0, 1)^T$$

是方程组 (I) 的基础解系.

(2) 设 η 是方程组 (I) 与 (II) 的非零公共解, 则

$$\eta = k_1 \beta_1 + k_2 \beta_2 = l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2$$

其中 k_1, k_2 与 l_1, l_2 均不全为零的常数.

由此得齐次方程组(Ⅲ)

$$\begin{cases} 5k_1 - 3k_2 - 2l_1 + l_2 = 0 \\ -3k_1 + 2k_2 + l_1 - 2l_2 = 0 \\ k_1 - (a+2)l_1 - 4l_2 = 0 \\ k_2 - l_1 - (a+8)l_2 = 0 \end{cases}$$

有非零解. 对系数矩阵作初等行变换, 有

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -a-2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a-2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \\ 0 & 2 & -3a-5 & -14 \\ 0 & -3 & 5a+8 & 21 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a-2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \\ 0 & 0 & -3a-3 & 2a+2 \\ 0 & 0 & 5a+5 & -3a-3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

当且仅当 $a+1=0$ 时, $r(\text{Ⅲ}) < 4$, 方程组有非零解.

此时, (Ⅲ) 的同解方程组是

$$\begin{cases} k_1 - l_1 - 4l_2 = 0 \\ k_2 - l_1 - 7l_2 = 0 \end{cases}$$

于是 $\eta = (l_1 + 4l_2)\beta_1 + (l_1 + 7l_2)\beta_2 = l_1(\beta_1 + \beta_2) + l_2(4\beta_1 + 7\beta_2)$

$$= l_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + l_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

第五章 特征值与特征向量

本章导读

本章 2002 年开始有考题. 特征值和特征向量是线性代数的重要内容之一, 也是考研的重点之一, 它涉及行列式、矩阵; 相关、无关; 秩; 基础解系; … 一系列问题, 知识点多, 综合性强, 必须好好复习.

首先要掌握求特征值、特征向量的各种方法; 第二是相似, 把握住和对角矩阵相似的充分必要条件, 会求可逆矩阵 P ; 第三(可能更重要), 利用实对称矩阵的隐含信息处理求特征值、特征向量, 用正交矩阵相似对角化等一系列问题.

一、特征值、特征向量的概念与计算

试题特点

常见的命题形式:

1. 用定义 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$ 推理、分析、判断.
2. 由 $|\lambda E - A| = 0$ 和 $(\lambda_i E - A)x = 0$ 求基础解系.
3. 通过相似 $P^{-1}AP = B$.

(1) 如 $A\alpha = \lambda\alpha$, 则 $B(P^{-1}\alpha) = \lambda(P^{-1}\alpha)$,

(2) 如 $B\alpha = \lambda\alpha$, 则 $A(P\alpha) = \lambda(P\alpha)$,

特别地, 如 $r(A) = 1$, 有

$$|\lambda E - A| = \lambda^n - \sum a_{ii} \lambda^{n-1}$$

$$\lambda_1 = \sum a_{ii}, \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

通过下面的考题, 请进一步体会考场上如何求特征值、特征向量.

1 (2002, 一(5) 题, 3 分) 矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ 的非零特征值是_____.

【答案】 4.

【解析】 这是一个基础题, 由特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ -2 & \lambda - 2 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ -2 & \lambda - 2 & 2 \\ 0 & \lambda & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ -2 & \lambda-2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -2 & \lambda-4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \lambda^2(\lambda-4)
 \end{aligned}$$

可知非零特征值是 $\lambda = 4$.

练习题

1. (1991, 数四, 4 分) 已知向量 $\alpha = (1, k, 1)^T$ 是矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

的逆矩阵 A^{-1} 的特征向量, 试求常数 k 的值.

2. (1992, 数四, 3 分) 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的非零特征值是_____.

3. (1993, 数四, 3 分) 设 $\lambda = 2$ 是非奇异矩阵 A 的一个特征值, 则矩阵 $\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$ 有一个特征值等于

(A) $\frac{4}{3}$.

(B) $\frac{3}{4}$.

(C) $\frac{1}{2}$.

(D) $\frac{1}{4}$.

练习题参考答案

1. 【解】 设 λ_0 是 α 所属的特征值, 即

$$A^{-1}\alpha = \lambda_0\alpha$$

$$\alpha = \lambda_0 A\alpha$$

于是

即

$$\lambda_0 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{bmatrix}$$

由此得

$$\begin{cases} \lambda_0(2+k+1) = 1 \\ \lambda_0(1+2k+1) = k \\ \lambda_0(1+k+2) = 1 \end{cases}$$

由

$$\frac{3+k}{2+2k} = \frac{1}{k}$$

解出 $k = -2$ 或 $k = 1$.

2. 【答案】 4.

【解析】 由矩阵 A 的特征多项式

$$\begin{aligned}
 |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-4 & \lambda-4 & \lambda-4 & \lambda-4 \\ -1 & \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
 &= (\lambda-4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)\lambda^3
 \end{aligned}$$

知矩阵 A 的特征值是 $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. 故应填: 4.

【评注】 若 $r(A) = 1$, 则 $|\lambda E - A| = \lambda^n - \sum a_{ii}\lambda^{n-1}$, 于是矩阵 A 的特征值是 $\lambda_1 = \sum a_{ii}, \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, 现 A 的秩为 1, $\sum a_{ii} = 4$, 故知应填: 4.

3. **【答案】** B.

【解析】 由 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$, 有 $A^2\alpha = \lambda A\alpha = \lambda^2\alpha$, 故

$$\frac{1}{3}A^2\alpha = \frac{1}{3}\lambda^2\alpha$$

即若 λ 是矩阵 A 的特征值, 则 $\frac{1}{3}\lambda^2$ 是矩阵 $\frac{1}{3}A^2$ 的特征值, 因此, $\frac{1}{3}A^2$ 有特征值 $\frac{4}{3}$. 从而 $(\frac{1}{3}A^2)^{-1}$ 有特征值 $\frac{3}{4}$. 故应选 (B).

或者, $(\frac{1}{3}A^2)^{-1}\alpha = 3(A^{-1})^2\alpha$, 由 $\lambda = 2$ 是 A 的特征值, 知 $\frac{1}{2}$ 是 A^{-1} 的特征值, 于是 $\frac{1}{4}$ 是 $(A^{-1})^2$ 的特征值. 亦知应选 (B).

二、相似与相似对角化

试题特点

围绕相似定义 $P^{-1}AP = B$, 相似的性质设计试题, 或者考查判断是否和对角矩阵相似.

$A \sim \Lambda \Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量

$\Leftrightarrow$ 如 λ 是 A 的 k 重特征值, 则 λ 有 k 个线性无关的特征向量.

如 A 有 n 个不同的特征值 $\Rightarrow A \sim \Lambda$.

2 (2003, 十一题, 10 分) 若矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & a \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ 相似于对角矩阵 Λ , 试确定常数 a 的值; 并求

可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP = \Lambda$.

【解】 由矩阵 A 的特征多项式

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 0 \\ -8 & \lambda - 2 & -a \\ 0 & 0 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (\lambda - 6) \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 \\ -8 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 6)^2(\lambda + 2) \end{aligned}$$

得知 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 6, \lambda_3 = -2$.

由于 A 相似于对角矩阵 Λ , 而 $\lambda = 6$ 是二重特征值, 故 $\lambda = 6$ 应有两个线性无关的特征向量, 因此矩阵 $6E - A$ 的秩必为 1. 从而由

$$6E - A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

知 $a = 0$.

当 $\lambda = 6$ 时, 由 $(6E - A)x = 0$,

$$6E - A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得到矩阵 A 属于特征值 $\lambda = 6$ 的线性无关的特征向量为

$$\alpha_1 = (1, 2, 0)^T, \alpha_2 = (0, 0, 1)^T$$

当 $\lambda = -2$ 时, 由 $(-2E - A)x = 0$,

$$-2E - A = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得到属于特征值 $\lambda = -2$ 的特征向量为

$$\alpha_3 = (1, -2, 0)^T$$

那么, 令

$$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

则

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} 6 & & \\ & 6 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$$

3 (2004, 23 题, 9 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{bmatrix}$ 的特征方程有一个二重根, 求 a 的值, 并讨论 A 是否可相似对角化.

【解】 A 的特征多项式为

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 3 \\ 1 & \lambda - 4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda - 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 2 - \lambda & 0 \\ 1 & \lambda - 4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda - 5 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 2)(\lambda^2 - 8\lambda + 18 + 3a) \end{aligned}$$

若 $\lambda = 2$ 是特征方程的二重根, 则有 $2^2 - 16 + 18 + 3a = 0$, 解得 $a = -2$.

当 $a = -2$ 时, A 的特征值为 $2, 2, 6$, 矩阵 $2E - A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ 的秩为 1, 故 $\lambda = 2$ 对应

的线性无关的特征向量有两个, 从而 A 可相似对角化.

若 $\lambda = 2$ 不是特征方程的二重根, 则 $\lambda^2 - 8\lambda + 18 + 3a$ 为完全平方, 从而 $18 + 3a = 16$, 解得 $a = -\frac{2}{3}$.

当 $a = -\frac{2}{3}$ 时, A 的特征值为 $2, 4, 4$, 矩阵 $4E - A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}$ 的秩为 2, 故 $\lambda = 4$ 对应

的线性无关的特征向量只有一个, 从而 A 不可相似对角化.

练习题

1. (1997, 数四, 9分) 设矩阵 A 与 B 相似, 且

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & a \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

(1) 求 a, b 的值.

(2) 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = B$.

2. (1999, 数四, 7分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -k & -1 & k \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$, 问当 k 为何值时, 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵? 并求出 P 和相应的对角矩阵.

3. (2000, 数四, 9分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$, 已知 A 有 3 个线性无关的特征向量, $\lambda = 2$ 是 A 的二重特征值, 试求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角形矩阵.

练习题参考答案

1. 【分析】 B 是对角矩阵, 那么 A 与 B 相似时的矩阵 P 就是由 A 的线性无关的特征向量所构成, 求矩阵 P 也就是求 A 的特征向量.

【解】 (1) 由于 $A \sim B$, 故

$$\begin{cases} 1+4+a = 2+2+b \\ 6(a-1) = |A| = |B| = 4b \end{cases}$$

解出 $a = 5, b = 6$.

(2) 因为 $A \sim B$, A 与 B 有相同的特征值, 故矩阵 A 的特征值是 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 6$.

当 $\lambda = 2$ 时, 由 $(2E - A)x = 0$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得到基础解系为

$$\alpha_1 = (-1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (1, 0, 1)^T$$

即为矩阵 A 的属于特征值 $\lambda = 2$ 的线性无关的特征向量.

当 $\lambda = 6$ 时, 由 $(6E - A)x = 0$,

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其基础解系为

$$\alpha_3 = (1, -2, 3)^T$$

即为矩阵 A 属于特征值 $\lambda = 6$ 的特征向量.

那么, 令

$$P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

则有 $P^{-1}AP = B$.

2.【分析】 因为 $A \sim \Lambda \Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量, 而对于 $P^{-1}AP = \Lambda$, 其中 Λ 的对角线上的元素是 A 的全部特征值, P 的每一列是矩阵 A 的对应特征值的线性无关的特征向量, 因此, 本题应当从矩阵 A 的特征值、特征向量入手, 分析 k 的取值对相似对角化的影响?

【解】 由矩阵 A 的特征多项式

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & 2 \\ k & \lambda+1 & -k \\ -4 & -2 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda+1 & -k \\ \lambda-1 & -2 & \lambda+3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda+1 & -k \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+1)^2 \end{aligned}$$

得知矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

由于 $A \sim \Lambda$, 故 $\lambda = -1$ 时, 矩阵 A 必有 2 个线性无关的特征向量, 因此秩 $r(-E - A) = 1$. 由

$$-E - A = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 \\ k & 0 & -k \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 \\ k & 0 & -k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

知, $k = 0$.

当 $\lambda = 1$ 时, 由 $(E - A)x = 0$,

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & -2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得到矩阵 A 属于特征值 $\lambda = 1$ 的特征向量 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$.

当 $\lambda = -1$ 时, 由 $(-E - A)x = 0$,

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得到矩阵 A 属于特征值 $\lambda = -1$ 的线性无关的特征向量 $\alpha_2 = (-1, 2, 0)^T, \alpha_3 = (0, 1, 1)^T$.

那么, 令

$$P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

有

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$$

【评注】 本题得分率不高, 人均仅 2.2 分. 有的同学是不会计算含有参数 k 的特征多项式 $|\lambda E - A|$, 有的同学不知用什么方法来确定 k 的取值. 其实, 早在 94 年就出现了用相似对角化理论, 利用秩来确定参数的思想方法.

3.【解】 因为矩阵 A 有 3 个线性无关的特征向量, 而 $\lambda = 2$ 是其二重特征值, 故 $\lambda = 2$ 必有 2 个线性无关的特征向量, 因此 $(2E - A)x = 0$ 的基础解系由 2 个解向量所构成. 于是 $r(2E - A) = 1$. 由

$$2E - A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -x & -2 & -y \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & x-2 & -x-y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得 $x = 2, y = -2$.

那么, 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$. 由此, 得矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda - 4 & 2 \\ 3 & 3 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda - 6)$$

于是得到矩阵 A 的特征值: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 6$.

对 $\lambda = 2$, 由 $(2E - A)x = 0$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得到相应的特征向量为 $\alpha_1 = (1, -1, 0)^T, \alpha_2 = (1, 0, 1)^T$.

对 $\lambda = 6$, 由 $(6E - A)x = 0$,

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得到相应的特征向量为

$$\alpha_3 = (1, -2, 3)^T$$

那么, 令

$$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

有

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

三、实对称矩阵

试题特点

实对称矩阵有几个重要的定理, 例如: 实对称矩阵一定和对角矩阵相似(不管特征值有没有重根); 实对称矩阵特征值不同时特征向量必相互正交(由此有内积为 0, 从而可构造齐次方程组求特征向量); 实对称矩阵可以用正交矩阵来相似对角化. 试题就是围绕这些定理来设计的. 考研的重点, 特别要复习好综合性强的解答题.

4 (2006, 23 题, 9 分) 设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 向量 $\alpha_1 = (-1, 2, -1)^T$, $\alpha_2 = (0, -1, 1)^T$ 是线性方程组 $Ax = 0$ 的两个解.

(I) 求 A 的特征值与特征向量;

(II) 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ , 使得 $Q^T A Q = \Lambda$.

【分析】 本题矩阵 A 未知, 而(I)要求出 A 的特征值、特征向量. 因而要有用定义法分析、推导的构思.

【解】 (I) 因为矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 即有 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 所以 3 是矩阵 A 的

特征值, $\alpha = (1, 1, 1)^T$ 是 A 属于 3 的特征向量.

又 $A\alpha_1 = 0 = 0\alpha_1, A\alpha_2 = 0 = 0\alpha_2$, 故 α_1, α_2 是矩阵 A 属于 $\lambda = 0$ 的两个线性无关的特征向量. 因此矩阵 A 的特征值是 3, 0, 0.

$\lambda = 3$ 的特征向量为 $k(1, 1, 1)^T$, 其中 $k \neq 0$ 为常数;

$\lambda = 0$ 的特征向量为 $k_1(-1, 2, -1)^T + k_2(0, -1, 1)^T$, 其中 k_1, k_2 是不全为 0 的常数.

(II) 因为 α_1, α_2 不正交, 故要 Schmidt 正交化.

$$\beta_1 = \alpha_1 = (-1, 2, -1)^T$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-3}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{单位化 } \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{那么令 } Q = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \text{得 } Q^T A Q = \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$$

【评注】 本题也可先求出矩阵 A , 然后来完成(I)和(II), 这样工作量会大一些,

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}, \text{由题设有 } \begin{cases} a_{11} + a_{12} + a_{13} = 3, \\ a_{12} + a_{22} + a_{23} = 3, \\ a_{13} + a_{23} + a_{33} = 3, \end{cases}$$

又由 $A\alpha_1 = 0, A\alpha_2 = 0$ 有

$$\begin{cases} -a_{11} + 2a_{12} - a_{13} = 0, \\ -a_{12} + 2a_{22} - a_{23} = 0, \\ -a_{13} + 2a_{23} - a_{33} = 0, \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} -a_{12} + a_{13} = 0, \\ -a_{22} + a_{23} = 0, \\ -a_{23} + a_{33} = 0, \end{cases}$$

联立这九个方程可得

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

进而由 $|\lambda E - A| = 0 \cdots$ 可完成本题.

当特征值有重根时, 要小心此时的特征向量垂直吗? 是否有 Schmidt 正交化的考点?

5 (2007, 24 题, 11 分) 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$, 且 $\alpha_1 = (1, -1, 1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量, 记 $B = A^5 - 4A^3 + E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(I) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量, 并求 B 的全部特征值与特征向量;

(II) 求矩阵 B .

【解】 (I) 由 $A\alpha = \lambda\alpha$ 知 $A^n\alpha = \lambda^n\alpha$. 那么

$$B\alpha_1 = (A^5 - 4A^3 + E)\alpha_1 = A^5\alpha_1 - 4A^3\alpha_1 + \alpha_1 = (\lambda_1^5 - 4\lambda_1^3 + 1)\alpha_1 = -2\alpha_1$$

所以 α_1 是矩阵 B 属于特征值 $\mu_1 = -2$ 的特征向量.

类似地, 若 $A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2, A\alpha_3 = \lambda_3\alpha_3$, 有

$$B\alpha_2 = (\lambda_2^5 - 4\lambda_2^3 + 1)\alpha_2 = \alpha_2, B\alpha_3 = (\lambda_3^5 - 4\lambda_3^3 + 1)\alpha_3 = \alpha_3$$

因此, 矩阵 B 的特征值为 $\mu_1 = -2, \mu_2 = \mu_3 = 1$.

由矩阵 A 是对称矩阵知矩阵 B 也是对称矩阵, 设矩阵 B 属于特征值 $\mu = 1$ 的特征向量是 $\beta = (x_1, x_2, x_3)^T$, 那么因为实对称矩阵特征值不同特征向量相互正交, 有

$$\alpha_1^T \beta = x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

所以矩阵 B 属于特征值 $\mu = 1$ 的线性无关的特征向量是 $\beta_2 = (1, 1, 0)^T, \beta_3 = (-1, 0, 1)^T$.

因而, 矩阵 B 属于特征值 $\mu_1 = -2$ 的特征向量是 $k_1(1, -1, 1)^T$, 其中 k_1 是不为 0 的任意常数.

矩阵 B 属于特征值 $\mu = 1$ 的特征向量是 $k_2(1, 1, 0)^T + k_3(-1, 0, 1)^T$, 其中 k_2, k_3 是不全为 0 的任意常数.

(II) 由 $B\alpha_1 = -2\alpha_1, B\beta_2 = \beta_2, B\beta_3 = \beta_3$ 有 $B(\alpha_1, \beta_2, \beta_3) = (-2\alpha_1, \beta_2, \beta_3)$. 那么

$$\begin{aligned} B &= (-2\alpha_1, \beta_2, \beta_3)(\alpha_1, \beta_2, \beta_3)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

【评注】 本题求矩阵 B , 亦可用 $P^{-1}BP = \Lambda$ 或 $Q^{-1}BQ = \Lambda$ 的方法来实现, 例如, 令 $P = (\alpha_1,$

$\beta_2, \beta_3)$ 有 $B = P \begin{bmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} P^{-1} = \dots\dots$. 作为复习, 这里的计算建议同学动手具体做做.

要想到用正交内积为 0 来求特征向量.

(ID: djky66)

第六章 二次型

本章导读

本章 2007 年开始有考题. 二次型实际上是特征值的几何应用, 复习二次型就一定搞清它与特征值、特征向量之间的内在联系.

考点主要有三个: 一个是二次型化标准形的正、反两方面的问题, 依托的是特征值、特征向量相似对角化的理论与方法; 一个是二次型的正定性, 既有正定的判定, 又有正定性质的运用, 也都会涉及到特征值; 第三是合同, 它是由二次型经坐标变换引申出来的概念.

合同矩阵

试题特点

不是重点, 填空、选择为主.

$$A \simeq B \Leftrightarrow p_A = p_B, q_A = q_B$$

通过什么来确定正、负惯性指数? 特征值!!! 有时也可用配方法.

注意相似与合同的联系和区别.

6 (2007, 10 题, 4 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 A 与 B

(A) 合同且相似.

(B) 合同, 但不相似.

(C) 不合同, 但相似.

(D) 既不合同, 也不相似.

【答案】 B.

【解析】 根据相似的必要条件: $\sum a_{ii} = \sum b_{ii}$, 易见 A 和 B 肯定不相似, 由此可排除 (A) 与 (C). 而合同的充分必要条件是相同的正惯性指数、负惯性指数. 为此可以用特征值加以判断. 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda - 2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 3)^2$$

知矩阵 A 的特征值为 3, 3, 0. 故二次型 $x^T A x$ 的正惯性指数 $p = 2$, 负惯性指数 $q = 0$. 而二次型 $x^T B x$ 的正惯性指数亦为 $p = 2$, 负惯性指数 $q = 0$, 所以 A 与 B 合同, 故应选 (B).

【评注】 实对称矩阵 A 和 B 相似, 则 A 和 B 必合同, (因为 $A \sim B \Rightarrow \lambda_A = \lambda_B \Rightarrow p_A = p_B, q_A = q_B \Rightarrow A \simeq B$) 但合同不一定相似, 一般情况通过特征值来判断合同是方便的.

7 (2008, 8 题, 4 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, 则在实数域上与 A 合同的矩阵为

(A) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

【答案】 D.

【解析】 A 与 B 合同 $\Leftrightarrow x^T A x$ 与 $x^T B x$ 有相同的正惯性指数, 及相同的负惯性指数. 而正(负)惯性指数的问题可由特征值的正(负)来决定. 因为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

故 $p = 1, q = 1$

本题中(D)之矩阵, 特征值为 $\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$, 故 $p = 1, q = 1$.

所以选(D).

【评注】 本题的矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 不仅和矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ 合同, 而且它们也相似, 因为它们都和对角矩阵 $\begin{bmatrix} 3 & \\ & -1 \end{bmatrix}$ 相似.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

金榜时代图书·书目

考研数学系列

书名	作者	出版时间
数学复习全书·基础篇(数学一、二、三通用)	李永乐等	2020年6月
数学基础过关660题(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2020年8月
数学历年真题全精解析·基础篇(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2020年10月
数学公式的奥秘	刘喜波等	2020年10月
数学复习全书(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2020年12月
数学历年真题全精解析(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2021年1月
数学强化通关330题(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2021年1月
高等数学辅导讲义	刘喜波	2021年3月
线性代数辅导讲义	李永乐	2021年3月
概率论与数理统计辅导讲义	王式安	2021年3月
高等数学超精讲	姜晓千	2021年4月
概率论与数理统计辅导讲义	曹显兵	2021年4月
数学决胜冲刺6套卷(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2021年10月
数学临阵磨枪(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2021年10月
经济类联考数学复习全书	李永乐等	2021年4月
农学门类联考数学复习全书	李永乐等	2021年4月

大学数学系列

书名	作者	出版时间
大学数学线性代数辅导	李永乐	2018年12月
大学数学高等数学辅导	章纪民	2021年5月
大学数学概率论与数理统计辅导	刘喜波	2021年5月
线性代数期末高效复习笔记	宋浩	2021年5月
高等数学期末高效复习笔记	宋浩	2021年5月
概率论与数理统计期末高效复习笔记	宋浩	2021年5月

考研政治系列

书名	作者	出版时间
思想政治理论大纲命题解析	米鹏	2021 年 5 月
思想政治理论精雕细刻 1000 题	米鹏	2021 年 5 月
思想政治理论大串讲	米鹏	2021 年 10 月
思想政治理论最后 20 天必背 20 题	米鹏	2021 年 10 月
考研政治复习手账	张纹	2021 年 5 月
考研政治时政与大题	张纹	2021 年 10 月
考研政治冲刺预测 5 套卷	张纹	2021 年 10 月
考研政治高分秘训 900 题	桑宏斌	2021 年 2 月

考研英语系列

书名	作者	出版时间
考研英语词汇源来如此	全国考研英语金榜命题研究中心	2020 年 10 月
考研英语语法和长难句实战突破 18 讲	全国考研英语金榜命题研究中心	2020 年 10 月
考研英语词伙	李超	2019 年 3 月
考研英语句伙	李超	2019 年 3 月
考研英语阅卷人写作高分万能模板	方妍	2018 年 11 月
考研英语语法长难句抓分攻略	欧阳栾天	2018 年 9 月
考研英语实用语法与疑难句精讲笔记	白子墨	2020 年 12 月
词维风暴	姜晗	2019 年 9 月
词法风暴	姜晗	2020 年 12 月
考研英语长难句核心语法	高维 赵亮	2020 年 11 月
考研英语生猛海词	赵亮 高维	2021 年 3 月
考研英语词汇之杉杉密法	许密杉	2021 年 3 月
考研英语阅读之杉杉密法	许密杉	2021 年 5 月

专业硕士系列

书名	作者	出版时间
逻辑复习指南	房文学	2020 年 12 月
写作复习指南	房文学	2020 年 12 月

逻辑狂练 900 题	房文学	2021 年 3 月
逻辑真题超精解	房文学	2021 年 3 月

医师资格考试系列

书名	作者	出版时间
贺银成国家临床执业医师资格考试辅导讲义(上、下册)	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业医师资格考试辅导讲义同步练习	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业医师资格考试全真模拟试卷及精析	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业及助理医师资格考试历年考点精析(上册)试题	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业及助理医师资格考试历年考点精析(下册)答案及精析	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业及助理医师资格考试实践技能应试指南	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试辅导讲义(上、下册)	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试辅导讲义同步练习	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试全真模拟试卷及精析	贺银成	2020 年 12 月
刘应科中医执业(助理)医师实践技能通关掌中宝	刘应科	2020 年 12 月
刘应科中医执业(助理)医师综合笔试通关掌中宝	刘应科	2020 年 12 月

考研西医系列

书名	作者	出版时间
贺银成考研西医临床医学综合能力辅导讲义(上、下册)	贺银成	2021 年 2 月
贺银成考研西医临床医学综合能力辅导讲义同步练习	贺银成	2021 年 3 月
贺银成考研西医临床医学综合能力全真模拟试卷及精析	贺银成	2021 年 3 月
贺银成考研西医临床医学综合能力历年真题精析	贺银成	2021 年 3 月

考研中医系列

书名	作者	出版时间
刘应科考研中医综合教材	刘应科	2020 年 12 月
刘应科考研中医综合教材同步练习 3000 题	刘应科	2021 年 5 月
刘应科考研中医综合历年真题精析及复习思路	刘应科	2021 年 6 月
刘应科考研中医综合终极预测试卷	刘应科	2021 年 12 月

中外名著系列

书名	作者	出版时间
小王子	[法]安托万·德·圣-埃克苏佩里	2018年12月
飞鸟集	[印]泰戈尔	2018年12月
瓦尔登湖	[美]亨利·戴维·梭罗	2018年12月
了不起的盖茨比	[美]弗·司各特·菲茨杰拉德	2018年12月
简·爱	[英]夏洛蒂·勃朗特	2018年12月
老人与海	[美]海明威	2018年12月
月亮和六便士	[英]威廉·萨默塞特·毛姆	2018年12月
呼啸山庄	[英]艾米莉·简·勃朗特	2018年12月
傲慢与偏见	[英]简·奥斯丁	2018年12月
双城记	[英]查尔斯·狄更斯	2019年3月
朝花夕拾·呐喊	鲁迅	2018年4月
呼兰河传	萧红	2018年4月
骆驼祥子	老舍	2018年4月
我这一辈子	老舍	2018年4月
茶馆	老舍	2018年4月

以上图书书名及出版时间仅供参考,以实际出版物为准,均属金榜时代(北京)教育科技有限公司!

微信公众号:金榜时代考研



原公众号:金榜图书考研,名称已更换

@金榜时代官方微博



天猫
时代巨流图书专营店



微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)



乡村艺术Ke梦想社

音体美教师 志愿者招募

不要被摩天大厦挡个正着

去青瓦淡墨乡间

用我们的方式热爱这个时代



TEACH FOR CHINA

招募：乡村小学音体美青年教师志愿者

项目 简介

乡村艺术Ke梦想社创办于2017年，旨在改善乡村音体美教师紧缺现状，让乡村儿童感受音体美艺术之美，让更多的孩子，无论出身，都能获得同等的优质教育。梦想社创立之初，便启动了“助力乡村学校音体美课堂”行动计划，截止目前，该计划已牵手近300余名青年志愿者，落地学校已达10所。（详情敬请关注公众号“乡村艺术ke梦想社”）为善益众，求贤若渴，我们，正在远方，等着如诗般的你！

成为志愿者你将获得

- 服务学校包吃包住
- 每月1500元补助
- 志愿者服务期间的短期保障保险
- 方寸天地得享人生意趣，大美原乡遍寻香径落花

我们希望你

- 品行端正，有爱心，有耐心
- 身体健康，能适应艰苦乡村环境
- 受过良好教育且有音体美专业特长
- 认真负责，充满正能量，支教有清晰规划
- 吃苦耐劳，乐于助人，有良好的团队合作精神

报名方式

Step 1.

请以“**报名2020乡村艺术Ke梦想社音体美教师志愿者**”为邮件标题，发送邮件至：
CountryClass@126.com

Step 2.

邮件内容：正文简要介绍你

对社会公益的理解，
参加本次活动的原
因及您的一技之长；

附件1：支教课程设计（包括
3节课以上的教案或
课件）

附件2：个人简历（Word格式）



书名	出版时间	适用阶段
数学公式的奥秘	2020年3月	全程复习
数学复习全书·基础篇	2020年6月	夯实基础
数学基础过关660题	2020年8月	夯实基础
数学历年真题全精解析·基础篇	2020年10月	夯实基础
数学复习全书	2020年12月	全程复习
数学历年真题全精解析	2021年1月	全程复习
数学强化通关330题	2021年1月	强化提高
高等数学辅导讲义	2021年3月	强化提高
线性代数辅导讲义	2021年3月	强化提高
概率论与数理统计辅导讲义	2021年3月	强化提高
数学决胜冲刺6套卷	2021年10月	冲刺预测
数学临阵磨枪	2021年10月	冲刺预测

G20210015



图书售后答疑群
你问我答 全程服务



@清华李永乐考研数学辅导团队
关注作者微博 每周五在线实时答疑



责任编辑 / 雷萧屹

ISBN 978-7-5693-1824-1



9 787569 318241 >

定价：69.80元