

助力乡村学校音体美课堂行动”官方合作图书
/ 研客及全国各大考研培训学校指定用书

金榜时代TM
GLIST 明德·弘毅·品质 10

金榜时代考研数学系列

数学历年真题 全精解析

(数学三)

2022

编著◎李永乐 王式安 刘喜波 武忠祥 宋浩 姜晓千 铁军 李正元 蔡燧林 胡金德

主编建议 | 与《数学复习全书》《基础过关660题》《强化通关330题》配合使用，效果更佳

真题真相 | 深度解析2009-2021年真题，解锁命题“套路”，告诉你一个真实的考研数学

免费视频 | 微信扫右侧二维码观看本书配套精选视频，李永乐团队主讲，犹如名师在身旁



中国农业出版社
CHINA AGRICULTURE PRESS

金榜时代考研数学名师团队



线代王·李永乐 @清华李永乐考研数学辅导团队

微信公众号: 永乐讲线代

B站: 李永乐考研团队

- 原清华大学应用数学系教授 · 北京高教学会数学研究会副理事长
- 广受学生信赖的“线代王” · 曾任全国硕士研究生入学考试北京地区数学阅卷组组长
- 百万畅销书《线性代数辅导讲义》《数学复习全书》主编

李老师作为全国著名的考研数学线性代数辅导专家,对考研数学出题形式、考试重点了如指掌,解题思路极其灵活,辅导针对性极强,效果优良,成绩显著,受到广大学员的交口称赞。其主编的《线性代数辅导讲义》《数学复习全书》《数学基础过关660题》等已被历届考生公认为复习首选辅导书。



前命题组组长·王式安 @清华李永乐考研数学辅导团队 B站: 李永乐考研团队

- 原北京理工大学研究生院院长、应用数学系主任、教授
- 享受国务院特殊津贴的数学专家
- 美国哥伦比亚大学、南佛罗里达大学、纽约大学等大学的客座教授
- 1987-2001年间担任全国硕士研究生入学考试数学命题组组长
- 百万畅销书《概率论与数理统计辅导讲义》《数学复习全书》主编

王老师凭借多年参加考研数学命题工作的深厚经验,对考研数学的命题思路和命题方向了如指掌。其主编的《概率论与数理统计辅导讲义》《数学复习全书》《数学基础过关660题》等已被历届考生公认为复习首选辅导书。



考研高数“三巨头”——刘喜波（高数波叔）@清华李永乐考研数学辅导团队

- 中国科学院数学博士 · 北方工业大学理学院统计学系系主任、教授

长期从事本科生的教育教学工作,曾荣获学校师德先进个人、十佳班导师等称号,是北京市中青年骨干教师、北京市公共数学优秀教学团队主要成员,主编教材1部、教学参考书3部、教育教学论文集1部、译著2部,参编教学参考书10余部。



武忠祥 @清华李永乐考研数学辅导团队

原西安交通大学(985、211、双一流高校)数学系教授
美国爱荷华大学(2019美国综合性大学TOP100)访问学者
百万畅销书《高等数学辅导讲义》《数学复习全书》主编
高教社《工科数学分析基础》《高等数学基础》等教材主编



考研高数“三巨头”——宋浩（考研数学阅卷人）@宋浩老师

B站: 宋浩老师官方

- 山东大学数学学院本科研究生、中国科学院博士
- 英国Queen Mary University of London访问学者
- 副教授, 考研数学阅卷人

宋老师上课风趣幽默、由浅入深,能把复杂抽象的数学讲得诙谐有趣,上传至B站的数学视频《线性代数》《微积分》《概率论与数理统计》《高等数学》帮助了全国无数的大学生,总播放量近2000万次。宋老师讲考研数学,延续其风趣幽默的特点,喜欢从多种角度找寻思路,善于总结知识点,把晦涩难懂的考研知识讲的生动而有趣。



考研高数“三巨头”——姜晓千（全能名师）@晓千老师

微信公众号: 晓千老师

- 中国人民大学金融数学博士
- 全国各大省市考研辅导机构全程主讲
- 新浪、搜狐、腾讯、网易、中国教育在线等各大门户网站特邀访谈嘉宾

姜老师对考研数学历年真题有着极其深入的研究,授课风格高屋建瓴、激情洋溢、亲和幽默,深受考研学子喜爱。

“助力乡村学校音体美课堂行动”官方合作图书
V 研客及全国考研培训学校指定用书

金榜时代TM
GLIST 明德·弘毅·品质

金榜时代考研数学系列

数学历年真题

全精解析 (数学三)

2022

(ID: djky66)

编著 © 李永乐 王式安 刘喜波 武忠祥 宋浩 姜晓千 铁军 李正元 蔡燧林 胡金德

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

@考研路上火力全开的你

昨日种种，皆成今我，切莫思量，更莫哀，
从今往后，怎么收获，怎么栽。

中国农业出版社
CHINA AGRICULTURE PRESS

· 北京 ·

书名	本书特点	本书使用说明
《数学复习全书》(综合提高篇)	系统全面·深入细致·综合提高 (推荐使用时间:2021年1月—2021年7月)	
	本书为作者团队扛鼎之作,常年稳居各大平台考研图书畅销榜前列,主编之一的李永乐老师更是入选2019年“当当20周年白金作家”,考研界仅两位作者获此称号。 本书从基本理论、基础知识、基本方法出发,全面、深入、细致地讲解考研数学大纲要求的所有考点,不提供花拳绣腿的不实用技巧,也不提倡误人子弟的费时背书法,而是扎扎实实地带同学们深入每一个考点背后,找到它们之间的关联、逻辑,让同学们从知识点零碎、概念不清楚、期末考试过后即忘的“低级”水平,提升到考研必需的高度。	利用《数学复习全书·基础篇》把基本知识“捡”起来之后,再使用本书。本书及赠送本包含知识点的详细讲解、相应的练习题,以及笔记功能,有利于同学们建立考研知识体系和框架,打好基础。 在《数学基础过关660题》中若遇到不会做的题,可以放到这里来做。以章节或节为单位,学习新内容前要复习前面的内容,按照一定的规律来复习。基础薄弱或中等偏下的考生,务必要利用考研当年上半年的时间,整体吃透书中的理论知识,摸清例题设置的原理和必要性,特别是对大纲中要求的基本概念、理论、方法要系统理解和掌握。
《数学历年真题全精解析》(强化篇)	真题真练·总结规律·提升技巧 (推荐使用时间:2021年7月—2021年11月)	
	本书完整收录2009—2021年考研数学的全部试题,将真题按考点分类,还精选了其他卷的试题作为练习题。力争做到考点全覆盖,题型多样,重点突出,不简单重复。书中的每道题给出的参考答案有常用、典型的解法,也有技巧性强的特殊解法。分析过程逻辑严谨、思路清晰,具有很强的可操作性,通过学习,考生可以独立完成对同类题的解答。	边做题、边总结,遇到“卡壳”的知识点、题目,回到《数学复习全书》和之前听过的基础课、强化课中去补,争取把每个真题知识点吃透,搞懂,不留死角。 通过做真题,进一步提高解题能力和技巧,满足实际考试的要求。第一阶段,浏览每年真题,熟悉题型和常考点。第二阶段,进行专项复习。
《高等数学辅导讲义》 《线性代数辅导讲义》 《概率论与数理统计辅导讲义》	经典讲义·专项突破·强化提高 (推荐使用时间:2021年7月—2021年10月)	
	三本讲义分别由作者的教学讲稿改编而成,系统阐述了考研数学的基础知识。书中例题都经过严格筛选、归纳,是多年经验的总结,对同学们的重点、难点的把握准确,有针对性。适合认真研读,做到举一反三。	哪科较薄弱,精研哪本。搭配《数学强化通关330题》一起使用,先复习讲义上的知识点,做章节例题、练习,再去听相关章节的强化课,做《数学强化通关330题》的相关习题,更有利于知识的巩固和提高。
《数学强化通关330题》	综合训练·突破重点·强化提高 (推荐使用时间:2021年5月—2021年10月)	
	强化阶段的练习题,综合训练必备。具有典型性、针对性、技巧性、综合性等特点,可以帮助同学们突破重点、难点,熟悉解题思路和方法,增强应试能力。	与《数学基础过关660题》互为补充,包含选择题、填空题和解答题。搭配《高等数学辅导讲义》《线性代数辅导讲义》《概率论与数理统计辅导讲义》使用,效果更佳。
《数学决胜冲刺6套卷》	冲刺模拟·有的放矢·高效提分 (推荐使用时间:2021年11月—2021年12月)	
	通过整套题的训练,对所学知识进行系统总结和梳理。不同于重点题型的练习,需要全面的知识,要综合应用。必要时应复习基本概念、公式、定理,准确记忆。	在精研真题之后,用模拟卷练习,找漏洞,保持手感。不要掐时间、估分,遇到不会的题目,回归基础,翻看以前的学习笔记,把每道题吃透。
《数学临阵磨枪》	查漏补缺·问题清零·从容应战 (推荐使用时间:考前20天)	
	本书是常用定理公式、基础知识的清单。最后阶段,大部分考生缺乏信心,感觉没复习完,本来会做的题目,因为紧张、压力,也容易出错。本书能帮助考生在考前查漏补缺,确保基础知识不丢分。	搭配《数学决胜冲刺6套卷》使用。上考场前,可以再次回忆、翻看本书。

“助力乡村学校音体美课堂行动”官方合作图书

V 研客及全国考研培训学校指定用书

金榜时代TM
GLIST 明德·弘毅·品质

金榜时代考研数学系列

数学历年真题 全精解析 (数学三)

2022

编著 © 李永乐 王式安 刘喜波 武忠祥 宋浩 姜晓千 铁军 李正元 蔡燧林 胡金德

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

@考研路上火力全开的你

昨日种种，皆成今我，切莫思量，更莫哀，
从今往后，怎么收获，怎么栽。

中国农业出版社
CHINA AGRICULTURE PRESS

·北京·

书名	本书特点	本书使用说明
《数学复习全书》(综合提高篇)	系统全面·深入细致·综合提高(推荐使用时间:2021年1月—2021年7月)	
	本书为作者团队扛鼎之作,常年稳居各大平台考研图书畅销榜前列,主编之一的李永乐老师更是入选2019年“当当20周年白金作家”,考研界仅两位作者获此称号。 本书从基本理论、基础知识、基本方法出发,全面、深入、细致地讲解考研数学大纲要求的所有考点,不提供花拳绣腿的不实用技巧,也不提倡误人子弟的费时背书法,而是扎扎实实地带同学们深入每一个考点背后,找到它们之间的关联、逻辑,让同学们从知识点零碎、概念不清楚、期末考试过后即忘的“低级”水平,提升到考研必需的高度。	利用《数学复习全书·基础篇》把基本知识“捡”起来之后,再使用本书。本书及赠送本包含知识点的详细讲解、相应的练习题,以及笔记功能,有利于同学们建立考研知识体系和框架,打好基础。 在《数学基础过关660题》中若遇到不会做的题,可以放到这里来做。以章节或节为单位,学习新内容前要复习前面的内容,按照一定的规律来复习。基础薄弱或中等偏下的考生,务必要利用考研当年上半年的时间,整体吃透书中的理论知识,摸清例题设置的原理和必要性,特别是对大纲中要求的基本概念、理论、方法要系统理解和掌握。
《数学历年真题全精解析》(强化篇)	真题真练·总结规律·提升技巧(推荐使用时间:2021年7月—2021年11月)	
	本书完整收录2009—2021年考研数学的全部试题,将真题按考点分类,还精选了其他卷的试题作为练习题。力争做到考点全覆盖,题型多样,重点突出,不简单重复。书中的每道题给出的参考答案有常用、典型的解法,也有技巧性强的特殊解法。分析过程逻辑严谨、思路清晰,具有很强的可操作性,通过学习,考生可以独立完成对同类题的解答。	边做题、边总结,遇到“卡壳”的知识点、题目,回到《数学复习全书》和之前听过的基础课、强化课中去补,争取把每个真题知识点吃透、搞懂,不留死角。 通过做真题,进一步提高解题能力和技巧,满足实际考试的要求。第一阶段,浏览每年真题,熟悉题型和常考点。第二阶段,进行专项复习。
《高等数学辅导讲义》 《线性代数辅导讲义》 《概率论与数理统计辅导讲义》	经典讲义·专项突破·强化提高(推荐使用时间:2021年7月—2021年10月)	
	三本讲义分别由作者的教学讲稿改编而成,系统阐述了考研数学的基础知识。书中例题都经过严格筛选、归纳,是多年经验的总结,对同学们的重点、难点的把握准确,有针对性。适合认真研读,做到举一反三。	哪科较薄弱,精研哪本。搭配《数学强化通关330题》一起使用,先复习讲义上的知识点,做章节例题、练习,再去听相关章节的强化课,做《数学强化通关330题》的相关习题,更有利于知识的巩固和提高。
《数学强化通关330题》	综合训练·突破重点·强化提高(推荐使用时间:2021年5月—2021年10月)	
	强化阶段的练习题,综合训练必备。具有典型性、针对性、技巧性、综合性等特点,可以帮助同学们突破重点、难点,熟悉解题思路和方法,增强应试能力。	与《数学基础过关660题》互为补充,包含选择题、填空题和解答题。搭配《高等数学辅导讲义》《线性代数辅导讲义》《概率论与数理统计辅导讲义》使用,效果更佳。
《数学决胜冲刺6套卷》	冲刺模拟·有的放矢·高效提分(推荐使用时间:2021年11月—2021年12月)	
	通过整套题的训练,对所学知识进行系统总结和梳理。不同于重点题型的练习,需要全面的知识,要综合应用。必要时应复习基本概念、公式、定理,准确记忆。	在精研真题之后,用模拟卷练习,找漏洞,保持手感。不要掐时间、估分,遇到不会的题目,回归基础,翻看以前的学习笔记,把每道题吃透。
《数学临阵磨枪》	查漏补缺·问题清零·从容应战(推荐使用时间:考前20天)	
	本书是常用定理公式、基础知识的清单。最后阶段,大部分考生缺乏信心,感觉没复习完,本来会做的题目,因为紧张、压力,也容易出错。本书能帮助考生在考前查漏补缺,确保基础知识不丢分。	搭配《数学决胜冲刺6套卷》使用。上考场前,可以再次回忆、翻看本书。

从真题中你能够了解一个真实的考研数学,寻找考研数学的规律

真题是教育部考试中心一届又一届命题组老师们集体智慧的结晶,题目经典,又有规律可循。为了帮助广大考生能够在较短的时间内,准确理解和熟练掌握考研数学考试的出题方式和解题规律,全面提高解题能力,进而更好地驾驭考试,本书编写团队依据十余年的命题与阅卷经验,并结合二十多年的考研辅导和研究精华,精心编写了本书,以期起到帮助同学们提高综合分析和综合解题能力的作用。

历年来,研究生考试数学的知识点没有太大变化,并且考查的重难点也比较稳定,都是往年考试反复考查的内容,依据往年考题掌握了这些重难点,我们就等于成功了一半。练真题,反复揣摩是有效把握这些重难点的最佳途径。考生们可以思考考过的知识点会再从什么角度命题,如何与没有考过的知识点结合起来考查,进而复习没有考过的知识点,这就可以从深度、广度上全方位把握知识点了。因此,真题能够最有效地暴露我们的不足和复习误区,提供更有有效的复习思路和策略,甚至可以说,真题就是最好的“辅导老师”,它告诉我们考试会考什么,怎么考,反过来又指导我们思考如何应对,也只有真题准确体现了考试所要求的能力和 method。

真题对大部分考生来说都是“陌生”的。真题命制科学,经过命题人的反复推敲,是市面上的练习题所无法比拟的。市面上的练习题难易适中,命制科学,贴近考试要求的很少。做真题,反复揣摩,能节省我们宝贵的复习时间,达到事半功倍的效果。紧紧抓住真题,在考试时也可以使我们做到从容应对。

本书共分三篇。第一篇给出最新的真题和解析,目的是让读者了解最新考题的结构形式和难易程度,方便复习备考;第二篇是历年的真题;第三篇是将真题按考点所属内容分类并进行解析。第三篇是本书的精华部分,各章编排如下:

1. 本章导读

设置本部分的目的是使考生明白此章的考试内容和考试重点,从而复习时目标明确。

2. 试题特点

本部分总结此类知识的历年考试出题规律,分析可能的出题点。

3. 考题详析

本部分对历年真题的题型进行归纳分类,总结各种题型的解题方法。这些解法均来自各位专家的多年教学实践总结和长期命题阅卷经验。针对以往考生在解题过程中普遍存在的

问题及常犯的错误,我们给出相应的注意事项,对每一道真题都给出解题思路分析,以便考生真正地理解和掌握解题方法。

4. 练习题

数学复习离不开做题,只有做适量的练习才能巩固所学的知识。为了使考生更好地巩固所学知识,提高实际解题能力,本书作者从历年其他卷别的试题中精心选取同类考题作为练习题,供考生练习,以便使考生在熟练掌握基本知识的基础上,能够轻松解答真题。同时,每道练习题都配备了详细的参考答案和解析,以便考生遇到疑难问题时能及时得到最详尽的指导。

建议考生在使用本书时不要就题论题,而是要多动脑筋,通过对题目的练习、比较、思考,总结并发现题目设置和解答的规律性。请大家一定要在今后的复习中,时刻想到将各个方面的知识融会贯通,做好串联和总结,以检验自己对问题的把握程度,真正掌握应试解题的金钥匙,从而迅速提高知识水平和应试能力,取得理想的分数。

使用本书的同时,也可以配合使用本书作者编写的《数学复习全书·基础篇》《数学基础过关 660 题》《数学复习全书》《数学强化通关 330 题》等,提高复习效率。

另外,为了更好地帮助同学们进行复习,“李永乐考研数学辅导团队”特在新浪微博上开设答疑专区,同学们在复习考研数学时遇到问题,均可在线留言,团队老师将尽心为你解答。

新浪微博:清华李永乐考研数学辅导团队



微信公众号:金榜时代考研



希望本书能对同学们的复习备考带来更大的帮助。对书中的不足之处,恳请读者批评指正。
祝同学们复习顺利,心想事成,考研成功!

编者

2021 年 1 月

目录

Contents

第一篇 最新真题

2021 年全国硕士研究生招生考试数学(三)试题	1
2021 年全国硕士研究生招生考试数学(三)参考答案	5

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

第二篇 历年真题

2020 年全国硕士研究生招生考试数学(三)试题	13
2019 年全国硕士研究生招生考试数学(三)试题	16
2018 年全国硕士研究生招生考试数学(三)试题	19
2017 年全国硕士研究生招生考试数学(三)试题	22
2016 年全国硕士研究生招生考试数学(三)试题	25
2015 年全国硕士研究生招生考试数学(三)试题	28
2014 年全国硕士研究生招生考试数学(三)试题	32
2013 年全国硕士研究生招生考试数学(三)试题	35
2012 年全国硕士研究生招生考试数学(三)试题	38
2011 年全国硕士研究生招生考试数学(三)试题	41
2010 年全国硕士研究生招生考试数学(三)试题	44
2009 年全国硕士研究生招生考试数学(三)试题	47

第三篇 真题解析

第一部分 微积分	50
第一章 函数、极限、连续	50
第二章 一元函数微分学	85
第三章 一元函数积分学	126
第四章 多元函数的微分学	158
第五章 二重积分	179
第六章 无穷级数	197
第七章 常微分方程与差分方程	215
第二部分 线性代数	224
第一章 行列式	224
第二章 矩阵	234
第三章 向量	249
第四章 线性方程组	259
第五章 特征值与特征向量	278
第六章 二次型	298
第三部分 概率论与数理统计	310
第一章 随机事件和概率	310
第二章 随机变量及其分布	315
第三章 多维随机变量的分布	319
第四章 随机变量的数字特征	331
第五章 大数定律和中心极限定理	344
第六章 数理统计的基本概念	346
第七章 参数估计	350

最新真题

2021 年全国硕士研究生招生考试

数学 (三)

(科目代码:303)

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

考生注意事项

考生注意事
微信公众号【顶尖考研】

1. 答题前,考生须在试题册指定位置上填写考生编号和考生姓名;在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号,并涂写考生编号信息点。
2. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上,非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内,超出答题区域书写的答案无效;在草稿纸、试题册上答题无效。
3. 填(书)写部分必须使用黑色字迹签字笔书写,字迹工整,笔迹清楚;涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。
4. 考试结束,将答题卡、试题册和草稿纸按规定交回。

• 1 •



一、选择题(1~10小题,每小题5分,共50分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.)

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^x (e^{t^2} - 1)dt$ 是 x^7 的

(A) 低阶无穷小.

(B) 等价无穷小.

(C) 高阶无穷小.

(D) 同阶但非等价无穷小.

(2) 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处

(A) 连续且取极大值.

(B) 连续且取极小值.

(C) 可导且导数等于零.

(D) 可导且导数不为零.

(3) 设函数 $f(x) = ax - b \ln x (a > 0)$ 有 2 个零点, 则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是

(A) $(e, +\infty)$.

(B) $(0, e)$.

(C) $(0, \frac{1}{e})$.

(D) $(\frac{1}{e}, +\infty)$.

(4) 设函数 $f(x, y)$ 可微, 且 $f(x+1, e^x) = x(x+1)^2$, $f(x, x^2) = 2x^2 \ln x$, 则 $df(1, 1) =$

(A) $dx + dy$.

(B) $dx - dy$.

(C) dy .

(D) $-dy$.

(5) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_3 - x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为

(A) 2, 0.

(B) 1, 1.

(C) 2, 1.

(D) 1, 2.

(6) 设 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$ 为 4 阶正交矩阵, 若矩阵 $B = \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \\ \alpha_4^T \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, k 表示任意常数, 则线性方程组 $Bx = \beta$ 的通解 $x =$

(A) $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + k\alpha_1$.

(B) $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + k\alpha_2$.

(C) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 + k\alpha_3$.

(D) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + k\alpha_4$.

(7) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$, 若存在下三角可逆矩阵 P 和上三角可逆矩阵 Q , 使 PAQ 为对

角矩阵, 则 P, Q 可分别为

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(8) 设 A, B 为随机事件, 且 $0 < P(B) < 1$, 下列命题中为假命题的是

(A) 若 $P(A|B) = P(A)$, 则 $P(A|\bar{B}) = P(A)$.

(B) 若 $P(A|B) > P(A)$, 则 $P(\bar{A}|\bar{B}) > P(\bar{A})$.

(C) 若 $P(A|B) > P(A|\bar{B})$, 则 $P(A|B) > P(A)$.

(D) 若 $P(A|A \cup B) > P(\bar{A}|A \cup B)$, 则 $P(A) > P(B)$.

(9) 设 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ 为来自总体 $N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$ 的简单随机样本, 令 $\theta = \mu_1 - \mu_2$,

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \hat{\theta} = \bar{X} - \bar{Y}, \text{ 则}$$

$$(A) E(\hat{\theta}) = \theta, D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}.$$

$$(B) E(\hat{\theta}) = \theta, D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}.$$

$$(C) E(\hat{\theta}) \neq \theta, D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}.$$

$$(D) E(\hat{\theta}) \neq \theta, D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}.$$

(10) 设总体 X 的概率分布为 $P\{X=1\} = \frac{1-\theta}{2}, P\{X=2\} = P\{X=3\} = \frac{1+\theta}{4}$, 利用来自总体的

样本值 1, 3, 2, 2, 1, 3, 1, 2, 可得 θ 的最大似然估计值为

$$(A) \frac{1}{4}.$$

$$(B) \frac{3}{8}.$$

$$(C) \frac{1}{2}.$$

$$(D) \frac{5}{8}.$$

二、填空题(11 ~ 16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.)

(11) 若 $y = \cos e^{-\sqrt{x}}$, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} =$ _____.

(12) $\int_{\sqrt{5}}^5 \frac{x}{\sqrt{|x^2-9|}} dx =$ _____.

(13) 设平面区域 D 由曲线 $y = \sqrt{x} \sin \pi x (0 \leq x \leq 1)$ 与 x 轴围成, 则 D 绕 x 轴旋转所围成的旋转体体积为 _____.

(14) 差分方程 $\Delta y_t = t$ 的通解为 $y_t =$ _____.

(15) 多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 项的系数为 _____.

(16) 甲, 乙两个盒子中各装有 2 个红球和 2 个白球, 先从甲盒中任取一球, 观察颜色后放入乙盒中, 再从乙盒中任取一球, 令 X, Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球个数, 则 X 与 Y 的相关系数为 _____.

三、解答题(17 ~ 22 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(17) (本题满分 10 分)

已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\alpha \arctan \frac{1}{x} + \left(1 + |x|^{\frac{1}{2}} \right) \right]$ 存在, 求 α 的值.

(18) (本题满分 12 分)

求函数 $f(x, y) = 2 \ln |x| + \frac{(x-1)^2 + y^2}{2x^2}$ 的极值.



(19) (本题满分 12 分)

设有界区域 D 是圆 $x^2 + y^2 = 1$ 和直线 $y = x$ 以及 x 轴在第一象限围成的部分, 计算二重积分

$$\iint_D e^{(x+y)^2} (x^2 - y^2) dx dy.$$

(20) (本题满分 12 分)

设 n 为正整数, $y = y_n(x)$ 是微分方程 $xy' - (n+1)y = 0$ 满足条件 $y_n(1) = \frac{1}{n(n+1)}$ 的解.

(I) 求 $y_n(x)$;

(II) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n(x)$ 的收敛域及和函数.

(21) (本题满分 12 分)

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & b \end{bmatrix}$ 仅有两个不同的特征值, 若 A 相似于对角矩阵, 求 a, b 的值, 并求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

(22) (本题满分 12 分)

在区间 $(0, 2)$ 上随机取一点, 将该区间分成两段, 较短一段的长度记为 X , 较长一段的长度记为 Y . 令 $Z = \frac{Y}{X}$,

(I) 求 X 的概率密度;

(II) 求 Z 的概率密度;

(III) 求 $E\left(\frac{X}{Y}\right)$.

2021 年全国硕士研究生招生考试

数学(三) 参考答案

一、选择题

(1)【答案】 C.

【解析】 利用结论:若 $f(x), g(x)$ 连续,且当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别为 x 的 m 和 n 阶无穷小,则当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^{g(x)} f(t)dt$ 是 x 的 $n(m+1)$ 阶无穷小.

由此可知 $\int_0^{x^2} (e^t - 1)dt$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 是 x 的 $2(3+1) = 8$ 阶无穷小, 故应选(C).

(2)【答案】 D.

【解析】 由导数定义知

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

故应选(D).

(3)【答案】 A.

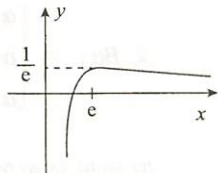
【解析】 $f(x) = ax - b \ln x$ 有两个零点等价于方程 $ax - b \ln x = 0$ 有两个实根, 即方程 $\frac{a}{b} = \frac{\ln x}{x}$

有两个实根, 令 $\varphi(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则

$$\varphi'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0, \text{ 得 } x = e$$

在 $(0, e)$ 上 $\varphi(x)$ 单调增, 在 $(e, +\infty)$ 上 $\varphi(x)$ 单调减, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$, 则 $\varphi(x)$ 如右图, 方程

$$\frac{a}{b} = \frac{\ln x}{x}$$



有两个实根的几何意义是直线 $y = \frac{a}{b}$ 与曲线 $y = \varphi(x)$ 有且仅有两个交点, 则

$$0 < \frac{a}{b} < \frac{1}{e}$$

即 $e < \frac{b}{a} < +\infty$.

故应选(A).

(4)【答案】 C.

【解析】 方程 $f(x+1, e^x) = x(x+1)^2$ 两边对 x 求导得

$$f'_1(x+1, e^x) + e^x f'_2(x+1, e^x) = (x+1)^2 + 2x(x+1)$$

令 $x = 0$, 有

$$f'_1(1, 1) + f'_2(1, 1) = 1$$



方程 $f(x, x^2) = 2x^2 \ln x$ 两边对 x 求导得

$$f'_1(x, x^2) + 2xf'_2(x, x^2) = 4x \ln x + 2x$$

令 $x = 1$, 有

$$f'_1(1, 1) + 2f'_2(1, 1) = 2$$

解 ①, ② 的联立方程组, 得

$$f'_1(1, 1) = 0, f'_2(1, 1) = 1$$

因而 $df(1, 1) = f'_1(1, 1)dx + f'_2(1, 1)dy = dy$.

(5)【答案】 B.

【分析】 因为 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, 所以 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = -x_1 + x_3 \end{cases}$ 不是坐标变换.

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - x_1^2 + 2x_1x_3 - x_3^2$$

$$= 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$$

由 ① 配方法 $f = 2\left[x_2^2 + x_2(x_1 + x_3) + \frac{1}{4}(x_1 + x_3)^2\right] - \frac{1}{2}(x_1 + x_3)^2 + 2x_1x_3$

$$= 2\left(x_2 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 - \frac{1}{2}(x_1 - x_3)^2$$

或 ② 特征值法

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 & -1 - \lambda \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & -2 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1)(\lambda^2 - 3\lambda)$$

可得特征值为 3, -1, 0. 因此都有 $p = 1, q = 1$, 故选 (B).

(6)【答案】 D.

【解析】 由 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$ 是正交矩阵,

有 $r(A) = 4$ 即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 且 $\alpha_i^T \alpha_j = 0 (i \neq j), \alpha_i^T \alpha_i = 1$.

而 B 是 3×4 矩阵, $r(B) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 3$, 那么 $n - r(B) = 4 - 3 = 1$.

又 $B\alpha_4 = \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \end{bmatrix} \alpha_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 从而 α_4 是 $Bx = 0$ 的基础解系, 由选项可知只能选 (D).

但如果是解答题, 则还要证明 $B(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 即 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 是 $Bx = \beta$ 的解, 请同学们

们自己完成这个证明.

(7)【答案】 C.

【解析】 对 A 作初等行变换化为上三角矩阵 B , 有

$$[A | E] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right] = [B | P]$$

$$\text{因为 } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 可知 } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

再对 B 作列变换(或 B^T 作行变换)化为对角矩阵可求 Q (或 Q^T)

$$\left[\begin{array}{c} B \\ E \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 可得 } Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{或 } [B^T | E] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right] \text{ 得 } Q^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

从而选(C).

【评注】 本题其实是考察如何把 A 化为其等价标准形, P, Q 是不唯一的(考题中用的是“ P, Q 可分别为”).

作为选择题,当求出 P 之后,选项只能是(B)或(C),但 $PA = B$, B 不是等价标准形,必须还要作列变换,也就排除(B),只能选(C),因此 Q 是可以省略不去求解的.但若是解答题,则要按上述方法来求解,如果忘了这里的原理,直接用矩阵乘法,当然也可找出正确答案.

(8)【答案】 D.

【解析】 (方法一) (A) $P(A | B) = P(A)$ 即 A, B 独立,则 $A, \bar{B}$ 也独立, $P(A | \bar{B}) = P(A)$ 成立.

(B) $P(A | B) > P(A)$ 对任意事件 A 成立,即有 $0 < P(\bar{B}) < 1$ 时成立 $P(\bar{A} | \bar{B}) > P(\bar{A})$.

(C) $P(A | B) > P(A | \bar{B}) = \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(AB)}{1 - P(B)}$, 即 $\frac{P(AB)}{P(B)} > \frac{P(A) - P(AB)}{1 - P(B)}$,

也就有 $P(AB) - P(AB)P(B) > P(B)P(A) - P(B)P(AB)$, 即 $P(AB) > P(A)P(B)$, $\frac{P(AB)}{P(B)} > P(A)$, $P(A | B) > P(A)$ 成立.

(A)(B)(C) 三个均非假命题,答案应选(D).

(方法二) (D) $P(A | A \cup B) > P(\bar{A} | A \cup B)$ 即 $\frac{P(A)}{P(A \cup B)} > \frac{P(\bar{A})}{P(A \cup B)}$

等价于 $P(A) > P(B) - P(AB)$.

这并不能推出 $P(A) > P(B)$, 答案选(D).

(方法三) (D) $P(A | A \cup B) > P(\bar{A} | A \cup B)$, 令 $A = B$,

$$P(A | A \cup B) = P(A | A) = 1 > P(\bar{A} | A) = 0$$

即(D) 给条件成立,但结论 $P(A) > P(B) = P(A)$ 不成立,选(D).

(9)【答案】 B.

【解析】 $E(\hat{\theta}) = E(\bar{X} - \bar{Y}) = E(\bar{X}) - E(\bar{Y}) = \mu_1 - \mu_2 = \theta$.

$$\begin{aligned} D(\hat{\theta}) &= D(\bar{X} - \bar{Y}) = D\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - Y_i)\right] = \frac{1}{n^2} \left[\sum_{i=1}^n D(X_i - Y_i) \right] \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n [D(X_i) + D(Y_i) - 2\text{Cov}(X_i, Y_i)] \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho}{n}$$

答案应选(B).

(10)【答案】 A.

【解析】

X	1	2	3
P	$\frac{1-\theta}{2}$	$\frac{1+\theta}{4}$	$\frac{1+\theta}{4}$

X 的样本值 1, 3, 2, 2, 1, 3, 1, 2,

$$L = \left(\frac{1-\theta}{2}\right)^3 \left(\frac{1+\theta}{4}\right)^5$$

$$\ln L = 3\ln(1-\theta) + 5\ln(1+\theta) - 3\ln 2 - 5\ln 4.$$

$$\frac{d\ln L}{d\theta} = -\frac{3}{1-\theta} + \frac{5}{1+\theta} = 0, -3(1+\theta) + 5(1-\theta) = 0, 8\theta - 2 = 0, \text{解得 } \theta = \frac{1}{4}, \text{应选(A).}$$

二、填空题

(11)【答案】 $\frac{1}{2e} \sin \frac{1}{e}.$

【解析】 $y' = -\sin e^{-\sqrt{x}} \cdot e^{-\sqrt{x}} \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right),$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = \frac{1}{2e} \sin \frac{1}{e}.$$

(12)【答案】 6.

【解析】 原式 = $\int_{\sqrt{5}}^3 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx + \int_3^5 \frac{x}{\sqrt{x^2-9}} dx$

$$= -\sqrt{9-x^2} \Big|_{\sqrt{5}}^3 + \sqrt{x^2-9} \Big|_3^5$$

$$= 6$$

(13)【答案】 $\frac{\pi}{4}.$

【解析】 $V = \pi \int_0^1 x \sin^2 \pi x dx \stackrel{\pi x = t}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t \sin^2 t dt = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \sin^2 t dt$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

(14)【答案】 $C + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t$ (其中 C 为任意常数).

【解析】 由于 $\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$, 故原方程可化为 $y_{t+1} - y_t = t$, 该差分方程对应的齐次方程的通解为 C . 设其特解为 $y_t^* = t(At + B) = At^2 + Bt$, 代入方程, 有

$$A(t+1)^2 + B(t+1) - (At^2 + Bt) = t$$

即 $2At + A + B = t$, 比较系数得 $A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}.$

故所求通解为 $y_t = C + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t$ (其中 C 为任意常数).

(15)【答案】 -5.

【解析】 (方法一) 用定义, 逆序数

一般项为 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$,

当第一行选取 a_{11} (或 a_{13}) 时, 无论 2, 3, 4 行如何选择都不可能出现 x^3 , 本题 x^3 只有两种可能

$$a_{12} a_{21} a_{33} a_{44} = x \cdot 1 \cdot x \cdot x = x^3$$

$$a_{14} a_{22} a_{33} a_{41} = 2x \cdot x \cdot x \cdot 2 = 4x^3$$

而逆序数 $\tau(2 \ 1 \ 3 \ 4) = 1, \tau(4 \ 2 \ 3 \ 1) = 5$, 均为奇排列, 一般项都应带负号.

故 x^3 的系数为 -5 .

(方法二) 先变形再分析

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 0 \\ 1 & x-1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & x & -3 \\ 2 & -3 & 1 & x-4 \end{vmatrix}$$

x^3 项只能出现在 $a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} = x^2(x-1)(x-4)$ 中, 下略.

(16) 【答案】 $\frac{1}{5}$.

【解析】 (方法一)

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$P\{Y=0\} = P\{X=0\}P\{Y=0|X=0\} + P\{X=1\}P\{Y=0|X=1\}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{2}$$

$$P\{Y=1\} = 1 - P\{Y=0\} = \frac{1}{2}$$

所以 $\begin{array}{c|cc} Y & 0 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$, 进一步有

	Y	0	1
X	0		0.5
	1		0.5
		0.5	0.5

$$P\{X=0, Y=0\} = P\{X=0\}P\{Y=0|X=0\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = 0.3$$

	Y	0	1
X	0	0.3	0.5
	1		0.5
		0.5	0.5

故

	Y	0	1
X	0	0.3	0.2
	1	0.2	0.3
		0.5	0.5

进一步有

$$\text{现求 } \rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}} = \frac{E(XY) - E(X) \cdot E(Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}}$$

$$E(X) = E(Y) = 0.5, E(XY) = 0.3$$

$$D(X) = D(Y) = 0.5 \times 0.5 = 0.25$$

$$\text{总之 } \rho = \frac{0.3 - 0.25}{0.5 \cdot 0.5} = \frac{1}{5}.$$



(方法二) $\rho = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$, 显然 X, Y, XY 取值均为 0 和 1.

$$\text{这就有 } E(X) = P\{X=1\} = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= P\{Y=1\} = P\{X=0\}P\{Y=1|X=0\} + P\{X=1\}P\{Y=1|X=1\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$E(XY) = P\{XY=1\} = P\{X=1, Y=1\} = P\{X=1\}P\{Y=1|X=1\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

$$D(X) = D(Y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\rho = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \frac{0.3 - 0.25}{0.25} = \frac{1}{5}.$$

三、解答题

$$(17) \text{【解】} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\alpha \arctan \frac{1}{x} + (1 + |x|)^{\frac{1}{\alpha}} \right] = \alpha \cdot \frac{\pi}{2} + e,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\alpha \arctan \frac{1}{x} + (1 + |x|)^{\frac{1}{\alpha}} \right] = -\alpha \cdot \frac{\pi}{2} + e^{-1},$$

$$\text{则 } \alpha \cdot \frac{\pi}{2} + e = -\alpha \cdot \frac{\pi}{2} + e^{-1},$$

$$\begin{aligned} \alpha\pi &= e^{-1} - e \\ \alpha &= \frac{e^{-1} - e}{\pi} \end{aligned}$$

$$(18) \text{【解】} f(x, y) = 2\ln|x| + \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{y^2}{2x^2},$$

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} - \frac{y^2}{x^3} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x^2} = 0, \end{cases} \quad \text{得驻点为 } \left(\frac{1}{2}, 0\right), (-1, 0).$$

$$\text{而 } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4} + \frac{3y^2}{x^4}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{2y}{x^3}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2}.$$

在 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 处,

$$A = 24 > 0, B = 0, C = 4$$

$$\Delta = B^2 - AC = -96 < 0$$

$$\text{取极小值 } f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{2} - 2\ln 2.$$

在 $(-1, 0)$ 处,

$$A = 3 > 0, B = 0, C = 1$$

$$\Delta = B^2 - AC = -4 < 0$$

$$\text{取极小值 } f(-1, 0) = 2.$$

(19)【解】 用极坐标

$$\iint_D e^{(x+y)^2} (x^2 - y^2) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 e^{r^2(\sin\theta + \cos\theta)^2} r^2 \cos 2\theta \cdot r dr$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta \int_0^1 e^{[r(\sin \theta + \cos \theta)]^2} \cdot r^2 dr^2 \\
\text{而 } \int_0^1 e^{[r(\sin \theta + \cos \theta)]^2} r^2 dr^2 &= \frac{u = [r(\sin \theta + \cos \theta)]^2}{(\sin \theta + \cos \theta)^4} \int_0^{(\sin \theta + \cos \theta)^2} u e^u du \\
&= \frac{1}{(\sin \theta + \cos \theta)^4} (u - 1) e^u \Big|_0^{(\sin \theta + \cos \theta)^2} \\
&= \frac{1}{(\sin \theta + \cos \theta)^4} [(\sin \theta + \cos \theta)^2 - 1] e^{(\sin \theta + \cos \theta)^2} + \frac{1}{(\sin \theta + \cos \theta)^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{所以原式} &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta} e^{(\sin \theta + \cos \theta)^2} d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos \theta - \sin \theta}{(\sin \theta + \cos \theta)^3} [e^{(\sin \theta + \cos \theta)^2} - 1] d\theta \\
&= \frac{t = \sin \theta + \cos \theta}{2} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{t} e^{t^2} dt - \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{t^3} (e^{t^2} - 1) dt \\
&= \frac{1}{4} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{t^2} d e^{t^2} - \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{t^3} e^{t^2} dt + \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{t^3} dt \\
&= \frac{1}{4} \frac{e^{t^2}}{t^2} \Big|_1^{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{t^3} e^{t^2} dt - \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{t^3} e^{t^2} dt + \frac{1}{8} \\
&= \frac{1}{8} e^2 - \frac{1}{4} e + \frac{1}{8} \\
&= \frac{1}{8} (e - 1)^2.
\end{aligned}$$

【评注】 本题在计算重积分过程中,还可考虑利用 $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + \sin 2\theta$ 的变形去计算.

(20)【解】 (I) 已知方程为 $y' - \frac{n+1}{x}y = 0$, 为一阶齐次线性微分方程, 其通解为

$$y_n(x) = C e^{\int \frac{n+1}{x} dx} = C x^{n+1}$$

代入初值条件 $y_n(1) = \frac{1}{n(n+1)}$, 可得 $C = \frac{1}{n(n+1)}$,

$$\text{故 } y_n(x) = \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1}.$$

(II) 对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$, 因为 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = 1$, 所以其收敛半径 $R = 1$,

当 $x = \pm 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^{n+1}}{n(n+1)}$ 均收敛, 因此该级数的收敛域为 $[-1, 1]$.

$$\text{设 } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}, \text{ 则 } S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, S''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x},$$

$$\text{从而有 } S'(x) = \int_0^x S''(t) dt + S'(0) = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x),$$

$$S(x) = \int_0^x S'(t) dt + S(0) = \int_0^x -\ln(1-t) dt = (1-x)\ln(1-x) + x, x \in [-1, 1],$$

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, } S(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

因此和函数



$$S(x) = \begin{cases} (1-x)\ln(1-x) + x, & x \in [-1, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

(21)【解】 由特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ -1 & -a & \lambda - b \end{vmatrix} = (\lambda - b)(\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

因为 A 只有两个不同的特征值, 所以 $b = 1$ 或 $b = 3$.

(1) 当 $b = 1$ 时, A 的特征值为 $1, 1, 3$.

由于 $A \sim \Lambda$, 那么 $r(E - A) = 1$.

$$E - A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -a & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $a = 1$ 且 $\lambda = 1$ 的特征向量为 $\alpha_1 = (-1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (0, 0, 1)^T$.

再解 $(3E - A)x = 0$ 得 $\lambda = 3$ 的特征向量 $\alpha_3 = (1, 1, 1)^T$.

$$\text{令 } P_1 = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 有 } P_1^{-1}AP_1 = \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{bmatrix}.$$

(2) 当 $b = 3$ 时, A 的特征值为 $1, 3, 3$.

由 $A \sim \Lambda$ 则 $r(3E - A) = 1$.

$$3E - A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -a & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $a = -1$. 解出特征向量 $\beta_1 = (1, 1, 0)^T, \beta_2 = (0, 0, 1)^T$.

再解 $(E - A)x = 0$ 得 $\lambda = 1$ 的特征向量 $\beta_3 = (-1, 1, 1)^T$.

$$\text{令 } P_2 = [\beta_1, \beta_2, \beta_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 有 } P_2^{-1}AP_2 = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

(22)【解】 (I) $X + Y = 2, X < Y, X \sim U(0, 1)$,

故 $X \sim f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

(II) $X + Y = 2, Y = 2 - X, Z = \frac{Y}{X} = \frac{2 - X}{X}$,

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\left\{\frac{2 - X}{X} \leq z\right\}.$$

① $z < 1, F_Z(z) = 0$;

② $1 \leq z, F_Z(z) = P\left\{X \geq \frac{2}{z+1}\right\} = 1 - \frac{2}{z+1}$,

$$\text{总之 } F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 1, \\ 1 - \frac{2}{z+1}, & z \geq 1, \end{cases} \quad f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} \frac{2}{(z+1)^2}, & z \geq 1, \\ 0, & z < 1, \end{cases}$$

$$\text{(III)} E\left(\frac{X}{Y}\right) = E\left(\frac{X}{2-X}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{2-x} f_X(x) dx = \int_0^1 \frac{x}{2-x} dx = 2\ln 2 - 1.$$

第二篇

历年真题

2020 年全国硕士研究生招生考试 数学(三) 试题

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.)

(1) 设 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - a}{x - a} = b$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin f(x) - \sin a}{x - a}$

- (A) $b \sin a$. (B) $b \cos a$. (C) $b \sin f(a)$. (D) $b \cos f(a)$.

P60, 14 题

(2) 函数 $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln |1+x|}{(e^x - 1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为

- (A) 1. (B) 2.
(C) 3. (D) 4.

答案对应的
页码与题号

P82, 33 题

(3) 设奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有连续导数, 则

- (A) $\int_0^x [\cos f(t) + f'(t)] dt$ 是奇函数. (B) $\int_0^x [\cos f(t) + f'(t)] dt$ 是偶函数.
(C) $\int_0^x [\cos f'(t) + f(t)] dt$ 是奇函数. (D) $\int_0^x [\cos f'(t) + f(t)] dt$ 是偶函数.

P140, 13 题

(4) 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-2)^n$ 的收敛区间为 $(-2, 6)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^{2n}$ 的收敛区间为

- (A) $(-2, 6)$. (B) $(-3, 1)$. (C) $(-5, 3)$. (D) $(-17, 15)$.

P202, 9 题

(5) 设四阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 不可逆, a_{12} 的代数余子式 $A_{12} \neq 0$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为矩阵 A 的列向量组, A^* 为 A 的伴随矩阵, 则方程组 $A^*x = 0$ 的通解为

- (A) $x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$, 其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数.
(B) $x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_4$, 其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数.
(C) $x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_3 + k_3\alpha_4$, 其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数.
(D) $x = k_1\alpha_2 + k_2\alpha_3 + k_3\alpha_4$, 其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数.

P260, 2 题

(6) 设 A 为三阶矩阵, α_1, α_2 为 A 的属于特征值 1 的线性无关的特征向量, α_3 为 A 的属于特征值 -1 的

特征向量, 则满足 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的可逆矩阵 P 为

- (A) $[\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2, -\alpha_3]$. (B) $[\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, -\alpha_3]$.
(C) $[\alpha_1 + \alpha_3, -\alpha_3, \alpha_2]$. (D) $[\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_2]$.

P290, 11 题



(7) 设 A, B, C 为三个随机事件, 且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(AB) = 0, P(AC) = P(BC) = \frac{1}{12}$, 则 A, B, C 中恰有一个事件发生的概率为

- (A) $\frac{3}{4}$. (B) $\frac{2}{3}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{5}{12}$. P312, 9 题

(8) 设随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布 $N(0, 0; 1, 4; -\frac{1}{2})$, 则下列随机变量中服从标准正态分布且与 X 独立的是

- (A) $\frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)$. (B) $\frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)$. (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$. (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$. P322, 6 题

二、填空题(9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.)

(9) 设 $z = \arctan[xy + \sin(x+y)]$, 则 $dz|_{(0, \pi)} =$ _____. P165, 10 题

(10) 曲线 $x + y + e^{2xy} = 0$ 在点 $(0, -1)$ 处的切线方程为 _____. P93, 10 题

(11) 设某厂家生产某产品的产量为 Q , 成本 $C(Q) = 100 + 13Q$, 设该产品的单价为 p , 需求量 $q(p) = \frac{800}{p+3} - 2$, 则该厂家获得最大利润时的产量为 _____. P125, 43 题

(12) 设平面区域 $D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x}{2} \leq y \leq \frac{1}{1+x^2}, 0 \leq x \leq 1 \right\}$, 则 D 绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为 _____. P153, 23 题

(13) 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} =$ _____. P225, 3 题

(14) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X = k\} = \frac{1}{2^k}, k = 1, 2, 3, \dots$. Y 表示 X 被 3 除的余数, 则 $E(Y) =$ _____. P336, 10 题

三、解答题(15 ~ 23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

已知 a, b 为常数, 若 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e$ 与 $\frac{b}{n^a}$ 在 $n \rightarrow \infty$ 时是等价无穷小, 求 a, b . P78, 29 题

(16) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - xy$ 的极值. P170, 17 题

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $y = f(x)$ 满足 $y'' + 2y' + 5y = 0$, 且 $f(0) = 1, f'(0) = -1$.

(I) 求 $f(x)$ 的表达式;

(II) 设 $a_n = \int_{n\pi}^{+\infty} f(x) dx$, 求 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. P218, 6 题



(18) (本题满分 10 分)

设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$, 连续函数 $f(x, y)$ 满足

$$f(x, y) = y \sqrt{1 - x^2} + x \iint_D f(x, y) dx dy$$

求 $\iint_D x f(x, y) dx dy$.

P185, 9 题

(19) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上具有连续导数, $f(0) = f(2) = 0, M = \max_{x \in [0, 2]} \{|f(x)|\}$, 证明:(I) 存在 $\xi \in (0, 2)$, 使得 $|f'(\xi)| \geq M$;(II) 若对任意的 $x \in (0, 2), |f'(x)| \leq M$, 则 $M = 0$.

P117, 33 题

(20) (本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$ 经正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1, y_2) = ay_1^2 + 4y_1y_2 + by_2^2$, 其中 $a \geq b$.(I) 求 a, b 值;(II) 求正交矩阵 Q .

P304, 11 题

(21) (本题满分 11 分)

设 A 为二阶矩阵, $P = [\alpha, A\alpha]$, 其中 α 是非零向量且不是 A 的特征向量.(I) 证明 P 为可逆矩阵;(II) 若 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$. 求 $P^{-1}AP$, 并判断 A 是否相似于对角矩阵.

P284, 7 题

(22) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) \mid 0 < y < \sqrt{1 - x^2}\}$ 上服从均匀分布, 令

$$Z_1 = \begin{cases} 1, & X - Y > 0, \\ 0, & X - Y \leq 0, \end{cases} \quad Z_2 = \begin{cases} 1, & X + Y > 0 \\ 0, & X + Y \leq 0 \end{cases}$$

(I) 求二维随机变量 (Z_1, Z_2) 的概率分布;(II) 求 Z_1 与 Z_2 的相关系数.

P342, 16 题

(23) (本题满分 11 分)

设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-(\frac{t}{\theta})^m}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 θ, m 为参数且大于零.(I) 求概率 $P\{T > t\}$ 与 $P\{T > s+t \mid T > s\}$, 其中 $s > 0, t > 0$;(II) 任取 n 个这种元件做寿命试验, 测得它们的寿命分别为 $t_1, t_2, \dots, t_n$, 若 m 已知, 求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.

P355, 8 题



2019 年全国硕士研究生招生考试 数学(三) 试题

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.)

- (1) 当 $x \rightarrow 0$ 时,若 $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小,则 $k =$
 (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4. P72, 23 题
- (2) 已知方程 $x^5 - 5x + k = 0$ 有 3 个不同的实根,则 k 的取值范围是
 (A) $(-\infty, -4)$. (B) $(4, +\infty)$. (C) $\{-4, 4\}$. (D) $(-4, 4)$. P111, 29 题
- (3) 已知微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + e^x$,则 a, b, c 依次为
 (A) 1, 0, 1. (B) 1, 0, 2. (C) 2, 1, 3. (D) 2, 1, 4. P218, 5 题
- (4) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} nu_n$ 绝对收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n}$ 条件收敛,则
 (A) $\sum_{n=1}^{\infty} u_nv_n$ 条件收敛. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_nv_n$ 绝对收敛.
 (C) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛. (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 发散. P199, 7 题
- (5) 设 A 是四阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵,若线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系中只有 2 个向量,则 $r(A^*) =$
 (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. P259, 1 题
- (6) 设 A 是三阶实对称矩阵, E 是三阶单位矩阵. 若 $A^2 + A = 2E$, 且 $|A| = 4$, 则二次型 $x^T Ax$ 的规范形为
 (A) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$. (B) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.
 (C) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$. (D) $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$. P304, 10 题
- (7) 设 A, B 为随机事件,则 $P(A) = P(B)$ 的充分必要条件是
 (A) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. (B) $P(AB) = P(A)P(B)$.
 (C) $P(A\bar{B}) = P(B\bar{A})$. (D) $P(AB) = P(\bar{A}\bar{B})$. P312, 8 题
- (8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且都服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P\{|X - Y| < 1\}$
 (A) 与 μ 无关,而与 σ^2 有关. (B) 与 μ 有关,而与 σ^2 无关.
 (C) 与 μ, σ^2 都有关. (D) 与 μ, σ^2 都无关. P317, 5 题
- 二、填空题(9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分.)
- (9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right]^n =$. P65, 18 题
- (10) 曲线 $y = x \sin x + 2 \cos x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \right)$ 的拐点坐标为 . P102, 22 题



(11) 已知函数 $f(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^4} dt$, 则 $\int_0^1 x^2 f(x) dx =$ _____.

P135, 8 题

(12) 以 p_A, p_B 分别表示 A, B 两个商品的价格, 设商品 A 的需求函数 $Q_A = 500 - p_A^2 - p_A p_B + 2p_B^2$, 则当 $p_A = 10, p_B = 20$ 时, 商品 A 的需求量对自身价格弹性 $\eta_{AA} (\eta_{AA} > 0) =$ _____.

P124, 42 题

(13) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a^2 - 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$, 若线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多个解, 则 $a =$ _____.

P271, 13 题

(14) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ $F(x)$ 为 X 的分布函数, $E(X)$ 为 X 的

数学期望, 则 $P\{F(X) > E(X) - 1\} =$ _____.

P335, 9 题

三、解答题(15 ~ 23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^{2x}, & x > 0, \\ xe^x + 1, & x \leq 0, \end{cases}$ 求 $f'(x)$, 并求 $f(x)$ 的极值.

P97, 14 题

(16) (本题满分 10 分)

设函数 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x, y) = xy - f(x+y, x-y)$.

求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

P164, 9 题

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y' - xy = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(1) = \sqrt{e}$ 的特解.

(I) 求 $y(x)$;

(II) 设平面区域 $D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq y(x)\}$, 求 D 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

P222, 10 题

(18) (本题满分 10 分)

求曲线 $y = e^{-x} \sin x (x \geq 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

P153, 22 题



(19) (本题满分 10 分)

设 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx (n = 0, 1, 2, \dots)$.

(I) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2} (n = 2, 3, \dots)$;

(II) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$.

P66, 19 题

(20) (本题满分 11 分)

已知向量组 I: $\alpha_1 = (1, 1, 4)^T, \alpha_2 = (1, 0, 4)^T, \alpha_3 = (1, 2, a^2 + 3)^T$

II: $\beta_1 = (1, 1, a+3)^T, \beta_2 = (0, 2, 1-a)^T, \beta_3 = (1, 3, a^2+3)^T$

若向量组 I 与向量组 II 等价, 求 a 的取值, 并将 β_3 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

P250, 3 题

(21) (本题满分 11 分)

已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ 与 $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$ 相似.

(I) 求 x, y ;

(II) 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$.

P289, 10 题

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从参数为 1 的指数分布, Y 的概率分布为 $P\{Y=-1\} = p, P\{Y=1\} = 1-p (0 < p < 1)$, 令 $Z = XY$.

(I) 求 Z 的概率密度;

(II) p 为何值时, X 与 Z 不相关?

(III) X 与 Z 是否相互独立?

P321, 5 题

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \sigma^2) = \begin{cases} \frac{A}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x \geq \mu \\ 0, & x < \mu \end{cases}$$

其中 μ 是已知参数, $\sigma > 0$ 是未知参数, A 是常数. $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求 A ;

(II) 求 σ^2 的最大似然估计量.

P354, 7 题



2018 年全国硕士研究生招生考试 数学(三) 试题

一、选择题(1~8 小题,每小题 1 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.)

(1) 下列函数中,在 $x=0$ 处不可导的是

(A) $f(x) = |x| \sin |x|$.

(B) $f(x) = |x| \sin \sqrt{|x|}$.

(C) $f(x) = \cos |x|$.

(D) $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$.

P87, 3 题

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导,且 $\int_0^1 f(x) dx = 0$, 则

(A) 当 $f'(x) < 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$.

(B) 当 $f''(x) < 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$.

(C) 当 $f'(x) > 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$.

(D) 当 $f''(x) > 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$.

P106, 26 题

(3) 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx$, $K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sqrt{\cos x}) dx$, 则

(A) $M > N > K$.

(B) $M > K > N$.

(C) $K > M > N$.

(D) $K > N > M$.

P135, 7 题

(4) 设某产品的成本函数 $C(Q)$ 可导,其中 Q 为产量.若产量为 Q_0 时平均成本最小,则

(A) $C'(Q_0) = 0$.

(B) $C'(Q_0) = C(Q_0)$.

(C) $C'(Q_0) = Q_0 C(Q_0)$.

(D) $Q_0 C'(Q_0) = C(Q_0)$.

P124, 41 题

(5) 下列矩阵中,与矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 相似的为

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

P283, 6 题

(6) 设 A, B 为 n 阶矩阵,记 $r(X)$ 为矩阵 X 的秩, $\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}$ 表示分块矩阵,则

(A) $r\begin{pmatrix} A & AB \end{pmatrix} = r(A)$.

(B) $r\begin{pmatrix} A & BA \end{pmatrix} = r(A)$.

(C) $r\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} = \max\{r(A), r(B)\}$.

(D) $r\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A^T & B^T \end{pmatrix}$.

P243, 6 题

(7) 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x) = f(1-x)$, 且 $\int_0^2 f(x) dx = 0.6$, 则 $P\{X < 0\} =$

(A) 0.2.

(B) 0.3.

(C) 0.4.

(D) 0.5.

P316, 4 题



(8) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2) (\sigma > 0)$ 的简单随机样本, 令

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}, S^* = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}$$

则

(A) $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t(n).$

(B) $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t(n-1).$

(C) $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S^*} \sim t(n).$

(D) $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S^*} \sim t(n-1).$

P349, 8 题

二、填空题(9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.)

(9) 曲线 $y = x^2 + 2\ln x$ 在其拐点处的切线方程是_____.

P102, 21 题

(10) $\int e^x \arcsin \sqrt{1 - e^{2x}} dx =$ _____.

P128, 3 题

(11) 差分方程 $\Delta^2 y_x - y_x = 5$ 的通解是_____.

P220, 8 题

(12) 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x + \Delta x) - f(x) = 2xf(x)\Delta x + o(\Delta x) (\Delta x \rightarrow 0)$, 且 $f(0) = 2$, 则 $f(1) =$ _____.

P216, 2 题

(13) 设 A 为三阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性无关的向量组, 若 $A\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2, A\alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_3$, 则 $|A| =$ _____.

P255, 7 题

(14) 随机事件 A, B, C 相互独立, 且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, 则 $P(AC | A \cup B) =$ _____.

P312, 7 题

三、解答题(15 ~ 23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

已知实数 a, b 满足 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(ax + b)e^{\frac{1}{x}} - x] = 2$, 求 a, b .

P71, 22 题

(16) (本题满分 10 分)

设平面区域 D 由曲线 $y = \sqrt{3(1 - x^2)}$ 与直线 $y = \sqrt{3}x$ 及 y 轴围成, 计算二重积分 $\iint_D x^2 dx dy$.

P184, 8 题

(17) (本题满分 10 分)

将长为 2m 的铁丝分成三段, 依次围成圆、正方形与正三角形. 三个图形的面积之和是否存在最小值? 若存在, 求出最小值.

P170, 16 题

(18) (本题满分 10 分)

已知 $\cos 2x - \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n (-1 < x < 1)$, 求 a_n .

P211, 13 题



(19) (本题满分 10 分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1 (n = 1, 2, \dots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

P65, 17 题

(20) (本题满分 11 分)

设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + ax_3)^2$, 其中 a 是参数.

(I) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解;(II) 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形.

P303, 9 题

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

(21) (本题满分 11 分)

已知 a 是常数, 且矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{bmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

(I) 求 a ;(II) 求满足 $AP = B$ 的可逆矩阵 P .

P270, 12 题

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P\{X = 1\} = P\{X = -1\} = \frac{1}{2}$, Y 服从参数为

 λ 的泊松分布. 令 $Z = XY$.(I) 求 $\text{Cov}(X, Z)$;(II) 求 Z 的概率分布.

P339, 13 题

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \sigma) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}}, -\infty < x < +\infty$$

其中 $\sigma \in (0, +\infty)$ 为未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本. 记 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$.

(I) 求 $\hat{\sigma}$;(II) 求 $E(\hat{\sigma})$ 和 $D(\hat{\sigma})$.

P354, 6 题



2017 年全国硕士研究生招生考试 数学(三) 试题

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.)

(1) 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax}, & x > 0, \\ b, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续,则

(A) $ab = \frac{1}{2}$.

(B) $ab = -\frac{1}{2}$.

(C) $ab = 0$.

(D) $ab = 2$.

P82, 32 题

(2) 二元函数 $z = xy(3 - x - y)$ 的极值点是

(A) $(0, 0)$.

(B) $(0, 3)$.

(C) $(3, 0)$.

(D) $(1, 1)$. P169, 15 题

(3) 设函数 $f(x)$ 可导,且 $f(x)f'(x) > 0$, 则

(A) $f(1) > f(-1)$.

(B) $f(1) < f(-1)$.

(C) $|f(1)| > |f(-1)|$.

(D) $|f(1)| < |f(-1)|$.

P96, 13 题

(4) 若级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \left[\sin \frac{1}{n} - k \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right]$ 收敛, 则 $k =$

(A) 1.

(B) 2.

(C) -1.

(D) -2.

P199, 6 题

(5) 设 α 为 n 维单位列向量, E 为 n 阶单位矩阵, 则

(A) $E - \alpha\alpha^T$ 不可逆.

(B) $E + \alpha\alpha^T$ 不可逆.

(C) $E + 2\alpha\alpha^T$ 不可逆.

(D) $E - 2\alpha\alpha^T$ 不可逆.

P238, 5 题

(6) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 则

(A) A 与 C 相似, B 与 C 相似.

(B) A 与 C 相似, B 与 C 不相似.

(C) A 与 C 不相似, B 与 C 相似.

(D) A 与 C 不相似, B 与 C 不相似. P283, 5 题

(7) 设 A, B, C 为三个随机事件, 且 A 与 C 相互独立, B 与 C 相互独立, 则 $A \cup B$ 与 C 相互独立的充分必要条件是

(A) A 与 B 相互独立.

(B) A 与 B 互不相容.

(C) AB 与 C 相互独立.

(D) AB 与 C 互不相容.

P311, 6 题

(8) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(\mu, 1)$ 的简单随机样本, 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 则下列结论中不正确的是

(A) $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布.

(B) $2(X_n - X_1)^2$ 服从 χ^2 分布.

(C) $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 服从 χ^2 分布.

(D) $n(\bar{X} - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布.

P348, 7 题

答案对应的
页码与题号



二、填空题(9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.)

(9) $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^3 x + \sqrt{\pi^2 - x^2}) dx =$ _____.

P135, 6 题

(10) 差分方程 $y_{t+1} - 2y_t = 2^t$ 通解为 $y_t =$ _____.

P220, 7 题

(11) 设生产某产品的平均成本 $\bar{C}(Q) = 1 + e^{-Q}$, 其中 Q 为产量, 则边际成本为 _____.

P124, 40 题

(12) 设函数 $f(x, y)$ 具有一阶连续偏导数, 且 $df(x, y) = ye^y dx + x(1+y)e^y dy$, $f(0, 0) = 0$,

则 $f(x, y) =$ _____.

P164, 8 题

(13) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性无关的 3 维列向量组, 则向量组 $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ 的秩为 _____.

P257, 8 题

(14) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X = -2\} = \frac{1}{2}$, $P\{X = 1\} = a$, $P\{X = 3\} = b$, 若 $E(X) = 0$,

则 $D(X) =$ _____.

P334, 7 题

三、解答题(15 ~ 23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt}{\sqrt{x^3}}$.

P59, 13 题

(16) (本题满分 10 分)

计算积分 $\iint_D \frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2} dx dy$, 其中 D 是第一象限中以曲线 $y = \sqrt{x}$ 与 x 轴为边界的无界区域.

P184, 7 题

(17) (本题满分 10 分)

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$.

P64, 16 题

(18) (本题满分 10 分)

已知方程 $\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = k$ 在区间 $(0, 1)$ 内有实根, 确定常数 k 的取值范围.

P110, 28 题



(19) (本题满分 10 分)

设 $a_0 = 1, a_1 = 0, a_{n+1} = \frac{1}{n+1}(na_n + a_{n-1}) (n = 1, 2, 3, \dots)$, $S(x)$ 为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数.

(I) 证明幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径不小于 1;

(II) 证明 $(1-x)S'(x) - xS(x) = 0 (x \in (-1, 1))$, 并求 $S(x)$ 表达式.

P207, 12 题

(20) (本题满分 11 分)

设三阶矩阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 有 3 个不同的特征值, 且 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$.

(I) 证明 $r(A) = 2$;

(II) 若 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 求方程组 $Ax = \beta$ 的通解.

P270, 11 题

(21) (本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2x_3$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$, 求 a 的值及一个正交矩阵 Q .

P302, 8 题

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X, Y 相互独立, 且 X 的概率分布为 $P\{X=0\} = P\{X=2\} = \frac{1}{2}$, Y 的概率密度

为 $f(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

(I) 求 $P\{Y \leq E(Y)\}$;

(II) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

P334, 8 题

(23) (本题满分 11 分)

某工程师为了解一台天平的精度, 用该天平对一物体的质量做 n 次测量, 该物体的质量 μ 是已知的. 设 n 次测量结果 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$. 该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i = |X_i - \mu| (i = 1, 2, \dots, n)$, 利用 $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ 估计 σ .

(I) 求 Z_1 的概率密度;

(II) 利用一阶矩求 σ 的矩估计量;

(III) 求 σ 的最大似然估计量.

P352, 5 题

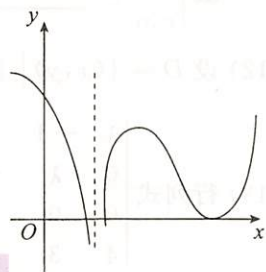


2016 年全国硕士研究生招生考试 数学(三) 试题

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.)

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续,其导函数的图形如图所示,则

- (A) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点,曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点.
 (B) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点,曲线 $y = f(x)$ 有 3 个拐点.
 (C) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点,曲线 $y = f(x)$ 有 1 个拐点.
 (D) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点,曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点.



P101, 20 题

(2) 已知函数 $f(x, y) = \frac{e^x}{x-y}$, 则

- (A) $f'_x - f'_y = 0$.
 (B) $f'_x + f'_y = 0$.
 (C) $f'_x - f'_y = f$.
 (D) $f'_x + f'_y = f$.

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)

P133, 6 题

(3) 设 $J_i = \iint_{D_i} \sqrt{x-y} dx dy$ ($i = 1, 2, 3$), 其中 $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$,

$D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$, $D_3 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$, 则

- (A) $J_1 < J_2 < J_3$.
 (B) $J_3 < J_1 < J_2$.
 (C) $J_2 < J_3 < J_1$.
 (D) $J_2 < J_1 < J_3$.

P179, 2 题

(4) 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \sin(n+k)$ (k 为常数)

- (A) 绝对收敛.
 (B) 条件收敛.
 (C) 发散.
 (D) 收敛性与 k 有关.

P199, 5 题

(5) 设 A, B 是可逆矩阵, 且 A 与 B 相似, 则下列结论错误的是

- (A) A^T 与 B^T 相似.
 (B) A^{-1} 与 B^{-1} 相似.
 (C) $A + A^T$ 与 $B + B^T$ 相似.
 (D) $A + A^{-1}$ 与 $B + B^{-1}$ 相似.

P282, 4 题

(6) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别为 1, 2, 则

- (A) $a > 1$.
 (B) $a < -2$.
 (C) $-2 < a < 1$.
 (D) $a = 1$ 或 $a = -2$.

P302, 7 题

(7) 设 A, B 为两个随机事件, 且 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$, 如果 $P(A|B) = 1$, 则

- (A) $P(\bar{B}|\bar{A}) = 1$.
 (B) $P(A|\bar{B}) = 0$.
 (C) $P(A \cup B) = 1$.
 (D) $P(B|A) = 1$.

P311, 5 题

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim N(1, 2), Y \sim N(1, 4)$, 则 $D(XY) =$

- (A) 6.
 (B) 8.
 (C) 14.
 (D) 15.

P333, 6 题



二、填空题(9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分.)

(9) 已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1} = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ _____. P59, 11 题

(10) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{1}{n} + 2\sin \frac{2}{n} + \cdots + n\sin \frac{n}{n} \right) =$ _____. P64, 15 题

(11) 设函数 $f(u, v)$ 可微, $z = z(x, y)$ 由方程 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$ 确定, 则

$\left. \frac{dz}{dx} \right|_{(0,1)} =$ _____. P163, 7 题

(12) 设 $D = \{(x, y) \mid |x| \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}$ 则 $\iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy =$ _____. P189, 13 题

(13) 行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} =$ _____. P225, 2 题

(14) 设袋中有红、白、黑球各 1 个, 从中有放回地取球, 每次取 1 个, 直到三种颜色的球都取到时停止, 则取球次数恰好为 4 的概率为 _____. P314, 10 题

三、解答题(15~23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

P59, 12 题

(16) (本题满分 10 分)

设某商品最大需求量为 1 200 件, 该商品的需求函数 $Q = Q(p)$, 需求弹性 $\eta = \frac{p}{120-p} (\eta > 0)$, p 为单价(万元).

(I) 求需求函数的表达式;

(II) 求 $p = 100$ 万元时的边际收益, 并说明其经济意义.

P123, 39 题

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = \int_0^1 |t^2 - x^2| dt (x > 0)$, 求 $f'(x)$, 并求 $f(x)$ 的最小值.

P96, 12 题

(18) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 连续, 且满足 $\int_0^x f(x-t) dt = \int_0^x (x-t) f(t) dt + e^{-x} - 1$, 求 $f(x)$.

P140, 12 题



(19) (本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ 的收敛域及和函数.

P206, 11 题

(20) (本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a-2 \end{bmatrix}$, 且方程组 $Ax = \beta$ 无解,

(I) 求 a 的值;(II) 求方程组 $A^T Ax = A^T \beta$ 的通解.

P269, 10 题

(21) (本题满分 11 分)

已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(I) 求 A^{99} ;

(II) 设三阶矩阵 $B = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 满足 $B^2 = BA$, 记 $B^{100} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]$, 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 分别表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合.

P288, 9 题

(22) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布, 令

$$U = \begin{cases} 1, & X \leq Y \\ 0, & X > Y \end{cases}$$

(I) 写出 (X, Y) 的概率密度;(II) 请问 U 与 X 是否相互独立? 并说明理由;(III) 求 $Z = U + X$ 的分布函数 $F(z)$.

P324, 9 题

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3}, & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $\theta \in (0, +\infty)$ 为未知参数, X_1, X_2, X_3 为来自总体 X 的简单随机样本, 令 $T = \max(X_1, X_2, X_3)$.

(I) 求 T 的概率密度;(II) 确定 a , 使得 $E(aT) = \theta$.

P352, 4 题



2015 年全国硕士研究生招生考试 数学(三) 试题

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.)

(1) 设 $\{x_n\}$ 是数列,下列命题中不正确的是

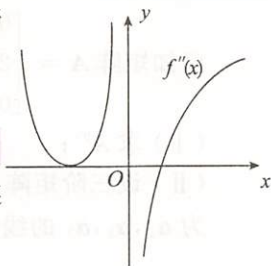
- (A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$.
 (B) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.
 (C) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$.
 (D) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

P53, 3 题

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续,其二阶导函数 $f''(x)$ 的图形如图所示,则曲线 $y = f(x)$ 的拐点个数

- (A) 0. (B) 1.
 (C) 2. (D) 3.

P101, 19 题



(3) 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x, x^2 + y^2 \leq 2y\}$, 函数 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 则 $\iint_D f(x, y) dx dy =$

- (A) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$.
 (B) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$.
 (C) $2 \int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^x f(x, y) dy$.
 (D) $2 \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy$.

P183, 6 题

(4) 下列级数中发散的是

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
 (C) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{\ln n}$. (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

P198, 4 题

(5) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{bmatrix}$, 若集合 $\Omega = \{1, 2\}$, 则线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解的充分必要条件为

- (A) $a \notin \Omega, d \notin \Omega$. (B) $a \notin \Omega, d \in \Omega$.
 (C) $a \in \Omega, d \notin \Omega$. (D) $a \in \Omega, d \in \Omega$.

P269, 9 题



- (6) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Py$ 下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 其中 $P = [e_1, e_2, e_3]$, 若 $Q = [e_1, -e_3, e_2]$, 则 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为

- (A) $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$. (B) $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.
(C) $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$. (D) $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

P301, 6 题

- (7) 若 A, B 为任意两个随机事件, 则

- (A) $P(AB) \leq P(A)P(B)$. (B) $P(AB) \geq P(A)P(B)$.
(C) $P(AB) \leq \frac{P(A) + P(B)}{2}$. (D) $P(AB) \geq \frac{P(A) + P(B)}{2}$.

P311, 4 题

- (8) 设总体 $X \sim B(m, \theta)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自该总体的简单随机样本, $\bar{X}$ 为样本均值, 则

$$E\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right] =$$

- (A) $(m-1)n\theta(1-\theta)$. (B) $m(n-1)\theta(1-\theta)$.
(C) $(m-1)(n-1)\theta(1-\theta)$. (D) $mn\theta(1-\theta)$.

P348, 6 题

二、填空题(9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.)

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} =$ _____.

P59, 10 题

(10) 设函数 $f(x)$ 连续, $\varphi(x) = \int_0^{x^2} xf(t)dt$, 若 $\varphi(1) = 1, \varphi'(1) = 5$, 则 $f(1) =$ _____.

P139, 11 题

(11) 若函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 确定, 则 $dz|_{(0,0)} =$ _____.

P163, 5 题

(12) 设函数 $y = y(x)$ 是微分方程 $y'' + y' - 2y = 0$ 的解, 且在 $x = 0$ 处 $y(x)$ 取得极值 3, 则 $y(x) =$ _____.

P218, 4 题

(13) 设三阶矩阵 A 的特征值为 2, -2, 1, $B = A^2 - A + E$, 其中 E 为三阶单位矩阵, 则行列式 $|B| =$ _____.

P278, 1 题

(14) 设二维随机变量 (X, Y) 服从正态分布 $N(1, 0; 1, 1; 0)$, 则 $P\{XY - Y < 0\} =$ _____.

P321, 4 题

三、解答题(15 ~ 23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

- (15) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = x + a \ln(1+x) + bx \sin x$, $g(x) = kx^3$, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 时是等价无穷小, 求 a, b, k 的值.

P77, 28 题

- (16) (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D x(x+y) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x^2\}$.

P189, 12 题



(17) (本题满分 10 分)

为了实现利润最大化, 厂商需要对某商品确定其定价模型, 设 Q 为该商品的需求量, p 为价格, MC 为边际成本, η 为需求弹性 ($\eta > 0$).

(I) 证明定价模型为 $p = \frac{MC}{1 - \frac{1}{\eta}}$;

(II) 若该商品的成本函数为 $C(Q) = 1600 + Q^2$, 需求函数为 $Q = 40 - p$, 试由 (I) 中的定价模型确定此商品的价格.

P123, 38 题

(18) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零. 若对任意的 $x_0 \in I$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与直线 $x = x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4, 且 $f(0) = 2$, 求 $f(x)$ 的表达式.

P93, 9 题

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

(19) (本题满分 10 分)

(I) 设函数 $u(x), v(x)$ 可导, 利用导数定义证明 $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;

(II) 设函数 $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ 可导, $f(x) = u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$, 写出 $f(x)$ 的求导公式.

P86, 2 题

(20) (本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$, 且 $A^3 = O$.

(I) 求 a 的值;

(II) 若矩阵 X 满足 $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$, 其中 E 为三阶单位矩阵, 求 X .

P246, 7 题



(21) (本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{bmatrix}$ 相似于矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$,

(I) 求 a, b 的值;

(II) 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

P287, 8 题

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x} \ln 2, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

对 X 进行独立重复的观测, 直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止, 记 Y 为观测次数.

(I) 求 Y 的概率分布;

(II) 求 $E(Y)$.

P333, 5 题

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{1-\theta}, & \theta \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 θ 为未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

(I) 求 θ 的矩估计量;

(II) 求 θ 的最大似然估计量.

P351, 3 题



2014 年全国硕士研究生招生考试 数学(三) 试题

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.)

(1) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 且 $a \neq 0$, 则当 n 充分大时有

(A) $|a_n| > \frac{|a|}{2}$.

(B) $|a_n| < \frac{|a|}{2}$.

(C) $a_n > a - \frac{1}{n}$.

(D) $a_n < a + \frac{1}{n}$.

P53, 2 题

(2) 下列曲线中有渐近线的是

(A) $y = x + \sin x$.

(B) $y = x^2 + \sin x$.

(C) $y = x + \sin \frac{1}{x}$.

(D) $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$.

P101, 18 题

(3) 设 $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 若 $p(x) - \tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小, 则下列选项中错误的是

(A) $a = 0$.

(B) $b = 1$.

(C) $c = 0$.

(D) $d = \frac{1}{6}$.

P77, 27 题

(4) 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数, $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$, 则在区间 $[0, 1]$ 上

(A) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$.

(B) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$.

(C) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$.

(D) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$.

P105, 25 题

(5) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$

(A) $(ad - bc)^2$.

(B) $-(ad - bc)^2$.

(C) $a^2 d^2 - b^2 c^2$.

(D) $b^2 c^2 - a^2 d^2$.

P224, 1 题

(6) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维向量, 则对任意常数 k, l , 向量组 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的

(A) 必要非充分条件.

(B) 充分非必要条件.

(C) 充分必要条件.

(D) 既非充分也非必要条件.

P255, 6 题

(7) 设随机事件 A 与 B 相互独立, 且 $P(B) = 0.5, P(A - B) = 0.3$, 则 $P(B - A) =$

(A) 0.1.

(B) 0.2.

(C) 0.3.

(D) 0.4.

P311, 3 题

(8) 设 X_1, X_2, X_3 为来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 则统计量 $S = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2} |X_3|}$ 服从的分布为

(A) $F(1, 1)$.

(B) $F(2, 1)$.

(C) $t(1)$.

(D) $t(2)$.

P347, 4 题



二、填空题(9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.)

(9) 设某商品的需求函数为 $Q = 40 - 2p$ (p 为商品的价格), 则该商品的边际收益为_____.

P123, 37 题

(10) 设 D 是由曲线 $xy + 1 = 0$ 与直线 $y + x = 0$ 及 $y = 2$ 围成的有界区域, 则 D 的面积为_____.

P153, 21 题

(11) 设 $\int_0^a x e^{2x} dx = \frac{1}{4}$, 则 $a =$ _____.

P134, 5 题

(12) 二次积分 $\int_0^1 dy \int_y^1 \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2} \right) dx =$ _____.

P193, 15 题

(13) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1, 则 a 的取值范围是_____.

P301, 5 题

(14) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{3\theta^2}, & \theta < x < 2\theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 θ 是未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 若 $E\left(c \sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \theta^2$,则 $c =$ _____.

P348, 5 题

三、解答题(15 ~ 23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

P58, 9 题

(16) (本题满分 10 分)

设平面内区域 $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, 计算

$$\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy$$

P188, 11 题

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有连续导数, 且 $z = f(e^x \cos y)$ 满足

$$\cos y \frac{\partial z}{\partial x} - \sin y \frac{\partial z}{\partial y} = (4z + e^x \cos y) e^x$$

若 $f(0) = 0$, 求 $f(u)$ 的表达式.

P175, 18 题

(18) (本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域及和函数.

P205, 10 题



(19) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 单调增加, $0 \leq g(x) \leq 1$. 证明:

$$(I) 0 \leq \int_a^x g(t) dt \leq x - a, x \in [a, b];$$

$$(II) \int_a^{a+\int_a^b g(t) dt} f(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

P147, 15 题

(20) (本题满分 11 分)

设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, E 为三阶单位矩阵.

(I) 求方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系;

(II) 求满足 $AB = E$ 的所有矩阵 B .

P268, 8 题

(21) (本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{bmatrix}$ 相似.

P282, 3 题

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\} = P\{X=2\} = \frac{1}{2}$, 在给定 $X=i$ 的条件下, 随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0, i) (i=1, 2)$.

(I) 求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$;

(II) 求 $E(Y)$.

P332, 4 题

(23) (本题满分 11 分)

设随机变量 X, Y 的概率分布相同, X 的概率分布为 $P\{X=0\} = \frac{1}{3}, P\{X=1\} = \frac{2}{3}$, 且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY} = \frac{1}{2}$.

(I) 求 (X, Y) 的概率分布;

(II) 求 $P\{X+Y \leq 1\}$.

P341, 15 题



2013 年全国硕士研究生招生考试 数学(三) 试题

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.)

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时,用“ $o(x)$ ”表示比 x 高阶的无穷小,则下列式子中错误的是

- (A) $x \cdot o(x^2) = o(x^3)$. (B) $o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3)$.
(C) $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$. (D) $o(x) + o(x^2) = o(x^2)$.

P76, 26 题

(2) 函数 $f(x) = \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

P81, 31 题

(3) 设 D_k 是圆域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ 位于第 k 象限的部分,记 $I_k = \iint_{D_k} (y-x) dx dy (k=1, 2, 3, 4)$, 则

- (A) $I_1 > 0$. (B) $I_2 > 0$.
(C) $I_3 > 0$. (D) $I_4 > 0$.

P179, 1 题

(4) 设 $\{a_n\}$ 为正项数列,下列选项正确的是

(A) 若 $a_n > a_{n+1}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛.

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛, 则 $a_n > a_{n+1}$.

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则存在常数 $p > 1$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n$ 存在.

(D) 若存在常数 $p > 1$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n$ 存在, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

P198, 3 题

(5) 设 A, B, C 均为 n 阶矩阵, 若 $AB = C$, 且 B 可逆, 则

- (A) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价.
(B) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价.
(C) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价.
(D) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价.

P250, 2 题

(6) 矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 相似的充分必要条件为

- (A) $a = 0, b = 2$. (B) $a = 0, b$ 为任意常数.
(C) $a = 2, b = 0$. (D) $a = 2, b$ 为任意常数.

P296, 15 题

(7) 设 X_1, X_2, X_3 是随机变量, 且 $X_1 \sim N(0, 1), X_2 \sim N(0, 2^2), X_3 \sim N(5, 3^2), p_i = P\{-2 \leq X_i \leq 2\} (i=1, 2, 3)$, 则

- (A) $p_1 > p_2 > p_3$. (B) $p_2 > p_1 > p_3$.
(C) $p_3 > p_1 > p_2$. (D) $p_1 > p_3 > p_2$.

P316, 3 题



(8) 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且 X 和 Y 的概率分布分别为

X	0	1	2	3
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

,

Y	-1	0	1
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则 $P\{X+Y=2\} =$

- (A) $\frac{1}{12}$. (B) $\frac{1}{8}$. (C) $\frac{1}{6}$. (D) $\frac{1}{2}$. P320, 3 题

二、填空题(9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.)

(9) 设曲线 $y = f(x)$ 与 $y = x^2 - x$ 在点 $(1, 0)$ 处有公共切线, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{n}{n+2}\right) =$. P92, 8 题

(10) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $(z+y)^x = xy$ 确定, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,2)} =$. P162, 4 题

(11) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx =$. P149, 16 题

(12) 微分方程 $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$ 的通解为 $y =$. P217, 3 题

(13) 设 $A = (a_{ij})$ 是三阶非零矩阵, $|A|$ 为 A 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若 $a_{ij} + A_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3)$ 则 $|A| =$. P230, 6 题

(14) 设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0, 1)$, 则 $E(Xe^{2X}) =$. P332, 3 题

三、解答题(15 ~ 23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小, 求 n 与 a 的值. P70, 21 题

(16) (本题满分 10 分)

设 D 是由曲线 $y = x^{\frac{1}{3}}$, 直线 $x = a (a > 0)$ 及 x 轴所围成的平面图形, V_x, V_y 分别是 D 绕 x 轴, y 轴旋转一周所得旋转体的体积, 若 $V_y = 10V_x$, 求 a 的值. P152, 20 题

(17) (本题满分 10 分)

设平面区域 D 由直线 $x = 3y, y = 3x$ 及 $x + y = 8$ 围成, 计算 $\iint_D x^2 dx dy$. P183, 5 题

(18) (本题满分 10 分)

设生产某产品的固定成本为 6 000 元, 可变成本为 20 元/件, 价格函数为 $p = 60 - \frac{Q}{1\,000}$ (p 是

单价, 单位: 元, Q 是销量, 单位: 件), 已知产销平衡, 求:

(I) 该商品的边际利润;

(II) 当 $p = 50$ 时的边际利润, 并解释其经济意义;

(III) 使得利润最大的定价 p .

P122, 36 题



(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0) = 0$ 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, 证明

(I) 存在 $a > 0$, 使得 $f(a) = 1$;

(II) 对 (I) 中的 a , 存在 $\xi \in (0, a)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{1}{a}$.

P116, 32 题

(20)(本题满分 11 分)

设 $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$, 当 a, b 为何值时, 存在矩阵 C 使得 $AC - CA = B$? 并求所有矩阵 C .

P267, 7 题

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$, 记

$$\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

(I) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$;

(II) 若 α, β 正交且均为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

P300, 4 题

(22)(本题满分 11 分)

设 (X, Y) 是二维随机变量, X 的边缘概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 在给定 $X =$

$x(0 < x < 1)$ 的条件下, Y 的条件概率密度为 $f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{3y^2}{x^3}, & 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

(I) 求 (X, Y) 的概率密度 $f(x, y)$;

(II) 求 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$;

(III) 求 $P\{X > 2Y\}$.

P328, 13 题

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 θ 为未知参数且大于零, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求 θ 的矩估计量;

(II) 求 θ 的最大似然估计量.

P350, 2 题



2012 年全国硕士研究生招生考试 数学(三) 试题

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.)

(1) 曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 渐近线的条数为

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

P100, 16 题

(2) 设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$, 其中 n 为正整数, 则 $f'(0) =$

- (A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$. (B) $(-1)^n(n-1)!$.
(C) $(-1)^{n-1}n!$. (D) $(-1)^nn!$.

P89, 5 题

(3) 设函数 $f(t)$ 连续, 则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\cos\theta}^2 f(r^2)rdr =$

- (A) $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} f(x^2+y^2) dy$. (B) $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2+y^2) dy$.
(C) $\int_0^2 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{x^2+y^2} f(x^2+y^2) dx$. (D) $\int_0^2 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x^2+y^2) dx$.

P193, 14 题

(4) 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n} \sin \frac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛, 则

- (A) $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$. (B) $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$.
(C) $1 < \alpha \leq \frac{3}{2}$. (D) $\frac{3}{2} < \alpha < 2$.

P197, 2 题

(5) 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$, 其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数, 则下列向量

组线性相关的为

- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$.
(C) $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$. (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

P255, 5 题

(6) 设 A 为三阶矩阵, P 为三阶可逆矩阵, 且 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. 若 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, $Q = [\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3]$, 则 $Q^{-1}AQ =$

- (A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

P235, 3 题

(7) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从区间 $(0, 1)$ 上的均匀分布, 则 $P\{X^2 + Y^2 \leq 1\} =$

- (A) $\frac{1}{4}$. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{\pi}{8}$. (D) $\frac{\pi}{4}$.

P323, 8 题



- (8) 设 X_1, X_2, X_3, X_4 为来自总体 $N(1, \sigma^2) (\sigma > 0)$ 的简单随机样本, 则统计量 $\frac{X_1 - X_2}{|X_3 + X_4 - 2|}$ 的分布为
- (A) $N(0, 1)$. (B) $t(1)$. (C) $\chi^2(1)$. (D) $F(1, 1)$.

P347, 3 题

二、填空题(9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{\cos x - \sin x}} =$ _____.

P57, 7 题

(10) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \ln \sqrt{x}, & x \geq 1, \\ 2x - 1, & x < 1, \end{cases}$ $y = f(f(x))$, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=e} =$ _____.

P89, 6 题

(11) 设连续函数 $z = f(x, y)$ 满足 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x, y) - 2x + y - 2}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = 0$, 则 $dz|_{(0,1)} =$ _____.

P162, 3 题

(12) 由曲线 $y = \frac{4}{x}$ 和直线 $y = x$ 及 $y = 4x$ 在第一象限中围成的平面图形的面积为 _____.

P152, 19 题

(13) 设 A 为三阶矩阵, $|A| = 3$, A^* 为 A 的伴随矩阵. 若交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B , 则 $|BA^*| =$ _____.

P230, 5 题

(14) 设 A, B, C 是随机事件, A 与 C 互不相容, $P(AB) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{1}{3}$, 则 $P(AB | \bar{C}) =$ _____.

P311, 2 题

三、解答题(15 ~ 23 小题, 共 94 分, 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^4}$.

P57, 8 题

(16) (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D e^x xy dx dy$, 其中 D 是以曲线 $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 及 y 轴为边界的无界区域.

P183, 4 题

(17) (本题满分 10 分)

某企业为生产甲、乙两种型号的产品投入的固定成本为 10 000 (万元). 设该企业生产甲、乙两种产品的产量分别为 x (件) 和 y (件), 且这两种产品的边际成本分别为 $20 + \frac{x}{2}$ (万元/件) 与 $6 + y$ (万元/件).

- (I) 求生产甲、乙两种产品的总成本函数 $C(x, y)$ (万元);
 (II) 当总产量为 50 件时, 甲、乙两种产品的产量各为多少时可使总成本最小? 求最小成本;
 (III) 求总产量为 50 件且总成本最小时甲产品的边际成本, 并解释其经济意义.

P169, 14 题

(18) (本题满分 10 分)

证明: $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2} (-1 < x < 1)$.

P105, 24 题



(19)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 及 $f''(x) + f(x) = 2e^x$.(I) 求 $f(x)$ 的表达式;(II) 求曲线 $y = f(x^2) \int_0^x f(-t^2) dt$ 的拐点.

P100, 17 题

(20)(本题满分 11 分)

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(I) 计算行列式 $|A|$;(II) 当实数 a 为何值时, 方程组 $Ax = \beta$ 有无穷多解? 并求其通解.

P266, 6 题

(21)(本题满分 11 分)

$$\text{已知 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix}, \text{二次型 } f(x_1, x_2, x_3) = x^T (A^T A) x \text{ 的秩为 } 2.$$

(I) 求实数 a 的值;(II) 求正交变换 $x = Qy$ 将 f 化为标准形.

P299, 3 题

(22)(本题满分 11 分)

设二维离散型随机变量 (X, Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(I) 求 $P\{X = 2Y\}$;(II) 求 $\text{Cov}(X - Y, Y)$.

P338, 12 题

(23)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从参数为 1 的指数分布, 记 $U = \max\{X, Y\}$, $V = \min\{X, Y\}$.(I) 求 V 的概率密度 $f_V(v)$;(II) 求 $E(U + V)$.

P331, 2 题



2011 年全国硕士研究生招生考试 数学(三) 试题

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.请将所选选项前的字母填在答题纸指定位置上.)

(1) 已知当 $x \rightarrow 0$ 时,函数 $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小,则

(A) $k = 1, c = 4$.

(B) $k = 1, c = -4$.

(C) $k = 3, c = 4$.

(D) $k = 3, c = -4$.

P76, 25 题

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导,且 $f(0) = 0$,则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$

(A) $-2f'(0)$.

(B) $-f'(0)$.

(C) $f'(0)$.

(D) 0.

P85, 1 题

(3) 设 $\{u_n\}$ 是数列,则下列命题正确的是

(A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛.

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛.

(D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

P197, 1 题

(4) 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x) dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cot x) dx$, $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx$,则 I, J, K 的大小关系为

(A) $I < J < K$.

(B) $I < K < J$.

(C) $J < I < K$.

(D) $K < J < I$.

P131, 4 题

(5) 设 A 为三阶矩阵,将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B ,再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵,

记 $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,则 $A =$

(A) $P_1 P_2$.

(B) $P_1^{-1} P_2$.

(C) $P_2 P_1$.

(D) $P_2 P_1^{-1}$.

P235, 2 题

(6) 设 A 为 4×3 矩阵, η_1, η_2, η_3 是非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的 3 个线性无关的解, k_1, k_2 为任意常数,则 $Ax = \beta$ 的通解为

(A) $\frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1)$.

(B) $\frac{\eta_2 - \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1)$.

(C) $\frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1)$.

(D) $\frac{\eta_2 - \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1)$.

P266, 5 题



(7) 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 为两个分布函数, 其相应的概率密度 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是连续函数, 则必为概率密度的是

(A) $f_1(x)f_2(x)$.

(B) $2f_2(x)F_1(x)$.

(C) $f_1(x)F_2(x)$.

(D) $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$. P320, 2 题

(8) 设总体 X 服从参数为 $\lambda (\lambda > 0)$ 的泊松分布, $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自该总体的简单随机样本, 则对于统计量 $T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 和 $T_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n} X_n$, 有

(A) $E(T_1) > E(T_2), D(T_1) > D(T_2)$.

(B) $E(T_1) > E(T_2), D(T_1) < D(T_2)$.

(C) $E(T_1) < E(T_2), D(T_1) > D(T_2)$.

(D) $E(T_1) < E(T_2), D(T_1) < D(T_2)$. P346, 2 题

二、填空题(9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9) $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} (1 + 3t)^{\frac{x}{t}}$, 则 $f'(x) =$ _____.

P88, 4 题

(10) 设函数 $z = \left(1 + \frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$, 则 $dz|_{(1,1)} =$ _____.

P162, 2 题

(11) 曲线 $\tan\left(x + y + \frac{\pi}{4}\right) = e^y$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为 _____.

P92, 7 题

(12) 曲线 $y = \sqrt{x^2 - 1}$, 直线 $x = 2$ 及 x 轴所围的平面图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为 _____.

P152, 18 题

(13) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 的秩为 1, $\mathbf{A}$ 的各行元素之和为 3, 则 f 在正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y}$ 下的标准形为 _____.

P299, 2 题

(14) 设二维随机变量 (X, Y) 服从 $N(\mu, \mu; \sigma^2, \sigma^2; 0)$, 则 $E(XY^2) =$ _____.

P331, 1 题

三、解答题(15 ~ 23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\sin x} - x - 1}{x \ln(1+x)}$.

P56, 6 题

(16) (本题满分 10 分)

已知函数 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, $f(1, 1) = 2$ 是 $f(u, v)$ 的极值, $z = f(x+y, f(x, y))$.

求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1)}$.

P168, 13 题

(17) (本题满分 10 分)

求不定积分 $\int \frac{\arcsin \sqrt{x} + \ln x}{\sqrt{x}} dx$.

P127, 2 题

(18) (本题满分 10 分)

证明方程 $4 \arctan x - x + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} = 0$ 恰有两个实根.

P110, 27 题



(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上具有连续导数, $f(0) = 1$, 且满足 $\iint_{D_t} f'(x+y) dx dy = \iint_{D_t} f(t) dx dy$,

其中 $D_t = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq t-x, 0 \leq x \leq t\} (0 < t \leq 1)$. 求 $f(x)$ 的表达式.

P196, 16 题

(20)(本题满分 11 分)

设向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 3, 5)^T$ 不能由向量组 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T, \beta_2 = (1, 2, 3)^T, \beta_3 = (3, 4, a)^T$ 线性表示.

(I) 求 a 的值;(II) 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

P249, 1 题

(21)(本题满分 11 分)

设 A 为三阶实对称矩阵, A 的秩为 2, 且

$$A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(I) 求 A 的所有特征值与特征向量;(II) 求矩阵 A .

P295, 14 题

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

,

Y	-1	0	1
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P\{X^2 = Y^2\} = 1$.

(I) 求二维随机变量 (X, Y) 的概率分布;(II) 求 $Z = XY$ 的概率分布;(III) 求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} .

P340, 14 题

(23)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 服从区域 G 上的均匀分布, 其中 G 是由 $x-y=0, x+y=2$ 与 $y=0$ 所围成的三角形区域.

(I) 求 X 的概率密度 $f_X(x)$;(II) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

P327, 12 题



2010 年全国硕士研究生招生考试 数学(三) 试题

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.)

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - a \right) e^x \right] = 1$, 则 a 等于

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

P70, 20 题

(2) 设 y_1, y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个特解, 若常数 λ, μ 使 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是该方程的解, $\lambda y_1 - \mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解, 则

(A) $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}$.

(B) $\lambda = -\frac{1}{2}, \mu = -\frac{1}{2}$.

(C) $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{1}{3}$.

(D) $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{2}{3}$.

P215, 1 题

(3) 设函数 $f(x), g(x)$ 具有二阶导数, 且 $g''(x) < 0$. 若 $g(x_0) = a$ 是 $g(x)$ 的极值, 则 $f(g(x))$ 在 x_0 取极大值的一个充分条件是

(A) $f'(a) < 0$.

(B) $f'(a) > 0$.

(C) $f''(a) < 0$.

(D) $f''(a) > 0$.

P95, 11 题

(4) 设 $f(x) = \ln^{10} x, g(x) = x, h(x) = e^{\frac{x}{10}}$, 则当 x 充分大时有

(A) $g(x) < h(x) < f(x)$.

(B) $h(x) < g(x) < f(x)$.

(C) $f(x) < g(x) < h(x)$.

(D) $g(x) < f(x) < h(x)$.

P52, 1 题

(5) 设向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由向量组 II: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示. 下列命题正确的是

(A) 若向量组 I 线性无关, 则 $r \leq s$.

(B) 若向量组 I 线性相关, 则 $r > s$.

(C) 若向量组 II 线性无关, 则 $r \leq s$.

(D) 若向量组 II 线性相关, 则 $r > s$.

P254, 4 题

(6) 设 A 为四阶实对称矩阵, 且 $A^2 + A = O$. 若 A 的秩为 3, 则 A 相似于

(A) $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$.

P293, 12 题



(7) 设随机变量 X 的分布函数 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 1, \end{cases}$ 则 $P\{X = 1\} =$

(A) 0.

(B) $\frac{1}{2}$.(C) $\frac{1}{2} - e^{-1}$.(D) $1 - e^{-1}$.

P315, 1 题

(8) 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度, $f_2(x)$ 为 $[-1, 3]$ 上均匀分布的概率密度, 若

$$f(x) = \begin{cases} af_1(x), & x \leq 0, \\ bf_2(x), & x > 0, \end{cases} \quad (a > 0, b > 0)$$

为概率密度, 则 a, b 应满足

(A) $2a + 3b = 4$.(B) $3a + 2b = 4$.(C) $a + b = 1$.(D) $a + b = 2$.

P315, 2 题

二、填空题(9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9) 设可导函数 $y = y(x)$ 由方程 $\int_0^{x+y} e^{-t^2} dt = \int_0^x x \sin t^2 dt$ 确定, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} =$ _____.

P139, 10 题

(10) 设位于曲线 $y = \frac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2 x)}}$ ($e \leq x < +\infty$) 下方, x 轴上方的无界区域为 G , 则 G 绕 x 轴旋转一周所得空间区域的体积为 _____.

P152, 17 题

(11) 设某商品的收益函数为 $R(p)$, 收益弹性为 $1 + p^3$, 其中 p 为价格, 且 $R(1) = 1$, 则 $R(p) =$ _____.

P122, 35 题

(12) 若曲线 $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ 有拐点 $(-1, 0)$, 则 $b =$ _____.

P100, 15 题

(13) 设 A, B 为三阶矩阵, 且 $|A| = 3, |B| = 2, |A^{-1} + B| = 2$, 则 $|A + B^{-1}| =$ _____.

P230, 4 题

(14) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$) 的简单随机样本. 记统计量 $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$, 则

$$E(T) = \text{_____}.$$

P346, 1 题

三、解答题(15 ~ 23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{\frac{1}{x}} - 1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

P56, 5 题

(16) (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D (x+y)^3 dx dy$, 其中 D 由曲线 $x = \sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x + \sqrt{2}y = 0$ 及 $x - \sqrt{2}y = 0$

围成.

P187, 10 题



(17) (本题满分 10 分)

求函数 $u = xy + 2yz$ 在约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ 下的最大值和最小值. P168, 12 题

(18) (本题满分 10 分)

(I) 比较 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| dt$ ($n = 1, 2, \dots$) 的大小, 说明理由;(II) 记 $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ ($n = 1, 2, \dots$), 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$. P146, 14 题

(19) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续, 在 $(0, 3)$ 内存在二阶导数, 且

$$2f(0) = \int_0^2 f(x) dx = f(2) + f(3)$$

(I) 证明存在 $\eta \in (0, 2)$, 使 $f(\eta) = f(0)$;(II) 证明存在 $\xi \in (0, 3)$, 使 $f''(\xi) = 0$. P115, 31 题

(20) (本题满分 11 分)

设 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 已知线性方程组 $Ax = b$ 存在两个不同的解.(I) 求 λ, a ;(II) 求方程组 $Ax = b$ 的通解. P265, 4 题

(21) (本题满分 11 分)

设 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{bmatrix}$, 正交矩阵 Q 使得 $Q^T A Q$ 为对角矩阵, 若 Q 的第 1 列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T$,求 a, Q . P294, 13 题

(22) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = A e^{-2x^2 + 2xy - y^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$. P326, 11 题

(23) (本题满分 11 分)

箱中装有 6 个球, 其中红、白、黑球的个数分别为 1, 2, 3 个, 现从箱中随机地取出 2 个球, 记 X 为取出的红球个数, Y 为取出的白球个数.(I) 求随机变量 (X, Y) 的概率分布;(II) 求 $\text{Cov}(X, Y)$. P337, 11 题

2009 年全国硕士研究生招生考试 数学(三) 试题

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.)

(1) 函数 $f(x) = \frac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 无穷多个.

P81, 30 题

(2) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 是等价无穷小, 则

- (A) $a = 1, b = -\frac{1}{6}$. (B) $a = 1, b = \frac{1}{6}$.

- (C) $a = -1, b = -\frac{1}{6}$. (D) $a = -1, b = \frac{1}{6}$.

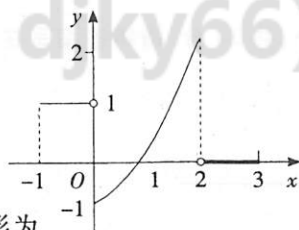
P75, 24 题

(3) 使不等式 $\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt > \ln x$ 成立的 x 的范围是

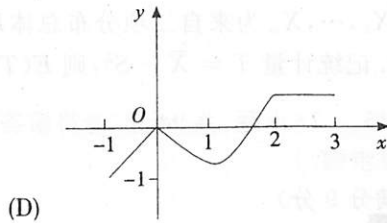
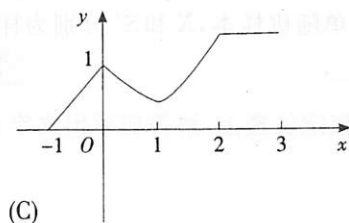
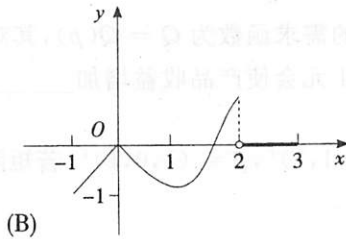
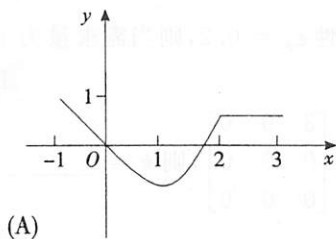
- (A) $(0, 1)$. (B) $(1, \frac{\pi}{2})$. (C) $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. (D) $(\pi, +\infty)$.

P104, 23 题

(4) 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的图形为



则函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 的图形为



P138, 9 题



(5) 设 A, B 均为二阶方阵, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵. 若 $|A| = 2, |B| = 3$, 则分块矩阵

$\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵为

- (A) $\begin{bmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{bmatrix}$.

P238, 4 题

(6) 设 A, P 均为三阶矩阵, P^T 为 P 的转置矩阵, 且 $P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. 若 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3], Q =$

$[\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3]$, 则 $Q^T A Q$ 为

- (A) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

P234, 1 题

(7) 设事件 A 与事件 B 互不相容, 则

- (A) $P(\overline{A}\overline{B}) = 0$. (B) $P(AB) = P(A)P(B)$.
(C) $P(A) = 1 - P(B)$. (D) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1$.

P310, 1 题

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 服从标准正态分布 $N(0, 1)$, Y 的概率分布为 $P\{Y = 0\} = P\{Y = 1\} = \frac{1}{2}$. 记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z = XY$ 的分布函数, 则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. P322, 7 题

二、填空题(9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

P55, 4 题

(10) 设 $z = (x + e^y)^x$, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,0)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

P158, 1 题

(11) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n - (-1)^n}{n^2} x^n$ 的收敛半径为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

P202, 8 题

(12) 设某产品的需求函数为 $Q = Q(p)$, 其对价格 p 的弹性 $\epsilon_p = 0.2$, 则当需求量为 10 000 件时, 价格增加 1 元会使产品收益增加 $\underline{\hspace{2cm}}$ 元.

P121, 34 题

(13) 设 $\alpha = (1, 1, 1)^T, \beta = (1, 0, k)^T$. 若矩阵 $\alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

P281, 2 题

(14) 设 $X_1, X_2, \dots, X_m$ 为来自二项分布总体 $B(n, p)$ 的简单随机样本, $\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 记统计量 $T = \bar{X} - S^2$, 则 $E(T) = \underline{\hspace{2cm}}$.

P350, 1 题

三、解答题(15 ~ 23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 9 分)

求二元函数 $f(x, y) = x^2(2 + y^2) + y \ln y$ 的极值.

P168, 11 题

(16) (本题满分 10 分)

计算不定积分 $\int \ln\left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) dx (x > 0)$.

P126, 1 题

(17) (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D (x-y) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2, y \geq x\}$.

P181, 3 题

(18) (本题满分 11 分)

(I) 证明拉格朗日中值定理: 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

(II) 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 在 $(0, \delta)$ ($\delta > 0$) 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = A$, 则 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0) = A$.

P114, 30 题

(19) (本题满分 10 分)

设曲线 $y = f(x)$, 其中 $f(x)$ 是可导函数, 且 $f(x) > 0$. 已知曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 0$, $x = 1$ 及 $x = t$ ($t > 1$) 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的立体体积是该曲边梯形面积值的 πt 倍, 求该曲线的方程.

P221, 9 题

(20) (本题满分 11 分)

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}, \xi_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(I) 求满足 $A\xi_2 = \xi_1, A^2\xi_3 = \xi_1$ 的所有向量 ξ_2, ξ_3 ;(II) 对(I)中的任意向量 ξ_2, ξ_3 , 证明 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.答案对应的
页码与题号微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

P264, 3 题

(21) (本题满分 11 分)

设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

(I) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值;(II) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 求 a 的值.

P298, 1 题

(22) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-x}, & 0 < y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(I) 求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$;(II) 求条件概率 $P\{X \leq 1 \mid Y \leq 1\}$.

P325, 10 题

(23) (本题满分 11 分)

袋中有 1 个红球、2 个黑球与 3 个白球. 现有放回地从袋中取两次, 每次取一个球. 以 X, Y, Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.(I) 求 $P\{X=1 \mid Z=0\}$;(II) 求二维随机变量 (X, Y) 的概率分布.

P319, 1 题



第三篇

真题解析

第一部分 微积分

第一章 函数、极限、连续

本章导读

函数是微积分的研究对象,极限是建立微积分理论和方法的基础,连续性是函数的基本性态,是函数可导和可积的基本条件,连续函数是微积分所讨论的函数的主要类型.因此,函数、极限与函数连续性是微积分的理论基础,也是本章的主要内容.

其主要内容有

1. 函数的概念,基本性质及复合函数;
2. 极限的概念,性质,存在准则及求极限的方法;无穷小量的概念、性质及阶的比较;
3. 连续的概念,间断点及其分类,连续函数的性质(运算性质及有限闭区间上连续函数性质).

试题特点

本章是微积分的基础,每年必考.而本章的特点是基本概念和基本理论非常多,许多考题重点考查这些基本概念和基本理论,从往年试卷分析情况来看,失分率比较高,因此,望考生们重视基本概念和基本理论的复习.

本章常考题型

1. 求极限;
2. 无穷小量及其比较;
3. 求间断点及判别间断点类型.

无穷小量比较实际上就是研究“ $\frac{0}{0}$ ”型极限,而间断点类型判定的关键也是求极限,所以,本章常考的三种题型的核心都是求极限.重点是求极限的常用方法(如有理运算、基本极限、等价无穷小代换、洛必达法则等).



考题详析

一、复合函数及函数的几种特性

虽然有关复合函数和函数的几种特性(即有界性、单调性、奇偶性、周期性)的试题在近几年的试卷中没有专门出过,但它是一个基本内容,也是本章第一部分函数中的重点内容.在近几年其他类型的考题中也考到了该内容,在以前的考卷中多次专门出题考查,望读者重视.

练习题

1. (2001, 数二, 3分) 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于

(A) 0.

(B) 1.

(C) $\begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

(D) $\begin{cases} 0, & |x| \leq 1, \\ 1, & |x| > 1. \end{cases}$

2. (1988, 数二, 5分) 设 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1 - x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

练习题参考答案

1. 【答案】 B.

【解析】 先求 $f[f(x)]$, 由于当 $|x| \leq 1$ 时, $f(x) = 1$, 即 $|f(x)| \leq 1$, 则 $f[f(x)] = 1$; 当 $|x| > 1$ 时, $f(x) = 0$, 此时 $|f(x)| \leq 1$, 则 $f[f(x)] = 1$, 从而对一切的 x , $f[f(x)] = 1$, 故 $f\{f[f(x)]\} = 1$. 应选(B).

2. 【解】 由 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1 - x$, 知

$$e^{\varphi^2(x)} = 1 - x$$

$$\varphi^2(x) = \ln(1 - x), (x \leq 0)$$

则 $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1 - x)}$, 其定义域为 $(-\infty, 0]$.

小结

这里主要是两类问题.

一、复合函数

这里主要是两种题型.

1. 已知 $f(x)$ 和 $g(x)$, 求 $f[g(x)]$.

求复合函数的基本方法是将内层函数 $g(x)$ 代入外层函数 $f(x)$. 如果出现分段函数, 内层函数 $g(x)$ 的函数值落在外层函数 $f(x)$ 的定义域的哪个部分, 就将 $g(x)$ 代入相应的 $f(x)$ 的表达式中即可求得 $f[g(x)]$.



2. 已知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 复合的结果, 即 $f[g(x)] = \varphi(x)$, 又知道 $f(x)$ 和 $g(x)$ 其中之一, 求另一个.

(1) 若已知 $f(x)$, 且 $f(x)$ 有反函数, $f[g(x)] = \varphi(x)$, 则

$$g(x) = f^{-1}[\varphi(x)]$$

(2) 若已知 $g(x)$, 且 $g(x)$ 有反函数, $f[g(x)] = \varphi(x)$, 令 $g(x) = u$, 则 $x = g^{-1}(u)$, 将其代入 $f[g(x)] = \varphi(x)$ 得

$$f(u) = \varphi[g^{-1}(u)]$$

事实上, 这两类问题都是求反函数的问题.

二、函数的四种特性

这里主要是函数四种特性的判定. 考生首先应熟悉五类基本初等函数(幂函数, 指数函数, 对数函数, 三角函数和反三角函数)的有界性、单调性、奇偶性和周期性, 同时还需掌握一些常用的判别法.

1. 有界性

(1) 利用有界的定义;

(2) 利用有限闭区间 $[a, b]$ 上连续的函数在该区间上一定有界;

(3) 利用若 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 都存在, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 上有界(这里区间 (a, b) 可以是无穷区间).

2. 单调性

(1) 利用单调性的定义;

(2) 利用导数的正负判定, 即

若在区间 I 上 $f'(x) \geq 0$ (或 ≤ 0), 则函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加(或减少).

3. 奇偶性

(1) 利用奇偶性的定义;

(2) 利用奇偶函数的运算性质判定, 即

奇函数 $\pm$ 奇函数 = 奇函数; 偶函数 $\pm$ 偶函数 = 偶函数;

奇函数 $\times$ 奇函数 = 偶函数; 奇函数 $\times$ 偶函数 = 奇函数;

偶函数 $\times$ 偶函数 = 偶函数.

4. 周期性

(1) 利用周期函数定义;

(2) 若 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数, 则 $f(ax+b)$ ($a \neq 0$) 是以 $\frac{T}{|a|}$ 为周期的函数.

二、极限的概念与性质

1 (2010, 4 题, 4 分) 设 $f(x) = \ln^{10} x$, $g(x) = x$, $h(x) = e^{\frac{x}{10}}$, 则当 x 充分大时有

(A) $g(x) < h(x) < f(x)$.

(B) $h(x) < g(x) < f(x)$.

(C) $f(x) < g(x) < h(x)$.

(D) $g(x) < f(x) < h(x)$.

【答案】 C.

【解析】 求解本题的依据是极限的保序性: 设 $F(x) > 0, G(x) > 0$,



若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{G(x)} = a < 1$, 则当 x 充分大时, $\frac{F(x)}{G(x)} < 1$, 从而 $F(x) < G(x)$.

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{G(x)} = a > 1$, 则当 x 充分大时, $\frac{F(x)}{G(x)} > 1$, 从而 $F(x) > G(x)$.

当 $x > 1$ 时, $f(x) = \ln^{10} x$, $g(x) = x$ 与 $h(x) = e^{\frac{x}{10}}$ 都为正值函数, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^{10} x}{x} = 10 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^9 x}{x} = 10 \times 9 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^8 x}{x} = \cdots = (10!) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 < 1,$$

则当 x 充分大时 $f(x) < g(x)$.

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{10}}}{x} = \frac{1}{10} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x}{10}} = +\infty > 1,$$

则当 x 充分大时 $h(x) > g(x)$, 故应选(C).

【评注】 本题本质上是无穷大量阶的比较. 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 幂函数 $x^a (a > 0)$, 对数函数 $\ln x$, 指数函数 $a^x (a > 1)$ 都趋向无穷, 且

$$\ln x \ll x^a \ll a^x \quad (a > 0, a > 1)$$

其中 $\ln x \ll x^a$ 表示当 $x \rightarrow +\infty$ 时, x^a 是比 $\ln x$ 更高阶的无穷大, 即 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{\ln x} = +\infty$, 从而当 x 充分大时 $\ln x < x^a$, 本题利用以上结论立刻得到正确选项.

2 (2014, 1 题, 4 分) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 且 $a \neq 0$, 则当 n 充分大时有

- (A) $|a_n| > \frac{|a|}{2}$. (B) $|a_n| < \frac{|a|}{2}$.
(C) $a_n > a - \frac{1}{n}$. (D) $a_n < a + \frac{1}{n}$.

【答案】 A.

【解析】 (方法一) 直接法:

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 且 $a \neq 0$, 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a| > 0$, 则当 n 充分大时有

$$|a_n| > \frac{|a|}{2}$$

故应选(A).

(方法二) 排除法:

若取 $a_n = 2 + \frac{2}{n}$, 显然 $a = 2$, 且(B)和(D)都不正确;

若取 $a_n = 2 - \frac{2}{n}$, 显然 $a = 2$, 且(C)不正确.

故应选(A).

3 (2015, 1 题, 4 分) 设 $\{x_n\}$ 是数列, 下列命题中不正确的是

- (A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$. (B) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.
(C) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$. (D) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

【答案】 D.

【解析】 如 $x_{3n} = 1 + \frac{1}{3n}$, $x_{3n+1} = 1 + \frac{1}{3n+1}$, $x_{3n+2} = 2 + \frac{1}{3n+2}$, 则



$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = 1, \text{但} \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+2} = 2, \text{故} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 1.$

练习题

1. (1999, 数二, 3分) “对任意给定的 $\varepsilon \in (0, 1)$, 总存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon$ ” 是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的

(A) 充分条件但非必要条件.

(B) 必要条件但非充分条件.

(C) 充分必要条件.

(D) 既非充分条件又非必要条件.

2. (2003, 数一、数二, 4分) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有

(A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立.

(B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在.

(D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在.

3. (2012, 数二, 4分) 设 $a_n > 0 (n = 1, 2, \dots), S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, 则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的

(A) 充分必要条件.

(B) 充分非必要条件.

(C) 必要非充分条件.

(D) 既非充分也非必要条件.

练习题参考答案

1. 【答案】 C.

【解析】 本题主要考查考生对数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义的理解. 其定义是“对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 总存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$ ”. 显然, 若 $|x_n - a| < \varepsilon$, 则必有 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon$, 但反之也成立, 这是由于 ε 的任意性, 对于任意给定的 $\varepsilon_1 > 0$, 取 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon$ 中的 $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{3}$, 则有 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon = \frac{2}{3}\varepsilon_1 < \varepsilon_1$, 即对任意给定的正数 $\varepsilon_1 > 0$, 总存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \varepsilon_1$, 故应选(C).

【评注】 到目前为止, 考研试卷中还没考过利用极限定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 或 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的试题, 但从本题可看出, 要求考生理解极限的定义.

2. 【答案】 D.

【解析】 (方法一) 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 \neq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n = \infty$, 即该极限不存在, 故应选(D).

(方法二) 数列极限描述的是 n 无限增大时数列的变化趋势, 其极限是否存在, 如果极限存在, 极限值等于多少与数列的前有限项无关. 数列极限的保序性及其推论(保序性)只是从某个充分大的 N 项以后成立.

虽然有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n < \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$, 但这只能得到存在充分大的 N , 当 $n > N$ 时, 恒有

$$a_n < b_n < c_n$$

而上式并不是对任意的 n 成立, 如 $a_n = \frac{100}{n}, b_n = \frac{n}{n+1}, c_n = \frac{n}{100}$. 从而选项(A)(B)不对. 又 $a_n c_n$ 是

$0 \cdot \infty$ 未定式, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不一定存在, 而不是一定不存在, 如 $a_n = \frac{1}{n^2}, c_n = n$, 从而选项(C)也不

对,故应选(D).

【评注】 ① 本题主要考查极限的性质;② 关于 ∞ 的基本结论有: $(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$; $\infty \pm (\text{有界变量}) = \infty$; $\infty \cdot \infty = \infty$; 但 $\infty \cdot (\text{有界变量})$ 不一定是无穷大; 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$.

3. **【答案】** B.

【解析】 因为 $a_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$, 所以数列 $\{S_n\}$ 是单调增加的.

如果 $\{S_n\}$ 有界, 则由单调有界准则知 $\{S_n\}$ 的极限存在, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. 由此可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

即数列 $\{a_n\}$ 收敛.

反之, 当 $\{a_n\}$ 收敛时, $\{S_n\}$ 却未必有界. 例如, 取 $a_n = 1 (n = 1, 2, \dots)$, 显然有 $\{a_n\}$ 收敛, 但 $S_n = n$ 无界. 可见 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分非必要条件.

小结

(1) 极限的概念重点是理解数列极限的 $\epsilon-N$ 定义和函数极限的 $\epsilon-\delta$ 及 $\epsilon-X$ 定义, 而不是用定义证明极限;

(2) 极限的性质重点是: 有界性, 保号性及有理运算性质;

(3) 极限的存在准则重点是: 单调有界准则和夹逼准则.

三、求函数的极限

4 (2009, 9 题, 4 分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{3e}{2}.$

【解析】 (方法一) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} \sin x}{\frac{1}{3}(1+x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x}$ (洛必达法则)

$$= \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} e^{\cos x} (1+x^2)^{\frac{2}{3}} = \frac{3e}{2}.$$

(方法二) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt[3]{1+x^2} - 1 \sim \frac{1}{3}x^2$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\frac{1}{3}x^2} \quad (\text{等价无穷小代换})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} \sin x}{\frac{2}{3}x} \quad (\text{洛必达法则})$$



$$= \frac{3e}{2}$$

(方法三) 由于当 $x \rightarrow 0$ 时有

$$e^x - 1 \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, (1+x)^a - 1 \sim ax$$

$$\text{所以 } e - e^{\cos x} = e^{\cos x}(e^{1-\cos x} - 1) \sim e(1 - \cos x) \sim \frac{e}{2}x^2,$$

$$\sqrt[3]{1+x^2} - 1 \sim \frac{1}{3}x^2$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e}{2}x^2}{\frac{1}{3}x^2} = \frac{3e}{2}.$$

【评注】 本题是一个 $\frac{0}{0}$ 型极限, 主要是利用等价无穷小代换求解.

常用的等价无穷小: 当 $x \rightarrow 0$ 时

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \ln(1+x) \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2; (1+x)^a - 1 \sim ax; a^x - 1 \sim x \ln a (a > 0, a \neq 1)$$

还有若 $\alpha(x) \rightarrow 0$, 则 $\alpha(x) + o(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$.

注意: 在乘法中可用等价无穷小代换, 而在加减法中不要用等价无穷小代换.

5 (2010, 15 题, 10 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{\frac{1}{x}} - 1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

【分析】 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}}$, 而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, 则本题是一个“ 0^0 ”型极限, 通常是改写成指数形式或取对数后用洛必达法则.

$$\text{【解】 } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{\frac{1}{x}} - 1)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}} - 1)}{\ln x}}$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^{\frac{1}{x}} - 1)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^{\frac{1}{x}})' }{(x^{\frac{1}{x}} - 1)} \cdot \frac{1}{x} \quad (\text{洛必达法则})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(e^{\frac{\ln x}{x}})' }{e^{\frac{\ln x}{x}} - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{\frac{\ln x}{x}} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} \right)}{e^{\frac{\ln x}{x}} - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln x}{x(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln x}{\ln x} \quad \left(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1 \sim \frac{\ln x}{x} \right)$$

$$= -1$$

$$\text{则原式} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

6 (2011, 15 题, 10 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\sin x} - x - 1}{x \ln(1+x)}$.

【解】 (方法一) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\sin x} - x - 1}{x \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\sin x} - x - 1}{x^2} \quad (\text{等价无穷小代换})$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin x}} - 1}{2x} \quad (\text{洛必达法则}) \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1+2\sin x}}{x} \quad (\text{极限为非零常数的因子极限先求}) \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - \frac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin x}}}{1} \quad (\text{洛必达法则}) \\
 &= -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

(方法二) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\sin x} - x - 1}{x \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\sin x} - x - 1}{x^2}$ (等价无穷小代换)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+2\sin x - (x+1)^2}{2x^2} \quad (\text{分子有理化})$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x - x^2 - 2x}{x^2}$$

$$= -\frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2}$$

$$= -\frac{1}{2}.$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

【评注】当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x - x$ 是 x 的三阶无穷小, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0$.

7 (2012, 9 题, 4 分) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{\cos x - \sin x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $e^{-\sqrt{2}}.$

【解析】这是一个“ 1^∞ ”型极限, 由于

$$\begin{aligned}
 (\tan x)^{\frac{1}{\cos x - \sin x}} &= [1 + (\tan x - 1)]^{\frac{1}{\cos x - \sin x}} \\
 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cos x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cos x(1 - \tan x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\cos x} = -\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

故 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{\cos x - \sin x}} = e^{-\sqrt{2}}.$

8 (2012, 15 题, 10 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^4}.$

【解】 (方法一) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{2-2\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2-2+2\cos x} - 1}{x^4}$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2 + 2\cos x}{x^4} \quad (\text{等价无穷小代换}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2\sin x}{4x^3} \quad (\text{洛必达法则}) \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{12}.
 \end{aligned}$$



(方法二)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{2-2\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2-2+2\cos x} - 1}{x^4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2 + 2\cos x}{x^4} \quad (\text{等价无穷小代换})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2 + 2\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)}{x^4} \quad (\text{泰勒公式})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{12} + o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{12}.$$

(方法三)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\xi}(x^2 - 2 + 2\cos x)}{x^4} \quad (\text{拉格朗日中值定理})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2 + 2\cos x}{x^4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2\sin x}{4x^3} \quad (\text{洛必达法则})$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3} \quad (x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3)$$

$$= \frac{1}{12}.$$

9 (2014, 15 题, 10 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}.$

【解】 (方法一)
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \cdot \frac{1}{x}} \quad (\text{等价无穷小代换})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) - x] \quad (\text{洛必达法则})$$

$$\stackrel{\frac{1}{x} = t}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t - 1 - t}{t^2} \quad (\text{变量代换})$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t - 1}{2t} \quad (\text{洛必达法则})$$

$$= \frac{1}{2}.$$

(方法二)
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \cdot \frac{1}{x}} \quad (\text{等价无穷小代换})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) - x] \quad (\text{洛必达法则})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2!x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) - x \right] \quad (\text{泰勒公式})$$



$$= \frac{1}{2}.$$

10 (2015, 9 题, 4 分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $-\frac{1}{2}.$

【解析】
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[1 + (\cos x - 1)]}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

或
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\tan x}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

11 (2016, 9 题, 4 分) 已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1} = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 6.

【解析】
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}f(x)\sin 2x}{3x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 6.$$

12 (2016, 15 题, 10 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}}.$

【解】
$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (\cos 2x - 1 + 2x \sin x)]^{\frac{1}{x^4}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1 + 2x \sin x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[-\frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + o(x^4) \right] + 2x \left[x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right]}{x^4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^4}{x^4} = \frac{1}{3}$$

原式 $= e^{\frac{1}{3}}.$

13 (2017, 15 题, 10 分) 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt}{\sqrt{x^3}}.$

【解】
$$\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt \stackrel{x-t=u}{=} \int_0^x \sqrt{u} e^{x-u} du = e^x \int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt}{\sqrt{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du}{x^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{u} e^{-u} du}{x^{\frac{3}{2}}} \quad (\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} e^{-x}}{\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3}$$



14 (2020, 1 题, 4 分) 设 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - a}{x - a} = b$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin f(x) - \sin a}{x - a} =$

(A) $b \sin a$.

(B) $b \cos a$.

(C) $b \sin f(a)$.

(D) $b \cos f(a)$.

【答案】 B.

【解析】 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin f(x) - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos \xi \cdot [f(x) - a]}{x - a}$ (ξ 在 $f(x)$ 和 a 之间) (拉格朗日定理)

$$= \cos a \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - a}{x - a}$$

$$= b \cos a$$

故应选 (B).

练习题

1. (1999, 数二, 5 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x \ln(1 + x) - x^2}$.

2. (2004, 数二, 10 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)^x - 1 \right]$.

3. (2009, 数二, 9 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)[x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin^4 x}$.

4. (2010, 数一, 4 分) 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x - a)(x + b)} \right]^x =$

(A) 1.

(B) e.

(C) e^{a-b} .

(D) e^{b-a} .

5. (2000, 数二, 4 分) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} \right) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2}$ 为

(A) 0.

(B) 6.

(C) 36.

(D) ∞ .

练习题参考答案

1. 【解】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x \ln(1 + x) - x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x [\ln(1 + x) - x] [\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x}]}$$
 (分子有理化)
$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x (1 - \cos x)}{x [\ln(1 + x) - x]} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x^2}{\ln(1 + x) - x}$$
 (等价代换)
$$= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\frac{1}{1+x} - 1} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{-x} = -\frac{1}{2}.$$

【评注】 本题是一个 $\frac{0}{0}$ 型极限, 主要是利用有理化, 等价无穷小代换和洛必达法则求极限.

2. 【分析】 本题是“ $\frac{0}{0}$ ”型极限, 由于分子中含有幂指函数, 通常的求解方法是将其化为指数函数形式, 然后用等价无穷小($e^x - 1 \sim x$)代换, 然后再用洛必达法则.

【解】 (方法一) 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln(\frac{2+\cos x}{3})} - 1}{x^3}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\frac{2+\cos x}{3})}{x^2} \quad (\text{等价无穷小代换})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2+\cos x) - \ln 3}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2+\cos x} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2+\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x}$$

$$= -\frac{1}{6}.$$

(方法二) 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln(\frac{2+\cos x}{3})} - 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\frac{2+\cos x}{3})}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{\cos x - 1}{3})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \quad (\text{等价代换})$$

$$= -\frac{1}{6}.$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

【评注】 本题是一个 $\frac{0}{0}$ 型极限, 又出现了幂指函数, 第一步将其改写成指数形式后用等价无穷小代换是关键.

3. 【解】 (方法一) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\sin^4 x \sim x^4$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)[x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin^4 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2[x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin^4 x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1 + \tan x)}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1 + \tan x} \sec^2 x}{2x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \tan x - \sec^2 x}{2x(1 + \tan x)} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \tan^2 x}{x} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (\text{方法二}) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)[x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin^4 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2[x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin^4 x} \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1 + \tan x)}{x^2} \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - [\tan x - \frac{\tan^2 x}{2} + o(x^2)]}{x^2} \quad \left(\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \tan x) + \frac{\tan^2 x}{2} + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{x^2} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

其中 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^2} = 0$.

注意: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - \tan x, x - \sin x, \sin x - \tan x$ 都是 x 的三阶无穷小, 这是一个常用的结论.

【评注】 本题是求 $\frac{0}{0}$ 型极限. 方法一主要是利用洛必达法则和等价无穷小代换; 方法二主要是利用泰勒公式和等价无穷小代换.

4. 【答案】 C.

【解析】 (方法一) 这是一个“ 1^∞ ”型极限, 直接有

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left[1 + \frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)} \right]^{\frac{(x-a)(x+b)}{(a-b)x+ab}} \right\}^{\frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)} \cdot x} \\
 &= e^{a-b}
 \end{aligned}$$

(方法二) 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln \frac{x^2}{(x-a)(x+b)}}$, 而

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x^2}{(x-a)(x+b)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)} \quad (\text{等价无穷小代换}) \\
 &= a-b
 \end{aligned}$$

则原式 $= e^{a-b}$.

(方法三) 对“ 1^∞ ”型极限, 可利用基本结论. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \beta(x) = \infty$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x)\beta(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \alpha(x))^{\beta(x)} = e^A$. 由于

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x)\beta(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - (x-a)(x+b)}{(x-a)(x+b)} \cdot x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)} \cdot x = a-b$$

则原式 $= e^{a-b}$.

(方法四) 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{(x-a)(x+b)}{x^2} \right]^{-x}$



$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{x}\right)^{-x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{x}\right)^{-x} \\
 &= e^a \cdot e^{-b} = e^{a-b}
 \end{aligned}$$

【评注】 方法三和方法四中都用到本节小结中关于“ 1^∞ ”型极限的结论,其中方法四最简单.

5.【答案】 C.

【解析】 (方法一) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + \sin 6x}{x^3}$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + \left[6x - \frac{1}{3!}(6x)^3 + o(x^3)\right]}{x^3} \quad (\text{泰勒公式}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 6}{x^2} - 36 = 0
 \end{aligned}$$

则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 6}{x^2} = 36$.

(方法二)

由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + \sin 6x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(xf(x) + 6x) + (\sin 6x - 6x)}{x^3} = 0$ 知

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 6}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \sin 6x}{x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}(6x)^3}{x^3} \quad \left(x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3\right) \\
 &= 36.
 \end{aligned}$$

(方法三) 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + \sin 6x}{x^3} = 0$ 知,

当 $x \rightarrow 0$ 时, $xf(x) + \sin 6x = o(x^3)$, 则 $f(x) = -\frac{\sin 6x}{x} + o(x^2)$,

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 6}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 - \frac{\sin 6x}{x} + o(x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 - \frac{\sin 6x}{x}}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \sin 6x}{x^3} = 36
 \end{aligned}$$

(方法四) 排除法

令 $xf(x) + \sin 6x = 0$, 显然有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + \sin 6x}{x^3} = 0$, 此时, $f(x) = -\frac{\sin 6x}{x}$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 6}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 - \frac{\sin 6x}{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \sin 6x}{x^3} = 36$$

显然(A)(B)(D) 均不正确,故应选(C).



小结

1. 求函数的极限主要是求未定式 $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0\right)$ 的极限, 这里的关键是两种, 即“ $\frac{0}{0}$ ”型和“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型, 而后 5 种都可化为前两种, 前两种当中特别是“ $\frac{0}{0}$ ”型考得最多, 求“ $\frac{0}{0}$ ”型极限主要是三种方法.

(1) 利用洛必达法则:

在处理“ $\frac{0}{0}$ ”型极限问题时, 不要急于用洛必达法则, 应先进行化简, 常用的方法有极限为非零常数的因子极限先求出来, 等价无穷小代换, 有理化. 化简完后再用洛必达法则;

(2) 利用等价无穷小代换;

(3) 利用泰勒公式:

其中 $\sin x, \ln(1+x), e^x, \cos x$ 在 $x=0$ 处的泰勒公式比较常用, 考生应熟悉.

2. “ 1^∞ ”型极限也是一种常考的类型, 最简单的方法是利用结论:

若 $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x) = \infty$, 且 $\lim \alpha(x)\beta(x) = A$, 则 $\lim (1 + \alpha(x))^{\beta(x)} = e^A$.

四、求数列的极限

15 (2016, 10 题, 4 分) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{1}{n} + 2 \sin \frac{2}{n} + \cdots + n \sin \frac{n}{n} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\sin 1 - \cos 1.$

【解析】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{1}{n} + 2 \sin \frac{2}{n} + \cdots + n \sin \frac{n}{n} \right)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \sin \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n}{n} \sin \frac{n}{n} \right)$$

$$= \int_0^1 x \sin x dx = -x \cos x \Big|_0^1 + \int_0^1 \cos x dx = \sin 1 - \cos 1.$$

16 (2017, 17 题, 10 分) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right).$

【解】 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)$

$$= \int_0^1 x \ln(1+x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(1+x) dx^2$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln(1+x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x^2-1)+1}{1+x} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 (x-1) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx \\
 &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} (x-1)^2 \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \ln(1+x) \Big|_0^1 \\
 &= \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

17 (2018, 19 题, 10 分) 设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1 (n = 1, 2, \dots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【证明】 (方法一) 由于当 $x > 0$ 时, $e^x - 1 > x$, 则由 $x_1 > 0$, 知 $e^{x_1} = \frac{e^{x_1} - 1}{x_1} > 1, x_2 > 0$.

若 $x_k > 0$, 则 $e^{x_{k+1}} = \frac{e^{x_k} - 1}{x_k} > 1$ 知 $x_{k+1} > 0$, 即数列 $\{x_n\}$ 下有界.

由 $x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$ 知 $e^{x_{n+1}} = \frac{e^{x_n} - 1}{x_n}, x_{n+1} = \ln \frac{e^{x_n} - 1}{x_n}$.

$$x_{n+1} - x_n = \ln \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} - \ln e^{x_n} = \ln \frac{e^{x_n} - 1}{x_n e^{x_n}}$$

令 $f(x) = x e^x - (e^x - 1), x \in [0, +\infty)$, 则

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = e^x + x e^x - e^x = x e^x > 0, x \in (0, +\infty)$$

则 $f(x) > 0, x e^x > e^x - 1, x \in (0, +\infty)$.

$$x_{n+1} - x_n = \ln \frac{e^{x_n} - 1}{x_n e^{x_n}} < \ln 1 = 0$$

$\{x_n\}$ 单调减少, 由单调有界准则知, 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 等式

$$x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$$

两端取极限得 $a e^a = e^a - 1$, 由此得 $a = 0$.

(方法二) 由于当 $x > 0$ 时, $e^x - 1 > x$, 则由 $x_1 > 0, e^{x_1} = \frac{e^{x_1} - 1}{x_1} > 1$ 可知, $x_2 > 0$, 由归纳法

可知 $x_n > 0$, 即 $\{x_n\}$ 下有界. 由 $x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$ 知

$$e^{x_{n+1}} = \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} = \frac{e^{x_n} - e^0}{x_n - 0} = e^{\xi_n} < e^{x_n}, \text{ (拉格朗日定理, 其中 } 0 < \xi_n < x_n \text{)}$$

由于 e^x 单调增加, 则 $x_{n+1} < x_n$, 即 $\{x_n\}$ 单调减少, 由单调有界准则知 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$,

等式 $x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$ 两端取极限得

$$a e^a = e^a - 1$$

由此解得 $a = 0$.

18 (2019, 9 题, 4 分) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right]^n = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{1}{e}.$



【解析】 $\left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

19 (2019, 19 题, 10 分) 设 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx (n = 0, 1, 2, \cdots)$.

(I) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2} (n = 2, 3, \cdots)$;

(II) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$.

【证明】 (I) 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $x^n \sqrt{1-x^2} \geq x^{n+1} \sqrt{1-x^2}$, 则

$$\int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx \geq \int_0^1 x^{n+1} \sqrt{1-x^2} dx$$

即 $a_n \geq a_{n+1}$, 从而数列 $\{a_n\}$ 单调减少.

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{3} \int_0^1 x^{n-1} d(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{1}{3} x^{n-1} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 + \frac{n-1}{3} \int_0^1 x^{n-2} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \frac{n-1}{3} \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1-x^2} dx - \frac{n-1}{3} \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx \\ &= \frac{n-1}{3} \left[\int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1-x^2} dx - \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx \right] \\ &= \frac{n-1}{3} (a_{n-2} - a_n) \end{aligned}$$

从而有 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2} (n = 2, 3, \cdots)$.

(II) 由于 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $a_n > 0$, 则

$$\frac{a_n}{a_{n-2}} \leq \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{a_n}{a_n} = 1$$

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+2} = 1$, 由夹逼原理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1$.

练习题

1. (1998, 数四, 6 分) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \tan \frac{1}{n}\right)^{n^2} (n \text{ 为自然数})$.

2. (2008, 数四, 4 分) 设 $0 < a < b$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^{-n} + b^{-n})^{\frac{1}{n}} =$

(A) a .

(B) a^{-1} .

(C) b .

(D) b^{-1} .

3. (1995, 数一、数二, 3 分) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n}\right) =$ _____.



4. (2004, 数二, 4 分) $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right)^2}$ 等于

(A) $\int_1^2 \ln^2 x dx.$

(B) $2 \int_1^2 \ln x dx.$

(C) $2 \int_1^2 \ln(1+x) dx.$

(D) $\int_1^2 \ln^2(1+x) dx.$

5. (2012, 数二, 4 分) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

练习题参考答案

1. 【分析】 本题是一个“ 1^∞ ”型极限, 可利用“ 1^∞ ”型极限的基本结论求该极限.

【解】 由于

$$\left(n \tan \frac{1}{n} \right)^{n^2} = \left(\frac{\tan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right)^{n^2} = \left(1 + \frac{\tan \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right)^{n^2}$$

$$\text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^3},$$

这是一个“ $\frac{0}{0}$ ”型数列极限, 不能直接用洛必达法则, 通常是化为相应的函数极限后再用洛必达法则, 为此考虑极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^3} = \frac{1}{3}, \text{ 故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \tan \frac{1}{n} \right)^{n^2} = e^{\frac{1}{3}}.$$

【评注】 在求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^3}$ 时, 利用等价代换 $\tan x - x \sim \frac{1}{3}x^3 (x \rightarrow 0)$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{n}\right)^3}{\left(\frac{1}{n}\right)^3} = \frac{1}{3}$$

2. 【答案】 B.

【解析】 (方法一) 由于 $0 < a < b$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a^{-n} + b^{-n})^{\frac{1}{n}} = a^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^n \right]^{\frac{1}{n}}$$



$$= a^{-1} \left(\text{其中 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{b} \right)^n = 0 \right)$$

(方法二) 利用夹逼原理求极限, 由于 $0 < a < b$, 且

$$(a^{-n} + b^{-n})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a}\right)^n + \left(\frac{1}{b}\right)^n}$$

$$\frac{1}{a} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a}\right)^n} < \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a}\right)^n + \left(\frac{1}{b}\right)^n} < \sqrt[n]{2\left(\frac{1}{a}\right)^n} = \frac{1}{a} \cdot \sqrt[n]{2}$$

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a^{-n} + b^{-n})^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{a}$$

(方法三) 利用此类极限的一个常用结论:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max_{1 \leq i \leq m} a_i, \text{ 其中 } a_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, m)$$

由于 $0 < a < b$, 则 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a^{-n} + b^{-n})^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a}\right)^n + \left(\frac{1}{b}\right)^n} = \frac{1}{a}$$

【评注】 本题属 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \quad (a_i > 0)$ 型极限.

方法一是将 m 个底数 a_i 中最大的提出来;

方法二是利用夹逼原理;

方法三是利用此类极限的一个常用结论, 该结论可用方法一和方法二中的两种方法来证明, 以后该结论可直接用, 会给我们带来方便, 如

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^n + 3^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} \quad (x \geq 0)$$

都可用该结论求出.

3. 【答案】 $\frac{1}{2}$.

【解析】 这是一个 n 项和的数列极限, 常用的是两种方法——夹逼原理和定积分定义. 由于

$$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2 + n + n} < \frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} < \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2 + n + 1}$$

而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2 + n + n} = \frac{1}{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2 + n + 1} = \frac{1}{2}$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right) = \frac{1}{2}$$



【评注】 本题用到一个常用的求和公式 $1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$.

4.【答案】 B.

【解析】 由原题可看出,本题是要利用定积分定义将原式极限化为积分和式的极限,进一步化为定积分.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \left(1+\frac{2}{n}\right)^2 \cdots \left(1+\frac{n}{n}\right)^2} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\ln \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + \ln \left(1+\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \ln \left(1+\frac{n}{n}\right)^2 \right] \end{aligned}$$

该和式是函数 $\ln x^2$ 在区间 $[1, 2]$ 上的一个积分和的极限,它是将 $[1, 2]$ 区间分成 n 等份,每个子区间长度 $\Delta x_k = \frac{1}{n}$,而每个子区间中的 ξ_k 都取该子区间的右端点 $1+\frac{k}{n}$,即 $f(\xi_k) = \ln \left(1+\frac{k}{n}\right)^2$.

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \left(1+\frac{2}{n}\right)^2 \cdots \left(1+\frac{n}{n}\right)^2} = \int_1^2 \ln x^2 dx = 2 \int_1^2 \ln x dx$$

【评注】 本题用到求 n 项和数列极限的另一种方法——定积分定义. 本题虽不直接是 n 项和,出现了对数内部为 n 个因子相乘,利用对数性质将其化为 n 项和,进一步化为定积分. 利用定积分定义求 n 项和的极限的一般方法是先整个和式提一个因子 $\frac{1}{n}$,然后根据和式确定被积函数和积分区间,进一步化为定积分. 通常提出 $\frac{1}{n}$ 后可化为下列和式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$

其中 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续,利用以上方法读者不难求得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2$$

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)

5.【答案】 $\frac{\pi}{4}$.

【解析】 这是一个 n 项和的极限,提一个 $\frac{1}{n^2}$ 的因子,知原式为一个积分和式.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2} \right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2} \right] \\ = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$



小结

处理数列极限问题的常用方法是:

1. 将所求数列极限问题转化为求函数极限(一般是为了使用洛必达法则);
2. 利用夹逼原理求极限(更多的是用在 n 项和的数列极限中);
3. 利用定积分定义求极限(一般用在 n 项和的数列极限问题),该方法的关键先提一个因子 $\frac{1}{n}$,

然后确定被积函数和积分区间,一种常见的形式是: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$;

4. 利用结论 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max_{1 \leq i \leq m} a_i$ (其中 $a_i > 0$) 求极限.

五、确定极限中的参数

20 (2010, 1 题, 4 分) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - a \right) e^x \right] = 1$, 则 a 等于

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

【答案】 C.

【解析】 (方法一) 该题中的极限是“ $\infty - \infty$ ”型, 通常是通分化成“ $\frac{0}{0}$ ”型再求.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - a \right) e^x \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - ax)e^x}{x} \left(\frac{0}{0} \text{ 型} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^x - (1 - ax)e^x}{1} \quad (\text{洛必达法则}) \\ &= a - 1 = 1 \end{aligned}$$

则 $a = 2$, 故应选(C).

(方法二) 左端极限可拆成两项(前提是两项极限都存在)分别求.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - a \right) e^x \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} a e^x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{x} + a \quad (\text{等价无穷小代换 } e^x - 1 \sim x) \\ &= -1 + a = 1 \end{aligned}$$

则 $a = 2$.

【评注】 部分考生选择(B), 原因可能是将“ $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ ”代入原式得到以下错误的解法

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - a \right) e^x \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - a \right) \right] = a$$

再由题设得到错误的结论“ $a = 1$ ”, 这种在极限式中对“部分量”先取极限是一种“经典的错误”.

21 (2013, 15 题, 10 分) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小, 求 n 与 a 的值.

【解】 (方法一)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{ax^n}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x + 2\cos x \cdot \sin 2x \cdot \cos 3x + 3\cos x \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x}{anx^{n-1}}.$$

由于当 $n = 2$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{anx^{n-1}} = \frac{1}{2a},$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos x \cdot \sin 2x \cdot \cos 3x}{anx^{n-1}} = \frac{4}{2a},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\cos x \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x}{anx^{n-1}} = \frac{9}{2a},$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{ax^n} = \frac{7}{a}.$

由题设知 $\frac{7}{a} = 1$, 故 $a = 7$.

当 $n \neq 2$ 时, 显然不合题意, 所以 $a = 7, n = 2$.

(方法二)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{ax^n}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left[\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) \cdot \left(1 - \frac{4x^2}{2} + o(x^2) \right) \cdot \left(1 - \frac{9x^2}{2} + o(x^2) \right) \right]}{ax^n}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{x^2}{2} + \frac{4x^2}{2} + \frac{9x^2}{2} \right) + o(x^2)}{ax^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x^2 + o(x^2)}{ax^n}$$

则 $n = 2, a = 7$.

(方法三)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{ax^n}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) + \cos x(1 - \cos 2x) + \cos x \cdot \cos 2x(1 - \cos 3x)}{ax^n}$$

$$= \frac{1}{a} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^n} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x(1 - \cos 2x)}{x^n} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \cos 2x(1 - \cos 3x)}{x^n} \right]$$

$$= \frac{1}{a} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^n} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{2}x^2}{x^n} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{9}{2}x^2}{x^n} \right],$$

则 $n = 2, a = 7$.

【评注】 本题主要考查无穷小量阶的比较及“ $\frac{0}{0}$ ”型极限的求法. 本题中的方法是求“ $\frac{0}{0}$ ”型极限常用的 3 种方法, 即洛必达法则、泰勒公式及等价无穷小代换.

22 (2018, 15 题, 10 分) 已知实数 a, b 满足 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(ax + b)e^{\frac{1}{x}} - x] = 2$, 求 a, b .

【解】
$$2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(ax + b)e^{\frac{1}{x}} - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} be^{\frac{1}{x}} + \lim_{x \rightarrow +\infty} (axe^{\frac{1}{x}} - x)$$

$$= b + \lim_{x \rightarrow +\infty} x(ae^{\frac{1}{x}} - 1)$$

即

$$2 - b = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(ae^{\frac{1}{x}} - 1)$$



$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) \quad (a = 1) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{1}{x} \quad (\text{等价无穷小代换}) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

则 $a = b = 1$.

23 (2019, 1 题, 4 分) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 若 $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 $k =$
 (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

【答案】 C.

【解析】 由于当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - \tan x \sim -\frac{1}{3}x^3$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^3} = -\frac{1}{3}$$

所以 $k = 3$, 故应选 (C).

练习题

1. (1994, 数一、数二, 4 分) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax + bx^2)}{x^2} = 2$, 则

- (A) $a = 1, b = -\frac{5}{2}$. (B) $a = 0, b = -2$.
 (C) $a = 0, b = -\frac{5}{2}$. (D) $a = 1, b = -2$.

2. (1998, 数一、数二, 5 分) 确定常数 a, b, c 的值, 使 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt} = c (c \neq 0)$.

3. (2011, 数二, 10 分) 已知函数 $F(x) = \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^a}$. 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0$, 试求 a

的取值范围.

4. (2013, 数一, 4 分) 已知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^k} = c$, 其中 k, c 为常数, 且 $c \neq 0$, 则

- (A) $k = 2, c = -\frac{1}{2}$. (B) $k = 2, c = \frac{1}{2}$.
 (C) $k = 3, c = -\frac{1}{3}$. (D) $k = 3, c = \frac{1}{3}$.

练习题参考答案

1. **【答案】** A.

【解析】 (方法一) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax + bx^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - (a + 2bx)}{2x}$ (洛必达法则)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - (1 + 2bx)}{2x} \quad (a = 1, \text{否则原式极限为 } \infty)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2} - 2b}{2} \quad (\text{洛必达法则})$$

$$= -\frac{1+2b}{2} = 2$$

则 $b = -\frac{5}{2}$, 故应选(A).

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

(方法二) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax + bx^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - ax}{x^2} - b$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - a}{2x} - b \quad (\text{洛必达法则})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} - b \quad (a = 1, \text{否则原式极限为 } \infty)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2x(1+x)} - b = -\frac{1}{2} - b = 2$$

则 $b = -\frac{5}{2}$.

(方法三) 由泰勒公式知

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax + bx^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-a)x - \left(\frac{1}{2} + b\right)x^2 + o(x^2)}{x^2} = 2$$

由此可得 $\begin{cases} 1-a=0, \\ -\left(\frac{1}{2} + b\right) = 2, \end{cases}$ 解得 $a=1, b=-\frac{5}{2}$.

2. 【解】 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt} = c \neq 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} (ax - \sin x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt = 0$,

从而有 $b = 0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos x}{x} \quad (\text{洛必达法则})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos x}{x^2} \quad (\text{等价无穷小代换 } \ln(1+x^3) \sim x^3)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (a = 1, \text{否则原式极限为 } \infty)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} \quad (\text{等价无穷小代换})$$

$$= \frac{1}{2} = c,$$



故 $a = 1, b = 0, c = \frac{1}{2}$.

【评注】 本题中用到两个常用的基本结论:

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$; 本题中由此结论得 $a = 1$;

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在但不为零, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

本题中由此结论得 $b = 0$.

$$\begin{aligned} 3. 【解】 \quad & \text{因为 } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}} \\ & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-1}} = \frac{2}{\alpha(\alpha-1)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}}, \end{aligned}$$

由题意 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$, 得 $\alpha > 1$.

$$\begin{aligned} \text{又因为 } \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^a} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{3-\alpha}, \end{aligned}$$

由题意 $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0$, 得 $\alpha < 3$. 综上所述, $1 < \alpha < 3$.

【评注】 本题主要考查用洛必达法则和等价无穷小代换求极限及变上限积分求导.

4. 【答案】 D.

$$【解析】 \quad c = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3}{x^k}, \quad (x - \arctan x \sim \frac{1}{3}x^3)$$

由于 $c \neq 0$, 则 $k = 3, c = \frac{1}{3}$, 故应选(D).

小结

对于确定极限中参数的问题, 一般方法是求所给的极限, 确定题中的参数. 有些参数在求极限的过程中可确定, 有些参数在求得极限以后可确定出来. 求极限的方法要根据题中所给极限类型来确定. 最常见的类型是“ $\frac{0}{0}$ ”型, 此类型常用的求解方法有三种: 洛必达法则、等价无穷小代换和泰勒公式.

六、无穷小量及其阶的比较

24(2009, 2 题, 4 分) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 是等价无穷小量, 则

$$(A) a = 1, b = -\frac{1}{6}.$$

$$(B) a = 1, b = \frac{1}{6}.$$

$$(C) a = -1, b = -\frac{1}{6}.$$

$$(D) a = -1, b = \frac{1}{6}.$$

【答案】 A.

【解析】 (方法一) 由题设知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 \ln(1 - bx)} = 1$. 又

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 \ln(1 - bx)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{-bx^3} \quad (\text{等价无穷小代换}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - a \cos ax}{-3bx^2} \quad (\text{洛必达法则}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{-3bx^2} \quad (a = 1, \text{否则与题设矛盾}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{-3bx^2} \quad (\text{等价无穷小代换}) \\ &= -\frac{1}{6b} = 1 \end{aligned}$$

则 $b = -\frac{1}{6}$, 故应选(A).

(方法二) 由泰勒公式知 $\sin ax = ax - \frac{(ax)^3}{3!} + o(x^3)$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 \ln(1 - bx)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left[ax - \frac{(ax)^3}{3!} + o(x^3) \right]}{x^2 \ln(1 - bx)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - a)x + \frac{a^3}{3!}x^3 + o(x^3)}{-bx^3} \quad (\text{等价无穷小代换}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

由此可得 $\begin{cases} 1 - a = 0, \\ \frac{a^3}{3!} = 1, \\ -b = 1, \end{cases}$ 解得 $a = 1, b = -\frac{1}{6}$. 故应选(A).

(方法三) 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 \ln(1 - bx)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{-bx^3} = 1$, 知 $a = 1$, 则

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{-bx^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{-bx^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3}{-bx^3}$$



从而 $b = -\frac{1}{6}$. 故应选(A).

【评注】 方法三最简单, 这里用到一个常用的结论: 当 $x \rightarrow 0$ 时 $x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$.

25 (2011, 1 题, 4 分) 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小, 则

(A) $k = 1, c = 4$.

(B) $k = 1, c = -4$.

(C) $k = 3, c = 4$.

(D) $k = 3, c = -4$.

【答案】 C.

【解析】 (方法一) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x - \sin 3x}{cx^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\cos x - 3\cos 3x}{ckx^{k-1}}$ (洛必达法则)

$$= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + 3\sin 3x}{ck(k-1)x^{k-2}} \quad (\text{洛必达法则})$$

$$= \frac{1}{c} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin 3x}{2x} \right) \quad (k = 3)$$

$$= \frac{1}{c} \left(-\frac{1}{2} + \frac{9}{2} \right) = 1$$

由此得 $c = 4$.

(方法二) 由泰勒公式知

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\sin 3x = 3x - \frac{(3x)^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\text{则 } f(x) = 3\sin x - \sin 3x = 3x - \frac{x^3}{2} - 3x + \frac{(3x)^3}{3!} + o(x^3)$$

$$= 4x^3 + o(x^3) \sim 4x^3 \quad (\text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时})$$

故 $k = 3, c = 4$.

(方法三) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x - \sin 3x}{cx^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x - 3x + 3x - \sin 3x}{cx^k}$

$$= \frac{1}{c} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(\sin x - x)}{x^k} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin 3x}{x^k} \right]$$

$$= \frac{1}{c} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \left(-\frac{1}{6}x^3\right)}{x^k} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}(3x)^3}{x^k} \right]$$

$$= \frac{1}{c} \left(-\frac{1}{2} + \frac{9}{2} \right) (k = 3)$$

$$= \frac{8}{2c} = 1$$

故 $c = 4$.

26 (2013, 1 题, 4 分) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 用“ $o(x)$ ”表示比 x 高阶的无穷小, 则下列式子中错误的是

(A) $x \cdot o(x^2) = o(x^3)$.

(B) $o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3)$.

(C) $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$.

(D) $o(x) + o(x^2) = o(x^2)$.

【答案】 D.

【解析】 若取 $o(x) = x^2$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x) + o(x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2} = 1 \neq 0$$

故应选(D).

【评注】 本题主要考查无穷小量阶的比较和 $o(x)$ 的运算.

27 (2014, 3 题, 4 分) 设 $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 若 $p(x) - \tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小, 则下列选项中错误的是

(A) $a = 0$.

(B) $b = 1$.

(C) $c = 0$.

(D) $d = \frac{1}{6}$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

【答案】 D.

【解析】 (方法一) 由 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x - x \sim \frac{1}{3}x^3$ 知, $\tan x$ 的泰勒公式为

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x) - \tan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + (b-1)x + cx^2 + (d - \frac{1}{3})x^3 + o(x^3)}{x^3} = 0,$$

所以 $a = 0, b = 1, c = 0, d = \frac{1}{3}$, 故应选(D).

(方法二) 显然, $a = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x) - \tan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx + cx^2 + dx^3 - \tan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b + 2cx + 3dx^2 - \sec^2 x}{3x^2}$$

由上式可知, $b = 1$, 否则, 等式右端极限为 ∞ , 则左端极限也为 ∞ , 与题设矛盾.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x) - \tan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2cx + 3dx^2 - \sec^2 x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2c}{3x} + d - \frac{1}{3}$$

则 $c = 0, d = \frac{1}{3}$. 故应选(D).

28 (2015, 15 题, 10 分) 设函数 $f(x) = x + a \ln(1+x) + bx \sin x, g(x) = kx^3$, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 时是等价无穷小, 求 a, b, k 的值.

【解】 因为 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$, 所以

$$f(x) = (1+a)x + \left(b - \frac{a}{2}\right)x^2 + \frac{a}{3}x^3 + o(x^3)$$

由于当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \sim kx^3$, 则

$$\begin{cases} 1+a=0 \\ b-\frac{a}{2}=0 \\ \frac{a}{3}=k \end{cases}$$

则 $a = -1, b = -\frac{1}{2}, k = -\frac{1}{3}$.



29 (2020, 15 题, 10 分) 已知 a, b 为常数, 若 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e$ 与 $\frac{b}{n^a}$ 在 $n \rightarrow \infty$ 时是等价无穷小, 求 a, b .

【解】 (方法一) 因为 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \sim \frac{b}{n^a} (n \rightarrow \infty)$, 所以

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e}{\frac{b}{n^a}} = \frac{e}{b} \lim_{n \rightarrow \infty} n^a \cdot [e^{\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}} - 1]$$

$$= \frac{e}{b} \lim_{n \rightarrow \infty} n^a \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{e}{b} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{a-1} \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}},$$

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = -\frac{1}{2}$, 所以 $1 = -\frac{e}{2b} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{a-1}$.

故 $a - 1 = 0$, $-\frac{e}{2b} = 1$, 解得 $a = 1, b = -\frac{e}{2}$.

(方法二) $e^{n \ln(1+\frac{1}{n})} - e = e^{\xi} \left[n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \right]$ (ξ 在 $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 和 1 之间) (拉格朗日中值定理)

$$\sim e \left[n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \right] = en \left[\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right]$$

$$\sim en \left(-\frac{1}{2n^2} \right) = -\frac{e}{2n}$$

则 $a = 1, b = -\frac{e}{2}$.

练习题

- (2004, 数一、数二, 4 分) 把 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷小 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt, \beta = \int_0^x \tan \sqrt{t} dt, \gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$ 排列起来, 使排在后面的一个是前一个的高阶无穷小, 则正确的排列次序是
(A) α, β, γ . (B) α, γ, β . (C) β, α, γ . (D) β, γ, α .
- (1997, 数二, 3 分) 设 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{\tan x} - e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小, 则 n 为
(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.
- (2001, 数二, 3 分) 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x) \ln(1 + x^2)$ 是比 $x \sin x^n$ 高阶的无穷小, 而 $x \sin x^n$ 是比 $e^{x^2} - 1$ 高阶的无穷小, 则正整数 n 等于
(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.
- (2005, 数二, 4 分) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x) = kx^2$ 与 $\beta(x) = \sqrt{1 + x \arcsin x} - \sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小, 则 $k =$ _____.
- (2013, 数二, 4 分) 设 $\cos x - 1 = x \sin \alpha(x)$, 其中 $|\alpha(x)| < \frac{\pi}{2}$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x)$ 是
(A) 比 x 高阶的无穷小. (B) 比 x 低阶的无穷小.

(C) 与 x 同阶但不等价的无穷小.(D) 与 x 等价的无穷小.

6. (2014, 数二, 4 分) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 若 $\ln^2(1+2x)$, $(1-\cos x)^{\frac{1}{2}}$ 均是比 x 高阶的无穷小, 则 α 的取值范围是

(A) $(2, +\infty)$.(B) $(1, 2)$.(C) $(\frac{1}{2}, 1)$.(D) $(0, \frac{1}{2})$.

练习题参考答案

1. 【答案】 B.

【解析】 (方法一) 对题中的三个无穷小量进行比较便可得到正确的结论. 常用的方法有两种: 一种是两两进行比较, 另一种是都与 x^k 进行比较. 由于

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\beta}{\gamma} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt}{\int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \tan x}{\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{洛必达法则}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2}{\frac{1}{2}x} \quad (\text{等价无穷小代换}) \\ &= 0\end{aligned}$$

即 β 为 γ 的高阶无穷小, β 应排在 γ 后面, 显然选项 (A)(C)(D) 都不正确, 故应选 (B).

(方法二) 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x^2}{kx^{k-1}} = 1, (k=1)$$

则当 $x \rightarrow 0^+$ 时, α 是 x 的一阶无穷小. 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \tan x}{kx^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2}{kx^{k-1}} = \frac{2}{3}, (k=3)$$

则当 $x \rightarrow 0^+$ 时, β 是 x 的三阶无穷小. 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x^{\frac{3}{2}}}{kx^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x^{\frac{2}{3}}}{kx^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x}{kx^{k-1}} = \frac{1}{4}, (k=2)$$

则当 $x \rightarrow 0^+$ 时, γ 是 x 的二阶无穷小, 故正确的排序为 α, γ, β , 选 (B).

2. 【答案】 C.

【解析】

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot (e^{\tan x - x} - 1)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x - x} - 1}{x^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^n} \quad (\text{等价无穷小代换})\end{aligned}$$

由于当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x - x$ 是 x 的三阶无穷小, 则 $n=3$.

【评注】 在无穷小量阶的比较和求极限中, 下列结论是常用的, 考生应熟悉; 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - \sin x, x - \tan x, \sin x - \tan x$ 都是 x 的三阶无穷小.



3.【答案】 B.

【解析】 由于

$$(1 - \cos x) \ln(1 + x^2) \sim \frac{1}{2}x^2 \cdot x^2 = \frac{1}{2}x^4$$

$$x \sin x^n \sim x^{n+1}$$

$$e^{x^2} - 1 \sim x^2$$

由题设知, $n+1 < 4$ 且 $n+1 > 2$, 则 $n+1 = 3$, 即 $n = 2$.

故应选(B).

4.【答案】 $\frac{3}{4}$.

$$\begin{aligned} \text{【解析】 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} &= \frac{1}{k} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \arcsin x} - \sqrt{\cos x}}{x^2} \\ &= \frac{1}{2k} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin x + 1 - \cos x}{x^2} \quad (\text{有理化}) \\ &= \frac{1}{2k} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \right] \\ &= \frac{1}{2k} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4k} = 1 \end{aligned}$$

故 $k = \frac{3}{4}$.

【评注】 本题主要考查无穷小量阶的比较和求极限的方法.

5.【答案】 C.

【解析】 因为 $\cos x - 1 = x \sin \alpha(x)$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

则有 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \alpha(x) = 0$, 又 $|\alpha(x)| < \frac{\pi}{2}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = 0$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{x} = -\frac{1}{2}$$

故应选(C).

6.【答案】 B.

【解析】 因为 $\ln^a(1+2x)$, $(1 - \cos x)^{\frac{1}{a}}$ 均是比 x 高阶的无穷小, 且当 $x \rightarrow 0^+$ 时

$$\ln^a(1+2x) \sim (2x)^a = 2^a x^a$$

$$(1 - \cos x)^{\frac{1}{a}} \sim \left(\frac{1}{2}x^2 \right)^{\frac{1}{a}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{a}} x^{\frac{2}{a}}$$

则 $\alpha > 1$, 且 $\frac{2}{\alpha} > 1$. 由此可得 $1 < \alpha < 2$, 故应选(B).



小结

有关无穷小量及其阶的比较主要是两类问题:

1. 无穷小量的比较,也就是判断一个无穷小量是另外一个无穷小量的高阶,同阶,等价或低阶无穷小;

2. 由两个无穷小量之间的关系(等价、同阶等),转化为确定极限中的参数问题.

以上两类问题的实质是“ $\frac{0}{0}$ ”型极限问题,常用方法有以下三种:

- (1) 洛必达法则;
- (2) 等价无穷小代换;
- (3) 泰勒公式.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

七、函数连续性及间断点的类型

30 (2009, 1 题, 4 分) 函数 $f(x) = \frac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为

- (A) 1. (B) 2.
(C) 3. (D) 无穷多个.

【答案】 C.

【解析】 $f(x) = \frac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 为初等函数, 当 $x = n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时 $f(x)$ 无意义, 这些点

都是 $f(x)$ 的间断点, 其余点都连续, 可去间断点处极限存在, 故应在 $x-x^3=0$ 的点 $x=0, x=\pm 1$ 中去找. 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-x^3}{\sin \pi x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1-x^2)}{\pi x} = \frac{1}{\pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-x^3}{\sin \pi x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-3x^2}{\pi \cos \pi x} = \frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-x^3}{\sin \pi x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-3x^2}{\pi \cos \pi x} = \frac{2}{\pi}$$

则 $f(x)$ 的可去间断点有 3 个, 即 $x=0, x=\pm 1$. 应选 (C).

【评注】 本题主要考查求间断点及间断点类型的判定. 本题有相当多的考生选择了 (D), 认为使 $\sin \pi x = 0$ 成立的点有无穷多个, 同时审题不细, 没具体考查 $f(x)$ 的极限是否存在以确定可去间断点的个数. 故错误率较高.

31 (2013, 2 题, 4 分) 函数 $f(x) = \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

【答案】 C.

【解析】 $f(x) = \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$ 在 $x = -1, 0, 1$ 处没定义.



$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{x \ln |x|} - 1}{x(x+1) \ln |x|} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x \ln |x|}{x(x+1) \ln |x|} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln |x|} - 1}{x(x+1) \ln |x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln |x|}{x(x+1) \ln |x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x \ln |x|} - 1}{x(x+1) \ln |x|} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln |x|}{x(x+1) \ln |x|} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

则 $x = 0$ 和 $x = 1$ 为可去间断点, 故应选(C).

【评注】 本题主要考查间断点类型的判定.

32 (2017, 1 题, 4 分) 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax}, & x > 0, \\ b, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则

(A) $ab = \frac{1}{2}$.

(B) $ab = -\frac{1}{2}$.

(C) $ab = 0$.

(D) $ab = 2$.

【答案】 A.

【解析】 要使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 则需

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}{ax} = \frac{1}{2a}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} b = b$$

即 $\frac{1}{2a} = b$, 从而有 $ab = \frac{1}{2}$.

故应选(A).

33 (2020, 2 题, 4 分) 函数 $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln |1+x|}{(e^x - 1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

【答案】 C.

【解析】 $f(x)$ 的定义域为 $\{x \mid x \in (-\infty, +\infty), x \neq -1, x \neq 0, x \neq 1, x \neq 2\}$, 而初等函数在定义域内是连续的, 所以该函数的所有间断点是 $-1, 0, 1, 2$. 由于

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln |1+x|}{(e^x - 1)(x-2)} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln |1+x|}{(e^x - 1)(x-2)} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln |1+x|}{(e^x - 1)(x-2)} = \infty, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln |1+x|}{(e^x - 1)(x-2)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln |1+x|}{(e^x - 1)(x-2)} = -\frac{1}{2e} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{e^x - 1} = -\frac{1}{2e}$$

所以 $x = 0$ 是函数的可去间断点, 而其余 3 个点均为函数的第二类间断点, 故应选(C).

练习题

1. (2008, 数二, 4分) 设函数 $f(x) = \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x$, 则 $f(x)$ 有
 (A) 1个可去间断点, 1个跳跃间断点. (B) 1个可去间断点, 1个无穷间断点.
 (C) 2个跳跃间断点. (D) 2个无穷间断点.
2. (2010, 数二, 4分) 函数 $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2-1} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为
 (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.
3. (2007, 数二, 4分) 函数 $f(x) = \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e) \tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的第一类间断点是 $x =$
 (A) 0. (B) 1. (C) $-\frac{\pi}{2}$. (D) $\frac{\pi}{2}$.

练习题参考答案

1. 【答案】 A.

【解析】 显然 $f(x)$ 只有两个间断点 $x=0$ 和 $x=1$, 因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} \ln|x| \cdot \sin x \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x-1|} = 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln|x| \cdot x \quad (\text{等价无穷小代换}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \quad (\text{洛必达法则}) \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \end{aligned}$$

则 $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点, 又

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x = \sin 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln[1+(x-1)]}{x-1} \\ &= \sin 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} \quad (\text{等价无穷小代换}) \\ &= \sin 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x = \sin 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln[1+(x-1)]}{-(x-1)} \\ &= \sin 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{-(x-1)} = -\sin 1 \end{aligned}$$

则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点, 故应选(A).

【评注】 部分考生只考虑 $x=1$ 时 $f(x)$ 的分母为零和 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln|x| = -\infty$, 没有仔细分析就选择了(B)或(D). 判断间断点类型一定要在求出极限后再下结论.

2. 【答案】 B.



【解析】 函数 $f(x)$ 在 $x=0, \pm 1$ 处无定义, 所以 $f(x)$ 有 3 个间断点. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = - \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \infty$$

因此 $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点, $x=-1$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点, 故应选(B).

【评注】 本题主要考查函数间断点的概念与分类和求极限的方法. 不少考生误选(C), 主要原因是误认为 $x=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点.

3. **【答案】** A.

【解析】 所给函数在 $[-\pi, \pi]$ 上的间断点为 $x=0, x=1, x=\pm \frac{\pi}{2}$, 不难验证 $x=1, x=\pm \frac{\pi}{2}$ 为无穷间断点, 故只能选(A). 事实上, 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e) \tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{1 + e^{1-\frac{1}{x}}}{1 - e^{1-\frac{1}{x}}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e) \tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}} + e}{e^{\frac{1}{x}} - e} = -1$$

因此 $x=0$ 是跳跃间断点, 即第一类间断点, 选(A).

小结

这里主要有以下三类问题:

1. 讨论函数的连续性

常用的方法有

- (1) 利用连续的定义(特别是分段函数的分界点);
- (2) 利用连续函数的运算法则(四则、复合及反函数);
- (3) 利用初等函数在其定义区间内都是连续的.

2. 求已知表达式函数的间断点并判别类型

首先求出函数没有定义的点(必为间断点)和分段函数分界点(可疑间断点), 再对以上点按间断点的分类判别其类型.

3. 求由极限式定义的函数的间断点并判别其类型

此类问题首先求出极限得到所要讨论的函数 $f(x)$ 的表达式, 然后再求间断点并判别其类型.

第二章 一元函数微分学

本章导读

导数与微分是微分学的两个基本概念,是研究函数局部性质的基础.微分中值定理建立了函数和导数之间的联系,是利用导数研究函数基本性质的理论基础.

其主要内容有:

- (1) 导数与微分的概念及其几何意义;
- (2) 连续、可导、可微之间的关系;
- (3) 微分法(有理运算,复合函数,隐函数,参数方程等);
- (4) 微分中值定理(罗尔,拉格朗日,柯西,泰勒);
- (5) 函数基本性质及判定(单调性,极值与最值,曲线的凹凸性与拐点,渐近线).

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)

试题特点

本章考试内容多,考题比例大(一般 20 分左右),有基本概念——导数与微分,基本方法——微分法,基本理论——微分中值定理,应用——函数性质.

本章常考题型

- (1) 导数概念;
- (2) 微分法(复合函数,隐函数,参数方程);
- (3) 函数的单调性与极值;
- (4) 曲线的凹向与拐点;
- (5) 方程的根;
- (6) 证明函数不等式;
- (7) 微分中值定理证明题.

后三种题型是难点,考研试卷最难的题经常出在这一章,那就是与微分中值定理有关的证明题.

考题详析

一、导数与微分的概念

1 (2011, 2 题, 4 分) 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$

(A) $-2f'(0)$.

(B) $-f'(0)$.



(C) $f'(0)$.

(D) 0.

【答案】 B.

【解析】 (方法一) 加项减项凑 $x=0$ 处导数定义

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - x^2 f(0) - 2f(x^3) + 2f(0)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x} - 2 \frac{f(x^3) - f(0)}{x^3} \right] \\ &= f'(0) - 2f'(0) = -f'(0)\end{aligned}$$

(方法二) 拆项用导数定义

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3)}{x^3}$$

由于 $f(0) = 0$, 由导数定义知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0), \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3)}{x^3} = f'(0)$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} = f'(0) - 2f'(0) = -f'(0).$$

(方法三) 排除法: 选择符合条件的具体函数 $f(x)$, 令 $f(x) = x$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^3}{x^3} = -1$$

而对于 $f(x) = x, f'(0) = 1$, 显然选项(A)(C)(D) 都是错误的, 故应选(B).

(方法四) 由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 则

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x) = f'(0)x + o(x)$$

$$f(x^3) = f'(0)x^3 + o(x^3)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 [f'(0)x + o(x)] - 2[f'(0)x^3 + o(x^3)]}{x^3} \\ &= f'(0) - 2f'(0) = -f'(0)\end{aligned}$$

2 (2015, 19 题, 10 分) (I) 设函数 $u(x), v(x)$ 可导, 利用导数定义证明

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

(II) 设函数 $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ 可导, $f(x) = u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$, 写出 $f(x)$ 的求导公式.

【解】 (I) 令 $f(x) = u(x)v(x)$, 由导数定义知

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x + \Delta x) + u(x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} v(x + \Delta x) + u(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \\ &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x).\end{aligned}$$

$$(II) f'(x) = u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x) + u_1(x)u_2'(x)\cdots u_n(x) + \cdots + u_1(x)u_2(x)\cdots u_n'(x).$$



3 (2018, 1 题, 4 分) 下列函数中, 在 $x=0$ 处不可导的是

(A) $f(x) = |x| \sin |x|$.

(B) $f(x) = |x| \sin \sqrt{|x|}$.

(C) $f(x) = \cos |x|$.

(D) $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$.

【答案】 D.

【解析】 由导数定义知

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{|x|} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{2}|x|}{x} = -\frac{1}{2}$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos \sqrt{|x|} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\frac{1}{2}|x|}{x} = \frac{1}{2}$$

则 $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$ 在 $x=0$ 处不可导, 故应选(D).

练习题

1. (2004, 数二, 4 分) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f'(0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得

(A) $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调增加.

(B) $f(x)$ 在 $(-\delta, 0)$ 内单调减少.

(C) 对任意 $x \in (0, \delta)$ 有 $f(x) > f(0)$.

(D) 对任意 $x \in (-\delta, 0)$ 有 $f(x) > f(0)$.

2. (2013, 数二, 4 分) 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $\cos(xy) + \ln y - x = 1$ 确定, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[f\left(\frac{2}{n}\right) - 1 \right] =$

(A) 2.

(B) 1.

(C) -1.

(D) -2.

练习题参考答案

1. 【答案】 C.

【解析】 由于 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} > 0$, 所以由函数极限的局部保号性知, 存在 $\delta > 0$, 使

得当 $0 < |x| < \delta$ 时, $\frac{f(x) - f(0)}{x} > 0$, 则

当 $x \in (-\delta, 0)$ 时, $f(x) - f(0) < 0$, 即有 $f(x) < f(0)$;

当 $x \in (0, \delta)$ 时, $f(x) - f(0) > 0$, 即有 $f(x) > f(0)$.

故应选(C).

【评注】 (1) 不少考生选(A). 错误的将区间上导数大于零可推得函数在该区间上单调增的结论应用到一点处导数大于零. 事实上由 $f'(x_0) > 0$ 得不出在 x_0 的某邻域内函数单调增的结论. 例如

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = 1 > 0$$



$$f'(x) = 1 + 4x \sin \frac{1}{x} - 2 \cos \frac{1}{x}, (x \neq 0)$$

对任意 $\delta > 0$, 只要 n 充分大, 则有 $\frac{1}{2n\pi} \in (-\delta, \delta)$, 此时 $f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = 1 - 2 = -1 < 0$, 从而 $f(x)$ 在 $(-\delta, \delta)$ 内不会单调增加.

(2) 从本题的讨论可得到一个常用结论:

若 $f'(x_0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f(x) < f(x_0)$; 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f(x) > f(x_0)$. 若 $f'(x_0) < 0$, 则有类似结论.

2. 【答案】 A.

【解析】由方程 $\cos(xy) + \ln y - x = 1$ 可知, $y(0) = f(0) = 1$.

方程两端对 x 求导, 得

$$-\sin(xy)(y + xy') + \frac{1}{y} \cdot y' - 1 = 0$$

将 $x = 0, y = 1$ 代入上式得 $y'(0) = f'(0) = 1$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[f\left(\frac{2}{n}\right) - 1 \right] = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(0 + \frac{2}{n}\right) - f(0)}{\frac{2}{n}} = 2f'(0) = 2$$

故应选(A).

【评注】 本题主要考查导数的定义和隐函数求导法.

部分考生看不出极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[f\left(\frac{2}{n}\right) - 1 \right]$ 与函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的导数的联系, 无从下手.

小结

这里常见的是以下两种问题:

(1) 已知 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 求与 $f(x)$ 在 x_0 点导数定义 $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 有关的极限.

(2) 第(1)种问题的反问题, 即已知与 $f(x)$ 在 x_0 点导数定义 $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 有关的极限存在, 问 $f(x)$ 在 x_0 处是否可导.

二、导数与微分计算

4 (2011, 9 题, 4 分) 设 $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} x(1 + 3t)^{\frac{x}{t}}$, 则 $f'(x) =$ _____.

【答案】 $e^{3x}(1 + 3x)$.



【解析】 由于 $\lim_{t \rightarrow 0} 3t \cdot \frac{x}{t} = 3x$, 则 $\lim_{t \rightarrow 0} (1+3t)^{\frac{x}{t}} = e^{3x}$. 所以

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} [(1+3t)^{\frac{1}{3t}}]^{3x} = xe^{3x}$$

$$f'(x) = e^{3x} + 3xe^{3x} = e^{3x}(1+3x)$$

5 (2012, 2 题, 4 分) 设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$, 其中 n 为正整数, 则 $f'(0) =$

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$.

(B) $(-1)^n(n-1)!$.

(C) $(-1)^{n-1}n!$.

(D) $(-1)^nn!$.

【答案】 A.

【解析】 (方法一) 令 $g(x) = (e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$, 则

$$f(x) = (e^x - 1)g(x)$$

$$f'(x) = e^x g(x) + (e^x - 1)g'(x)$$

$$f'(0) = g(0) = (-1) \cdot (-2) \cdots (-(n-1)) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

故应选(A).

(方法二) 由于 $f(0) = 0$, 由导数定义知

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$$

$$= (-1) \cdot (-2) \cdots (-(n-1)) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

(方法三) 排除法, 令 $n = 2$, 则

$$f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2)$$

$$f'(x) = e^x(e^{2x} - 2) + 2e^{2x}(e^x - 1)$$

$$f'(0) = (1 - 2) = -1$$

显然(B)(C)(D) 均不正确, 故应选(A).

6 (2012, 10 题, 4 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \ln \sqrt{x}, & x \geq 1, \\ 2x - 1, & x < 1, \end{cases}$ $y = f(f(x))$, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=e} =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{e}$.

【解析】 $y = f(f(x))$ 可看作 $y = f(u)$, 与 $u = f(x)$ 的复合, 当 $x = e$ 时

$$u = f(e) = \ln \sqrt{e} = \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{2}$$

由复合函数求导法则知

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=e} = f'\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f'(e) = 2 \cdot \frac{1}{2x} \Big|_{x=e} = \frac{1}{e}$$

练习题

1. (2009, 数二, 4 分) 设 $y = y(x)$ 是由方程 $xy + e^y = x + 1$ 确定的隐函数, 则

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}.$$



2. (2010, 数一, 4 分) 设 $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = \int_0^t \ln(1+u^2) du, \end{cases}$ 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} =$ _____.

3. (2005, 数二, 4 分) 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内

(A) 处处可导.

(B) 恰有一个不可导点.

(C) 恰有两个不可导点.

(D) 至少有三个不可导点.

4. (2013, 数二, 4 分) 设函数 $f(x) = \int_{-1}^x \sqrt{1-e^t} dt$, 则 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在 $y =$

0 处的导数 $\left. \frac{dx}{dy} \right|_{y=0} =$ _____.

5. (2007, 数二, 10 分) 已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数, 且 $f'(0) = 1$, 函数 $y = y(x)$ 由方程 $y - xe^{y-1} = 1$ 所确定. 设 $z = f(\ln y - \sin x)$, 求 $\left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=0}, \left. \frac{d^2 z}{dx^2} \right|_{x=0}$.

练习题参考答案

1. 【答案】 -3.

【解析】 将 $x = 0$ 代入方程 $xy + e^y = x + 1$ 得 $y = 0$.

在方程 $xy + e^y = x + 1$ 两端对 x 求导得

$$y + xy' + e^y y' = 1$$

将 $x = 0, y = 0$ 代入上式得 $y'(0) = 1$.

等式 $y + xy' + e^y y' = 1$ 两端再对 x 求导得

$$y' + y' + xy'' + e^y (y')^2 + e^y y'' = 0$$

将 $x = 0, y = 0, y'(0) = 1$ 代入上式得 $y''(0) = -3$.

2. 【答案】 0.

【解析】 (方法一) $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\ln(1+t^2)}{-e^{-t}} = -e^t \ln(1+t^2)$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} [-e^t \ln(1+t^2)] \cdot \frac{1}{x'(t)} = e^{2t} \left[\frac{2t}{1+t^2} + \ln(1+t^2) \right]$$

则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = 0$.

(方法二) 由参数方程求导公式知

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = \frac{y''(0)x'(0) - x''(0)y'(0)}{[x'(0)]^3}$$

$$x'(t) = -e^{-t}, x''(t) = e^{-t}, x'(0) = -1, x''(0) = 1$$

$$y'(t) = \ln(1+t^2), y''(t) = \frac{2t}{1+t^2}, y'(0) = 0, y''(0) = 0$$

代入上式得 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = 0$.

(方法三) 由 $x = e^{-t}$ 得, $t = -\ln x$, 则



$$y = \int_0^{-\ln x} \ln(1+u^2) du$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x} \ln(1+\ln^2 x)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \left[\ln(1+\ln^2 x) - \frac{2\ln x}{1+\ln^2 x} \right]$$

当 $t=0$ 时 $x=1$, 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = 0$.

【评注】 本题是一道参数方程求导的试题, 本题中前两种方法是常用的两种方法.

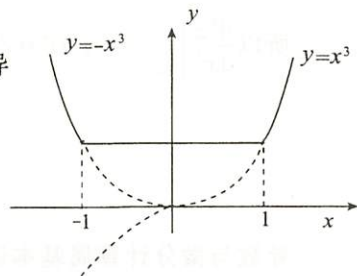
3. 【答案】 C.

【解析】 先求极限得到 $f(x)$ 的表达式, 然后再讨论 $f(x)$ 的可导性.

$$\text{由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max_{1 \leq i \leq m} a_i (a_i > 0) \text{ 知}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^{3n}}$$

$$= \max\{1, |x|^3\} = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1. \\ |x|^3, & |x| > 1. \end{cases}$$



由 $y=f(x)$ 的表达式和其图形可知, $f(x)$ 在 $x \pm 1$ 处不可导(尖点), 在其余点均可导, 故应选(C).

【评注】 本题求得 $f(x)$ 的表达式后, 也可根据表达式确定各点的可导性, 由其表达式知, $f(x)$ 不可导点最多两个, 即 $x \pm 1$, 其余点均可导, 又由 $f(x)$ 表达式知 $f(x)$ 为偶函数, 则 $f(x)$ 在 $x = \pm 1$ 两点处可导性相同, 因此, 只需讨论 $x=1$ 处的可导性.

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-1}{x-1} = 0, f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3-1}{x-1} = 3$$

则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导, 从而在 $x=-1$ 处也不可导.

4. 【答案】 $\frac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}$.

【解析】 由 $y = f(x) = \int_{-1}^x \sqrt{1-e^t} dt$, 知 $y=0$ 时, $x=-1$, 根据反函数的求导法则有

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{\sqrt{1-e^x}}, \left. \frac{dx}{dy} \right|_{y=0} = \frac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}$$

5. 【解】 在 $y - xe^{y-1} = 1$ 中, 令 $x=0$ 得 $y=1$.

等式 $y - xe^{y-1} = 1$ 两边对 x 求导得

$$y' - e^{y-1} - xy'e^{y-1} = 0$$

由 $y - xe^{y-1} = 1$ 可得 $xe^{y-1} = y-1$, 代入上式得

$$(2-y)y' - e^{y-1} = 0 \quad (*)$$

由 $x=0, y=1$, 得 $y' \Big|_{x=0} = 1$.



在(*)式两边对 x 求导得

$$(2-y)y'' - y'^2 - e^{y-1}y' = 0$$

由 $x=0, y=1, y'|_{x=0} = 1$ 得 $y''|_{x=0} = 2$. 因为

$$\frac{dz}{dx} = f'(\ln y - \sin x) \left(\frac{y'}{y} - \cos x \right)$$

故 $\frac{dz}{dx}|_{x=0} = 0$. 又

$$\frac{d^2z}{dx^2} = f''(\ln y - \sin x) \left(\frac{y'}{y} - \cos x \right)^2 + f'(\ln y - \sin x) \left(\frac{y''}{y} - \frac{(y')^2}{y^2} + \sin x \right)$$

所以 $\frac{d^2z}{dx^2}|_{x=0} = f'(0)(2-1) = 1$.

小结

导数与微分计算属基本运算,几乎年年都考,主要有以下几种题型:

- (1) 复合函数求导;
- (2) 隐函数求导;
- (3) 参数方程求导;
- (4) 高阶导数计算;
- (5) 分段函数的导数.

三、导数的几何意义

7 (2011, 11 题, 4 分) 曲线 $\tan\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right) = e^y$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为_____.

【答案】 $y = -2x$.

【解析】 方程 $\tan\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right) = e^y$ 两端对 x 求导得

$$\sec^2\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)(1+y') = e^y y'$$

将 $x=0, y=0$ 代入上式得 $y' = -2$, 故所求切线方程为 $y = -2x$.

8 (2013, 9 题, 4 分) 设曲线 $y = f(x)$ 与 $y = x^2 - x$ 在点 $(1,0)$ 处有公共切线, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{n}{n+2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 -2 .

【解析】 由曲线 $y = f(x)$ 与 $y = x^2 - x$ 在 $(1,0)$ 处有公共切线知

$$f(1) = 0, f'(1) = (2x-1)|_{x=1} = 1$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{n}{n+2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{n+2} \cdot \frac{f\left(1 + \frac{-2}{n+2}\right) - f(1)}{\frac{-2}{n+2}} = -2f'(1) = -2$$

【评注】 本题主要考查导数的定义和导数的几何意义.

9 (2015, 18 题, 10 分) 设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零. 若对任意的 $x_0 \in I$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与直线 $x = x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4, 且 $f(0) = 2$, 求 $f(x)$ 的表达式.

【分析】 利用已知条件列出微分方程, 解此微分方程求出 $f(x)$.

【解】 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

令 $y = 0$ 得, $x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, 切线 $x = x_0$ 及 x 轴所围区域的面积为

$$S = \frac{1}{2} \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \cdot |f(x_0)| = 4$$

即 $\frac{1}{2} \frac{f^2(x_0)}{f'(x_0)} = 4$, 即 $y = f(x)$ 满足方程 $\frac{1}{2} y^2 = 4y'$, 解得 $\frac{8dy}{y^2} = dx$, 即 $-\frac{8}{y} = x + C$,

由 $y(0) = 2$ 知, $C = -4$.

则所求曲线为 $y = \frac{8}{4-x}$.

10 (2020, 10 题, 4 分) 曲线 $x + y + e^{2xy} = 0$ 在点 $(0, -1)$ 处的切线方程为_____.

【答案】 $y = x - 1$.

【解析】 等式 $x + y + e^{2xy} = 0$ 两端对 x 求导得

$$1 + y' + e^{2xy} 2(y + xy') = 0$$

将 $x = 0, y = -1$ 代入上式得 $y'(0) = 1$, 故切线方程为 $y = x - 1$.

练习题

1. (2010, 数二, 4 分) 曲线 $y = x^2$ 与曲线 $y = a \ln x (a \neq 0)$ 相切, 则 $a =$

(A) $4e$.

(B) $3e$.

(C) $2e$.

(D) e .

2. (2002, 数二, 6 分) 已知曲线的极坐标方程是 $r = 1 - \cos \theta$, 求该曲线上对应于 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 处的

切线与法线的直角坐标方程.

3. (2013, 数二, 4 分) 曲线 $\begin{cases} x = \arctan t, \\ y = \ln \sqrt{1+t^2} \end{cases}$ 上对应于 $t = 1$ 的点处的法线方程为_____.

4. (2000, 数二, 7 分) 已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数, 它在 $x = 0$ 的某邻域内满足关系式

$$f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x) = 8x + \alpha(x)$$

其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \rightarrow 0$ 时比 x 高阶的无穷小, 且 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程.



练习题参考答案

1.【答案】 C.

【解析】 设曲线 $y = x^2$ 与曲线 $y = a \ln x (a \neq 0)$ 的公切点为 (x_0, y_0) , 则

$$\begin{cases} x_0^2 = a \ln x_0 \\ 2x_0 = \frac{a}{x_0} \end{cases}$$

由此可得 $x_0 = \sqrt{e}, a = 2e$, 故应选(C).

【评注】 本题主要考查导数的几何意义. 两条曲线相切在切点处不仅导数值相同而且函数值相同. 部分考生未能得到正确选项, 可能是只注意到在切点处导数值相等, 而未利用函数值也相等的条件.

2.【分析】 此类问题的一般方法是将 $r = 1 - \cos \theta$ 代入 $\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \end{cases}$ 得到曲线的参数方程(θ 为参数), 然后用参数方程求导法求出切线斜率.

【解】 曲线 $r = 1 - \cos \theta$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = (1 - \cos \theta) \cos \theta = \cos \theta - \cos^2 \theta \\ y = (1 - \cos \theta) \sin \theta = \sin \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \end{cases}$$

令 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 得切点坐标为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

切线斜率为

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \left. \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)} \right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = \left. \frac{\cos \theta - \cos 2\theta}{-\sin \theta + \sin 2\theta} \right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = 1$$

则所求切线直角坐标方程为 $y - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = x - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}\right)$, 即

$$x - y + \frac{5}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4} = 0$$

法线的直角坐标方程为 $y - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = -\left[x - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}\right)\right]$, 即

$$x + y + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

3.【答案】 $y + x = \frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2}$.

【解析】 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = t$,

曲线上对应 $t = 1$ 的点处的切线斜率为 1, 因而该点处法线的斜率为 -1,



于是所求的法线方程为

$$y - \ln\sqrt{2} = -\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{即 } y + x = \frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2}.$$

【评注】 本题主要考查导数的几何意义和参数方程求导法.

4. 【解】 由 $\lim_{x \rightarrow 0} [f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x)] = \lim_{x \rightarrow 0} [8x + \alpha(x)]$, 得 $f(1) - 3f(1) = 0$, 故 $f(1) = 0$. 又

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{8x}{\sin x} + \frac{\alpha(x)}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} \right) = 8$$

设 $\sin x = t$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x)}{\sin x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1 + t) - f(1)}{t} + 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1 - t) - f(1)}{-t} = 4f'(1)$$

所以 $f'(1) = 2$. 由于 $f(x)$ 是周期为 5 的周期函数, 则 $f'(6) = f'(1) = 2$,

故所求的切线方程为 $y = 2(x - 6)$, 即 $2x - y - 12 = 0$.

小结

导数的几何意义是切线的斜率. 有关的考题通常是建立曲线的切线方程或法线方程, 其关键是求切线的斜率 k .

(1) 若曲线由显式方程 $y = f(x)$ 给出, 则该曲线在 $x = x_0$ 处切线斜率为: $k = f'(x_0)$.

(2) 若曲线由 $F(x, y) = 0$ 给出, 则可用隐函数求导法求得: $k = y'(x_0)$.

(3) 若曲线由参数方程 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$ 给出, 则曲线对应 $t = t_0$ 处切线斜率为

$$k = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=t_0} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$$

(4) 若曲线由极坐标方程 $r = r(\theta)$ 给出, 此时, 可得到该曲线参数方程 $\begin{cases} x = r(\theta) \cos \theta, \\ y = r(\theta) \sin \theta, \end{cases}$

$$k = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}$$

四、函数的单调性、极值与最值

11 (2010, 3 题, 4 分) 设函数 $f(x), g(x)$ 具有二阶导数, 且 $g''(x) < 0$. 若 $g(x_0) = a$ 是 $g(x)$ 极值, 则 $f(g(x))$ 在 x_0 取极大值的一个充分条件是

- (A) $f'(a) < 0$. (B) $f'(a) > 0$. (C) $f''(a) < 0$. (D) $f''(a) > 0$.

【答案】 B.



【解析】 由于 $g(x_0)$ 是 $g(x)$ 的极值, 且 $g(x)$ 可导, 则 $g'(x_0) = 0$, 记 $y = f(g(x))$, 则

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = f'(g(x))g'(x) \Big|_{x=x_0} = f'(a)g'(x_0) = 0$$

从而 $x = x_0$ 为函数 $y = f(g(x))$ 的驻点. 又

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(g(x))g'^2(x) + f'(g(x))g''(x)$$

$$\text{则 } \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=x_0} = f'(g(x_0))g''(x_0) = f'(a)g''(x_0).$$

由题设知 $g''(x_0) < 0$, 所以, 若 $f'(a) > 0$, 则 $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=x_0} < 0$, 从而 $y = f(g(x))$ 在 x_0 取极大值, 故应选(B).

12 (2016, 17 题, 10 分) 设函数 $f(x) = \int_0^1 |t^2 - x^2| dt (x > 0)$, 求 $f'(x)$ 并求 $f(x)$ 的最小值.

$$\text{【解】 } f(x) = \begin{cases} \int_0^x (x^2 - t^2) dt + \int_x^1 (t^2 - x^2) dt, & 0 < x < 1 \\ \int_0^1 (x^2 - t^2) dt, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{3} - x^2 + \frac{4}{3}x^3, & 0 < x < 1 \\ x^2 - \frac{1}{3}, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 4x^2, & 0 < x < 1 \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$$

$f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2x + 4x^2) = 2$, 则 $f'_-(1) = 2$,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x) = 2$$

则 $f'_+(1) = 2, f'(1) = 2$.

令 $f'(x) = 0$, 即 $4x^2 - 2x = 0, (0 < x < 1)$. 所以 $2x(2x - 1) = 0, x = \frac{1}{2}$,

当 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调减少;

当 $\frac{1}{2} < x < 1$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调增加;

当 $1 < x$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调增加,

则 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 处取最小值, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$.

13 (2017, 3 题, 4 分) 设函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(x)f'(x) > 0$, 则

(A) $f(1) > f(-1)$.

(B) $f(1) < f(-1)$.

(C) $|f(1)| > |f(-1)|$.

(D) $|f(1)| < |f(-1)|$.

【答案】 C.

【解析】 (方法一) 直接法

由 $f(x)f'(x) > 0$ 知

$$\left[\frac{1}{2}f^2(x)\right]' = f(x)f'(x) > 0$$

则 $\frac{1}{2}f^2(x)$ 单调递增, 从而 $f^2(x)$ 单调递增, 由此可知

$$f^2(1) > f^2(-1)$$

上式两端开方得

$$|f(1)| > |f(-1)|$$

(方法二) 排除法

若取 $f(x) = e^x$, 则 $f'(x) = e^x$, $f(x)f'(x) = e^{2x} > 0$, $f(1) = e$, $f(-1) = \frac{1}{e}$.

显然 $f(1) > f(-1)$, $|f(1)| > |f(-1)|$.

由此可知, (B)(D) 选项是错误的.

若取 $f(x) = -e^x$, 则 $f'(x) = -e^x$, $f(x)f'(x) = e^{2x} > 0$, $f(1) = -e$, $f(-1) = -\frac{1}{e}$.

由此知, $f(1) < f(-1)$, (A) 选项是错误的, 故应选 (C).

14 (2019, 15 题, 10 分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^{2x}, & x > 0, \\ xe^x + 1, & x \leq 0, \end{cases}$ 求 $f'(x)$, 并求 $f(x)$ 的极值.

【解】 当 $x > 0$ 时, $f'(x) = (e^{2x \ln x})'$
 $= e^{2x \ln x} (2x \ln x + 2) = 2x^{2x} (\ln x + 1)$

当 $x < 0$ 时, $f'(x) = (x+1)e^x$

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x \ln x} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \ln x}{x} = \infty \end{aligned}$$

则 $f'(0)$ 不存在.

令 $f'(x) = 0$ 得 $x = -1$, $x = \frac{1}{e}$, 而 $f'(0)$ 不存在.

当 $x < -1$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $-1 < x < 0$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $x = -1$ 为极小值点, $f(-1) = 1 - \frac{1}{e}$;

当 $-1 < x < 0$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $x = 0$ 为极大值点, $f(0) = 1$;

当 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > \frac{1}{e}$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $x = \frac{1}{e}$ 为极小值点, $f\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-\frac{2}{e}}$.

练习题

1. (2010, 数一, 10 分) 求函数 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt$ 的单调区间与极值.

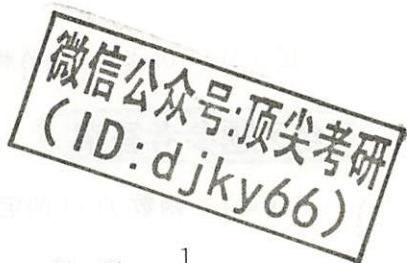
2. (2009, 数二, 4 分) 函数 $y = x^{2x}$ 在区间 $(0, 1]$ 上的最小值为_____.

3. (2000, 数二, 4 分) 设 $f(x), g(x)$ 是恒大于零的可导函数, 且 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$,

则当 $a < x < b$ 时, 有

(A) $f(x)g(b) > f(b)g(x)$.

(B) $f(x)g(a) > f(a)g(x)$.



(C) $f(x)g(x) > f(b)g(b)$.(D) $f(x)g(x) > f(a)g(a)$.4. (2014, 数二, 10 分) 已知函数 $y = y(x)$ 满足微分方程

$$x^2 + y^2 y' = 1 - y'$$

且 $y(2) = 0$. 求 $y(x)$ 的极大值与极小值.

练习题参考答案

1. 【解】 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 且

$$f(x) = x^2 \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt - \int_1^{x^2} t e^{-t^2} dt$$

$$f'(x) = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt + 2x^3 e^{-x^4} - 2x^3 e^{-x^4} = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0, x = \pm 1$, 列表如下:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	极小	$\nearrow$	极大	$\searrow$	极小	$\nearrow$

由以上表格可知, $f(x)$ 单调增加区间为 $(-1, 0)$ 和 $(1, +\infty)$; $f(x)$ 单调减少区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(0, 1)$.

$f(x)$ 的极小值为 $f(\pm 1) = \int_1^1 (1-t)e^{-t^2} dt = 0$, 极大值为 $f(0)$,

$$f(0) = -\int_1^0 t e^{-t^2} dt = \int_0^1 t e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

【评注】 本题主要考查变上限积分求导和定积分计算, 以及求函数单调区间与极值的方法. 考的是基本内容和常见问题, 但该题的得分率并不高, 考生的主要问题是:

(1) 不能正确求出 $f'(x) = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt$ 是最普通的错误;

(2) 部分考生由于粗心只求出一个驻点 $x = 0$, 漏掉了驻点 $x = \pm 1$;

(3) 部分考生不能正确表示单调区间, 将单调增加区间写成了 $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$, 单调减少区间写成了 $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

2. 【答案】 $e^{-\frac{2}{e}}$.

【解析】 因为 $y' = x^{2x}(2\ln x + 2)$, 令 $y' = 0$ 得驻点 $x = \frac{1}{e}$, 当 $x \in (0, \frac{1}{e})$ 时, $y' < 0$, $y(x)$

单调减少; 当 $x \in (\frac{1}{e}, 1]$ 时, $y' > 0$, $y(x)$ 单调增加, 则 $y(x)$ 在 $x = \frac{1}{e}$ 处取到区间 $(0, 1]$ 上的最小

值, 最小值为 $y\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-\frac{2}{e}}$.

3. 【答案】 A.

【解析】由题设知 $\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} < 0$, 即 $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' < 0$,

从而 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 单调减少. 由 $a < x < b$ 知 $\frac{f(a)}{g(a)} > \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{f(b)}{g(b)}$, 则 $f(x)g(b) > f(b)g(x)$.

故应选(A).

4.【解】由 $x^2 + y^2 y' = 1 - y'$, 得 $y' = \frac{1-x^2}{1+y^2}$. 令 $y' = 0$, 得 $x = \pm 1$, 且

当 $x < -1$ 时, $y' < 0$; 当 $-1 < x < 1$ 时, $y' > 0$; 当 $x > 1$ 时, $y' < 0$.

所以, 函数 $y = y(x)$ 在 $x = -1$ 处取得极小值, 在 $x = 1$ 处取得极大值. 由方程 $x^2 + y^2 y' = 1 - y'$ 得

$$(1+y^2)y' = 1-x^2 \quad (1)$$

$$\int (1+y^2)dy = \int (1-x^2)dx$$

$$x^3 + y^3 - 3x + 3y = C$$

由 $y(2) = 0$ 得 $C = 2$.

$$x^3 + y^3 - 3x + 3y = 2 \quad (2)$$

由(2)式得

$$y(-1) = 0, y(1) = 1$$

小结

这里主要是三个基本问题.

1. 判断函数单调性的常用结论有:

(1) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导

① 若在 (a, b) 内 $f'(x) > 0 (< 0)$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加(减少);

② 若在 (a, b) 内 $f'(x) \geq 0 (\leq 0)$, 且在 (a, b) 的任意子区间上 $f'(x) \not\equiv 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加(减少).

(2) 设 $f(x)$ 在区间 I 上可导, 则 $f(x)$ 在区间 I 上单调不减(增) $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 (\leq 0)$.

2. 求函数的极值

分两步进行:

(1) 求出可能的极值点, 即驻点和导数不存在的点;

(2) 对以上两种点用极值充分条件作判定.

3. 求最大最小值

这里主要是两类问题:

(1) 求连续函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的最值.

首先求出 $f(x)$ 在 (a, b) 内可能的极值点, 即驻点和导数不存在的点, 然后将可能的极值点上的函数值与两端点函数值 $f(a), f(b)$ 比较, 便可得到 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最值.

若 $f(x)$ 在 (a, b) 内只有唯一的极值点, 且在该点取得极值, 则该极值必为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最值.



(2) 最值的应用题.

首先建立目标函数并确定其定义域, 此时问题转化为(1) 进一步求解.

五、曲线的凹凸、拐点及渐近线

15 (2010, 12 题, 4 分) 若曲线 $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ 有拐点 $(-1, 0)$, 则 $b =$ _____.

【答案】 3.

【解析】 曲线 $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ 应该过点 $(-1, 0)$, 则

$$0 = -1 + a - b + 1$$

$$a - b = 0$$

$$y' = 3x^2 + 2ax + b$$

$$y'' = 6x + 2a, y'' \Big|_{x=-1} = 0$$

$$-6 + 2a = 0$$

即

即

则 $a = b = 3$.

16 (2012, 1 题, 4 分) 曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 的渐近线的条数为

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

【答案】 C.

【解析】 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1$,

得 $y = 1$ 是曲线的一条水平渐近线且曲线没有斜渐近线;

由 $\lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \infty$ 得 $x = 1$ 是曲线的一条垂直渐近线;

由 $\lim_{x \rightarrow -1} y = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}$ 得 $x = -1$ 不是曲线的渐近线,

所以曲线有两条渐近线, 故应选(C).

17 (2012, 19 题, 10 分) 已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 及 $f''(x) + f(x) = 2e^x$.

(I) 求 $f(x)$ 的表达式;

(II) 求曲线 $y = f(x^2) \int_0^x f(-t^2) dt$ 的拐点.

【解】 (I) 联立 $\begin{cases} f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0, \\ f''(x) + f(x) = 2e^x, \end{cases}$ 得 $f'(x) - 3f(x) = -2e^x$, 因此

$$f(x) = e^{\int 3dx} \left(\int (-2e^x) e^{-\int 3dx} dx + C \right) = e^x + Ce^{3x}$$

代入 $f''(x) + f(x) = 2e^x$, 得 $C = 0$, 所以 $f(x) = e^x$.

(II) $y = f(x^2) \int_0^x f(-t^2) dt = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$



$$y' = 2xe^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + 1$$

$$y'' = 2x + 2(1 + 2x^2)e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

当 $x < 0$ 时, $y'' < 0$; 当 $x > 0$ 时, $y'' > 0$, 又 $y(0) = 0$, 所以曲线的拐点为 $(0, 0)$.

18 (2014, 2 题, 4 分) 下列曲线中有渐近线的是

(A) $y = x + \sin x$.

(B) $y = x^2 + \sin x$.

(C) $y = x + \sin \frac{1}{x}$.

(D) $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$.

【答案】 C.

【解析】 (方法一) 由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin \frac{1}{x}}{x} = 1 = a$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x + \sin \frac{1}{x} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = 0 = b$$

所以曲线 $y = x + \sin \frac{1}{x}$ 有斜渐近线 $y = x$, 故应选(C).

(方法二) 考虑曲线 $y = x + \sin \frac{1}{x}$ 与直线 $y = x$ 纵坐标之差在 $x \rightarrow \infty$ 时的极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x + \sin \frac{1}{x} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = 0$$

则直线 $y = x$ 是曲线 $y = x + \sin \frac{1}{x}$ 的一条斜渐近线, 故应选(C).

【评注】 由渐近线的定义可知, 直线 $y = ax + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的渐近线的充要条件是 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax - b] = 0$, 方法二直接利用了该结论.

19 (2015, 2 题, 4 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其二阶导函数 $f''(x)$ 的图形如图所示, 则曲线 $y = f(x)$ 的拐点个数为

(A) 0.

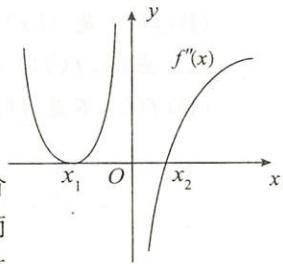
(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

【答案】 C.

【解析】 由如图知 $f''(x_1) = f''(x_2) = 0$, $f''(0)$ 不存在, 其余点上二阶导数 $f''(x)$ 存在且非零, 则曲线 $y = f(x)$ 最多三个拐点, 但在 $x = x_1$ 的两侧二阶导数不变号. 因此, 不是拐点, 而在 $x = 0$ 和 $x = x_2$ 的两侧二阶导数变号, 则曲线 $y = f(x)$ 有两个拐点, 故应选(C).



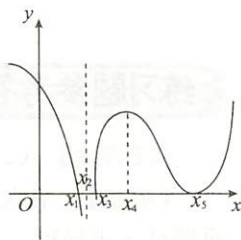
20 (2016, 1 题, 4 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其导函数的图形如图所示, 则

(A) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点.

(B) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 3 个拐点.

(C) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 1 个拐点.

(D) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点.



【答案】 B.

【解析】 x_1, x_3, x_5 为驻点,而在 x_1 和 x_3 两侧 $f'(x)$ 变号,则为极值点, x_5 两侧 $f'(x)$ 不变号,则不是极值点,在 x_2 处一阶导数不存在,但在 x_2 两侧 $f'(x)$ 不变号,则不是极值点,在 x_2 处二阶导数不存在,在 x_4 和 x_5 处二阶导数为零,在这三个点两侧一阶导函数增减性发生变化,则都为拐点,故应选(B).

21 (2018, 9 题, 4 分) 曲线 $y = x^2 + 2\ln x$ 在其拐点处的切线方程是_____.

【答案】 $y = 4x - 3$.

【解析】 $y' = 2x + \frac{2}{x}, y'' = 2 - \frac{2}{x^2}$.

令 $y'' = 0$, 得 $x = 1, x = -1$ (舍去). 拐点为 $(1, 1), f'(1) = 2 + 2 = 4$.

拐点处的切线方程为

$$y - 1 = 4(x - 1)$$

即 $y = 4x - 3$.

22 (2019, 10 题, 4 分) 曲线 $y = x\sin x + 2\cos x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}\right)$ 的拐点坐标为_____.

【答案】 $(\pi, -2)$.

【解析】 $y' = \sin x + x\cos x - 2\sin x = x\cos x - \sin x$

$$y'' = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = 0, x = \pi$.

又在 $x = 0$ 的两侧, y'' 不变号, 则 $(0, 2)$ 不是拐点;

在 $x = \pi$ 的两侧, y'' 变号, 则 $(\pi, -2)$ 是拐点.

练习题

1. (2000, 数二, 3 分) 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$, 且 $f'(0) = 0$, 则

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) 点 $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, 点 $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

2. (2011, 数二, 11 分) 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 + t + \frac{1}{3}, \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t + \frac{1}{3} \end{cases}$ 确定, 求函数 $y = y(x)$

的极值和曲线 $y = y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

3. (2008, 数二, 4 分) 曲线 $y = (x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点坐标为_____.

练习题参考答案

1. 【答案】 C.

【解析】 在关系式 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$ 中令 $x = 0$, 得 $f''(0) = 0$, 等式 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$ 两端对 x 求导得



$$f'''(x) + 2f'(x)f''(x) = 1$$

在上式中令 $x = 0$, 得 $f'''(0) = 1 \neq 0$, 由拐点的第二充分条件得 $(0, f(0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点, 故应选 (C).

【评注】 1) 从题设可知 $f(x)$ 的三阶导数存在, 这是因为 $f''(x) = -[f'(x)]^2 + x$ 右端可导;

2) 设 $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, 但 $f^{(n)}(x_0) \neq 0 (n \geq 2)$

则 i) 当 n 是奇数时, 点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点;

ii) 当 n 是偶数时, $x = x_0$ 为函数 $f(x)$ 的极值点, 其中当 $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时, $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的极大值点, 当 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时, $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的极小值点.

2. 【解】 $x'(t) = t^2 + 1, x''(t) = 2t, y'(t) = t^2 - 1, y''(t) = 2t$, 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{x'^3(t)} = \frac{2t(t^2 + 1) - 2t(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^3} = \frac{4t}{(t^2 + 1)^3}$$

令 $\frac{dy}{dx} = 0$, 得 $t = \pm 1$,

当 $t = 1$ 时, $x = \frac{5}{3}, y = -\frac{1}{3}, \frac{d^2y}{dx^2} > 0$, 所以 $y = -\frac{1}{3}$ 为极小值;

当 $t = -1$ 时, $x = -1, y = 1, \frac{d^2y}{dx^2} < 0$, 所以 $y = 1$ 为极大值.

令 $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ 得 $t = 0, x = y = \frac{1}{3}$

当 $t < 0$ 时, $x < \frac{1}{3}, \frac{d^2y}{dx^2} < 0$, 则曲线 $y = y(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1}{3})$ 上是凸的;

当 $t > 0$ 时, $x > \frac{1}{3}, \frac{d^2y}{dx^2} > 0$, 则曲线 $y = y(x)$ 在 $(\frac{1}{3}, +\infty)$ 上是凹的.

$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ 为曲线的拐点.

3. 【答案】 $(-1, -6)$.

【解析】 本题考查拐点的概念和判定及导数计算, 拐点只可能在两种点上出现, 二阶导数为零的点和二阶导数不存在的点.

$$y = x^{\frac{5}{3}} - 5x^{\frac{2}{3}}$$

$$y' = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$y'' = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}}(x+1)$$

显然 $y'' = 0$, 得 $x = -1$, 在 $x = -1$ 两侧 y'' 变号, 则 $(-1, -6)$ 为原曲线的拐点.



【评注】 很多考生填 $x = -1$, 这是错误的, 因为 $x = -1$ 是 x 轴上的点, 拐点是曲线上的点, 所以应填 $(-1, -6)$;

当 $x = 0$ 时, y'' 不存在, 所以 $(0, 0)$ 也可能是拐点. 但在 $x = 0$ 的两侧 y'' 不变号, 故 $(0, 0)$ 不是该曲线的拐点.

小结

这里主要是三个基本问题:

1. 确定曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导, 那么若在 (a, b) 内 $f''(x) > 0 (< 0)$, 则曲线 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是凹(凸)的.

2. 求曲线的拐点

拐点只可能出现在两种点处, 即二阶导数为零和二阶导数不存在的点处.

(1) 设 $f''(x_0) = 0$ 或 $f''(x_0)$ 不存在, 若 $f''(x)$ 在 x_0 点两侧变号, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点; 若 $f''(x)$ 在 x_0 点两侧不变号, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(2) 若 $f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0$, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

3. 求曲线的渐近线

渐近线有三种:

(1) 垂直渐近线: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$) 则 $x = x_0$ 为曲线 $y = f(x)$ 的一条垂直渐近线;

(2) 水平渐近线: 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ (或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$, 或 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$) 则 $y = A$ 为曲线 $y = f(x)$ 的一条水平渐近线;

(3) 斜渐近线: 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = b$, 则 $y = ax + b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的一条斜渐近线.

六、证明函数不等式

23 (2009, 3 题, 4 分) 使不等式 $\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt > \ln x$ 成立的 x 的范围是

- (A) $(0, 1)$. (B) $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$. (C) $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. (D) $(\pi, +\infty)$.

【答案】 A.

【解析】 (方法一) 令 $f(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt - \ln x, x \in (0, +\infty)$, 则

$$f'(x) = \frac{\sin x}{x} - \frac{1}{x} = \frac{\sin x - 1}{x} \leq 0$$



从而 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调减少, 又 $f(1) = 0$, 则当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) > 0$, 即 $\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt > \ln x$.

故应选(A).

(方法二) $\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt > \ln x$ 成立等价于

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt > \int_1^x \frac{1}{t} dt, (x > 0)$$

又 $\frac{\sin t}{t} \leq \frac{1}{t}, (t > 0)$, 显然, 当 $0 < x < 1$, 必有

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt > \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

故应选(A).

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

【评注】 本题是一道函数不等式的基本题, 无非是不等式中出现了变上限积分函数. 但不少考生错误地选择了(B), 这说明部分考生不适应这种题型的变化.

24 (2012, 18 题, 10 分) 证明: $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2}, (-1 < x < 1)$.

【证明】 (方法一) 记 $f(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x - \frac{x^2}{2} - 1$, 则

$$f'(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} - \sin x - x$$

$$f''(x) = \frac{4}{1-x^2} + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2} - 1 - \cos x = \frac{4}{(1-x^2)^2} - 1 - \cos x$$

当 $-1 < x < 1$ 时, 由于 $\frac{4}{(1-x^2)^2} \geq 4, 1 + \cos x \leq 2$, 所以 $f''(x) \geq 2 > 0$, 从而 $f'(x)$ 单调增加.

又因为 $f'(0) = 0$, 所以当 $-1 < x < 0$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $0 < x < 1$, $f'(x) > 0$, 于是 $f(0) = 0$ 是函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内的最小值.

从而当 $-1 < x < 1$ 时, $f(x) \geq f(0) = 0$, 即 $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$.

(方法二) 令 $f(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x - \frac{x^2}{2} - 1, (-1 < x < 1)$.

显然, $f(x)$ 是偶函数, 因此, 只要证明 $f(x) \geq 0, x \in [0, 1)$. 由于

$$f'(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} - \sin x - x, x \in (0, 1)$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} > 0, \frac{2x}{1-x^2} > 2x = x + x > \sin x + x$$

从而有 $f'(x) > 0, x \in (0, 1)$, 又 $f(0) = 0$, 则

$$f(x) \geq 0, x \in [0, 1)$$

25 (2014, 4 题, 4 分) 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数, $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$, 则在区间 $[0, 1]$ 上

(A) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$.

(B) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$.

(C) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$.

(D) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$.



【答案】 D.

【解析】 (方法一) 由于 $g(0) = f(0), g(1) = f(1)$, 则直线 $y = f(0)(1-x) + f(1)x$ 过点 $(0, f(0))$ 和 $(1, f(1))$, 当 $f''(x) \geq 0$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上是凹的, 曲线 $y = f(x)$ 应位于过两个端点 $(0, f(0))$ 和 $(1, f(1))$ 的弦 $y = f(0)(1-x) + f(1)x$ 的下方, 即 $f(x) \leq g(x)$. 故应选(D).

(方法二) 令 $F(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x$, 则

$$F'(x) = f'(x) + f(0) - f(1), F''(x) = f''(x)$$

当 $f''(x) \geq 0$ 时, $F''(x) \geq 0$. 则曲线 $y = F(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上是凹的, 又 $F(0) = F(1) = 0$, 从而, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $F(x) \leq 0$, 即 $f(x) \leq g(x)$, 故应选(D).

(方法三) 令 $F(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x$, 则

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x)[(1-x) + x] - f(0)(1-x) - f(1)x \\ &= (1-x)[f(x) - f(0)] - x[f(1) - f(x)] \\ &= x(1-x)f'(\xi) - x(1-x)f'(\eta) \quad (\xi \in (0, x), \eta \in (x, 1)) \\ &= x(1-x)[f'(\xi) - f'(\eta)] \end{aligned}$$

当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f'(x)$ 单调增加, $f'(\xi) \leq f'(\eta)$, 从而, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $F(x) \leq 0$, 即 $f(x) \leq g(x)$, 故应选(D).

26 (2018, 2 题, 4 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $\int_0^1 f(x) dx = 0$, 则

(A) 当 $f'(x) < 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$. (B) 当 $f''(x) < 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$.

(C) 当 $f'(x) > 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$. (D) 当 $f''(x) > 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$.

【答案】 D.

【解析】 (方法一) $f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{2!}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$, ξ 在 $\frac{1}{2}$ 与 x 之间,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 f\left(\frac{1}{2}\right) dx + \int_0^1 f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) dx + \frac{1}{2!} \int_0^1 f''(\xi)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx \\ &= f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \int_0^1 f''(\xi)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx \end{aligned}$$

若 $f''(x) > 0$, 则 $\int_0^1 f''(\xi)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx > 0$, 由 $\int_0^1 f(x) dx = 0$ 知, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$.

(方法二) 利用结论: 若在 $[a, b]$ 上 $f''(x) > 0$, 则

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) < \int_a^b f(x) dx < \frac{f(a) + f(b)}{2}(b-a)$$

由此可知, 若在 $[0, 1]$ 上 $f''(x) > 0$, 则 $f\left(\frac{0+1}{2}\right) \cdot 1 < \int_0^1 f(x) dx$,

即 $f\left(\frac{1}{2}\right) < \int_0^1 f(x) dx = 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, 故应选(D).

(方法三) 排除法

令 $f(x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)$, 显然 $f'(x) = -1 < 0$, $\int_0^1 f(x) dx = 0$,

但 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, 则(A) 不正确.

令 $f(x) = x - \frac{1}{2}$, 则 $f'(x) = 1 > 0$, $\int_0^1 f(x) dx = 0$.

但 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, 则(C) 不正确.

令 $f(x) = -x^2 + \frac{1}{3}$, 则 $f''(x) = -2 < 0$, $\int_0^1 f(x) dx = 0$,

但 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} > 0$, 则(B) 不正确, 故应选(D).

练习题

1. (1998, 数二, 8 分) 设 $x \in (0, 1)$, 证明:

$$(1) (1+x)\ln^2(1+x) < x^2; \quad (2) \frac{1}{\ln 2} - 1 < \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} < \frac{1}{2}.$$

2. (1995, 数二, 8 分) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 且 $f''(x) > 0$, 证明 $f(x) \geq x$.

3. (2002, 数二, 8 分) 设 $0 < a < b$, 证明不等式

$$\frac{2a}{a^2 + b^2} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

4. (1993, 数二, 9 分) 设 $x > 0$, 常数 $a > e$. 证明 $(a+x)^a < a^{a+x}$.

练习题参考答案

1. 【证明】 (1) 令 $\varphi(x) = x^2 - (1+x)\ln^2(1+x)$, 则

$$\varphi'(x) = 2x - \ln^2(1+x) - 2\ln(1+x)$$

$$\varphi''(x) = 2 - \frac{2\ln(1+x)}{1+x} - \frac{2}{1+x} = \frac{2}{1+x}[x - \ln(1+x)]$$

又 $\ln(1+x) = \ln(1+x) - \ln 1 = \frac{x}{1+c} < x$, ($0 < c < x$, $x \in (0, 1)$).

则 $\varphi''(x) > 0$, $x \in (0, 1)$, $\varphi'(x) > \varphi'(0) = 0$, $x \in (0, 1)$, $\varphi(x) > \varphi(0) = 0$, $x \in (0, 1)$,
故 $(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$.

(2) 令 $f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$,

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)\ln^2(1+x)} + \frac{1}{x^2} = \frac{(1+x)\ln^2(1+x) - x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}$$

由(1) 知 $f'(x) < 0$, $x \in (0, 1)$, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调减少,

$$f(1) < f(x) < f(0^+), x \in (0, 1)$$

$$f(1) = \frac{1}{\ln 2} - 1$$

$$f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$$



$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{1+x}}{2x} = \frac{1}{2}.$$

【评注】事实上本题证明中也可利用结论：

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, x \in (0, +\infty)$$

$$\text{直接得 } \varphi''(x) = \frac{2}{1+x} [x - \ln(1+x)] > 0.$$

该结论是一个常用的结论，望考生熟悉。

2. 【证明】（方法一）由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ ，且 $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ ，则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ ，从而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 1$$

由泰勒公式得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2, (\xi \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}) \\ &= x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2 \end{aligned}$$

又 $f''(x) > 0$ ，则 $f(x) \geq x$ 。

（方法二）同方法一，由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ 得， $f(0) = 0, f'(0) = 1$ ，则

$$f(x) = f(x) - f(0) = f'(c)x, (c \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

由于 $f''(x) > 0$ ，则 $f'(x)$ 单调增加，

若 $x > 0$ ，则 $f'(c) > f'(0) = 1$ ，从而 $f'(c)x \geq f'(0)x = x$ ，

若 $x < 0$ ，则 $f'(c) < f'(0) = 1$ ，从而 $f'(c)x \geq f'(0)x = x$ ，则对一切 x 有 $f(x) \geq x$ 。

（方法三）令 $F(x) = f(x) - x$ ，只要证明 $F(x) \geq 0$ ，

由于 $F'(x) = f'(x) - 1$ ，由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ 知， $f(0) = 0, f'(0) = 1$ ，则

$$F'(0) = f'(0) - 1 = 0$$

又 $F''(x) = f''(x) > 0$ ，则 $F'(x)$ 单调增加，从而 $x = 0$ 为 $F(x)$ 唯一的驻点，又

$$F''(0) = f''(0) > 0$$

则 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处取极小值，且 x 为 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上唯一的极值点，则有 $F(0)$ 为 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的最小值，又 $F(0) = f(0) - 0 = 0$ ，则对一切 x 有

$$f(x) \geq x$$

（方法四）由 $f''(x) > 0$ 知，曲线 $y = f(x)$ 是凹的，则曲线在其任一点的切线上方。

由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ 知， $f(0) = 0, f'(0) = 1$ ，则曲线在 $(0, 0)$ 点的切线方程为： $y = x$ ，

从而有 $f(x) \geq x$ 。

3. 【证明】先证右边不等式。设



$$\varphi(x) = \ln x - \ln a - \frac{x-a}{\sqrt{ax}} (x > a > 0)$$

因为

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{a}{2x\sqrt{x}} \right) = -\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{2x\sqrt{ax}} < 0$$

故当 $x > a$ 时 $\varphi(x)$ 单调减少. 又 $\varphi(a) = 0$, 所以当 $x > a$ 时, $\varphi(x) < \varphi(a) = 0$, 即

$$\ln x - \ln a < \frac{x-a}{\sqrt{ax}}$$

从而当 $b > a$ 时, $\ln b - \ln a < \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$, 即

$$\frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

再证左边不等式.

(方法一) 设函数 $f(x) = \ln x (x > a > 0)$. 由拉格朗日中值定理知, 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\frac{\ln b - \ln a}{b-a} = (\ln x)' \Big|_{x=\xi} = \frac{1}{\xi}$$

由于 $0 < a < \xi < b$, 故 $\frac{1}{\xi} > \frac{1}{b} > \frac{2a}{a^2+b^2}$, 从而

$$\frac{\ln b - \ln a}{b-a} > \frac{2a}{a^2+b^2}$$

(方法二) 设 $f(x) = (x^2 + a^2)(\ln x - \ln a) - 2a(x-a) (x > a > 0)$, 因为

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x(\ln x - \ln a) + (x^2 + a^2) \frac{1}{x} - 2a \\ &= 2x(\ln x - \ln a) + \frac{(x-a)^2}{x} > 0 \end{aligned}$$

故当 $x > a$ 时 $f(x)$ 单调增加.

又 $f(a) = 0$, 所以当 $x > a$ 时, $f(x) > f(a) = 0$, 即

$$(x^2 + a^2)(\ln x - \ln a) - 2a(x-a) > 0$$

从而当 $b > a > 0$ 时 $(a^2 + b^2)(\ln b - \ln a) - 2a(b-a) > 0$, 即

$$\frac{2a}{a^2+b^2} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a}$$

【评注】 本题主要考查利用函数的单调性和拉格朗日中值定理证明函数不等式.

4. **【证明】** 由于 $y = \ln x$ 是单调增函数, 所以欲证 $(a+x)^a < a^{a+x}$, 只需证

$$a \ln(a+x) < (a+x) \ln a$$

令 $f(x) = (a+x) \ln a - a \ln(a+x)$, 则

$$f'(x) = \ln a - \frac{a}{a+x}$$

由于 $a > e, x > 0$, 则 $f'(x) > 0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加,



而 $f(0) = 0$, 所以 $f(x) > 0 (0 < x < +\infty)$. 即

$$a \ln(a+x) < (a+x) \ln a, (a+x)^a < a^{a+x}$$

小结

证明函数不等式常用的有以下五种方法:

1. 利用函数单调性;
2. 利用函数的最值;
3. 利用拉格朗日中值定理;
4. 利用泰勒公式;
5. 利用凹凸性(定义或性质).

七、方程根的存在性与个数

27 (2011, 18 题, 10 分) 证明 $4\arctan x - x + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} = 0$ 恰有两个实根.

【证明】 令 $f(x) = 4\arctan x - x + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$, 本题就是要证明 $f(x)$ 恰有两个零点. 首先求导数 $f'(x)$, 利用 $f'(x)$ 的正负确定 $f(x)$ 的单调区间, 然后考查每个单调区间两端点函数值的正负.

$$f'(x) = \frac{4}{1+x^2} - 1 = \frac{3-x^2}{1+x^2}$$

令 $f'(x) = 0$ 得 $x = \pm\sqrt{3}$, 则

当 $x \in (-\infty, -\sqrt{3})$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调减少;

当 $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调增加;

当 $x \in (\sqrt{3}, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调减少.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (4\arctan x - x + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}) = +\infty,$$

$$f(-\sqrt{3}) = 4\arctan(-\sqrt{3}) + \sqrt{3} + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} = 0$$

$$f(\sqrt{3}) = 4\arctan \sqrt{3} - \sqrt{3} + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3} > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (4\arctan x - x + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}) = -\infty$$

则 $x = -\sqrt{3}$ 为 $f(x)$ 的一个零点, 在 $(\sqrt{3}, +\infty)$ 内 $f(x)$ 还有一个零点,

故方程 $4\arctan x - x + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} = 0$ 恰有两个实根.

28 (2017, 18 题, 10 分) 已知方程 $\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = k$ 在区间 $(0, 1)$ 内有实根, 确定常数 k 的取值范围.



【解】 令 $f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}, x \in (0, 1)$,

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)\ln^2(1+x)} + \frac{1}{x^2} = \frac{(1+x)\ln^2(1+x) - x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}$$

令 $g(x) = (1+x)\ln^2(1+x) - x^2$, 则

$$g'(x) = \ln^2(1+x) + 2\ln(1+x) - 2x$$

$$g''(x) = \frac{2\ln(1+x)}{1+x} + \frac{2}{1+x} - 2 = \frac{2}{1+x}[\ln(1+x) - x] < 0, x \in (0, 1)$$

又 $g(0) = 0, g'(0) = 0$, 则 $g(x) < 0, x \in (0, 1)$. $f'(x) < 0, x \in (0, 1)$,

$f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调减少,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$f(1) = \frac{1}{\ln 2} - 1$$

则

$$\frac{1}{\ln 2} - 1 < f(x) < \frac{1}{2}$$

由此可得 $\frac{1}{\ln 2} - 1 < k < \frac{1}{2}$.

29 (2019, 2 题, 4 分) 已知方程 $x^5 - 5x + k = 0$ 有 3 个不同的实根, 则 k 的取值范围是

(A) $(-\infty, -4)$.

(B) $(4, +\infty)$.

(C) $\{-4, 4\}$.

(D) $(-4, 4)$.

【答案】 D.

【解析】 令 $f(x) = x^5 - 5x$, 则 $f'(x) = 5x^4 - 5$.

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \pm 1$.

当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 递增;

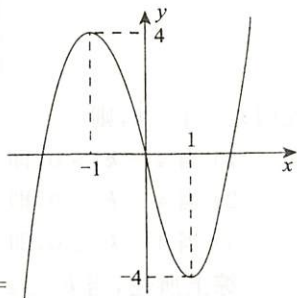
当 $x \in (-1, 1)$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 递增.

又 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, f(-1) = 4, f(1) = -4$,

则曲线 $y = f(x) = x^5 - 5x$ 如右图.

方程 $x^5 - 5x + k = 0$ 有 3 个不同实根的几何意义是曲线 $y = f(x) = x^5 - 5x$ 与直线 $y = -k$ 有 3 个交点, 由此可知 $-4 < k < 4$, 故应选(D).



练习题

1. (1996, 数二, 3 分) 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内, 方程 $|x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x = 0$

(A) 无实根.

(B) 有且仅有一个实根.

(C) 有且仅有两个实根.

(D) 有无数多个实根.



2. (2003, 数二, 12 分) 讨论曲线 $y = 4\ln x + k$ 与 $y = 4x + \ln^4 x$ 的交点个数.

3. (2011, 数一, 10 分) 求方程 $k \arctan x - x = 0$ 不同实根的个数, 其中 k 为参数.

4. (2012, 数二, 10 分) (I) 证明方程 $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$ (n 为大于 1 的整数) 在区间 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内有且仅有一个实根;

(II) 记 (I) 中的实根为 x_n , 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求此极限.

练习题参考答案

1. 【答案】 C.

【解析】 令 $f(x) = x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{2}} - \cos x$, 则 $f(x)$ 是偶函数, 因此, 只需讨论 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点的个数.

注意到 $f(0) = -1 < 0$, $f(\pi) = \pi^{\frac{1}{4}} + \pi^{\frac{1}{2}} + 1 > 0$, 且

$$f'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \sin x > 0, x \in (0, \pi)$$

则 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 内有且仅有一个零点.

当 $x > \pi$ 时, $f(x) = x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{2}} - \cos x > \pi^{\frac{1}{4}} + \pi^{\frac{1}{2}} - 1 > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且仅有一个零点, 故方程 $|x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有且仅有两个实根.

2. 【分析】 问题等价于讨论方程 $\ln^4 x - 4\ln x + 4x - k = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内实根的个数.

【解】 令 $\varphi(x) = \ln^4 x - 4\ln x + 4x - k$, 则

$$\varphi'(x) = \frac{4\ln^3 x}{x} - \frac{4}{x} + 4 = \frac{4}{x}(\ln^3 x - 1 + x)$$

显然, $\varphi'(1) = 0$, 且

当 $0 < x < 1$ 时, $\varphi'(x) < 0$, $\varphi(x)$ 单调减少, 当 $1 < x < +\infty$ 时, $\varphi'(x) > 0$, $\varphi(x)$ 单调增加. 又

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln x (\ln^3 x - 4) + 4x - k] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln x (\ln^3 x - 4) + 4x - k] = +\infty$$

$\varphi(1) = 4 - k$, 则

1) 当 $4 - k > 0$, 即 $k < 4$ 时, $\varphi(x)$ 无零点;

2) 当 $4 - k = 0$, 即 $k = 4$ 时, $\varphi(x)$ 有一个零点;

3) 当 $4 - k < 0$, 即 $k > 4$ 时, $\varphi(x)$ 有两个零点.

综上所述, 当 $k < 4$ 时, 两条曲线没有交点; 当 $k = 4$ 时, 两条曲线只有一个交点; 当 $k > 4$ 时, 两条曲线有两个交点.

3. 【解】 (方法一) 令 $f(x) = k \arctan x - x$, 则 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数, 且

$$f(0) = 0, \quad f'(x) = \frac{k-1-x^2}{1+x^2}$$

当 $k-1 \leq 0$, 即 $k \leq 1$ 时, $f'(x) < 0$ ($x \neq 0$), $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调减少, 方程 $f(x) = 0$ 只有一个实根 $x = 0$.

当 $k-1 > 0$, 即 $k > 1$ 时, 在 $(0, \sqrt{k-1})$ 内, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调增加; 在 $(\sqrt{k-1}, +\infty)$ 内, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调减少, 所以 $f(\sqrt{k-1})$ 是 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内的最大值.

又因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{k \arctan x}{x} - 1 \right) = -\infty$, 所以存在 $\xi \in (\sqrt{k-1}, +\infty)$, 使得 $f(\xi) = 0$.

由 $f(x)$ 是奇函数及单调性可知:

当 $k > 1$ 时, 方程 $f(x) = 0$ 有且仅有三个不同实根 $x = -\xi, x = 0, x = \xi$.

(方法二) 令 $f(x) = k \arctan x - x$, 显然 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数, 则其零点关于原点对称, $f(0) = 0$, 只需讨论 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上零点的个数. 为此, 令

$$g(x) = \frac{x}{\arctan x} - k, x \in (0, +\infty)$$

$g(x)$ 与 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上零点的个数相同,

$$g'(x) = \frac{\arctan x - \frac{x}{1+x^2}}{(\arctan x)^2}$$

又 $\arctan x = \arctan x - \arctan 0 = \frac{x}{1+\xi^2}, (0 < \xi < x)$

则 $g'(x) > 0 (0 < x < +\infty)$, $g(x)$ 单调增加, 又

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{\arctan x} - k \right) = 1 - k$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\arctan x} - k \right) = +\infty$$

若 $k \leq 1$, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上无零点, 原方程有唯一实根 $x = 0$;

若 $k > 1$, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一零点, 原方程有三个实根.

【评注】 本题只要考查利用函数的单调性、函数的极值及函数的零点定理与渐近性态讨论方程根的存在问题.

4. (I) **【证明】** 令 $f(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 (n > 1)$, 则 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上连续, 且

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = -\frac{1}{2^n} < 0, f(1) = n - 1 > 0$$

由连续函数的零点定理知, 方程 $f(x) = 0$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 内至少有一个实根. 当 $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时,

$$f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + 2x + 1 > 0$$

故 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 内单调增加.

综上所述, 方程 $f(x) = 0$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 内有且仅有一个实根.

(II) **【解】** 由 $x_n \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 知数列 $\{x_n\}$ 有界, 又

$$x_n^n + x_n^{n-1} + \cdots + x_n = 1$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



$$x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1}^n + x_{n+1}^{n-1} + \cdots + x_{n+1} = 1$$

因为 $x_{n+1}^{n+1} > 0$, 所以

$$x_n^n + x_n^{n-1} + \cdots + x_n > x_{n+1}^n + x_{n+1}^{n-1} + \cdots + x_{n+1}$$

于是有 $x_n > x_{n+1}$, $n = 1, 2, \cdots$, 即 $\{x_n\}$ 单调减少.

综上所述, 数列 $\{x_n\}$ 单调有界, 故 $\{x_n\}$ 收敛.

记 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, 由于 $x_n^n + x_n^{n-1} + \cdots + x_n = 1$, 则

$$\frac{x_n - x_n^{n+1}}{1 - x_n} = 1$$

令 $n \rightarrow \infty$ 并注意到 $\frac{1}{2} < x_n < x_1 < 1$, 则有 $\frac{a}{1-a} = 1$, 解得 $a = \frac{1}{2}$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$.

小结

方程根的问题通常是两个基本问题

1. 根的存在性问题

方法 1 利用连续函数的零点定理

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号, 则方程 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内至少有一个实根;

方法 2 利用罗尔定理

若 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足罗尔定理条件, 且 $F'(x) \equiv f(x)$, $x \in (a, b)$, 则方程 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内至少有一个实根.

2. 根的个数

方法 1 利用函数的单调性

若 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调 (可通过 $f'(x) > 0$ 或 $f'(x) < 0$ 判定), 则方程 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内最多有一个实根.

方法 2 利用罗尔定理的推论

若在区间 (a, b) 上 $f^{(n)}(x) \neq 0$, 则方程 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内至多有 n 个实根.

八、微分中值定理有关的证明题

30 (2009, 18 题, 11 分) (I) 证明拉格朗日中值定理: 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 则存在点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$;

(II) 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 在 $(0, \delta)$ ($\delta > 0$) 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = A$, 则 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0) = A$.

【证明】 (I) 令 $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$, 由题设知 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且

$$F(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = f(a)$$

$$F(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a)$$

根据罗尔定理, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

故 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

$$(II)(\text{方法一}) \quad f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(\xi), \xi \in (0, x).$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = A$, 且当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\xi \rightarrow 0^+$, 所以

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} f'(\xi) = A$$

故 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0) = A$.

$$(\text{方法二}) \quad f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \quad (\text{右导数定义})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{1} \quad (\text{洛必达法则})$$

$$= A.$$

【评注】 辅助函数也可构造为 $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$,

$F(x) = [f(b) - f(a)]x - (b - a)f(x)$ 等.

31 (2010, 19 题, 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续, 在 $(0, 3)$ 内存在二阶导数, 且

$$2f(0) = \int_0^2 f(x) dx = f(2) + f(3)$$

(I) 证明: 存在 $\eta \in (0, 2)$, 使 $f(\eta) = f(0)$;

(II) 证明: 存在 $\xi \in (0, 3)$, 使得 $f''(\xi) = 0$.

【分析】 对 (I) 只要证明存在 $\eta \in (0, 2)$, 使 $\int_0^2 f(x) dx = 2f(\eta)$, 这是积分中值定理的推广,

因为这里要求 η 属于开区间 $(0, 2)$, 而不是闭区间 $[0, 2]$.

对 (II) 只要能证明 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上有三个点函数值相等, 反复用罗尔定理即可证明.

【证明】 (I) 设 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, $(0 \leq x \leq 2)$, 则

$$\int_0^2 f(x) dx = F(2) - F(0)$$

由拉格朗日中值定理知, 存在 $\eta \in (0, 2)$, 使

$$F(2) - F(0) = 2F'(\eta) = 2f(\eta)$$

$$\text{即 } \int_0^2 f(x) dx = 2f(\eta).$$

由题设 $2f(0) = \int_0^2 f(x) dx$ 知, $f(\eta) = f(0)$.

(II) 由于 $f(x)$ 在 $[2, 3]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[2, 3]$ 上有最大值 M 和最小值 m , 从而有

$$m \leq \frac{f(2) + f(3)}{2} \leq M$$



由连续函数介值定理知,存在 $c \in [2, 3]$, 使

$$f(c) = \frac{f(2) + f(3)}{2}$$

由(I)的结果知 $f(0) = f(\eta) = f(c)$, $(0 < \eta < c)$

根据罗尔定理,存在 $\xi_1 \in (0, \eta)$, $\xi_2 \in (\eta, c)$, 使

$$f'(\xi_1) = 0, f'(\xi_2) = 0$$

再根据罗尔定理,存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0, 3)$, 使 $f''(\xi) = 0$.

【评注】 本题是一道综合题,主要考查罗尔定理、拉格朗日中值定理、连续函数的最值定理及介值定理的应用.考生的主要错误是

部分考生在证(I)时,直接用一般教材上的积分中值定理得

$$\int_0^2 f(x) dx = 2f(\eta) \quad (0 \leq \eta \leq 2)$$

由此得 $f(\eta) = f(0)$, 但 η 的范围没有说明在开区间 $(0, 2)$ 内.

部分考生在证明(II)时,将题设条件“ $\frac{f(2) + f(3)}{2} = f(0)$ ”变形为“ $f(2) - f(0) + f(3) - f(0) = 0$ ”,由拉格朗日定理得 $2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) = 0$, $\xi_1 \in (0, 2)$, $\xi_2 \in (0, 3)$. 由此推得 $f'(\xi_1)$ 与 $f'(\xi_2)$ 异号,再由导函数 $f'(x)$ 的介值性知存在 $\xi_3 \in (\xi_1, \xi_2)$, 使 $f'(\xi_3) = 0$. 由(I)的结论易推得存在 $\xi_1 \in (0, \eta)$, 使 $f'(\xi_1) = 0$. 从而存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_3)$, 使 $f''(\xi) = 0$.

由于上述 ξ_1, ξ_2 存在的区间具有公共部分,不能保证 ξ_1, ξ_2 是两个不同的点,所以这个证明是不对的.

由(I)的证明可得到一个“升级版”积分中值定理:

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,则

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a), (a < \xi < b)$$

注意这里的 ξ 是在开区间,该结论以后可直接用,在很多问题会带来方便.

32 (2013, 19 题, 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0) = 0$ 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, 证明

(I) 存在 $a > 0$, 使得 $f(a) = 1$;

(II) 对(I)中的 a , 存在 $\xi \in (0, a)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{1}{a}$.

【证明】 (I) 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, 所以存在 $x_0 > 0$, 使得 $f(x_0) > 1$.

因为 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, 所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续.

又 $f(0) = 0$, 根据连续函数的介值定理, 存在 $a \in (0, x_0)$, 使得 $f(a) = 1$.

(II) 因为函数 $f(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上可导, 根据微分中值定理, 存在 $\xi \in (0, a)$, 使得

$$f(a) - f(0) = af'(\xi)$$

又因为 $f(0) = 0, f(a) = 1$, 所以 $f'(\xi) = \frac{1}{a}$.

【评注】 本题主要考查拉格朗日中值定理, 连续函数的零点定理及极限的保号性.



33 (2020, 19 题, 10 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上具有连续导数, $f(0) = f(2) = 0, M = \max_{x \in [0, 2]} \{ |f(x)| \}$, 证明:

(I) 存在 $\xi \in (0, 2)$, 使得 $|f'(\xi)| \geq M$;

(II) 若对任意的 $x \in (0, 2)$, $|f'(x)| \leq M$, 则 $M = 0$.

【证明】 (I) 设 $|f(c)| = M$. 若 $c = 0$ 或 $c = 2$, 则 $M = |f(c)| = 0$.

一般地,

当 $M = 0$ 时, $f(x) \equiv 0$, 对任意的 $\xi \in (0, 2)$, 均有 $|f'(\xi)| \geq M$.

当 $M > 0$ 且 $|f(c)| = M$ 时, 必有 $c \in (0, 2)$.

若 $c \in (0, 1]$, 由拉格朗日中值定理知存在 $\xi \in (0, c)$, 使

$$f'(\xi) = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = \frac{f(c)}{c}$$

从而有 $|f'(\xi)| = \frac{|f(c)|}{c} = \frac{M}{c} \geq M$.

若 $c \in (1, 2]$, 同理知存在 $\xi \in (c, 2) \subseteq (1, 2)$, 使

$$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(c)}{2 - c} = \frac{-f(c)}{2 - c}$$

从而有 $|f'(\xi)| = \frac{|f(c)|}{2 - c} = \frac{M}{2 - c} \geq M$.

综上所述, 存在 $\xi \in (0, 2)$, 使得 $|f'(\xi)| \geq M$.

(II) $|f(c)| = M$.

当 $c = 0$ 或 2 时, $M = 0$; (反证法) 不妨设 $M > 0$, 则 $c \in (0, 2)$, 当 $c \neq 1$ 时, 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi_1 \in (0, c), \xi_2 \in (c, 2)$, 使得

$$f(c) = f(c) - f(0) = f'(\xi_1)c, \text{ 其中 } 0 < \xi_1 < c$$

$$-f(c) = f(2) - f(c) = f'(\xi_2)(2 - c), \text{ 其中 } 0 < \xi_2 < 2$$

则 $M = |f(c)| = |f'(\xi_1)|c \leq Mc, M = |f(c)| = |f'(\xi_2)|(2 - c) \leq M(2 - c)$ 皆成立,

若 $0 < c < 1$, 显然 $M = |f(c)| = |f'(\xi_1)|c \leq Mc$ 不对;

若 $1 < c < 2$, 显然 $M = |f(c)| = |f'(\xi_2)|(2 - c) \leq M(2 - c)$ 不对,

即上述式子至少有一个不成立, 矛盾, 故 $M = 0$.

当 $c = 1$ 时, 此时 $|f(1)| = M$, 易知 $f'(1) = 0$.

若 $f(1) = M$, 设 $G(x) = f(x) - Mx, 0 \leq x \leq 1, G'(x) = f'(x) - M \leq 0$,

从而 $G(x)$ 单调递减又 $G(0) = G(1) = 0$, 从而 $G(x) = 0$, 即 $f(x) = Mx, 0 \leq x \leq 1$.

因为, $f'(1) = M$, 从而 $M = 0$. 同理, $f(1) = -M$ 时, $M = 0$. 综上, $M = 0$.

【评注】 本题对综合应用相关知识解决具体问题的能力有较高要求, 为考生提供了充分展示的机会. 本题证明完全的考生并不多, 复习时值得借鉴的问题主要有:

(1) 部分考生不能正确地理解题意, 不会充分利用题设条件, 不会将条件迁移变化, 如有的考生始终没有将条件 $M = \max_{x \in (0, 2)} \{ |f(x)| \}$ 转化为: 存在 $x_0 \in (0, 2)$ 使得 $|f(x_0)| = M$.

(2) 部分考生已经将条件 $M = \max_{x \in (0, 2)} \{ |f(x)| \}$ 转化为: 存在 $x_0 \in (0, 2)$ 使得 $|f(x_0)| = M$, 并且都写出了 $f(x_0) - f(0) = f'(\xi)x_0$ 或 $f(x_0) - f(2) = f'(\xi)(x_0 - 2)$, 但却想不明白这两个等式与所证结论之间的关系.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

(3) 部分考生深受平时套路练习的影响,在第(I)问中,见到 $f(0) = f(2) = 0$,就写出“存在 $\xi \in (0, 2)$ 使得 $f'(\xi) = 0$ ”,根本不考虑这与要证的结论是否有关系.

(4) 第(II)问,大部分考生没有正确的求解思路,只是在答卷上写写画画,写出的东西与题目解答没有什么关系,也有考生想到了反证法,但却不知如何利用条件推出矛盾.

练习题

1. (2005, 数一、数二, 12 分) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. 证明:

(I) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$;

(II) 存在两个不同的点 $\eta, \xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\eta)f'(\xi) = 1$.

2. (1999, 数二, 8 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上具有三阶连续导数, 且 $f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$, 证明: 在开区间 $(-1, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f'''(\xi) = 3$.

3. (2013, 数一、数二, 10 分) 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1) = 1$. 证明:

(1) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 1$;

(2) 存在 $\eta \in (-1, 1)$, 使得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$.

4. (2010, 数二, 10 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 在开区间 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = \frac{1}{3}$, 证明: 存在 $\xi \in (0, \frac{1}{2}), \eta \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使得

$$f'(\xi) + f'(\eta) = \xi^2 + \eta^2$$

练习题参考答案

1. 【证明】(I) 令 $F(x) = f(x) - 1 + x, x \in [0, 1]$, 由题设知, $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 又 $F(0) = f(0) - 1 = -1 < 0, F(1) = f(1) = 1 > 0$

由连续函数的零点定理知, 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $F(\xi) = 0$, 即

$$f(\xi) = 1 - \xi$$

(II) 在区间 $[0, \xi]$ 和 $[\xi, 1]$ 上分别对 $f(x)$ 用拉格朗日中值定理得

$$\frac{f(\xi) - f(0)}{\xi} = f'(\eta), \eta \in (0, \xi)$$

$$\frac{f(1) - f(\xi)}{1 - \xi} = f'(\zeta), \zeta \in (\xi, 1)$$

$$\text{此时, } f'(\eta)f'(\zeta) = \frac{f(\xi) - f(0)}{\xi} \cdot \frac{f(1) - f(\xi)}{1 - \xi} = \frac{f(\xi)}{1 - \xi} \cdot \frac{1 - f(\xi)}{\xi} = 1.$$

2. 【证明】由于 $f(x)$ 三阶可导, 可考虑泰勒公式, 又 $f'(0) = 0$, 应在 $x = 0$ 处展开

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\eta)}{3!}x^3, (\eta \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

在上式中分别取 $x = 1$ 和 $x = -1$,

$$1 = f(1) = f(0) + \frac{f''(0)}{2!} + \frac{f'''(\eta_1)}{3!}, (0 < \eta_1 < 1)$$



$$0 = f(-1) = f(0) + \frac{f''(0)}{2!} - \frac{f'''(\eta_2)}{3!}, (-1 < \eta_2 < 0)$$

两式相减得 $f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2) = 6$, 即 $\frac{f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2)}{2} = 3$.

由于 $f'''(x)$ 连续, 则 $f'''(x)$ 在闭区间 $[\eta_2, \eta_1]$ 上有最大值 M 和最小值 m . 则

$$m \leq \frac{f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2)}{2} \leq M$$

由连续函数介值定理知, 存在 $\xi \in [\eta_2, \eta_1] \subset (-1, 1)$, 使

$$f'''(\xi) = \frac{f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2)}{2} = 3$$

【评注】 本题是一道综合题, 既要用到泰勒公式, 还要用到有限闭区间上连续函数的最值定理和介值定理, 比较难. 得分率较低, 主要问题有

1) 在泰勒公式中将 $x = -1$ 和 $x = 1$ 代入后, 把 η_1 和 η_2 不加区分都写成 ξ , 似乎很快得到证明. 但这显然是错误的, 由证明过程可知 η_1 和 η_2 分别位于不同区间, 是绝对不可能相等的.

2) 构造辅助函数 $F(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^3$, 试图连续使用罗尔定理达到目的, 但证不出来.

若能构造一个三次多项式 $g(x)$, 使 $g(-1) = f(-1)$, $g(1) = f(1)$, $g(0) = f(0)$, $g'(0) = f'(0)$, 反复用罗尔定理可证明本题.

令 $g(x) = \frac{x^2(x+1)}{2} + (1-x^2)f(0)$, 显然, $g(x)$ 符合以上要求,

令 $F(x) = f(x) - g(x)$, 则

$$F(-1) = F(0) = F(1) = 0, F'(0) = 0$$

在区间 $[-1, 0]$ 和 $[0, 1]$ 上分别对 $F(x)$ 用罗尔定理, 则存在 $\eta_1 \in (-1, 0)$, $\eta_2 \in (0, 1)$ 使 $F'(\eta_1) = F'(\eta_2) = 0$.

在区间 $[\eta_1, 0]$ 和 $[0, \eta_2]$ 上分别对 $F'(x)$ 用罗尔定理, 则存在 $\xi_1 \in (\eta_1, 0)$, $\xi_2 \in (0, \eta_2)$, 使 $F''(\xi_1) = F''(\xi_2) = 0$.

在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上对 $F''(x)$ 用罗尔定理, 则存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$, 使 $F'''(\xi) = 0$,

又 $F'''(x) = f'''(x) - 3$, 则

$$f'''(\xi) - 3 = 0, \text{ 故 } f'''(\xi) = 3$$

3. **【证明】** (I) 因为 $f(x)$ 是区间 $[-1, 1]$ 上的奇函数, 所以 $f(0) = 0$.

因为函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上可导, 根据拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得

$$f(1) - f(0) = f'(\xi)$$

又因为 $f(1) = 1$, 所以 $f'(\xi) = 1$.

(II) **【方法一】** 因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f'(x)$ 是偶函数, 故 $f'(-\xi) = f'(\xi) = 1$.

令 $F(x) = [f'(x) - 1]e^x$, 则 $F(x)$ 可导, 且 $F(-\xi) = F(\xi) = 0$.

根据罗尔定理, 存在 $\eta \in (-\xi, \xi) \subset (-1, 1)$, 使得 $F'(\eta) = 0$.

由 $F'(\eta) = [f''(\eta) + f'(\eta) - 1]e^\eta$, 且 $e^\eta \neq 0$, 得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$.

原题得证.

【方法二】 因为 $f(x)$ 是 $[-1, 1]$ 上的奇函数, 所以 $f'(x)$ 是偶函数,



令 $F(x) = f'(x) + f(x) - x$, 则 $F(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上可导, 且

$$F(1) = f'(1) + f(1) - 1 = f'(1)$$

$$F(-1) = f'(-1) + f(-1) + 1 = f'(1) - f(1) + 1 = f'(1)$$

由罗尔定理可知, 存在 $\eta \in (-1, 1)$, 使得 $F'(\eta) = 0$.

由 $F'(x) = f''(x) + f'(x) - 1$, 知

$$f''(\eta) + f'(\eta) - 1 = 0, \text{ 即 } f''(\eta) + f'(\eta) = 1$$

【方法三】 因为 $f(x)$ 是 $[-1, 1]$ 上的奇函数, 所以 $f'(x)$ 是偶函数, $f''(x)$ 是奇函数, 由 (I) 知, 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 1$.

令 $F(x) = f''(x) + f'(x) - x$, 则 $F'(x) = f'''(x) + f''(x) - 1$,

$$F'(\xi) = f'''(\xi) + f''(\xi) - 1 = f'''(\xi)$$

$$F'(-\xi) = f'''(-\xi) + f''(-\xi) - 1 = -f'''(\xi)$$

当 $f'''(\xi) = 0$ 时, $f'''(\xi) + f''(\xi) - 1 = 0$, 即 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$. 结论得证.

当 $f'''(\xi) \neq 0$ 时, $F'(\xi)F'(-\xi) = -[f'''(\xi)]^2 < 0$,

根据导函数的介值性, 存在 $\eta \in (-\xi, \xi) \subset (-1, 1)$, 使得 $F'(\eta) = 0$. 即

$$f''(\eta) + f'(\eta) - 1 = 0$$

故 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$.

【评注】 本题是一道微分中值定理的证明题, 其难点在于 (II) 中辅助函数的构造. 欲证 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$, 只要证 $f''(\eta) + (f'(\eta) - 1) = 0$, 即 $[(f'(x) - 1)' + (f'(x) - 1)]|_{x=\eta} = 0$, 因此, 应考虑辅助函数 $F(x) = [f'(x) - 1]e^x$; 另一种思路是欲证 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$, 只要证 $f''(\eta) + f'(\eta) - 1 = 0$, 因此, 应考虑辅助函数 $F(x) = f''(x) + f'(x) - x$.

方法三中用到达布定理 (即导函数的介值性定理), 这个定理不是《考试大纲》要求的考试内容, 部分考生给出了此种解法, 只要书写正确, 不影响得分.

4. **【证明】** 令 $F(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3$, 由题意知 $F(0) = 0, F(1) = 0$.

在 $[0, \frac{1}{2}]$ 和 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上分别对 $F(x)$ 应用拉格朗日中值定理, 有

$$F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) = F'(\xi)\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{2}(f'(\xi) - \xi^2), \xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right) = F'(\eta)\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(f'(\eta) - \eta^2), \eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

两式相加, 得

$$F(1) - F(0) = \frac{1}{2}(f'(\xi) - \xi^2) + \frac{1}{2}(f'(\eta) - \eta^2) = 0$$

即 $f'(\xi) + f'(\eta) = \xi^2 + \eta^2$.

小结

微分中值定理证明题通常主要是三类问题.

1. 证明存在一个点 ξ , 使 $F[\xi, f(\xi), f'(\xi)] = 0$.



这类问题一般是构造辅助函数用罗尔定理.

常用的辅助函数有:

要证明的结论	可考虑的辅助函数
$\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$	$xf(x)$
$\xi f'(\xi) + nf(\xi) = 0$	$x^n f(x)$
$\xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$	$\frac{f(x)}{x}$
$\xi f'(\xi) - nf(\xi) = 0$	$\frac{f(x)}{x^n}$
$f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$	$e^{\lambda x} f(x)$
$f'(\xi) + f(\xi) = 0$	$e^x f(x)$
$f'(\xi) - f(\xi) = 0$	$e^{-x} f(x)$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

2. 证明存在两个点 ξ, η (双中值) 使 $F(\xi, f(\xi), f'(\xi), \eta, f(\eta), f'(\eta)) = 0$, 这里又可分为两种问题:

(1) 不要求 $\xi \neq \eta$

这种问题通常是在同一区间 $[a, b]$ 上用两次微分中值定理, 一般是用拉格朗日定理和柯西定理, 具体如何用要将要证结论中含有 ξ 的项和含有 η 的项分离开然后再确定.

(2) 要求 $\xi \neq \eta$

这种问题不能在同一区间 $[a, b]$ 上用两次中值定理, 因为无法证明 $\xi \neq \eta$. 通常要将原区间 $[a, b]$ 分成两个区间 $[a, c]$ 和 $[c, b]$, 然后在 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 上分别用拉格朗日定理. 这里分点 c 的选取是关键.

3. 有关泰勒中值定理的证明题

一般说来, 当题设条件或要证的结论中出现二阶或二阶以上导数往往要用泰勒中值定理.

九、一元微分在经济中的应用

34 (2009, 12 题, 4 分) 设某产品的需求函数为 $Q = Q(p)$, 其对价格 p 的弹性 $\varepsilon_p = 0.2$, 则当需求量为 10 000 件时, 价格增加 1 元会使产品权益增加 _____ 元.

【答案】 8 000.

【解析】 由于需求函数 $Q = Q(p)$ 是减函数, 则 $\frac{dQ}{dp} < 0$, 从而需求价格弹性 $\frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp}$ 为负值. 由

题设 $\varepsilon_p = 0.2$ 表明 $\varepsilon_p = -\frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp}$.

将收益函数 $R = pQ$ 对 p 求导得

$$\frac{dR}{dp} = Q + p \frac{dQ}{dp} = Q \left(1 + \frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp} \right) = Q(1 - \varepsilon_p)$$

$$dR = Q(1 - \varepsilon_p) dp$$



当 $Q = 10\,000$, $dp = 1$, 产品的收益全增加

$$dR = 1\,000 \times (1 - 0.2) \times 1 = 8\,000 (\text{元})$$

【评注】 本题主要考查弹性的概念、计算及微分的经济学意义.

部分考生填“12 000”. 这是因为错用了公式 $\frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp} = \epsilon_p$;

注意 $\frac{dQ}{dp} < 0$, 则当题设中的 $\epsilon_p < 0$, 则有公式

$$\epsilon_p = \frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp}$$

而当题设中的 $\epsilon_p > 0$ 时, 则有公式

$$\epsilon_p = -\frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp}$$

本题属后者.

35 (2010, 11 题, 4 分) 设某商品的收益函数为 $R(p)$, 收益弹性为 $1 + p^3$, 其中 p 为价格, 且 $R(1) = 1$, 则 $R(p) =$ _____.

【答案】 $pe^{\frac{p^3-1}{3}}$.

【解析】 由收益弹性的定义及题设条件知

$$\frac{ER}{Ep} = \frac{p}{R} \frac{dR}{dp} = 1 + p^3$$

即 $\frac{p}{R} \frac{dR}{dp} = 1 + p^3$, 这是一个可分离变量的微分方程

$$\frac{dR}{R} = \left(\frac{1}{p} + p^2 \right) dp$$

两边积分得

$$\ln R = \ln p + \frac{1}{3} p^3 + \ln C$$

则 $R = Cpe^{\frac{p^3}{3}}$. 由 $R(1) = 1$, 得 $C = e^{-\frac{1}{3}}$, 故

$$R = pe^{\frac{p^3-1}{3}}$$

36 (2013, 18 题, 10 分) 设生产某产品的固定成本为 6 000 元, 可变成本为 20 元/件, 价格函数为 $p = 60 - \frac{Q}{1\,000}$ (p 是单价, 单位: 元, Q 是销量, 单位: 件), 已知产销平衡, 求:

- (I) 该商品的边际利润;
- (II) 当 $p = 50$ 时的边际利润, 并解释其经济意义;
- (III) 使得利润最大的定价 p .

【分析】 本题是微分学在经济中的简单应用, 关键是要搞清楚各种函数的表示及其表示的经济意义.

【解】 (I) 由 $p = 60 - \frac{Q}{1\,000}$, 得 $Q = 1\,000(60 - p)$, 则利润函数为

$$L = Qp - 6\,000 - 20Q = Q\left(60 - \frac{Q}{1\,000}\right) - 6\,000 - 20Q = Q\left(40 - \frac{Q}{1\,000}\right) - 6\,000,$$



因而该商品的边际利润为 $\frac{dL}{dQ} = 40 - \frac{Q}{500}$.

(II) 当 $p = 50$ 时, $Q = 10\,000$, 此时的边际利润为 $40 - \frac{10\,000}{500} = 20$, 其经济意义指的是: 当价格 $p = 50$ 时, 销量每增加一件, 利润就增加 20 元.

(III) 令 $\frac{dL}{dQ} = 40 - \frac{Q}{500} = 0$ 得 $Q = 20\,000$, 进而价格 $p = 40$, 且 $\frac{d^2L}{dQ^2} = -\frac{1}{500} < 0$,

因可能极值点唯一, 且实际问题存在最大值, 故当价格为 40 元时, 利润最大.

37 (2014, 9 题, 4 分) 设某商品的需求函数为 $Q = 40 - 2P$ (P 为商品的价格), 则该商品的边际收益为_____.

【答案】 $20 - Q$.

【解析】 由题设知收益函数为 $R = PQ = \left(\frac{40-Q}{2}\right)Q$, 则边际收益为

$$\frac{dR}{dQ} = 20 - Q$$

38 (2015, 17 题, 10 分) 为了实现利润最大化, 厂商需要对某商品确定其定价模型, 设 Q 为该商品的需求量, p 为价格, MC 为边际成本, η 为需求弹性 ($\eta > 0$).

(I) 证明定价模型为 $p = \frac{MC}{1 - \frac{1}{\eta}}$;

(II) 若该商品的成本函数为 $C(Q) = 1600 + Q^2$, 需求函数为 $Q = 40 - p$, 试由 (I) 中的定价模型确定此商品的价格.

【解】 (I) 由收益 $R = pQ$, 得边际收益

$$MR = \frac{dR}{dQ} = p + Q \frac{dp}{dQ} = p \left(1 - \frac{1}{\eta}\right)$$

欲使利润最大, 应有 $MR = MC$, 即 $p \left(1 - \frac{1}{\eta}\right) = MC$,

所以定价模型为 $p = \frac{MC}{1 - \frac{1}{\eta}}$.

(II) 由题设 $MC = 2Q$, $\eta = -\frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp} = \frac{p}{40-p}$.

由 (I) 知, $p = \frac{2(40-p)}{1 - \frac{40-p}{p}}$, 解得 $p = 30$.

所以此商品的价格为 $p = 30$.

39 (2016, 16 题, 10 分) 设某商品最大需求量为 1 200 件, 该商品的需求函数 $Q = Q(p)$, 需求弹性 $\eta = \frac{p}{120-p} (\eta > 0)$, p 为单价 (万元).

(I) 求需求函数的表达式;

(II) 求 $p = 100$ 万元时的边际收益, 并说明其经济意义.

【解】 (I) 由弹性公式 $\eta = \left| \frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp} \right|$ 得



$$\frac{p}{Q} \frac{dQ}{dp} = \frac{-p}{120-p}$$

$$-\frac{dQ}{Q} = \frac{dp}{120-p}$$

$$Q = C(p-120)$$

$Q(0) = 1\,200$ 得 $C = -10$.

需求函数为 $Q(p) = -10(p-120) = 10(120-p) = 1\,200 - 10p$.

(II) 由(I) 知, 收益函数 $R = 120Q - \frac{1}{10}Q^2$, 边际效益 $R'(Q) = 120 - \frac{1}{5}Q$;

当 $P = 100$ 时, $Q = 200$, 故当 $P = 100$ 万元时的边际收益 $R'(200) = 80$, 其经济意义为: 销售第 201 件商品所得的收益为 80 万元.

40 (2017, 11 题, 4 分) 设生产某产品的平均成本 $\bar{C}(Q) = 1 + e^{-Q}$, 其中 Q 为产量, 则边际成本为

【答案】 $1 + (1-Q)e^{-Q}$.

【解析】 $\bar{C}(Q) = \frac{C(Q)}{Q} = 1 + e^{-Q}$, 则

$$C(Q) = Q(1 + e^{-Q})$$

边际成本为 $\frac{dC(Q)}{dQ} = (1 + e^{-Q}) - Qe^{-Q} = 1 + (1-Q)e^{-Q}$.

41 (2018, 4 题, 4 分) 设某产品的成本函数 $C(Q)$ 可导, 其中 Q 为产量. 若产量为 Q_0 时平均成本最小, 则

(A) $C'(Q_0) = 0$.

(B) $C'(Q_0) = C(Q_0)$.

(C) $C'(Q_0) = Q_0 C(Q_0)$.

(D) $Q_0 C'(Q_0) = C(Q_0)$.

【答案】 D.

【解析】 平均成本 $\bar{C} = \frac{C(Q)}{Q}$.

$$\frac{d\bar{C}}{dQ} = \frac{QC'(Q) - C(Q)}{Q^2}$$

由题设知, $\left. \frac{d\bar{C}}{dQ} \right|_{Q=Q_0} = 0$, 即

$$Q_0 C'(Q_0) - C(Q_0) = 0$$

故 $C(Q_0) = Q_0 C'(Q_0)$, 选(D).

42 (2019, 12 题, 4 分) 以 p_A, p_B 分别表示 A, B 两个商品的价格, 设商品 A 的需求函数 $Q_A = 500 - p_A^2 - p_A p_B + 2p_B^2$, 则当 $p_A = 10, p_B = 20$ 时, 商品 A 的需求量对自身价格弹性 $\eta_{AA} (\eta_{AA} > 0) =$

【答案】 0.4.

【解析】 $\eta_{AA} = -\frac{p_A}{Q_A} \cdot \frac{\partial Q_A}{\partial p_A} = -\frac{p_A}{500 - p_A^2 - p_A p_B + 2p_B^2} \cdot (-2p_A - p_B)$

$$= \frac{p_A(2p_A + p_B)}{500 - p_A^2 - p_A p_B + 2p_B^2}$$

将 $p_A = 10, p_B = 20$ 代入上式得



$$\eta_{AA} = \frac{400}{1000} = 0.4$$

43 (2020, 11 题, 4 分) 设某厂家生产某产品的产量为 Q , 成本 $C(Q) = 100 + 13Q$, 设该产品的单价为 p , 需求量 $q(p) = \frac{800}{p+3} - 2$, 则该厂家获得最大利润时的产量为_____.

【答案】 8.

【解析】 由 $q(p) = \frac{800}{p+3} - 2$, 可得 $p = \frac{800}{q+2} - 3$.

$$\begin{aligned} \text{利润函数 } L(q) &= pq - C(q) = \left(\frac{800}{q+2} - 3 \right) q - (100 + 13q) \\ &= -\frac{1600}{q+2} - 16q + 700 \end{aligned}$$

$$L'(q) = \frac{1600}{(q+2)^2} - 16 = 0$$

解得 $q = 8, L''(q) = \frac{-3200}{(q+2)^3}, L''(8) < 0$, 当 $q = 8$ 时, $L(q)$ 最大.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

小结

这里重点是两类问题.

1. 有关弹性的概念与弹性计算

在经济学中变量 $y = y(x)$ 对 x 的弹性是

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{x}{y(x)} \frac{dy}{dx}$$

常讨论需求量对价格 p 的弹性 E_p , 这里需注意, 由于 $\frac{dQ}{dp} < 0$, 则 $\frac{P}{Q} \frac{dQ}{dp} < 0$, 则

若题设中 $\epsilon_p < 0$, 则有公式

$$\epsilon_p = \frac{P}{Q} \frac{dQ}{dp}$$

若题设中 $\epsilon_p > 0$, 则有公式

$$\epsilon_p = -\frac{P}{Q} \frac{dQ}{dp}$$

2. 经济数学中的最值问题.

首先建立目标函数(即题中要求最大或最小的量), 然后用微分学中求最值的方法求解.



第三章 一元函数积分学

本章导读

一元函数积分学是微积分的另一个主要内容. 与微分学不同, 积分是研究函数整体性质的. 其中不定积分是微分的逆运算, 定积分是一种和式的极限, 微积分基本定理和牛顿-莱布尼茨公式阐明了微分学和积分学的内在联系, 换元法和分部积分法是计算不定积分和定积分的两种主要方法, 微元法是用定积分解决几何等问题的一种常用的基本方法. 一元函数积分是多元函数积分的基础.

其主要内容

- (1) 不定积分与原函数的概念, 求不定积分的两种主要方法——换元法, 分部积分法;
- (2) 定积分的概念、性质及计算方法(换元、分部), 变上限积分及其导数;
- (3) 反常积分的概念与计算;
- (4) 定积分应用(几何).

试题特点

定积分与不定积分是积分学的两个基本概念, 计算不定积分和定积分是微积分的一种基本运算, 是考研的一个重点, 定积分应用是考研试卷中应用题考得最多的一个内容.

本章常考题型

- (1) 不定积分、定积分及反常积分的计算;
- (2) 变上限积分及其应用;
- (3) 用定积分计算几何量;
- (4) 一元微积分学的综合题.

考题详析

一、不定积分的计算

1 (2009, 16 题, 10 分) 计算不定积分 $\int \ln(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}) dx (x > 0)$.

【解】 (方法一) 令 $\sqrt{\frac{1+x}{x}} = t$, 则 $x = \frac{1}{t^2 - 1}$, 于是



$$\begin{aligned}\int \ln(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}) dx &= \int \ln(1+t) d\left(\frac{1}{t^2-1}\right) \\ &= \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} - \int \frac{1}{t^2-1} \cdot \frac{1}{t+1} dt\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{t^2-1} \cdot \frac{1}{t+1} dt &= \frac{1}{2} \int \frac{(t+1) - (t-1)}{(t^2-1)(t+1)} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\int \frac{dt}{t^2-1} - \int \frac{dt}{(t+1)^2} \right] \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{t-1}{t+1} + \frac{1}{2(t+1)} + C\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}\int \ln\left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) dx &= \frac{\ln(1+t)}{t^2-1} + \frac{1}{4} \ln \frac{t+1}{t-1} - \frac{1}{2(t+1)} + C \\ &= x \ln\left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{x}) - \frac{\sqrt{x}}{2(\sqrt{1+x} + \sqrt{x})} + C.\end{aligned}$$

(方法二) 令 $1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} = e^t$, 则 $x = \frac{1}{e^{2t} - 2e^t}$, 故有

$$\begin{aligned}\int \ln\left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) dx &= \int t d\left(\frac{1}{e^{2t} - 2e^t}\right) \\ &= \frac{t}{e^{2t} - 2e^t} - \int \frac{dt}{e^{2t} - 2e^t} \\ &= \frac{t}{e^{2t} - 2e^t} - \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{e^t - 2} - \frac{1}{e^t}\right) dt \\ &= \frac{t}{e^{2t} - 2e^t} - \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{4} \ln(1 - 2e^{-t}) + C \\ &= x \ln\left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) - \frac{\sqrt{x}}{2(\sqrt{1+x} + \sqrt{x})} + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{x}) + C.\end{aligned}$$

【评注】 本题重点考查不定积分的两个基本方法——换元和分部。

2 (2011, 17 题, 10 分) 求不定积分 $\int \frac{\arcsin \sqrt{x} + \ln x}{\sqrt{x}} dx$.

【解】 (方法一) 令 $\sqrt{x} = t$, 则 $x = t^2$, $dx = 2t dt$,

$$\begin{aligned}\int \frac{\arcsin \sqrt{x} + \ln x}{\sqrt{x}} dx &= 2 \int (\arcsin t + 2 \ln t) dt \\ &= 2t(\arcsin t + 2 \ln t) - 2 \int \left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} + 2\right) dt \\ &= 2t(\arcsin t + 2 \ln t) + \int \frac{d(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}} - 4t \\ &= 2t(\arcsin t + 2 \ln t) + 2 \sqrt{1-t^2} - 4t + C\end{aligned}$$



$$= 2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{x}\ln x + 2\sqrt{1-x} - 4\sqrt{x} + C.$$

$$\begin{aligned} \text{(方法二)} \quad \int \frac{\arcsin\sqrt{x} + \ln x}{\sqrt{x}} dx &= 2 \int (\arcsin\sqrt{x} + \ln x) d(\sqrt{x}) \\ &= 2\sqrt{x}(\arcsin\sqrt{x} + \ln x) - 2 \int \left(\frac{1}{2\sqrt{1-x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx \\ &= 2\sqrt{x}(\arcsin\sqrt{x} + \ln x) + 2\sqrt{1-x} - 4\sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

3 (2018, 10 题, 4 分) $\int e^x \arcsin \sqrt{1-e^{2x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $e^x \arcsin \sqrt{1-e^{2x}} - \sqrt{1-e^{2x}} + C.$

【解析】
$$\begin{aligned} \int e^x \arcsin \sqrt{1-e^{2x}} dx &= \int \arcsin \sqrt{1-e^{2x}} de^x \\ &= e^x \arcsin \sqrt{1-e^{2x}} - \int \frac{e^x d\sqrt{1-e^{2x}}}{\sqrt{1-(\sqrt{1-e^{2x}})^2}} \\ &= e^x \arcsin \sqrt{1-e^{2x}} - \int d\sqrt{1-e^{2x}} \\ &= e^x \arcsin \sqrt{1-e^{2x}} - \sqrt{1-e^{2x}} + C \end{aligned}$$

练习题

1. (2006, 数二, 10 分) 求 $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx.$

2. (2001, 数二, 6 分) 求 $\int \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$

3. (1994, 数一, 5 分) 求 $\int \frac{dx}{\sin(2x)+2\sin x}.$

4. (2000, 数二, 5 分) 设 $f(\ln x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, 计算 $\int f(x) dx.$

练习题参考答案

1. **【解】** (方法一) $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx = - \int \arcsin e^x de^{-x} = - \frac{\arcsin e^x}{e^x} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

令 $\sqrt{1-e^{2x}} = t$, 则 $dx = \frac{-t}{1-t^2} dt$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-t}{1+t} \right| + C$$

则 $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx = - \frac{\arcsin e^x}{e^x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1-e^{2x}}}{1+\sqrt{1-e^{2x}}} + C.$

计算积分 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ 还有另一方法.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \int \frac{-de^{-x}}{\sqrt{(e^{-x})^2-1}} = -\ln(e^{-x} + \sqrt{e^{-2x}-1}) + C$$

注意:这里用了积分公式 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2-a^2}| + C$.

(方法二) 令 $e^x = t$, 则 $dx = \frac{1}{t} dt$,

$$\begin{aligned} \int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx &= \int \frac{\arcsin t}{t^2} dt = - \int \arcsin t d\left(\frac{1}{t}\right) \\ &= -\frac{\arcsin t}{t} + \int \frac{dt}{t \sqrt{1-t^2}} \\ &= -\frac{\arcsin t}{t} + \int \frac{dt}{t^2 \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 - 1}} \quad (\text{本题中 } t > 0) \\ &= -\frac{\arcsin t}{t} - \int \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 - 1}} \\ &= -\frac{\arcsin t}{t} - \ln\left(\frac{1}{t} + \sqrt{\frac{1}{t^2} - 1}\right) + C \\ &= -\frac{\arcsin e^x}{e^x} - \ln(e^{-x} + \sqrt{e^{-2x} - 1}) + C \end{aligned}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

(方法三) 令 $\arcsin e^x = t$, 则 $x = \ln \sin t, dx = \frac{\cos t}{\sin t} dt$

$$\begin{aligned} \int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx &= \int \frac{t}{\sin t} \cdot \frac{\cos t}{\sin t} dt = - \int t d\left(\frac{1}{\sin t}\right) = -\frac{t}{\sin t} + \int \frac{dt}{\sin t} \\ &= -\frac{t}{\sin t} - \ln |\csc t + \cot t| + C \\ &= -\frac{\arcsin e^x}{e^x} + \ln \left| \frac{1}{e^x} - \frac{\sqrt{1-e^{2x}}}{e^x} \right| + C \end{aligned}$$

【评注】 本题用到几个常用的积分公式

- (1) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C;$
- (2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2-a^2}| + C;$
- (3) $\int \frac{dx}{\sin x} = -\ln |\csc x + \cot x| + C.$

2. 【解】 令 $x = \tan t$, 则 $dx = \sec^2 t dt$,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}} &= \int \frac{dt}{\cos t(2\tan^2 t+1)} \\ &= \int \frac{\cos t dt}{2\sin^2 t + \cos^2 t} = \int \frac{d(\sin t)}{1+\sin^2 t} \\ &= \arctan(\sin t) + C \end{aligned}$$



$$= \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) + C.$$

【评注】 本题主要考查不定积分的换元积分法.

3.【解】 (方法一) 原式 $= \int \frac{dx}{2\sin x(\cos x + 1)} = \frac{1}{4} \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}} = \frac{1}{4} \int \frac{d\left(\tan \frac{x}{2}\right)}{\tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}}$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2}} d\left(\tan \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{8} \tan^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.$$

(方法二) 原式 $= \int \frac{dx}{2\sin x(\cos x + 1)} = \int \frac{\sin x dx}{2(1 - \cos^2 x)(1 + \cos x)}$

$$\stackrel{\text{令 } \cos x = u}{=} \frac{1}{2} \int \frac{du}{(1-u)(1+u)^2} = -\frac{1}{8} \int \left(\frac{1}{1-u} + \frac{3+u}{(1+u)^2} \right) du$$

$$= \frac{1}{8} \left(\ln |1-u| - \ln |1+u| + \frac{2}{1+u} \right) + C$$

$$= \frac{1}{8} \ln \frac{1-\cos x}{1+\cos x} + \frac{1}{4(1+\cos x)} + C.$$

4.【解】 设 $\ln x = t$, 则 $x = e^t, f(t) = \frac{\ln(1+e^t)}{e^t}$.

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} dx = - \int \ln(1+e^x) de^{-x} \\ &= -e^{-x} \ln(1+e^x) + \int \frac{1}{1+e^x} dx \\ &= -e^{-x} \ln(1+e^x) + \int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx \\ &= -e^{-x} \ln(1+e^x) + x - \ln(1+e^x) + C \\ &= x - (1+e^{-x}) \ln(1+e^x) + C. \end{aligned}$$

小结

1. 不定积分的计算重点考察求不定积分的基本方法:

- | | |
|------------|------------|
| (1) 分项积分法; | (2) 凑微分法; |
| (3) 换元法; | (4) 分部积分法. |

考生不应用大量时间在一些难题和偏题上.

2. 专门考不定积分的试题并不是很多,但计算不定积分是一种基本运算,在其他试题中经常考(定积分、多元积分、微分方程),所以考生必须熟练掌握不定积分的基本方法.

二、定积分的概念、性质及几何意义

4 (2011, 4 题, 4 分) 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x) dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cot x) dx$, $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx$, 则 I, J, K 的大小关系为

(A) $I < J < K$.

(B) $I < K < J$.

(C) $J < I < K$.

(D) $K < J < I$.

【答案】 B.

【解析】 同一区间上定积分大小比较最常用的思想就是比较被积函数大小.

由于当 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时, $0 < \sin x < \cos x < 1 < \cot x$.

又因为 $\ln x$ 为 $(0, +\infty)$ 上的单调增加函数, 所以

$$\ln(\sin x) < \ln(\cos x) < \ln(\cot x), x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{故 } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x) dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cot x) dx,$$

即 $I < K < J$. 应选(B).

练习题

1. (2002, 数二, 3 分) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{n}} + \sqrt{1 + \cos \frac{2\pi}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \cos \frac{n\pi}{n}} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. (1997, 数二, 3 分) 设在区间 $[a, b]$ 上, $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$, 记 $S_1 = \int_a^b f(x) dx$,

$S_2 = f(b)(b-a)$, $S_3 = \frac{1}{2}[f(a) + f(b)](b-a)$, 则

(A) $S_1 < S_2 < S_3$.

(B) $S_2 < S_1 < S_3$.

(C) $S_3 < S_1 < S_2$.

(D) $S_2 < S_3 < S_1$.

3. (2003, 数一、数二, 4 分) 设 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} dx$, $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x} dx$, 则

(A) $I_1 > I_2 > 1$.

(B) $1 > I_1 > I_2$.

(C) $I_2 > I_1 > 1$.

(D) $1 > I_2 > I_1$.

4. (2012, 数二, 4 分) 设 $I_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2} \sin x dx$ ($k = 1, 2, 3$), 则有

(A) $I_1 < I_2 < I_3$.

(B) $I_3 < I_2 < I_1$.

(C) $I_2 < I_3 < I_1$.

(D) $I_2 < I_1 < I_3$.

5. (2004, 数二, 4 分) $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right)^2}$ 等于

(A) $\int_1^2 \ln^2 x dx$.

(B) $2 \int_1^2 \ln x dx$.



(C) $2 \int_1^2 \ln(1+x) dx$.

(D) $\int_1^2 \ln^2(1+x) dx$.

练习题参考答案

1. 【答案】 $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

【解析】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{n}} + \sqrt{1 + \cos \frac{2\pi}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \cos \frac{n\pi}{n}} \right)$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \cos \frac{i\pi}{n}} = \int_0^1 \sqrt{1 + \cos \pi x} dx$
 $= \int_0^1 \sqrt{2 \cos^2 \frac{\pi x}{2}} dx = \sqrt{2} \int_0^1 \cos \frac{\pi x}{2} dx = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$

2. 【答案】 B.

【解析】 (方法一) 由于本题的几何意义很清楚, 所以, 可利用几何意义求解.

由题设知, 曲线 $y = f(x)$ 在 x 轴上方, 单调减少且是凹的, 如图所示.

S_1 表示曲边梯形 $ABCD$ 的面积, S_2 表示矩形 $ABCE$ 的面积, S_3 表示梯形 $ABCD$ 的面积, 由图不难看出 $S_2 < S_1 < S_3$.

(方法二) 排除法: 选择一个符合题设条件的具体 $f(x)$, 排除其中的三个选项.

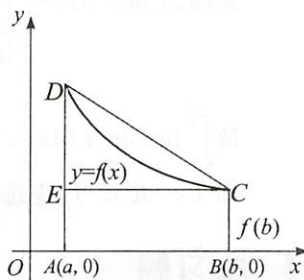
取 $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $a = 1, b = 2$, 则

$$S_1 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{2} = \frac{4}{8}, S_2 = \frac{1}{4} = \frac{2}{8}, S_3 = \frac{5}{8}$$

显然有

$$S_2 < S_1 < S_3$$

排除(A)(C)(D), 故应选(B).



3. 【答案】 B.

【解析】 由基本不等式 $\sin x < x < \tan x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 知 $\frac{\tan x}{x} > \frac{x}{\tan x}, \frac{x}{\tan x} < 1$,

由 $\frac{\tan x}{x} > \frac{x}{\tan x}$ 知, $I_1 > I_2$, 因此, 排除(C)(D).

由 $\frac{x}{\tan x} < 1$ 知, $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x} dx < \frac{\pi}{4} < 1$, 因此, 排除(A),

故应选(B).



4.【答案】 D.

【解析】 (方法一) $I_2 = \int_0^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx = I_1 + \int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx$.

而当 $x \in (\pi, 2\pi)$ 时, $e^{x^2} \sin x < 0$, 则 $\int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx < 0, I_2 < I_1$.

$$I_3 = \int_0^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx = I_1 + \int_{\pi}^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \int_{\pi}^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx &= \int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx + \int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx \\ &= e^{\xi^2} \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx + e^{\eta^2} \int_{2\pi}^{3\pi} \sin x dx \quad (\text{积分中值定理}) \\ &= 2(e^{\eta^2} - e^{\xi^2}) > 0 \quad (\pi < \xi < 2\pi, 2\pi < \eta < 3\pi) \end{aligned}$$

则 $I_1 < I_3$, 从而 $I_2 < I_1 < I_3$. 故应选(D).

(方法二) 利用定积分的几何意义.

曲线 $y = \sin x$ 如图一, 而 e^{x^2} 在 $(0, +\infty)$ 单调增加且大于 1, 则曲线 $y = e^{x^2} \sin x$ 如图二, 该曲线与 x 轴所围三块区域的面积分别记为 S_1, S_2, S_3 (如图二). 显然 $S_1 < S_2 < S_3$.

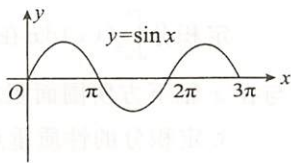
由定积分的几何意义知

$$I_1 = \int_0^{\pi} e^{x^2} \sin x dx = S_1 > 0$$

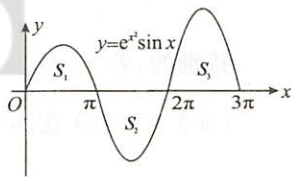
$$I_2 = \int_0^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx = S_1 - S_2 < 0$$

$$I_3 = \int_0^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx = S_1 - S_2 + S_3 = S_1 + (S_3 - S_2) > S_1$$

则 $I_2 < I_1 < I_3$. 故应选(D).



图一



图二

【评注】 本题主要考查定积分的比较. 方法一中用到积分中值定理: 若 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(x)$ 不变号, 则 $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx, a \leq \xi \leq b$.

5.【答案】 B.

【解析】
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right)^2} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[2\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 2\ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \cdots + 2\ln\left(1 + \frac{n}{n}\right) \right] \\ = 2 \int_1^2 \ln x dx \end{aligned}$$

故应选(B).

【评注】 事实上 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right)^2} = 2 \int_0^1 \ln(1+x) dx$.



小结

1. 定积分是一种和式的极限 $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$, 利用定积分定义求某种和式极限是考查定积分概念的一种常见题型, 其关键是先提一个因子 $\frac{1}{n}$, 然后再确定被积函数和积分区间. 一种最常见的和式极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$

2. 定积分的几何意义

定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 在几何上表示曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a, x = b$ 及 x 轴在 x 轴上方所围面积与在 x 轴下方所围面积之差.

3. 定积分的性质重点是不等式性质及积分中值定理.

(1) 不等式性质:

(i) 若在 $[a, b]$ 上 $f(x) \leq g(x)$, 则 $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$;

特别的, 若 $f(x) \geq 0$, 则 $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

(ii) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, M 和 m 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值和最小值, 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

(iii) $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx (a < b)$.

(2) 积分中值定理

(i) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$, 其中 $a < c < b$.

(ii) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(x)$ 不变号, 则

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx (a \leq c \leq b)$$

三、定积分计算

5 2014, 11 题, 4 分) 设 $\int_0^a x e^{2x} dx = \frac{1}{4}$, 则 $a =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$.

【解析】 $\int_0^a x e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int_0^a x d(e^{2x}) = \frac{1}{2} x e^{2x} \Big|_0^a - \frac{1}{2} \int_0^a e^{2x} dx$



$$= \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2a} + \frac{1}{4}$$

由题设知 $\left(\frac{a}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2a} = 0$, 则 $a = \frac{1}{2}$.

6 (2017, 9 题, 4 分) $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^3 x + \sqrt{\pi^2 - x^2}) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{\pi^3}{2}.$

【解析】 $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^3 x + \sqrt{\pi^2 - x^2}) dx = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{\pi^2 - x^2} dx$ (奇偶性)
 $= 2 \cdot \frac{1}{4} \pi \pi^2 = \frac{\pi^3}{2}.$ (定积分几何意义)

7 (2018, 3 题, 4 分) 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx$, $K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sqrt{\cos x}) dx$, 则

(A) $M > N > K.$

(B) $M > K > N.$

(C) $K > M > N.$

(D) $K > N > M.$

【答案】 C

【解析】 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+2x+x^2}{1+x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{2x}{1+x^2}\right) dx = \pi + 0 = \pi.$

由不等式 $e^x > 1+x$ ($x \neq 0$) 可知 $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \pi.$

$$K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sqrt{\cos x}) dx > \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \pi$$

则 $K > M > N$, 故应选(C).

8 (2019, 11 题, 4 分) 已知函数 $f(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^4} dt$, 则 $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{1-2\sqrt{2}}{18}.$

【解析】 $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 f(x) dx^3$
 $= \frac{1}{3} x^3 f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 x^3 \sqrt{1+x^4} dx$
 $= -\frac{1}{18} (1+x^4)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1-2\sqrt{2}}{18}.$

练习题

1. (2001, 数一、数二, 3 分) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + \sin^2 x) \cos^2 x dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. (2008, 数二, 9 分) 计算 $\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$



3. (2013, 数一, 10 分) 计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$, 其中 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$.

4. (1993, 数二, 5 分) 求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x} dx$.

练习题参考答案

1. 【答案】 $\frac{\pi}{8}$.

【解析】 由于 $x^3 \cos^2 x$ 为奇函数, $\sin^2 x \cos^2 x$ 为偶函数, 则

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + \sin^2 x) \cos^2 x dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx = 2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx \right] \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

2. 【解】 (方法一) 令 $x = \sin t$, 则 $dx = \cos t dt$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \sin^2 t \cos t}{\cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{t}{2} - \frac{t \cos 2t}{2} \right) dt \\ &= \frac{t^2}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin 2t dt = \frac{\pi^2}{16} - \frac{t \sin 2t}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt \\ &= \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{8} \cos 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(方法二) $\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{(x^2-1) \arcsin x + \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$$\begin{aligned} &= -x(\sqrt{1-x^2} \arcsin x) \Big|_0^1 + \int_0^1 \left(\frac{-x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + x \right) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \arcsin^2 x \Big|_0^1 \\ &= -\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx + \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

移项得 $2 \int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8}$, 则 $\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}$.

3. 【解】 (方法一) 因为 $f(x) = \int_0^x \frac{\ln(t+1)}{t} dt$, 所以 $f'(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$, 且 $f(1) = 0$. 从

而

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx &= 2 \int_0^1 f(x) d\sqrt{x} = 2 \left[\sqrt{x} f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{x} f'(x) dx \right] \\ &= -2 \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -4\sqrt{x}\ln(x+1)\Big|_0^1 + 4\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx \\
 &= -4\ln 2 + 4\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx
 \end{aligned}$$

令 $u = \sqrt{x}$, 则

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx &= 2\int_0^1 \frac{u^2}{u^2+1}du = 2(u - \arctan u)\Big|_0^1 \\
 &= 2 - \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

所以 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx = 8 - 2\pi - 4\ln 2$.

(方法二) $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx = \int_0^1 dx \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t\sqrt{x}}dt$

交换累次积分的次序,得

$$\int_0^1 dx \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t\sqrt{x}}dt = -\int_0^1 dt \int_0^t \frac{\ln(1+t)}{t\sqrt{x}}dx = -2\int_0^1 \frac{\ln(t+1)}{\sqrt{t}}dt$$

以下同方法一.

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)

【评注】 本题主要考查定积分的计算. 对于这种被积函数中出现变上限积分函数 $f(x) =$

$\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t}dt$ 的积分,常用的方法有两种,一种是用分部积分法,另一种是利用累次积分交换次序.

考生答卷中最常见的一种错误是在凑微分时将 $\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2d\sqrt{x}$ 错写为 $\frac{1}{\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2}d\sqrt{x}$.

$$\begin{aligned}
 4. \text{【解】} \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x}dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan x \\
 &= \frac{1}{2}x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx \\
 &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\ln \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2.
 \end{aligned}$$

小结

计算定积分常用的有以下五种方法:

1. 利用牛顿-莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

2. 利用定积分换元法;

3. 利用定积分的分部积分法;

4. 利用奇偶性,周期性计算定积分



$$(i) \int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & \text{当 } f(x) \text{ 为正偶函数,} \\ 0, & \text{当 } f(x) \text{ 为大于 1 的奇函数.} \end{cases}$$

(ii) 若 $f(x)$ 为周期为 T 的连续函数, 则

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

5. 利用已有公式计算定积分:

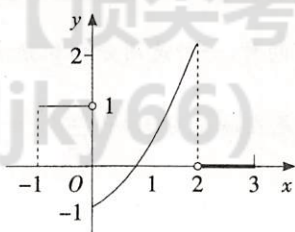
$$(i) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数,} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} \cdot 1, & n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

(ii) 若 $f(x)$ 为 $[0, 1]$ 上的连续函数, 则

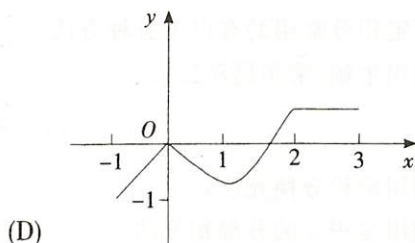
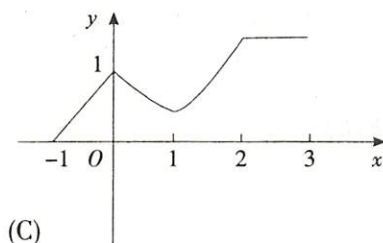
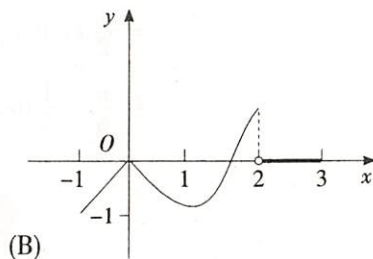
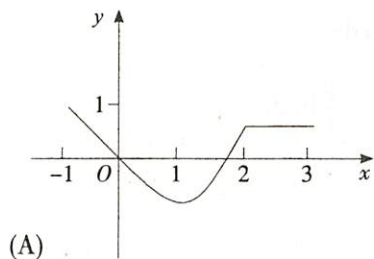
$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

四、变上限积分函数及其应用

9 (2009, 4 题, 4 分) 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的图形如图所示



则函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 的图形为



【答案】 D.

【解析】 由 $y = f(x)$ 的图形可看出, $f(x)$ 在 $[-1, 3]$ 上有界, 且只有两个间断点 ($x = 0, x = 2$), 则 $f(x)$ 在 $[-1, 3]$ 上可积, 从而 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 应为连续函数, 所以, 排除(B).

又由 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 知, $F(0) = 0$, 排除(C).

(A) 与(D) 选项中的 $F(x)$ 在 $[-1, 0)$ 上不同, 由

$$F(x) = \int_0^x 1 dt = x, x \in [-1, 0]$$

排除(A), 故应选(D).

10 (2010, 9 题, 4 分) 设可导函数 $y = y(x)$ 由方程 $\int_0^{x+y} e^{-t^2} dt = \int_0^x x \sin t^2 dt$ 确定, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} =$

【答案】 -1.

【解析】 在 $\int_0^{x+y} e^{-t^2} dt = \int_0^x x \sin t^2 dt$ 中含 $x = 0$, 得

$$\int_0^{y(0)} e^{-t^2} dt = 0$$

又 $e^{-t^2} > 0$, 则 $y(0) = 0$.

由于 $\int_0^x x \sin t^2 dt = x \int_0^x \sin t^2 dt$, 则

$$\int_0^{x+y} e^{-t^2} dt = x \int_0^x \sin t^2 dt$$

该式两端对 x 求导得

$$e^{-(x+y)^2} \left(1 + \frac{dy}{dx} \right) = \int_0^x \sin t^2 dt + x \sin x^2$$

将 $x = 0, y = 0$ 代入上式得 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = -1$.

【评注】 本题主要考查隐函数求导和变上限积分函数求导.

11 (2015, 10 题, 4 分) 设函数 $f(x)$ 连续, $\varphi(x) = \int_0^{x^2} x f(t) dt$, 若 $\varphi(1) = 1, \varphi'(1) = 5$, 则 $f(1) =$ _____.

【答案】 2.

【解析】 $\varphi(x) = x \int_0^{x^2} f(t) dt$, 由 $\varphi(1) = 1$ 知, $\int_0^1 f(t) dt = 1$, 又

$$\varphi'(x) = \int_0^{x^2} f(t) dt + 2x^2 f(x^2)$$

由 $\varphi'(1) = 5$ 知,

$$5 = \int_0^1 f(t) dt + 2f(1) = 1 + 2f(1)$$

故 $f(1) = 2$.



12 (2016, 18 题, 10 分) 设函数 $f(x)$ 连续, 且满足 $\int_0^x f(x-t) dt = \int_0^x (x-t) f(t) dt + e^{-x} - 1$, 求 $f(x)$.

【解】 令 $u = x - t$, 则 $\int_0^x f(x-t) dt = \int_0^x f(u) du$, 由题设得

$$\int_0^x f(u) du = x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt + e^{-x} - 1$$

等式两端对 x 求导得 $f(x) = \int_0^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) - e^{-x}$, 即

$$f(x) = \int_0^x f(t) dt - e^{-x}$$

等式两端再对 x 求导得 $f'(x) = f(x) + e^{-x}$ 即

$$f'(x) - f(x) = e^{-x}$$

$$f(x) = e^{-\int (-1) dx} \left[\int e^{-x} e^{\int (-1) dx} + C \right] = e^x \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} + C \right)$$

又 $f(0) = -1, C = -\frac{1}{2}$

$$f(x) = -\frac{1}{2} e^x (e^{-2x} + 1) = -\frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

13 (2020, 3 题, 4 分) 设奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有连续导数, 则

(A) $\int_0^x [\cos f(t) + f'(t)] dt$ 是奇函数.

(B) $\int_0^x [\cos f(t) + f'(t)] dt$ 是偶函数.

(C) $\int_0^x [\cos f'(t) + f(t)] dt$ 是奇函数.

(D) $\int_0^x [\cos f'(t) + f(t)] dt$ 是偶函数.

【答案】 A.

【解析】 (方法一) 由于 $f(t)$ 可导且为奇函数, 则 $f'(t), \cos f(t)$ 都是偶函数, 从而 $f'(t) + \cos f(t)$ 是偶函数, 则 $\int_0^x [\cos f(t) + f'(t)] dt$ 是奇函数, 故应选(A).

(方法二) 令 $F(x) = \int_0^x [\cos f(t) + f'(t)] dt$, 则

$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_0^{-x} [\cos f(t) + f'(t)] dt \\ &\stackrel{u=-t}{=} -\int_0^x [\cos f(-u) + f'(-u)] du \end{aligned}$$

因为 $f(x)$ 为可导的奇函数, 所以函数 $\cos f(x) + f'(x)$ 为偶函数, 从而

$$F(-x) = -\int_0^x [\cos f(u) + f'(u)] du = -F(x),$$

所以 $F(x)$ 是奇函数, 应选(A).



练习题

1. (1998, 数一, 3 分) 设 $f(x)$ 连续, 则 $\frac{d}{dx} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt =$

- (A) $xf(x^2)$. (B) $-xf(x^2)$.
(C) $2xf(x^2)$. (D) $-2xf(x^2)$.

2. (2006, 数二, 4 分) 设 $f(x)$ 是奇函数, 除 $x=0$ 外处处连续, $x=0$ 是其第一类间断点, 则

$$\int_0^x f(t) dt \text{ 是}$$

- (A) 连续的奇函数. (B) 连续的偶函数.
(C) 在 $x=0$ 间断的奇函数. (D) 在 $x=0$ 间断的偶函数.

3. (2005, 数二, 4 分) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数, “ $M \Leftrightarrow N$ ” 表示 M 的充分必要条件是 N , 则必有

- (A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.
(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.
(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.
(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数.

4. (1997, 数一、数二, 8 分) 设 $f(x)$ 连续, $\varphi(x) = \int_0^1 f(xt) dt$ 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ (A 为常数), 求

$\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

5. (2013, 数二, 4 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x < \pi, \\ 2, & \pi \leq x \leq 2\pi, \end{cases}$ $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则

- (A) $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点.
(B) $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点.
(C) $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续但不可导.
(D) $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处可导.

6. (2007, 数二, 10 分) 设 $f(x)$ 是区间 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上的单调、可导函数, 且满足

$$\int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = \int_0^x t \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} dt$$

其中 f^{-1} 是 f 的反函数, 求 $f(x)$.

练习题参考答案

1. 【答案】 A.

【解析】 (方法一) 先作变量代换将被积式中 x 换出来, 然后再求导.

令 $x^2 - t^2 = u$, 则 $-2t dt = du, t dt = -\frac{1}{2} du$,

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



$$\int_0^x t f(x^2 - t^2) dt = -\frac{1}{2} \int_{x^2}^0 f(u) du = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} f(u) du$$

$$\text{则 } \frac{d}{dx} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} f(u) du = \frac{1}{2} f(x^2) \cdot 2x = x f(x^2).$$

故应选(A).

(方法二) 排除法: 取 $f(x) \equiv 1$, 显然满足题设条件, 而

$$\frac{d}{dx} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt = \frac{d}{dx} \int_0^x t dt = x$$

由此可知, 选项(B)(C)(D) 都是错误的, 排除(B)(C)(D), 故应选(A).

2.【答案】 B.

【解析】 (方法一) 排除法: 选一个符合题设条件的具体函数, 取

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{则 } F(x) = \int_0^x f(t) dt = \begin{cases} \int_0^x 1 dt, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ \int_0^x (-1) dt, & x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$= |x|.$$

是一个连续的偶函数, 排除选项(A)(C)(D), 故应选(B).

(方法二) 利用变上限积分函数的两个基本结论:

(1) 若 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的可积函数, 则 $\int_a^x f(t) dt$ 为 $[a, b]$ 上的连续函数;

(2) 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $\int_0^x f(t) dt$ 为偶函数; 若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $\int_0^x f(t) dt$ 为奇函数.

由于 $f(x)$ 是奇函数, 则 $\int_0^x f(t) dt$ 为偶函数, 又 $f(x)$ 除 $x=0$ 外处处连续, $x=0$ 是其第一类间断点, 则 $f(x)$ 可积, 从而 $\int_0^x f(t) dt$ 为连续函数.

即 $\int_0^x f(t) dt$ 为连续的偶函数, 故应选(B).

【评注】 本题主要考查变上限积分函数的性质. 方法二中关于变上限积分函数的两个基本结论比较常用, 望考生注意.



3.【答案】 A.

【解析】 (方法一) 若 $F(x)$ 是偶函数, 由导函数的一个基本结论“可导的偶函数其导函数为奇函数”知, $F'(x) = f(x)$ 为奇函数, 反之.

若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $\int_0^x f(t)dt$ 为偶函数, $f(x)$ 的任一原函数 $F(x)$ 可表示为

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt + C$$

则 $F(x)$ 是偶函数.

故应选(A).

(方法二) 排除法: 取 $f(x) = \cos x + 1$, $F(x) = \sin x + x + 1$, 显然 $f(x)$ 连续, $F'(x) = f(x)$, 且 $f(x)$ 是偶函数, 周期函数, 但 $F(x)$ 不是奇函数 ($F(0) \neq 0$), 也不是周期函数, 排除(B) 和(C) 选项.

若取 $f(x) = x$, $F(x) = \frac{1}{2}x^2$, 排除(D), 故应选(A).

【评注】 本题主要考查函数和其原函数之间的关系, 主要结论有:

- (1) 可导的偶函数的导函数为奇函数, 而可导的奇函数的导函数为偶函数;
- (2) 奇函数的原函数都是偶函数, 而偶函数的原函数之一为奇函数;
- (3) 可导的周期函数其导函数仍为周期函数(但周期函数的原函数并不一定是周期函数, 方法二中已给出反例).

本题可直接利用(1) 和(2) 得出选项(A) 正确.

4.【分析】 首先通过变量代换将 $\varphi(x)$ 化为积分上限的函数, 然后求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 的连续性.

【解】 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ 及 $f(x)$ 的连续性知, $f(0) = 0$, 从而有

$$\varphi(0) = \int_0^1 f(0)dt = 0$$

当 $x \neq 0$ 时, 令 $xt = u$, 则 $t = \frac{u}{x}$, $dt = \frac{du}{x}$,

$$\varphi(x) = \frac{\int_0^x f(u)du}{x}$$

$$\varphi'(x) = \frac{xf(x) - \int_0^x f(u)du}{x^2}, x \neq 0$$

$$\varphi'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u)du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{A}{2}$$

由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \int_0^x f(u)du}{x^2}$$



$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2} \\
 &= A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} = \varphi'(0)
 \end{aligned}$$

则 $\varphi'(0)$ 在 $x=0$ 处连续.

【评注】 这是一道综合性很强的考题,主要考查定积分的换元法、变上限积分求导、洛必达法则、导数定义及函数连续性的概念.考生的主要问题有:

(1) 部分考生不会由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ 得出 $f(0) = 0$,从而得出 $\varphi(0) = 0$ 的方法;

(2) 部分考生不分 $x=0$ 和 $x \neq 0$,得出 $\varphi(x) = \frac{\int_0^x f(u) du}{x}$,

从而得 $\varphi'(0)$ 不存在,故 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续;

(3) 相当多的考生求 $\varphi'(x)$ 时,导数直接在积分号内求,得

$$\varphi'(x) = \int_0^1 f'(xt) dt$$

这里有两个错误.第一,导数在积分号内求是有条件的,本题的条件不够;第二,等式

$$\left[\int_0^1 f(xt) dt \right]' = \int_0^1 f'(xt) dt$$

不成立,因为左端表示对 x 求导,而右端 $f'(xt)$ 是表示对 xt 求导;

(4) 有的考生在求 $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x)$ 时,不是拆项求极限,而是直接用洛必达法则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f'(x) + f(x) - f(x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$$

这显然是错误的,因为原题只假设 $f(x)$ 连续,而 $f'(x)$ 不一定存在;

(5) 部分考生由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$,得 $f(x) = Ax + o(x) (x \rightarrow 0)$,再代入 $\varphi(x) = \int_0^1 f(xt) dt$ 中去计算,这也是一种典型的错误,因为 $f(x) = Ax + o(x)$ 仅是 $f(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 时的性质,不能在区间 $[0, 1]$ 上用该式代入.

5. 【答案】 C.

$$\begin{aligned}
 \text{【解析】 (方法一)} \quad F(x) &= \int_0^x f(t) dt = \begin{cases} \int_0^x \sin t dt, & 0 \leq x < \pi \\ \int_0^\pi \sin t dt + \int_\pi^x 2 dt, & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 1 - \cos x, & 0 \leq x < \pi, \\ 2 + 2x - 2\pi, & \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases}
 \end{aligned}$$

因为

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} F(x) = F(\pi) = 2$$

所以, $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处连续.

而

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{F(x) - F(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{1 - \cos x - 2}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin x}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{F(x) - F(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{2 + 2x - 2\pi - 2}{x - \pi} = 2$$

由此可知 $F'_-(\pi) \neq F'_+(\pi)$, 即 $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处不可导, 故应选(C).

(方法二) 由于 $x = \pi$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点, 则 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 在 $x = \pi$ 处连续但不可导, 故应选(C).

【评注】 本题主要考查变上限积分函数的连续性和可导性. 两种解法显然方法二简单, 方法二用到一个关于变上限积分函数的连续性和可导性的结论, 即

(1) 若 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点, 则 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 在 $x = x_0$ 处可导;

(2) 若 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点, 则 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 在 $x = x_0$ 处连续但不可导.

6. **【解】** 等式 $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = \int_0^x t \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} dt$ 两端对求导, 得

$$f^{-1}[f(x)] \cdot f'(x) = x \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$$

即

$$xf'(x) = x \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$$

故

$$f(x) = \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \ln(\sin x + \cos x) + C$$

由题设知, $f(0) = 0$, 于是 $C = 0$, 因此

$$f(x) = \ln(\sin x + \cos x), x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

【评注】 这里用到一个常用结论: $f^{-1}[f(x)] = x$, 事实上 $f[f^{-1}(x)] = x$.

小结

与变上限积分函数有关的考题在考研试卷中几乎年年都有, 且题型变化也很多, 而解决这些问题的关键是有关变上限积分函数 $\int_a^x f(t) dt$ 的三个性质, 即连续性、可导性及奇偶性.

(1) 连续性: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 在 $[a, b]$ 上连续;



(2) 可导性: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $F'(x) = f(x)$.

以上结论是变上限积分求导的理论基础, 虽然变上限积分求导题目很多, 但常见的就以下三种类型:

$$(i) \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt \right)'$$

这种类型直接利用公式

$$\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt \right)' = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

求解, 其中 $f(x)$ 连续, $\psi(x)$ 和 $\varphi(x)$ 都可导.

$$(ii) \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, t) dt \right)'$$

这种类型的被积函数 $f(x, t)$ 中含有求导变量 x , 不能直接求导, 通常是通过变量代换把 $f(x, t)$ 中的 x 换出来, 或设法把 x 从积分号中提出来, 然后再求导.

$$(iii) \left(\int_a^b f(x, t) dt \right)'$$

事实上, (iii) 是 (ii) 的特例 ($\varphi(x) = a, \psi(x) = b$), 因此方法与 (ii) 相同.

(3) 奇偶性

设 $f(x)$ 连续, 则

(i) 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 是偶函数;

(ii) 若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 是奇函数.

五、与定积分有关的证明题

14 (2010, 18 题, 10 分)

(I) 比较 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| dt$ ($n = 1, 2, \dots$) 的大小, 说明理由;

(II) 记 $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ ($n = 1, 2, \dots$), 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

【解】 (I) 当 $0 \leq t \leq 1$ 时, 因为 $0 \leq \ln(1+t) \leq t$. 所以

$$0 \leq |\ln t| [\ln(1+t)]^n \leq t^n |\ln t|$$

从而有 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt \leq \int_0^1 t^n |\ln t| dt$

(II) (方法一) 由 (I) 知

$$0 \leq u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt \leq \int_0^1 t^n |\ln t| dt$$

$$\int_0^1 t^n |\ln t| dt = - \int_0^1 t^n \ln t dt$$

$$= -\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln t \Big|_0^1 + \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{(n+1)^2}$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 t^n |\ln t| dt = 0$, 由夹逼原理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

(方法二) 由于 $\ln x$ 为单调增加函数, 则当 $t \in [0, 1]$ 时, $\ln(1+t) \leq \ln 2$, 从而有

$$0 \leq u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt \leq \ln^2 2 \int_0^1 |\ln t| dt$$

又

$$\int_0^1 |\ln t| dt = -\int_0^1 \ln t dt = -t \ln t \Big|_0^1 + \int_0^1 dt = 1$$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln^2 2 = 0$, 由夹逼原理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

(方法三) 由(I)知

$$0 \leq u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt \leq \int_0^1 t^n |\ln t| dt$$

又因为 $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln t}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = 0$, 且 $t \ln t$ 在 $(0, 1]$ 上连续, 则 $t \ln t$ 在 $(0, 1]$ 上有界,

从而存在 $M > 0$, 使

$$0 \leq |t \ln t| \leq M, t \in (0, 1]$$

则 $\int_0^1 t^n |\ln t| dt \leq M \int_0^1 t^{n-1} dt = \frac{M}{n}$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M}{n} = 0$ 及夹逼原理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

【评注】 本题是一道综合题, 主要考查定积分的不等式性质和求极限的夹逼准则, 同时这里用到一个常用的函数不等式

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, x \in (0, +\infty)$$

许多考生在问题(I)中不知如何入手判断两个积分值的大小, 其主要原因是不熟悉以上的函数不等式.

15 (2014, 19 题, 10 分) 设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 单调增加, $0 \leq g(x) \leq 1$. 证明:

$$(I) 0 \leq \int_a^x g(t) dt \leq x - a, x \in [a, b];$$

$$(II) \int_a^{a+\int_a^b g(t) dt} f(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

【证明】 (I) 由 $0 \leq g(x) \leq 1$ 得

$$0 \leq \int_a^x g(t) dt \leq \int_a^x 1 dt = x - a, x \in [a, b]$$

$$(II) \text{ 令 } F(u) = \int_a^u f(x) g(x) dx - \int_a^{a+\int_a^u g(t) dt} f(x) dx,$$

只要证明 $F(b) \geq 0$, 显然 $F(a) = 0$, 只要证明 $F(u)$ 单调增加, 又



$$F'(u) = f(u)g(u) - f\left(a + \int_a^u g(t)dt\right)g(u)$$

$$= g(u)\left[f(u) - f\left(a + \int_a^u g(t)dt\right)\right]$$

由(I)的结论 $0 \leq \int_a^x g(t)dt \leq x - a$ 知, $a \leq a + \int_a^x g(t)dt \leq x$, 即

$$a \leq a + \int_a^u g(t)dt \leq u$$

又 $f(x)$ 单调增加, 则 $f(u) \geq f\left(a + \int_a^u g(t)dt\right)$, 因此, $F'(u) \geq 0, F(b) \geq 0$.

$$\text{故 } \int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

练习题

(2008, 数二, 11 分) (I) 证明积分中值定理: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则至少存在一个点 $\eta \in [a, b]$, 使得 $\int_a^b f(x)dx = f(\eta)(b-a)$;

(II) 若函数 $\varphi(x)$ 具有二阶导数, 且满足 $\varphi(2) > \varphi(1), \varphi(2) > \int_2^3 \varphi(x)dx$, 则至少存在一个点 $\xi \in (1, 3)$, 使得 $\varphi''(\xi) < 0$.

练习题参考答案

【证明】(I) 设 M 与 m 为连续函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值和最小值, 即

$$m \leq f(x) \leq M, x \in [a, b]$$

由定积分性质, 有

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

$$\text{即 } m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M.$$

由连续函数的介值定理, 至少存在一点 $\eta \in [a, b]$, 使得

$$f(\eta) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

$$\text{即 } \int_a^b f(x)dx = f(\eta)(b-a).$$

(II) 由(I)的结论, 可知至少存在一点 $\eta \in [2, 3]$, 使

$$\int_2^3 \varphi(x)dx = \varphi(\eta)(3-2) = \varphi(\eta)$$

又由 $\varphi(2) > \int_2^3 \varphi(x)dx = \varphi(\eta)$ 知, $2 < \eta \leq 3$.

对 $\varphi(x)$ 在 $[1, 2]$ 和 $[2, \eta]$ 上分别应用拉格朗日中值定理, 并注意到 $\varphi(1) < \varphi(2), \varphi(\eta) < \varphi(2)$,

得



$$\varphi'(\xi_1) = \frac{\varphi(2) - \varphi(1)}{2 - 1} > 0, (1 < \xi_1 < 2)$$

$$\varphi'(\xi_2) = \frac{\varphi(\eta) - \varphi(2)}{\eta - 2} < 0, (2 < \xi_2 < \eta \leq 3)$$

在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上对导函数 $\varphi'(x)$ 应用拉格朗日中值定理,有

$$\varphi''(\xi) = \frac{\varphi'(\xi_2) - \varphi'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} < 0, \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (1, 3)$$

小结

有关定积分的证明题,常见是两类问题,证明与定积分有关的等式或不等式,在证明中常用的结论是积分不等式性质和积分中值定理.

1. 证明积分等式的常用方法

- (1) 换元法;
- (2) 分部积分法,特别是被积函数中出现 $f(x)$ 的导数时;
- (3) 利用积分中值定理.

2. 证明积分不等式的常用方法

- (1) 利用积分不等式的性质;
- (2) 利用积分中值定理;
- (3) 将积分上限换为 x ,转化为证明函数不等式.

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)

六、反常积分的概念与计算

16 (2013, 11 题, 4 分) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\ln 2.$

【解析】

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx &= - \int_1^{+\infty} \ln x d\left(\frac{1}{1+x}\right) \\ &= - \left. \frac{\ln x}{1+x} \right|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)} \\ &= \left. \ln \frac{x}{1+x} \right|_1^{+\infty} = - \ln \frac{1}{2} = \ln 2. \end{aligned}$$

【评注】 本题主要考查反常积分的计算.

练习题

1. (1999, 数二, 6 分) 计算 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx.$



2. (2005, 数四, 4 分) 下列结论中正确的是

- (A) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$ 与 $\int_0^1 \frac{dx}{x(x+1)}$ 都收敛.
 (B) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)}$ 与 $\int_0^1 \frac{dx}{x(1+x)}$ 都发散.
 (C) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)}$ 发散, $\int_0^1 \frac{dx}{x(1+x)}$ 收敛.
 (D) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)}$ 收敛, $\int_0^1 \frac{dx}{x(1+x)}$ 发散.

3. (2013, 数二, 4 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1 < x < e, \\ \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x}, & x \geq e. \end{cases}$ 若反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则

- (A) $\alpha < -2$. (B) $\alpha > 2$. (C) $-2 < \alpha < 0$. (D) $0 < \alpha < 2$.

4. (2014, 数二, 4 分) 积分 $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

练习题参考答案

1. 【解】 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx = - \int_1^{+\infty} \arctan x d \frac{1}{x}$
 $= - \frac{\arctan x}{x} \Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)}$
 $= \frac{\pi}{4} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)}$

而 $\int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int \frac{(1+x^2) - x^2}{x(1+x^2)} dx$
 $= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{1+x^2} dx = \ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$
 $= \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$

则 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)} = \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Big|_1^{+\infty} = -\ln \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \ln 2$,

或 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}$
 $= -\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{d\left(\frac{1}{x^2}\right)}{1 + \frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2} \ln 2$

故 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$.

2. 【答案】 D.

【解析】 $\int \frac{dx}{x(1+x)} = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{dx}{x+1} = \ln x - \ln(x+1) + C$
 $= \ln \frac{x}{x+1} + C,$

则 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)} = \ln \frac{x}{x+1} \Big|_1^{+\infty} = -\ln \frac{1}{2} = \ln 2$, 即 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$ 收敛.

$\int_0^1 \frac{dx}{x(x+1)} = \ln \frac{x}{x+1} \Big|_0^1 = \infty$, 即 $\int_0^1 \frac{dx}{x(x+1)}$ 发散. 故应选(D).

3. 【答案】 D.

【解析】 $\int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^e \frac{dx}{(x-1)^{\alpha-1}} + \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^{\alpha+1} x},$

当 $\alpha-1 < 1$, 即 $\alpha < 2$ 时, $\int_1^e \frac{dx}{(x-1)^{\alpha-1}}$ 收敛,

$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^{\alpha+1} x} = \int_e^{+\infty} \frac{d \ln x}{\ln^{\alpha+1} x} = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^{\alpha+1}}$

则当 $\alpha > 0$ 时, $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^{\alpha+1} x}$ 收敛, 故 $0 < \alpha < 2$ 时原积分收敛.

【评注】 本题主要考查用定义判定反常积分的敛散性. 这里不仅用到反常积分的概念, 而且还用到两个基本结论

(1) $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \quad \begin{cases} p > 1, & \text{收敛,} \\ p \leq 1, & \text{发散,} \end{cases} \quad (a > 0);$

(2) $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx \quad \begin{cases} p < 1, & \text{收敛,} \\ p \geq 1, & \text{发散.} \end{cases}$

4. 【答案】 $\frac{3}{8}\pi$.

【解析】 $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2+2x+5} dx = \int_{-\infty}^1 \frac{dx}{(x+1)^2+4}$
 $= \frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2} \Big|_{-\infty}^1 = \frac{3}{8}\pi.$

小结

反常积分有两种, 即无穷区间上的反常积分和无界函数的反常积分, 两种反常积分都定义为变限定积分的极限. 因此, 计算反常积分就是先算一个定积分, 再计算一个极限, 在解题过程中这两个步骤可一并进行, 这就得到计算反常积分的换元法和分部积分法, 这两种方法是计算反常积分的主要方法.



七、定积分应用

17 (2010, 10 题, 4 分) 设位于曲线 $y = \frac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2 x)}}$ ($e \leq x < +\infty$) 下方, x 轴上方的无界区域 G , 则 G 绕 x 轴旋转一周所得空间区域的体积为_____.

【答案】 $\frac{\pi^2}{4}$.

【解析】 由旋转体体积公式得

$$\begin{aligned} V &= \int_e^{+\infty} \pi y^2 dx = \pi \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} \\ &= \pi \int_e^{+\infty} \frac{d \ln x}{1+\ln^2 x} = \pi \arctan(\ln x) \Big|_e^{+\infty} \\ &= \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

18 (2011, 12 题, 4 分) 曲线 $y = \sqrt{x^2 - 1}$, 直线 $x = 2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为_____.

【答案】 $\frac{4}{3}\pi$.

【解析】 由旋转体公式得

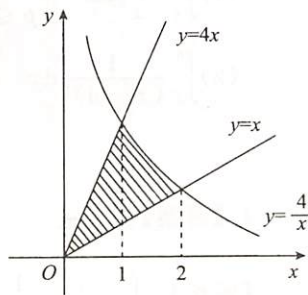
$$V = \pi \int_1^2 y^2 dx = \pi \int_1^2 (x^2 - 1) dx = \pi \left(\frac{1}{3} x^3 - x \right) \Big|_1^2 = \frac{4}{3} \pi$$

19 (2012, 12 题, 4 分) 由曲线 $y = \frac{4}{x}$ 和直线 $y = x$ 及 $y = 4x$ 在第一象限中围成的平面图形的面积为_____.

【答案】 $4 \ln 2$.

【解析】 曲线 $y = \frac{4}{x}$ 和直线 $y = x$ 及 $y = 4x$ 在第一象限围成的平面域如图所示, 则所围面积为

$$S = \int_0^1 (4x - x) dx + \int_1^2 \left(\frac{4}{x} - x \right) dx = 4 \ln 2$$



20 (2013, 16 题, 10 分) 设 D 是由曲线 $y = x^{\frac{1}{3}}$, 直线 $x = a$ ($a > 0$) 及 x 轴所围成的平面图形, V_x, V_y 分别是 D 绕 x 轴, y 轴旋转一周所得旋转体的体积, 若 $V_y = 10V_x$, 求 a 的值.

【解】 $V_x = \pi \int_0^a x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3\pi a^{\frac{5}{3}}}{5}$,

$$V_y = \pi a^{\frac{7}{3}} - \pi \int_0^{\frac{1}{3}} y^6 dy = \pi a^{\frac{7}{3}} - \frac{\pi a^{\frac{7}{3}}}{7} = \frac{6\pi a^{\frac{7}{3}}}{7}$$

因 $V_y = 10V_x$, 即 $\frac{6\pi a^{\frac{7}{3}}}{7} = 10 \cdot \frac{3\pi a^{\frac{5}{3}}}{5}$, 解得 $a = 7\sqrt{7}$.

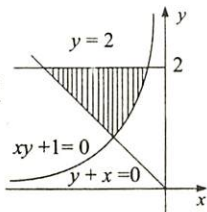
【评注】 本题主要考查旋转体体积的计算.

21 (2014, 10 题, 4 分) 设 D 是由曲线 $xy+1=0$ 与直线 $y+x=0$ 及 $y=2$ 围成的有界区域, 则 D 的面积为_____.

【答案】 $\frac{3}{2} - \ln 2$.

【解析】 (方法一) 曲线 $xy+1=0$ 与直线 $y+x=0$ 及 $y=2$ 围成的区域 D 如图所示, 则 D 的面积为

$$S = \int_{-2}^{-1} (2+x) dx + \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \left(2 + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{3}{2} - \ln 2$$



(方法二) 用二重积分计算面积, 即

$$\begin{aligned} S &= \iint_D dx dy = \int_1^2 dy \int_{-y}^{-\frac{1}{y}} dx \\ &= \int_1^2 \left(-\frac{1}{y} + y\right) dy = \frac{3}{2} - \ln 2 \end{aligned}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

22 (2019, 18 题, 10 分) 求曲线 $y = e^{-x} \sin x (x \geq 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

【解】 所求面积为

$$S = \int_0^{+\infty} |e^{-x} \sin x| dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} |\sin x| dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} |\sin x| dx$$

又

$$\int e^{-x} \sin x dx = -\frac{e^{-x}}{2} (\cos x + \sin x) + C$$

则

$$\begin{aligned} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} |\sin x| dx &= (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx \\ &= (-1)^{n+1} \frac{e^{-x}}{2} (\cos x + \sin x) \Big|_{n\pi}^{(n+1)\pi} \\ &= \frac{1}{2} [e^{-(n+1)\pi} + e^{-n\pi}] = \frac{1+e^{-\pi}}{2} e^{-n\pi} \end{aligned}$$

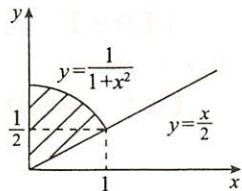
$$\text{则 } S = \frac{1+e^{-\pi}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\pi} = \frac{1+e^{-\pi}}{2(1-e^{-\pi})} = \frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}.$$

23 (2020, 12 题, 4 分) 设平面区域 $D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x}{2} \leq y \leq \frac{1}{1+x^2}, 0 \leq x \leq 1 \right\}$, 则 D 绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为_____.

【答案】 $\pi \ln 2 - \frac{\pi}{3}$.

【解析】 (方法一) 如右图所示, D 绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi x^2 dy \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \pi (2y)^2 dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 \pi \left(\frac{1}{y} - 1 \right) dy \\ &= \frac{4}{3} \pi y^3 \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \pi (\ln y - y) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \end{aligned}$$



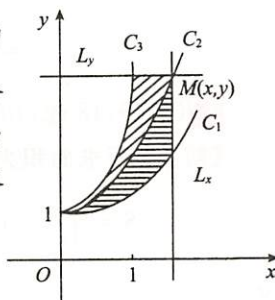
$$= \pi \left(\ln 2 - \frac{1}{3} \right)$$

(方法二) D 绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 2\pi xy dx - \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx - \frac{\pi}{3} \\ &= \pi \ln(1+x^2) \Big|_0^1 - \frac{\pi}{3} \\ &= \pi \left(\ln 2 - \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

练习题

1. (2005, 数二, 11 分) 如图, C_1 和 C_2 分别是 $y = \frac{1}{2}(1+e^x)$ 和 $y = e^x$ 的图像, 过点 $(0, 1)$ 的曲线 C_3 是一单调增函数图像. 过 C_2 上任一点 $M(x, y)$ 分别作垂直于 x 轴和 y 轴的直线 l_x 和 l_y . 记 C_1, C_2 与 l_x 所围图形的面积为 $S_1(x)$; C_2, C_3 与 l_y 所围图形的面积为 $S_2(y)$. 如果总有 $S_1(x) = S_2(y)$, 求曲线 C_3 的方程 $x = \varphi(y)$.



2. (2006, 数二, 12 分) 已知曲线 L 的方程为: $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = 4t - t^2, \end{cases} (t \geq 0).$

(I) 讨论 L 的凹凸性;

(II) 过点 $(-1, 0)$ 引 L 的切线, 求切点 (x_0, y_0) , 并写出切线的方程;

(III) 求此切线与 L (对应于 $x \leq x_0$ 的部分) 及 x 轴所围成的平面图形的面积.

3. (2014, 数二, 10 分) 已知函数 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1)$, 且 $f(y, y) = (y+1)^2 - (2-y)\ln y$,

求曲线 $f(x, y) = 0$ 所围图形绕直线 $y = -1$ 旋转所成旋转体的体积.

4. (2012, 数二, 12 分) 过点 $(0, 1)$ 作曲线 $L: y = \ln x$ 的切线, 切点为 A , 又 L 与 x 轴交于 B 点, 区域 D 由 L 与直线 AB 围成. 求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

练习题参考答案

1. 【分析】 先写出 $S_1(x)$ 和 $S_2(y)$ 的积分表达式, 然后等式 $S_1(x) = S_2(y)$ 两边对 x 求导, 解出 $x = \varphi(y)$.

【解】 由题设知

$$S_1(x) = \int_0^x [e^t - \frac{1}{2}(1+e^t)] dt$$

$$S_2(y) = \int_1^y [\ln t - \varphi(t)] dt$$

又 $S_1(x) = S_2(y)$, 则

$$\int_0^x \left(\frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2} \right) dt = \int_1^y [\ln t - \varphi(t)] dt$$

等式两端对 x 求导,得

$$\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2} = [\ln y - \varphi(y)] \frac{dy}{dx}$$

由 $y = e^x$ 得

$$\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2} = [x - \varphi(e^x)]e^x$$

于是

$$\varphi(e^x) = x + \frac{1}{2e^x} - \frac{1}{2}$$

从而 $\varphi(y) = \ln y + \frac{1}{2y} - \frac{1}{2}$, 故曲线 C_3 的方程为 $x = \ln y + \frac{1}{2y} - \frac{1}{2}$.

2.【分析】 为确定 L 的凹凸性,须先求二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 并确定其正负,要解第(II)问,首先要求出曲线上点 (x_0, y_0) 对应的参数 t_0 处的斜率,然后求出切线方程,由(I)和(II)可知所求平面图形的基本形状,从而求出其面积.

【解】 (方法一) (I) 由于

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{4-2t}{2t} = \frac{2}{t} - 1 \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{2}{t} - 1 \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \left(-\frac{2}{t^2} \right) \cdot \frac{1}{x'(t)} = -\frac{1}{t^3} \end{aligned}$$

当 $t > 0$ 时, $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, 故 L 是凸的.

(II) 当 $t = 0$ 时, $x'(0) = 0, y'(0) = 4, x(0) = 1, y(0) = 0, \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = \infty$, 则当 $t = 0$ 时, L 在对应点处切线方程为 $x = 1$, 不合题意, 故设切点 (x_0, y_0) 对应的参数为 $t_0 > 0$, 则 L 在 (x_0, y_0) 处的切线方程为

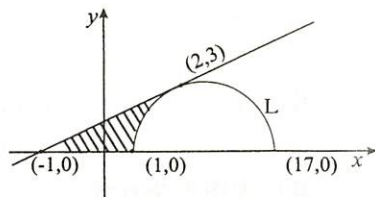
$$y - (4t_0 - t_0^2) = \left(\frac{2}{t_0} - 1 \right) (x - t_0^2 - 1)$$

令 $x = -1, y = 0$, 得 $t_0^2 + t_0 - 2 = 0$, 解得 $t_0 = 1$ 或 $t_0 = -2$ (舍去).

由 $t_0 = 1$ 知, 切点为 $(2, 3)$, 且切线方程为 $y = x + 1$.

(III) 令 $y = 4t - t^2 = 0$, 得 $t_1 = 0, t_2 = 4$, 对应曲线 L 与 x 轴的两个交点 $(1, 0)$ 和 $(17, 0)$, 由以上讨论知曲线 L 和所求的切线如图所示, 故所求平面图形的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 (x+1) dx - \int_1^2 y dx \\ &= \frac{9}{2} - \int_0^1 (4t - t^2) d(t^2 + 1) \\ &= \frac{9}{2} - \int_0^1 (4t - t^2) \cdot 2t dt = \frac{7}{3} \end{aligned}$$



(方法二) (I) 同方法一.



(II) 由 $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = 4t - t^2, \end{cases} (t \geq 0)$ 知 $t = \sqrt{x-1}$, 所以

$$y = 4t - t^2 = 4\sqrt{x-1} - (x-1)$$

由于当 $x_0 = 1$ 时, L 在对应点处切线方程为 $x = 1$, 不符合题意, 故可设 L 在点 (x_0, y_0) 处的切线方程为

$$y - y_0 = \left(\frac{2}{\sqrt{x_0 - 1}} - 1 \right) (x - x_0), (x_0 > 1)$$

将 $x = -1, y = 0$ 代入上式, 得

$$-y_0 = \left(\frac{2}{\sqrt{x_0 - 1}} - 1 \right) (-1 - x_0)$$

$$-4\sqrt{x_0 - 1} + (x_0 - 1) = \frac{-2 + \sqrt{x_0 - 1}}{\sqrt{x_0 - 1}} (x_0 + 1)$$

整理得 $(x_0 - 1) + \sqrt{x_0 - 1} - 2 = 0$, 即 $(\sqrt{x_0 - 1} + 2)(\sqrt{x_0 - 1} - 1) = 0$,

解得 $x_0 = 2$, 并得 $y_0 = 3$, 因此切线方程为 $y = x + 1$.

(III) 在 $y = 4\sqrt{x-1} - (x-1)$ 中令 $y = 0$, 得 L 与 x 轴的交点为 $(1, 0)$ 和 $(17, 0)$, 故所求平面图形的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 (x+1) dx - \int_1^2 [4\sqrt{x-1} - (x-1)] dx \\ &= \frac{9}{2} - \left[\frac{8}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}(x-1)^2 \right] \Big|_1^2 \\ &= \frac{9}{2} - \frac{13}{6} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

【评注】 本题主要考查的是参数方程确定的函数的导数, 参数方程所表示的曲线的切线及所围的面积. 由于曲线是用参数方程表示的, 因此, 在解第(II)(III)两问时用参数方程比较方便, 即方法一较方便, 而把参数方程化为直角坐标方程(即方法二)稍繁一些.

考生的问题主要是:

- 1) 部分考生将参数方程二阶导数求错;
- 2) 不少考生搞不清参数方程所表示的曲线 L 的基本形状, 当然面积也就求错了.

3. **【解析】** 由 $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1)$ 可知, $f(x, y) = \int 2(y+1) dy = (y+1)^2 + \varphi(x)$,

又 $f(y, y) = (y+1)^2 - (2-y)\ln y$, 则

$$(y+1)^2 - (2-y)\ln y = (y+1)^2 + \varphi(y)$$

故 $\varphi(y) = -(2-y)\ln y$, 曲线 $f(x, y) = 0$ 的方程为

$$(y+1)^2 = (2-x)\ln x, (1 \leq x \leq 2)$$

其所围图形绕直线 $y = -1$ 旋转所成旋转体的体积

$$V = \pi \int_1^2 (y+1)^2 dx = \pi \int_1^2 (2-x)\ln x dx$$



$$= \left(2\ln 2 - \frac{5}{4} \right) \pi$$

4. 【解】 设切点 A 的坐标为 (x_1, y_1) , 则切线方程为

$$y - y_1 = \frac{1}{x_1}(x - x_1)$$

将点 $(0, 1)$ 代入, 得 $x_1 = e^2, y_1 = 2$.

所求面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_1^{e^2} \ln x dx - \frac{1}{2}(e^2 - 1) \cdot 2 \\ &= x \ln x \Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} dx - e^2 + 1 \\ &= 2e^2 - e^2 + 1 - e^2 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

所求体积为

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^{e^2} \ln^2 x dx - \frac{\pi}{3} \cdot 4 \cdot (e^2 - 1) \\ &= \pi (x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x) \Big|_1^{e^2} - \frac{4\pi}{3}(e^2 - 1) \\ &= \frac{2\pi}{3}(e^2 - 1) \end{aligned}$$

小结

考研试卷中几乎每年都有应用题. 而定积分的应用题是考得最多的, 定积分的应用题主要包括: 计算平面域的面积, 计算旋转体的体积或计算截面已知的立体的体积.

1. 平面域的面积

解决此类问题, 首先要画出区域的草图, 根据区域图形确定被积函数和积分区间.

2. 旋转体的体积

设区域 D 是由曲线 $y = f(x) (f(x) \geq 0)$ 与 $x_1 = a, x_2 = b, (a < b)$ 及 x 轴所围成的曲边梯形, 则

i) 区域 D 绕 x 轴的旋转体的体积为

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

ii) 区域 D 绕 y 轴的旋转体的体积为

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$



第四章 多元函数的微分学

本章导读

本章主要研究二元函数的偏导数、全微分等概念,要掌握计算它们的各种方法以及它们的应用.一元函数中的许多结论可以推广到二元函数中来,但有些结论是不成立的.二元函数微分学要比一元函数的微分学复杂的多,我们要掌握它们的共同规律,踏踏实实地做一些题目,一定会收到预期的效果.

试题特点

每年试题一般是一个大题、一个小题,分数约占试卷的8%,主要考查复合函数求偏导数及多元函数的极值,难度不是很大.一定要熟练掌握复合函数求偏导数的公式,特别要注意抽象函数求高阶偏导数的题目,以及复合函数求偏导数的方法在隐函数求偏导中的应用.同时,多元函数微分学在几何中的应用和求函数的极值、最值也是考研数学的一个重点.

考题详析

一、基本概念及性质

1 (2009, 10题, 4分) 设 $z = (x + e^y)^x$, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,0)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2\ln 2 + 1$.

【解析】 由 $z = (x + e^y)^x$ 得 $z(x, 0) = (x + 1)^x$, 所以

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,0)} &= \left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=1} = [(x+1)^x]' \Big|_{x=1} = [e^{x\ln(1+x)}]' \Big|_{x=1} \\ &= e^{x\ln(1+x)} \left[\ln(1+x) + \frac{x}{1+x} \right] \Big|_{x=1} = e^{\ln 2} \left(\ln 2 + \frac{1}{2} \right) = 2\ln 2 + 1. \end{aligned}$$

【评注】 若直接求出 $\frac{\partial z}{\partial x}$, 再代入数字, 运算量要加大, 且易出错.

练习题

1. (1997, 数一, 3分) 二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在 $(0, 0)$ 处

- (A) 连续, 偏导数存在.
 (B) 连续, 偏导数不存在.
 (C) 不连续, 偏导数存在.
 (D) 不连续, 偏导数不存在.

2. (2002, 数一, 3分) 考虑二元函数 $f(x, y)$ 的下面 4 条性质:

- ① $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续,
 ② $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的两个偏导数连续,
 ③ $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微,
 ④ $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的两个偏导数存在.

若用“ $P \Rightarrow Q$ ”表示可由性质 P 推出性质 Q , 则有

- (A) ② $\Rightarrow$ ③ $\Rightarrow$ ①. (B) ③ $\Rightarrow$ ② $\Rightarrow$ ①.
 (C) ③ $\Rightarrow$ ④ $\Rightarrow$ ①. (D) ③ $\Rightarrow$ ① $\Rightarrow$ ④.

3. (2007 年, 数二, 4分) 二元函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微的一个充要条件是

- (A) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} [f(x, y) - f(0, 0)] = 0$.
 (B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$, 且 $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0$.
 (C) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$.
 (D) $\lim_{x \rightarrow 0} [f'_x(x, 0) - f'_x(0, 0)] = 0$, 且 $\lim_{y \rightarrow 0} [f'_y(0, y) - f'_y(0, 0)] = 0$.

4. (2012 年, 数一, 4分) 如果函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续, 那么下列命题正确的是

- (A) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微.
 (B) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微.
 (C) 若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在.
 (D) 若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在.

5. (2012 年, 数二, 4分) 设函数 $f(x, y)$ 为可微, 且对任意的 x, y 都有 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0$, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0$,

0, 则使不等式 $f(x_1, y_1) < f(x_2, y_2)$ 成立的一个充分条件是

- (A) $x_1 > x_2, y_1 < y_2$. (B) $x_1 > x_2, y_1 > y_2$.
 (C) $x_1 < x_2, y_1 < y_2$. (D) $x_1 < x_2, y_1 > y_2$.



练习题参考答案

1. 【答案】 C.

【解析】 由于 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} \stackrel{y=x}{=} \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$, 从而 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续, 排除(A)(B).

由偏导数的定义 $f'_x(0,0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$, 同理 $f'_y(0,0) = 0$.

所以, 应选(C).

2. 【答案】 A.

【解析】 直接利用偏导数与可微的相关结论.

3. 【答案】 C.

【解析】 事实上, 由 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ 可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{\sqrt{x^2 + 0^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2}}{x} = 0$$

即 $f'_x(0,0) = 0$,

同理有 $f'_y(0,0) = 0$. 从而

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{[f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0)] - (f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y)}{\rho} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0)}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0 \end{aligned}$$

根据可微的判定条件可知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, 故应选(C).

【评注】 1. 二元函数连续或偏导数存在均不能推出可微, 只有当一阶偏导数连续时, 才可微.

2. 本题也可用排除法, (A) 是函数在 $(0,0)$ 连续的定义; (B) 是函数在 $(0,0)$ 处偏导数存在的条件; (D) 说明一阶偏导数 $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$ 存在, 但不能推导出两个一阶偏导函数 $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续, 所以(A)(B)(D) 均不能保证 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微. 故应选(C).

4. 【答案】 B.

【解析】 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)}{x^2 + y^2}$ 存在, 则有 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x,y) = 0$,

又由 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续, 可知 $f(0,0) = 0$.

$$f'_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0)}{x^2 + 0^2} \cdot x = 0$$

类似 $f'_y(0,0) = 0$. 于是



$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - [f'_x(0, 0) + f'_y(0, 0)]}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \end{aligned}$$

由微分定义知 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微, 故应选(B).

【评注】 1. 本题主要考查二元函数连续、偏导数、可微的定义.

2. 可采用举反例排除错误答案,

取 $f(x, y) = |x| + |y|$ 排除(A), $f(x, y) = x + y$ 排除(C)(D).

5. **【答案】** D.

【解析】 根据偏导数与导数的关系, 利用一元函数单调性的判定方法,

若 $x_1 < x_2, y_1 > y_2$, 则由 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0$, 有 $f(x_1, y_1) < f(x_2, y_1)$,

由 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0$, 有 $f(x_2, y_1) < f(x_2, y_2)$, 即 $f(x_1, y_1) < f(x_2, y_1) < f(x_2, y_2)$.

小结

1. 求二元函数的极限是难点但不是重点, 考试要求较低, 一般说可借助一元函数求极限的方法.

2. 说明二元函数 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ 的极限不存在, 通常可取两条不同的路径具有不同的极限或沿某条曲线的极限不存在.

3. 考查二元函数的连续性用定义 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

4. 分块函数在分界点处的偏导数一般用定义.

5. 讨论二元函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的可微性, 可从如下几个方面考虑.

(1) 若二元函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的偏导数至少有一个不存在, 则函数不可微.

(2) 若二元函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 不连续, 则函数不可微.

(3) 若二元函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续, 两个偏导数存在, 则考虑

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta z - [f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y]}{\rho}$$

其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

若极限为 0, 则函数在 (x_0, y_0) 可微, 否则不可微.

6. 注意一元函数微分学的有些结论不能照搬到多元函数中来.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



二、求多元函数的偏导数及全微分

2 (2011, 10 题, 4 分) 设函数 $z = \left(1 + \frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$, 则 $dz \Big|_{(1,1)} =$ _____.

【答案】 $(2\ln 2 + 1)dx + (-2\ln 2 - 1)dy$.

【解析】 由 $z = e^{\frac{x}{y} \ln(1 + \frac{x}{y})}$, 可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= e^{\frac{x}{y} \ln(1 + \frac{x}{y})} \left[\frac{1}{y} \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y^2} \frac{1}{1 + \frac{x}{y}} \right] = \left(1 + \frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} \left[\frac{1}{y} \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y} \frac{1}{x+y} \right] \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= e^{\frac{x}{y} \ln(1 + \frac{x}{y})} \left[-\frac{x}{y^2} \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y} \frac{1}{1 + \frac{x}{y}} \frac{x}{y^2} \right] = -\left(1 + \frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} \frac{x}{y^2} \left[\ln\left(1 + \frac{x}{y}\right) + \frac{x}{x+y} \right]\end{aligned}$$

所以

$$dz \Big|_{(1,1)} = \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,1)} dx + \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(1,1)} dy = (2\ln 2 + 1)dx + (-2\ln 2 - 1)dy$$

3 (2012, 11 题, 4 分) 设连续函数 $z = f(x, y)$ 满足 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x, y) - 2x + y - 2}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = 0$, 则 $dz \Big|_{(0,1)} =$ _____.

【答案】 $2dx - dy$.

【解析】 由 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x, y) - 2x + y - 2}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = 0$ 以及 $z = f(x, y)$ 连续可得 $f(0, 1) = 1$, 且

$$f(x, y) - f(0, 1) = 2x - (y - 1) + o(\sqrt{x^2 + (y-1)^2}), (x \rightarrow 0, y \rightarrow 1)$$

由可微的定义得 $f'_x(0, 1) = 2, f'_y(0, 1) = -1$, 即

$$dz \Big|_{(0,1)} = f'_x(0, 1) dx + f'_y(0, 1) dy = 2dx - dy$$

应填 $2dx - dy$.

4 (2013, 10 题, 4 分) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $(z+y)^x = xy$ 确定, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,2)} =$ _____.

【答案】 $2 - 2\ln 2$.

【解析】 由方程 $(z+y)^x = xy$, 当 $x=1, y=2$ 时, $z=0$, 用隐函数求偏导数的常规方法求解. 方程 $(z+y)^x = xy$ 变为 $e^{x \ln(z+y)} = xy$, 方程两边对 x 求偏导数得

$$e^{x \ln(z+y)} \left[\ln(z+y) + \frac{x}{z+y} \frac{\partial z}{\partial x} \right] = y$$

令 $x=1, y=2, z=0$, 有 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,2)} = 2 - 2\ln 2$.

【评注】 在求一点处的偏导数时, 不必要解出 $\frac{\partial z}{\partial x}$, 而是直接把点的坐标代入求导后的方程, 可能简化运算.



5 (2015, 11 题, 4 分) 若函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 确定, 则 $\left. \frac{dz}{dx} \right|_{(0,0)} =$ _____.

【答案】 $-\frac{1}{3}dx - \frac{2}{3}dy$.

【解析】 (方法一) 易得 $x = 0, y = 0$ 时, $z = 0$.

方程两边求全微分

$$e^{x+2y+3z}(dx + 2dy + 3dz) + yzdx + xzdy + xydz = 0$$

把 $x = 0, y = 0, z = 0$ 代入方程 $e^{x+2y+3z}(dx + 2dy + 3dz) + yzdx + xzdy + xydz = 0$ 有

$$\left. \frac{dz}{dx} \right|_{(0,0)} = -\frac{1}{3}dx - \frac{2}{3}dy$$

(方法二) 易得 $x = 0, y = 0$ 时, $z = 0$.

方程两边分别对 x, y 求偏导数

$$e^{x+2y+3z}\left(1 + 3\frac{\partial z}{\partial x}\right) + yz + xy\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$e^{x+2y+3z}\left(2 + 3\frac{\partial z}{\partial y}\right) + xz + xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

把 $x = 0, y = 0, z = 0$ 代入上两式有

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0,0)} = -\frac{1}{3}, \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(0,0)} = -\frac{2}{3}$$

所以 $\left. \frac{dz}{dx} \right|_{(0,0)} = -\frac{1}{3}dx - \frac{2}{3}dy$.

【评注】 1. 本题还可令 $F(x, y, z) = e^{x+2y+3z} + xyz - 1$, 用公式法求解.

2. 计算过程中直接代入 $x = 0, y = 0, z = 0$, 可简化运算, 提高准确率.

6 (2016, 2 题, 4 分) 已知函数 $f(x, y) = \frac{e^x}{x-y}$, 则

(A) $f'_x - f'_y = 0$.

(B) $f'_x + f'_y = 0$.

(C) $f'_x - f'_y = f$.

(D) $f'_x + f'_y = f$.

【答案】 D.

【解析】 直接计算, 与选项比较.

$$f'_x = \frac{e^x(x-y) - e^x}{(x-y)^2}, f'_y = \frac{e^x}{(x-y)^2}$$

$$\text{因而 } f'_x + f'_y = \frac{e^x}{x-y} = f.$$

选(D).

7 (2016, 11 题, 4 分) 设函数 $f(u, v)$ 可微, $z = z(x, y)$ 由方程 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$

确定, 则 $\left. \frac{dz}{dx} \right|_{(0,1)} =$ _____.

【答案】 $-dx + 2dy$.

【解析】 (方法一) 易得 $x = 0, y = 1$ 时, $z = 1$.



方程两边求全微分

$$zdx + (x+1)dz - 2ydy = 2xf(x-z, y)dx + x^2[f'_1 \cdot (dx - dz) + f'_2 dy]$$

把 $x=0, y=1, z=1$ 代入上式, 有

$$dz|_{(0,1)} = -dx + 2dy$$

(方法二) 易得 $x=0, y=1$ 时, $z=1$.

方程两边分别对 x, y 求偏导数

$$z + (x+1) \frac{\partial z}{\partial x} = 2xf + x^2 f'_1 \left(1 - \frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$(x+1) \frac{\partial z}{\partial y} - 2y = x^2 \left[f'_1 \cdot \left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right) + f'_2\right]$$

把 $x=0, y=1, z=1$ 代入上两式, 有

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,1)} = -1, \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(0,1)} = 2$$

所以

$$dz|_{(0,1)} = -dx + 2dy$$

【评注】 本题还可令 $F(x, y) = (x+1)z - y^2 - x^2 f(x-z, y)$, 利用公式法求出 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

8 (2017, 12 题, 4 分) 设函数 $f(x, y)$ 具有一阶连续偏导数, 且 $df(x, y) = ye^y dx + x(1+y)e^y dy, f(0, 0) = 0$, 则 $f(x, y) =$ _____.

【答案】 xye^y .

【解析】 由题知 $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^y, \frac{\partial f}{\partial y} = x(1+y)e^y$, 利用偏积分

$$f(x, y) = \int ye^y dx = xye^y + \varphi(y)$$

则 $\frac{\partial f}{\partial y} = x(1+y)e^y + \varphi'(y) = x(1+y)e^y$, 得

$\varphi'(y) = 0$, 有 $\varphi(y) = C$, 因而 $f(x, y) = xye^y + C$.

由 $f(0, 0) = 0$ 得 $C = 0$, 故 $f(x, y) = xye^y$.

9 (2019, 16 题, 10 分) 设函数 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x, y) = xy - f(x+y, x-y)$. 求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

【解】 $\frac{\partial g}{\partial x} = y - f'_1 - f'_2, \frac{\partial g}{\partial y} = x - f'_1 + f'_2$

$$\text{则 } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -f''_{11} - f''_{12} - f''_{21} - f''_{22} = -f''_{11} - 2f''_{12} - f''_{22}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 1 - f''_{11} + f''_{12} - f''_{21} + f''_{22} = 1 - f''_{11} + f''_{22}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -f''_{11} + f''_{12} + f''_{21} - f''_{22} = -f''_{11} + 2f''_{12} - f''_{22}$$



$$\text{有 } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 1 - 3f''_{11} - f''_{22}.$$

10 (2020, 9 题, 4 分) 设 $z = \arctan[xy + \sin(x+y)]$, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0, \pi)} =$ _____.

【答案】 $(\pi - 1)dx - dy$.

【解析】 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0, \pi)} = \frac{y + \cos(x+y)}{1 + [xy + \sin(x+y)]^2} \Big|_{(0, \pi)} = \pi - 1$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(0, \pi)} = \frac{x + \cos(x+y)}{1 + [xy + \sin(x+y)]^2} \Big|_{(0, \pi)} = -1$$

$$\text{所以 } dz \Big|_{(0, \pi)} = (\pi - 1)dx - dy.$$

【评注】 也可利用全微分形式不变性求 dz .

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

练习题

1. (2004, 数二, 4 分) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $z = e^{2x-3z} + 2y$ 确定, 则 $3 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

2. (2009, 数一, 4 分) 设函数 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, $z = f(x, xy)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____.

3. (2010, 数一, 4 分) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$ 确定, 其中 F 为可微函数, 且

$$f'_2 \neq 0, \text{ 则 } x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$$

(A) x .

(B) z .

(C) $-x$.

(D) $-z$.

4. (2011, 数一, 4 分) 设函数 $F(x, y) = \int_0^{xy} \frac{\sin t}{1+t^2} dt$, 则 $\left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{\substack{x=0 \\ y=2}} =$ _____.

5. (2011, 数二, 9 分) 设函数 $z = f(xy, yg(x))$, 函数 f 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导

且在 $x = 1$ 处取得极值 $g(1) = 1$, 求 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}}.$

6. (2012, 数二, 4 分) 设 $z = f\left(\ln x + \frac{1}{y}\right)$, 其中函数 $f(u)$ 可微, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

练习题参考答案

1. **【答案】** 2.

【解析】 在 $z = e^{2x-3z} + 2y$ 的两边分别对 x, y 求偏导, 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{2x-3z} \left(2 - 3 \frac{\partial z}{\partial x} \right), \frac{\partial z}{\partial y} = e^{2x-3z} \left(-3 \frac{\partial z}{\partial y} \right) + 2$$

$$\text{从而 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{1+3e^{2x-3z}}, \text{ 所以}$$



$$3 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2 \cdot \frac{1 + 3e^{2x-3z}}{1 + 3e^{2x-3z}} = 2$$

【评注】也可用下面两种方法求解：

1. 令 $F(x, y, z) = e^{2x-3z} + 2y - z = 0$, 则

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^{2x-3z} \cdot 2, \frac{\partial F}{\partial y} = 2, \frac{\partial F}{\partial z} = e^{2x-3z}(-3) - 1$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{e^{2x-3z} \cdot 2}{-(1 + 3e^{2x-3z})} = \frac{2e^{2x-3z}}{1 + 3e^{2x-3z}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2}{-(1 + 3e^{2x-3z})} = \frac{2}{1 + 3e^{2x-3z}}$$

$$\text{从而 } 3 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2 \left(\frac{3e^{2x-3z}}{1 + 3e^{2x-3z}} + \frac{1}{1 + 3e^{2x-3z}} \right) = 2.$$

2. 利用全微分公式, 得

$$dz = e^{2x-3z}(2dx - 3dz) + 2dy = 2e^{2x-3z}dx + 2dy - 3e^{2x-3z}dz$$

所以

$$dz = \frac{2e^{2x-3z}}{1 + 3e^{2x-3z}}dx + \frac{2}{1 + 3e^{2x-3z}}dy$$

$$\text{即 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2e^{2x-3z}}{1 + 3e^{2x-3z}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{1 + 3e^{2x-3z}}, \text{从而 } 3 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2.$$

2. 【答案】 $xf''_{12} + f'_2 + xyf''_{22}$.

【解析】 由 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 + f'_2 \cdot y$, 得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = xf''_{12} + f'_2 + xyf''_{22}$$

3. 【答案】 B.

【解析】 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{F'_1\left(-\frac{y}{x^2}\right) + F'_2\left(-\frac{z}{x^2}\right)}{F'_2 \cdot \frac{1}{x}} = \frac{F'_1 \cdot \frac{y}{x} + F'_2 \cdot \frac{z}{x}}{F'_2}$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{F'_1 \cdot \frac{1}{x}}{F'_2 \cdot \frac{1}{x}} = -\frac{F'_1}{F'_2}$$

所以 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{yF'_1 + zF'_2}{F'_2} - \frac{yF'_1}{F'_2} = \frac{F'_2 \cdot z}{F'_2} = z$, 因此应选(B).

【评注】 此题也可两边求全微分求得 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

4.【答案】 4.

【解析】 因为 $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{y \sin xy}{1 + (xy)^2}$, 则

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{\substack{x=0 \\ y=2}} = \left(\frac{2 \sin 2x}{1 + 4x^2} \right)' \bigg|_{x=0} = \frac{4(1 + 4x^2) \cos 2x - 16x \sin 2x}{(1 + 4x^2)^2} \bigg|_{x=0} = 4$$

故应填 4.

5.【分析】 利用多元复合函数的求偏导法则及 $g'(1) = 0$.

【解】 由题意 $g'(1) = 0$. 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y f'_1 + y g'(x) f'_2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'_1 + y [x f''_{11} + g(x) f''_{12}] + g'(x) f'_2 + y g'(x) [x f''_{21} + g(x) f''_{22}]$$

所以令 $x = y = 1$, 且注意到 $g(1) = 1, g'(1) = 0$, 得

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = f'_1(1, 1) + f''_{11}(1, 1) + f''_{12}(1, 1)$$

6.【答案】 0.

【解析】 由 $z = f\left(\ln x + \frac{1}{y}\right)$, 有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'\left(\ln x + \frac{1}{y}\right) \cdot \frac{1}{x}, \frac{\partial z}{\partial y} = f'\left(\ln x + \frac{1}{y}\right) \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right)$$

于是 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$. 故应填 0.

小结

本题型包括如下几个方面的问题: 初等函数的偏导数和全微分, 求抽象函数的复合函数的偏导数, 由方程所确定的隐函数的偏导数和全微分, 含抽象函数的方程所确定的隐函数的偏导数和全微分, 由方程组所确定的隐函数的偏导数. 主要使用的方法是直接求导法, 公式法, 微分形式不变性.

此题型是常考的题型, 复习时需注意:

1. 要做一定量的题目, 从头到尾做下来, 不要因为繁杂而放弃, 复杂的运算能力是研究生考试的重要测试点.

2. 求抽象函数的高阶偏导数时, 要做到不遗漏、不重复.



三、求多元函数的极值

11 (2009, 15 题, 9 分) 求二元函数 $f(x, y) = x^2(2 + y^2) + y \ln y$ 的极值.

【分析】 先求函数的驻点, 再用二元函数取得极值的充分条件判断

【解】 由 $\begin{cases} f'_x(x, y) = 2x(2 + y^2) = 0, \\ f'_y(x, y) = 2x^2y + \ln y + 1 = 0, \end{cases}$ 得 $x = 0, y = \frac{1}{e}$.

而 $f''_{xx} = 2(2 + y^2), f''_{yy} = 2x^2 + \frac{1}{y}, f''_{xy} = 4xy$, 则

$$f''_{xx} \Big|_{(0, \frac{1}{e})} = 2\left(2 + \frac{1}{e^2}\right), f''_{xy} \Big|_{(0, \frac{1}{e})} = 0, f''_{yy} \Big|_{(0, \frac{1}{e})} = e.$$

因 $f''_{xx} > 0, (f''_{xy})^2 - f''_{xx}f''_{yy} < 0$, 所以二元函数存在极小值 $f\left(0, \frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$.

12 (2010, 17 题, 10 分) 求函数 $u = xy + 2yz$ 在约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ 下的最大值和最小值.

【分析】 本题为条件极值问题, 用拉格朗日乘数法.

【解】 令 $F(x, y, z, \lambda) = xy + 2yz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 10)$, 解方程组

$$\begin{cases} F'_x = y + 2\lambda x = 0, \\ F'_y = x + 2z + 2\lambda y = 0, \\ F'_z = 2y + 2\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 10 = 0 \end{cases}$$

得 $x = 1, y = \pm\sqrt{5}, z = 2$, 或 $x = -1, y = \pm\sqrt{5}, z = -2$ 或 $x = \pm 2\sqrt{2}, y = 0, z = \mp\sqrt{2}$. 由

$$u(1, \sqrt{5}, 2) = u(-1, -\sqrt{5}, -2) = 5\sqrt{5}$$

$$u(1, -\sqrt{5}, 2) = u(-1, \sqrt{5}, -2) = -5\sqrt{5}$$

$$u(2\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}) = u(-2\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}) = 0$$

得所求最大值为 $5\sqrt{5}$, 最小值为 $-5\sqrt{5}$.

【评注】 求多元函数的极值已连续几年考查, 仍属基本题型.

13 (2011, 16 题, 10 分) 已知函数 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, $f(1, 1) = 2$ 是 $f(u, v)$ 的极值, $z = f(x + y, f(x, y))$. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1, 1)}$.

【分析】 利用多元复合函数的求偏导法则及取得极值的必要条件.

【解】 由链导法则, $\frac{\partial z}{\partial x} = z'_u + z'_v v'_x$, 其中 $u = x + y, v = f(x, y)$. 所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{uu} + z''_{uv} v'_y + (z''_{vu} + z''_{vv} v'_y) v'_x + z'_v v''_{xy}$$

由于 $f(1, 1) = 2$ 是 $f(u, v)$ 的极值, 则

$$v'_x(1,1) = f'_x(1,1) = 0, v'_y(1,1) = f'_y(1,1) = 0$$

令 $x = y = 1$, 得

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(1,1)} = z''_{uv}(2,2) + z'_{uv}(2,2)v''_{xy}(1,1) = f''_{uv}(2,2) + f'_{uv}(2,2)f''_{uv}(1,1)$$

【评注】 该题虽然是抽象复合函数求偏导的题目, 实际上关键要用到二元函数取得极值的必要条件.

14 (2012, 17 题, 10 分) 某企业为生产甲、乙两种型号的产品投入的固定成本为 10 000 (万元). 设该企业生产甲、乙两种产品的产量分别为 x (件) 和 y (件), 且这两种产品的边际成本分别为 $20 + \frac{x}{2}$ (万元/件) 与 $6 + y$ (万元/件).

(I) 求生产甲、乙两种产品的总成本函数 $C(x, y)$ (万元);

(II) 当总产量为 50 件时, 甲、乙两种产品的产量各为多少时可使总成本最小? 求最小成本;

(III) 求总产量为 50 件且总成本最小时甲产品的边际成本, 并解释其经济意义.

【解】 (I) 由边际成本概念知,

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 20 + \frac{x}{2}, \frac{\partial C}{\partial y} = 6 + y$$

又 $C(0, 0) = 10\,000$, 得总成本函数 $C(x, y) = 10\,000 + 20x + \frac{x^2}{4} + 6y + \frac{y^2}{2}$ (万元).

(II) 由题意知, 求 $C(x, y)$ 在当 $x + y = 50$ 时的最小值. 构造拉格朗日函数:

$$F(x, y, \lambda) = C(x, y) + \lambda(x + y - 50) = 10\,000 + 20x + \frac{x^2}{4} + 6y + \frac{y^2}{2} + \lambda(x + y - 50),$$

$$\text{解方程组} \begin{cases} F'_x = 20 + \frac{x}{2} + \lambda = 0, \\ F'_y = 6 + y + \lambda = 0, \\ F'_\lambda = x + y - 50 = 0. \end{cases} \quad \text{得 } x = 24, y = 26.$$

因可能极值点唯一, 且实际问题存在最小值, 故当总产量为 50 件时, 甲乙两种产品的产量分别为 24, 26 时可使总成本最小. 且此时投入总费用

$$C_{\min}(x, y) = 10\,000 + 20 \times 24 + \frac{24^2}{4} + 6 \times 26 + \frac{26^2}{2} = 11\,118 \text{ (万元)}$$

(III) 甲产品的边际成本函数: $C'_x(x, y) = 20 + \frac{x}{2}$, 于是, 当总产量为 50 件且总成本最小时甲产品的边际成本

$$C'_x(x, y) = 20 + \frac{24}{2} = 32$$

其经济意义为: 当甲乙两种产品的产量分别为 24, 26 时, 若甲的产量每增加一件, 则总成本增加 32 万元.

15 (2017, 2 题, 4 分) 二元函数 $z = xy(3 - x - y)$ 的极值点是

(A) (0, 0).

(B) (0, 3).

(C) (3, 0).

(D) (1, 1).

【答案】 D.



【解析】 计算得 $\frac{\partial z}{\partial x} = y(3-2x-y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x(3-x-2y)$.

$$\text{令} \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad \text{得四个驻点}(0,0), (0,3), (3,0), (1,1). \text{而}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2y, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3-2x-2y, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2x$$

利用取得极值的充分条件.

在 $(0,0)$ 处 $B^2 - AC = 9 > 0$, 不是极值点,

在 $(0,3)$ 处 $B^2 - AC = 9 > 0$, 不是极值点,

在 $(3,0)$ 处 $B^2 - AC = 9 > 0$, 不是极值点,

在 $(1,1)$ 处 $B^2 - AC = -3 < 0$, 是极值点.

故应选(D).

16 (2018, 17 题, 10 分) 将长为 2 m 的铁丝分成三段, 依次围成圆、正方形与正三角形. 三个图形的面积之和是否存在最小值? 若存在, 求出最小值.

【解】 设铁丝分成的三段长分别为 x, y, z , 则 $x+y+z=2$, 且依次围成的圆的半径, 正方形的边长, 三角形的边长分别为 $\frac{x}{2\pi}, \frac{y}{4}, \frac{z}{3}$.

因而, 三个图形的之和为

$$S = \pi \left(\frac{x}{2\pi} \right)^2 + \left(\frac{y}{4} \right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{z}{3} \right)^2 = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{y^2}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36} z^2$$

构造拉格朗日函数

$$L(x, y, z, \lambda) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{y^2}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36} z^2 + \lambda(x+y+z-2)$$

$$\text{由} \begin{cases} L'_x = \frac{x}{2\pi} + \lambda = 0, \\ L'_y = \frac{y}{8} + \lambda = 0, \\ L'_z = \frac{\sqrt{3}}{18} z + \lambda = 0, \\ L'_\lambda = x+y+z-2 = 0, \end{cases} \quad \text{得} \begin{cases} x = \frac{2\pi}{\pi+4+3\sqrt{3}}, \\ y = \frac{8}{\pi+4+3\sqrt{3}}, \\ z = \frac{6\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}}. \end{cases}$$

此时 S 取最小值为 $\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$.

【评注】 可设三段长为 $x, y, 2-x-y$, 转化为二元函数的最值问题.

17 (2020, 16 题, 10 分) 求函数 $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - xy$ 的极值.

【解】 由 $\begin{cases} f'_x = 3x^2 - y = 0 \\ f'_y = 24y^2 - x = 0 \end{cases}$ 得驻点为 $(0,0), \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$.

可计算 $A = f''_{xx} = 6x, B = f''_{xy} = -1, C = f''_{yy} = 48y$

判别式 $\Delta = AC - B^2 = 288xy - 1$.

在 $(0,0)$ 点处, $\Delta = -1 < 0$, 不是极值点;

在 $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$ 点处, $\Delta = 3 > 0$ 且 $A = 1 > 0$, 取极小值为 $f(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}) = -\frac{1}{216}$.

练习题

1. (2003, 数一, 4 分) 已知函数 $f(x, y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} =$

1, 则

- (A) 点 $(0,0)$ 不是 $f(x, y)$ 的极值点.
- (B) 点 $(0,0)$ 是 $f(x, y)$ 的极大值点.
- (C) 点 $(0,0)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值点.
- (D) 根据所给条件无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x, y)$ 的极值点.

2. (2004, 数一, 12 分) 设 $z = z(x, y)$ 是由 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 确定的函数, 求 $z = z(x, y)$ 的极值点和极值.

3. (2005, 数二, 10 分) 已知函数 $z = f(x, y)$ 的全微分 $dz = 2xdx - 2ydy$, 并且 $f(1, 1) = 2$. 求 $f(x, y)$ 在椭圆域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$ 上的最大值和最小值.

4. (2008, 数二, 11 分) 求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在约束条件 $z = x^2 + y^2$ 和 $x + y + z = 4$ 下的最大和最小值.

5. (2012, 数一、二, 10 分) 求函数 $f(x, y) = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

6. (2013, 数一, 10 分) 求函数 $f(x, y) = (y + \frac{x^3}{3})e^{x+y}$ 的极值.

练习题参考答案

1. 【答案】 A.

【解析】 由 $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1$ 知, 分子的极限必为零, 从而有 $f(0, 0) = 0$, 且

$$f(x, y) - xy \approx (x^2 + y^2)^2 (|x|, |y| \text{ 充分小时})$$

于是

$$f(x, y) - f(0, 0) \approx xy + (x^2 + y^2)^2$$

可见当 $y = x$ 且 $|x|$ 充分小时, $f(x, y) - f(0, 0) \approx x^2 + 4x^4 > 0$; 而当 $y = -x$ 且 $|x|$ 充分小时, $f(x, y) - f(0, 0) \approx -x^2 + 4x^4 < 0$. 故点 $(0, 0)$ 不是 $f(x, y)$ 的极值点, 应选(A).

【评注】 本题综合考查了多元函数的极限、连续和多元函数的极值概念, 题型比较新, 有一定难度. 将极限表示式转化为极限值加无穷小量, 是有关极限分析过程中常用的思想.

2. 【分析】 可能极值点是两个一阶偏导数为零的点, 先求出一阶偏导, 再令其为零确定极值

点即可,然后用二阶偏导确定是极大值还是极小值,并求出相应的极值.

【解】 因为 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$, 所以

$$2x - 6y - 2y \frac{\partial z}{\partial x} - 2z \frac{\partial z}{\partial x} = 0, -6x + 20y - 2z - 2y \frac{\partial z}{\partial y} - 2z \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\text{令} \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \text{得} \begin{cases} x - 3y = 0, \\ -3x + 10y - z = 0, \end{cases} \text{故} \begin{cases} x = 3y, \\ z = y. \end{cases}$$

将上式代入 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$, 可得

$$\begin{cases} x = 9 \\ y = 3 \text{ 或 } y = -3 \\ z = 3 \text{ 或 } z = -3 \end{cases}$$

由于

$$2 - 2y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - 2z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

$$-6 - 2 \frac{\partial z}{\partial x} - 2y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

$$20 - 2 \frac{\partial z}{\partial y} - 2 \frac{\partial z}{\partial y} - 2y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 - 2z \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$\text{所以 } A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(9,3,3)} = \frac{1}{6}, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(9,3,3)} = -\frac{1}{2}, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(9,3,3)} = \frac{5}{3},$$

故 $AC - B^2 = \frac{1}{36} > 0$, 又 $A = \frac{1}{6} > 0$, 从而点 $(9, 3)$ 是 $z(x, y)$ 的极小值点, 极小值为 $z(9, 3) = 3$.

类似地, 由

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(-9,-3,-3)} = -\frac{1}{6}, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(-9,-3,-3)} = \frac{1}{2}, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(-9,-3,-3)} = -\frac{5}{3}$$

可知 $AC - B^2 = \frac{1}{36} > 0$, 又 $A = -\frac{1}{6} < 0$, 从而点 $(-9, -3)$ 是 $z(x, y)$ 的极大值点, 极大值为 $z(-9, -3) = -3$.

【评注】 本题讨论由方程所确定的隐函数求极值问题, 关键是求可能极值点时应注意 x, y, z 满足原方程.

3. 【分析】 根据全微分和初始条件可先确定 $f(x, y)$ 的表达式. 而 $f(x, y)$ 在椭圆域上的最大值和最小值, 可能在区域的内部达到, 也可能在区域的边界上达到, 且在边界上的最值又转化为求条件极值.

【解】 由题设知 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$,

于是 $f(x, y) = x^2 + C(y)$, 且 $C'(y) = -2y$, 从而 $C(y) = -y^2 + C$.

再由 $f(1, 1) = 2$, 得 $C = 2$, 故 $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$.

令 $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ 得可能极值点为 $x = 0, y = 0$. 且

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \bigg|_{(0,0)} = 2, B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \bigg|_{(0,0)} = 0, C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \bigg|_{(0,0)} = -2$$

从而 $\Delta = B^2 - AC = 4 > 0$, 所以点 $(0, 0)$ 不是极值点, 从而也非最值点.

再考虑其在边界曲线 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 上的情形: 令拉格朗日函数为

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \left(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 \right)$$

$$\text{令} \begin{cases} F'_x = \frac{\partial f}{\partial x} + 2\lambda x = 2(1 + \lambda)x = 0, \\ F'_y = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\lambda y}{2} = -2y + \frac{1}{2}\lambda y = 0, \\ F'_\lambda = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0. \end{cases}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

解得可能极值点 $x = 0, y = 2, \lambda = 4; x = 0, y = -2, \lambda = 4; x = 1, y = 0, \lambda = -1; x = -1, y = 0, \lambda = -1$. 代入 $f(x, y)$ 得 $f(0, \pm 2) = -2, f(\pm 1, 0) = 3$,

可见 $z = f(x, y)$ 在区域 $D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$ 内的最大值为 3, 最小值为 -2.

【评注】 本题综合考查了多元函数微分学的知识, 涉及多个重要基础概念, 特别是通过偏导数反求函数关系, 要求考生真正理解并掌握了相关知识.

4. **【解】** 设拉格朗日函数为

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(z - x^2 - y^2) + \mu(x + y + z - 4)$$

$$\text{令} \begin{cases} F'_x(x, y, z) = 2x - 2\lambda x + \mu = 0 \\ F'_y(x, y, z) = 2y - 2\lambda y + \mu = 0 \\ F'_z(x, y, z) = 2z + \lambda + \mu = 0 \\ F'_\lambda(x, y, z) = z - x^2 - y^2 = 0 \\ F'_\mu(x, y, z) = x + y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{得} \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \\ z = 8 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

故最大值、最小值分别为 $u_{\max} = (-2)^2 + (-2)^2 + 8^2 = 72, u_{\min} = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$.

【评注】 本题考查两个约束条件 $\begin{cases} \varphi(x, y, z) = 0, \\ \psi(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 下的函数 $u = f(x, y, z)$ 的条件极值问题, 可类似地构造拉格朗日函数

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda \varphi(x, y, z) + \mu \psi(x, y, z)$$

解出可能极值点后, 直接代入目标函数计算函数值再比较大小确定相应的极值(或最值)即可.



5. 【分析】此题为常规题型, 只需用二元函数取得极值的充分条件即可.

【解】令 $f'_x(x, y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + x \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot (-x) = (1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = 0$,

$$f'_y(x, y) = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot (-y) = -xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = 0$$

解得函数驻点, 即可能极值点为 $(1, 0)$ 或 $(-1, 0)$. 易得

$$f''_{xx}(x, y) = -2xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + (1-x^2) \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot (-x) = (x^2-3)xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$f''_{xy}(x, y) = (x^2-1)y \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$f''_{yy}(x, y) = -x \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} - xy \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot (-y) = (y^2-1)xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

(1) 在驻点 $(1, 0)$, $A = f''_{xx}(1, 0) = -2e^{-\frac{1}{2}}$, $B = f''_{xy}(1, 0) = 0$, $C = f''_{yy}(1, 0) = -e^{-\frac{1}{2}}$.

由 $B^2 - AC = -2e^{-1} < 0$, 且 $A < 0$, 知 $(1, 0)$ 为极大值点, 极大值 $f(1, 0) = e^{-\frac{1}{2}}$.

(2) 在驻点为 $(-1, 0)$, $A = f''_{xx}(-1, 0) = 2e^{-\frac{1}{2}}$, $B = f''_{xy}(-1, 0) = 0$,

$C = f''_{yy}(-1, 0) = e^{-\frac{1}{2}}$. 由 $B^2 - AC = -2e^{-1} < 0$, 且 $A > 0$, 知 $(-1, 0)$ 为极小值点, 极小值 $f(-1, 0) = -e^{-\frac{1}{2}}$.

6. 【分析】 本题考查二元函数的极值问题.

【解】 $f'_x(x, y) = (x^2 + y + \frac{x^3}{3})e^{x+y}$, $f'_y(x, y) = (1 + y + \frac{x^3}{3})e^{x+y}$,

令 $f'_x(x, y) = 0$, $f'_y(x, y) = 0$, 解得可能极值点为

$$x = -1, y = -\frac{2}{3}, \text{ 或 } x = 1, y = -\frac{4}{3}$$

又 $f''_{xx}(x, y) = (2x + 2x^2 + y + \frac{x^3}{3})e^{x+y}$, $f''_{xy}(x, y) = (1 + x^2 + y + \frac{x^3}{3})e^{x+y}$,

$$f''_{yy}(x, y) = (2 + y + \frac{x^3}{3})e^{x+y},$$

当 $x = -1, y = -\frac{2}{3}$ 时,

$$A = f''_{xx}\left(1, -\frac{2}{3}\right) = -e^{-\frac{5}{3}}, B = f''_{xy}\left(1, -\frac{2}{3}\right) = e^{-\frac{5}{3}}, C = f''_{yy}\left(1, -\frac{2}{3}\right) = e^{-\frac{5}{3}}$$

因为 $B^2 - AC = 2e^{-\frac{10}{3}} > 0$, 所以 $\left(1, -\frac{2}{3}\right)$ 不是 $f(x, y)$ 的极值点.

当 $x = 1, y = -\frac{4}{3}$ 时,

$$A = f''_{xx}\left(1, -\frac{4}{3}\right) = 3e^{-\frac{1}{3}}, B = f''_{xy}\left(1, -\frac{4}{3}\right) = e^{-\frac{1}{3}}, C = f''_{yy}\left(1, -\frac{4}{3}\right) = e^{-\frac{1}{3}}$$

知 $B^2 - AC = -2e^{-\frac{2}{3}} < 0$, 并且 $A > 0$,

所以 $\left(1, -\frac{4}{3}\right)$ 为 $f(x, y)$ 的极小值点, 极小值为 $f\left(1, -\frac{4}{3}\right) = -e^{-\frac{1}{3}}$.



小结

1. 二元函数极值的求法

(1) 解方程组 $f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$, 得所有驻点;

(2) 对每一个驻点 (x_0, y_0) , 求 $A = f''_{xx}(x_0, y_0), B = f''_{xy}(x_0, y_0), C = f''_{yy}(x_0, y_0)$ 的值;

(3) 由 $B^2 - AC$ 的符号确定是否为极值点, 是极大值点还是极小值点.

2. 条件极值的求法用拉格朗日乘数法.

3. 最值的求法

闭区域上连续多元函数的最值可能在区域内部或边界上达到, 先求出在区域内部的所有驻点以及偏导数不存在的点, 比较这些点与边界上点的函数值, 最大者即为最大值, 最小者即为最小值. 对于实际问题一般根据实际背景来确定是否取最值(如可能极值点唯一, 则极小(大)值点即最小(大)值点).

四、反问题

18(2014, 17 题, 10 分) 设函数 $f(u)$ 具有连续导数, 且 $z = f(e^x \cos y)$ 满足

$$\cos y \frac{\partial z}{\partial x} - \sin y \frac{\partial z}{\partial y} = (4z + e^x \cos y)e^x$$

若 $f(0) = 0$, 求 $f(u)$ 的表达式.

【分析】利用复合函数偏导数的计算方法求出两个偏导数, 代入所给偏微分方程, 转化为可求解的常微分方程.

【解】因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(e^x \cos y)e^x \cos y, \frac{\partial z}{\partial y} = -f'(e^x \cos y)e^x \sin y$, 所以

$$\cos y \frac{\partial z}{\partial x} - \sin y \frac{\partial z}{\partial y} = \cos y f'(e^x \cos y)e^x \cos y - \sin y [-f'(e^x \cos y)e^x \sin y] = f'(e^x \cos y)e^x$$

因此 $\cos y \frac{\partial z}{\partial x} - \sin y \frac{\partial z}{\partial y} = (4z + e^x \cos y)e^x$ 化为 $f'(e^x \cos y) = 4f(e^x \cos y) + e^x \cos y$.

从而函数 $f(u)$ 满足方程 $f'(u) = 4f(u) + u$. 这是一阶线性非齐次微分方程, 直接代通解公式得该方程的通解为 $f(u) = Ce^{4u} - \frac{u}{4} - \frac{1}{16}$.

由 $f(0) = 0$ 得 $C = \frac{1}{16}$. 故

$$f(u) = \frac{1}{16}(e^{4u} - 4u - 1)$$

【评注】一阶线性非齐次微分方程是非常重要的一类可解方程, 其通解公式要熟记. 对于方程 $y' + p(x)y = q(x)$, 其通解为 $y = e^{-\int p(x)dx} \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right)$, C 为任意常数.



练习题

1. (1997年, 数一, 7分) 已知 $f(u)$ 具有二阶连续导数, 而 $z = f(e^x \sin y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 z}{\partial^2 y} = e^{2x} z$, 求 $f(u)$.

2. (2006年, 数一, 12分) 设函数 $f(u)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 满足等式 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

(I) 验证 $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$;

(II) 若 $f(1) = 0, f'(1) = 1$, 求函数 $f(u)$ 的表达式.

3. (2010年, 数二, 11分) 设函数 $u = f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足等式 $4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 确定 a, b 的值, 使等式在变换 $\xi = x + ay, \eta = x + by$ 下化简为 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

练习题参考答案

1. 【解】 由已知得 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u) e^x \sin y, \frac{\partial z}{\partial y} = f'(u) e^x \cos y$, 进而

$$\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x} = f''(u) e^{2x} \sin^2 y + f'(u) e^x \sin y, \frac{\partial^2 z}{\partial^2 y} = f''(u) e^{2x} \cos^2 y - f'(u) e^x \sin y$$

代入原方程有 $f''(u) - f(u) = 0$, 解此二阶常系数齐次线性方程得

$$f(u) = C_1 e^u + C_2 e^{-u}$$

2. 【分析】 利用复合函数偏导数计算方法求出 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 代入 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 即可得 (I). 按常规方法解 (II) 即可.

【解】 (I) 设 $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = f'(u) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= f''(u) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + f'(u) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} \\ &= f''(u) \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} + f'(u) \cdot \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u) \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2} + f'(u) \cdot \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

将 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 代入 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, 得

$$f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$$

(II) 令 $f'(u) = p$, 则 $p' + \frac{p}{u} = 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{du}{u}$, 两边积分得

$$\ln p = -\ln u + \ln C_1$$

即 $p = \frac{C_1}{u}$, 亦即 $f'(u) = \frac{C_1}{u}$.

由 $f'(1) = 1$ 可得 $C_1 = 1$. 所以有 $f'(u) = \frac{1}{u}$, 两边积分得

$$f(u) = \ln u + C_2$$

由 $f(1) = 0$ 可得 $C_2 = 0$, 故 $f(u) = \ln u$.

【评注】 本题为基础题型, 着重考查多元复合函数的偏导数的计算及可降阶方程的求解.

3. **【分析】** 利用复合函数的链导法则变形原等式即可.

【解】 由复合函数的链导法则得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = a \frac{\partial u}{\partial \xi} + b \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ &= a \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (a+b) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(a \frac{\partial u}{\partial \xi} + b \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \\ &= a \left(a \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right) + b \left(b \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + a \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right) \\ &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2ab \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \end{aligned}$$

由 $4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 得

$$(5a^2 + 12a + 4) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (5b^2 + 12b + 4) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (12(a+b) + 10ab + 8) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$



$$\text{因而} \begin{cases} 5a^2 + 12a + 4 = 0, \\ 5b^2 + 12b + 4 = 0, \\ 12(a+b) + 10ab + 8 \neq 0. \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a = -\frac{2}{5}, \\ b = -2, \end{cases} \text{或} \begin{cases} a = -2, \\ b = -\frac{2}{5}. \end{cases}$$

【评注】 此题主要考查复合函数链导法则的熟练运用,是对运算能力的考核.

小结

由已知满足的关系式或条件,利用多元函数微分学的方法和结论,求出待定的函数、参数等.特别是已知偏导数或偏导数所满足的关系式(方程)求函数,主要有两种题型:

1. 已知偏导数,通过不定积分求函数.

设 $f(x, y)$ 有连续偏导数,且 $f'_x(x, y) = g(x, y)$, $f'_y(x, y) = h(x, y)$, 则有

$$f(x, y) = \int f'_x(x, y) dx + \varphi(y) = \int g(x, y) dx + \varphi(y)$$

$$f(x, y) = \int f'_y(x, y) dy + \psi(x) = \int h(x, y) dy + \psi(x)$$

2. 已知多元函数的偏导数所满足的方程,通过变量变换,化为一元函数的导数所满足的方程,即常微分方程,求解微分方程得到函数.

心得笔记:

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



第五章 二重积分

本章导读

本章考查的重点是二重积分的计算,除了掌握基本的计算方法,须注意对称性、拆分区域、拆分函数、交换积分次序、交换积分坐标系等的应用.

试题特点

二重积分是数学三重要的考试知识,每年试题一般是一个大题、一个小题,分数约占试卷的8%,主要集中在二重积分计算的考查,往往在被积函数和积分区域设置障碍,因而要掌握一定的方法和技巧.另外,被积函数为抽象函数的二重积分值得关注.

考题详析

一、基本概念及性质

1 (2013,3题,4分) 设 D_k 是圆域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ 位于第 k 象限的部分, 记 $I_k = \iint_{D_k} (y-x) dx dy$ ($k=1,2,3,4$), 则

- (A) $I_1 > 0$. (B) $I_2 > 0$. (C) $I_3 > 0$. (D) $I_4 > 0$.

【答案】 B.

【解析】 利用二重积分的不等式性质.

显然, 在 D_2 上 $y-x \geq 0$, 且 $y-x$ 不恒等于零, 则 $I_2 = \iint_{D_2} (y-x) dx dy > 0$. 故选(B).

【评注】 实际上 $I_4 < 0$, 由于 D_1, D_3 关于直线 $y=x$ 对称, 再由轮换对称性得

$$I_1 = \frac{1}{2} \left[\iint_{D_1} (y-x) dx dy + \iint_{D_1} (x-y) dx dy \right] = 0$$

$$I_3 = \frac{1}{2} \left[\iint_{D_3} (y-x) dx dy + \iint_{D_3} (x-y) dx dy \right] = 0$$

2 (2016,3题,4分) 设 $J_i = \iint_{D_i} \sqrt[3]{x-y} dx dy$ ($i=1,2,3$), 其中 $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, $D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$, $D_3 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$, 则



(A) $J_1 < J_2 < J_3$.

(B) $J_3 < J_1 < J_2$.

(C) $J_2 < J_3 < J_1$.

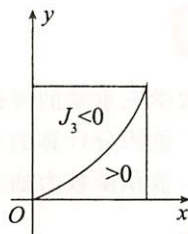
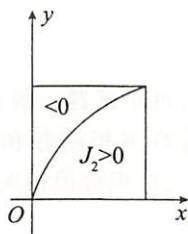
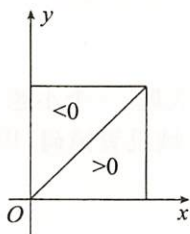
(D) $J_2 < J_1 < J_3$.

【答案】 B.**【解析】** 直接计算,与选项比较.

$$D_1 \text{ 关于直线 } y=x \text{ 对称, } J_1 = \frac{1}{2} \iint_{D_1} (\sqrt[3]{x-y} + \sqrt[3]{y-x}) dx dy = 0,$$

 D_1 被直线 $y=x$ 对分成的两个积分区域记为 D_+ 及 D_- , 则

$$\iint_{D_+} \sqrt[3]{x-y} dx dy = - \iint_{D_-} \sqrt[3]{x-y} dx dy, \iint_{D_+} \sqrt[3]{x-y} dx dy < 0, \iint_{D_-} \sqrt[3]{x-y} dx dy > 0$$

 在 D_+ 上 $\sqrt[3]{x-y} < 0$, 有 $J_2 > 0$. 在 D_- 上 $\sqrt[3]{x-y} > 0$, 有 $J_3 < 0$.
因而 $J_3 < J_1 < J_2$. 选(B).**练习题**

1. (2010, 数一、数二, 4分) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(A) $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy.$

(B) $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy.$

(C) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy.$

(D) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy.$

 2. (2009年, 数一, 4分) 如图, 正方形 $\{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ 被其

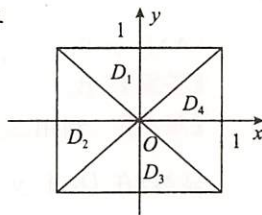
 对角线划分为四个区域 $D_k (k=1, 2, 3, 4)$, $I_k = \iint_{D_k} y \cos x dx dy$, 则 $\max_{1 \leq k \leq 4} \{I_k\}$

(A) I_1 .

(B) I_2 .

(C) I_3 .

(D) I_4 .

**练习题参考答案**1. **【答案】** D.

【解析】 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{n(1+\frac{i}{n})n^2[1+(\frac{j}{n})^2]}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{(1+\frac{i}{n})[1+(\frac{j}{n})^2]} \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy,$$

所以应选(D).

【评注】 1. 也可用定积分定义计算

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{1+\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} \right) \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{1+\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} \right) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy. \end{aligned}$$

2. 以往多次考过定积分求极限, 本题是首次考查二重积分定义求极限. 题目较新颖.

2. 【答案】 A.

【解析】 D_2, D_4 两区域关于 x 轴对称, 被积函数是关于 y 的奇函数, 所以 $I_2 = I_4 = 0$;

D_1, D_3 两区域关于 y 轴对称, 被积函数是关于 x 的偶函数, 所以

$$\begin{aligned} I_1 &= 2 \iint_{\{(x,y) | 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}} y \cos x dx dy > 0 \\ I_3 &= 2 \iint_{\{(x,y) | 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq -x\}} y \cos x dx dy < 0 \end{aligned}$$

因而正确答案为(A).

小结

1. $\iint_D f(u,v) du dv = A$ 为常数, 与积分变量用哪个字母表示无关.

2. 二重积分不等式性质须注意条件, 如

(1) $f(x,y) \geq g(x,y)$ 得不到 $\iint_D f(x,y) dx dy > \iint_D g(x,y) dx dy$, 但加上 $f(x,y), g(x,y)$ 连续且 $f(x,y)$ 不恒等于 $g(x,y)$ 结论正确.

(2) $f(x,y) \geq 0$ 且 $\iint_D f(x,y) dx dy = 0$ 推不出 $f(x,y) = 0$, 但加上 $f(x,y)$ 连续, 则结论正确.

二、二重积分的基本计算

3 (2009, 17 题, 10 分) 计算二重积分 $\iint_D (x-y) dx dy$. 其中

$$D = \{(x,y) | (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2, y \geq x\}$$

【分析】 利用极坐标计算.



【解】 (方法一) 由 $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2$, 得 $r \leq 2(\sin \theta + \cos \theta)$, 所以

$$\begin{aligned} \iint_D (x-y) dx dy &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} d\theta \int_0^{2(\sin \theta + \cos \theta)} (r \cos \theta - r \sin \theta) r dr \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} d\theta \int_0^{2(\sin \theta + \cos \theta)} (\cos \theta - \sin \theta) r^2 dr \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \left[\frac{1}{3} (\cos \theta - \sin \theta) r^3 \right]_0^{2(\sin \theta + \cos \theta)} d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{8}{3} (\cos \theta - \sin \theta) \cdot (\sin \theta + \cos \theta) \cdot (\sin \theta + \cos \theta)^2 d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{8}{3} (\cos \theta - \sin \theta) \cdot (\sin \theta + \cos \theta)^3 d\theta \\ &= \frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} (\sin \theta + \cos \theta)^3 d(\sin \theta + \cos \theta) \\ &= \frac{8}{3} \times \frac{1}{4} (\sin \theta + \cos \theta)^4 \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} = -\frac{8}{3}. \end{aligned}$$

(方法二) 如图所示, 将区域 D 分成 D_1, D_2 两部分, 其中

$$D_1 = \{(x, y) | 1 - \sqrt{2 - (x-1)^2} \leq y \leq 1 + \sqrt{2 - (x-1)^2}, 1 - \sqrt{2} \leq x \leq 0\}$$

$$D_2 = \{(x, y) | x \leq y \leq 1 + \sqrt{2 - (x-1)^2}, 0 \leq x \leq 2\}$$

由二重积分的性质知

$$\iint_D (x-y) dx dy = \iint_{D_1} (x-y) dx dy + \iint_{D_2} (x-y) dx dy$$

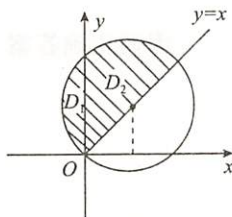
因为

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} (x-y) dx dy &= \int_{1-\sqrt{2}}^0 dx \int_{1-\sqrt{2-(x-1)^2}}^{1+\sqrt{2-(x-1)^2}} (x-y) dy \\ &= \int_{1-\sqrt{2}}^0 2(x-1) \sqrt{2-(x-1)^2} dx \\ &= -\frac{2}{3} (\sqrt{2-(x-1)^2})^3 \Big|_{1-\sqrt{2}}^0 = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{D_2} (x-y) dx dy &= \int_0^2 dx \int_x^{1+\sqrt{2-(x-1)^2}} (x-y) dy \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^2 [2 - 2(x-1) \sqrt{2-(x-1)^2}] dx \\ &= -\frac{1}{2} \left[4 + \frac{2}{3} (\sqrt{2-(x-1)^2})^3 \right]_0^2 = -2 \end{aligned}$$

所以

$$\iint_D (x-y) dx dy = -\frac{8}{3}$$



【评注】 可利用坐标变换, 令 $u = x - 1, v = y - 1$, 那么

$$D = \{(u, v) \mid u^2 + v^2 \leq 2, v \geq u\}$$

原式化简为

$$\begin{aligned} \iint_D (u-v) du dv &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (r\cos\theta - r\sin\theta) \cdot r dr = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (\cos\theta - \sin\theta) \cdot \frac{r^2}{3} \Big|_0^{\sqrt{2}} d\theta \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (\cos\theta - \sin\theta) d\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3} (\sin\theta + \cos\theta) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \times (-2\sqrt{2}) = -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

即为所求.

4 (2012, 16 题, 10 分) 计算二重积分 $\iint_D e^x xy dx dy$, 其中 D 是以曲线 $y = \sqrt{x}, y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 及 y 轴为边界的无界区域.

【解】 $\iint_D e^x xy dx dy = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}} e^x xy dy$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 e^x (1 - x^2) dx$$

$$= \frac{1}{2} e^x (1 - x^2) \Big|_0^1 + \int_0^1 x e^x dx$$

$$= -\frac{1}{2} + x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$

$$= \frac{1}{2}.$$

5 (2013, 17 题, 10 分) 设平面区域 D 由直线 $x = 3y, y = 3x$ 及 $x + y = 8$ 围成, 计算 $\iint_D x^2 dx dy$.

【分析】 求出直线 $x + y = 8$ 与另两条直线的交点, 把积分区域分为两块, 直角坐标系下化二重积分为二次积分, 积分次序选择先 y 后 x 较好.

【解】 直线 $x + y = 8$ 与直线 $x = 3y$ 的交点为 $(6, 2)$, 直线 $x + y = 8$ 与直线 $y = 3x$ 的交点为 $(2, 6)$.

化二重积分为二次积分有

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 dx dy &= \int_0^2 x^2 dx \int_{\frac{1}{3}x}^{3x} dy + \int_2^6 x^2 dx \int_{\frac{1}{3}x}^{8-x} dy \\ &= \frac{8}{3} \int_0^2 x^3 dx + \int_2^6 (8 - \frac{4}{3}x) x^2 dx = \frac{32}{3} + 128 = \frac{416}{3} \end{aligned}$$

6 (2015, 3 题, 4 分) 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x, x^2 + y^2 \leq 2y\}$, 函数 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 则 $\iint_D f(x, y) dx dy =$

(A) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr.$

(B) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr.$



$$(C) 2 \int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^x f(x, y) dy.$$

$$(D) 2 \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy.$$

【答案】 B.

【解析】 把积分区域由直线 $y = x$ 分为两部分, 用极坐标系

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$$

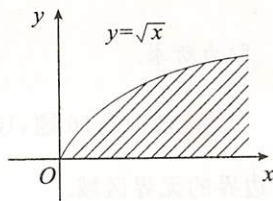
应选(B).

7 (2017, 16 题, 10 分) 计算积分 $\iint_D \frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2} dx dy$, 其中 D 是第一

象限中以曲线 $y = \sqrt{x}$ 与 x 轴为边界的无界区域.

【解】 积分区域如图

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2} dx dy &= \int_0^{+\infty} dy \int_0^{\sqrt{y}} \frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2} dx \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+2x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \sqrt{2}x \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{4} \arctan x \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{8} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{2-\sqrt{2}}{16} \pi. \end{aligned}$$

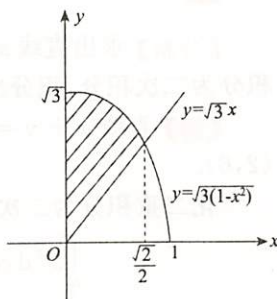


8 (2018, 16 题, 10 分) 设平面区域 D 由曲线 $y = \sqrt{3(1-x^2)}$ 与直线 $y = \sqrt{3}x$ 及 y 轴围成, 计

算二重积分 $\iint_D x^2 dx dy$.

【解】 积分区域如图所示, 则

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 dx dy &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{3(1-x^2)}} x^2 dy \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^2 (\sqrt{3(1-x^2)} - \sqrt{3}x) dx \\ &= \sqrt{3} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^2 \sqrt{1-x^2} dx - \sqrt{3} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^3 dx \\ &= \sqrt{3} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^2 \sqrt{1-x^2} dx - \frac{\sqrt{3}}{16} \\ &\stackrel{x=\sin t}{=} \sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t \cdot \cos^2 t dt - \frac{\sqrt{3}}{16} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(2t) dt - \frac{\sqrt{3}}{16} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 4t}{2} dt - \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{32} \pi - \frac{\sqrt{3}}{16}. \end{aligned}$$



9 (2020, 18 题, 10 分) 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$, 连续函数 $f(x, y)$ 满足

$$f(x, y) = y \sqrt{1-x^2} + x \iint_D f(x, y) dx dy$$

求 $\iint_D x f(x, y) dx dy$.

【解】 令 $A = \iint_D f(x, y) dx dy$, 则 $f(x, y) = y \sqrt{1-x^2} + Ax$.

两边求二重积分

$$\begin{aligned} A &= \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D y \sqrt{1-x^2} dx dy + A \iint_D x dx dy \\ &= \iint_D y \sqrt{1-x^2} dx dy = 2 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy \\ &= \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx \stackrel{x=\sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{3}{16} \pi \end{aligned}$$

$$\text{得 } f(x, y) = y \sqrt{1-x^2} + \frac{3}{16} \pi x.$$

$$\text{有 } \iint_D x f(x, y) dx dy = \iint_D x y \sqrt{1-x^2} dx dy + \frac{3}{16} \pi \iint_D x^2 dx dy$$

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{16} \pi \iint_D x^2 dx dy = \frac{3}{16} \pi \int_0^\pi d\theta \int_0^1 r^2 \cos^2 \theta \cdot r dr \\ &= \frac{3}{64} \pi \int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta = \frac{3}{128} \pi^2 \end{aligned}$$

练习题

1. (2011, 数二, 4 分) 设平面区域 D 由直线 $y = x$, 圆 $x^2 + y^2 = 2y$ 及 y 轴所围成, 则二重积分

$$\iint_D xy d\sigma = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. (2011, 数一、数二, 11 分) 已知函数 $f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $f(1, y), f(x, 1) = 0$,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = a, \text{ 其中 } D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}, \text{ 计算二重积分 } \iint_D xy f_{xy}''(x, y) dx dy.$$

3. (2012, 数二, 10 分) 计算二重积分 $\iint_D xy d\sigma$, 其中区域 D 由曲线 $r = 1 + \cos \theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ 与极轴围成.

练习题参考答案

1. 【答案】 $\frac{7}{12}$.

【解析】 易得圆的极坐标方程为 $r = 2 \sin \theta$, 于是

$$\iint_D xy d\sigma = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \sin \theta} r^2 \cos \theta \sin \theta \cdot r dr = 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta \cos \theta d\theta$$



$$= 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta d(\sin \theta) = \frac{7}{12}.$$

2.【分析】 把二重积分化为二次积分,用分部积分法.

$$\text{【解】} \iint_D xy f''_{xy}(x, y) dx dy = \int_0^1 x \left(\int_0^1 y f''_{xy}(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 x \left(\int_0^1 y df'_x(x, y) \right) dx.$$

用分部积分法

$$\int_0^1 y df'_x(x, y) = y f'_x(x, y) \Big|_0^1 - \int_0^1 f'_x(x, y) dy = - \int_0^1 f'_x(x, y) dy$$

交换积分次序

$$\int_0^1 x \left(\int_0^1 y df'_x(x, y) \right) dx = - \int_0^1 x \left(\int_0^1 f'_x(x, y) dy \right) dx = - \int_0^1 \left(\int_0^1 x f'_x(x, y) dx \right) dy$$

再用分部积分法

$$\int_0^1 x f'_x(x, y) dx = \int_0^1 x df(x, y) = x f(x, y) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x, y) dx = - \int_0^1 f(x, y) dx$$

$$\text{所以} \iint_D xy f''_{xy}(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx = a.$$

【评注】 注意在计算二次积分的过程中对分部积分法及已知条件的应用.

$$3. \text{【解】 (方法一)} \iint_D xy d\sigma = \int_0^\pi d\theta \int_0^{1+\cos\theta} r \cos \theta \cdot r \sin \theta \cdot r dr$$

$$= \int_0^\pi \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot \left(\frac{1}{4} r^4 \Big|_0^{1+\cos\theta} \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta (1 + \cos \theta)^4 d\theta$$

$$= - \frac{1}{4} \int_0^\pi \cos \theta \cdot (1 + \cos \theta)^4 d\cos \theta$$

$$= - \frac{1}{4} \int_0^\pi [(1 + \cos \theta)^5 - (1 + \cos \theta)^4] d(1 + \cos \theta)$$

$$= - \frac{1}{24} (1 + \cos \theta)^5 \Big|_0^\pi + \frac{1}{20} (1 + \cos \theta)^5 \Big|_0^\pi$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{8}{5} = \frac{16}{15}.$$

$$\text{(方法二)} \iint_D xy d\sigma = \int_0^\pi d\theta \int_0^{1+\cos\theta} r \cos \theta \cdot r \sin \theta \cdot r dr$$

$$= \int_0^\pi \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot \left(\frac{1}{4} r^4 \Big|_0^{1+\cos\theta} \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta (1 + \cos \theta)^4 d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^\pi \left(2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 \right) \cdot 2\sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} \cdot 16\cos^8\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= -16 \int_0^\pi \left(2\cos^{11}\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos^9\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) d\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$



$$= -16 \left(\frac{1}{6} \cos^{12} \left(\frac{\theta}{2} \right) - \frac{1}{10} \cos^{10} \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{16}{15}.$$

小结

1. 计算二重积分的步骤为(1)画出积分区域 D 的示意图.(2)用不等式组表示积分区域 D .(3)把二重积分表示为二次积分.(4)计算二次积分.

2. 注意积分坐标及积分次序的选择,一般说:若积分区域为圆域或圆域的一部分,被积函数为形如 $f(\sqrt{x^2+y^2})$, $f\left(\frac{y}{x}\right)$, $f\left(\frac{x}{y}\right)$ 等,可考虑采用在极坐标系下进行计算.

3. 利用直角坐标计算二重积分 $d\sigma = dx dy$.

若 $D: a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$.

若 $D: c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$.

4. 利用极坐标计算 $d\sigma = r dr d\theta$, 计算方法同直角坐标,一般先 r 、后 θ .

若极点 O 在积分区域 D 的外部, D 可以表示为 $D: \alpha \leq \theta \leq \beta, \varphi_1(\theta) \leq r \leq \varphi_2(\theta)$, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$$

若极点 O 在积分区域 D 的边界上, D 可以表示为 $D: \alpha \leq \theta \leq \beta, 0 \leq r \leq \varphi(\theta)$, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$$

若极点 O 在积分区域 D 的内部, D 的边界方程为 $r = \varphi(\theta)$, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$$

5. 注意利用二重积分的对称性化简运算.

三、利用区域的对称性及函数的奇偶性计算积分

10 (2010, 16 题, 10 分) 计算二重积分 $\iint_D (x+y)^3 d\sigma$, 其中 D 由曲线 $x = \sqrt{1+y^2}$ 与直线

$x + \sqrt{2}y = 0$ 及 $x - \sqrt{2}y = 0$ 所围成.

【分析】 被积函数展开, 利用二重积分的对称性.

【解】 显然 D 关于 x 轴对称, 且 $D = D_1 \cup D_2$, 其中

$$D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, \sqrt{2}y \leq x \leq \sqrt{1+y^2}\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid -1 \leq y \leq 0, -\sqrt{2}y \leq x \leq \sqrt{1+y^2}\}$$

$$\iint_D (x+y)^3 d\sigma = \iint_D (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) dx dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \iint_D (x^3 + 3xy^2) dx dy + \iint_D (3x^2y + y^3) dx dy \\
 &= 2 \iint_{D_1} (x^3 + 3xy^2) dx dy + 0 \quad (\text{被积函数 } 3x^2y + y^3 \text{ 关于 } y \text{ 是奇函数}) \\
 &= 2 \int_0^1 dy \int_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}} (x^3 + 3xy^2) dx = 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2y^2 \right) \Big|_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}} dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 + 8y^2 - 9y^4) dy = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{8}{3} - \frac{9}{5} \right) = \frac{14}{15}.
 \end{aligned}$$

【评注】 二重积分的对称性的考察一直是研究生考试的重要测试内容.

11 (2014, 16 题, 10 分) 设平面内区域 $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, 计算

$$\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy$$

【分析】 根据积分区域的形状易想到利用极坐标计算.

【解】 (方法一) 令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$,

$$\begin{aligned}
 \iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta \int_1^2 r \sin \pi r dr \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta \cdot \frac{1}{\pi} \left(-r \cos \pi r \Big|_1^2 + \int_1^2 \cos \pi r dr \right) \\
 &= -\frac{3}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta
 \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta \quad (\text{令 } \theta = \frac{\pi}{2} - t) \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta = \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy = -\frac{3}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = -\frac{3}{4}.$$

(方法二) 显然积分区域 D 关于 x, y 有轮换对称性, 于是

$$\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy = \iint_D \frac{y \sin(\pi \sqrt{y^2 + x^2})}{y + x} dx dy$$

所以

$$\begin{aligned}
 &\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy \\
 &= \frac{1}{2} \left[\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy + \iint_D \frac{y \sin(\pi \sqrt{y^2 + x^2})}{y + x} dx dy \right] \\
 &= \frac{1}{2} \iint_D \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 r \sin \pi r dr \quad (\text{令 } x = r \cos \theta, y = r \sin \theta)
 \end{aligned}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cdot \frac{1}{\pi} \left(-r \cos \pi r \Big|_1^2 + \int_1^2 \cos \pi r dr \right) \\
 &= \frac{\pi}{4} \cdot \left(-\frac{3}{\pi} \right) = -\frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

【评注】 重积分的计算中一定要利用好积分区域的对称性、被积函数的奇偶性和坐标变换等手段.

12 (2015, 16 题, 10 分) 计算二重积分 $\iint_D x(x+y) dx dy$, 其中

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x^2\}$$

【分析】 利用二重积分的对称性及二重积分的基本计算.

【解】 积分区域关于 y 轴对称, $\iint_D xy dx dy = 0$,

$$\begin{aligned}
 \iint_D x^2 dx dy &= 2 \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} x^2 dy = 2 \int_0^1 x^2 (\sqrt{2-x^2} - x^2) dx \\
 &= 2 \int_0^1 x^2 \sqrt{2-x^2} dx - \frac{2}{5} = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t \cos^2 t dt - \frac{2}{5} \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2t dt - \frac{2}{5} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 4t) dt - \frac{2}{5} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

13 (2016, 12 题, 4 分) 设 $D = \{(x, y) \mid |x| \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}$, 则 $\iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy =$

【答案】 $\frac{1}{3}(1 - 2e^{-1})$.

【解析】 利用二重积分的对称性

$$\begin{aligned}
 \iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy &= 2 \iint_{D_{\text{右}}} x^2 e^{-y^2} dx dy = 2 \int_0^1 e^{-y^2} dy \int_0^y x^2 dx = \frac{2}{3} \int_0^1 y^3 e^{-y^2} dy \\
 &= -\frac{1}{3} \int_0^1 y^2 d(e^{-y^2}) = -\frac{1}{3} (y^2 e^{-y^2} \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 y e^{-y^2} dy) \\
 &= -\frac{1}{3} (e^{-1} + e^{-y^2} \Big|_0^1) = \frac{1}{3} (1 - 2e^{-1})
 \end{aligned}$$

【评注】 本题若用“先 y 后 x ”的积分次序则无法计算.

练习题

1. (2005, 数二, 4 分) 设区域

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$$

$f(x)$ 是正值连续函数, a, b 为常数, 则 $\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma =$

(A) $ab\pi$.

(B) $\frac{ab}{2}\pi$.

(C) $(a+b)\pi$.

(D) $\frac{a+b}{2}\pi$.



2. (2006, 数一、数二, 10 分) 设区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$, 计算二重积分

$$\iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} dx dy$$

3. (1994, 数一, 4 分) 设区域 D 为 $x^2 + y^2 \leq R^2$, 则 $\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy =$ _____.

4. (2012, 数二, 4 分) 设区域 D 由曲线 $y = \sin x, x = \pm \frac{\pi}{2}, y = 1$ 围成, 则 $\iint_D (x^5 y - 1) dx dy =$

(A) π .

(B) 2.

(C) -2 .(D) $-\pi$.

练习题参考答案

1. 【答案】 D.

【解析】 由轮换对称性, 有

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{a \sqrt{f(x)} + b \sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma &= \iint_D \frac{a \sqrt{f(y)} + b \sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)} + \sqrt{f(x)}} d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \iint_D \left[\frac{a \sqrt{f(x)} + b \sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} + \frac{a \sqrt{f(y)} + b \sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)} + \sqrt{f(x)}} \right] d\sigma \\ &= \frac{a+b}{2} \iint_D d\sigma = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{1}{4} \pi \cdot 2^2 = \frac{a+b}{2} \pi. \end{aligned}$$

应选 (D).

【评注】 被积函数含有抽象函数时, 一般考虑用对称性分析. 特别, 当具有轮换对称性 (x, y 互换, D 保持不变) 时, 往往用如下方法:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(y, x) dx dy = \frac{1}{2} \iint_D [f(x, y) + f(y, x)] dx dy$$

2. 【分析】 由于积分区域 D 关于 x 轴对称, 故可先利用二重积分的对称性结论简化所求积分, 又积分区域为圆域的一部分, 则将其化为极坐标系下累次积分即可.

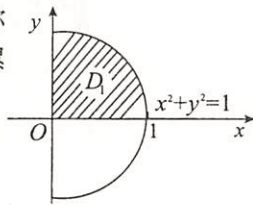
【解】 积分区域 D 如图所示. 因为区域 D 关于 x 轴对称, 函数

$f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ 是变量 y 的偶函数,

函数 $g(x, y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$ 是变量 y 的奇函数. 则

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy &= 2 \iint_{D_1} \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{r}{1+r^2} dr = \frac{\pi \ln 2}{2} \\ \iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} dx dy &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{故 } \iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} dx dy = \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy + \iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} dx dy = \frac{\pi \ln 2}{2}.$$



【评注】 只要见到积分区域具有对称性的二重积分计算问题,就要想到考查被积函数或其代数值的每一部分是否具有奇偶性,以便简化计算.

3. **【答案】** $\frac{\pi R^4}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right).$

【解析】 利用轮换对称性

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy &= \iint_D \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} \right) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \frac{\pi R^4}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \end{aligned}$$

4. **【答案】** D.

【解析】 拆分区域 $D = D_1 \cup D_2$, 其中

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{ (x, y) \mid -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0, \sin x \leq y \leq -\sin x \right\} \\ D_2 &= \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, -\arcsin y \leq x \leq \arcsin y \right\} \end{aligned}$$

显然 D_1 关于 x 轴对称, D_2 关于 y 轴对称, 利用二重积分的对称性 $\iint_D x^5 y dx dy = 0$.

因而 $\iint_D (x^5 y - 1) dx dy = -\iint_D dx dy = -\pi$.

小结

1. 如下结论十分重要

(1) 若 D 关于 x 轴对称, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(x, -y) = -f(x, y) \text{ 时} \\ 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma, & \text{当 } f(x, -y) = f(x, y) \text{ 时} \end{cases}$$

其中 D_1 为 D 的上半平面部分.

(2) 若 D 关于 y 轴对称, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(-x, y) = -f(x, y) \text{ 时} \\ 2 \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma, & \text{当 } f(-x, y) = f(x, y) \text{ 时} \end{cases}$$

其中 D_2 为 D 的右半平面部分.

(3) $x \longleftrightarrow y$ 互换, D 保持不变时, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(y, x) dx dy = \frac{1}{2} \iint_D [f(x, y) + f(y, x)] dx dy$$

2. 若积分区域不具有对称性或被积函数不具有奇偶性可考虑拆分区域或函数.



四、分块函数积分的计算

练习题

1. (2005, 数一, 11 分) 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}, x \geq 0, y \geq 0\}$, $[1 + x^2 + y^2]$ 表示不超过 $1 + x^2 + y^2$ 的最大整数. 计算二重积分 $\iint_D xy[1 + x^2 + y^2] dx dy$.

2. (2002, 数一, 7 分) 计算二重积分 $\iint_D e^{\max\{x^2, y^2\}} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

练习题参考答案

1. 【分析】 首先应设法去掉取整函数符号, 为此将积分区域分为两部分即可.

【解】 令 $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x^2 + y^2 < 1, x \geq 0, y \geq 0\}$,

$D_2 = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}, x \geq 0, y \geq 0\}$.

$$\begin{aligned} \text{则 } \iint_D xy[1 + x^2 + y^2] dx dy &= \iint_{D_1} xy dx dy + 2 \iint_{D_2} xy dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^1 r^3 dr + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_1^{\sqrt{2}} r^3 dr \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

【评注】 对于二重积分(或三重积分)的计算问题, 当被积函数为分块函数时应利用积分的可加性分区域积分. 而实际考题中, 被积函数经常为隐含的分块函数, 如取绝对值函数 $|f(x, y)|$ 、取极值函数 $\max\{f(x, y), g(x, y)\}$ 以及取整函数 $[f(x, y)]$ 等等.

2. 【分析】 在 $\max\{x^2, y^2\}$ 中, 去掉取最大的符号, 把 D 分成两个区域积分

【解】 令 $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$, $D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$. 则

$$\iint_D e^{\max\{x^2, y^2\}} dx dy = \iint_{D_1} e^{x^2} dx dy + \iint_{D_2} e^{y^2} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x e^{x^2} dy + \int_0^1 dy \int_0^y e^{y^2} dx = e - 1$$

小结

形如积分 $\iint_D |f(x, y)| d\sigma$, $\iint_D \max\{f(x, y), g(x, y)\} d\sigma$, $\iint_D \min\{f(x, y), g(x, y)\} d\sigma$, $\iint_D [f(x, y)] d\sigma$,

$\iint_D \operatorname{sgn}\{f(x, y) - g(x, y)\} d\sigma$ 等的被积函数均应当作分区域函数看待, 利用积分的可加性分区域积分.

五、交换积分次序及坐标系

14 (2012, 3 题, 4 分) 设函数 $f(t)$ 连续, 则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\cos\theta}^2 f(r^2) r dr =$

(A) $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} f(x^2+y^2) dy.$

(B) $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2+y^2) dy.$

(C) $\int_0^2 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{x^2+y^2} f(x^2+y^2) dx.$

(D) $\int_0^2 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x^2+y^2) dx.$

【答案】 B.

【解析】 令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 则 $r = 2$ 所对应的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 = 2^2, r = 2\cos\theta$ 所对应的直角坐标方程为 $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

由 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\cos\theta}^2 f(r^2) r dr$ 的积分区域

$$2\cos\theta < r < 2, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

得在直角坐标下的表示为

所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\cos\theta}^2 f(r^2) r dr = \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2+y^2) dy$. 故选 (B).

15 (2014, 12 题, 4 分) 二次积分 $\int_0^1 dy \int_y^1 \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2} \right) dx =$ _____.

【答案】 $\frac{e-1}{2}$.

【解析】 本题考查二重积分的计算, 需要利用交换积分次序和分部积分方法.

二次积分的积分区域 $\int_0^1 dy \int_y^1 \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2} \right) dx$ 为

$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$
交换积分次序得

$$\begin{aligned} \int_0^1 dy \int_y^1 \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2} \right) dx &= \int_0^1 dx \int_0^x \left(\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2} \right) dy \\ &= \int_0^1 (e^{x^2} - \int_0^x e^{y^2} dy) dx \\ &= \int_0^1 e^{x^2} dx - \int_0^1 \left(\int_0^x e^{y^2} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 e^{x^2} dx - \left(x \int_0^x e^{y^2} dy \right) \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{x^2} \cdot x dx \\ &= \int_0^1 e^{x^2} dx - \int_0^1 e^{y^2} dy + \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1 \\ &= \frac{e-1}{2} \end{aligned}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



【评注】 当被积函数中含有变上限积分时,常常要把变上限积分看作一个普通函数进行分部积分等运算. 计算过程中也可

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{x^2} dx - \int_0^1 \left(\int_0^x e^{y^2} dy \right) dx &= \int_0^1 e^{x^2} dx - \int_0^1 \left(\int_y^1 e^{y^2} dx \right) dy = \int_0^1 e^{x^2} dx - \int_0^1 (1-y) e^{y^2} dy \\ &= \int_0^1 e^{x^2} dx - \int_0^1 e^{y^2} dy + \int_0^1 y e^{y^2} dy = \frac{e-1}{2}.\end{aligned}$$

练习题

1. (2006, 数一、数二, 4分) 设 $f(x, y)$ 为连续函数, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ 等于

(A) $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$

(B) $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$

(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$

2. (2010, 数二, 10分) 计算二重积分

$$\iint_D r^2 \sin \theta \sqrt{1-r^2 \cos 2\theta} dr d\theta$$

其中 $D = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}.$

3. (2004, 数一, 4分) 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$, 则 $F'(2)$ 等于

(A) $2f(2).$

(B) $f(2).$

(C) $-f(2).$

(D) $0.$

4. (2009, 数二, 4分) 设函数 $z = f(x, y)$ 连续, 则 $\int_1^2 dx \int_x^2 f(x, y) dy + \int_1^2 dy \int_y^{4-y} f(x, y) dx =$

(A) $\int_1^2 dx \int_1^{4-x} f(x, y) dy.$

(B) $\int_1^2 dx \int_x^{4-x} f(x, y) dy.$

(C) $\int_1^2 dy \int_1^{4-y} f(x, y) dx.$

(D) $\int_1^2 dy \int_y^2 f(x, y) dx.$

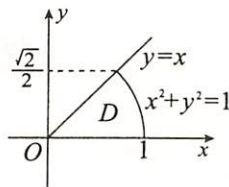
练习题参考答案

1. 【答案】 C.

【解析】 由题设可知积分区域 D 如图所示, 显然是 Y 型域, 则

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

故选(C).

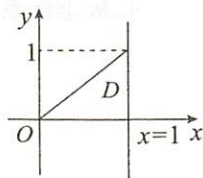


【评注】 本题为基本题型,关键是首先画出积分区域的图形.

2. 【分析】 化极坐标积分区域为直角坐标区域,相应的被积函数也化为直角坐标系下的表示形式,然后计算二重积分.

【解】 直角坐标系下 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$, 所以

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin \theta \sqrt{1-r^2 \cos 2\theta} dr d\theta \\
 &= \int_0^1 r \sin \theta \sqrt{1-r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)} \cdot r dr d\theta \\
 &= \int_0^1 y \sqrt{1-x^2+y^2} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x y \sqrt{1-x^2+y^2} dy \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2+y^2} d(1-x^2+y^2) \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{3} [1 - (1-x^2)^{\frac{3}{2}}] dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx \left(\text{令 } x = \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta \\
 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{8} \cos 4\theta \right) d\theta \\
 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{16} \pi.
 \end{aligned}$$



3.【答案】 B.

【解析】 先求导,再代入 $t=2$ 求 $F'(2)$ 即可.关键是求导前应先交换积分次序,使得被积函数中不含有变量 t .

交换积分次序,得

$$F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx = \int_1^t \left[\int_1^x f(x) dy \right] dx = \int_1^t f(x) (x-1) dx$$

于是, $F'(t) = f(t)(t-1)$, 从而有 $F'(2) = f(2)$, 故应选(B).

4.【答案】 C.

【解析】 $\int_1^2 dx \int_x^2 f(x,y) dy + \int_1^2 dy \int_y^{4-y} f(x,y) dx$ 的积分区域为两部分

$$D_1 = \{(x,y) \mid 1 \leq x \leq 2, x \leq y \leq 2\}, D_2 = \{(x,y) \mid 1 \leq y \leq 2, y \leq x \leq 4-y\}$$

将其合并写成 $D = \{(x,y) \mid 1 \leq y \leq 2, 1 \leq x \leq 4-y\}$.

故二重积分可以表示为 $\int_1^2 dy \int_1^{4-y} f(x,y) dx$. 答案应选(C).

小结

1. 交换积分次序是常考的题型,通常有如下两种情形

(1) 题目本身要求交换积分次序;

(2) 计算时,按原积分次序计算比较复杂或无法计算,需交换积分次序,一般可从被积函数的

类型看出,如含有形如 e^{x^2} , $\frac{\sin x}{x}$ 等,应后对 x 积分.

2. 需注意的是一定要准确地画出积分区域.

3. 有些累次积分仅交换积分次序不能解决问题,此时应考虑交换坐标系.



4. 极坐标系下的交换积分次序虽然没有考过,但需关注.

六、解含未知函数的二重积分的函数方程

16 (2011, 19 题, 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续导数, $f(0) = 1$, 且

$$\iint_{D_t} f'(x+y) dx dy = \iint_{D_t} f(t) dx dy$$

其中 $D_t = \{(x, y) | 0 \leq y \leq t-x, 0 \leq x \leq t\} (0 < t \leq 1)$. 求 $f(x)$ 的表达式.

【分析】 由题设得到关于 $f(t)$ 的微分方程, 然后解微分方程.

【解】 化已知等式左边的二重积分为二次积分计算

$$\begin{aligned} \iint_{D_t} f'(x+y) dx dy &= \int_0^t \left(\int_0^{t-x} f'(x+y) dy \right) dx = \int_0^t \left(\int_0^{t-x} f'(x+y) d(x+y) \right) dx \\ &= \int_0^t \left[(f(x+y)) \Big|_{y=0}^{t-x} \right] dx = \int_0^t [f(t) - f(x)] dx \\ &= tf(t) - \int_0^t f(x) dx \end{aligned}$$

于是 $tf(t) - \int_0^t f(x) dx = \frac{1}{2}t^2 f'(t)$. 两边对 t 求导得

$$(2-t)f'(t) = 2f(t)$$

解得 $f(t) = \frac{C}{(2-t)^2}$, 由 $f(0) = 1$ 有 $C = 4$. 所以

$$f(x) = \frac{4}{(2-x)^2}, (0 \leq x \leq 1)$$

心得笔记:



第六章 无穷级数

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

本章导读

本章主要考查如下两个方面: 一是判别或证明数项级数的敛散性, 特别是判定抽象级数的敛散性; 二是求幂级数的和函数; 而求函数的幂级数展开式 2009 年开始要求降低。

试题特点

2006 ~ 2019 年, 几乎每年试题都有涉及, 可能是一个大题、一个小题, 分数约占试卷的 8%。2009 ~ 2011 年只考过两个小题, 2012, 2013, 2015, 2019 年都只考了一个选择题, 2014, 2018 年有一个大题, 2016, 2017 年是一大题, 一小题, 值得注意, 数学三、四合并后对级数的要求降低了不少。小题主要是抽象级数敛散性的判定, 一般以选择题的形式出现, 往往有一定难度; 大题主要涉及求幂级数的和函数和把函数展开成幂级数, 题目难度不是很大。

考题详析

一、数项级数敛散性的判定

1 (2011, 3 题, 4 分) 设 $\{u_n\}$ 是数列, 则下列命题正确的是

- (A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛. (B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.
(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛. (D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

【答案】 A.

【解析】 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则该级数加括号后得到的级数仍收敛, 因此应选(A).

2 (2012, 4 题, 4 分) 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n} \sin \frac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛, 则

- (A) $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$. (B) $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$. (C) $1 < \alpha \leq \frac{3}{2}$. (D) $\frac{3}{2} < \alpha < 2$.

【答案】 D.

【解析】 由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n} \sin \frac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\left| (-1)^n \sqrt{n} \sin \frac{1}{n^\alpha} \right| \sim \frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$,

故 $\alpha - \frac{1}{2} > 1$, 即 $\alpha > \frac{3}{2}$. 由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛知, $\alpha < 2$. 应选(D).

3 (2013, 4 题, 4 分) 设 $\{a_n\}$ 为正项数列, 下列选项正确的是

- (A) 若 $a_n > a_{n+1}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛.
 (B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛, 则 $a_n > a_{n+1}$.
 (C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则存在常数 $p > 1$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n$ 存在.
 (D) 若存在常数 $p > 1$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n$ 存在, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

【答案】 D.

【解析】 本题考查抽象级数敛散性的判定, 包括 p 级数、交错级数的收敛性以及正项级数的判别法. 一种方法是直接找出正确答案, 另一种方法是利用举反例排除错误的选项.

由于极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^p}}$ 存在, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} (p > 1)$ 收敛, 利用正项级数比较判别法的极限

形式, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 应选(D).

也可举反例如下: 取 $a_n = \frac{n+1}{n}$, 排除(A); 取 $a_n = \frac{3+2(-1)^n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛, 但 $a_1 = 1 < a_2 = \frac{5}{4}$, 排除(B); 取 $a_n = \frac{1}{n \ln^2 n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 但对任意 $p > 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{p-1}}{\ln^2 n}$, 考虑

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{p-1}}{\ln^2 x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(p-1)x^{p-1}}{2 \ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(p-1)^2 x^{p-2}}{2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(p-1)^2 x^{p-1}}{2} = \infty$$

因而 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n$ 不存在, 排除(C).

4 (2015, 4 题, 4 分) 下列级数中发散的是

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$.
 (C) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{\ln n}$. (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

【答案】 C.

【解析】 利用级数敛散性的性质及判别法

对于(A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{3}$, 由比值判别法, 该级数收敛;

对于(B) $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 该级数收敛;

对于(D) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{e} < 1$, 由比值判别法, 该级数收敛;

对于(C), 用莱布尼兹判别法级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ 收敛, 而级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ 发散, 该级数发散. 应选(C).

5 (2016, 4 题, 4 分) 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \sin(n+k)$ (k 为常数)

(A) 绝对收敛.

(B) 条件收敛.

(C) 发散.

(D) 收敛性与 k 有关.

【答案】 A.

【解析】 $\left| \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \sin(n+k) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

因而级数绝对收敛, 选(A).

6 (2017, 4 题, 4 分) 若级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \left[\sin \frac{1}{n} - k \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right]$ 收敛, 则 $k =$

(A) 1.

(B) 2.

(C) -1.

(D) -2.

【答案】 C.

【解析】 利用泰勒展开式

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{n} - k \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) &= \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + \frac{k}{n} + \frac{k}{2n^2} + \frac{k}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \frac{1+k}{n} + \frac{k}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{k}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

因此级数收敛, 所以 $1+k=0$ 即 $k=-1$, 应选(C).

【评注】 本题也可考虑用比较判别法, 由极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n} - k \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right)}{\left(\frac{1}{n} \right)^a}$ 存在.

7 (2019, 4 题, 4 分) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} nu_n$ 绝对收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n}$ 条件收敛, 则

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 条件收敛.

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 绝对收敛.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛.

(D) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 发散.

【答案】 B.

【解析】 由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n}$ 条件收敛, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{n} = 0$,

存在常数 $C > 0$, 使得 $\left| \frac{v_n}{n} \right| \leq C$, 则 $|u_n v_n| = \left| nu_n \cdot \frac{v_n}{n} \right| \leq C |nu_n|$,

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nu_n$ 绝对收敛, 用比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 绝对收敛.

练习题

1. (2004, 数一, 4 分) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数, 下列结论中正确的是

(A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(B) 若存在非零常数 λ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lambda$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(C) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = 0$.

(D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则存在非零常数 λ , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lambda$.

2. (2009, 数一, 4 分) 设有两个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则

(A) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

(B) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散.

(C) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛.

(D) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散.

3. (2004, 数一, 11 分) 设有方程 $x^n + nx - 1 = 0$, 其中 n 为正整数. 证明此方程存在唯一正实根 x_n , 并证明当 $\alpha > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^\alpha$ 收敛.

练习题参考答案

1. 【答案】 B.

【解析】 取 $a_n = \frac{1}{n \ln n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 发散, 排除(A)(D);

又取 $a_n = \frac{1}{n \sqrt{n}}$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = \infty$, 排除(C), 故应选(B).

【评注】 本题也可用比较判别法的极限形式,

$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lambda \neq 0$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散, 故应选(B).

2. 【答案】 C.

【解析】 取 $a_n = b_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$, 排除(A). 取 $a_n = b_n = \frac{1}{n}$, 排除(B)(D).

【评注】 可直接证明(C) 正确, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 知存在 $M > 0$, 当 n 充分大时, 有

$|a_n| \leq M$, 因而 $a_n^2 b_n^2 \leq M^2 b_n^2$, 由 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛可知 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛, 所以应选(C).

3. 【分析】 利用介值定理证明存在性, 利用单调性证明唯一性. 而正项级数的敛散性可用比较法判定.

【证明】 记 $f_n(x) = x^n + nx - 1$. 由 $f_n(0) = -1 < 0$, $f_n(1) = n > 0$, 及连续函数的介值定

理知, 方程 $x^n + nx - 1 = 0$ 存在正实数根 $x_n \in (0, 1)$.

当 $x > 0$ 时, $f'_n(x) = nx^{n-1} + n > 0$, 可见 $f_n(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加,

故方程 $x^n + nx - 1 = 0$ 存在唯一正实数根 x_n .

由 $x^n + nx - 1 = 0$ 与 $x_n > 0$ 知

$$0 < x_n = \frac{1 - x_n^n}{n} < \frac{1}{n}$$

故当 $\alpha > 1$ 时, $0 < x_n^\alpha < \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha$.

而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ 收敛, 所以当 $\alpha > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^\alpha$ 收敛.

【评注】 本题综合考查了介值定理和无穷级数的敛散性, 题型设计比较新颖, 但难度并不大, 只要基本概念清楚, 应该可以轻松求证.

小结

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

1. 本类题解题思路:

(1) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散; 否则进一步判断.

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 先化简 u_n , 视其特点选择适当的判别法:

① 若 u_n 中含有 $\frac{1}{n^\alpha}$ (或 $\frac{1}{n^\alpha \ln^p n}$), 则可与 p 级数 (或对数 p 级数) 比较;

② 若 u_n 中含有 n 的乘积的形式 (包括 $n!$), 则可考虑用比值判别法;

③ 若 u_n 中含有形如 $a^{f(n)}$ 的因子, 则可考虑用根值判别法;

④ 以上方法均失效, 则可利用已知级数的敛散性质, 结合敛散的定义和性质, 考察其敛散性.

(3) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为任意项级数, 则可用方法 (1) 和 (2) 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 的敛散性.

① 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛;

② 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 则看 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是否是交错级数, 若是, 用莱布尼兹判别法判断 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是否条件收敛.

2. 除了掌握以上判定级数敛散性的基本思路, 熟悉以下结论有助于我们判定级数的敛散性.

(1) 对于三个级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$:

① 如果有两个收敛, 则第三个收敛;

② 如果其中一个收敛, 另一个发散, 则第三个发散;

③ 如果有两个发散, 则第三个的敛散性不能确定;

④ 如果有两个绝对收敛, 则第三个绝对收敛;

⑤ 如果其中一个绝对收敛, 另一个条件收敛, 则第三个条件收敛;

⑥ 如果有两个条件收敛, 则第三个收敛, 但不能判定它是绝对收敛还是条件收敛.



(2)① 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$ 都收敛;

② $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n| + u_n}{2}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n| - u_n}{2}$ 都收敛;

③ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n| + u_n}{2}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n| - u_n}{2}$ 都发散;

④ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n| + u_n}{2}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|u_n| - u_n}{2}$, 一个收敛, 一个发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(3) 对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^p$ ($p \geq 1$) 一定收敛; 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$,

$\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$ 等均收敛.

二、求幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域

8 (2009, 11 题, 4 分) 幂函数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n - (-1)^n}{n^2} x^n$ 的收敛半径为_____.

【答案】 $\frac{1}{e}$.

【解析】 由题意知, $a_n = \frac{e^n - (-1)^n}{n^2} > 0$,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{e^{n+1} - (-1)^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{e^n - (-1)^n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{e^{n+1} \left[1 - \left(-\frac{1}{e} \right)^{n+1} \right]}{e^n \left[1 - \left(-\frac{1}{e} \right)^n \right]} \rightarrow e (n \rightarrow \infty)$$

所以该幂级数的收敛半径为 $\frac{1}{e}$.

【评注】 也可用如下法求解, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2} x^n$ 的收敛半径为 $\frac{1}{e}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} x^n$ 的收敛半径为 1, 取两者最小值为所求.

9 (2020, 4 题, 4 分) 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-2)^n$ 的收敛区间为 $(-2, 6)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^{2n}$ 的收敛区间为

(A) $(-2, 6)$.

(B) $(-3, 1)$.

(C) $(-5, 3)$.

(D) $(-17, 15)$.

【答案】 B.

【解析】 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-2)^n$ 的收敛半径为 $\frac{6 - (-2)}{2} = 4$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-2)^{2n-2}$ 的收敛半径为 $\sqrt{4} = 2$.

有 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^{2n} \right)' = 2(x+1) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x+1)^{2n-2}$ 的收敛半径为 2, 进而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^{2n}$ 的收

敛半径为 2. 所以幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^{2n}$ 的收敛区间为 $(-3, 1)$. 答案为(B).

练习题

1. (2008, 数一, 4分) 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛, 在 $x=-4$ 处发散, 则幂级数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$ 的收敛域为_____.

2. (2011, 数一, 4分) 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ($n=1, 2, \dots$) 无界, 则幂级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛域是

- (A) $(-1, 1]$. (B) $[-1, 1)$. (C) $[0, 2)$. (D) $(0, 2]$.

3. (1997, 数一, 3分) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 3, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为_____.

4. (2002, 数一, 3分) 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 与 $\frac{1}{3}$, 则幂级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{b_n^2} x^n$ 的收敛半径为

- (A) 5. (B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $\frac{1}{5}$.

练习题参考答案

1. 【答案】 $(1, 5]$.

【解析】 由题设知, 当 $|x+2| < |0+2| = 2$, 即 $-4 < x < 0$ 时, 幂级数收敛; 而当 $|x+2| > |-4+2| = 2$, 即 $x < -4$ 或 $x > 0$ 时, 幂级数发散. 可见幂级数的收敛半径为 2.

于是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$ 当 $|x-3| < 2$, 即 $1 < x < 5$ 时收敛,

故 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$ 的收敛区间为 $(1, 5)$.

另外, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛, 相当于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$ 在 $x=5$ 处收敛, 故所求收敛域为 $(1, 5]$.

【评注】 收敛区间特指开区间, 而收敛域应考虑在端点的敛散性.

2. 【答案】 C.

【解析】 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛区间是以 1 为中心的对称区间, 排除(A)(B). 而 $x=0$ 时, 由莱布尼兹判别法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛. $x=2$ 时, 由部分和数列 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ($n=1, 2, \dots$) 发



散知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. 因此应选(C).

3. 【答案】 $(-2, 4)$.

【解析】 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 有相同的收敛半径及收敛区间, 即幂级数

$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 的收敛区间为 $|x| < 3$,

因而 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n+1} = (x-1)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1}$ 的收敛区间为 $|x-1| < 3$, 即 $(-2, 4)$.

4. 【答案】 A.

【解析】 由题设, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{3}{\sqrt{5}}, \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = 3$, 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\left(\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right)^2}{\frac{a_n}{b_n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^2}{\frac{b_{n+1}}{b_n}} \right| = \frac{1}{5}$$

故幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{b_n^2} x^n$ 的收敛半径为 5, 应选(A).

【评注】 本题事实上假设了 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|, \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right|$ 均存在. 因为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径存在, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ 不一定存在.

小结

本题型的解题思路.

1. 对于一般函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, 先求 $\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right|$ 或 $\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域为 $\{x \in \mathbf{R}; \rho(x) < 1\} \cup \{a \in \mathbf{R}; \rho(a) = 1 \text{ 且 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) \text{ 收敛}\}$.

2. 对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, 先求 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ 或 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, 则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ 的收敛半径 $R = \frac{1}{\rho}$, 收敛区间为 $(x_0 - R, x_0 + R)$, 收敛域为

$$(x_0 - R, x_0 + R) \cup \{x = x_0 \pm R, \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \text{ 收敛}\}$$

3. 若 $a_n \geq 0, b_n \geq 0$ (可以从某项开始), 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$ 的收敛区间(域)的

交集就是 $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x - x_0)^n$ 的收敛区间(域).

4. 幂级数经过有限次的逐项求导或积分, 不改变其收敛半径与收敛区间, 但在收敛区间的端点处的敛散性可能会改变.

三、求幂级数的和函数及数项级数的和

10 (2014, 18 题, 10 分) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域及和函数.

【分析】 利用已知几何级数的收敛性与收敛域, 幂级数的逐项求导、逐项积分性质求解.

【解】 (方法一) 因几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, 且收敛域为 $x \in (-1, 1)$. 又

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+3)x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} \right)'' + \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \right)' \\ &= \left(\frac{x^2}{1-x} \right)'' + \left(\frac{x}{1-x} \right)' \\ &= \left[\frac{2x-x^2}{(1-x)^2} \right]' + \frac{1}{(1-x)^2} \\ &= \frac{3-x}{(1-x)^3}, x \in (-1, 1) \end{aligned}$$

由幂级数的逐项求导性质知 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域为 $(-1, 1)$,

和函数 $S(x) = \frac{3-x}{(1-x)^3}, x \in (-1, 1)$.

(方法二) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+3)x^n$ 的系数 $a_n = (n+1)(n+3)$, 又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)(n+4)}{(n+1)(n+3)} = 1$$

所以收敛半径 $R = 1$,

当 $x = 1$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+3)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+3)$ 发散;

当 $x = -1$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+3)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+3)(-1)^n$ 发散,

故所求收敛域为 $(-1, 1)$.

设 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+3)x^n, x \in (-1, 1)$. 则

$$\begin{aligned} \int_0^x S(t) dt &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (n+2)t^{n+1} dt \right]' + \frac{x}{1-x} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} \right)' + \frac{x}{1-x} \\
 &= \left(\frac{x^2}{1-x} \right)' + \frac{x}{1-x} \\
 &= \frac{2x-x^2}{(1-x)^2} + \frac{x}{1-x} = \frac{3x-2x^2}{(1-x)^2}
 \end{aligned}$$

故和函数 $S(x) = \left[\frac{3x-2x^2}{(1-x)^2} \right]' = \frac{3-x}{(1-x)^3}, x \in (-1, 1)$.

【评注】 幂级数逐项求导后,其收敛半径不变,但端点可能由收敛变为不收敛,即收敛域可能缩小;逐项积分后,其收敛半径不变,但端点可能由不收敛变为收敛,即收敛域可能扩大.

11 (2016, 19 题, 10 分) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ 的收敛域及和函数.

【分析】 此幂级数只有偶数次幂项,求收敛域时可把其看作一般的函数项级数,用比值判别法求出.

【解】 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{2(n+1)+2}}{(n+2)(2n+3)}}{\frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}} \right| = x^2$,

所以,当 $x^2 < 1$ 时,原级数收敛;当 $x^2 > 1$ 时,原级数发散.

因此,故原级数的收敛区间为 $(-1, 1)$,

而 $x = \pm 1$ 时,原级数变为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$, 是收敛的,原级数的收敛域为 $[-1, 1]$.

设 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}, x \in (-1, 1)$, 则任意 $x \in (-1, 1)$ 有

$$S'(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, S''(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{2}{1-x^2}$$

$$\text{所以 } S'(x) = S'(0) + \int_0^x S''(t) dt = \int_0^x \frac{2}{1-t^2} dt = \ln \frac{1+x}{1-x},$$

$$\begin{aligned}
 S(x) &= S(0) + \int_0^x S'(t) dt = \int_0^x \ln \frac{1+t}{1-t} dt \\
 &= t \ln \frac{1+t}{1-t} \Big|_0^x - \int_0^x t \ln \frac{1+t}{1-t} = x \ln \frac{1+x}{1-x} - \int_0^x \frac{2t}{1-t^2} dt \\
 &= x \ln \frac{1+x}{1-x} + \ln(1-x^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x = \pm 1 \text{ 时, } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)} &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right) \\
 &= 2 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots \right) = 2 \ln 2.
 \end{aligned}$$

$$\text{所以 } S(x) = \begin{cases} x \ln \frac{1+x}{1-x} + \ln(1-x^2), & -1 < x < 1, \\ 2 \ln 2, & x = \pm 1. \end{cases}$$



12 (2017, 19 题, 10 分) 设 $a_0 = 1, a_1 = 0, a_{n+1} = \frac{1}{n+1}(na_n + a_{n-1}) (n = 1, 2, 3, \dots)$, $S(x)$ 为

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数.

(I) 证明幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径不小于 1.

(II) 证明 $(1-x)S'(x) - xS(x) = 0 (x \in (-1, 1))$, 并求 $S(x)$ 表达式.

【证】 (I) 由已知 $a_0 = 1, a_1 = 0, a_{n+1} = \frac{1}{n+1}(na_n + a_{n-1})$, 所以 $0 \leq a_{n+1} \leq 1$.

记 R 为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径. 当 $|x| < 1$ 时, 因为 $|a_n x^n| \leq |x^n|$ 且级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 收敛, 所

以幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛, 于是 $(-1, 1) \subseteq (-R, R)$, 故 $R \geq 1$.

(II) 利用幂级数的逐项求导

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

则

$$(1-x)S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)a_{n+1} - na_n]x^n + a_1$$

$$xS(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n$$

进而 $(1-x)S'(x) - xS(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)a_{n+1} - na_n - a_{n-1}]x^n + a_1$. 由已知

$$(n+1)a_{n+1} - na_n - a_{n-1} = 0, a_1 = 0$$

所以

$$(1-x)S'(x) - xS(x) = 0$$

解微分方程 $\frac{S'(x)}{S(x)} = \frac{x}{1-x}$ 得

$$S(x) = \frac{C e^{-x}}{x-1}$$

由 $S(0) = a_0 = 1$, 得 $C = -1$, 有

$$S(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

练习题

1. (2005, 数一, 12 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n(2n-1)}\right) x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $f(x)$.

2. (2010, 数一, 10 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

3. (2007, 数一, 10 分) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内收敛, 其和函数 $y(x)$ 满足

$$y'' - 2xy' - 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$$



(I) 证明: $a_{n+2} = \frac{2}{n+1}a_n, n=1,2,\dots$;

(II) 求 $y(x)$ 的表达式.

4. (2009, 数一, 9 分) 设 a_n 为曲线 $y = x^n$ 与 $y = x^{n+1} (n=1,2,\dots)$ 所围成区域的面积, 记

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}, \text{求 } S_1 \text{ 与 } S_2 \text{ 的值.}$$

5. (2012, 数一, 10 分) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

6. (2013, 数一, 10 分) 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件: $a_0 = 3, a_1 = 1, a_{n-2} - n(n-1)a_n = 0, (n \geq 2)$,

$S(x)$ 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数.

(I) 证明 $S''(x) - S(x) = 0$;

(II) 求 $S(x)$ 的表达式.

练习题参考答案

1. 【分析】 先求收敛半径, 进而可确定收敛区间. 而和函数可利用逐项求导得到.

【解】 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)+1}{(n+1)(2n+1)} \cdot \frac{n(2n-1)}{n(2n-1)+1} = 1$, 所以当 $x^2 < 1$ 时, 原级数绝对收敛, 当 $x^2 > 1$ 时, 原级数发散, 因此原级数的收敛半径为 1, 收敛区间为 $(-1, 1)$.

记 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)} x^{2n}, x \in (-1, 1)$, 则

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}, x \in (-1, 1)$$

$$S''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \frac{1}{1+x^2}, x \in (-1, 1)$$

由于 $S(0) = 0, S'(0) = 0$, 所以

$$S'(x) = \int_0^x S''(t) dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan x$$

$$S(x) = \int_0^x S'(t) dt = \int_0^x \arctan t dt = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

又 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n} = \frac{x^2}{1+x^2}, x \in (-1, 1)$, 从而

$$f(x) = 2S(x) + \frac{x^2}{1+x^2} = 2x \arctan x - \ln(1+x^2) + \frac{x^2}{1+x^2}, x \in (-1, 1)$$

【评注】 本题求收敛区间是基本题型, 应注意收敛区间一般指开区间. 而幂级数求和尽量将其转化为形如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 幂级数, 再通过逐项求导或逐项积分求出其和函数.

2. 【分析】 用比值判别法确定收敛区间, 进而确定收敛域; 利用幂级数的逐项求导求和函数.

【解】 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+2}(2n-1)}{x^{2n}(2n+1)} \right| = x^2$, 所以当 $x^2 < 1$, 即 $-1 < x < 1$ 时, 原幂级

数绝对收敛.

当 $x = \pm 1$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$, 由莱布尼兹判别法显然收敛, 故原幂级数的收敛域为 $[-1, 1]$.

$$\text{又 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}, \text{ 令}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}, x \in (-1, 1)$$

$$\text{则 } f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2(n-1)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\text{由于 } f(0) = 0, \text{ 所以 } f(x) = \int_0^x f'(t) dt + f(0) = \arctan x.$$

从而幂级数的收敛域为 $[-1, 1]$, 和函数为 $x \arctan x, x \in [-1, 1]$.

【评注】 对于缺项的幂级数, 一般用比值判别法确定收敛区间; 本题也可令 $t = x^2$ 转化为不缺项的幂级数.

3. **【分析】** 可将幂级数代入微分方程通过比较同次项系数, 从而证得 (I); 由 (I) 求 (II).

【解】 (I) 对 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 求一、二阶导数, 得

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n$$

代入 $y'' - 2xy' - 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$, 可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0, a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0$$

即 $2a_2 - 4a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2(n+2)a_n] x^n = 0$, 比较同次项系数可得

$$\begin{cases} 2a_2 - 4a_0 = 0 \\ (n+1)(n+2)a_{n+2} - 2(n+2)a_n = 0, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

从而

$$a_{n+2} = \frac{2}{n+1} a_n, n = 1, 2, \dots$$

(II) 由 $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0, a_{n+2} = \frac{2}{n+1} a_n, n = 1, 2, \dots$ 可得

$$a_{2n} = 0, a_{2n+1} = \frac{2}{2n} a_{2n-1} = \frac{2}{2n} \cdot \frac{2}{(2n-2)} a_{2n-3} = \dots = \frac{1}{n!} a_1 = \frac{1}{n!}$$

$$\text{故 } y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x^2)^n = x e^{x^2}.$$

【评注】 本题为一道幂级数与二阶微分方程的综合题, 考查了幂级数的逐项微分法及 e^x 的麦克劳林级数展开式. 所以需记住常见函数 $e^x, \frac{1}{1-x}, \ln(1+x)$ 等函数的麦克劳林级数展开式.

4.【解】 曲线 $y = x^n$ 与 $y = x^{n+1}$ 的交点为 $(0,0), (1,1)$, 所以

$$a_n = \int_0^1 (x^n - x^{n+1}) dx = \left(\frac{1}{n+1} x^{n+1} - \frac{1}{n+2} x^{n+2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

从而

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \cdots$$

由 $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots$, 令 $x = 1$, 得

$$\ln 2 = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots \right) = 1 - S_2 \Rightarrow S_2 = 1 - \ln 2$$

【评注】 此题是定积分的几何意义与级数求和的一个综合题, 特别是用到了常见函数 $\ln(1+x)$ 的幂级数展开式.

5.【分析】 由此幂级数的构成知, 其和函数可以通过几何级数求导和求积分得到, 因此可以先求和函数, 再由幂级数的性质得收敛半径, 然后讨论端点处的收敛性, 得幂级数的收敛域.

$$\text{【解】 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^2 + 2}{2n+1} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} x^{2n},$$

$$\text{因为 } \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) x^{2n} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} \right)' = \left(\frac{x}{1-x^2} \right)' = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}, (-1 < x < 1)$$

$$\text{当 } x \neq 0 \text{ 时, } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} x^{2n} = \frac{2}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1},$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, (-1 < x < 1)$$

因为 $x = 0$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} x^{2n} = 2$, 所以

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} x^{2n} = \begin{cases} \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}, & x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

当 $x = \pm 1$ 时, 原级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1}$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1} = +\infty \neq 0$ 知级数发散.

当 $x = 0$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1} x^{2n} = 3$,

因此, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1} x^{2n}$ 的收敛域为 $-1 < x < 1$,

$$\text{和函数 } S(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}, & x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \\ 3, & x = 0. \end{cases}$$

6.【分析】 利用幂级数在收敛区间内的逐项求导性质求解.

【解】 (I) 由题设得

$$a_{2n} = \frac{3}{(2n)!}, a_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)!}, \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} \right| = 0$$

故级数收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$.

因为 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 有

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

故 $S''(x) - S(x) = 0$.

(II) 由(I)知关于 $S(x)$ 的微分方程 $S''(x) - S(x) = 0$ 对应的特征方程为 $\lambda^2 - 1 = 0$, 解得特征根为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$, 所以方程通解为 $S(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$.

由 $S(0) = a_0 = 3$, 有 $C_1 + C_2 = 3$, 又 $S'(0) = a_1 = 1$, 有 $-C_1 + C_2 = 1$,

易知 $C_1 = 1, C_2 = 2$. 所以 $S(x)$ 的表达式为 $S(x) = e^{-x} + 2e^x$.

小结

1. 求幂级数的和函数 $S(x)$ 主要有以下两种方法:

(1) 先通过幂级数的代数运算、逐项微分、逐项积分等性质将其化为典型的幂级数求和问题

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x};$$

(2) 通过幂级数的代数运算、逐项微分、逐项积分等性质转化为关于和函数 $S(x)$ 的微分方程问题.

2. 求数项级数的和主要有以下的思路与方法:

(1) 构造幂级数法: 即通过构造幂级数, 转化为幂级数求和函数问题. 应先用级数的代数运算等性质对级数进行适当变形, 以便构造易于求和的幂级数形式.

对于收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b^n$, 一般构造幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ (显然要求它在 $x = b$ 处收敛), 求出其和函数 $S(x)$, 则有 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b^n = S(b)$. 而对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 相当于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b^n$ 当 $b = 1$ 时的特殊情形.

(2) 利用收敛级数的定义及其性质: 即求部分和数列的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, 也经常将通项 u_n 进行分解:

$u_n = a_n \pm b_n$, 先求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的和, 再根据级数的运算性质得到级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和.

(3) 利用常见函数的幂级数展开式.

四、函数的幂级数展开

13 (2018, 18 题, 10 分) 已知 $\cos 2x - \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n (-1 < x < 1)$, 求 a_n .

【分析】 利用函数展开成幂级数的唯一性, 比较系数可求得 a_n .

【解】 $\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n}{(2n)!} x^{2n},$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, (-1 < x < 1)$$

则 $-\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1)x^n, (-1 < x < 1),$

因而 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{4^n}{(2n)!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, (-1 < x < 1).$

比较两边幂级数的系数

当 $n = 2k$ 为偶数时 $a_n = (-1)^k \frac{4^k}{(2k)!} - (2k+1) = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2^n}{n!} - (n+1),$

当 $n = 2k+1$ 为奇数时 $a_n = 2k+2 = n+1.$

练习题

1. (2003, 数一, 12 分) 将函数 $f(x) = \arctan \frac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数, 并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

2. (2006, 数一, 12 分) 将函数 $f(x) = \frac{x}{2+x-x^2}$ 展成 x 的幂级数.

练习题参考答案

1. 【分析】 幂级数展开有直接法与间接法, 一般考查间接法展开, 即通过适当的恒等变形、求导或积分等, 转化为可利用已知函数幂级数展开式的情形. 本题可先求导, 再利用函数 $\frac{1}{1-x}$ 的幂级数展开式 $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$ 即可, 然后取 x 为某特殊值, 得所求级数的和.

【解】 因为 $f'(x) = -\frac{2}{1+4x^2} = -2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{2n}, x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$ 又 $f(0) = \frac{\pi}{4}$, 所以

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t) dt = \frac{\pi}{4} - 2 \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n t^{2n} \right] dt \\ &= \frac{\pi}{4} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{2n+1} x^{2n+1}, x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

因为级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛, 函数 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 处连续, 所以

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{2n+1} x^{2n+1}, x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

令 $x = \frac{1}{2}$, 得 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n 4^n}{2n+1} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}} \right] = \frac{\pi}{4} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$

再由 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, 得 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} - f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$

2. 【分析】 利用常见函数的幂级数展开式.



【解】 $f(x) = \frac{x}{2+x-x^2} = \frac{x}{(2-x)(1+x)} = \frac{A}{2-x} + \frac{B}{1+x}$, 比较两边系数可得 $A = \frac{2}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, 即

$$f(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{2-x} - \frac{1}{1+x} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}} - \frac{1}{1+x} \right)$$

而

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, x \in (-1, 1), \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n, x \in (-2, 2)$$

故

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{2+x-x^2} = \frac{1}{3} \left(-\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n \right) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^{n+1} + \frac{1}{2^n} \right) x^n, x \in (-1, 1) \end{aligned}$$

【评注】 分式函数的幂级数展开一般采用间接法. 要熟记常用函数的幂级数展开公式:

$$(1) \frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \cdots + u^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} u^n, u \in (-1, 1);$$

$$(2) \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - \cdots + (-1)^n u^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^n, u \in (-1, 1);$$

$$(3) e^u = 1 + u + \frac{1}{2!} u^2 + \cdots + \frac{1}{n!} u^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} u^n, u \in (-\infty, +\infty);$$

$$(4) \sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{2n+1}}{(2n+1)!}, u \in (-\infty, +\infty);$$

$$(5) \cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{2n}}{(2n)!}, u \in (-\infty, +\infty);$$

$$(6) \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{u^{n+1}}{n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{n+1}}{n+1}, u \in (-1, 1];$$

$$(7) (1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} u^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} u^n + \cdots, u \in (-1, 1).$$

小结

将函数在某点处展开成幂级数是重要的考试内容. 幂级数展开有直接法与间接法, 一般考查间接展开法, 即通过适当的恒等变形、求导或积分等, 将函数转化为幂级数展开式已知的函数. 数学三要求较低.

1. 求出展开式后, 要写出展开式成立的区间. 幂级数经过有限次的逐项求导、积分不改变其收敛半径及收敛区间, 但在收敛区间的端点处的敛散性可能会改变. 因此, 需判别展开式在收敛区间的端点处是否收敛.

2. 幂级数展开式的两个简单应用

(1) 利用幂级数展开式求数项级数的和. 求出展开式, 根据要求和的级数的特点, 在展开式中令 x 取某特殊值, 即可得到所求级数的和.

(2) 求函数 $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x_0)$, 特别是 $f^{(n)}(0)$.

求出函数 $f(x)$ 的幂级数展开式 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 又 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, 根据函数幂级数展开式的唯一性, 得 $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = a_n x^n$, 即 $f^{(n)}(0) = a_n \cdot n!$.

心得笔记:

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



第七章 常微分方程与差分方程

本章导读

本章内容是考试的重要组成部分,主要侧重于一阶微分方程及二阶常系数线性微分方程的求解,微分方程的应用多涉及几何方面.

试题特点

每年试题一般是一个大题或一个小题,分数约占试卷的4%,难度不是很大.除了各种微分方程的求解,对常系数线性微分方程解的结构及性质的考查也是测试的一个重要方面.

考题详析

一、一阶微分方程的求解

例1 (2010, 2题, 4分) 设 y_1, y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个特解. 若常数 λ, μ 使 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是该方程的解, $\lambda y_1 - \mu y_2$ 是对应的齐次方程的解, 则

$$(A) \lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}.$$

$$(B) \lambda = -\frac{1}{2}, \mu = -\frac{1}{2}.$$

$$(C) \lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{1}{3}.$$

$$(D) \lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{2}{3}.$$

【答案】 A.

【解析】 因 $\lambda y_1 - \mu y_2$ 是方程 $y' + p(x)y = 0$ 的解, 所以

$$(\lambda y_1 - \mu y_2)' + p(x)(\lambda y_1 - \mu y_2) = 0$$

即

$$\lambda[y_1' + p(x)y_1] - \mu[y_2' + p(x)y_2] = 0$$

由已知得 $(\lambda - \mu)q(x) = 0$, 因为 $q(x) \neq 0$, 所以 $\lambda - \mu = 0$.

又 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是非齐次 $y' + p(x)y = q(x)$ 的解, 故

$$(\lambda y_1 + \mu y_2)' + p(x)(\lambda y_1 + \mu y_2) = q(x)$$

即

$$\lambda[y_1' + p(x)y_1] + \mu[y_2' + p(x)y_2] = q(x)$$

由已知得 $(\lambda + \mu)q(x) = q(x)$, 因为 $q(x) \neq 0$, 所以 $\lambda + \mu = 1$, 解得

$$\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}$$

【评注】 此题属反问题, 题目构造较新颖.



2 (2018, 12 题, 4 分) 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x+\Delta x) - f(x) = 2xf(x)\Delta x + o(\Delta x) (\Delta x \rightarrow 0)$, 且 $f(0) = 2$, 则 $f(1) =$ _____.

【答案】 $2e$.

【解析】 由 $f(x+\Delta x) - f(x) = 2xf(x)\Delta x + o(\Delta x)$ 知

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 2xf(x) + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$$

上式中令 $\Delta x \rightarrow 0$ 得 $f'(x) = 2xf(x)$, 解方程得 $f(x) = Ce^{x^2}$.

又 $f(0) = 2$, 则 $C = 2$, $f(x) = 2e^{x^2}$, $f(1) = 2e$.

练习题

1. (2005, 数一、数二, 4 分) 微分方程 $xy' + 2y = x \ln x$ 满足 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 的解为 _____.

2. (2006, 数一、数二, 4 分) 微分方程 $y' = \frac{y(1-x)}{x}$ 的通解是 $y =$ _____.

3. (2011, 数一、数二, 4 分) 微分方程 $y' + y = e^{-x} \cos x$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的解为 _____.

4. (2008, 数二, 4 分) 微分方程 $(y + x^2 e^{-x})dx - xdy = 0$ 的通解是 _____.

练习题参考答案

1. 【答案】 $y = \frac{1}{3}x \ln x - \frac{1}{9}x$.

【解析】 原方程等价于 $y' + \frac{2}{x}y = \ln x$, 于是通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left[\int \ln x \cdot e^{\int \frac{2}{x} dx} dx + C \right] = \frac{1}{x^2} \cdot \left[\int x^2 \ln x dx + C \right] \\ &= \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx + C \right) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C \right) \\ &= \frac{1}{3} x \ln x - \frac{1}{9} x + C \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

由 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 得 $C = 0$, 故所求解为 $y = \frac{1}{3}x \ln x - \frac{1}{9}x$.

【评注】 本题虽属基本题型, 但在用相关公式时应注意先化为标准型. 另外, 本题也可如下求解: 原方程可化为

$$x^2 y' + 2xy = x^2 \ln x$$

即 $[x^2 y]' = x^2 \ln x$, 两边积分得

$$x^2 y = \int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C$$

再代入初始条件即可得所求解为 $y = \frac{1}{3}x \ln x - \frac{1}{9}x$.

2. 【答案】 $y = Cx e^{-x} (x \neq 0)$.

【解析】 原方程等价于 $\frac{dy}{y} = \left(\frac{1}{x} - 1\right)dx$, 两边积分得

$$\ln y = \ln x - x + C_1$$

整理得

$$y = Cx e^{-x} (C = e^{C_1})$$

3. 【答案】 $e^{-x} \sin x$.

【解析】 直接按一阶线性微分方程式求解. 微分方程的通解为

$$y = e^{-\int dx} \left(C + \int e^{-x} \cos x e^{\int dx} dx \right) = e^{-x} (C + \sin x)$$

由初值条件 $y(0) = 0$ 得 $C = 0$. 所以应填 $e^{-x} \sin x$.

4. 【答案】 $x(C - e^{-x})$, C 为任意常数.

【解析】 原方程可改写为 $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x} \cdot y = x e^{-x}$, 于是通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(\int x e^{-x} e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right) \\ &= x \left(\int e^{-x} dx + C \right) = x(C - e^{-x}) \end{aligned}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

微信公众号 【顶尖考研】

小结

1. 此类题解题步骤:

(1) 判断方程的类型, 可将方程写成形式: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ 或 $\frac{dx}{dy} = g(x, y)$ (这里将变量 x 看作函数, y 看作自变量).

(2) 若不能确定类型, 考虑用适当的变量代换.

2. 应熟练掌握考试大纲所要求的一阶方程类型及其解法:

(1) 可分离变量方程: 分离变量化为 $f(x)dx = g(y)dy$, 两边积分得通解.

(2) 齐次方程: 将方程化为 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$, 令 $u = \frac{y}{x}$, 有 $y = xu$, $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$

代入方程并化为可分离变量方程 $\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$.

(3) 一阶线性方程: 将方程化为标准形式: $y' + P(x)y = Q(x)$,

由通解公式得通解为 $y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C \right]$.

二、二阶常系数线性微分方程的求解

3 (2013, 12 题, 4 分) 微分方程 $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$ 的通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(C_1 + C_2 x)e^{\frac{1}{2}x}$, (C_1, C_2 为任意常数).



【解析】 本题是二阶常系数齐次线性微分方程的求解问题,先求出对应特征方程的根,然后直接写出方程的通解.

$$\text{方程 } y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0 \text{ 的特征方程为 } \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 0, \text{ 解得两个根为 } \lambda_{1,2} = \frac{1}{2},$$

则所求的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^{\frac{1}{2}x}$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

4 (2015, 12 题, 4 分) 设函数 $y = y(x)$ 是微分方程 $y'' + y' - 2y = 0$ 的解, 且在 $x = 0$ 处 $y(x)$ 取得极值 3, 则 $y(x) =$ _____.

【答案】 $2e^x + e^{-2x}$.

【解析】 本题是求微分方程满足初值条件 $y(0) = 3, y'(0) = 0$ 的特解.

由题意知微分方程 $y'' + y' - 2y = 0$ 对应的特征方程 $r^2 + r - 2 = 0$,

解得特征根 $r_1 = 1, r_2 = -2$,

微分方程的通解为 $y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$, 代入初值条件 $y(0) = 3, y'(0) = 0$,

$$\text{有 } \begin{cases} C_1 + C_2 = 3, \\ C_1 - 2C_2 = 0, \end{cases} \text{ 解得 } C_1 = 2, C_2 = 1, \text{ 所以 } y(x) = 2e^x + e^{-2x}.$$

5 (2019, 3 题, 4 分) 已知微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + e^x$, 则 a, b, c 依次为

(A) 1, 0, 1.

(B) 1, 0, 2.

(C) 2, 1, 3.

(D) 2, 1, 4.

【答案】 D.

【解析】 由题知, 齐次方程的通解为 $(C_1 + C_2x)e^{-x}$, 非齐次方程的特解为 e^x .

因而特征方程 $r^2 + ar + b = 0$ 有二重根 -1 , 所以 $a = 2, b = 1$.

把 $y = e^x$ 代入方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 得 $c = 4$.

6 (2020, 17 题, 10 分) 设函数 $y = f(x)$ 满足 $y'' + 2y' + 5y = 0$, 且 $f(0) = 1, f'(0) = -1$.

(I) 求 $f(x)$ 的表达式;

(II) 设 $a_n = \int_{n\pi}^{+\infty} f(x)dx$, 求 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

【解】 (I) 特征方程 $r^2 + 2r + 5 = 0$, 得 $r_{1,2} = -1 \pm 2i$,

则 $f(x) = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)e^{-x}$.

由 $f(0) = 1, f'(0) = -1$ 得 $C_1 = 1, C_2 = 0$.

有 $f(x) = e^{-x} \cos 2x$.

$$\begin{aligned} \text{(II)} \int f(x)dx &= \int e^{-x} \cos 2x dx = - \int \cos 2x de^{-x} = -e^{-x} \cos 2x + \int e^{-x} (-2 \sin 2x) dx \\ &= -e^{-x} \cos 2x + 2 \int \sin 2x de^{-x} = -e^{-x} \cos 2x + 2e^{-x} \sin 2x - 4 \int e^{-x} \cos 2x dx \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \int e^{-x} \cos 2x dx = \frac{1}{5} (2 \sin 2x - \cos 2x) e^{-x} + C$$

$$\text{有 } a_n = \frac{1}{5} (2 \sin 2x - \cos 2x) e^{-x} \Big|_{n\pi}^{+\infty} = \frac{1}{5} e^{-n\pi}$$

$$\text{得 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{5} \cdot \frac{e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{e^{\pi} - 1}.$$



练习题

1. (2007年, 数一, 4分) 二阶常系数非齐次微分方程 $y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x}$ 的通解为 $y =$ _____.
2. (2009年, 数一, 4分) 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^x$, 则非齐次方程 $y'' + ay' + by = x$ 满足条件 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ 的解为 $y =$ _____.
3. (2010年, 数一, 10分) 求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x$ 的通解.
4. (2013年, 数一, 4分) 已知 $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}, y_2 = e^x - xe^{2x}, y_3 = -xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的3个解, 则该方程的通解为 $y =$ _____.

练习题参考答案

1. 【答案】 $C_1e^x + C_2e^{3x} - 2e^{2x}, C_1, C_2$ 为任意常数.

【解析】 对应齐次方程的特征方程为

$$r^2 - 4r + 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 3$$

则对应齐次方程的通解为 $y = C_1e^x + C_2e^{3x}$.

设原方程的特解为 $y^* = Ae^{2x}$, 代入原方程可得

$$4Ae^{2x} - 8Ae^{2x} + 3Ae^{2x} = 2e^{2x} \Rightarrow A = -2$$

所以原方程的特解为 $y^* = -2e^{2x}$, 故原方程的通解为 $y = C_1e^x + C_2e^{3x} - 2e^{2x}$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

2. 【答案】 $-xe^x + x + 2$.

【解析】 由二阶常系数线性齐次微分方程的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^x$,

得对应特征方程的两个特征根为 $r_1 = r_2 = 1$, 故 $a = -2, b = 1$;

对应非齐次微分方程为 $y'' - 2y' + y = x$, 设其特解为 $y^* = Ax + B$,

代入得 $-2A + Ax + B = x$, 有 $A = 1, B = 2$.

所以特解为 $y^* = x + 2$, 因而非齐次微分方程的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^x + x + 2$,

把 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ 代入, 得 $C_1 = 0, C_2 = -1$.

所求特解为 $y = -xe^x + x + 2$.

【评注】 此题通常是考查二阶常系数线性微分方程解的结构和形式.

3. 【分析】 直接利用二阶常系数线性微分方程的求解方法.

【解】 由方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的特征方程 $r^2 - 3r + 2 = 0$, 解得特征根 $r_1 = 1, r_2 = 2$.

所以方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的通解为 $\bar{y} = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

设 $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x$ 的特解为 $y^* = x(ax + b)e^x$, 则

$$(y^*)' = (ax^2 + 2ax + bx + b)e^x$$

$$(y^*)'' = (ax^2 + 4ax + bx + 2a + 2b)e^x$$

代入原方程, 解得 $a = -1, b = -2$, 故特解为 $y^* = x(-x - 2)e^x$,

所以原方程的通解为



$$y = \bar{y} + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - x(x+2)e^x, \text{ 其中 } C_1, C_2 \text{ 为任意常数}$$

4. 【答案】 $C_1 e^{3x} + C_2 e^x - x e^{2x}$, (C_1, C_2 为任意常数.)

【解析】 由已知条件有 $y_1 - y_3 = e^{3x}, y_2 - y_3 = e^x$, 显然 $y_1 - y_3, y_2 - y_3$ 线性无关, 所以该二阶常系数非齐次微分方程的通解为:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x - x e^{2x}, \text{ 其中 } C_1, C_2 \text{ 为任意常数.}$$

小结

1. 求二阶常系数非齐次线性微分方程的解的步骤

(1) 求特征方程的根. (2) 写出齐次线性微分方程的通解. (3) 求出非齐次线性微分方程的一个特解. (4) 写出非齐次线性微分方程的通解.

2. 对于高阶线性微分方程, 应掌握解的性质、叠加原理以及通解的结构.

3. 对于二阶常系数线性微分方程 $y'' + py' + qy = f(x)$, 应熟练掌握求通解的方法.

(1) 对于对应的齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = 0$, 会根据其特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的根的情况, 写出齐次线性微分方程的通解.

(2) 当自由项 $f(x)$ 为多项式函数、指数函数、三角函数以及它们的和、差、积所得的函数时, 应熟练掌握用待定系数法确定特解.

4. 对于二阶常系数齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = 0$, 函数 Ae^{rx} 是其解的充要条件为 $r = \alpha$ 是特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的根; 函数 $Ae^{rx} \sin \beta x, Be^{rx} \cos \beta x$ 或 $e^{rx}(A \sin \beta x + B \cos \beta x)$ 是其解的充要条件为 $r = \alpha \pm \beta i$ 是特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的根. 利用以上结论, 可由方程的解, 确定其对应的特征方程的根, 从而得到特征方程及其对应的齐次线性微分方程.

三、差分方程

7 (2017, 10 题, 4 分) 差分方程 $y_{t+1} - 2y_t = 2^t$ 通解为 $y_t =$ _____.

【答案】 $y = C2^t + \frac{1}{2}t2^t$.

【解析】 齐次方程的通解为 $\bar{y}_t = C \cdot 2^t$.

设非齐次方程的特解为 $y_t^* = at2^t$, 将 y_t^* 代入方程 $y_{t+1} - 2y_t = 2^t$ 得

$$2a = 1, \text{ 即 } a = \frac{1}{2}$$

所求通解为 $y = C \cdot 2^t + \frac{1}{2}t \cdot 2^t$.

8 (2018, 11 题, 4 分) 差分方程 $\Delta^2 y_x - y_x = 5$ 的通解是 _____.

【答案】 $-5 + C \cdot 2^x$.

【解析】 本题涉及了二阶差分的概念, 转化为一阶常系数线性差分方程求解

$$\Delta^2 y_x = y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x$$

原方程变为 $y_{x+2} - 2y_{x+1} = 5$.

对应齐次方程的通解为 $\bar{y}_x = C \cdot 2^x$,

非齐次方程的特解可设为 $y_x^* = A$,

则有 $A - 2A = 5$, 得 $A = -5$.

所求通解为 $y_x = -5 + C \cdot 2^x$.

四、微分方程的应用

9 (2009, 19 题, 10 分) 设曲线 $y = f(x)$, 其中 $y = f(x)$ 是可导函数, 且 $f(x) > 0$. 已知曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 0, x = 1$ 及 $x = t (t > 1)$ 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的立体体积值是曲边梯形面积值的 πt 倍, 求该曲线方程.

【分析】 利用体积值和面积值的关系列出微分方程, 解方程得到曲线的方程.

【解】 (方法一) 旋转体的体积为 $V = \int_1^t \pi f^2(x) dx = \pi \int_1^t f^2(x) dx$, 曲边梯形的面积为:

$$S = \int_1^t f(x) dx, \text{ 则由题意知 } V = \pi t S.$$

因而 $\pi \int_1^t f^2(x) dx = \pi t \int_1^t f(x) dx$, 即

$$\int_1^t f^2(x) dx = t \int_1^t f(x) dx$$

两边对 t 求导可得 $f^2(t) = \int_1^t f(x) dx + t f(t)$, 再对 t 求导

$$2f(t)f'(t) = f(t) + t f'(t)$$

化简可得 $(2f(t) - t)f'(t) = f(t)$, 变形为

$$\frac{dt}{dy} + \frac{1}{2y}t = 1$$

$$\text{解得 } t = C \cdot y^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}y.$$

在体积表达式令 $t = 1$, 有 $f^2(1) - f(1) = 0$, 因为 $f(t) > 0$, 所以 $f(1) = 1$,

$$\text{代入 } t = C \cdot y^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}y \text{ 得 } C = \frac{1}{3}, \text{ 进而 } t = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{y}} + 2y \right).$$

$$\text{所以该曲线方程为 } 2y + \frac{1}{\sqrt{y}} - 3x = 0.$$

(方法二) 同方法一, 得 $2f(t)f'(t) = 2f(t) + t f'(t)$, $f(1) = 1$. 整理得 $\frac{dy}{dt} = \frac{2y}{2y - t}$,

$$\text{令 } \frac{y}{t} = u, \text{ 则 } \frac{dy}{dt} = u + t \frac{du}{dt}, \text{ 原方程变成 } t \frac{du}{dt} = \frac{3u - 2u^2}{2u - 1}.$$

$$\text{分离变量得 } \frac{2u - 1}{u(3 - 2u)} du = \frac{1}{t} dt, \text{ 即 } \frac{1}{3} \left(\frac{-1}{u} + \frac{4}{3 - 2u} \right) du = \frac{dt}{t}.$$

$$\text{积分得 } -\frac{1}{3} \ln u(3 - 2u)^2 = \ln Ct, \text{ 即 } u^{-\frac{1}{3}}(3 - 2u)^{-\frac{2}{3}} = Ct.$$

$$\text{代入 } t = 1, u = 1, \text{ 得 } C = 1, \text{ 所以 } u(3 - 2u)^2 = \frac{1}{t^3}.$$



代入 $u = \frac{y}{t}$ 化简得 $y(3t - 2y)^2 = 1$, 即 $t = \frac{1}{3\sqrt{y}} + \frac{2}{3}y$.

故所求曲线方程为 $x = \frac{2}{3}y + \frac{1}{3\sqrt{y}}$.

【评注】 注意利用隐含的条件确定常数 C .

10 (2019, 17 题, 10 分) 设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y' - xy = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x}{2}}$ 满足条件 $y(1) = \sqrt{e}$ 的特解.

(I) 求 $y(x)$;

(II) 设平面区域 $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq y(x)\}$, 求 D 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

【解】 (I) 由一阶线性微分方程通解公式得

$$\begin{aligned} y &= e^{\int x dx} \left(\int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\frac{x}{2}} \cdot e^{-\int x dx} dx + C \right) \\ &= e^{\frac{x^2}{2}} \left(\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} + C \right) = e^{\frac{x^2}{2}} (\sqrt{x} + C) \end{aligned}$$

由 $y(1) = e^{\frac{1}{2}}$ 知, $C = 0$ 则

$$y = y(x) = \sqrt{x} e^{\frac{x^2}{2}}$$

(II) D 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积为

$$V = \pi \int_1^2 (\sqrt{x} e^{\frac{x^2}{2}})^2 dx = \pi \int_1^2 x e^{x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{x^2} \Big|_1^2 = \frac{\pi}{2} (e^4 - e)$$

练习题

1. (2008, 数二, 11 分) 设 $f(x)$ 是区间 $[0, +\infty)$ 上具有连续导数的单调增加函数, 且 $f(0) = 1$. 对任意的 $t \in [0, +\infty)$, 直线 $x = 0, x = t$, 曲线 $y = f(x)$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周生成一旋转体. 若该旋转体的侧面面积在数值上等于其体积的 2 倍, 求函数 $f(x)$ 的表达式.

2. (2009, 数二, 12 分) 设 $y = y(x)$ 是区间 $(-\pi, \pi)$ 内过 $(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{\sqrt{2}})$ 的光滑曲线, 当 $-\pi < x < 0$ 时, 曲线上任一点处的法线都过原点; 当 $0 \leq x < \pi$ 时, 函数满足 $y'' + y + x = 0$. 求 $y(x)$ 的表达式.

练习题参考答案

1. 【解】 旋转体的体积 $V = \pi \int_0^t f^2(x) dx$, 侧面积 $S = 2\pi \int_0^t f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$, 由题设条件知

$$\int_0^t f^2(x) dx = \int_0^t f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

上式两端对 t 求导得 $f^2(t) = f(t) \sqrt{1 + f'^2(t)}$, 即

$$y' = \sqrt{y^2 - 1}$$

由分离变量法解得 $\ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) = t + C_1$, 即

$$y + \sqrt{y^2 - 1} = Ce^t$$

将 $y(0) = 1$ 代入知 $C = 1$. 故 $y + \sqrt{y^2 - 1} = e^x, y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, 于是所求函数为

$$y = f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

2.【解】 由题意知, 当 $-\pi < x < 0$ 时, $y = -\frac{x}{y}$, 即 $ydy = -xdx$, 可得

$$y^2 = -x^2 + C$$

由初始条件 $y(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, 得 $C = \pi^2$, 所以 $y = \sqrt{\pi^2 - x^2}$.

当 $0 \leq x < \pi$ 时, $y'' + y + x = 0, y'' + y = 0$ 的通解为 $y^* = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

令 $y'' + y + x = 0$ 的特解为 $y_1 = ax + b$,

则有 $0 + ax + b + x = 0$, 得 $a = -1, b = 0$, 故 $y_1 = -x$,

因而 $y'' + y + x = 0$ 的通解为 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x$,

由于 $y = y(x)$ 是 $(-\pi, \pi)$ 内的光滑曲线, 故 y 在 $x = 0$ 处连续,

于是由 $y(0_-) = \pi, y(0_+) = C_1$, 故 $C_1 = \pi$ 时, $y = y(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

又当 $-\pi < x < 0$ 时, 有 $2x + 2yy' = 0$ 得 $y'_-(0) = -\frac{x}{y} = 0$;

当 $0 \leq x < \pi$ 时, 有 $y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x - 1$ 得 $y'_+(0) = C_2 - 1$.

由 $y'_+(0) = y'_-(0), C_2 - 1 = 0$, 即 $C_2 = 1$.

故 $y = y(x)$ 的表达式为 $y = \begin{cases} \sqrt{\pi^2 - x^2}, & -\pi < x < 0, \\ \pi \cos x + \sin x - x, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$

小结

1. 应用题求解步骤:

- (1) 根据实际要求确定要研究的量(几何量或经济量);
- (2) 找出这些量所满足的规律(几何的或经济的);
- (3) 运用这些规律列出方程;
- (4) 列出初始条件.

2. 微分方程的应用是考查应用能力的重要题型, 主要有以下几个方面的应用:

(1) 在几何上的应用

① 导数的应用: 主要由曲线 $y = y(x)$ 在任意点 (x, y) 处的切线斜率 $\frac{dy}{dx}$ 、法线斜率 $-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ 等导

数的应用, 并结合题设其他条件, 得到微分方程.

② 定积分的应用: 主要由在一变化区间 $[a, x]$ (或 $[x, b]$) 上的弧长、面积、体积等定积分的应用问题, 得到变限积分 $\int_a^x f(t) dt$ ($\int_x^b f(t) dt$), 并结合题设其他条件, 得到含变限积分的函数方程, 然后通过求导消去变限积分, 转化为微分方程.

(2) 在经济中的应用.



第二部分 线性代数

第一章 行列式

本章导读

历年来单纯行列式的考题不多,分值也不大,相对重要的是抽象型行列式的计算,另一方面大家要注意如何通过行列式的计算来帮助回答矩阵、向量、方程组、特征值、二次型中的等问题,即行列式的应用.

微信公众号【顶尖考研】

一、数字型行列式的计算

(ID: djky66)

试题特点

对于数字型行列式的计算主要是用按行、按列展开公式,但在展开之前往往先运用行列式性质对其作恒等变形,以期某行或某列有较多的零元素,这时再展开可减轻计算量.同时,也要注意一些特殊公式,如上(下)三角、范德蒙行列式、拉普拉斯展开式的运用.

计算行列式时,一些常用的技巧有:把第一行的 k_i 倍加至第 i 行;把每行都加到第一行;逐行相加;...

1 (2014, 5 题, 4 分) 行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$$

(A) $(ad - bc)^2$.

(B) $-(ad - bc)^2$.

(C) $a^2 d^2 - b^2 c^2$.

(D) $b^2 c^2 - a^2 d^2$.

【答案】 B.

【解析】 数字型行列式, 有较多的 0 且有规律, 应当有拉普拉斯公式的构思.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & 0 & 0 & d \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & a & b & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & d & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & c \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix} = -(ad - bc)^2.$$



或按第 1 列展开, $D = aA_{21} + cA_{41} = -a \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & d & 0 \end{vmatrix}.$

2 (2016, 13 题, 4 分) 行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4.$

【解析】 按第 1 列展开

$$\begin{aligned} D &= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} + 4(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda \left(\lambda \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix} \right) + 4 \\ &= \lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4 \end{aligned}$$

或用逐行相加

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & 0 & -1 & 0 \\ \lambda^3 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & 0 & -1 & 0 \\ \lambda^3 & 0 & 0 & -1 \\ 4+3\lambda+2\lambda^2+(\lambda+1)\lambda^3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4) \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4 \end{aligned}$$

3 (2020, 13 题, 4 分) 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $a^2(a^2 - 4).$

【解析】 由行列式性质恒等变形, 例如把 2 行加到 1 行, 3 行加到 4 行, 再把 1 列的 -1 倍加到 2 列, 4 列的 -1 倍加到 3 列

$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 & -1 \\ -1 & 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$



$$= a^2 \begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a^2(a^2 - 4)$$

【评注】基本计算题,解法非常多,也可每列都加到第1列,再消0,...

看看下面的计算.

练习题

1. (1996, 数一, 3分) 四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于

(A) $a_1 a_2 a_3 a_4 - b_1 b_2 b_3 b_4$.

(B) $a_1 a_2 a_3 a_4 + b_1 b_2 b_3 b_4$.

(C) $(a_1 a_2 - b_1 b_2)(a_3 a_4 - b_3 b_4)$.

(D) $(a_2 a_3 - b_2 b_3)(a_1 a_4 - b_1 b_4)$.

2. (1999, 数二, 3分) 记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 为 $f(x)$, 则方程 $f(x) = 0$

的根的个数为

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

3. (2000, 数四, 3分) 设 $\alpha = (1, 0, -1)^T$, 矩阵 $A = \alpha \alpha^T$, n 为正整数, 则 $|aE - A^n| =$ _____.

4. (1997, 数四, 3分) 设 n 阶矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

则 $|A| =$ _____.

5. (2015, 数一, 4分) n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} =$ _____.

练习题参考答案

1. 【答案】 D.

【解析】这是一个数字型行列式的计算, 由于本题有较多的零, 可以直接展开计算. 若按第一行展开, 有

$$\begin{aligned}
 D &= a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_1 a_4 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} - b_1 b_4 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} \\
 &= (a_1 a_4 - b_1 b_4)(a_2 a_3 - b_2 b_3)
 \end{aligned}$$

所以应选(D).

若熟悉拉普拉斯展开,可通过两行互换,两列互换,把零元素调至行列式的一角.例如

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} \\
 &= (a_1 a_4 - b_1 b_4)(a_2 a_3 - b_2 b_3)
 \end{aligned}$$

2.【答案】 B.

【解析】 问方程 $f(x) = 0$ 有几个根,也就是问 $f(x)$ 是 x 的几次多项式.将第1列的-1倍依次加至其余各列,有

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{(2)+(4)} \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} x-2 & 1 & x-2 & -1 \\ 2x-2 & 1 & x-7 & -6 \end{vmatrix} = x(5x-5)
 \end{aligned}$$

可见由拉普拉斯展开式知 $f(x)$ 是 x 的2次多项式.

故应选(B).

【评注】 由于行列式中各项均含有 x ,若直接展开是繁琐的,故一定要先恒等变形;更不要错误地认为 $f(x)$ 一定是4次多项式.

3.【答案】 $a^2(a-2^n)$.

【解析】 因为

$$A = \alpha \alpha^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} (1, 0, -1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 而 } \alpha^T \alpha = (1, 0, -1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 2,$$

则 $A^2 = (\alpha \alpha^T)(\alpha \alpha^T) = \alpha (\alpha^T \alpha) \alpha^T = 2 \alpha \alpha^T = 2A$, 于是

$$A^n = 2^{n-1} A$$

那么

$$|aE - A^n| = |aE - 2^{n-1} A| = \begin{vmatrix} a - 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & a & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & a - 2^{n-1} \end{vmatrix} = a^2(a - 2^n)$$



【评注】若对特征值熟练,由 $r(A) = 1$, 知 A 的特征值为 $2, 0, 0$. 那么 A^n 的特征值是 $2^n, 0, 0$. 从而 $aE - A^n$ 的特征值是 $a - 2^n, a, a$. 故 $|aE - A^n| = (a - 2^n)a^2$.

4. 【答案】 $(-1)^{n-1}(n-1)$.

【解析】把第 $2, 3, \dots, n$ 各行均加至第 1 行, 则第 1 行为 $n-1$, 提取公因数 $n-1$ 后, 再把第 1 行的 -1 倍加至第 $2, 3, \dots, n$ 各行, 可化为上三角行列式. 即

$$|A| = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)$$

5. 【答案】 $2(2^n - 1)$.

【解析】(方法一) (用第 $1, 2, \dots, n-1$ 行的 $\frac{1}{2}$ 倍逐行相加)

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 + \frac{2}{2} \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & \frac{2+2^2}{2} \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & \frac{2+2^2+2^3}{2^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 2 & 0 & \cdots & 0 & \frac{2+2^2}{2} \\ 2 & \cdots & 0 & \frac{2+2^2+2^3}{2^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & \frac{2+2^2+\cdots+2^{n-1}}{2^{n-2}} \\ 2 & \frac{2+2^2+\cdots+2^n}{2^{n-1}} \end{vmatrix}$$

$$= 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2(2^n - 1).$$

(方法二) (把每一行相应倍数加到第一行)

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2^2 & 0 & \cdots & 0 & 2+2^2 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$



$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2^3 & \cdots & 0 & 2+2^2+2^3 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 2^{n-1} & 2+2^2+\cdots+2^{n-1} \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2+2^2+\cdots+2^n \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= (2+2^2+\cdots+2^n)(-1)^{n+1} \cdot (-1)^{n-1} = 2(2^n-1)
 \end{aligned}$$

(方法三) (用递推法) 按第一行展开, 建立递推公式, 有

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2D_{n-1} + 2(-1)^{n+1} \cdot (-1)^{n-1} = 2D_{n-1} + 2$$

$$D_n = 2D_{n-1} + 2 = 2(2D_{n-2} + 2) + 2 = 2^2 D_{n-2} + 2 + 2^2$$

$$= 2^2(2D_{n-3} + 2) + 2 + 2^2 = 2^3 D_{n-3} + 2 + 2^2 + 2^3$$

.....

$$= 2^{n-1} D_1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2(2^n - 1)$$

$$\text{或 } D_n + 2 = 2(D_{n-1} + 2) = 2^2(D_{n-2} + 2) = \cdots = 2^{n-2}(D_2 + 2).$$

$$\text{又因 } D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6, \text{ 所以 } D_n + 2 = 2^{n-2} \cdot 8, \text{ 故 } D_n = 2^{n+1} - 2.$$

二、抽象型行列式的计算

试题特点

对于抽象型行列式的计算, 有可能考查行列式性质的理解、运用, 有可能涉及矩阵的运算, 也



可能用特征值、相似等处理. 这一类题目往往综合性强, 涉及知识点多. 因此, 考生复习时要注意知识的衔接与转换, 如果内在联系把握得好, 解题时的思路就灵活. 这一类题目计算量一般不太大.

4 (2010, 13 题, 4 分) 设 A, B 为三阶矩阵, 且 $|A| = 3, |B| = 2, |A^{-1} + B| = 2$, 则 $|A + B^{-1}| =$ _____.

【答案】 3.

【解析】 本题是考查抽象行列式的计算.

$$\begin{aligned} |A + B^{-1}| &= |EA + B^{-1}E| = |(B^{-1}B)A + B^{-1}(A^{-1}A)| \\ &= |B^{-1}(B + A^{-1})A| = |B^{-1}| \cdot |B + A^{-1}| \cdot |A| \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3 \end{aligned}$$

【评注】 本题难度系数 0.539.

注意 $|A + B| \neq |A| + |B|$, 对于 $|A + B|$ 一般要用单位矩阵 E 恒等变形的技巧.

5 (2012, 13 题, 4 分) 设 A 为三阶矩阵, $|A| = 3, A^*$ 为 A 的伴随矩阵. 若交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B , 则 $|BA^*| =$ _____.

【答案】 -27.

【解析】 两行互换 A 变成 B , 所以 $|A| = -|B|$, 再由行列式乘法公式及 $|A^*| = |A|^{n-1}$ 立即可有

$$|BA^*| = |B| \cdot |A^*| = -|A| \cdot |A|^2 = -27$$

或者, 按题意 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = B$, 即 $B = E_{12}A$.

那么 $BA^* = E_{12}AA^* = |A|E_{12} = 3E_{12}$,

从而 $|BA^*| = |3E_{12}| = 3^3 |E_{12}| = -27$.

6 (2013, 13 题, 4 分) 设 $A = (a_{ij})$ 是三阶非零矩阵, $|A|$ 为 A 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 若 $a_{ij} + A_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3)$, 则 $|A| =$ _____.

【答案】 -1.

【解析】 由 $a_{ij} = -A_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ 知 $A^T = -A^*$.

那么 $|A| = |A^T| = |-A^*| = (-1)^3 |A^*| = -|A|^2$,

即 $|A|(1 + |A|) = 0$, 故 $|A|$ 为 0 或 -1.

又 A 是非零矩阵, 不妨设 $a_{11} \neq 0$. 于是

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = -(a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2) \neq 0$$

所以 $|A| = -1$.

下面又选三道题再次提醒三种解法.

练习题

1. (1993, 数四, 3 分) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 都是四维列向量, 且四阶行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1| = m$, $|\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3| = n$, 则四阶行列式 $|\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1 + \beta_2| =$
- (A) $m + n$. (B) $-(m + n)$. (C) $n - m$. (D) $m - n$.



2. (2003, 数二, 4 分) 设三阶方阵 A, B 满足 $A^2B - A - B = E$, 其中 E 为三阶单位矩阵, 若

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 则 } |B| = \underline{\hspace{2cm}}.$$

3. (2005, 数一、数二, 4 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为三维列向量, 记矩阵

$$A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3], B = [\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3]$$

如果 $|A| = 1$, 那么 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}.$

练习题参考答案

1. 【答案】 C.

【解析】 利用行列式的性质, 有

$$\begin{aligned} |\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1 + \beta_2| &= |\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1| + |\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_2| \\ &= -|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1| - |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2| \\ &= -m + |\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3| = n - m \end{aligned}$$

所以应选(C).

【评注】 作为抽象行列式, 本题主要考查用行列式的性质恒等变形, 化简求值.

2. 【答案】 $\frac{1}{2}.$

【解析】 由已知条件有 $(A^2 - E)B = A + E$, 即 $(A + E)(A - E)B = A + E$.

$$\text{因为 } A + E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ 知 } A + E \text{ 可逆.}$$

故 $(A - E)B = E$. 两边取行列式, 并用行列式乘法公式, 有 $|A - E| \cdot |B| = 1$.

$$\text{而 } |A - E| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2, \text{ 故 } |B| = \frac{1}{2}.$$

【评注】 本题考查的是利用矩阵的运算来计算行列式.

3. 【答案】 2.

【解析】 (方法一) 用行列式的性质, 例如先 3 列 - 2 列再 2 列 - 1 列有

$$\begin{aligned} |B| &= |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3| \\ &= |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_2 + 5\alpha_3| \\ &= |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + 3\alpha_3, 2\alpha_3| \\ &= 2 |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_3| \\ &= 2 |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2, \alpha_3| = 2 |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 2 |A| = 2. \end{aligned}$$

(方法二) 用分块矩阵, 由于



$$B = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

两边取行列式,并用行列式乘法公式,所以

$$|B| = |A| \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2|A| = 2$$

【评注】 计算抽象型行列式本题的这两种解法是重要的. 本题难度系数 0.638.

三、行列式 $|A|$ 是否为零的判定

试题特点

常用的判断 $|A| = 0$ 是否为零的问题的思路有:

- ① 利用秩,设法证 $r(A) < n$;
- ② 用齐次方程组 $Ax = 0$ 是否有非零解;
- ③ 据 $|A| = \prod \lambda_i$, 判断 0 是否是特征值;
- ④ 反证法;
- ⑤ 相反数 $|A| = -|A|$.

最近十年没有考这类题型. 下列考题会做吗?

练习题

1. (1999, 数一, 3 分) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 则

(A) 当 $m > n$ 时, 必有行列式 $|AB| \neq 0$. (B) 当 $m > n$ 时, 必有行列式 $|AB| = 0$.

(C) 当 $n > m$ 时, 必有行列式 $|AB| \neq 0$. (D) 当 $n > m$ 时, 必有行列式 $|AB| = 0$.

2. (1994, 数一, 6 分) 设 A 为 n 阶非零矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, A^T 是 A 的转置矩阵, 当 $A^* = A^T$ 时, 证明 $|A| \neq 0$.

3. (1995, 数一, 6 分) 设 A 为 n 阶矩阵, 满足 $AA^T = E$, $|A| < 0$, 求 $|A + E|$.

练习题参考答案

1. 【答案】 B.

【解析】 (方法一) 因为 AB 是 m 阶矩阵, $|AB| = 0$ 的充分必要条件是秩 $r(AB) < m$. 由于

$$r(AB) \leq r(B) \leq \min(m, n)$$

可见当 $m > n$ 时, 必有 $r(AB) \leq n < m$. 因此选(B).

(方法二) 由于方程组 $Bx = 0$ 的解必是方程组 $ABx = 0$ 的解, 而 $Bx = 0$ 是 n 个方程 m 个未知数的齐次线性方程组, 因此当 $m > n$ 时, $Bx = 0$ 必有非零解, 从而 $ABx = 0$ 有非零解,



故 $|AB| = 0$. 所以选(B).

2. 【证明】 (方法一) 由于 $A^* = A^T$, 即有 $A_{ij} = a_{ij} (\forall i, j = 1, 2, \dots, n)$, 其中 A_{ij} 是行列式 $|A|$ 中 a_{ij} 的代数余子式.

因为 $A \neq O$, 不妨设 $a_{ij} \neq 0$, 那么

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \dots + a_{in}^2 > 0$$

故 $|A| \neq 0$.

(方法二) (反证法) 若 $|A| = 0$, 则 $AA^T = AA^* = |A|E = O$.

设 A 的行向量为 $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 则 $\alpha_i \alpha_i^T = a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \dots + a_{in}^2 = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$.

于是 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$.

进而有 $A = O$, 这与 A 是非零矩阵相矛盾. 故 $|A| \neq 0$.

3. 【解】 因为

$$|A+E| = |A+AA^T| = |A(E+A^T)| = |A| \cdot |(E+A)^T| = |A| \cdot |E+A|$$

且由 $AA^T = E$ 知 $|A| \cdot |A^T| = 1$, 即 $|A|^2 = 1$. 又 $|A| < 0$, 故 $|A| = -1$.

所以 $|A+E| = -|A+E|$, 即 $|A+E| = 0$.

心得笔记:

微信公众号【顶尖考研】

(ID: djky66)



第二章 矩阵

本章导读

矩阵是线性代数的核心内容,矩阵的概念、运算及理论贯穿线性代数的始终.几乎年年都有单纯的矩阵知识的考题,而且其他考题也回避不了矩阵的知识,矩阵的重要性不言而喻.

二十多年来,矩阵的解答题考得很少,但复习时,对于填空与选择不要大意失荆州.

一、矩阵运算、初等变换

试题特点

试题简单、基本、但容易失误.由于矩阵乘法没有交换律、没有消去律、有零因子,这和大家熟悉的算术运算有很大区别,试题往往就是考查这里的基本功,因此复习时对于矩阵的运算要正确、熟练,不要眼高手低犯低级失误.

矩阵的初等行变换是左乘初等矩阵、矩阵的初等列变换是右乘初等矩阵,在这里要分清左乘、右乘,记住初等矩阵的逆矩阵.

1 (2009, 6题, 4分) 设 A, P 均为三阶矩阵, P^T 为 P 的转置矩阵, 且 $P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. 若

$P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3], Q = [\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3]$, 则 $Q^T A Q$ 为

- (A) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

【答案】 A.

【解析】 本题是在考查矩阵的初等变换、初等矩阵. 按题意 P 经列变换为 Q (把第 2 列加至第 1 列), 有 $P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = Q$, 记 $E_{21}(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 于是

$$\begin{aligned} Q^T A Q &= [P E_{21}(1)]^T A [P E_{21}(1)] = E_{21}^T(1) [P^T A P] E_{21}(1) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

【评注】 关于初等矩阵一是搞清左乘、右乘,二是记住初等矩阵逆矩阵的公式. 本题难度系数 0.618.

2 (2011, 5 题, 4 分) 设 A 为三阶矩阵, 将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B , 再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵. 记 $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $A =$

- (A) $P_1 P_2$. (B) $P_1^{-1} P_2$. (C) $P_2 P_1$. (D) $P_2 P_1^{-1}$.

【答案】 D.

【解析】 本题是常规的也是基本的初等变换、初等矩阵的考题. 按题意

$$A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} B = E$$

即 $AP_1 = B$, $P_2 B = E$, 从而 $P_2(AP_1) = E$.

故 $A = P_2^{-1} E P_1^{-1} = P_2 P_1^{-1}$, 即应选(D).

【评注】 搞清“左乘”和“右乘”, 记住初等矩阵逆矩阵的公式. 本题难度系数 0.783.

3 (2012, 6 题, 4 分) 设 A 为三阶矩阵, P 为三阶可逆矩阵, 且 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. 若 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, $Q = [\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3]$, 则 $Q^{-1}AQ =$

- (A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

【答案】 B.

【解析】 本题考查初等矩阵, 由于 P 经列变换(把第 2 列加至第 1 列)为 Q , 有

$$Q = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = PE_{21}(1)$$

那么

$$\begin{aligned} Q^{-1}AQ &= [PE_{21}(1)]^{-1}A[PE_{21}(1)] = E_{21}^{-1}(1)P^{-1}APE_{21}(1) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

【评注】 近十年没有出单纯矩阵运算的考题, 但早年考的一些题型应当复习.

练习题

1. (1994, 数一, 3 分) 已知 $\alpha = (1, 2, 3)$, $\beta = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, 设 $A = \alpha^T \beta$, 其中 α^T 是 α 的转置, 则



$$A^n = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. (2003, 数二, 4分) 设 α 为 3 维列向量, α^T 是 α 的转置, 若 $\alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $\alpha^T\alpha =$

_____.

3. (2004, 数四, 4分) 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = P^{-1}AP$, 其中 P 为三阶可逆矩阵, 则 $B^{2004} -$

$$2A^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

4. (1997, 数一, 3分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, B 为三阶非零矩阵, 且 $AB = O$, 则 $t =$ _____.

练习题参考答案

1. 【答案】 $3^{n-1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

【解析】 矩阵乘法有结合律, 注意

$$\beta\alpha^T = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 3, (\text{是一个数})$$

$$\text{而 } \alpha^T\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}, (\text{是三阶矩阵})$$

$$\text{于是 } A^n = (\alpha^T\beta)(\alpha^T\beta)\cdots(\alpha^T\beta) = \alpha^T(\beta\alpha^T)\cdots(\beta\alpha^T)\beta = 3^{n-1}\alpha^T\beta = 3^{n-1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

【评注】 若 α, β 是 n 维列向量, 则 $A = \alpha\beta^T$ 是秩为 1 的 n 阶矩阵, 而 $\alpha^T\beta$ 是一阶矩阵, 是一个数. 由于矩阵乘法有结合律, 此时 $A^n = l^{n-1}A$, 而 $l = \alpha^T\beta$.

2. 【答案】 3.

【解析】 设 $\alpha = (a_1, a_2, a_3)^T$, 则



$$\alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} (a_1, a_2, a_3) = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_2 a_1 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & a_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{而 } \alpha^T \alpha = (a_1, a_2, a_3) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2,$$

$$\text{所以 } \alpha^T \alpha = 1 + 1 + 1 = 3.$$

【评注】 本题 $\alpha\alpha^T$ 是秩为 1 的矩阵, $\alpha^T \alpha$ 是一个数, 这两个符号不要混淆. 且若 $A = \alpha\beta^T$, 其中 α, β 均为 n 维列向量, 则 $\alpha^T \beta = \beta^T \alpha = \sum a_{ii}$ (矩阵 A 主对角线元素之和).

3. 【答案】 $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$

【解析】 本题考查 n 阶方阵方幂的运算. 由于

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} A^n & 0 \\ 0 & B^n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_1^n \\ a_2^n \\ a_3^n \end{bmatrix}$$

$$\text{又 } \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \text{ 易见}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{从而 } A^{2004} = (A^2)^{1002} = E \text{ 那么}$$

$$B^{2004} - 2A^2 = P^{-1}A^{2004}P - 2A^2 = P^{-1}EP - 2A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

【评注】 若 $P^{-1}AP = B$, 则 $P^{-1}A^nP = B^n$. 通过相似求 A^n 是求 A 的方幂的重要方法.

4. 【答案】 $-3.$

【解析】 由 $AB = O$, 对 B 按列分块有

$$AB = A[\beta_1, \beta_2, \beta_3] = [A\beta_1, A\beta_2, A\beta_3] = [0, 0, 0]$$

即 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是齐次方程组 $Ax = 0$ 的解.

又因 $B \neq O$, 故 $Ax = 0$ 有非零解, 那么

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 4 & t & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 7(t+3) = 0 \Rightarrow t = -3$$

若熟悉公式: $AB = O$, 则 $r(A) + r(B) \leq n$. 可知 $r(A) < 3$. 亦可求出 $t = -3$.



【评注】对于 $AB = O$ 要有 B 的每个列向量都是齐次方程组 $Ax = 0$ 的构思, 还要有秩 $r(A) + r(B) \leq n$ 的知识.

二、伴随矩阵、可逆矩阵

试题特点

伴随与可逆是矩阵中最重要的知识点, 关键公式: $AA^* = A^*A = |A|E$, 进而有

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* \text{ 或 } A^* = |A|A^{-1}$$

涉及伴随与可逆的试题非常多, 要想到并灵活运用 $AA^* = A^*A = |A|E$ 这一核心公式.

定义法, 单位矩阵恒等变形, 可逆的充要条件都是重要的考点.

4 (2009, 5 题, 4 分) 设 A, B 均为二阶方阵, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵. 若 $|A| = 2, |B| = 3$, 则分块矩阵 $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵为

(A) $\begin{bmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{bmatrix}$.

【答案】 B.

【解析】 由 $\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{2 \times 2} |A| |B| = 6$, 知矩阵 $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$ 可逆, 那么

$$\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & AB \\ A^{-1} & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & 6B^{-1} \\ 6A^{-1} & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{bmatrix}$$

故应选(B).

本题也可设 $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$, 那么由 $AA^* = |A|E$ 有

$$\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & O \\ O & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6E & O \\ O & 6E \end{bmatrix}$$

由 $AX_3 = 6E \Rightarrow X_3 = 6A^{-1} = 3A^*$, 故应选(B).

(由题中 4 个选项可知必有 $X_1 = O, X_4 = O$, 只需检查 X_2 或 X_3 即可)

【评注】 本题考查的知识点有: $AA^* = |A|E$ 或 $A^* = |A|A^{-1}$ 或 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$; 行列式的拉普拉斯展开式; 分块矩阵的求逆公式. 这些都是线性代数的基本内容.

本题难度系数 0.618.

5 (2017, 5 题, 4 分) 设 α 为 n 维单位列向量, E 为 n 阶单位矩阵, 则

- (A) $E - \alpha\alpha^T$ 不可逆. (B) $E + \alpha\alpha^T$ 不可逆.
(C) $E + 2\alpha\alpha^T$ 不可逆. (D) $E - 2\alpha\alpha^T$ 不可逆.

【答案】 A.

【解析】 $A = \alpha\alpha^T$ 是秩为 1 的矩阵, 又 α 为单位列向量, 有 $\alpha^T\alpha = 1$,

故矩阵 A 的特征值为 $1, 0, \dots, 0 (n-1 \text{ 个})$,

所以 $E - \alpha\alpha^T$ 的特征值为 $0, 1, \dots, 1 (n-1 \text{ 个})$.

因此矩阵 $E - \alpha\alpha^T$ 不可逆. 应选 (A).

下面是一些考题, 希望你认真地做, 好好体会与把握处理伴随和可逆的思想方法.

练习题

1. (2001, 数一, 3 分) 设矩阵 A 满足 $A^2 + A - 4E = O$, 其中 E 为单位矩阵, 则 $(A - E)^{-1} =$ _____.

2. (2000, 数二, 3 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{bmatrix}$, E 为四阶单位矩阵, 且 $B = (E + A)^{-1}(E - A)$,

则 $(E + B)^{-1} =$ _____.

3. (1991, 数一, 3 分) 设 n 阶方阵 A, B, C 满足关系式 $ABC = E$, 其中 E 是 n 阶单位矩阵, 则必有
(A) $ACB = E$. (B) $CBA = E$. (C) $BAC = E$. (D) $BCA = E$.

4. (1998, 数二, 3 分) 设 A 是任一 $n (n \geq 3)$ 阶方阵, A^* 是其伴随矩阵, 又 k 为常数, 且 $k \neq 0, \pm 1$, 则必有 $(kA)^* =$ _____.

(A) kA^* . (B) $k^{n-1}A^*$. (C) k^nA^* . (D) $k^{-1}A^*$.

5. (2002, 数四, 3 分) 设 A, B 为 n 阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 对应的伴随矩阵, 分块矩阵 $C = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$, 则 C 的伴随矩阵 $C^* =$ _____.

(A) $\begin{bmatrix} |A|A^* & O \\ O & |B|B^* \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} |B|B^* & O \\ O & |A|A^* \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} |A|B^* & O \\ O & |B|A^* \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{bmatrix}$.

6. (1997, 数一, 5 分) 设 A 是 n 阶可逆方阵, 将 A 的第 i 行和第 j 行对换后得到的矩阵记为 B .

(I) 证明 B 可逆; (II) 求 AB^{-1} .

7. (2002, 数二, 6 分) 已知 A, B 为三阶矩阵, 且满足 $2A^{-1}B = B - 4E$, 其中 E 是三阶单位矩阵.

(I) 证明: 矩阵 $A - 2E$ 可逆; (II) 若 $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 求矩阵 A .

8. (1996, 数一, 6 分) 设 $A = E - \xi\xi^T$, 其中 E 为 n 阶单位矩阵, ξ 是 n 维非零列向量, ξ^T 是 ξ 的转置. 证明: (I) $A^2 = A$ 的充要条件是 $\xi^T\xi = 1$; (II) 当 $\xi^T\xi = 1$ 时, A 是不可逆矩阵.

练习题参考答案

1. 【答案】 $\frac{1}{2}(A + 2E)$.

【解析】 矩阵 A 的元素没有给出, 因此用伴随矩阵、用初等行变换求逆的路均堵塞. 应当考虑



用定义法. 因为

$$(A-E)(A+2E)-2E=A^2+A-4E=O$$

故

$$(A-E)(A+2E)=2E$$

$$\text{即 } (A-E) \cdot \frac{A+2E}{2} = E,$$

$$\text{按定义知 } (A-E)^{-1} = \frac{1}{2}(A+2E).$$

2. 【答案】

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

【解析】 虽可以由 A 先求出 $(E+A)^{-1}$, 再作矩阵乘法求出 B , 最后通过求逆得到 $(E+B)^{-1}$. 但这种方法计算量太大.

本题实际是考单位矩阵恒等变形的技巧, 我们有

$$\begin{aligned} B+E &= (E+A)^{-1}(E-A)+E \\ &= (E+A)^{-1}[(E-A)+(E+A)] = 2(E+A)^{-1} \end{aligned}$$

所以

$$(E+B)^{-1} = [2(E+A)^{-1}]^{-1} = \frac{1}{2}(E+A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

或者, 由 $B = (E+A)^{-1}(E-A)$, 左乘 $(E+A)$ 得 $(E+A)B = E-A$. 所以

$$(E+A)B + (E+A) = E-A+E+A = 2E$$

即有

$$(E+A)(E+B) = 2E$$

【评注】 本题既综合又灵活, 这是考生失误较多的一道考题, 其解题思路方法值得很好体会.

3. 【答案】 D.

【解析】 矩阵的乘法没有交换律, 只有一些特殊情况可交换. 由于 A, B, C 均为 n 阶矩阵, 且 $ABC = E$, 据行列式乘法公式 $|A||B||C| = 1$ 知 A, B, C 均可逆. 那么对 $ABC = E$ 先左乘 A^{-1} 再右乘 A , 有

$$ABC = E \rightarrow BC = A^{-1} \rightarrow BCA = E$$

选(D).

类似地, 由 $BCA = E \rightarrow CAB = E$.

不难想出, 若 n 矩阵 $ABCD = E$, 则有 $ABCD = BCDA = CDAB = DABC = E$.

4. 【答案】 B.



【解析】 对任何 n 阶矩阵都要成立的关系式,对特殊的 n 阶矩阵自然也要成立. 那么,当 A 可逆时,由 $A^* = |A| A^{-1}$ 有

$$(kA)^* = |kA| (kA)^{-1} = k^n |A| \cdot \frac{1}{k} A^{-1} = k^{n-1} A^*$$

故应选(B).

一般地,若 $A = (a_{ij})$, 有 $kA = (ka_{ij})$, 那么矩阵 kA 的 i 行 j 列元素的代数余子式为

$$\begin{aligned} (kA)_{ij} &= (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1,j-1} & ka_{1,j+1} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i-1,1} & \cdots & ka_{i-1,j-1} & ka_{i-1,j+1} & \cdots & ka_{i-1,n} \\ ka_{i+1,1} & \cdots & ka_{i+1,j-1} & ka_{i+1,j+1} & \cdots & ka_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & \cdots & ka_{n,j-1} & ka_{n,j+1} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{i+j} k^{n-1} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k^{n-1} A_{ij} \end{aligned}$$

即 $|kA|$ 中每个元素的代数余子式恰好是 $|A|$ 相应元素的代数余子式的 k^{n-1} 倍,因而,按伴随矩阵的定义知 $(kA)^*$ 的元素是 A^* 对应元素的 k^{n-1} 倍.

5.【答案】 D.

【解析】 对任何 n 阶矩阵 A, B 关系式要成立,那么 A, B 可逆时仍应成立,故可看 A, B 可逆时 $C^* = ?$ 由于

$$\begin{aligned} C^* &= |C| C^{-1} = \begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = |A| |B| \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |B| A^* & O \\ O & |A| B^* \end{bmatrix} \end{aligned}$$

所以应选(D).

作为选择题,根据这四个选项,也可如下判断:

设 $C^* = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$, 由 $CC^* = |C| E$, 有

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX_1 & AX_2 \\ BX_3 & BX_4 \end{bmatrix} = |A| |B| \begin{bmatrix} E & O \\ O & E \end{bmatrix}$$

因为 $AX_1 = |A| |B| E \Rightarrow X_1 = |A| |B| A^{-1} = |B| A^*$. 故应选(D).

6.【解】 由于 $B = E_{ij}A$, 其中 E_{ij} 是初等矩阵

微信公众号: 顶尖考研
 (ID: djky66)



$$E_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & 1 \\ & & & \ddots & \\ & 1 & & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix}$$

(I) 因为 A 可逆, $|A| \neq 0$, 故 $|B| = |E_{ij}A| = |E_{ij}| \cdot |A| = -|A| \neq 0$. 所以 B 可逆.

(II) 由 $B = E_{ij}A$, 知 $AB^{-1} = A(E_{ij}A)^{-1} = AA^{-1}E_{ij}^{-1} = E_{ij}^{-1} = E_{ij}$.

7. 【解】 (I) 由 $2A^{-1}B = B - 4E$ 左乘 A 知 $AB - 2B - 4A = O$.

从而 $(A - 2E)(B - 4E) = 8E$ 或 $(A - 2E) \cdot \frac{1}{8}(B - 4E) = E$.

故 $A - 2E$ 可逆, 且 $(A - 2E)^{-1} = \frac{1}{8}(B - 4E)$.

(II) 由 (I) 知 $A = 2E + 8(B - 4E)^{-1}$. 而

$$(B - 4E)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

故

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

【评注】 如果只是想证明 $A - 2E$ 可逆, 那么由

$$AB - 2B - 4A = O \Rightarrow (A - 2E)B = 4A$$

因为 A 可逆, 知 $|4A| = 4^3 |A| \neq 0$. 故 $|A - 2E| \cdot |B| \neq 0$, 就可证出 $A - 2E$ 可逆.

$$\begin{aligned} 8. \text{【证明】} \quad (I) \quad A^2 &= (E - \xi\xi^T)(E - \xi\xi^T) = E - 2\xi\xi^T + \xi\xi^T\xi\xi^T \\ &= E - \xi\xi^T + \xi(\xi^T\xi)\xi^T - \xi\xi^T = A + (\xi^T\xi)\xi\xi^T - \xi\xi^T \end{aligned}$$

那么 $A^2 = A \Leftrightarrow (\xi^T\xi - 1)\xi\xi^T = O$.

因为 ξ 是非零列向量, $\xi\xi^T \neq O$, 故 $A^2 = A \Leftrightarrow \xi^T\xi - 1 = 0$, 即 $\xi^T\xi = 1$.

(II) 反证法. 当 $\xi^T\xi = 1$ 时, 由 (I) 知 $A^2 = A$, 若 A 可逆, 则

$$A = A^{-1}A^2 = A^{-1}A = E$$

与已知 $A = E - \xi\xi^T \neq E$ 矛盾.

【评注】 ξ 是 n 维列向量, 则 $\xi\xi^T$ 是 n 阶矩阵且秩为 1, 而 $\xi^T\xi$ 是一个数, 数学符号的含义要搞清, 不要混淆, 本题考查矩阵乘法的分配律、结合律. 对 (II), 由 $A = E - \xi\xi^T$, 有

$$A\xi = \xi - \xi(\xi^T\xi) = \xi - \xi = O$$

可见 ξ 是 $Ax = O$ 的非零解, 故 $|A| = 0$. 亦知 A 不可逆. 本题证法很多, 你还有别的方法吗?

三、矩阵的秩

试题特点

矩阵的秩是重点也是难点,要正确理解矩阵秩的概念.

$r(A) = r \Leftrightarrow A$ 中有 r 阶子式不为 0, 每个 $r+1$ 阶子式(若还有)全为 0.

在这里要分清“有一个”与“每一个”, 当 $r(A) = r$ 时, A 中能否有 $r-1$ 阶子式为 0? 能否有 $r+1$ 阶子式不为 0?

你用行列式来如何描述 $r(A) \geq r$? 如何描述 $r(A) < r$?

要搞清矩阵的秩与向量组秩之间的关系, 这种转换是重要的. 在线性相关的判断与证明中往往是由矩阵的秩推导向量组的秩, 而解方程组时往往由相关、无关推导矩阵的秩.

经初等变换矩阵的秩不变, 这是求秩的最重要的方法, 有时可以把定义法与初等变换法结合起来分析推导矩阵的秩.

要会用 ① $|A|$ 是否为 0; ② 相关、无关; ③ 方程组的解. 会用其中的两个信息夹逼求出矩阵 A 的秩.

6 (2018, 6 题, 4 分) 设 A, B 为 n 阶矩阵, 记 $r(X)$ 为矩阵 X 的秩, $(X \ Y)$ 表示分块矩阵, 则

$$(A) r(A \ AB) = r(A), \quad (B) r(A \ BA) = r(A).$$

$$(C) r(A \ B) = \max\{r(A), r(B)\}, \quad (D) r(A \ B) = r(A^T \ B^T).$$

【答案】 A.

【解析】 记 $AB = C$, 对 A, C 按列分块有

$$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n]$$

即 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出. 由矩阵的秩就是列向量组的秩, 故

$$r(A, AB) = r(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \gamma_1, \dots, \gamma_n) = r(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = r(A)$$

所以选(A).

【评注】 如令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

可见 $(A, BA) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 其秩为 2, 而 $r(A) = 1$. 所以(B) 不正确.

如令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $r(A, B) = r \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$, 而 $r(A) = 1, r(B) = 1$,

知(C) 不正确.

此时 $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, r(A^T, B^T) = r \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$.

知(D) 不正确.

练习题

1. (1996, 数一, 3 分) 设 A 是 4×3 矩阵, 且 $r(A) = 2$, 而 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, 则 $r(AB) =$ _____.

2. (1998, 数二, 3 分) 设 $n(n \geq 3)$ 阶矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

若矩阵 A 的秩为 $n-1$, 则 a 必为

- (A) 1. (B) $\frac{1}{1-n}$. (C) -1. (D) $\frac{1}{n-1}$.

3. (1993, 数一, 3 分) 已知 $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$, P 为三阶非零矩阵, 且满足 $PQ = O$, 则

- (A) $t = 6$ 时 P 的秩必为 1. (B) $t = 6$ 时 P 的秩必为 2.
(C) $t \neq 6$ 时 P 的秩必为 1. (D) $t \neq 6$ 时 P 的秩必为 2.

4. (2003, 数四, 4 分) 设矩阵 $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 已知矩阵 A 相似于 B , 则秩 $(A-2E)$ 与秩 $(A-E)$

之和等于

- (A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5.

5. (2008, 数四, 4 分) 设三阶矩阵 A 的特征值互不相同, 若行列式 $|A| = 0$, 则 A 的秩为 _____.

6. (2010, 数一, 4 分) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times m$ 矩阵, E 为 m 阶单位矩阵. 若 $AB = E$, 则

- (A) 秩 $r(A) = m$, 秩 $r(B) = m$. (B) 秩 $r(A) = m$, 秩 $r(B) = n$.
(C) 秩 $r(A) = n$, 秩 $r(B) = m$. (D) 秩 $r(A) = n$, 秩 $r(B) = n$.

练习题参考答案

1. 【答案】 2.

【解析】 基础题, 本题是考查矩阵乘积的秩的公式:

如果 A 可逆, 则 $r(AB) = r(B)$; $r(BA) = r(B)$.

本题 $|B| = 10 \neq 0$, 故 B 为可逆矩阵, 因此 $r(AB) = r(A) = 2$.

2. 【答案】 B.

【解析】 本题可用秩的概念: $|A| = 0$ 但有 $n-1$ 阶子式不为 0 来分析、推断, 由于



$$\begin{aligned}
 |A| &= [(n-1)a+1] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
 &= [(n-1)a+1] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1-a & & & \\ & & 1-a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1-a \end{vmatrix} \\
 &= [(n-1)a+1](1-a)^{n-1},
 \end{aligned}$$

由 $r(A) = n-1$ 知 $|A| = 0$, 故 a 取自于 $\frac{1}{1-n}$ 或 1. 显然 $a = 1$ 时,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

而 $r(A) = 1$ 不符合题意, 故应选(B).

【评注】 因为 A 是实对称矩阵, 若特征值熟练, 亦可用相似来处理.

注意: $A = (1-a)E + \begin{bmatrix} a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & a \end{bmatrix}$, 所以 A 的特征值: $(n-1)a+1, 1-a(n-1)$ 个

$$\text{故 } A \sim \begin{bmatrix} (n-1)a+1 & & & \\ & 1-a & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1-a \end{bmatrix}.$$

3. 【答案】 C.

【解析】 因为 $P \neq O$, 所以秩 $r(P) \geq 1$, 问题是 $r(P)$ 究竟为 1 还是 2?

若 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times s$ 矩阵, $AB = O$, 则 $r(A) + r(B) \leq n$.

当 $t = 6$ 时, $r(Q) = 1$. 于是从 $r(P) + r(Q) \leq 3$ 得 $r(P) \leq 2$.

因此(A)(B)中对秩 $r(P)$ 的判定都有可能成立, 但不是必成立. 所以(A)(B)均不正确.

当 $t \neq 6$ 时, $r(Q) = 2$. 于是从 $r(P) + r(Q) \leq 3$ 得 $r(P) \leq 1$. 故应选(C).

4. 【答案】 C.

【解析】 若 $P^{-1}AP = B$, 则 $P^{-1}(A+kE)P = B+kE$, 即若 $A \sim B$, 则 $A+kE \sim B+kE$. 又因相似矩阵有相同的秩, 故

$$r(A-2E) + r(A-E) = r(B-2E) + r(B-E)$$



$$= r \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 4$$

故应选(C).

【评注】 本题是考如 $A \sim B$, 则 $r(A) = r(B)$, 利用相似来处理矩阵的秩, 其中用到相似的性质: 如 $A \sim B$, 则 $A + kE \sim B + kE$.

5. **【答案】** 2.

【解析】 因为 A 有 3 个不同的特征值, A 必可相似对角化, 相似矩阵有相同的秩. 设 A 的三个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 由 $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 0$. 不妨设 $\lambda_1 = 0$, 则

$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

从而 $r(A) = r(\Lambda) = 2$.

6. **【答案】** A.

【解析】 本题考的是矩阵秩的概念和公式.

因为 $AB = E$ 是 m 阶单位矩阵, 知 $r(AB) = m$. 又因 $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$, 故

$$m \leq r(A), m \leq r(B) \quad ①$$

另一方面, A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 又有

$$r(A) \leq m, r(B) \leq m \quad ②$$

比较 ①、② 得 $r(A) = m, r(B) = m$. 所以选(A).

四、矩阵方程

试题特点

解矩阵方程时, 首先要根据矩阵的运算法则、性质把方程化简(特别要注意矩阵的乘法没有交换律), 化简之后有三种形式:

$$AX = B; XA = B; AXB = C$$

对于前两个方程, 若判断出 A 可逆, 则有

$$X = A^{-1}B; X = BA^{-1}$$

对于第三个方程, 若 A, B 均可逆, 则有 $X = A^{-1}CB^{-1}$, 那么, 再通过求逆等运算就可求出 X . 近十年未考矩阵方程, 以往的考题请练习.

7 (2015, 20 题, 11 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$, 且 $A^3 = O$.

(I) 求 a 的值;

(II) 若矩阵 X 满足 $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$, 其中 E 为三阶单位矩阵, 求 X .

【解】 (I) 因为 $A^3 = O \Rightarrow |A^3| = 0 \Rightarrow |A| = 0$,

$$\text{而 } |A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3,$$

$$\text{所以 } a = 0, \text{ 且知 } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(II) 由 $X(E - A^2) - AX(E - A^2) = E$,

$$\Rightarrow (E - A)X(E - A^2) = E$$

$E - A, E - A^2$ 必可逆, 于是

$$\begin{aligned} X &= (E - A)^{-1}(E - A^2)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

练习题

1. (1998, 数二, 5 分) 设 $(2E - C^{-1}B)A^T = C^{-1}$, 其中 E 是四阶单位矩阵, A^T 是四阶矩阵 A 的转

置矩阵, 且 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求矩阵 A .

2. (2001, 数二, 6 分) 已知矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

且矩阵 X 满足 $AXA + BXB = AXB + BXA + E$, 其中 E 是三阶单位矩阵, 求 X .

3. (2005, 数四, 4 分) 设 A, B, C 均为 n 阶矩阵, E 为 n 阶单位矩阵, 若 $B = E + AB, C = A + CA$, 则 $B - C =$

(A) E .

(B) $-E$.

(C) A .

(D) $-A$.

4. (2000, 数一, 6 分) 设矩阵 A 的伴随矩阵

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$, 其中 E 是四阶单位矩阵, 求矩阵 B .



练习题参考答案

1. 【解】 用矩阵 C 左乘已知矩阵方程的两端, 有 $(2C - B)A^T = E$. 对上式两端取转置, 有 $A(2C^T - B^T) = E$. 因为 A 是四阶方阵, 故

$$A = (2C^T - B^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. 【解】 化简矩阵方程, 有 $AX(A - B) + BX(B - A) = E$, 即

$$(A - B)X(A - B) = E$$

由于 $|A - B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, 所以矩阵 $A - B$ 可逆, 且 $(A - B)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

于是 $X = [(A - B)^{-1}]^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3. 【答案】 A.

【解析】 $B = E + AB \Rightarrow (E - A)B = E \Rightarrow B = (E - A)^{-1}$,

$$C = A + CA \Rightarrow C(E - A) = A \Rightarrow C = A(E - A)^{-1}$$

那么 $B - C = (E - A)^{-1} - A(E - A)^{-1} = (E - A)(E - A)^{-1} = E$.

故应选(A).

4. 【解】 由 $|A^*| = |A|^{n-1}$, 有 $|A|^3 = 8$, 得 $|A| = 2$. A 是可逆矩阵. 用 A 右乘矩阵方程的两端, 有

$$(A - E)B = 3A \quad ①$$

因为 $A^*A = AA^* = |A|E$, 用 A^* 左乘上式的两端, 并把 $|A| = 2$ 代入, 有

$$(2E - A^*)B = 6E \quad ②$$

于是

$$B = 6(2E - A^*)^{-1}$$

因为 $2E - A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}$, 则可求出 $(2E - A^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$.

因此

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



第三章 向量

本章导读

向量既是重点又是难点,由于向量的抽象性及逻辑推理上有较高的要求,同学们在复习时要迎难而上.

考研的重点首先是对线性相关、无关概念的理解与判断,要清晰选择、填空、证明各类题型的解题思路 and 技巧;其次,要把握线性表出问题的处理;第三,要理解向量组的极大线性无关组和向量组秩的概念,会推导和计算.

一、向量的线性表出

试题特点

向量 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出

$\Leftrightarrow$ 方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_s\alpha_s = \beta$ 有解

$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta)$

如果已知向量的坐标,那就通过判断方程组是否有解来回答向量能否线性表出的问题,不仅要会一个向量 β 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出,还要会分析、讨论一个向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出的问题.

如果向量 β 的坐标是未知的,那就要能用秩、概念以及相关的定理来推理、分析.

例 1 (2011, 20 题, 11 分) 设向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 3, 5)^T$ 不能由向量组 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T, \beta_2 = (1, 2, 3)^T, \beta_3 = (3, 4, a)^T$ 线性表示.

(I) 求 a 的值;

(II) 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

【解】 (I) 因为 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

那么 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 不能由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示 $\Leftrightarrow \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关. 即

$$|\beta_1, \beta_2, \beta_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a-3 \end{vmatrix} = a-5 = 0$$

所以 $a = 5$.

(II) 如果方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta_j (j = 1, 2, 3)$ 都有解, 即 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



表示. 因为现在的三个方程组系数矩阵是相同的, 故可拼在一起加减消元, 然后再独立地求解. 对 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 | \beta_1, \beta_2, \beta_3]$ 作初等行变换, 有

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 3 & 5 \end{array} \right] &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 2 & 1 & 5 \\ & 1 & & 4 & 2 & 10 \\ & & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

所以 $\beta_1 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3, \beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \beta_3 = 5\alpha_1 + 10\alpha_2 - 2\alpha_3$.

本题已给出向量坐标故用解方程组的方法来处理. 下面的练习题中, 有两个题有向量坐标就解方程, 还有两个没有向量坐标, 就用概念、秩、定理来分析推导.

【评注】 因为 4 个 3 维向量 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha$ 必线性相关, 所以若 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关, 那么 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 必可由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出, 与题设矛盾, 故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 一定相关, 亦可推出 $|\beta_1, \beta_2, \beta_3| = 0$.

难度系数数一 0.657, 数二 0.627, 数三 0.630.

2 (2013, 5 题, 4 分) 设 A, B, C 均为 n 阶矩阵, 若 $AB = C$, 且 B 可逆, 则

- (A) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价.
- (B) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价.
- (C) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价.
- (D) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价.

【答案】 B.

【解析】 对矩阵 A, C 分别按列分块, 记 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n], C = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n]$.

由 $AB = C$ 有

$$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n]$$

$$\text{又} \begin{cases} \gamma_1 = b_{11}\alpha_1 + b_{21}\alpha_2 + \cdots + b_{n1}\alpha_n, \\ \gamma_2 = b_{12}\alpha_1 + b_{22}\alpha_2 + \cdots + b_{n2}\alpha_n, \\ \vdots \\ \gamma_n = b_{1n}\alpha_1 + b_{2n}\alpha_2 + \cdots + b_{nn}\alpha_n, \end{cases}$$

即 C 的列向量组可以由 A 的列向量组线性表出.

因为 B 可逆, 有 $CB^{-1} = A$. 类似地, A 的列向量组也可由 C 的列向量组线性表出, 因此选 (B).

3 (2019, 20 题, 11 分) 已知向量组

$$\text{I: } \alpha_1 = (1, 1, 4)^T, \alpha_2 = (1, 0, 4)^T, \alpha_3 = (1, 2, a^2 + 3)^T$$

$$\text{II: } \beta_1 = (1, 1, a + 3)^T, \beta_2 = (0, 2, 1 - a)^T, \beta_3 = (1, 3, a^2 + 3)^T$$

若向量组 I 与 II 等价, 求 a 的取值, 并将 β_3 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

【解】 向量组 (I) 与 (II) 等价, 即两个方程组



$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]X = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]$$

$$[\beta_1, \beta_2, \beta_3]Y = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$$

同时有解,亦即

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = r(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

$$\begin{aligned} \text{由 } [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 | \beta_1, \beta_2, \beta_3] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & a^2+3 & a+3 & 1-a & a^2+3 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a-1 & 1-a & a^2-1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

当 $a \neq \pm 1$ 时

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 3$$

向量组(I)与(II)等价.

当 $a = 1$ 时

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = r(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 2$$

向量组(I)与(II)等价.

当 $a = -1$ 时

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2, r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = 3$$

向量组(I)与(II)不等价.

所以 $a \neq -1$ 时向量组(I)与(II)等价.

当 $a \neq \pm 1$ 时,对方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta_3$,有

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_3] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a^2-1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

方程组有唯一解 $(1, -1, 1)^T$, 故 $\beta_3 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$.

当 $a = 1$ 时,对方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta_3$,有

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_3] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

方程组通解: $x = (3, -2, 0)^T + k(-2, 1, 1)^T$, k 为任意常数.

故 $\beta_3 = (3-2k)\alpha_1 + (-2+k)\alpha_2 + k\alpha_3$, k 为任意常数.

练习题

1. (1998, 数二, 8分) 已知 $\alpha_1 = (1, 4, 0, 2)^T$, $\alpha_2 = (2, 7, 1, 3)^T$, $\alpha_3 = (0, 1, -1, a)^T$,

$\beta = (3, 10, b, 4)^T$, 问

(I) a, b 取何值时, β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出?

(II) a, b 取何值时, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出? 并写出此表示式.

2. (2003, 数四, 13分) 设有向量组(I): $\alpha_1 = (1, 0, 2)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, 3)^T$, $\alpha_3 = (1, -1, a+2)^T$

和向量组(II): $\beta_1 = (1, 2, a+3)^T$, $\beta_2 = (2, 1, a+6)^T$, $\beta_3 = (2, 1, a+4)^T$.

试问: 当 a 为何值时, 向量组(I)与(II)等价? 当 a 为何值时, 向量组(I)与(II)不等价?



3. (1998, 数四, 3 分) 若向量组 α, β, γ 线性无关; α, β, δ 线性相关, 则

- (A) α 必可由 β, γ, δ 线性表示. (B) β 必不可由 α, γ, δ 线性表示.
(C) δ 必可由 α, β, γ 线性表示. (D) δ 必不可由 α, β, γ 线性表示.

4. (1999, 数四, 3 分) 设向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 但不能由向量组 (I): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性表示, 记向量组 (II): $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, \beta$, 则

- (A) α_m 不能由 (I) 线性表示, 也不能由 (II) 线性表示.
(B) α_m 不能由 (I) 线性表示, 可由 (II) 线性表示.
(C) α_m 可由 (I) 线性表示, 也可由 (II) 线性表示.
(D) α_m 可由 (I) 线性表示, 但不可由 (II) 线性表示.

练习题参考答案

1. 【分析】 本题已知向量的坐标, 故应当用讨论带参数的非齐次线性方程组是否有解的方法来回答.

【解】 设 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$. 对 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta]$ 作初等行变换有

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{bmatrix}$$

所以

(I) 当 $b \neq 2$ 时, 线性方程组 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)x = \beta$ 无解, 此时 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

(II) 当 $b = 2, a \neq 1$ 时, 线性方程组 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)x = \beta$ 有唯一解, 即

$$x = (x_1, x_2, x_3)^T = (-1, 2, 0)^T$$

于是 β 可唯一表示为 $\beta = -\alpha_1 + 2\alpha_2$.

当 $b = 2, a = 1$ 时, 线性方程组 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)x = \beta$ 有无穷多个解. 即

$$x = (x_1, x_2, x_3)^T = k(-2, 1, 1)^T + (3, 0, -2)^T$$

于是 $\beta = (-2k+3)\alpha_1 + k\alpha_2 + (k-2)\alpha_3$ (k 为任意常数).

【评注】 常规的基础题, 方法, 思路应清晰, 计算不能出错, 讨论要谨慎.

2. 【分析】 所谓向量组 (I) 与 (II) 等价, 即向量组 (I) 与 (II) 可以互相线性表出. 若方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$ 有解, 即 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出. 若对同一个 a , 三个方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta_i$ ($i = 1, 2, 3$) 均有解, 即向量组 (II) 可以由 (I) 线性表出.

【解】 设 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta_i$ ($i = 1, 2, 3$), 由于这三个方程组的系数矩阵一样, 故可拼成一个大的增广矩阵统一的加减消元. 对 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 | \beta_1, \beta_2, \beta_3]$ 作初等行变换, 有

$$\begin{aligned} [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 | \beta_1, \beta_2, \beta_3] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & a+3 & a+6 & a+4 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & a+1 & a+2 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & a-1 & a+1 & a-1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(1) 当 $a \neq -1$ 时, 行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = a+1 \neq 0$, 由克拉默法则, 知三个线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta_i (i=1, 2, 3)$ 均有唯一解. 所以 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可由向量组 (I) 线性表出. 由于行列式

$$|\beta_1, \beta_2, \beta_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ a+3 & a+6 & a+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ a+3 & a+6 & -2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

故 $\forall a$, 方程组 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = \alpha_j (j=1, 2, 3)$ 恒有唯一解, 即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 总可由向量组 (II) 线性表出. 因此, 当 $a \neq -1$ 时, 向量组 (I) 与 (II) 等价.

(2) 当 $a = -1$ 时, 有

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 | \beta_1, \beta_2, \beta_3] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \end{array} \right]$$

由于秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1)$, 线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta_1$ 无解, 故向量 β_1 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出. 因此, 向量组 (I) 与 (II) 不等价.

3. 【答案】 C.

【解析】 由 α, β, γ 无关 $\Rightarrow \alpha, \beta$ 无关 $\Rightarrow \delta$ 可由 α, β 线性表出 $\Rightarrow \delta$ 可由 α, β, γ 线性表出. 或者用秩来分析推理:

α, β, γ 无关 $\Rightarrow r(\alpha, \beta, \gamma) = 3 \Rightarrow r(\alpha, \beta) = 2$,

α, β, δ 相关 $\Rightarrow r(\alpha, \beta, \delta) < 3$, 从而 $r(\alpha, \beta, \delta) = 2$, 那么

$$r(\alpha, \beta, \gamma) = r(\alpha, \beta, \delta, \gamma)$$

所以 δ 必可由 α, β, γ 线性表出.

4. 【答案】 B.

【解析】 因为 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 故可设

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m$$

由于 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ 线性表示, 故上述表达式中必有 $k_m \neq 0$. 因此

$$\alpha_m = \frac{1}{k_m}(\beta - k_1\alpha_1 - k_2\alpha_2 - \dots - k_{m-1}\alpha_{m-1})$$

即 α_m 可由 (II) 线性表示, 可排除 (A)(D).

若 α_m 可由 (I) 线性表示, 设 $\alpha_m = l_1\alpha_1 + \dots + l_{m-1}\alpha_{m-1}$, 则

$$\beta = (k_1 + k_m l_1)\alpha_1 + (k_2 + k_m l_2)\alpha_2 + \dots + (k_{m-1} + k_m l_{m-1})\alpha_{m-1}$$

与题设矛盾, 故应选 (B).

【评注】 本题能否用秩来分析、推导?

提示: $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta)$,

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}) + 1 = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, \beta).$$



二、向量组的线性相关和线性无关

试题特点

线性相关是难点之一,也是历年考生在考试时丢分最多的一个考点.

如存在不全为 0 的数组 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$ 成立, 则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关.

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \text{ 线性相关} \Leftrightarrow \text{齐次方程组} [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = 0 \text{ 有非零解}$$

$$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < s$$

若使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$ 成立, 必有 $k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_s = 0$, 则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \text{ 线性无关} \Leftrightarrow \text{齐次方程组} [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = 0 \text{ 只有零解}$$

$$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s.$$

证无关, 若用定义法就是设法证 $k_1 = 0, \dots, k_s = 0$; 若用秩, 就是设法证 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s$ (这里就是要通过用矩阵秩的定理、公式转换推导出向量组秩的信息).

4 (2010, 5 题, 4 分) 设向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由向量组 II: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示. 下列命题正确的是

(A) 若向量组 I 线性无关, 则 $r \leq s$.

(B) 若向量组 I 线性相关, 则 $r > s$.

(C) 若向量组 II 线性无关, 则 $r \leq s$.

(D) 若向量组 II 线性相关, 则 $r > s$.

【答案】 A.

【解析】 本题在考查线性表示与线性相关之间的联系.

因为 I 可由 II 线性表示, 故 $r(I) \leq r(II)$.

若 I 无关, 则 $r(I) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) = r$, 显然 $r(II) = r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) \leq s$.

因此, I 无关, $r \leq s$ 正确. 故应选(A).

【评注】 本题难度系数 0.492. 相关、无关、秩是难点, 这类试题一般考得都不完美, 希望复习时对这类的基本概念、基本理论要重视, 认真学习举反例是有好处的.

例如 $\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (2, 0, 0), \beta_1 = (1, 0, 0), \beta_2 = (0, 1, 0), \beta_3 = (0, 0, 1)$ 可知(B) 不正确.

若 $\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (2, 0, 0), \alpha_3 = (3, 0, 0), \beta_1 = (1, 0, 0), \beta_2 = (0, 1, 0)$ 可知(C) 不正确.

若 $\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (2, 0, 0), \beta_1 = (1, 0, 0), \beta_2 = (0, 1, 0), \beta_3 = (0, 0, 0)$ 可知(D) 不正确.

5 (2012, 5 题, 4 分) 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$, 其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任

意常数, 则下列向量组线性相关的为

- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$. (C) $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$. (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

【答案】 C.

【解析】 n 个 n 维向量相关 $\Leftrightarrow |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = 0$, 显然

$$|\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = 0$$

所以 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 必线性相关.

6 (2014, 6 题, 4 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维向量, 则对任意常数 k, l , 向量组 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的

- (A) 必要非充分条件. (B) 充分非必要条件.
(C) 充分必要条件. (D) 既非充分也非必要条件.

【答案】 A.

【解析】 记 $\beta_1 = \alpha_1 + k\alpha_3, \beta_2 = \alpha_2 + l\alpha_3$. 则

$$[\beta_1, \beta_2] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{bmatrix}$$

若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 是三阶可逆矩阵, 故 $r(\beta_1, \beta_2) = r \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{bmatrix} = 2$, 即 $\alpha_1 +$

$k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关.

反之, 设 α_1, α_2 线性无关, $\alpha_3 = 0$, 则对任意常数 k, l 必有 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关, 但 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

所以 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的必要而非充分条件.

7 (2018, 13 题, 4 分) 设 A 为三阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性无关的向量组, 若 $A\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2, A\alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_3$, 则 $|A| =$ _____.

【答案】 2.

【解析】 $A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

记 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, 可逆, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $AP = PB \Rightarrow P^{-1}AP = B$ 即 $A \sim B$.

$$|A| = |B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

故应填 2.



这里的选择题、证明题能独立完成吗?思路 and 技巧应该是什么?

练习题

1. (2004, 数一, 4 分) 设 A, B 为满足 $AB = O$ 的任意两个非零矩阵, 则必有

- (A) A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.
- (B) A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.
- (C) A 的行向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.
- (D) A 的行向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.

2. (2003, 数一, 4 分) 设向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由向量组 II: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 则

- (A) 当 $r < s$ 时, 向量组 II 必线性相关.
- (B) 当 $r > s$ 时, 向量组 II 必线性相关.
- (C) 当 $r < s$ 时, 向量组 I 必线性相关.
- (D) 当 $r > s$ 时, 向量组 I 必线性相关.

3. (2001, 数四, 8 分) 设 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})^T (i = 1, 2, \dots, r; r < n)$ 是 n 维实向量, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关. 已知 $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ 是线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

的非零解向量. 试判断向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$ 的线性相关性.

练习题参考答案

1. 【答案】 A.

【解析】 (方法一) 设 A 是 $m \times n$, B 是 $n \times s$ 矩阵, 且 $AB = O$ 那么 $r(A) + r(B) \leq n$. 由于 A, B 均非零矩阵, 故 $0 < r(A) < n, 0 < r(B) < n$.

由 $r(A) = A$ 的列秩, 知 A 的列向量组线性相关.

由 $r(B) = B$ 的行秩, 知 B 的行向量组线性相关. 故应选(A).

(方法二) 若设 $A = (1, 0), B = (0, 1)^T$, 显然 $AB = O$. 但矩阵 A 的列向量组线性相关, 行向量组线性无关; 矩阵 B 的行向量组线性相关, 列向量组线性无关. 由此可知选项(A) 正确.

2. 【答案】 D.

【解析】 根据定理“若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, 且 $s > t$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 必线性相关”, 即若多数向量可以由少数向量线性表出, 则这多数向量必线性相关, 故应立选(D).

或者, 因(I) 能由(II) 表出 $\Rightarrow r(I) \leq r(II)$,

又因 $r(II) \leq s$, 所以 $r(I) \leq s < r$. 故应选(D).

【评注】 建议你举几个例子说明(A)(B)(C) 均不正确. 另外, 向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 5\alpha_3$ 的线性相关性你能立即作答吗? 为什么?

3. 【解】 设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r + l\beta = 0$,

因为 β 为方程组的非零解, 有

(1)



$$\begin{cases} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1n}b_n = 0, \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \cdots + a_{2n}b_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{r1}b_1 + a_{r2}b_2 + \cdots + a_{rn}b_n = 0 \end{cases}$$

即 $\beta \neq 0, \beta^T \alpha_1 = 0, \dots, \beta^T \alpha_r = 0$.

用 β^T 左乘(1), 并把 $\beta^T \alpha_i = 0$ 代入, 得 $l\beta^T \beta = 0$.

因为 $\beta \neq 0$, 有 $\beta^T \beta > 0$, 故必有 $l = 0$.

从而(1)式为 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \cdots + k_r \alpha_r = 0$, 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关, 所以有

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0$$

因此向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$ 线性无关.

【评注】 由于不清楚 β 是齐次方程组的解, 即 $\beta^T \alpha_i = 0$. 许多考生没想到本题应当用 β^T 左乘(1)式.

三、向量组的极大线性无关组与秩

试题特点

向量组的极大线性无关组或向量组秩的考题虽不多, 但是齐次方程组的基础解系实际上就是解向量的极大线性无关组, 这在方程组求解和求特征向量时是回避不了的, 所以复习时这里的概念、计算、证明仍然要认真对待.

8 (2017, 13题, 4分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性无关的3维列向量组, 则向量组

$A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ 的秩为_____.

【答案】 2.

【解析】 因 $[A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3] = A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, 又 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三维线性无关列向量, 所以 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 为三阶可逆矩阵.

故 $r(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = r(A) = 2$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

练习题

(2000, 数二, 7分) 已知向量组

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

与向量组

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}$$



具有相同的秩,且 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示,求 a, b 的值.

练习题参考答案

【解】 因 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示,故线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

有解. 对增广矩阵施行初等行变换:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 9 & b \\ 2 & 0 & 6 & 1 \\ -3 & 1 & -7 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 9 & b \\ 0 & -6 & -12 & 1-2b \\ 0 & 10 & 20 & 3b \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 9 & b \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2b-1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3b}{10} - \frac{2b-1}{6} \end{array} \right]$$

由非齐次线性方程组有解的条件知 $\frac{3b}{10} - \frac{2b-1}{6} = 0$ 得 $b = 5$.

又 α_1 和 α_2 线性无关, $\alpha_3 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$, 所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩为 2.

由题设知向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的秩也是 2, 从而 $\begin{vmatrix} 0 & a & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, 解得 $a = 15$.

心得笔记:

(ID: djky66)

顶尖考研公众号
(ID: djky66)



第四章 线性方程组

本章导读

线性方程组是否有解?若有解,那么一共有多少个解?有解时怎样求出其所有的解?如何求齐次方程组的基础解系?

当给出具体的方程组时,如何加减消元化简(注意只用行变换)?如何求出所有的解(可能还涉及对一些参数的讨论)?

没有具体的方程组时,如何利用解的结构(注意对矩阵秩的推断)分析、推导出通解?

面对两个方程组,如何处理公共解或同解问题?

这一切都是大家在复习方程组时要认真面对的,方程组历年来都是考试的重点,比重大、分值高、解答题多,一定要好好复习.

微信公众号【顶尖考研】

(ID: djky66)

试题特点

考查的主要定理是:

(1) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵,齐次方程组 $Ax = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow$ 秩 $r(A) < n$;

(2) 齐次方程组 $Ax = 0$ 如有非零解,则必有无穷多解,而线性无关的解向量个数为 $n - r(A)$.

求基础解系是重点.

$n - r(A)$ 既表示 $Ax = 0$ 线性无关解向量的个数,也表示方程组中自由变量的个数,如何确定自由变量?如何给自由变量赋值并求解,是这的基本功.

不论是 $Ax = 0$ 还是 $Ax = b$ 都要涉及求 $Ax = 0$ 的基础解系,这里的计算一定要过关(正确、熟练).

线性无关的证明题另一种出题方法就是证基础解系.

下面的考题既涉及如何加减消元求基础解系,也涉及如何判断矩阵的秩和基础解系的证明.

1 (2019, 5 题, 4 分) 设 A 是四阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵,若线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系中只有 2 个向量,则 $r(A^*) =$

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

【答案】 A.

【解析】 由 $n - r(A) = 4 - r(A) = 2$,



$$\text{知 } r(A) = 2, \text{ 再由 } r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n, \\ 1, & r(A) = n-1, \\ 0, & r(A) < n-1, \end{cases}$$

所以 $r(A^*) = 0$, 选(A).

2 (2020, 5 题, 4 分) 设四阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 不可逆, a_{12} 的代数余子式 $A_{12} \neq 0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为矩阵 A 的列向量组, A^* 为 A 的伴随矩阵, 则方程组 $A^*x = 0$ 的通解为

(A) $x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$, 其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数.

(B) $x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_4$, 其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数.

(C) $x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_3 + k_3\alpha_4$, 其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数.

(D) $x = k_1\alpha_2 + k_2\alpha_3 + k_3\alpha_4$, 其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数.

【答案】 C.

【解析】 选择题的 4 个选项, 已经告诉你 $A^*x = 0$ 的基础解系由 A 的 3 个列向量所构成. 因此只要判断 A 的哪 3 个列向量是线性无关的. 而条件就是 $A_{12} \neq 0$.

因

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \neq 0$$

意味 $(a_{21}, a_{31}, a_{41})^T, (a_{23}, a_{33}, a_{43})^T, (a_{24}, a_{34}, a_{44})^T$ 线性无关, 那么必有 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关 (低维线性无关向量增加坐标而得到的高维向量必线性无关). 故应选(C).

【评注】 如果是解答题, 你应当如何处理?

练习题

1. (2004, 数一, 9 分) 设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1 & + x_2 & + \cdots + x_n = 0, \\ 2x_1 + (2+a)x_2 & + \cdots + 2x_n = 0, \\ & \vdots \\ nx_1 & + nx_2 + \cdots + (n+a)x_n = 0. \end{cases} \quad (n \geq 2)$$

试问 a 为何值时, 该方程组有非零解? 并求其通解.

2. (2011, 数一、数二, 4 分) 设 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$ 是四阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵. 若 $(1, 0, 1, 0)^T$ 是方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 则 $A^*x = 0$ 的基础解系可为

(A) α_1, α_3 .

(B) α_1, α_2 .

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

(D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

3. (2001, 数一, 6 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 为线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系:

$$\beta_1 = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2, \beta_2 = t_1\alpha_2 + t_2\alpha_3, \dots, \beta_s = t_1\alpha_s + t_2\alpha_1$$

其中 t_1, t_2 为实常数. 试问 t_1, t_2 满足什么关系时, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 也为 $Ax = 0$ 的一个基础解系?

4. (2005, 数一、数二, 9 分) 已知三阶矩阵 A 的第 1 行是 (a, b, c) , a, b, c , 不全为零, 矩阵

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{bmatrix} \quad (k \text{ 为常数})$$

且 $AB = O$, 求线性方程组 $Ax = 0$ 的通解.



练习题参考答案

1.【分析】 确定参数,使包含 n 个未知量和 n 个方程的齐次线性方程组有非零解,通常用两个方法:一是对其系数矩阵作初等行变换化成阶梯形;再就是令其系数行列式为零求出参数值. 本题的关键是参数 a 有两个值,对每个值都要讨论.

【解】 设齐次方程组的系数矩阵为 A , 则

$$|A| = \left(a + \frac{1}{2}(n+1)n\right)a^{n-1}$$

那么, $Ax = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ 或 $a = -\frac{1}{2}(n+1)n$.

当 $a = 0$ 时,对系数矩阵 A 作初等变换,有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

故方程组的同解方程组为 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$, 由此得基础解系为

$$\eta_1 = (-1, 1, 0, \cdots, 0)^T, \eta_2 = (-1, 0, 1, \cdots, 0)^T, \cdots, \eta_{n-1} = (-1, 0, 0, \cdots, 1)^T$$

于是方程组的通解为 $x = k_1\eta_1 + \cdots + k_{n-1}\eta_{n-1}$, 其中 $k_1, \cdots, k_{n-1}$ 为任意常数.

当 $a = -\frac{1}{2}(n+1)n$ 时,对系数矩阵作初等行变换,把 n 行的 -1 倍分别加至每一行,有

$$A = \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2a & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -na & 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

故方程组的同解方程组为 $\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0, \\ -3x_1 + x_3 = 0, \\ \cdots \cdots \\ -nx_1 + x_n = 0. \end{cases}$ 由此得基础解系为 $\eta = (1, 2, \cdots, n)^T$, 于是方程组

的通解为 $x = k\eta$, 其中 k 为任意常数.

【评注】 本题也可直接对系数矩阵 A 作初等行变换,化其为爪形

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2a & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -na & 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}$$

然后按 $a = 0$ 或 $a \neq 0$ 继续加减消元来求解,不必求 $|A|$ 的值.



2.【答案】 D.

【解析】 本题没有给出具体的方程组,因而求解应当由解的结构、由秩开始.

因为 $Ax = 0$ 只有 1 个线性无关的解,即 $n - r(A) = 1$,从而 $r(A) = 3$. 那么 $r(A^*) = 1 \Rightarrow n - r(A^*) = 4 - 1 = 3$. 故 $A^*x = 0$ 的基础解系中有 3 个线性无关的解,可见选项(A)(B) 均错误.

再由 $A^*A = |A|E$, 及 $|A| = 0$, 有 $A^*A = O$, 知 A 的列向量全是 $A^*x = 0$ 的解, 而秩 $r(A) = 3$, 故 A 的列向量中必有 3 个线性无关.

$$\text{最后,按 } A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \text{ 即 } [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \text{ 即 } \alpha_1 + \alpha_3 = 0,$$

说明 α_1, α_3 相关 $\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 相关. 从而应选(D).

【评注】 不要忘记

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & \text{若 } r(A) = n \\ 1, & \text{若 } r(A) = n - 1 \\ 0, & \text{若 } r(A) < n - 1 \end{cases}$$

当没有具体的方程组时,一定要有用解的结构,用秩来分析、推导的构思.

本题难度系数 0.407.

3.【分析】 如果 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系,则表明

(1) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 是 $Ax = 0$ 的解;

(2) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性无关;

(3) $s = n - r(A)$ 或 $\beta_1, \dots, \beta_s$ 可表示 $Ax = 0$ 的任一个解.

那么要证 $\beta_1, \dots, \beta_s$ 是基础解系,也应当证这三点. 本题中(1)(3) 是容易证明的,关键是(2). 线性相关性的证明在考研中是常见的.

【解】 由于 $\beta_i (i = 1, 2, \dots, s)$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性组合,又 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 是 $Ax = 0$ 的解,所以根据齐次方程组解的性质知 $\beta_i (i = 1, 2, \dots, s)$ 均为 $Ax = 0$ 的解.

从 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系,知 $s = n - r(A)$.

下面来分析 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性无关的条件. 设 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_s\beta_s = 0$,

即 $(t_1k_1 + t_2k_s)\alpha_1 + (t_2k_1 + t_1k_2)\alpha_2 + (t_2k_2 + t_1k_3)\alpha_3 + \dots + (t_2k_{s-1} + t_1k_s)\alpha_s = 0$.

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关,因此有

$$\begin{cases} t_1k_1 + t_2k_s = 0, \\ t_2k_1 + t_1k_2 = 0, \\ t_2k_2 + t_1k_3 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ t_2k_{s-1} + t_1k_s = 0 \end{cases} \quad (*)$$

因为系数行列式



$$\begin{vmatrix} t_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t_2 \\ t_2 & t_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & t_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_2 & t_1 \end{vmatrix} = t_1^s + (-1)^{s+1} t_2^s$$

所以当 $t_1^s + (-1)^{s+1} t_2^s \neq 0$ 时, 方程组 (*) 只有零解 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$. 从而 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性无关. 即当 s 为偶数时, $t_1 \neq \pm t_2$, 而当 s 为奇数, $t_1 \neq -t_2$ 时, $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 也为 $Ax = 0$ 的一个基础解系.

【评注】 本题考查基础解系的概念及线性无关的证明, 还涉及 s 阶行列式的计算. 由于有些考生概念不清, 不知要证什么, 有的不会证线性无关, 还有同学在把 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关转化为齐次方程组 (*) 时, 方程写得过于少, 例如系数行列式成为

$$\begin{vmatrix} t_1 & 0 & \cdots & t_2 \\ t_2 & t_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_1 \end{vmatrix}$$

结果对行列式的结构规律没有观察清楚, 造成行列式计算上的失误. 本题人均得分不足 2.3 分.

行列式中已有大量的 0, 直接展开就可得到行列式的值, 那么本题是按第 1 行展开好呢, 还是按第 1 列展开好?

4. 【分析】 本题没有完整的矩阵 A , 因此求方程组 $Ax = 0$ 的解不是用加减消元来实现, 而应当利用解的结构要由秩入手, 另外对 $AB = O$ 要意识到 B 的每一列都是齐次方程组 $Ax = 0$ 的解.

【解】 由 $AB = O$ 知 $r(A) + r(B) \leq 3$, 又 $A \neq O, B \neq O$, 故 $1 \leq r(A) \leq 2, 1 \leq r(B) \leq 2$.

(1) 如果 $k \neq 9$, 必有 $r(B) = 2$. 此时 $r(A) = 1$. 由于 $n - r(A) = 3 - 1 = 2$, 又因 $AB = O$ 知 B 的列向量是 $Ax = 0$ 的解. 故 $Ax = 0$ 的通解为: $x = k_1(1, 2, 3)^T + k_2(3, 6, k)^T$, k_1, k_2 为任意常数.

(2) 如果 $k = 9$, 则 $r(B) = 1$. 此时 $r(A) = 1$ 或 2.

1° 若 $r(A) = 2$, 则 $n - r(A) = 1$. $Ax = 0$ 的通解为 $x = k(1, 2, 3)^T$, k 为任意常数;

2° 若 $r(A) = 1$, 则 $Ax = 0$ 与 $ax + by + cz = 0$ 同解.

由 $n - r(A) = 2$. 不妨设 $a \neq 0$, 那么 $Ax = 0$ 的通解为

$$x = k_1(-b, a, 0)^T + k_2(-c, 0, a)^T, k_1, k_2 \text{ 为任意常数}$$

【评注】 本题难度系数 0.303, 有的考生不知道 $AB = O$ 时, B 的每一列都是齐次方程组 $Ax = 0$ 的解, 多数考生分析、讨论不严谨.



二、非齐次方程组的求解

试题特点

记住解的结构

$$\alpha + k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2 + \cdots + k_{n-r} \eta_{n-r}$$

其中 α 是 $Ax = b$ 的特解, $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-r}$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系.

往届考生在加减消元时计算错误较多(一定要多动手认真做);讨论参数时不能丢三落四,要严谨.

求 A 的秩、求特解、求基础解系、讨论参数是复习时要注意的知识点.

3 (2009, 20 题, 11 分) 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}, \xi_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(I) 求满足 $A\xi_2 = \xi_1, A^2\xi_3 = \xi_1$ 的所有向量 ξ_2, ξ_3 ;

(II) 对(I)中的任意向量 ξ_2, ξ_3 , 证明 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.

【分析】 本题的第(I)问, 实际是求方程组 $Ax = \xi_1$ 和 $A^2x = \xi_1$ 的解, 而且要求把通解写成向量的形式.

【解】 (I) 对增广矩阵 $(A | \xi_1)$ 作初等行变换:

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

得到方程组 $Ax = \xi_1$ 的通解为 $(0, 0, 1)^T + k(-1, 1, -2)^T$, 从而 $\xi_2 = (-k, k, 1-2k)^T$, k 是任意常数.

由于 $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, 对 $A^2x = \xi_1$, 由增广矩阵作初等行变换, 有

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & -2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

得方程组通解 $x_1 = -\frac{1}{2} - u, x_2 = u, x_3 = v$, 即 $\xi_3 = \left(-\frac{1}{2} - u, u, v\right)^T$, 其中 u, v 为任意常数.

(II) 因为行列式

$$|\xi_1, \xi_2, \xi_3| = \begin{vmatrix} -1 & -k & -\frac{1}{2} - u \\ 1 & k & u \\ -2 & 1-2k & v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & k & u \\ -2 & 1-2k & v \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0,$$

所以对任意的 k, u, v , 恒有 $|\xi_1, \xi_2, \xi_3| \neq 0$, 即对任意的 ξ_2, ξ_3 , 恒有 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.



【评注】 本题若能发现 $A\xi_1 = 0$, 那么 (II) 也可用定义法来处理:

(II) 证法 2 由题设可得 $A\xi_1 = 0$. 设存在数 k_1, k_2, k_3 , 使得

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3 = 0 \quad ①$$

等式两端左乘 A , 得

$$k_2A\xi_2 + k_3A\xi_3 = 0$$

$$\text{即} \quad k_2\xi_1 + k_3A\xi_3 = 0 \quad ②$$

等式两端再左乘 A , 得

$$k_3A^2\xi_3 = 0$$

$$\text{即} \quad k_3\xi_1 = 0, \text{ 又 } \xi_1 \neq 0$$

于是 $k_3 = 0$ 代入 ② 式, 得 $k_2\xi_1 = 0$, 故 $k_2 = 0$. 将 $k_2 = k_3 = 0$ 代入 ① 式, 可得 $k_1 = 0$, 从而 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.

本题难度系数数一 0.356, 数二 0.366, 数三 0.378, 是不是复习出问题了?

4 (2010, 20 题, 11 分) 设 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. 已知线性方程组 $Ax = b$ 存在 2 个不同的解,

(I) 求 λ, a ;

(II) 求方程组 $Ax = b$ 的通解.

【解】 (I) 因为方程组 $Ax = b$ 有 2 个不同的解, 所以 $r(A) = r(\bar{A}) < 3$, 故

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 = 0$$

知 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -1$.

当 $\lambda = 1$ 时,

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

显然 $r(A) = 1, r(\bar{A}) = 2$, 此时方程组无解, $\lambda = 1$ 舍去.

当 $\lambda = -1$ 时, 对 $Ax = b$ 的增广矩阵施以初等行变换:

$$(A, b) = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{array} \right]$$

因为 $Ax = b$ 有解, 所以 $a = -2$.

(II) 当 $\lambda = -1, a = -2$ 时,

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



$$\bar{A} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

所以 $Ax = b$ 的通解为

$$x = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 其中 } k \text{ 为任意常数}$$

【评注】 本题难度系数数一 0.662, 数二 0.592, 数三 0.627.

5 (2011, 6 题, 4 分) 设 A 为 4×3 矩阵, η_1, η_2, η_3 是非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的 3 个线性无关的解, k_1, k_2 为任意常数, 则 $Ax = \beta$ 的通解为

(A) $\frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1).$

(B) $\frac{\eta_2 - \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1).$

(C) $\frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1).$

(D) $\frac{\eta_2 - \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1).$

【答案】 C.

【解析】 因为 η_1, η_2, η_3 是 $Ax = \beta$ 的 3 个线性无关的解, 那么 $\eta_2 - \eta_1, \eta_3 - \eta_1$ 是 $Ax = 0$ 的 2 个线性无关的解.

从而 $n - r(A) \geq 2$, 即 $3 - r(A) \geq 2 \Rightarrow r(A) \leq 1$.

显然 $r(A) \geq 1$. 因此秩 $r(A) = 1$.

由于 $n - r(A) = 3 - 1 = 2$ 知 (A)(B) 均不正确.

又 $A \frac{\eta_2 + \eta_3}{2} = \frac{1}{2} A\eta_2 + \frac{1}{2} A\eta_3 = \beta$, 故 $\frac{1}{2}(\eta_2 + \eta_3)$ 是方程组 $Ax = \beta$ 的解, 所以应选 (C).

【评注】 注意: $\frac{1}{2}(\eta_2 - \eta_3)$ 是齐次方程组 $Ax = 0$ 的解, 本题难度系数 0.649.

6 (2012, 20 题, 11 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$

(I) 计算行列式 $|A|$;

(II) 当实数 a 为何值时, 方程组 $Ax = \beta$ 有无穷多解? 并求其通解.

【解】 (I) 按第一列展开,

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 1 - a^4$$

(II) 当 $|A| = 0$ 时, 方程组 $Ax = \beta$ 有可能有无穷多解, 由 (I) 知 $a = 1$ 或 -1 .

(1) 如果 $a = 1$,

$$(A|\beta) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right]$$

$r(A) \neq r(A|\beta)$, 故方程组 $Ax = \beta$ 无解, 舍去.

(2) 当 $a = -1$ 时,

$$(A|\beta) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

于是 $r(A) = r(A|\beta) = 3 < 4$. 故方程组 $Ax = \beta$ 有无穷多解, 取 x_4 为自由变量, 得方程组通解为

$$x = (0, -1, 0, 0)^T + k(1, 1, 1, 1)^T, k \text{ 为任意常数}$$

难度系数 0.654, 0.620, 0.628.

7 (2013, 20 题, 11 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$, 当 a, b 为何值时, 存在矩阵 C 使得 $AC - CA = B$? 并求所有矩阵 C .

【解】 设 $C = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$. 那么 $AC - CA = B$, 则

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 + ax_3 & x_2 + ax_4 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & ax_1 \\ x_3 + x_4 & ax_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$$

$$\text{即得方程组} \begin{cases} -x_2 + ax_3 = 0, \\ -ax_1 + x_2 + ax_4 = 1, \\ x_1 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_2 - ax_3 = b. \end{cases}$$

对增广矩阵作初等行变换, 有

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{array} \right]$$

当 $a \neq -1$ 或 $b \neq 0$ 时, 方程组无解.

当 $a = -1$, 且 $b = 0$ 时, 方程组有解. 此时有在矩阵 C 满足 $AC - CA = B$.

由于方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, k_1, k_2 \text{ 为任意实数}$$

故当且仅当 $a = -1, b = 0$ 时, 存在矩阵

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



$$C = \begin{bmatrix} 1+k_1+k_2 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

满足 $AC - CA = B$, 其中 k_1, k_2 为任意实数.

【评注】 这是当年考得比较差的一道题, 难度系数 0.368, 0.389, 0.460, 计算上失误的情况非常严重, 希望大家复习时要重视基本计算.

8 (2014, 20 题, 11 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, E 为三阶单位矩阵.

(I) 求方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系;

(II) 求满足 $AB = E$ 的所有矩阵 B .

【分析】 (I) 是基础题, 化为行最简即可.

关于 (II) 中矩阵 B , 其实就是 $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 三个方程组的求解问题.

【解】 (I) 对矩阵 A 作初等行变换, 得

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

因 $n - r(A) = 4 - 3 = 1$, 令 $x_4 = 1$ 求出 $x_3 = 3, x_2 = 2, x_1 = -1$,

故基础解系为 $\eta = (-1, 2, 3, 1)^T$.

(II) $AB = E$ 中 B 的列向量其实是三个非齐次线性方程组

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

的解. 由于这三个方程组的系数矩阵是相同的, 所以令 $\bar{A} = (A | E)$ 作初等行变换:

$$\begin{aligned} \bar{A} = (A | E) &= \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 5 & 4 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

由此得三个方程组的通解:

$(2, -1, -1, 0)^T + k_1 \eta, k_1$ 为任意常数

$(6, -3, -4, 0)^T + k_2 \eta, k_2$ 为任意常数

$(-1, 1, 1, 0)^T + k_3 \eta, k_3$ 为任意常数

故所求矩阵为 $B = \begin{bmatrix} 2-k_1 & 6-k_2 & -1-k_3 \\ -1+2k_1 & -3+2k_2 & 1+2k_3 \\ -1+3k_1 & -4+3k_2 & 1+3k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$, k_1, k_2, k_3 为任意常数.

【评注】 本题难度系数 0.445, 0.416, 0.436.

9 (2015, 5 题, 4 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{bmatrix}$, 若集合 $\Omega = \{1, 2\}$, 则线性方程组

$Ax = b$ 有无穷多解的充分必要条件为

- (A) $a \notin \Omega, d \notin \Omega$. (B) $a \notin \Omega, d \in \Omega$. (C) $a \in \Omega, d \notin \Omega$. (D) $a \in \Omega, d \in \Omega$.

【答案】 D.

【解析】 $Ax = b$ 有无穷解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) < n$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & d \\ 1 & 4 & a^2 & d^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & d-1 \\ 0 & 3 & a^2-1 & d^2-1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & d-1 \\ 0 & 0 & a^2-3a+2 & d^2-3d+2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2-3a+2=0, \\ d^2-3d+2=0, \end{cases} \Leftrightarrow a \in \Omega, d \in \Omega$$

或 $Ax = b$ 有无穷解的必要条件 $|A| = 0$.

$$\text{由 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{vmatrix} = (a-1)(a-2) = 0, a = 1 \text{ 或 } 2.$$

再分情况判断 $Ax = b$ 是否有无穷解. 亦有(D).

10 (2016, 20 题, 11 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a-2 \end{bmatrix}$, 且方程组 $Ax = \beta$ 无解.

(I) 求 a 的值;

(II) 求方程组 $A^T Ax = A^T \beta$ 的通解.

【解】 (I) 对 $(A: \beta)$ 作初等行变换, 有

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1-a & 0 \\ 1 & 0 & a & 1 \\ a+1 & 1 & a+1 & 2a-2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1-a & 0 \\ 0 & -1 & 2a-1 & 1 \\ 0 & -a & a(a+1) & 2a-2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1 & 1-2a & -1 \\ 0 & 0 & a(2-a) & a-2 \end{bmatrix}$$

因方程组无解, 所以 $r(A) < r(A, \beta)$ 即 $a(2-a) = 0$, 且 $a-2 \neq 0$, 故 $a = 0$.

(II) 对 $A^T Ax = A^T \beta$, 因为

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^T \beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$



对 $(A^T A : A^T \beta)$ 作初等行变换有

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

得方程组 $A^T A x = A^T \beta$ 的通解为:

$$x = (1, -2, 0)^T + k(0, -1, 1)^T, k \text{ 为任意常数}$$

【评注】 方程组 $Ax = \beta$ 无解的必要条件: $|A| = 0$.

$$\text{由 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a & 0 & 2a \end{vmatrix} = a^2 - 2a = 0,$$

然后代入判断可知 $a = 0$ 时方程组无解.

难度系数二 0.548, 数三 0.590.

11 (2017, 20 题, 11 分) 设三阶矩阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 有 3 个不同的特征值, 且 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$.

(I) 证明 $r(A) = 2$;

(II) 若 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 求方程组 $Ax = \beta$ 的通解.

【解】 (I) 由 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$ 知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 故 $|A| = 0, \lambda = 0$ 是 A 的特征值. 又 A 有 3 个不同的特征值, 设为 $\lambda_1, \lambda_2, 0$ (其中 λ_1, λ_2 不为 0),

那么 $A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$, 所以 $r(A) = r(\Lambda) = 2$.

(II) 由 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$ 有 $\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0$, 那么

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

即 $(1, 2, -1)^T$ 是 $Ax = 0$ 的解.

$$\text{又 } A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta$$

即 $(1, 1, 1)^T$ 是 $Ax = \beta$ 的解.

由 $r(A) = 2$, 按解的结构知 $Ax = \beta$ 的通解为 $x = (1, 1, 1)^T + k(1, 2, -1)^T, k$ 为任意常数.

【评注】 本题难度系数 0.536, 0.422, 0.445.

12 (2018, 21 题, 11 分) 已知 a 是常数, 且矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{bmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵

$$B = \begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(I) 求 a ;



(II) 求满足 $AP = B$ 的可逆矩阵 P .

【解】 (I) 矩阵 A 经列变换得矩阵 B , 即 A 和 B 等价, 矩阵 A 和 B 等价 $\Leftrightarrow r(A) = r(B)$.

$$\text{由 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 0, \forall a, \text{ 恒有 } r(A) = 2.$$

$$\text{又 } |B| = \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - a, B \text{ 中有二阶子式 } \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$r(B) = 2 \Leftrightarrow |B| = 0 \Leftrightarrow a = 2, \text{ 所以 } a = 2.$$

(II) 满足 $AP = B$ 的 P 就是 $AX = B$ 的解.

$$[A : B] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

解方程组, 得

$$A \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0, A \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, A \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{故 } AX = B \text{ 的解为 } X = \begin{bmatrix} 3-6k_1 & 4-6k_2 & 4-6k_3 \\ -1+2k_1 & -1+2k_2 & -1+2k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}, \text{ 其中 } k_1, k_2, k_3 \text{ 为任意常数}$$

$$\text{由 } |X| = \begin{vmatrix} 3-6k_1 & 4-6k_2 & 4-6k_3 \\ -1+2k_1 & -1+2k_2 & -1+2k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix} = k_3 - k_2 \neq 0.$$

所以满足 $AP = B$ 的所有可逆矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 3-6k_1 & 4-6k_2 & 4-6k_3 \\ -1+2k_1 & -1+2k_2 & -1+2k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}, \text{ 其中 } k_2 \neq k_3$$

【评注】 本题难度系数 0.463, 0.397, 0.450.

13 (2019, 13 题, 4 分) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a^2 - 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}$, 若线性方程组 $Ax = b$ 有无穷

多解, 则 $a =$ _____.

【答案】 1.

【解析】 方程组 $Ax = b$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) < n$.

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a^2 - 1 & a \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^2 - 1 & a - 1 \end{array} \right]$$

可见 $a = 1$ 时 $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 3$.

所以 $a = 1$.



练习题

1. (2000, 数一, 3 分) 已知方程组 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ 无解, 则 $a =$ _____.

2. (1997, 数四, 3 分) 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 中未知量个数为 n , 方程个数为 m , 系数矩阵 A 的秩为 r , 则

(A) $r = m$ 时, 方程组 $Ax = b$ 有解.

(B) $r = n$ 时, 方程组 $Ax = b$ 有唯一解.

(C) $m = n$ 时, 方程组 $Ax = b$ 有唯一解.

(D) $r < n$ 时, 方程组 $Ax = b$ 有无穷多解.

3. (2004, 数四, 13 分) 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + (2 + \lambda)x_2 + (4 + \mu)x_3 + 4x_4 = 1. \end{cases}$$

已知 $(1, -1, 1, -1)^T$ 是该方程组的一个解. 试求

(I) 方程组的全部解, 并用对应的齐次方程组的基础解系表示全部解;

(II) 该方程组满足 $x_2 = x_3$ 的全部解.

4. (2006, 数一、数二, 9 分) 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1, \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$$

有三个线性无关的解.

(I) 证明方程组系数矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$;

(II) 求 a, b 的值及方程组的通解.

5. (2000, 数二, 6 分) 设 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}, A = \alpha\beta^T, B = \beta^T\alpha,$

其中 β^T 是 β 的转置, 求解方程 $2B^2A^2x = A^4x + B^4x + \gamma$.

练习题参考答案

1. 【答案】 -1 .

【解析】 方程组无解的充分必要条件是 $r(A) \neq r(\bar{A})$. 故应对增广矩阵作初等行变换, 由

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 3 \\ 1 & a & -2 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & a-2 & -3 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a^2-2a-3 & a-3 \end{array} \right]$$

可知, 若 $a = -1$, 则 $\bar{A} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right]$.

于是有 $r(A) = 2, r(\bar{A}) = 3$, 从而方程组无解, 故应填: $a = -1$.

但本题出错率较高,有些考生计算行列式 $|A| = -(a+1)(a-3)$ 时,由 $|A| = 0$ 而认为 $a = -1$ 或 $a = 3$ 时方程组都无解. 这是错误的,因为 $|A| \neq 0$ 时,方程组有唯一解, $|A| = 0$ 时,方程组既可能无解也可能有无穷多解,这一点要理解清楚.

2. 【答案】 A.

【解析】 因为 A 是 $m \times n$ 矩阵,若秩 $r(A) = m$, 则 $m = r(A) \leq r(A, b) \leq m$. 于是 $r(A) = r(A, b)$. 故方程组有解,即应选(A).

或,由 $r(A) = m$, 知 A 的行向量组线性无关,那么其延伸必线性无关,故增广矩阵 (A, b) 的 m 个行向量也是线性无关的. 亦知 $r(A) = r(A, b)$.

关于(B)(D)不正确的原因是:由 $r(A) = n$ 不能推导出 $r(A, b) = n$ (注意 A 是 $m \times n$ 矩阵, m 可能大于 n), 由 $r(A) = r$ 亦不能推导出 $r(A, b) = r$, 你能否各举一个简单的例子?

至于(C),由克拉默法则, $r(A) = n$ 时才有唯一解,而现在的条件是 $r(A) = r$, 因此(C)不正确.

本题答对的同学仅 40%, 一是由 $r(A) = m$ 不会分析出 $r(A, b) = m$, 一是由 $r(A) = n$ 误认为必有 $r(\bar{A}) = n$.

3. 【解】 将 $(1, -1, 1, -1)^T$ 代入方程组,得 $\lambda = \mu$. 对增广矩阵作初等行变换,有

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2+\lambda & 4+\lambda & 4 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-2\lambda & 1-2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-2\lambda & 4-2\lambda & 1 & 1 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-2\lambda & 1-2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4\lambda-2 & 2\lambda-1 & 2\lambda-1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

(I) 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, $\bar{A} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$.

因 $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 4$, 方程组有无穷多解,其全部解为

$$x = (1, -1, 1, -1)^T + k_1(1, -3, 1, 0)^T + k_2(-\frac{1}{2}, -1, 0, 1)^T, \text{ 其中 } k_1, k_2 \text{ 为任意常数.}$$

当 $\lambda \neq \frac{1}{2}$ 时, $\bar{A} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right]$.

因 $r(A) = r(\bar{A}) = 3 < 4$, 方程组有无穷多解,其全部解为

$$x = (1, -1, 1, -1)^T + k(2, -1, 1, -2)^T, \text{ 其中 } k \text{ 为任意常数}$$

(II) 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时,若 $x_2 = x_3$, 由方程组的通解,有

$$-1 - 3k_1 - k_2 = 1 + k_1$$

知 $k_2 = -2 - 4k_1$.

将其代入整理,得全部解为

$$x_1 = 2 + 3k_1, x_2 = 1 + k_1, x_3 = 1 + k_1, x_4 = -3 - 4k_1$$

或 $x = (2, 1, 1, -3)^T + k_1(3, 1, 1, -4)^T$, 其中 k_1 为任意常数.



当 $\lambda \neq \frac{1}{2}$ 时, $x_2 = x_3$ 知 $-1-k = 1+k$, 即 $k = -1$. 从而只有唯一解 $(-1, 0, 0, 1)^T$.

4. 【分析】 本题考查含参数的非齐次线性方程组的求解问题, 那么如何求参数 a 和 b ? 题目给的追加信息是 $Ax = b$ 有三个线性无关的解, 如何用这信息? 其实问题 (I) $r(A) = 2$ 就是提示.

【解】 (I) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是非齐次方程组的三个线性无关的解, 那么 $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3$ 是 $Ax = 0$ 线性无关的解, 所以 $n - r(A) \geq 2$, 即 $r(A) \leq 2$.

显然矩阵 A 中有二阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ 不为 0, 又有 $r(A) \geq 2$, 从而秩 $r(A) = 2$.

(II) 对增广矩阵作初等行变换, 有

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ a & 1 & 3 & b & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1-a & 3-a & b-a & a+1 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 4-2a & b+4a-5 & 4-2a \end{array} \right] \end{aligned}$$

由题设和 (I) 知, $r(A) = r(\bar{A}) = 2$, 故有

$$4-2a=0, b+4a-5=0$$

解出 $a=2, b=-3$,

$$\text{此时 } \bar{A} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

那么 $\alpha = (2, -3, 0, 0)^T$ 是 $Ax = b$ 的解, 且 $\eta_1 = (-2, 1, 1, 0)^T, \eta_2 = (4, -5, 0, 1)^T$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系, 所以方程组的通解是 $x = \alpha + k_1\eta_1 + k_2\eta_2$ (k_1, k_2 为任意常数).

【评注】 通过本题要体会如何用两个条件把 $r(A) = 2$ 夹逼出来的方法. 不少考生把题目中的“有三个线性无关的解”理解为“恰有三个线性无关的解”, 这就改变了 (I) 证明的难度和命题的原意. 大家要认真审题, 准确理解题意.

$$5. \text{【解】 } A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, \frac{1}{2}, 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1, \frac{1}{2}, 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2.$$

又 $A^2 = (\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T) = \alpha(\beta^T\alpha)\beta^T = 2A$, 所以 $A^4 = 2^3A = 8A$.

代入原方程, 得 $16Ax = 8Ax + 16x + \gamma$, 即 $8(A - 2E)x = \gamma$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

所以 $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, k 为任意常数.

三、公共解与同解

试题特点

如果已知两个方程组(I)和(II),那么将其联立 $\begin{cases} \text{(I)} \\ \text{(II)} \end{cases}$,其联立方程组的解就是(I)与(II)的公共解.

如果已知(I)与(II)的基础解系分别是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和 β_1, β_2 ,则可设公共解为 γ ,那么

$$\gamma = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = l_1\beta_1 + l_2\beta_2$$

由此得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 - l_1\beta_1 - l_2\beta_2 = 0$,解出 k_1, k_2, k_3, l_1, l_2 可求出公共解 γ .

这两种常见的出题方法应当把握.

而处理同解的方法,往往是代入来处理,即把(I)的解代入(II),把(II)的解代入(I).

练习题

1. (2002, 数四, 8分) 设4元齐次线性方程组(I)为

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

而已知另一4元齐次线性方程组(II)的一个基础解系为

$$\alpha_1 = (2, -1, a+2, 1)^T, \alpha_2 = (-1, 2, 4, a+8)^T$$

(1) 求方程组(I)的一个基础解系;

(2) 当 a 为何值时,方程组(I)与(II)有非零公共解?在有非零公共解时,求出全部非零公共解.

2. (2003, 数一, 4分) 设有齐次线性方程组 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$,其中 A, B 均 $m \times n$ 矩阵,现有4个命题:

① 若 $Ax = 0$ 的解均是 $Bx = 0$ 的解,则 $r(A) \geq r(B)$;

② 若 $r(A) \geq r(B)$,则 $Ax = 0$ 的解均是 $Bx = 0$ 的解;

③ 若 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解,则 $r(A) = r(B)$;

④ 若 $r(A) = r(B)$ 则 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解.

以上命题中正确的是

(A) ①②.

(B) ①③.

(C) ②④.

(D) ③④.

3. (1998, 数四, 7分) 已知下列非齐次线性方程组(I), (II)

$$(I) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = -6, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3; \end{cases} \quad (II) \begin{cases} x_1 + mx_2 - x_3 - x_4 = -5, \\ nx_2 - x_3 - 2x_4 = -11, \\ x_3 - 2x_4 = -t + 1. \end{cases}$$



(1) 求解方程组(I), 用其导出组的基础解系表示通解;

(2) 当方程组中的参数 m, n, t 为何值时, 方程组(I) 与(II) 同解?

练习题参考答案

1. 【解】 (1) 对方程组(I) 的系数矩阵作初等行变换, 有

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 \\ & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

由于 $n - r(A) = 4 - 2 = 2$, 基础解系由 2 个线性无关的解向量所构成, 取 x_3, x_4 为自由变量, 所以 $\beta_1 = (5, -3, 1, 0)^T, \beta_2 = (-3, 2, 0, 1)^T$ 是方程组(I) 的基础解系.

(2) 设 η 是方程组(I) 与(II) 的非零公共解, 则

$$\eta = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2, \text{ 其中 } k_1, k_2 \text{ 与 } l_1, l_2 \text{ 均不全为零的常数}$$

$$\text{那么 } k_1\beta_1 + k_2\beta_2 - l_1\alpha_1 - l_2\alpha_2 = 0.$$

由此得齐次方程组(III)

$$\begin{cases} 5k_1 - 3k_2 & -2l_1 & & + l_2 = 0, \\ -3k_1 + 2k_2 & & + l_1 & - 2l_2 = 0, \\ k_1 & - (a+2)l_1 & & - 4l_2 = 0, \\ & k_2 & - l_1 - (a+8)l_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{III})$$

有非零解. 对系数矩阵作初等行变换, 有

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -a-2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a-2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \\ 0 & 2 & -3a-5 & -14 \\ 0 & -3 & 5a+8 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a-2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -a-8 \\ 0 & 0 & -3a-3 & 2a+2 \\ 0 & 0 & 5a+5 & -3a-3 \end{bmatrix}$$

当且仅当 $a+1=0$ 时, $r(\text{III}) < 4$, 方程组有非零解.

$$\text{此时, (III) 的同解方程组是 } \begin{cases} k_1 - l_1 - 4l_2 = 0, \\ k_2 - l_1 - 7l_2 = 0, \end{cases} \text{ 解出 } \begin{cases} k_1 = l_1 + 4l_2, \\ k_2 = l_1 + 7l_2. \end{cases}$$

$$\text{于是 } \eta = (l_1 + 4l_2)\beta_1 + (l_1 + 7l_2)\beta_2 = l_1(\beta_1 + \beta_2) + l_2(4\beta_1 + 7\beta_2) = l_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + l_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

其中 l_1, l_2 为任意实数.

2. 【答案】 B.

【解析】 显然命题④ 错误, 因此排除(C)(D). 对于(A) 与(B) 其中必有一个正确, 因此命题① 必正确, 那么② 与③ 哪一个命题正确呢?

由命题①, “若 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解, 则 $r(A) \geq r(B)$ ” 正确, 知“若 $Bx=0$ 的解均是 $Ax=0$ 的解, 则 $r(B) \geq r(A)$ ” 正确, 可见“若 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解, 则 $r(A) = r(B)$ ” 正确. 即命



题 ③ 正确,故应选(B).

希望你能证明 ① 正确,举例说明 ② 错误.

3.【解】 (1) 对方程组(I)的增广矩阵作初等行变换,有

$$\bar{A}_1 = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{array} \right]$$

由 $n - r(A) = 4 - 3 = 1$, 取自由变量为 x_4 .

令 $x_4 = 0$, 得方程组(I)的特解 $(-2, -4, -5, 0)^T$,

令 $x_4 = 1$, 得(I)的导出组的基础解系为 $(1, 1, 2, 1)^T$.

故(I)的通解为: $x = (-2, -4, -5, 0)^T + k(1, 1, 2, 1)^T$, k 为任意实数.

(2) 把(I)的通解 $x_1 = -2 + k, x_2 = -4 + k, x_3 = -5 + 2k, x_4 = k$ 代入(II)

整理得

$$\begin{cases} (m-2)(k-4) = 0, \\ (n-4)(k-4) = 0, \\ t = 6 \end{cases}$$

由于 k 是任意常数, 故 $m = 2, n = 4, t = 6$. 此时(I)的解全是(II)的解. 当 $n = 4$ 时, 易见 $r(A_2) = r(\bar{A}_2) = 3$, (II)的通解为 $\alpha + k\eta$ 形式.

所以 $x = (-2, -4, -5, 0)^T + k(1, 1, 2, 1)^T$ 就是(II)的通解, 从而(I)与(II)同解.

心得笔记:

(ID: djky66)



第五章 特征值与特征向量

本章导读

特征值和特征向量是线性代数的重要内容之一,也是考研的重点之一,它涉及行列式,矩阵,相关、无关,秩,基础解系,一系列问题,知识点多,综合性强,必须好好复习.

首先要掌握求特征值、特征向量的各种方法;第二是相似,把握住和对角矩阵相似的充分必要条件,会求可逆矩阵 P ;第三(可能更重要),利用实对称矩阵的隐含信息处理求特征值、特征向量,用正交矩阵相似对角化等一系列问题.

一、特征值、特征向量的概念与计算

试题特点

常见的命题形式:

1. 用定义 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$ 推理、分析、判断.
2. 由 $|\lambda E - A| = 0$ 和 $(\lambda_i E - A)x = 0$ 求基础解系.
3. 通过相似 $P^{-1}AP = B$.

(1) 如 $A\alpha = \lambda\alpha$, 则 $B(P^{-1}\alpha) = \lambda(P^{-1}\alpha)$.

(2) 如 $B\alpha = \lambda\alpha$, 则 $A(P\alpha) = \lambda(P\alpha)$.

特别地, 如 $r(A) = 1$, 有

$$|\lambda E - A| = \lambda^n - \sum a_{ii} \lambda^{n-1}$$

$$\lambda_1 = \sum a_{ii}, \lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0$$

通过下面的考题, 请进一步体会考场上如何求特征值、特征向量.

例 1 (2015, 13 题, 4 分) 设三阶矩阵 A 的特征值为 $2, -2, 1$, $B = A^2 - A + E$, 其中 E 为三阶单位矩阵, 则行列式 $|B| =$ _____.

【答案】 21.

【解析】 由 $A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow A^n\alpha = \lambda^n\alpha$,

因为 A 的特征值是 $2, -2, 1$, 所以 B 的特征值是 $3, 7, 1$, 故 $|B| = 21$.

练习题

1. (2002, 数二, 3 分) 矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ 的非零特征值是_____.



2. (1993, 数四, 3 分) 设 $\lambda = 2$ 是非奇异矩阵 A 的一个特征值, 则矩阵 $(\frac{1}{3}A^2)^{-1}$ 有一个特征值等于

- (A) $\frac{4}{3}$. (B) $\frac{3}{4}$.
(C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{1}{4}$.

3. (2008, 数一, 4 分) 设 A 为二阶矩阵, α_1, α_2 为线性无关的 2 维列向量, $A\alpha_1 = 0, A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$, 则 A 的非零特征值为_____.

4. (2003, 数一, 10 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = P^{-1}A^*P$, 求 $B + 2E$ 的特

征值与特征向量, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵, E 为三阶单位矩阵.

练习题参考答案

1. 【答案】 4.

【解析】 这是一个基础题, 由特征多项式

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ -2 & \lambda - 2 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ -2 & \lambda - 2 & 2 \\ 0 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ -2 & \lambda - 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -2 & \lambda - 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 4) \end{aligned}$$

可知非零特征值是 $\lambda = 4$.

2. 【答案】 B.

【解析】 由 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$, 有 $A^2\alpha = \lambda A\alpha = \lambda^2\alpha$, 故 $\frac{1}{3}A^2\alpha = \frac{1}{3}\lambda^2\alpha$.

即若 λ 是矩阵 A 的特征值, 则 $\frac{1}{3}\lambda^2$ 是矩阵 $\frac{1}{3}A^2$ 的特征值, 现 $\lambda = 2$, 因此, $\frac{1}{3}A^2$ 有特征值 $\frac{4}{3}$. 再利用如 $A\alpha = \lambda\alpha$, 则 $A^{-1}\alpha = \frac{1}{\lambda}\alpha$, 从而 $(\frac{1}{3}A^2)^{-1}$ 有特征值 $\frac{3}{4}$. 故应选 (B).

或者, $(\frac{1}{3}A^2)^{-1}\alpha = 3(A^{-1})^2\alpha$, 由 $\lambda = 2$ 是 A 的特征值, 知 $\frac{1}{2}$ 是 A^{-1} 的特征值, 于是 $\frac{1}{4}$ 是 $(A^{-1})^2$ 的特征值, 亦知应选 (B).

3. 【答案】 1.

【解析】 根据已知条件本题有两种解法. 用定义, 由

$$A\alpha_1 = 0 = 0\alpha_1, A(2\alpha_1 + \alpha_2) = 2A\alpha_1 + A\alpha_2 = A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$$



知 A 的特征值为 1 和 0. 因此 A 的非零特征值为 1. 或者利用相似, 有

$$A[\alpha_1, \alpha_2] = [0, 2\alpha_1 + \alpha_2] = [\alpha_1, \alpha_2] \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可知 $A \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 亦可得 A 的特征值 1 和 0, 因此 A 的非零特征值为 1.

【评注】 要掌握定义法, $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$, 通过恒等变形推导出特征值、特征向量的信息.

若已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 又有

$$A\alpha_1 = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3, A\alpha_2 = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3, A\alpha_3 = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3$$

的信息一定不要忘记这有相似的背景.

$$\begin{aligned} A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] &= [A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3] \\ &= [a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3, b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3, c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3] \\ &= [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{即 } P^{-1}AP = B, \text{ 其中 } P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3], B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}.$$

本题难度系数 0.704.

4. 【分析】 因为 A^* 与 B 相似, 而两个相似矩阵的特征值与特征向量有关联, 利用它们之间的联系就可求出 B 的特征值与特征向量, 进而就可求出 $B + 2E$ 的特征值与特征向量.

【解】 由于

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 3 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 7 & \lambda - 7 & \lambda - 7 \\ -2 & \lambda - 3 & -2 \\ 0 & 1 - \lambda & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 7)(\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & \lambda - 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 7) \end{aligned}$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 7$.

因为 $|A| = \prod \lambda_i = 7$, 若 $A\alpha = \lambda\alpha$, 则 $A^*\alpha = \frac{|A|}{\lambda}\alpha$, 所以 A^* 的特征值为 7, 7, 1.

由于 $B = P^{-1}A^*P$, 即 A^* 与 B 相似, 故 B 的特征值为 7, 7, 1, 从而 $B + 2E$ 的特征值为 9, 9, 3.

因为 $B(P^{-1}\alpha) = (P^{-1}A^*P)(P^{-1}\alpha) = P^{-1}A^*\alpha = \frac{|A|}{\lambda}P^{-1}\alpha$, 按定义可知矩阵 B 属于特征值

$\frac{|A|}{\lambda}$ 的特征向量是 $P^{-1}\alpha$. 因此 $B + 2E$ 属于特征值 $\frac{|A|}{\lambda} + 2$ 的特征向量是 $P^{-1}\alpha$.



由于 $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 而

$\lambda = 1$ 时, 由 $(E - A)x = 0$, $\begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

得矩阵 A 属于 $\lambda = 1$ 的特征向量 $\alpha_1 = (-1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (-1, 0, 1)^T$,

当 $\lambda = 7$ 时, 由 $(7E - A)x = 0$, $\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

得到矩阵 A 属于 $\lambda = 7$ 的特征向量 $\alpha_3 = (1, 1, 1)^T$, 那么

$$P^{-1}\alpha_1 = (1, -1, 0)^T, P^{-1}\alpha_2 = (-1, -1, 1)^T, P^{-1}\alpha_3 = (0, 1, 1)^T$$

从而, $B + 2E$ 属于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$ 的特征向量为 $k_1(1, -1, 0)^T + k_2(-1, -1, 1)^T$, 其中 k_1, k_2 是不全为 0 的任意常数, 而 $B + 2E$ 属于 $\lambda_3 = 3$ 的特征向量为 $k_3(0, 1, 1)^T$, 其中 k_3 为非零常数.

【评注】 本题也可以先求出 $A^* = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$, 然后求

$$B = P^{-1}A^*P = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

再求 $B + 2E, \dots$.

二、相似与相似对角化

试题特点

围绕相似定义 $P^{-1}AP = B$, 相似的性质设计试题, 或者考查判断是否和对角矩阵相似.

$A \sim \Lambda \Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量

$\Leftrightarrow$ 如 λ 是 A 的 k 重特征值, 则 λ 有 k 个线性无关的特征向量.

如 A 有 n 个不同的特征值 $\Rightarrow A \sim \Lambda$.

2 (2009, 13 题, 4 分) 设 $\alpha = (1, 1, 1)^T, \beta = (1, 0, k)^T$. 若矩阵 $\alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $k =$

【答案】 2.



【解析】 由于 $\alpha\beta^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} (1, 0, k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 1 & 0 & k \\ 1 & 0 & k \end{bmatrix}$, 那么由 $\alpha\beta^T \sim \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$ 知它们有相同的迹.

故 $1+0+k=3+0+0$, 所以 $k=2$.

3 (2014, 21 题, 11 分) 证明 n 阶矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{bmatrix}$ 相似.

【证明】 记 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{bmatrix}$,

因 A 是实对称矩阵必与对角矩阵相似.

由 $|\lambda E - A| = \lambda^n - n\lambda^{n-1} = 0$, 知 A 的特征值为 $n, 0, 0, \dots, 0$ ($n-1$ 个).

$$\text{故 } A \sim \Lambda = \begin{bmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix},$$

又由 $|\lambda E - B| = (\lambda - n)\lambda^{n-1} = 0$, 知矩阵 B 的特征值为 $n, 0, 0, \dots, 0$ ($n-1$ 个).

当 $\lambda = 0$ 时, $r(0E - B) = r(B) = 1$, 那么 $n - r(0E - B) = n - 1$, 即齐次方程组 $(0E - B)x = 0$ 有 $n-1$ 个线性无关的解, 亦即 $\lambda = 0$ 时矩阵 B 有 $n-1$ 个线性无关的特征向量. 从而矩阵 B 必与对角矩阵相似, 即

$$B \sim \Lambda = \begin{bmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

从而 A 和 B 相似.

【评注】 因为 $A \sim \Lambda$, 故存在可逆矩阵 P_1 使 $P_1^{-1}AP_1 = \Lambda$, 又因 $B \sim \Lambda$, 故存在可逆矩阵 P_2 使 $P_2^{-1}BP_2 = \Lambda$, 于是 $P_1^{-1}AP_1 = P_2^{-1}BP_2 \Rightarrow P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1} = B$, 令 $P = P_1P_2^{-1}$ 即有 $P^{-1}AP = B$.

难度系数 0.382, 0.354, 0.368.

4 (2016, 5 题, 4 分) 设 A, B 是可逆矩阵, 且 A 与 B 相似, 则下列结论错误的是

(A) A^T 与 B^T 相似.

(B) A^{-1} 与 B^{-1} 相似.

(C) $A + A^T$ 与 $B + B^T$ 相似.

(D) $A + A^{-1}$ 与 $B + B^{-1}$ 相似.

【答案】 C.

【解析】 由已知条件, 存在可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP = B$. 那么

$$B^T = (P^{-1}AP)^T = P^T A^T (P^{-1})^T = P_1^{-1} A^T P_1$$

其中 $P_1 = (P^T)^{-1}$, 即 A^T 与 B^T 相似, (A) 正确.

$$B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$$

即 A^{-1} 和 B^{-1} 相似, (B) 正确.

又

$$P^{-1}(A + A^{-1})P = P^{-1}AP + P^{-1}A^{-1}P = B + B^{-1}$$

即 $A + A^{-1}$ 和 $B + B^{-1}$ 相似, (D) 正确.

从而应选 (C).

特别地, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 与 $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 相似.

但 $A + A^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ 与 $B + B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 不相似.

5 (2017, 6 题, 4 分) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 则

(A) A 与 C 相似, B 与 C 相似.

(B) A 与 C 相似, B 与 C 不相似.

(C) A 与 C 不相似, B 与 C 相似.

(D) A 与 C 不相似, B 与 C 不相似.

【答案】 B.

【解析】 对矩阵 A , 特征值为 2, 2, 1. 由 $2E - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 其秩为 1.

齐次方程组 $(2E - A)x = 0$ 有 2 个线性无关的解, 亦即 $\lambda = 2$ 有 2 个线性无关的特征向量, 所以 $A \sim C$ 相似.

对于矩阵 B , 特征值为 2, 2, 1. 由于 $2E - B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 其秩为 2.

齐次方程组 $(2E - B)x = 0$ 只有 1 个线性无关的解, 亦即 $\lambda = 2$ 只有 1 个线性无关的特征向量, B 不能相似对角化. 故应选 (B).

6 (2018, 5 题, 4 分) 下列矩阵中, 与矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 相似的为

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

【答案】 A.

【解析】 这 5 个矩阵特征值都是 1, 1, 1 且都没有 3 个线性无关的特征向量, 即都不能相似对角化.



对 B, C, D 选项, $\lambda = 1$ 都是有 2 个线性无关的特征向量, 而 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 与 A 对 $\lambda = 1$ 都只有 1 个

线性无关的特征向量, 所以选 (A).

【评注】 如 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则

$$P^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

亦知选 (A).

7 (2020, 21 题, 11 分) 设 A 为二阶矩阵, $P = [\alpha, A\alpha]$, 其中 α 是非零向量且不是 A 的特征向量.

(I) 证明 P 为可逆矩阵;

(II) 若 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$. 求 $P^{-1}AP$, 并判断 A 是否相似于对角矩阵.

【解】 (I) 因 $\alpha \neq 0$ 且 α 不是 A 的特征向量. 于是 $A\alpha \neq k\alpha$, 从而 α 与 $A\alpha$ 不共线, 即 $\alpha, A\alpha$ 线性无关, 故 $P = [\alpha, A\alpha]$ 可逆.

或(反证法) 若 P 不可逆, 有

$$|P| = |\alpha, A\alpha| = 0$$

α 与 $A\alpha$ 成比例, 于是 $A\alpha = k\alpha$. 又 $\alpha \neq 0$ 知 α 是 A 的特征向量与已知条件矛盾.

(II) (方法一) 由 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$ 有 $A^2\alpha = 6\alpha - A\alpha$

$$\begin{aligned} AP &= A[\alpha, A\alpha] = [A\alpha, A^2\alpha] = [A\alpha, 6\alpha - A\alpha] \\ &= [\alpha, A\alpha] \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因 P 可逆, 于是

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

记 $B = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, 而 $|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda & -6 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6$ 特征值 2, -3.

于是 A 有 2 个不同特征值从而 A 可相似对角化.

(方法二) 因 $A^2 + A - 6E = (A - 2E)(A + 3E) = (A + 3E)(A - 2E)$,

由 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$, 即 $(A^2 + A - 6E)\alpha = 0$,

于是 $(A - 2E)(A + 3E)\alpha = 0$,

即 $(A - 2E)(A\alpha + 3\alpha) = 0$,

即 $A(A\alpha + 3\alpha) = 2(A\alpha + 3\alpha)$,

由 α 不是特征向量, 有 $A\alpha + 3\alpha \neq 0$

从而 $\lambda = 2$ 是 A 的特征值, 类似有 $\lambda = -3$ 是特征值. 下略.

练习题

1. (2001, 数一, 8 分) 已知三阶矩阵 A 与三维向量 x , 使得向量组 x, Ax, A^2x 线性无关, 且满足

$$A^3x = 3Ax - 2A^2x$$

(I) 记 $P = [x, Ax, A^2x]$, 求三阶矩阵 B , 使 $A = PBP^{-1}$; (II) 计算行列式 $|A + E|$.

2. (1997, 数一, 6 分) 已知 $\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 是矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{bmatrix}$ 的一个特征向量.

(I) 试确定参数 a, b 及特征向量 ξ 所对应的特征值;

(II) 问 A 能否相似于对角阵? 说明理由.

3. (2004, 数一, 9 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{bmatrix}$ 的特征方程有一个二重根, 求 a 的值, 并讨论

A 是否可相似对角化.

练习题参考答案

1. 【解】 (I) (方法一) 由于 $AP = PB$, 即

$$A[x, Ax, A^2x] = [Ax, A^2x, A^3x] = [Ax, A^2x, 3Ax - 2A^2x]$$

$$= [x, Ax, A^2x] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{所以 } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(方法二) 由于 $P = [x, Ax, A^2x]$ 可逆, 那么 $P^{-1}P = E$, 即 $P^{-1}[x, Ax, A^2x] = E$. 所以

$$P^{-1}x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P^{-1}Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, P^{-1}A^2x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

于是 $B = P^{-1}AP = P^{-1}[Ax, A^2x, A^3x] = P^{-1}[Ax, A^2x, 3Ax - 2A^2x]$

$$= [P^{-1}Ax, P^{-1}A^2x, P^{-1}(3Ax - 2A^2x)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(方法三) 设 $B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$, 则由 $AP = PB$ 得



$$[Ax, A^2x, A^3x] = [x, Ax, A^2x] \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{cases} Ax = a_1x + b_1Ax + c_1A^2x \\ A^2x = a_2x + b_2Ax + c_2A^2x \\ A^3x = a_3x + b_3Ax + c_3A^2x = 3Ax - 2A^2x \end{cases}$$

于是

$$\begin{cases} a_1x + (b_1 - 1)Ax + c_1A^2x = 0 \\ a_2x + b_2Ax + (c_2 - 1)A^2x = 0 \\ a_3x + (b_3 - 3)Ax + (c_3 + 2)A^2x = 0 \end{cases}$$

因为 x, Ax, A^2x 线性无关, 故

$$a_1 = 0, b_1 = 1, c_1 = 0; a_2 = 0, b_2 = 0, c_2 = 1; a_3 = 0, b_3 = 3, c_3 = -2$$

从而求出矩阵 $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

(II) 由(I)知 $A \sim B$, 那么 $A + E \sim B + E$, 从而

$$|A + E| = |B + E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

2. 【解】 (I) 设 ξ 是属于特征值 λ_0 的特征向量, 即

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{即} \begin{cases} 2 - 1 - 2 = \lambda_0 \\ 5 + a - 3 = \lambda_0 \\ -1 + b + 2 = -\lambda_0 \end{cases}, \quad \text{解得 } \lambda_0 = -1, a = -3, b = 0.$$

(II) 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda + 3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^3$$

知矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

$$\text{由于 } r(-E - A) = r \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2,$$

从而 $\lambda = -1$ 只有一个线性无关的特征向量, 故 A 不能相似对角化.

3.【解】 A 的特征多项式为

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 3 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-3 & 3 \\ -1 & -a-1 & \lambda-5 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2)(\lambda^2 - 8\lambda + 18 + 3a) \end{aligned}$$

若 $\lambda = 2$ 是特征方程的二重根, 则有 $2^2 - 16 + 18 + 3a = 0$, 解得 $a = -2$.

当 $a = -2$ 时, A 的特征值为 $2, 2, 6$, 矩阵 $2E - A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ 的秩为 1, 故 $\lambda = 2$ 对应

的线性无关的特征向量有两个, 从而 A 可相似对角化.

若 $\lambda = 2$ 不是特征方程的二重根, 则 $\lambda^2 - 8\lambda + 18 + 3a$ 为完全平方, 从而 $18 + 3a = 16$, 解得 $a = -\frac{2}{3}$.

当 $a = -\frac{2}{3}$ 时, A 的特征值为 $2, 4, 4$, 矩阵 $4E - A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}$ 的秩为 2, 故 $\lambda = 4$ 对应

的线性无关的特征向量只有一个, 从而 A 不可相似对角化.

三、关于相似时可逆矩阵 P

试题特点

$P^{-1}AP = \Lambda$ 时, Λ 对角线元素是 A 的特征值, P 是 A 的特征向量, 要意识到这一类题目实际上就是求矩阵 A 特征值和特征向量的另一种出题方法. 这类试题往往会涉及处理一些参数.

练习题 1 和 2 是常规题型, 而练习题 3 是用合成的方法求可逆矩阵 $P(P_1^{-1}AP_1 = B, P_2^{-1}BP_2 = C \Rightarrow P^{-1}AP = C, P = P_1P_2)$.

8 (2015, 21 题, 11 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{bmatrix}$ 相似于矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

(I) 求 a, b 的值;

(II) 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

【解】 (I) $A \sim B \Rightarrow \sum a_{ii} = \sum b_{ii}, |A| = |B|$, 得

$$\begin{cases} 0 + 3 + a = 1 + b + 1 \\ 2a - 3 = b \end{cases}$$



解出 $a = 4, b = 5$.

$$(II) \text{ 因为 } A \sim B, |\lambda E - A| = |\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & 0 \\ 0 & \lambda - 5 & 0 \\ 0 & -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda - 1)^2, \text{ 而得 } A$$

的特征值 $1, 1, 5$.

对 $\lambda = 1$, 由 $(E - A)x = 0$,

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_1 = (2, 1, 0)^T, \alpha_2 = (-3, 0, 1)^T$.

对 $\lambda = 5$, 由 $(5E - A)x = 0$,

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得基础解系 $\alpha_3 = (-1, -1, 1)^T$.

$$\text{令 } P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 有 } P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 5 \end{bmatrix}.$$

本题难度系数 0.540, 0.463, 0.513.

9 (2016, 21 题, 11 分) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(I) 求 A^{99} ;

(II) 设三阶矩阵 $B = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 满足 $B^2 = BA$, 记 $B^{100} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]$, 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 分别表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合.

【解】 (I) 由 A 的特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ -2 & \lambda + 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

得 A 的特征值为 $0, -1, -2$.

对 $\lambda = 0$, 由 $(0E - A)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得基础解系(或特征向量) $\gamma_1 = (3, 2, 2)^T$.

对 $\lambda = -1$, 由 $(-E - A)x = 0$



$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得基础解系(或特征向量) $\gamma_2 = (1, 1, 0)^T$.

对 $\lambda = -2$, 由 $(-2E - A)x = 0$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得基础解系(或特征向量) $\gamma_3 = (1, 2, 0)^T$.

令 $P = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 有 $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$,

那么 $P^{-1}A^{99}P = \Lambda^{99}, A^{99} = P\Lambda^{99}P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & \\ & (-1)^{99} & \\ & & (-2)^{99} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98} \\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(II) 因 $B^2 = BA$, 知 $B^3 = B(BA) = B^2A = BA^2$,

归纳得

$$B^{100} = BA^{99} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} -2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98} \\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [(-2+2^{99})\alpha_1 + (-2+2^{100})\alpha_2, (1-2^{99})\alpha_1 + (1-2^{100})\alpha_2, (2-2^{98})\alpha_1 + (2-2^{99})\alpha_2]$$

所以 $\beta_1 = (-2+2^{99})\alpha_1 + (-2+2^{100})\alpha_2$; $\beta_2 = (1-2^{99})\alpha_1 + (1-2^{100})\alpha_2$;

$\beta_3 = (2-2^{98})\alpha_1 + (2-2^{99})\alpha_2$.

本题难度系数 0.236, 0.161, 0.212.

10 (2019, 21 题, 11 分) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ 与 $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$ 相似.

(I) 求 x, y ;

(II) 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$.

【解】 (I) 因 $A \sim B$, 有 $\sum a_{ii} = \sum b_{ii}$, $|A| = |B|$. 即

$$\begin{cases} x-4 = y+1 \\ 4x-8 = -2y \end{cases}$$

所以 $x = 3, y = -2$.

(II) 因 $|\lambda E - B| = (\lambda - 2)(\lambda + 1)(\lambda + 2)$,

矩阵 B 的特征值为 $2, -1, -2$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



又 $A \sim B$ 知 A 的特征值为 $2, -1, -2$.

以下分别求出矩阵 A 和 B 的特征向量:

$$\text{由 } (2E - A) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得 $\lambda = 2$ 的特征向量 $\alpha_1 = (1, -2, 0)^T$,

$$\text{由 } (-E - A) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得 $\lambda = -1$ 的特征向量 $\alpha_2 = (-2, 1, 0)^T$,

$$\text{由 } (-2E - A) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得 $\lambda = -2$ 的特征向量 $\alpha_3 = (1, -2, -4)^T$,

$$\text{令 } P_1 = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \text{ 有 } P_1^{-1}AP_1 = \Lambda = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{bmatrix}.$$

对矩阵 B ,

由 $(2E - B)x = 0$ 得 $\lambda = 2$ 的特征向量 $\beta_1 = (1, 0, 0)^T$,

由 $(-E - B)x = 0$ 得 $\lambda = -1$ 的特征向量 $\beta_2 = (-1, 3, 0)^T$,

由 $(-2E - B)x = 0$ 得 $\lambda = -2$ 的特征向量 $\beta_3 = (0, 0, 1)^T$,

$$\text{令 } P_2 = [\beta_1, \beta_2, \beta_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 有 } P_2^{-1}BP_2 = \Lambda = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{bmatrix}.$$

于是 $P_1^{-1}AP_1 = P_2^{-1}BP_2$ 得 $P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1} = B$.

令 $P = P_1P_2^{-1}$, 则有 $P^{-1}AP = B$. 其中

$$P = P_1P_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ -2 & -\frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

【评注】 由于特征向量是不唯一的, 因此可逆矩阵 P 是不唯一的. 本题 P_1 中, 如用 $-\alpha_2$ 替换

可得 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$, P_2 中, 如用 $\frac{1}{3}\beta_2$ 替换, P_2 就是初等矩阵, 求 P_2^{-1} 是不是直接有公式?

例 11 (2020, 6 题, 4 分) 设 A 为三阶矩阵, α_1, α_2 为 A 的属于特征值 1 的线性无关的特征向量, α_3

为 A 的属于特征值 -1 的特征向量, 则满足 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的可逆矩阵 P 为

(A) $[\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2, -\alpha_3]$.

(B) $[\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, -\alpha_3]$.

(C) $[\alpha_1 + \alpha_3, -\alpha_3, \alpha_2]$.

(D) $[\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_2]$.

【答案】 D.

【解析】 本题考查 $P^{-1}AP = \Lambda$ 的基本知识. P —特征向量, Λ —特征值. 且 P 与 Λ 的位置对应要正确.

因 α_1, α_2 是 $\lambda = 1$ 的线性无关的特征向量, α_3 是 $\lambda = -1$ 的特征向量.

于是 $\alpha_1 + \alpha_3$ 不是 A 的特征向量, 排除 (A), (C), 又对角矩阵 $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$, 故 P 中特征向

量应当是 $\lambda = 1, \lambda = -1, \lambda = 1$ 的顺序, 排除 (B).

(D) $(\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_2)$ 中 $\alpha_1 + \alpha_2$ 与 α_2 是 $\lambda = 1$ 的线性无关的特征向量, $-\alpha_3$ 是 $\lambda = -1$ 的特征向量, 故应选 (D).

练习题

1. (1992, 数三, 7 分) 设矩阵 A 与 B 相似, 其中

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$$

(I) 求 x 和 y 的值;

(II) 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = B$.

2. (1999, 数四, 7 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -k & -1 & k \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$, 问当 k 为何值时, 存在可逆矩阵 P , 使得

$P^{-1}AP$ 为对角矩阵? 并求出 P 和相应的对角矩阵.

3. (2005, 数四, 13 分) 设 A 为三阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性无关的三维列向量, 且满足

$$A\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_2 = 2\alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_3 = 2\alpha_2 + 3\alpha_3$$

(I) 求矩阵 B , 使得 $A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]B$;

(II) 求矩阵 A 的特征值;

(III) 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

练习题参考答案

1. 【解】 (I) 因为 A 和对角矩阵 B 相似, 所以 $-1, 2, y$ 就是矩阵 A 的特征值, 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda - x & -2 \\ -3 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)[\lambda^2 - (x+1)\lambda + (x-2)]$$

知 $\lambda = -2$ 是 A 的特征值, 因此必有 $y = -2$.

再由 $\lambda = 2$ 是 A 的特征值, 知 $|2E - A| = 4[2^2 - 2(x+1) + (x-2)] = 0$, 得 $x = 0$.



$$(II) \text{ 由于 } \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{bmatrix},$$

对 $\lambda = -1$, 由 $(-E - A)x = 0$ 得特征向量 $\alpha_1 = (0, -2, 1)^T$,

对 $\lambda = 2$, 由 $(2E - A)x = 0$ 得特征向量 $\alpha_2 = (0, 1, 1)^T$,

对 $\lambda = -2$, 由 $(-2E - A)x = 0$ 得特征向量 $\alpha_3 = (1, 0, -1)^T$,

$$\text{那么, 令 } P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ 有 } P^{-1}AP = B.$$

2.【解】 由矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & 2 \\ k & \lambda + 1 & -k \\ -4 & -2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda + 1 & -k \\ \lambda - 1 & -2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2$$

得到矩阵 A 的特征值为 $1, -1, -1$.

由于 $A \sim \Lambda$, 那么 $\lambda = -1$ 时, 矩阵 A 必有 2 个线性无关的特征向量, 因此 $n - r(-E - A) = 2$, 即 $r(-E - A) = 1$. 求出 $k = 0$.

当 $\lambda = 1$ 时, 由 $(E - A)x = 0$ 得特征向量 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$,

当 $\lambda = -1$ 时, 由 $(-E - A)x = 0$ 得特征向量 $\alpha_2 = (-1, 2, 0)^T, \alpha_3 = (0, 1, 1)^T$.

$$\text{那么, 令 } P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 有 } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}.$$

3.【解】 (I) 按已知条件, 有

$$\begin{aligned} A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] &= [\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_2 + 3\alpha_3] \\ &= [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{所以矩阵 } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(II) 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 矩阵 $C = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 可逆, 所以 $C^{-1}AC = B$, 即 A 与 B 相似. 由

$$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & -2 \\ -1 & -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4)$$

知矩阵 B 的特征值是 $1, 1, 4$. 故矩阵 A 的特征值是 $1, 1, 4$.

(III) 对于矩阵 B , 由 $(E - B)x = 0$, 得特征向量



$$\eta_1 = (-1, 1, 0)^T, \eta_2 = (-2, 0, 1)^T$$

由 $(4E - B)x = 0$, 得特征向量

$$\eta_3 = (0, 1, 1)^T$$

那么令 $P_1 = [\eta_1, \eta_2, \eta_3]$, 有 $P_1^{-1}BP_1 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{bmatrix}$. 从而

$$P_1^{-1}C^{-1}ACP_1 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{bmatrix}$$

故当 $P = CP_1 = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [-\alpha_1 + \alpha_2, -2\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3]$ 时,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{bmatrix}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

④、实对称矩阵

试题特点

实对称矩阵有几个重要的定理, 例如: 实对称矩阵一定和对角矩阵相似(不管特征值有没有重根); 实对称矩阵特征值不同时特征向量必相互正交(由此有内积为 0, 从而可构造齐次方程组求特征向量); 实对称矩阵可以用正交矩阵来相似对角化. 试题就是围绕这些定理来设计的. 考研的重点, 特别要复习好综合性强的解答题.

12 (2010, 6 题, 4 分) 设 A 为四阶实对称矩阵, 且 $A^2 + A = O$. 若 A 的秩为 3, 则 A 相似于

(A) $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$.

【答案】 D.

【解析】 这是一道常见的基础题, 由 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$ 知 $A^n\alpha = \lambda^n\alpha$, 那么对于

$$A^2 + A = O \Rightarrow (\lambda^2 + \lambda)\alpha = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda = 0$$

所以 A 的特征值只能是 0 或 -1.



再由 A 是实对称必有 $A \sim \Lambda$, 而 Λ 即是 A 的特征值, 那么由 $r(A) = 3$, 可知 (D) 正确.

【评注】 本题难度系数 0.774.

13 (2010, 21 题, 11 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{bmatrix}$, 正交矩阵 Q 使得 $Q^T A Q$ 为对角矩阵, 若 Q 的第

1 列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T$, 求 a, Q .

【分析】 由 Q 为正交矩阵, 有 $Q^T = Q^{-1}$, 因而 $Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \Lambda$, 所以 Q 的列向量就是矩阵 A 的特征向量.

【解】 设 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T$ 是 A 关于特征值 λ_1 的特征向量, 那么

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 + (-2) + 4 = \lambda_1, \\ -1 + 6 + a = 2\lambda_1, \\ 4 + 2a + 0 = \lambda_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ a = -1 \end{cases}$$

把 $a = -1$, 代入矩阵 A , 有

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -4 \\ 1 & \lambda - 3 & 1 \\ -4 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda + 4 & 0 & -\lambda - 4 \\ 1 & \lambda - 3 & 1 \\ -4 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda + 4 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda - 3 & 2 \\ -1 & 1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} \\ = (\lambda - 2)(\lambda - 5)(\lambda + 4)$$

求出矩阵 A 的特征值为: 2, 5, -4.

对 $\lambda = 5$, 由 $(5E - A)x = 0$, 即

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & -9 & -9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得特征向量 $\alpha_2 = (1, -1, 1)^T$.

对 $\lambda = -4$, 由 $(-4E - A)x = 0$, 即

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & -4 \\ 1 & -7 & 1 \\ -4 & 1 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得特征向量 $\alpha_3 = (-1, 0, 1)^T$.

实对称特征值不同特征向量相互正交, 把 α_2, α_3 单位化, 有

$$\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)^T$$

$$\text{那么可得 } Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \text{ 则 } Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 5 & \\ & & -4 \end{bmatrix}.$$

【评注】 难度系数 0.338.

要理解 Q 的列向量就是 A 的特征向量, 通过特征向量来构造方程组求参数是常考的知识点.

14 (2011, 21 题, 11 分) 设 A 为三阶实对称矩阵, A 的秩为 2, 且

$$A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(I) 求 A 的所有特征值与特征向量;

(II) 求矩阵 A .

【分析】 本题未给出具体的矩阵 A , 又要求 A 的特征值、特征向量, 应当考虑用定义法 $A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$ 来推理、分析、判断.

【解】 (I) 因 $r(A) = 2$ 知 $|A| = 0$, 所以 $\lambda = 0$ 是 A 的特征值. 又

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

所以按定义 $\lambda = 1$ 是 A 的特征值, $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$ 是 A 属于 $\lambda = 1$ 的特征向量;

$\lambda = -1$ 是 A 的特征值, $\alpha_2 = (1, 0, -1)^T$ 是 A 属于 $\lambda = -1$ 的特征向量.

设 $\alpha_3 = (x_1, x_2, x_3)^T$ 是 A 属于特征值 $\lambda = 0$ 的特征向量, 作为实对称矩阵特征值不同特征向量相互正交, 因此

$$\begin{cases} \alpha_1^T \alpha_3 = x_1 + x_3 = 0 \\ \alpha_2^T \alpha_3 = x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

解出 $\alpha_3 = (0, 1, 0)^T$.

故矩阵 A 的特征值为 $1, -1, 0$; 特征向量依次为

$k_1(1, 0, 1)^T, k_2(1, 0, -1)^T, k_3(0, 1, 0)^T$, 其中 k_1, k_2, k_3 均是不为 0 的任意常数

(II) 由 $A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\alpha_1, -\alpha_2, 0]$, 有

$$A = [\alpha_1, -\alpha_2, 0][\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

【评注】 本题特征值的不同特征向量已经正交, 也可考虑用正交矩阵, 相似对角化来求矩

阵 A , 即令 $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, 则

$$Q^{-1}AQ = \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$$



$$A = Q\Lambda Q^{-1} = Q\Lambda Q^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{当然也可设 } A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}, \text{ 由 } A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ 有 } \begin{cases} a-c=-1, \\ a+c=1, \\ b-e=0, \\ b+e=0, \\ c-f=1, \\ c+f=1, \end{cases}$$

易得 $a=0, c=1, b=0, e=0, f=0$. 即有 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & d & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 再由 $r(A)=2 \Rightarrow d=0$. 然后再来

求特征值、特征向量.

不要忘记实对称矩阵特征值不同特征向量相互正交这一重要定理, 由此构造齐次方程组可求出特征向量, 本题难度系数 0.534, 0.479, 0.617.

15 (2013, 6 题, 4 分) 矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 相似的充分必要条件为

(A) $a=0, b=2$.

(B) $a=0, b$ 为任意常数.

(C) $a=2, b=0$.

(D) $a=2, b$ 为任意常数.

【答案】 B.

【解析】 两个实对称矩阵相似的充分必要条件是相同的特征值.

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -a & -1 \\ -a & \lambda - b & -a \\ -1 & -a & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda[\lambda^2 - (b+2)\lambda + 2b - 2a^2]$$

因为

$$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & & \\ & \lambda - b & \\ & & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - b)$$

由 $\lambda=2$ 必是 A 的特征值, 即

$$|2E - A| = 2[2^2 - 2(b+2) + 2b - 2a^2] = 0$$

故必有 $a=0$.

由 $\lambda=b$ 必是 A 的特征值, 即 $|bE - A| = b[b^2 - (b+2)b + 2b] = 0, b$ 可为任意常数.

所以选(B).

小结

通过这几个试题希望你很好地归纳一下,面对实对称矩阵都有哪些求特征值、特征向量的方法技巧?

练习题

(2002,数四,8分) 设实对称矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{bmatrix}$, 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角形矩阵,

并计算行列式 $|A - E|$ 的值.

练习题参考答案

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

【解】 由矩阵 A 的特征多项式

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - a - 1 & \lambda - a - 1 & 0 \\ -1 & \lambda - a & 1 \\ 0 & a + 1 - \lambda & \lambda - a - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - a - 1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda - a & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - a - 1)^2 (\lambda - a + 2) \end{aligned}$$

得到矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = a + 1, \lambda_3 = a - 2$.

对于 $\lambda = a + 1$, 由 $[(a + 1)E - A]x = 0$, 得到两个线性无关的特征向量

$$\alpha_1 = (1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (1, 0, 1)^T$$

对于 $\lambda = a - 2$, 由 $[(a - 2)E - A]x = 0$, 得到特征向量 $\alpha_3 = (-1, 1, 1)^T$.

那么, 令 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 有

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} a+1 & & \\ & a+1 & \\ & & a-2 \end{bmatrix}$$

因为 A 的特征值是 $a + 1, a + 1, a - 2$, 故 $A - E$ 的特征值是 $a, a, a - 3$. 所以

$$|A - E| = a^2(a - 3)$$

【评注】 由 $A \sim \Lambda$, 知 $A - E \sim \Lambda - E$, 于是

$$|A - E| = |\Lambda - E| = \begin{vmatrix} a & & \\ & a & \\ & & a-3 \end{vmatrix} = a^2(a - 3)$$

亦可求出行列式 $|A - E|$ 的值.



第六章 二次型

本章导读

二次型实际上是特征值的几何应用,复习二次型就一定搞清它与特征值、特征向量之间的内在联系.

考点主要有三个:一个是二次型化标准形的正、反两方面的问题,依托的是特征值、特征向量相似对角化的理论与方法;一个是二次型的正定性,既有正定的判定,又有正定性质的运用,也都会涉及特征值;第三是合同,它是由二次型经坐标变换引申出来的概念.

一、二次型的概念与标准形

试题特点

用正交变换化二次型为标准形,求其标准就是求二次型矩阵 A 的特征值,求坐标变换就是求 A 的特征向量.

若求二次型的表达式就是求矩阵 A ,这样的试题一般都是实对称矩阵试题的翻版.

1 (2009, 21 题, 11 分) 设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

(I) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(II) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 求 a 的值.

【解】 (I) 二次型 f 的矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{bmatrix}$. 由于

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - a + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - a & \lambda - a & 0 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda - a + 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - a & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - a & 1 \\ -1 & 2 & \lambda - a + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - (a+1))(\lambda - (a-2)) \end{aligned}$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = a, \lambda_2 = a+1, \lambda_3 = a-2$.

(II) 因为二次型 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 说明正惯性指数 $p = 2$, 负惯性指数 $q = 0$, 那么二次型矩阵 A 的特征值为 $+, +, 0$.

显然 $a-2 < a < a+1$, 所以必有 $a = 2$.

【评注】 本题难度系数 0.495, 0.492, 0.516.

只要求出特征值, 或者知道特征值的+, -, 0 就有了正、负惯性指数也就可写规范形, 当然也有配方法这条化标准形的路, 但本题配方法不合适.

2 (2011, 13 题, 4 分) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x$ 的秩为 1, A 的各行元素之和为 3, 则 f 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为_____.

【答案】 $3y_1^2$.

【解析】 A 的各行元素之和为 3, 即

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + a_{13} = 3, \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} = 3, \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

所以 $\lambda = 3$ 是 A 的一个特征值.

再由二次型 $x^T A x$ 的秩为 $1 \Rightarrow r(A) = 1 \Rightarrow \lambda = 0$ 是 A 的 2 重特征值.

因此, 正交变换下标准形为: $3y_1^2$.

【评注】 难度系数 0.43.

3 (2012, 21 题, 11 分) 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix}$, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T (A^T A) x$ 的秩为 2.

(I) 求实数 a 的值;

(II) 求正交变换 $x = Qy$ 将二次型 f 化为标准形.

【解】 (I) 因为 $r(A^T A) = r(A)$, 对 A 施以初等行变换

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以当 $a = -1$ 时, $r(A) = 2$.

(II) 由 (I) 知 $A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, 那么

$$\begin{aligned} |\lambda E - A^T A| &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -2 \\ -2 & -4 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)(\lambda-6) \end{aligned}$$

矩阵 $A^T A$ 的特征值为 0, 2, 6.

对 $\lambda = 0$, 由 $(0E - A^T A)x = 0$ 得基础解系 $(-1, -1, 1)^T$;

对 $\lambda = 2$, 由 $(2E - A^T A)x = 0$ 得基础解系 $(-1, 1, 0)^T$;



对 $\lambda = 6$, 由 $(6E - A^T A)x = 0$ 得基础解系 $(1, 1, 2)^T$.

因为实对称矩阵特征值不同特征向量相互正交, 故只需单位化

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

那么令 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$, 有 $x^T(A^T A)x = y^T \Lambda y = 2y_2^2 + 6y_3^2$.

【评注】当然如果直接计算也可行, 但计算量是非常大.

$$\text{二次型矩阵 } A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & a & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1-a \\ 0 & 1+a^2 & 1-a \\ 1-a & 1-a & 3+a^2 \end{bmatrix}$$

由于 $A^T A$ 中有二阶子式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1+a^2 \end{vmatrix} = 2(1+a^2) \neq 0$, 所以二次型 f 的秩为 $2 \Leftrightarrow |A^T A| = 0$. 又

$$\begin{aligned} |A^T A| &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1-a \\ 0 & 1+a^2 & 1-a \\ 1-a & 1-a & 3+a^2 \end{vmatrix} = 2(1+a^2)(3+a^2) - (1-a)^2(1+a^2) - 2(1-a)^2 \\ &= (a+1)^2(a^2+3) \end{aligned}$$

所以 $a = -1$.

难度系数 0.436, 0.377, 0.408.

4 (2013, 21 题, 11 分) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$, 记

$$\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

(I) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$;

(II) 若 α, β 正交且均为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

【证明】(I) 记 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, 则

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = (x_1, x_2, x_3) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = (a_1, a_2, a_3) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

类似地 $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = x^T \beta = \beta^T x$.

故 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$

$$= 2(x^T \alpha)(\alpha^T x) + (x^T \beta)(\beta^T x)$$

$$= x^T(2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)x$$

又因 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$ 是对称矩阵, 所以二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$.

(II) 因 α, β 均是单位向量且相互正交, 有

$$A\alpha = (2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)\alpha = 2\alpha(\alpha^T\alpha) + \beta(\beta^T\alpha) = 2\alpha$$

$$A\beta = (2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)\beta = 2\alpha(\alpha^T\beta) + \beta(\beta^T\beta) = \beta$$

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$ 是 A 的特征值.

又因为 $\alpha\alpha^T, \beta\beta^T$ 都是秩为 1 的矩阵, 所以

$$r(A) = r(2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \leq r(2\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T) = 2 < 3$$

故 $\lambda_3 = 0$ 是矩阵 A 的特征值.

因此经正交变换二次型 f 的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

【评注】 下面给出的是当年一些考生选择的方法, 当然这样解也是对的.

因为二次型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2 \\ &= 2(a_1^2x_1^2 + a_2^2x_2^2 + a_3^2x_3^2 + 2a_1a_2x_1x_2 + 2a_1a_3x_1x_3 + 2a_2a_3x_2x_3) \\ &\quad + (b_1^2x_1^2 + b_2^2x_2^2 + b_3^2x_3^2 + 2b_1b_2x_1x_2 + 2b_1b_3x_1x_3 + 2b_2b_3x_2x_3) \\ &= (2a_1^2 + b_1^2)x_1^2 + (2a_2^2 + b_2^2)x_2^2 + (2a_3^2 + b_3^2)x_3^2 + 2(2a_1a_2 + b_1b_2)x_1x_2 \\ &\quad + 2(2a_1a_3 + b_1b_3)x_1x_3 + 2(2a_2a_3 + b_2b_3)x_2x_3 \end{aligned}$$

所以按定义二次型矩阵

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2a_1^2 + b_1^2 & 2a_1a_2 + b_1b_2 & 2a_1a_3 + b_1b_3 \\ 2a_1a_2 + b_1b_2 & 2a_2^2 + b_2^2 & 2a_2a_3 + b_2b_3 \\ 2a_1a_3 + b_1b_3 & 2a_2a_3 + b_2b_3 & 2a_3^2 + b_3^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2a_1^2 & 2a_1a_2 & 2a_1a_3 \\ 2a_1a_2 & 2a_2^2 & 2a_2a_3 \\ 2a_1a_3 & 2a_2a_3 & 2a_3^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1b_2 & b_1b_3 \\ b_1b_2 & b_2^2 & b_2b_3 \\ b_1b_3 & b_2b_3 & b_3^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

故 $A = 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$.

难度系数 0.454, 0.400, 0.426.

5 (2014, 13 题, 4 分) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1, 则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $[-2, 2]$.

【解析】 由配方法可得

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + 2ax_1x_3 + a^2x_3^2 - (x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2) + 4x_3^2 - a^2x_3^2 \\ &= (x_1 + ax_3)^2 - (x_2 - 2x_3)^2 + (4 - a^2)x_3^2 \end{aligned}$$

因为负惯性指数是 1, 故 $4 - a^2 \geq 0$, 解出 $a \in [-2, 2]$.

6 (2015, 6 题, 4 分) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Py$ 下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 其中 $P = [e_1, e_2, e_3]$, 若 $Q = [e_1, -e_3, e_2]$, 则 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为
(A) $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$. (B) $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$. (C) $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$. (D) $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

【答案】 A.

【解析】 f 在正交变换 $x = Py$ 下标准形 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 意味着 A 的特征值: 2, 1, -1.

又 $P = [e_1, e_2, e_3]$ 说明 2, 1, -1 的特征向量依次为 e_1, e_2, e_3 .



由 e_3 是 -1 的特征向量, 知 $-e_3$ 仍是 -1 的特征向量, 故 $Q = [e_1, -e_3, e_2]$ 时二次型的标准形为: $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$. 应选 (A).

或者, 由

$$Q = [e_1 - e_3, e_2] = [e_1, e_2, e_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

知

$$x = Qy = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} y_1 \\ y_3 \\ -y_2 \end{bmatrix}$$

又因二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Py$ 下的标准形是 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 所以 f 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为: $2y_1^2 + y_3^2 - (-y_2)^2$, 即 $2y_1^2 + y_3^2 - y_2^2$.

本题难度系数 0.353.

7 (2016, 6 题, 4 分) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别为 1, 2, 则

(A) $a > 1$.

(B) $a < -2$.

(C) $-2 < a < 1$.

(D) $a = 1$ 或 $a = -2$.

【答案】 C.

【解析】 二次型矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

由特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - a & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - a - 2)(\lambda - a + 1)^2$$

矩阵 A 的特征值: $a + 2, a - 1, a - 1$.

由 $p = 1, q = 2$ 可知 $\begin{cases} a + 2 > 0, \\ a - 1 < 0, \end{cases}$ 所以 $-2 < a < 1$.

8 (2017, 21 题, 11 分) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2x_3$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$, 求 a 的值及一个正交矩阵 Q .

【解】 二次型矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & a \end{bmatrix}$$

由正交变换下标准形是 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$, 说明 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, 0$. 所以

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & a \end{vmatrix} = -3(a - 2) = 0$$

故 $a = 2$.

$$\begin{aligned} \text{由 } |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 4 \\ -1 & \lambda+1 & -1 \\ 4 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-6 & 0 & 6-\lambda \\ -1 & \lambda+1 & -1 \\ 4 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda-6 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & -2 \\ 4 & -1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+3)(\lambda-6) = 0, \end{aligned}$$

得矩阵 A 的特征值: $6, -3, 0$.

由 $(6E - A)x = 0$ 得基础解系 $\alpha_1 = (1, 0, -1)^T$, 即 $\lambda = 6$ 的特征向量.

由 $(-3E - A)x = 0$ 得基础解系 $\alpha_2 = (1, -1, 1)^T$, 即 $\lambda = -3$ 的特征向量.

由 $(0E - A)x = 0$ 得基础解系 $\alpha_3 = (1, 2, 1)^T$, 即 $\lambda = 0$ 的特征向量.

因实对称矩阵特征值不同特征向量相互正交, 故只需单位化, 有

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{那么 } Q = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \text{ 经 } x = Qy \text{ 有}$$

$$x^T A x = y^T \Lambda y = 6y_1^2 - 3y_2^2$$

【评注】 本题难度系数 0.574, 0.485, 0.539.

9 (2018, 20 题, 11 分) 设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + ax_3)^2$, 其中 a 是参数.

(I) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解;

(II) 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形.

【解】 (I) 平方和 $f(x_1, x_2, x_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + ax_3 = 0. \end{cases} \quad (*)$

$$\text{由 } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = a - 2,$$

如果 $a \neq 2$, $(*)$ 只有零解, 即 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 只有零解, $x = 0$.

如果 $a = 2$,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(*)$ 基础解系为 $(-2, -1, 1)^T$.

故 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解为 $x = k(-2, -1, 1)^T$, k 为任意常数.



(II) 当 $a \neq 2$ 时,

$$\text{令} \begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_3, \\ y_2 = x_2 + x_3, \\ y_3 = x_1 + ax_3, \end{cases} \quad (**)$$

因 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} \neq 0, (**) \text{ 是坐标变换.}$

$f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

当 $a = 2$ 时,

$$\begin{aligned} f &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + 2x_3)^2 \\ &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 \\ &= 2\left[x_1^2 - x_1(x_2 - 3x_3) + \frac{1}{4}(x_2 - 3x_3)^2\right] + 2x_2^2 + 6x_3^2 - \frac{1}{2}(x_2 - 3x_3)^2 \\ &= 2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{2}x_2^2 + 3x_2x_3 + \frac{3}{2}x_3^2 \\ &= 2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{2}(x_2 + x_3)^2, \text{ 可得规范形 } y_1^2 + y_2^2. \end{aligned}$$

【评注】 当 $a = 2$ 时, 如注意到 $(x_1 - x_2 + x_3) + (x_2 + x_3) = x_1 + 2x_3$, 也可先经坐标变换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

得 $f = \mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y} = y_1^2 + y_2^2 + (y_1 + y_2)^2 = 2y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_1y_2$.

$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 由于矩阵 $\mathbf{B}$ 的特征值 3, 1, 0, 从而规范形为 $z_1^2 + z_2^2$.

本题难度系数 0.347, 0.248, 0.303.

10 (2019, 6 题, 4 分) 设 $\mathbf{A}$ 是三阶实对称矩阵, $\mathbf{E}$ 是三阶单位矩阵. 若 $\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} = 2\mathbf{E}$, 且 $|\mathbf{A}| = 4$, 则二次型 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 的规范形为

(A) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

(B) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

(C) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

(D) $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

【答案】 C.

【解析】 规范形由 p, q 而定, 从判断特征值入手.

设 $\mathbf{A}\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0$.

由 $\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} = 2\mathbf{E}$, 有 $\mathbf{A}^2\alpha + \mathbf{A}\alpha - 2\alpha = \mathbf{0}$ 即 $(\lambda^2 + \lambda - 2)\alpha = \mathbf{0}$,

知 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, 矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值只能是 1 或 -2.

又因 $|\mathbf{A}| = 4$, 所以矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值是: 1, -2, -2.

从而二次型的规范形是 $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$. 选 (C).

11 (2020, 20 题, 11 分) 设二次型 $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$ 经正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 化为

二次型 $g(y_1, y_2) = ay_1^2 + 4y_1y_2 + by_2^2$, 其中 $a \geq b$.

- (I) 求 a, b 值;
 (II) 求正交矩阵 Q .

【解】 (I) 二次型 f 经正交变换 $x = Qy$ 化为二次型 g . 记二次型 f, g 的矩阵分别是 A 和 B .

即

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 2 & b \end{bmatrix}$$

因 $A \sim B$, 于是 $\sum a_{ii} = \sum b_{ii}$, $|A| = |B|$, 即 $\begin{cases} a+b=5, \\ ab=4. \end{cases}$

又因 $a \geq b$, 故 $a = 4, b = 1$.

(II) 对二次型 $f = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$ 和 $g = 4y_1^2 + 4y_1y_2 + y_2^2$,

只要令 $\begin{cases} x_1 = y_2, \\ x_2 = -y_1, \end{cases}$ 即 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$.

$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 是正交矩阵合于所求.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

【评注】 如求出 A 的特征向量并单位化构造正交矩阵 $Q_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$,

经 $x = Q_1z$ 得 $x^T Ax = 5z_1^2$.

类似构造正交矩阵 Q_2 使 $y^T By = 5z_2^2$, 即 $x = Q_1z, y = Q_2z$ 有 $z = Q_2^{-1}y$,

从而 $x = Q_1Q_2^{-1}y$ 而得 $Q = Q_1Q_2^{-1}$ 亦可.

练习题

1. (2005, 数一, 9 分) 已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$$

的秩为 2

- (I) 求 a 的值;
 (II) 求正交变换 $x = Qy$, 把 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成标准形;
 (III) 求方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解.

2. (2010, 数一, 11 分) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T Ax$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 y_1^2

+ y_2^2 , 且 Q 的第 3 列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$.

- (I) 求矩阵 A ;
 (II) 证明 $A + E$ 为正定矩阵, 其中 E 为三阶单位矩阵.

练习题参考答案

1. 【解】 (I) 二次型矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 由于二次型 f 的秩为 2,

即 $r(A) = 2$, 所以有 $|A| = 2 \begin{vmatrix} 1-a & 1+a \\ 1+a & 1-a \end{vmatrix} = -8a = 0$, 得 $a = 0$.



(II) 当 $\alpha = 0$ 时, 由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2)^2 = 0$,

知矩阵 A 的特征值是 $2, 2, 0$.

对 $\lambda = 2$, 由 $(2E - A)x = 0$, $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

得特征向量 $\alpha_1 = (1, 1, 0)^T$, $\alpha_2 = (0, 0, 1)^T$.

对 $\lambda = 0$, 由 $(0E - A)x = 0$, $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

得特征向量 $\alpha_3 = (1, -1, 0)^T$.

由于特征向量已经两两正交, 只需单位化, 于是有

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T, \gamma_2 = (0, 0, 1)^T, \gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T$$

令 $Q = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 那么, 二次型 f 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2y_1^2 + 2y_2^2$$

(III) (方法一) 由(II)知, 在正交变换 $x = Qy$ 下, $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 化成 $2y_1^2 + 2y_2^2 = 0$, 解之得 $y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = t$ (t 为任意实数), 从而

$$x = Q \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = t\gamma_3 = t(1, -1, 0)^T$$

即方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解是 $k(1, -1, 0)^T$, k 为任意实数.

(方法二) 由于 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 + 2x_3^2 = 0$, 所以

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

其通解为 $x = k(-1, 1, 0)^T$, 其中 k 为任意常数.

【评注】 本题的前两问是常规题, 也是常见的, 只要按步骤处理即可, 要注意对(III)的理解, 本题难度系数 0.563.

2. 【分析】 本题已知二次型在正交变换下的标准形就是已知矩阵 A 的特征值, 而 Q 的列就是 A 的特征向量, 现在的问题是如何求出 A 的所有线性无关的特征向量? 反求出矩阵 A ?

【解】 (I) 二次型 $x^T Ax$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2$, 说明二次型矩阵 A 的特征值是 $1, 1, 0$. 又因 Q 的第 3 列是 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$, 说明 $\alpha_3 = (1, 0, 1)^T$ 是矩阵 A 关于特征值 $\lambda = 0$ 的特征向量. 因为 A 是实对称矩阵, 特征值不同特征向量相互正交. 设 A 关于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征向量为

$\alpha = (x_1, x_2, x_3)^T$, 则 $\alpha^T \alpha_3 = 0$, 即 $x_1 + x_3 = 0$.

取 $\alpha_1 = (0, 1, 0)^T, \alpha_2 = (-1, 0, 1)^T$, 那么 α_1, α_2 是 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征向量.

由 $A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\alpha_1, \alpha_2, 0]$ 有

$$\begin{aligned} A &= [\alpha_1, \alpha_2, 0][\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(II) 由于 $A+E$ 是对称矩阵, 且矩阵 A 的特征值是 $1, 1, 0$, 那么 $A+E$ 的特征值是 $2, 2, 1$. 因为 $A+E$ 的特征值全大于 0 , 所以 $A+E$ 正定.

【评注】 本题也可把 α_1, α_2 单位化处理(它们已经正交!)构造出正交矩阵 Q , 即

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \text{ 则 } Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}. \text{ 于是有 } A = Q\Lambda Q^T = \dots$$

因为在(I)中已求出矩阵 A , 那么计算 $A+E$ 的顺序主子式 $\Delta_1 = \frac{3}{2}, \Delta_2 = 3, \Delta_3 = 4$ 全大于 0 也可证出 $A+E$ 正定.

本题综合性强, 知识点多, 复习二次型一定要搞清二次型和特征值知识点之间的衔接和转换, 难度系数 0.385 .

二、二次型的正定

试题特点

围绕正定的定义“ $\forall x \neq 0$ 必有 $x^T Ax > 0$ ”设计的试题一般难度较大, 用特征值(参看 2010 年数一试题)、顺序主子式的考题是容易的.

复习时, 注意考定义法的题(参看下面的练习题)

练习题

(1999, 数一, 6 分) 设 A 为 m 阶实对称矩阵且正定, B 为 $m \times n$ 实矩阵, B^T 为 B 的转置矩阵, 试证: $B^T AB$ 为正定矩阵的充分必要条件是 B 的秩 $r(B) = n$.



练习题参考答案

【证明】 必要性. 设 $B^T AB$ 为正定矩阵, 按定义 $\forall x \neq 0$, 恒有 $x^T (B^T AB) x > 0$,

即 $\forall x \neq 0$, 恒有 $(Bx)^T A(Bx) > 0$, 即 $\forall x \neq 0$, 恒有 $Bx \neq 0$,

因此, 齐次线性方程组 $Bx = 0$ 只有零解, 从而 $r(B) = n$.

充分性. 因 $(B^T AB)^T = B^T A^T (B^T)^T = B^T AB$, 知 $B^T AB$ 为实对称矩阵,

若 $r(B) = n$, 则齐次方程组 $Bx = 0$ 只有零解, 那么 $\forall x \neq 0$ 必有 $Bx \neq 0$,

又 A 为正定矩阵, 所以对于 $Bx \neq 0$, 恒有 $(Bx)^T A(Bx) > 0$,

即当 $x \neq 0$ 时, $x^T (B^T AB) x > 0$, 故 $B^T AB$ 为正定矩阵.

【评注】 本题的证法很多. 例如, 利用秩的定义和性质可证必要性.

由 $B^T AB$ 是 n 阶正定矩阵, 知 $n = r(B^T AB) \leq r(B) \leq \min(m, n) \leq n$.

所以 $r(B) = n$ (请说出上述每一步成立的理由).

本题充分性的证明也可以用特征值法:

设 λ 是 $B^T AB$ 的任一特征值, α 是属于特征值 λ 的特征向量, 即 $(B^T AB)\alpha = \lambda\alpha$, 用 α^T 左乘等式的两端有 $(B\alpha)^T A(B\alpha) = \lambda\alpha^T \alpha$.

因为秩 $r(B) = n$, $\alpha \neq 0$, 知 $B\alpha \neq 0$ 以及 $\alpha^T \alpha = \|\alpha\|^2 > 0$, 又因 A 正定, 故由

$$\lambda\alpha^T \alpha = (B\alpha)^T A(B\alpha) > 0$$

得到 $\lambda > 0$. 所以 $B^T AB$ 正定.

本题证法虽很多, 但得分率却是当年数学一中最底的, 人均仅 0.78 分, 但是区分度高, 反映出优秀考生解本题并不困难. 对于定义法, 对于各概念的衔接与转换是考生复习时应当注意的.

三、合同矩阵

试题特点

不是重点, 填空、选择为主.

$$A \simeq B \Leftrightarrow p_A = p_B, q_A = q_B$$

通过什么来确定正、负惯性指数? 特征值!!! 有时也可用配方法.

注意相似与合同的联系和区别.

练习题

(2001, 数一, 3 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 则 A 与 B

(A) 合同且相似.

(B) 合同但不相似.

(C) 不合同但相似.

(D) 不合同且不相似.

练习题参考答案

【答案】 A.

【解析】 由于 $|\lambda E - A| = \lambda^4 - 4\lambda^3 = 0 \Rightarrow A$ 的特征值为 $4, 0, 0, 0$. 又因 A 是实对称矩阵, A 必

与对角矩阵 $\begin{bmatrix} 4 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$ 相似. 所以 A 与 B 必相似.

因为 A, B 有相同的特征值, 从而二次型 $x^T Ax$ 与 $x^T Bx$ 有相同的正、负惯性指数, 从而 A 与 B 亦合同. 故选 (A).

心得笔记:

划重点本

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



第三部分 概率论与数理统计

第一章 随机事件和概率

本章导读

本章是概率论与数理统计的基础,近几年单独出本章的考题较少,平均2~3年一个小题,大多作为基本知识点出现在以后的各章的考题中,应该将本章有关的重点的基本概念、基本理论和基本方法理解透彻和熟练掌握.

试题特点

本章的考题大多是选择题或填空题,考核重点有事件的关系和运算、概率的性质、概率的五大公式(加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式以及贝叶斯公式)、古典概型和伯努利概型.

一部分考生对古典概型中的难题感到困难.其实考试大纲对古典概型和几何概型只要会计算一般难度的题型就可以,不必刻意去做各种复杂的题型.

本章的选择题或填空题一般会综合3~4个考点,计算量不太大.

考题详析

一、事件关系, 概率性质和五大公式

1 (2009, 7题, 4分) 设事件 A 与事件 B 互不相容, 则

$$(A) P(\bar{A}\bar{B}) = 0.$$

$$(B) P(AB) = P(A)P(B).$$

$$(C) P(A) = 1 - P(B).$$

$$(D) P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1.$$

【答案】 D.

【解析】 A 与 B 互不相容, 即有 $A \cap B = \emptyset$, 选项(B)是 A 与 B 相互独立的定义, 如果 A 与 B 为对立事件(C)就成立, 所以(B)(C)均不成立.

至于 $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$ 在 $A \cap B = \emptyset$ 时不能保证 $P(A \cup B) = 1$, (A)也不成立, 根据排除法原理, 答案必为(D), 当然我们也可以直接推导(D)成立.

$$A \cap B = \emptyset, P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{AB}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - P(\emptyset) = 1, (D) \text{ 成立,}$$



答案应选(D).

2 (2012, 14 题, 4 分) 设 A, B, C 是随机事件, A 与 C 互不相容, $P(AB) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{3}$, 则 $P(AB | \bar{C}) =$ _____.

【答案】 $\frac{3}{4}$.

【解析】 A 与 C 互不相容, 即有 $\bar{C} \supset A$, 当然更有 $\bar{C} \supset AB$, 所以

$$P(AB | \bar{C}) = \frac{P(AB\bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{P(AB)}{1 - P(C)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$$

3 (2014, 7 题, 4 分) 设随机事件 A 与 B 相互独立, 且 $P(B) = 0.5, P(A - B) = 0.3$, 则 $P(B - A) =$

- (A) 0.1. (B) 0.2. (C) 0.3. (D) 0.4.

【答案】 B.

【解析】 A, B 独立, 则 $A, \bar{B}$ 独立, $\bar{A}, B$ 也独立, 而 $A - B = A\bar{B}, B - A = B\bar{A}$ 可用独立性来计算.

$$P(A - B) = P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B}) = 0.3, \text{ 即 } P(A) \cdot 0.5 = 0.3, \text{ 所以 } P(A) = 0.6;$$

$$P(B - A) = P(B\bar{A}) = P(B)P(\bar{A}) = 0.5 \times 0.4 = 0.2.$$

4 (2015, 7 题, 4 分) 若 A, B 为任意两个随机事件, 则

- (A) $P(AB) \leq P(A)P(B)$. (B) $P(AB) \geq P(A)P(B)$.
(C) $P(AB) \leq \frac{P(A) + P(B)}{2}$. (D) $P(AB) \geq \frac{P(A) + P(B)}{2}$.

【答案】 C.

【解析】 由于 $AB \subset (A \cup B)$, 故 $P(AB) \leq P(A \cup B)$. 又根据加法公式

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

所以

$$P(AB) \leq P(A) + P(B) - P(AB), \text{ 即 } 2P(AB) \leq P(A) + P(B)$$

$$P(AB) \leq \frac{P(A) + P(B)}{2}$$

答案应选(C).

5 (2016, 7 题, 4 分) 设 A, B 为两个随机事件, 且 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$, 如果 $P(A | B) = 1$, 则

- (A) $P(\bar{B} | \bar{A}) = 1$. (B) $P(A | \bar{B}) = 0$.
(C) $P(A \cup B) = 1$. (D) $P(B | A) = 1$.

【答案】 A.

【解析】 $P(A | B) = 1$, 则 $P(\bar{A} | B) = 0$, 也就有 $P(\bar{A}B) = 0, P(B | \bar{A}) = 0$ 得

$$P(\bar{B} | \bar{A}) = 1$$

6 (2017, 7 题, 4 分) 设 A, B, C 为三个随机事件, 且 A 与 C 相互独立, B 与 C 相互独立, 则 $A \cup B$ 与 C 相互独立的充分必要条件是

- (A) A 与 B 相互独立. (B) A 与 B 互不相容.



(C) AB 与 C 相互独立.

(D) AB 与 C 互不相容.

【答案】 C.

【解析】 $A \cup B$ 与 C 相互独立的充要条件是

$$\begin{aligned} P((A \cup B) \cap C) &= P(A \cup B)P(C) \\ P((A \cup B) \cap C) &= P(AC \cup BC) = P(AC) + P(BC) - P(AC \cap BC) \\ &= P(AC) + P(BC) - P(ABC) \\ P(A \cup B)P(C) &= [P(A) + P(B) - P(AB)]P(C) \\ &= P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(AB)P(C) \end{aligned}$$

所以 $A \cup B$ 与 C 相互独立的充要条件为 $P(ABC) = P(AB)P(C)$. 即 AB 与 C 相互独立. 答案应选(C).

7 (2018, 14 题, 4 分) 随机事件 A, B, C 相互独立, 且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, 则

$$P(AC | A \cup B) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $\frac{1}{3}$.

【解析】 $P(AC | A \cup B) = \frac{P(AC(A \cup B))}{P(A \cup B)},$

$$\text{其中 } P(AC(A \cup B)) = P(AC \cup ABC) = P(AC) = P(A)P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{和 } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - P(A)P(B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{所以, } P(AC | A \cup B) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

8 (2019, 7 题, 4 分) 设 A, B 为随机事件, 则 $P(A) = P(B)$ 的充分必要条件是

(A) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

(B) $P(AB) = P(A)P(B)$.

(C) $P(A\bar{B}) = P(B\bar{A})$.

(D) $P(AB) = P(\bar{A}\bar{B})$.

【答案】 C.

【解析】 本题考查概率的加法公式, 减法公式等基本性质.

$$P(A\bar{B}) = P(A - B) = P(A) - P(AB), \text{ 而 } P(B\bar{A}) = P(B - A) = P(B) - P(AB),$$

$$P(A\bar{B}) = P(B\bar{A}), \text{ 即 } P(A) - P(AB) = P(B) - P(AB), \text{ 等价于 } P(A) = P(B).$$

答案应选(C).

9 (2020, 7 题, 4 分) 设 A, B, C 为三个随机事件, 且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$, $P(AB) =$

0 , $P(AC) = P(BC) = \frac{1}{12}$, 则 A, B, C 中恰有一个事件发生的概率为

(A) $\frac{3}{4}$.

(B) $\frac{2}{3}$.

(C) $\frac{1}{2}$.

(D) $\frac{5}{12}$.

【答案】 D.

【解析】 A, B, C 中恰有一个事件发生即 $(A \cup B \cup C) - (AB \cup BC \cup AC)$. 因为 $P(AB) = 0$, 故 $P(ABC) = 0$, 所以恰有一个事件发生可以只考虑 $(A \cup B \cup C) - (BC \cup AC)$ 的概率

$$P((A \cup B \cup C) - (BC \cup AC)) = P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) - P(AC) - P(BC) - P(AC)$$



$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

答案选(D).

练习题

1. (1998, 数四, 3分) 设 A, B, C 是三个相互独立的随机事件, 且 $0 < P(C) < 1$, 则在下列给定的四对事件中不相互独立的是

- (A) $\overline{A+B}$ 与 C . (B) $\overline{AC}$ 与 $\overline{C}$. (C) $\overline{A-B}$ 与 $\overline{C}$. (D) $\overline{AB}$ 与 $\overline{C}$.

2. (2001, 数四, 3分) 对于任意二事件 A 和 B , 与 $A \cup B = B$ 不等价的是

- (A) $A \subset B$. (B) $\overline{B} \subset \overline{A}$. (C) $A\overline{B} = \emptyset$. (D) $\overline{AB} = \emptyset$.

3. (2003, 数四, 4分) 对于任意二事件 A 和 B

- (A) 若 $AB \neq \emptyset$, 则 A, B 一定独立. (B) 若 $AB \neq \emptyset$, 则 A, B 有可能独立.
(C) 若 $AB = \emptyset$, 则 A, B 一定独立. (D) 若 $AB = \emptyset$, 则 A, B 一定不独立.

练习题参考答案

1. 【答案】 B.

【解析】 当 $P(C) < 1, P(AC) > 0$ 时, 用反证法, 如果 $\overline{AC}$ 与 $\overline{C}$ 独立, 即 AC 与 C 独立,

$$P(AC \cap C) = P(AC)P(C)$$

也就有 $P(AC) = P(AC)P(C)$, 即 $P(C) = 1$, 这与题设矛盾.

答案应选(B).

【评注】 (1) 相互独立的随机事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中任何一部分事件, 包括它们之和, 差, 积, 逆等运算的结果, 必与其余的另一部分事件或它们之和, 差, 积, 逆等运算的结果都是相互独立的

因此(A)(C)(D) 三对事件必为相互独立.

(2) 原题中的条件 $0 < P(C) < 1$ 应改为 $P(C) < 1$ 和 $P(AC) > 0$, 否则当 $P(AC) = 0$ 时, AC 与任何事件都独立.

(3) 如果仅有条件 $0 < P(C) < 1$, 本题可改为:

设 A, B, C 是三个相互独立的随机事件, 且 $0 < P(C) < 1$, 则可以构造有可能不相互独立的事件是

- (A) $\overline{A+B}$ 与 C . (B) $\overline{AC}$ 与 $\overline{C}$.
(C) $\overline{A-B}$ 与 $\overline{C}$. (D) $\overline{AB}$ 与 $\overline{C}$.

2. 【答案】 D.

【解析】 $A \cup B = B$ 等价于 $A \subset B$, 或等价于 $\overline{B} \subset \overline{A}$, 或等价于 $A\overline{B} = \emptyset$, 这就排除(A)(B)(C) 三选项, 只能选(D) 了, 也可以从(D) 直接推得 $A \supset B$, 不等价于 $A \cup B = B$.

答案应选(D).

3. 【答案】 B.

【解析】 当 $AB \neq \emptyset$ 时, A 与 B 有可能独立,

只要 $P(AB) = P(A)P(B)$ 成立, 故答案应选(B).



【评注】(1) 凡是概率等于零的事件必与任何事件独立.

因为 $P(A) = 0$ 时, $P(AB) \leq P(A)$, 所以 $0 = P(AB) = P(A)P(B)$.

(2) 凡是概率等于 1 的事件必与任何事件独立.

因为 $P(A) = 1$ 时, $P(\bar{A}) = 0$, $P(\bar{A}B) = 0$. 所以

$$P(AB) = P(AB) + P(\bar{A}B) = P(B) = P(A)P(B)$$

二、古典概型, 几何概型和伯努利概型

10 (2016, 14 题, 4 分) 设袋中有红、白、黑球各 1 个, 从中有放回地取球, 每次取 1 个, 直到三种颜色的球都取到时停止, 则取球次数恰好为 4 的概率为_____.

【答案】 $\frac{2}{9}$.

【解析】 本题为古典概型, 用概率公式 $P(A) = \frac{m}{n}$.

n 计算: 恰好取 4 次停止, 每次取球有 3 种不同颜色, 又是有放回的, 所以总的情况 $n = 3^4$.

m 计算: 先考虑第 4 次的颜色, 这颜色一定与前 3 次的不同. 前 3 次必定已有且仅有 2 种不同颜色, 这样第 4 次抽到第 3 色才凑够 3 种颜色, 总之第 4 次有 3 种可能, 前 3 次由其余 2 种颜色构成, 其总数为每次有 2 种可能, 3 次有 $2^3 = 8$ 种可能, 扣除 3 次同一色共 2 种, 所以前 3 次由 2 种不同颜色构成共有 $8 - 2 = 6$ 种可能, 所以 $m = 3 \times 6 = 18$.

$$P(A) = \frac{18}{3^4} = \frac{2}{9}$$

练习题

(2006, 数一, 4 分) 设 A, B 为两个随机事件, 且 $P(B) > 0$, $P(A|B) = 1$, 则必有

(A) $P(A \cup B) > P(A)$.

(B) $P(A \cup B) > P(B)$.

(C) $P(A \cup B) = P(A)$.

(D) $P(A \cup B) = P(B)$.

练习题参考答案

【答案】 C.

【解析】 由 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = 1$, 得到 $P(AB) = P(B)$. 根据加法公式有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A)$$

答案应选(C).

第二章 随机变量及其分布

本章导读

本章作为基础渗透到以后的各章考题中,尤其是第三章多维随机变量及其分布,近几年的考题大多在多维随机变量这章中,多维要会做当然一维也要会做,尤其是多维随机变量函数的分布的考题近年考得较多,不过没有一维的基础,多维就无法掌握.

试题特点

本章的考点:分布函数、分布律、概率密度,常考的一些分布的性质.这些考点常以选择题或填空题的形式来考查.

随机变量函数的分布常出现在较大的解答题中.

考题详析

1 (2010, 7 题, 4 分) 设随机变量 X 的分布函数 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 1. \end{cases}$

则 $P\{X = 1\} =$

(A) 0.

(B) $\frac{1}{2}$.

(C) $\frac{1}{2} - e^{-1}$.

(D) $1 - e^{-1}$.

【答案】 C.

【解析】 根据分布函数的性质 $P\{X = x\} = F(x) - F(x-0)$, 不难计算 $P\{X = 1\}$ 的值.

$$P\{X = 1\} = F(1) - F(1-0) = 1 - e^{-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - e^{-1}.$$

所以答案应选(C).

2 (2010, 8 题, 4 分) 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度, $f_2(x)$ 为 $[-1, 3]$ 上均匀分布的概率密度, 若

$$f(x) = \begin{cases} af_1(x), & x \leq 0, \\ bf_2(x), & x > 0, \end{cases} \quad (a > 0, b > 0)$$

为概率密度, 则 a, b 应满足

(A) $2a + 3b = 4$.

(B) $3a + 2b = 4$.

(C) $a + b = 1$.

(D) $a + b = 2$.



【答案】 A.

【解析】 根据密度函数的性质: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$, 以及正态分布和均匀分布的性质, 可以求出 a, b 应满足的条件.

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 a f_1(x) dx + \int_0^{+\infty} b f_2(x) dx = a \int_{-\infty}^0 f_1(x) dx + b \int_0^{+\infty} f_2(x) dx.$$

$f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度, 其对称中心在 $x = 0$ 处, 故 $\int_{-\infty}^0 f_1(x) dx = \frac{1}{2}$.

$f_2(x)$ 为 $[-1, 3]$ 上均匀分布的概率密度, 即

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -1 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty} f_2(x) dx = \int_0^3 \frac{1}{4} dx = \frac{3}{4}. \text{ 所以 } 1 = a \cdot \frac{1}{2} + b \cdot \frac{3}{4}, \text{ 即 } 2a + 3b = 4. \text{ 答案选(A).}$$

3 (2013, 7 题, 4 分) 设 X_1, X_2, X_3 是随机变量, 且 $X_1 \sim N(0, 1), X_2 \sim N(0, 2^2), X_3 \sim N(5, 3^2)$, $p_i = P\{-2 \leq X_i \leq 2\} (i = 1, 2, 3)$, 则

(A) $p_1 > p_2 > p_3$.

(B) $p_2 > p_1 > p_3$.

(C) $p_3 > p_1 > p_2$.

(D) $p_1 > p_3 > p_2$.

【答案】 A.

【解析】 因为 $X_1 \sim N(0, 1)$, 所以

$$p_1 = P\{-2 \leq X_1 \leq 2\} = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1$$

因为 $X_2 \sim N(0, 2^2)$, 所以

$$\begin{aligned} p_2 &= P\{-2 \leq X_2 \leq 2\} = P\left\{-1 \leq \frac{X_2 - 0}{2} \leq 1\right\} \\ &= \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 \end{aligned}$$

因为 $X_3 \sim N(5, 3^2)$, 所以

$$p_3 = P\{-2 \leq X_3 \leq 2\} = P\left\{-\frac{7}{3} \leq \frac{X_3 - 5}{3} \leq -1\right\} = \Phi(-1) - \Phi\left(-\frac{7}{3}\right)$$

因为 $\Phi(x)$ 为单调增函数, 所以

$$p_1 = 2\Phi(2) - 1 > 2\Phi(1) - 1 = p_2$$

又因为 $\Phi(1) - \Phi(-1) > 68\%$, 所以

$$p_2 = \Phi(1) - \Phi(-1) > 0.5 > \Phi(-1) > \Phi(-1) - \Phi\left(-\frac{7}{3}\right) = p_3$$

故 $p_1 > p_2 > p_3$, 所以应选(A).

4 (2018, 7 题, 4 分) 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x) = f(1-x)$, 且

$$\int_0^2 f(x) dx = 0.6, \text{ 则 } P\{X < 0\} =$$

(A) 0.2.

(B) 0.3.

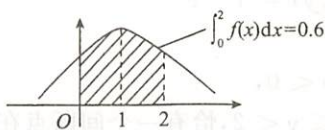
(C) 0.4.

(D) 0.5.

【答案】 A.

【解析】 因为 $f(1+x) = f(1-x)$, 所以概率密度函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处对称.

(方法一) 用图形表示



根据对称性 $P\{X < 0\} = P\{X > 2\} = \frac{1-0.6}{2} = 0.2$. 答案应选(A).

$$\begin{aligned}
 \text{(方法二)} \quad 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx + \int_2^{+\infty} f(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^0 f(x) dx + 0.6 + \int_1^{+\infty} f(1+t) dt = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + 0.6 + \int_1^{+\infty} f(1-t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^0 f(x) dx + 0.6 + \int_0^{+\infty} f(s) d(-s) = 2 \int_{-\infty}^0 f(x) dx + 0.6
 \end{aligned}$$

所以 $P\{X < 0\} = \int_{-\infty}^0 f(x) dx = 0.2$. 答案应选(A).

5 (2019, 8题, 4分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P\{|X - Y| < 1\}$

- (A) 与 μ 无关, 而与 σ^2 有关. (B) 与 μ 有关, 而与 σ^2 无关.
 (C) 与 μ, σ^2 都有关. (D) 与 μ, σ^2 都无关.

【答案】 A.

【解析】 X, Y 独立且都服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 (X, Y) 必为二维正态分布. $X - Y$ 服从 $N(0, 2\sigma^2)$ 分布, 可以推出 $P\{|X - Y| < 1\}$ 与 μ 无关, 只与 σ^2 有关.

$$\begin{aligned}
 P\{|X - Y| < 1\} &= P\{-1 < X - Y < 1\} = P\{-1 < X - Y \leq 1\} \\
 &= P\left\{-\frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}} < \frac{X - Y}{\sqrt{2\sigma^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}}\right\} \\
 &= P\left\{\frac{X - Y}{\sqrt{2\sigma^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}}\right\} - P\left\{\frac{X - Y}{\sqrt{2\sigma^2}} \leq -\frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}}\right\}
 \end{aligned}$$

$\frac{X - Y}{\sqrt{2\sigma^2}} \sim N(0, 1)$, 记 $N(0, 1)$ 的分布函数为 $\Phi(x)$, 则

$$P\{|X - Y| < 1\} = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) = 2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) - 1$$

答案应选(A).

练习题

- (1999, 数四, 3分) 假设随机变量 X 服从指数分布, 则随机变量 $Y = \min\{X, 2\}$ 的分布函数
- (A) 是连续函数. (B) 至少有两个间断点.
 (C) 是阶梯函数. (D) 恰巧有一个间断点.

练习题参考答案

【答案】 D.

【解析】 (方法一) 当 $y < 0$ 时, $F_Y(y) = 0$,

当 $0 \leq y < 2$ 时, $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{\min\{X, 2\} \leq y\} = P\{X \leq y\}$



$$= F_X(y) = 1 - e^{-\lambda y}.$$

当 $y \geq 2$ 时, $F_Y(y) = 1$.

$$\text{总之, } F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 1 - e^{-\lambda y}, & 0 \leq y < 2, \text{ 恰有一个间断点在 } y = 2 \text{ 处.} \\ 1, & 2 \leq y, \end{cases}$$

答案应选(D).

(方法二) $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$ 是连续函数,

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{\min\{X, 2\} \leq y\} = \begin{cases} F_X(y), & y < 2, \\ 1, & y \geq 2 \end{cases} \text{ 有一个间断点.}$$

答案应选(D).

心得笔记:

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



第三章 多维随机变量的分布

本章导读

本章是概率论重点之一,也是每年必考的内容,且往往是解答题.尤其要注意①二维随机变量的函数 $Z=g(X,Y)$ 的分布函数 $F_Z(z)$ 求法;②二维随机变量 (X,Y) 的两个分量之间的关系,包括 X 与 Y 的相互独立的条件及不独立时的条件概率分布和条件概率密度等,都是这几年常考的内容.

试题特点

试题一般只涉及二维随机变量.很少讨论三个随机变量的情况.

在涉及二维离散型随机变量的题中,常要考生自己建立分布,计算边缘分布,条件分布.在涉及二维连续型随机变量的题中,常要考生熟练地应用二重积分和二次积分来计算边缘密度,条件密度.

独立性及不相关性是一对重要概念,要掌握它们的关系及判定方法.特别是对二维正态分布及其参数做独立性和不相关性的判定.

对二维均匀分布,密度函数是常数,如何判定该常数,以及在积分时如何利用这一特性,应予以充分注意.

考题详析

一、 (X,Y) 的概率分布, X 与 Y 相互独立性

例1 (2009, 23题, 11分) 袋中有1个红球, 2个黑球与3个白球, 现有放回地从袋中取两次, 每次取一个球, 以 X, Y, Z 分别表示两次取球所取得的红球, 黑球与白球个数.

(I) 求 $P\{X=1 | Z=0\}$;

(II) 求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布.

【分析】 有放回地取两次, 每次一个, 共取到两个, 每次可能有6种, 共有36种可能, 求概率只要把符合条件的可能性列出就可以了.

$$\begin{aligned} \text{【解】} \quad (I) \quad P\{X=1 | Z=0\} &= \frac{P\{X=1, Z=0\}}{P\{Z=0\}} = \frac{P\{X=1, Y=1\}}{P\{Z=0\}} \\ &= \frac{\frac{1 \times 2 + 2 \times 1}{36}}{\frac{3 \times 3}{36}} = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$



也可以有 $P\{X=1|Z=0\} = \frac{P\{X=1, Z=0\}}{P\{Z=0\}} = \frac{C_2^1 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{4}{9}$.

或者用缩减样本空间方法:

$Z=0$, 即已知两次都没白球的条件下, 只能取红、黑, 总的可能为 $3 \times 3 = 9$

$$P\{X=1|Z=0\} = \frac{1 \times 2 + 2 \times 1}{3 \times 3} = \frac{4}{9}$$

(II) 首先确定 X 与 Y 的取值范围为 $0, 1, 2$, $P\{X=0, Y=0\} = \frac{3 \times 3}{6 \times 6}$.

同理可求得

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{3 \times 3}{6 \times 6}$	$\frac{3 \times 2 + 2 \times 3}{6 \times 6}$	$\frac{2 \times 2}{6 \times 6}$
1	$\frac{1 \times 3 + 3 \times 1}{6 \times 6}$	$\frac{1 \times 2 + 2 \times 1}{6 \times 6}$	0
2	$\frac{1 \times 1}{6 \times 6}$	0	0

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

即

2 (2011, 7 题, 4 分) 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 为两个分布函数, 其相应的概率密度 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是连续函数, 则必为概率密度的是

(A) $f_1(x)f_2(x)$.

(B) $2f_2(x)F_1(x)$.

(C) $f_1(x)F_2(x)$.

(D) $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$.

【答案】 D.

【解析】 验证函数 $f(x)$ 是否为概率密度, 一般地说有两种常用方法:

(1) $f(x)$ 满足是概率密度的充要条件 $f(x) \geq 0$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

(2) $f(x) = F'(x)$ 或者 $\int_{-\infty}^x f(t)dt = F(x)$, 而 $F(x)$ 为分布函数.

由于 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 均为分布函数, 显然 $F_1(x)F_2(x)$ 也是分布函数, 而

$$[F_1(x)F_2(x)]' = f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$$

故答案应选(D).

3 (2013, 8 题, 4 分) 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且 X 和 Y 的概率分布分别为

X	0	1	2	3
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

,

Y	-1	0	1
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则 $P\{X+Y=2\} =$

(A) $\frac{1}{12}$.

(B) $\frac{1}{8}$.

(C) $\frac{1}{6}$.(D) $\frac{1}{2}$.**【答案】** C.

【解析】 $P\{X+Y=2\} = P\{X=1, Y=1\} + P\{X=2, Y=0\} + P\{X=3, Y=-1\}$
 $= P\{X=1\}P\{Y=1\} + P\{X=2\}P\{Y=0\} + P\{X=3\}P\{Y=-1\}$
 $= \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{6}$.

所以答案选(C).

4 (2015, 14 题, 4 分) 设二维随机变量 (X, Y) 服从正态分布 $N(1, 0; 1, 1; 0)$, 则 $P\{XY - Y < 0\} =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$.

【解析】 $(X, Y) \sim N(1, 0; 1, 1; 0)$, 所以 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim N(1, 1), Y \sim N(0, 1)$ 也就有 $(X-1) \sim N(0, 1)$ 与 Y 相互独立.

再根据对称性: $P\{X-1 < 0\} = P\{X-1 > 0\} = P\{Y < 0\} = P\{Y > 0\} = \frac{1}{2}$.

不难求出 $P\{XY - Y < 0\}$ 的值.

$$\begin{aligned} P\{XY - Y < 0\} &= P\{(X-1)Y < 0\} \\ &= P\{X-1 < 0, Y > 0\} + P\{X-1 > 0, Y < 0\} \\ &= P\{X-1 < 0\}P\{Y > 0\} + P\{X-1 > 0\}P\{Y < 0\} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

5 (2019, 22 题, 11 分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从参数为 1 的指数分布, Y 的概率分布为 $P\{Y=-1\} = p, P\{Y=1\} = 1-p (0 < p < 1)$, 令 $Z = XY$.

(I) 求 Z 的概率密度;(II) p 为何值时, X 与 Z 不相关?(III) X 与 Z 是否相互独立?**【分析】** (I) Z 的概率密度 $f_Z(z) = F'_Z(z)$, 而 $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{XY \leq z\}$.

$$X \sim f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad \begin{array}{c|c|c} Y & -1 & 1 \\ \hline P & p & 1-p \end{array}$$

(II) X 与 Z 不相关等价于 $\text{Cov}(X, Z) = 0$, 可以从 $\text{Cov}(X, XY) = 0$, 定出 p .

(III) X 与 Z 是否相互独立? 独立必定不相关, 只要从 (II) 得到的 p 值代入, 验证是否满足 X 与 Z 独立的条件: $P\{X \leq x, Z \leq z\} = P\{X \leq x\}P\{Z \leq z\}$ 对任何 x, z 都成立.

【解】 (I) $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{XY \leq z\} = P\{Y=-1, XY \leq z\} + P\{Y=1, XY \leq z\}$
 $= P\{Y=-1, -X \leq z\} + P\{Y=1, X \leq z\}$
 $= P\{Y=-1\}P\{X \geq -z\} + P\{Y=1\}P\{X \leq z\}$
 $= p[1 - F_X(-z)] + (1-p)F_X(z)$

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = pf_X(-z) + (1-p)f_X(z) = \begin{cases} pe^z, & z \leq 0, \\ (1-p)e^{-z}, & z > 0. \end{cases}$$

(II) $\text{Cov}(X, Z) = \text{Cov}(X, XY) = E(X^2Y) - E(X)E(XY) = E(X^2)E(Y) - (E(X))^2E(Y)$
 $= \{E(X^2) - (E(X))^2\}E(Y) = D(X)[-p + (1-p)] = D(X)(1-2p)$



当 $p = \frac{1}{2}$ 时, $\text{Cov}(X, Z) = 0$, X 与 Z 不相关.

(Ⅲ) 可以判断 X 与 Z 不相互独立. 因为

$$\begin{aligned} P\{X \leq 1, Z \leq -1\} &= P\{X \leq 1, XY \leq -1\} \\ &= P\{Y = -1\}P\{X \leq 1, XY \leq -1 \mid Y = -1\} \\ &\quad + P\{Y = 1\}P\{X \leq 1, XY \leq -1 \mid Y = 1\} \\ &= p \cdot P\{X \leq 1, -X \leq -1 \mid Y = -1\} + (1-p)P\{X \leq 1, X \leq -1 \mid Y = 1\} \\ &= p \cdot P\{X \leq 1, X \geq 1 \mid Y = -1\} + (1-p)P\{X \leq -1 \mid Y = 1\} \\ &= p \cdot P\{X = 1\} + (1-p)P\{X \leq -1\} = 0 \end{aligned}$$

而 $P\{X \leq 1\} > 0, P\{Z \leq -1\} > 0$.

所以 $P\{X \leq 1, Z \leq -1\} \neq P\{X \leq 1\}P\{Z \leq -1\}$, X 与 Z 不相互独立.

【评注】 也可以证明 $P\{X \leq 1, Z \leq 1\} = P\{X \leq 1\}P\{Z \leq 1\}$ 不成立, 即 X 与 Z 不独立.

因为 Y 取值为 1 或 -1, 所以“事件” $(X \leq 1) \subset (XY \leq 1) = Z = 1$.

即 $P\{X \leq 1, Z \leq 1\} = P\{X \leq 1, XY \leq 1\} = P\{X \leq 1\}$.

如果 $P\{X \leq 1, Z \leq 1\} = P\{X \leq 1\}P\{Z \leq 1\}$,

则有 $P\{Z \leq 1\} = F_Z(1) = 1$, 这是不可能的.

6 (2020, 8 题, 4 分) 设随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布 $N(0, 0; 1, 4; -\frac{1}{2})$, 则下列随机变量中服从标准正态分布且与 X 独立的是

- (A) $\frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)$. (B) $\frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)$. (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$. (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$.

【答案】 C.

【解析】 $(X, Y) \sim N(0, 0; 1, 4; -\frac{1}{2})$, 则 $X \sim N(0, 1), Y \sim N(0, 4)$.

$\frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = \rho = -\frac{1}{2}, \sqrt{DX} = 1, \sqrt{DY} = 2$, 所以 $\text{Cov}(X, Y) = -1$.

$$D(X+Y) = DX + DY + 2\text{Cov}(X, Y) = 1 + 4 - 2 = 3,$$

$$D(X-Y) = DX + DY - 2\text{Cov}(X, Y) = 1 + 4 + 2 = 7,$$

$$\text{所以 (A)} D\left[\frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)\right] = \frac{3}{5}, \text{(B)} D\left[\frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)\right] = \frac{7}{5},$$

$$\text{(C)} D\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)\right] = 1, \text{(D)} D\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)\right] = \frac{7}{3}.$$

答案选(C).

二、二维随机变量的函数 $Z = g(X, Y)$ 的分布

7 (2009, 8 题, 4 分) 设随机变量 X 与 Y 独立, 且 X 服从标准正态分布 $N(0, 1)$, Y 的概率分布为 $P\{Y = 0\} = P\{Y = 1\} = \frac{1}{2}$. 记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z = XY$ 的分布函数, 则函数 $F_Z(z)$ 的间断



点个数为

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

【答案】 B.

【解析】 本题考查标准正态分布, 随机变量的独立性, 条件概率, 全概率公式.

如果将事件“ $Y = 0$ ”和“ $Y = 1$ ”看成一完备事件组, 则由全概率公式

$$F_Z(z) = P\{XY \leq z\} = P\{Y = 0\}P\{XY \leq z | Y = 0\} + P\{Y = 1\}P\{XY \leq z | Y = 1\}$$

不难计算出 $F_Z(z)$, 从而可判断其间断点. 这种方法常用于两独立随机变量其中一个为离散型的情况.

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Y = 0\}P\{XY \leq z | Y = 0\} + P\{Y = 1\}P\{XY \leq z | Y = 1\} \\ &= \frac{1}{2}P\{0 \leq z | Y = 0\} + \frac{1}{2}P\{X \leq z | Y = 1\}. \end{aligned}$$

又由于 X, Y 相互独立, 故

$$F_Z(z) = \frac{1}{2}P\{0 \leq z\} + \frac{1}{2}P\{X \leq z\}$$

$$\text{所以 } F_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}\Phi(z), & z < 0, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(z), & z \geq 0. \end{cases} \quad \Phi(0) = \frac{1}{2}, \text{ 故 } \begin{cases} F_Z(0^-) = \frac{1}{4}, \\ F_Z(0^+) = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

$F_Z(z)$ 在 $z = 0$ 处有一个间断点, 故答案应选(B).

【评注】 也可以将事件“ $Z \leq z$ ”分解成 $\{Z \leq z\} = \{Z \leq z, Y = 0\} \cup \{Z \leq z, Y = 1\}$.

即 $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{Z \leq z, Y = 0\} + P\{Z \leq z, Y = 1\}$.

当 $z < 0$ 时, $P\{Z \leq z, Y = 0\} = P\{XY \leq z, Y = 0\} = P(\emptyset) = 0$;

当 $z \geq 0$ 时, $P\{Z \leq z, Y = 0\} = P\{XY \leq z, Y = 0\} = P\{Y = 0\} = \frac{1}{2}$;

而对任意

$$\begin{aligned} P\{Z \leq z, Y = 1\} &= P\{XY \leq z, Y = 1\} = P\{X \leq z, Y = 1\} \\ &= P\{X \leq z\}P\{Y = 1\} = \Phi(z) \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

结论是相同的.

8 (2012, 7 题, 4 分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从区间 $(0, 1)$ 上的均匀分布, 则 $P\{X^2 + Y^2 \leq 1\} =$

(A) $\frac{1}{4}$.

(B) $\frac{1}{2}$.

(C) $\frac{\pi}{8}$.

(D) $\frac{\pi}{4}$.

【答案】 D.

【解析】 $P\{X^2 + Y^2 \leq 1\} = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(x, y) dx dy$.

而 $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

即 $f(x, y)$ 是在正方形 $0 < x < 1, 0 < y < 1$ 上等于常数 1, 其余地方均为 0.



$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(x,y) dx dy$ 实际上就是单位圆 $x^2 + y^2 \leq 1$ 在第 I 象限的面积.

9 (2016, 22 题, 11 分) 设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布, 令 $U = \begin{cases} 1, & X \leq Y, \\ 0, & X > Y. \end{cases}$

(I) 写出 (X, Y) 的概率密度;

(II) 请问 U 与 X 是否相互独立? 并说明理由;

(III) 求 $Z = U + X$ 的分布函数 $F(z)$.

【分析】 (I) (X, Y) 的概率密度 $f_1(x, y)$ 可用在区域 D 上均匀分布的密度公式直接写出:

$$f_1(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S_D}, & (x, y) \in D \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

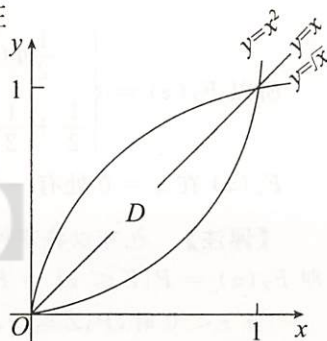
其中 S_D 为区域 D 的面积.

(II) 由于 U 是离散型随机变量, 考查 U 与 X 是否独立, 只要验证是否成立,

$$P\{U = i, X \leq x_1\} = P\{U = i\}P\{X \leq x_1\}, i = 0, 1$$

(III) $Z = U + X$ 其分布函数

$$\begin{aligned} F(z) &= P\{Z \leq z\} = P\{U + X \leq z\} \\ &= P\{U = 0, U + X \leq z\} + P\{U = 1, U + X \leq z\} \\ &= P\{X > Y, X \leq z\} + P\{X \leq Y, X \leq z - 1\} \\ &= \iint_{\substack{x > y \\ x \leq z}} f_1(x, y) dx dy + \iint_{\substack{x \leq y \\ x \leq z-1}} f_1(x, y) dx dy \end{aligned}$$



【解】 (I) $S_D = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left. \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$

$$f_1(x, y) = \begin{cases} 3, & 0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(II) 当 $0 < x_1 < 1$ 时,

$$\begin{aligned} P\{U = 0, X \leq x_1\} &= P\{X > Y, X \leq x_1\} = P\{Y < X \leq x_1\} \\ &= \iint_{y < x \leq x_1} f_1(x, y) dx dy = \int_0^{x_1} dx \int_{x^2}^x 3 dy \\ &= \int_0^{x_1} 3(x - x^2) dx = \frac{3}{2} x_1^2 - x_1^3 \end{aligned}$$

$$P\{U = 0\} = P\{X > Y\} = \iint_{x > y} f_1(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x 3 dy = \int_0^1 3(x - x^2) dx = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$P\{X \leq x_1\} = \iint_{x \leq x_1} f_1(x, y) dx dy = \int_0^{x_1} dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 3 dy = \int_0^{x_1} 3(\sqrt{x} - x^2) dx = 2x_1^{\frac{3}{2}} - x_1^3$$

所以 $P\{U = 0, X \leq x_1\} \neq P\{U = 0\}P\{X \leq x_1\}$, U 与 X 不相互独立.

$$(III) F(z) = \iint_{\substack{x > y \\ x \leq z}} f_1(x, y) dx dy + \iint_{\substack{x \leq y \\ x \leq z-1}} f_1(x, y) dx dy.$$

当 $z < 0$ 时, $F(z) = 0$;

当 $0 \leq z < 1$ 时, $F(z) = \iint_{\substack{x > y \\ x \leq z}} f_1(x, y) dx dy + 0 = \int_0^z dx \int_x^z 3 dy = \int_0^z 3(x - x^2) dx = \frac{3}{2} z^2 - z^3$;

当 $1 \leq z < 2$ 时, $F(z) = \iint_{\substack{x > y \\ x \leq z}} f_1(x, y) dx dy + \iint_{\substack{x \leq y \\ x \leq z-1}} f_1(x, y) dx dy$
 $= \int_0^1 dx \int_x^z 3 dy + \int_0^{z-1} dx \int_x^{\sqrt{x}} 3 dy$
 $= \left(\frac{3}{2} - 1\right) + \int_0^{z-1} 3(\sqrt{x} - x) dx$
 $= \frac{1}{2} + 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(z-1)^2$;

当 $2 \leq z$ 时, $F(z) = 1$.

所以

$$F(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{3}{2} z^2 - z^3, & 0 \leq z < 1 \\ \frac{1}{2} + 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(z-1)^2, & 1 \leq z < 2 \\ 1, & 2 \leq z \end{cases}$$

三、条件分布与条件概率密度

10 (2009, 22 题, 11 分) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-x}, & 0 < y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(I) 求条件概率密度 $f_{Y|X}(y | x)$;

(II) 求条件概率 $P\{X \leq 1 | Y \leq 1\}$.

【分析】 本题涉及定义和公式有

$$f_{Y|X}(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}, f_X(x) > 0$$

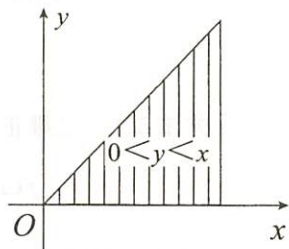
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$P\{X \leq 1 | Y \leq 1\} = \frac{P\{X \leq 1, Y \leq 1\}}{P\{Y \leq 1\}} = \frac{\int_{-\infty}^1 \int_{-\infty}^1 f(x, y) dx dy}{\int_{-\infty}^1 dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx}$$

为确定积分范围, 画出 $f(x, y)$ 的非零区域会带来方便.

【解】 (I) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$

$$= \begin{cases} \int_0^x e^{-x} dy, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} xe^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$



$f_X(x) > 0$ 等价于 $x > 0$.

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (\text{II}) P\{X \leq 1 | Y \leq 1\} &= \frac{P\{X \leq 1, Y \leq 1\}}{P\{Y \leq 1\}} = \frac{\int_{-\infty}^1 \int_{-\infty}^1 f(x,y) dx dy}{\int_{-\infty}^1 dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx} \\ &= \frac{\int_0^1 dx \int_0^x e^{-x} dy}{\int_0^1 e^{-y} dy} = \frac{1 - 2e^{-1}}{1 - e^{-1}} = \frac{e - 2}{e - 1}. \end{aligned}$$

11 (2010, 22 题, 11 分) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = Ae^{-2x^2+2xy-y^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

【分析】 给定二维概率密度 $f(x,y)$ 后, 要求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$, 可用公式

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, \quad f_X(x) > 0, \quad \text{其中 } f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy.$$

本题还要求常数 A , 可以用 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx dy = 1$ 来定常数 A ,

还不如用 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$ 来求 A 更方便.

$$\begin{aligned} \text{【解】 (方法一)} \quad f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2+2xy-y^2} dy \\ &= A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2-x^2} dy = Ae^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2} dy \\ &= A\sqrt{\pi}e^{-x^2}, \quad -\infty < x < +\infty. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = A\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = A\pi, \text{ 即 } A = \frac{1}{\pi}.$$

当 $f_X(x) > 0$, 等价于 $-\infty < x < +\infty$ 时,

$$\begin{aligned} f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{Ae^{-2x^2+2xy-y^2}}{A\sqrt{\pi}e^{-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2xy-y^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(y-x)^2} \quad (-\infty < y < +\infty) \end{aligned}$$

(方法二) 二维正态概率密度一般形式为

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]}$$

对比本题所给二维概率密度 $f(x,y) = Ae^{-2x^2+2xy-y^2}$ 可知 $\mu_1 = \mu_2 = 0$, 且

$$\begin{cases} \frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2} = 2, \\ \frac{\rho}{(1-\rho^2)\sigma_1\sigma_2} = 2, \text{ 成立由此解得} \\ \frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2} = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{\frac{1}{2}}, \\ \sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}, \\ \sigma_2 = 1, \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{\pi}$$

这时边缘密度 $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} (-\infty < x < +\infty)$.

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{\pi} e^{-2x^2+2xy-y^2}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2+2xy-y^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(y-x)^2} (-\infty < y < +\infty).$$

12 (2011, 23 题, 11 分) 设二维随机变量 (X, Y) 服从区域 G 上的均匀分布, 其中 G 是由 $x - y = 0, x + y = 2$ 与 $y = 0$ 所围成的三角形区域.

(I) 求 X 的概率密度 $f_X(x)$;

(II) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

【分析】 G 为 $\begin{cases} x - y = 0, \\ x + y = 2, \\ y = 0 \end{cases}$ 所围成区域

即 G 为 $\begin{cases} y \leq x, \\ x \leq 2 - y, \\ y \geq 0, \end{cases}$

公共部分 $G: 0 \leq y \leq x \leq 2 - y$ 如图所示.

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq x \leq 2 - y, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

有了 $f(x, y)$ 不难用公式求出

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \text{ 和 } f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx,$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}, f_Y(y) > 0.$$

【解】 (I) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$,

当 $x < 0$ 或 $x > 2$ 时, $f_X(x) = 0$;

$$\text{当 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 时, } f_X(x) = \int_0^x dy = x;$$

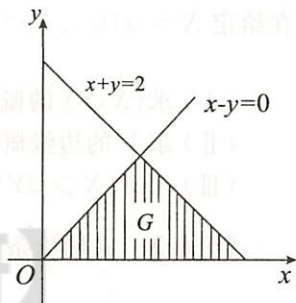
$$\text{当 } 1 < x \leq 2 \text{ 时, } f_X(x) = \int_0^{2-x} dy = 2 - x.$$

$$\text{所以, } f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \text{ 或者 } f_X(x) = \begin{cases} 1 - |x - 1|, & |x - 1| \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$(II) f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_y^{2-y} dx, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} 2(1 - y), & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$f_Y(y) > 0$ 等价于 $0 \leq y < 1$.

在 $Y = y (0 \leq y < 1)$ 时, X 的条件概率密度为



$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{2(1-y)}, & 0 \leq y \leq x \leq 2-y \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

【评注】 本题也可以把 G 理解成 $G: 0 < y < x < 2-y$, 这时给出同样正确的答案

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x < 2, \text{和} f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{1}{2(1-y)}, & 0 < y < x < 2-y, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad (0 < y < 1). \end{cases}$$

13 (2013, 22 题, 11 分) 设 (X, Y) 是二维随机变量, X 的边缘概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

在给定 $X = x (0 < x < 1)$ 的条件下, Y 的条件概率密度为 $f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{3y^2}{x^3}, & 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

(I) 求 (X, Y) 的概率密度 $f(x, y)$;

(II) 求 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$;

(III) 求 $P\{X > 2Y\}$.

【分析】 在题给条件 $f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 和 $X = x (0 < x < 1)$ 的条件下

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{3y^2}{x^3}, & 0 < y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

现在问题关键在于求出 $f(x, y)$, 有了 $f(x, y)$ 后, 不难用公式 $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$ 和

$$P\{X > 2Y\} = \iint_{x > 2y} f(x, y) dx dy \text{ 求得 (II) 和 (III).}$$

为求 $f(x, y)$ 可用 $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$, $f_X(x) > 0$ 推出.

【解】 (I) 已知公式 $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$, 当 $f_X(x) > 0$ 时成立.

$$\text{又因为 } f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \text{ 和 } f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{3y^2}{x^3}, & 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

所以当 $f_X(x) > 0$ 时, 也就是当 $0 < x < 1$ 时,

$$f(x, y) = f_X(x) f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{9y^2}{x}, & 0 < y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

这样得到的 $f(x, y)$ 只是定义在 $0 < x < 1, -\infty < y < +\infty$ 上的 $f(x, y)$.

但实际上的 $f(x, y)$ 必须定义在全平面上. 又由于

$$\int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{9y^2}{x} dy = \int_0^1 3x^2 dx = 1$$

因此, 我们有理由确定在 $0 < x < 1, -\infty < y < +\infty$ 以外的平面上 $f(x, y) \equiv 0$.

$$\text{最后得到 } f(x, y) = \begin{cases} \frac{9y^2}{x}, & 0 < y < x, 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

【评注】 本题解题过程中用了四个其他, 其实这四个其他的含义是完全不同的, 应该加以区分.

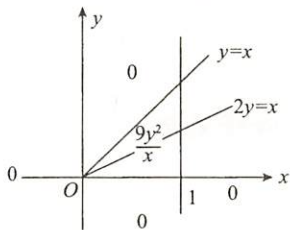
如果本题直接解成:

$$f(x, y) = f_X(x)f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{9y^2}{x}, & 0 < y < x, 0 < x < 1; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

这种写法的问题是: 第一个等号成立条件是 $0 < x < 1$. 因为 $f_{Y|X}(y|x)$ 只有在 $0 < x < 1$ 时有定义, 而第二个等号要求整个 xOy 平面有定义.

$$\begin{aligned} \text{(II)} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_y^1 \frac{9y^2}{x} dx, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} -9y^2 \ln y, & 0 < y < 1; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(III)} P\{X > 2Y\} &= \iint_{x > 2y} f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{9y^2}{x} dy \\ &= \int_0^1 \frac{3x^2}{8} dx = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$



练习题

(2004, 数四, 13分) 设随机变量 X 在区间 $(0, 1)$ 内服从均匀分布, 在 $X = x (0 < x < 1)$ 的条件下, 随机变量 Y 在区间 $(0, x)$ 内服从均匀分布, 求:

- (I) 随机变量 X 和 Y 的联合概率密度;
- (II) Y 的概率密度;
- (III) 概率 $P\{X + Y > 1\}$.

练习题参考答案

【解】 (I) 根据题意有 $f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 然后写出, 当 $0 < x < 1$ 时,

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

显然 $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}, 0 < x < 1$, 即

当 $0 < x < 1$ 时, $f(x, y) = f_X(x)f_{Y|X}(y|x)$

$$= f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$



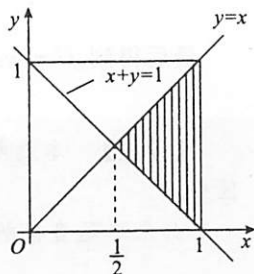
$$\begin{aligned} \text{由于 } \int_0^1 dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy &= \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{1}{x} dy \right) dx = \int_0^1 dx = 1 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

所以 $x \leq 0$ 或 $x \geq 1$ 时, $f(x, y) = 0$.

$$\text{总之 } f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\text{(II)} f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} -\ln y, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{(III)} P\{X+Y > 1\} &= \iint_{x+y>1} f(x, y) dx dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{1-x}^x \frac{1}{x} dy \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(2 - \frac{1}{x} \right) dx = 1 - \ln 2. \end{aligned}$$



心得笔记:

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

第四章 随机变量的数字特征

本章导读

本章是概率论的重点之一,有相当多的考题涉及这章内容.求随机变量的数字特征,包括数学期望、方差、矩、协方差、相关系数,所有这些数字特征都是求随机变量函数的数学期望.

试题特点

本章的试题除了求一些给定随机变量的数学期望外,很多题的数学期望或方差的计算都与常用分布有关,应该牢记常用分布的参数和它们的概率意义.有些常用分布的参数就是该随机变量的数学期望或方差.也应该会用数字特征的基本性质,会求一般随机变量函数的数学期望.大纲要求掌握切比雪夫不等式,但一般不会像考数学期望那样经常考.

考题详析

一、数学期望 $E(X)$ 与方差 $D(X)$

1 (2011, 14 题, 4 分) 设二维随机变量 (X, Y) 服从正态分布 $N(\mu, \mu; \sigma^2, \sigma^2; 0)$, 则 $E(XY^2) =$ _____.

【答案】 $\mu\sigma^2 + \mu^3$.

【解析】 本题考查二维正态随机变量各参数的意义和两分量独立和不相关的关系,

$(X, Y) \sim N(\mu, \mu; \sigma^2, \sigma^2; 0)$, 即 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY} = 0$, 二维正态时 $\rho_{XY} = 0$ 等价于 X 与 Y 相互独立.

$(X, Y) \sim N(\mu, \mu; \sigma^2, \sigma^2; 0)$, 所以 X 与 Y 相互独立, 且

$$E(X) = E(Y) = \mu, D(X) = D(Y) = \sigma^2$$

$$E(XY^2) = E(X) \cdot E(Y^2) = \mu[D(Y) + (E(Y))^2] = \mu(\sigma^2 + \mu^2) = \mu\sigma^2 + \mu^3$$

2 (2012, 23 题, 11 分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从参数为 1 的指数分布, 记 $U = \max\{X, Y\}, V = \min\{X, Y\}$.

(I) 求 V 的概率密度 $f_V(v)$;

(II) 求 $E(U+V)$.

【分析】 $X \sim E(1), f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} P\{X > t\} = e^{-t}, t > 0.$

$$E(X) = E(Y) = 1.$$



【解】 (I) $F_V(v) = P\{V \leq v\} = P\{\min(X, Y) \leq v\} = 1 - P\{\min(X, Y) > v\}$
 $= 1 - P\{X \geq v, Y \geq v\} = 1 - P\{X \geq v\}P\{Y \geq v\}$
 $= 1 - e^{-v}e^{-v} = 1 - e^{-2v}, v > 0.$

当 $v \leq 0$ 时, $F_V(v) = 0, f_V(v) = \begin{cases} 2e^{-2v}, & v > 0, \\ 0, & v \leq 0. \end{cases}$

(II) $E(U+V) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 1 + 1 = 2.$

【3】(2013, 14 题, 4 分) 设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0, 1)$, 则 $E(Xe^{2X}) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $2e^2.$

【解析】 $E(Xe^{2X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{2x} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{2x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$
 $= \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2-4x+4}{2}} dx \cdot e^2$
 $= e^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}} dx = 2e^2,$

其中 $\int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}} dx$ 可以看成是正态分布 $N(2, 1)$ 的数学期望. 所以答案应填 $2e^2$.

【4】(2014, 22 题, 11 分) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\} = P\{X=2\} = \frac{1}{2}$, 在给定 $X=i$ 的条件下, 随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0, i) (i=1, 2)$.

(I) 求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$;

(II) 求 $E(Y)$.

【分析】 当 $X=i$ 的条件下, Y 服从均匀分布 $U(0, i) (i=1, 2)$, $X=i$ 就两个取值 1 和 2. 求 $F_Y(y) = P\{Y \leq y\}$ 就可用 $\{X=1\}$ 和 $\{X=2\}$ 为完备事件组的全概率公式展开.

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X=1\}P\{Y \leq y | X=1\} + P\{X=2\}P\{Y \leq y | X=2\}$$

求出 $F_Y(y)$ 就不难得到 $f_Y(y) = F'_Y(y), E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy$. 求出 $E(Y)$.

【解】 (I) 记 $U(0, i)$ 的分布函数为 $F_i(x) (i=1, 2)$, 则

$$F_i(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{i}, & 0 \leq x < i, \quad i=1, 2, \\ 1, & i \leq x. \end{cases}$$

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X=1\}P\{Y \leq y | X=1\} + P\{X=2\}P\{Y \leq y | X=2\}$$

$$= \frac{1}{2}P\{Y \leq y | X=1\} + \frac{1}{2}P\{Y \leq y | X=2\}$$

$$= \frac{1}{2}[F_1(y) + F_2(y)] = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \frac{3}{4}y, & 0 \leq y < 1, \\ \frac{1}{2} + \frac{y}{4}, & 1 \leq y < 2, \\ 1, & y \geq 2. \end{cases}$$

(II) 随机变量 Y 的概率 $f_Y(y)$ 为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{4}, & 0 < y < 1 \\ \frac{1}{4}, & 1 \leq y < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\text{所以 } E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^1 \frac{3}{4} y dy + \int_1^2 \frac{1}{4} y dy = \frac{3}{4}.$$

5 (2015, 22 题, 11 分) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x} \ln 2, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

对 X 进行独立重复的观测, 直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止, 记 Y 为观测次数.

(I) 求 Y 的概率分布;

(II) 求 $E(Y)$.

【解】 (I) 令 $A = \{ \text{对 } X \text{ 进行一次观测得到的值大于 } 3 \}$. 显然

$$P(A) = P\{X > 3\} = \int_3^{+\infty} f(x) dx = \int_3^{+\infty} 2^{-x} \ln 2 dx = \frac{1}{8}$$

记事件 A 发生的概率 $P(A) = \frac{1}{8} = p$, Y 的可能取值应为 $k = 2, 3, \dots$,
 $P\{Y = k\} = C_{k-1}^1 p(1-p)^{k-2} \cdot p$
 $= (k-1)p^2(1-p)^{k-2} (k = 2, 3, \dots)$
 所以 Y 的分布为

$$P\{Y = k\} = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}, p = \frac{1}{8} (k = 2, 3, \dots)$$

(II) $E(Y) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p^2(1-p)^{k-2}$, 记 $1-p = q$,

$$\begin{aligned} E(Y) &= p^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} = p^2 \frac{d}{dq} \left(\sum_{k=2}^{\infty} kq^{k-1} \right) = p^2 \frac{d}{dq} \left(\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} - 1 \right) \\ &= p^2 \frac{d}{dq} \left(\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} \right) = p^2 \left(\frac{d}{dq} \right)^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k \right) = p^2 \left(\frac{d}{dq} \right)^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k - 1 \right) \\ &= p^2 \left(\frac{d}{dq} \right)^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k \right) = p^2 \left(\frac{d}{dq} \right)^2 \left(\frac{1}{1-q} \right) = p^2 \frac{d}{dq} \left[\frac{1}{(1-q)^2} \right] \\ &= p^2 \cdot \frac{2}{(1-q)^3} = p^2 \cdot \frac{2}{p^3} \\ &= \frac{2}{p} = 16 \end{aligned}$$

【评注】 本题类似于我们在 2000 年出的几何分布考题. 从建模到用幂级数在其收敛区间内可逐项求导求和会有不少考生感到困难, 本题要比 2000 年的难一些.

6 (2016, 8 题, 4 分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim N(1, 2)$, $Y \sim N(1, 4)$, 则 $D(XY) =$

(A) 6.

(B) 8.

(C) 14.

(D) 15.

【答案】 C.

【解析】 $D(XY) = E(XY)^2 - [E(XY)]^2 = E(X)^2 E(Y)^2 - (E(X)E(Y))^2$
 $= [D(X) + (E(X))^2][D(Y) + (E(Y))^2] - 1^2 = (2+1^2)(4+1^2) - 1 = 14.$

7 (2017, 14 题, 4 分) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=-2\} = \frac{1}{2}, P\{X=1\} = a, P\{X=3\} = b$, 若 $E(X) = 0$, 则 $D(X) =$ _____.

【答案】 $\frac{9}{2}.$

【解析】 随机变量 X 的概率分布为

X	-2	1	3
p	$\frac{1}{2}$	a	b

因为 $E(X) = 0$, 所以

$$-2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot a + 3 \cdot b = a + 3b - 1 = 0 \text{ 且 } \frac{1}{2} + a + b = 1$$

$$\text{所以} \begin{cases} a+b=\frac{1}{2}, \\ a+3b=1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a=\frac{1}{4}, \\ b=\frac{1}{4}. \end{cases}$$

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) = (-2)^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times a + 3^2 \times b = 2 + \frac{10}{4} = \frac{9}{2}$$

8 (2017, 22 题, 11 分) 设随机变量 X, Y 相互独立, 且 X 的概率分布为 $P\{X=0\} = P\{X=2\} = \frac{1}{2}$, Y 的概率密度为 $f(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

(I) 求 $P\{Y \leq E(Y)\}$;

(II) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

【分析】 (I) 求 $P\{Y \leq E(Y)\}$ 可先求出 $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y)dy$, 再计算 $P\{Y \leq E(Y)\} = \int_{-\infty}^{E(Y)} f(y)dy$.

(II) $Z = X + Y$. 先求出 $F_Z(z) = P\{Z \leq z\}$, 然后再求 $f_Z(z) = F'_Z(z)$.

求 $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{X + Y \leq z\}$ 有两种类似的途径:

$$\begin{aligned} (1) P\{X + Y \leq z\} &= P\{X=0\}P\{X+Y \leq z | X=0\} + P\{X=2\}P\{X+Y \leq z | X=2\} \\ &= \frac{1}{2}P\{Y \leq z | X=0\} + \frac{1}{2}P\{Y \leq z-2 | X=2\} \\ &= \frac{1}{2}P\{Y \leq z\} + \frac{1}{2}P\{Y \leq z-2\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{或者} (2) P\{X + Y \leq z\} &= P\{X + Y \leq z, X=0\} + P\{X + Y \leq z, X=2\} \\ &= P\{Y \leq z, X=0\} + P\{Y \leq z-2, X=2\} \\ &= P\{Y \leq z\}P\{X=0\} + P\{Y \leq z-2\}P\{X=2\} \\ &= \frac{1}{2}P\{Y \leq z\} + \frac{1}{2}P\{Y \leq z-2\}. \end{aligned}$$

然后再分段讨论.



【解】 (I) $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y)dy = \int_0^1 2y^2 dy = \frac{2}{3}y^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3},$

$$P\{Y \leq E(Y)\} = P\{Y \leq \frac{2}{3}\} = \int_0^{\frac{2}{3}} 2y dy = y^2 \Big|_0^{\frac{2}{3}} = \frac{4}{9}$$

(II) $Z = X + Y$ 其分布函数 $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{X + Y \leq z\},$

根据全概率公式

$$\begin{aligned} P\{X + Y \leq z\} &= P\{X = 0\}P\{X + Y \leq z | X = 0\} + P\{X = 2\}P\{X + Y \leq z | X = 2\} \\ &= \frac{1}{2}P\{Y \leq z | X = 0\} + \frac{1}{2}P\{Y \leq z - 2 | X = 2\} \\ &= \frac{1}{2}P\{Y \leq z\} + \frac{1}{2}P\{Y \leq z - 2\} \end{aligned}$$

当 $z < 0$ 时, $F_Z(z) = 0;$

$$\text{当 } 0 \leq z < 1 \text{ 时, } F_Z(z) = \frac{1}{2}P\{Y \leq z\} + 0 = \frac{1}{2} \int_0^z 2y dy = \frac{1}{2}z^2;$$

$$\text{当 } 1 \leq z < 2 \text{ 时, } F_Z(z) = \frac{1}{2}P\{Y \leq 1\} + 0 = \frac{1}{2};$$

$$\text{当 } 2 \leq z < 3 \text{ 时, } F_Z(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P\{Y \leq z - 2\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{z-2} 2y dy$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(z-2)^2 = \frac{1}{2}(z^2 - 4z + 5);$$

当 $3 \leq z$ 时, $F_Z(z) = 1.$

所以 z 的概率密度为

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} z, & 0 \leq z < 1 \\ z-2, & 2 \leq z < 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

9 (2019, 14 题, 4 分) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ $F(x)$ 为 X 的分

布函数, $E(X)$ 为 X 的数学期望, 则 $P\{F(X) > E(X) - 1\} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} dx, F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \int_0^x \frac{t}{2} dt, & 0 < x < 2, \\ 1, & 2 \leq x, \end{cases}$

求出 $E(X)$ 和 $F(x)$ 再写出 $F(X)$, 就可以计算 $P\{F(X) > E(X) - 1\}.$

$$E(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} dx = \frac{x^3}{6} \Big|_0^2 = \frac{4}{3}, F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x^2}{4}, & 0 < x < 2, \\ 1, & 2 \leq x, \end{cases} F(X) = \frac{X^2}{4}.$$

$$P\{F(X) > E(X) - 1\} = P\left\{\frac{X^2}{4} > \frac{4}{3} - 1\right\} = P\left\{X^2 > \frac{4}{3}\right\} = P\left\{X > \frac{2}{\sqrt{3}}\right\} + P\left\{X < -\frac{2}{\sqrt{3}}\right\}$$



$$= \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2 \frac{x}{2} dx + 0 = \frac{x^2}{4} \Big|_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

【评注】 如果记住结论:对任一连续型随机变量 X , 其分布函数为 $F(x)$, 则 $Y = F(X)$ 必定服从 $U(0, 1)$ 分布. 我们可以直接得到 $P\{F(X) > E(X) - 1\} = P\left\{F(X) > \frac{1}{3}\right\} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

10 (2020, 14 题, 4 分) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X = k\} = \frac{1}{2^k}, k = 1, 2, 3, \dots$. Y 表示 X 被 3 除的余数, 则 $E(Y) =$ _____.

【答案】 $\frac{8}{7}$.

【解析】

X	1	2	3	4	5	...
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^4}$	...	...
Y	1	2	0	1	2	0

$$P\{Y = 1\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \times \frac{1}{8^n} = \frac{4}{7},$$

$$P\{Y = 2\} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} = \frac{2}{7},$$

$$P\{Y = 0\} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{7} = \frac{1}{7}.$$

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

$$E(Y) = 1 \times \frac{4}{7} + 2 \times \frac{2}{7} = \frac{8}{7}$$

练习题

(1999, 数一, 3 分) 设随机变量 $X_{ij} (i, j = 1, 2, 3, \dots, n; n \geq 2)$ 独立同分布, $E(X_{ij}) = 2$, 则行列式

$$Y = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn} \end{vmatrix}$$

的数学期望 $E(Y) =$ _____.

练习题参考答案

【答案】 0.

【解析】 行列式 Y 是由 n^2 个元素 X_{ij} 的乘积组成的 $n!$ 项和式, 每一项都是 n 个元素的乘积 $X_{1j_1} X_{2j_2} \cdots X_{nj_n}$, 这 n 个元素取自行列式中不同的行与不同的列, 在这全部 $n!$ 项中每项都带有正号或负号.

无论正号或负号, 对和式的期望等于各项期望之和, 而

$$E(X_{1j_1} X_{2j_2} \cdots X_{nj_n}) = E(X_{1j_1}) E(X_{2j_2}) \cdots E(X_{nj_n})$$

因为 X_{ij} 是相互独立的, 所以

$$E(Y) = \begin{vmatrix} E(X_{11}) & E(X_{12}) & \cdots & E(X_{1n}) \\ E(X_{21}) & E(X_{22}) & \cdots & E(x_{2n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ E(X_{n1}) & E(X_{n2}) & \cdots & E(X_{nm}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = 0$$

二、协方差 $\text{Cov}(X, Y)$

例 1 (2010, 23 题, 11 分) 箱中装有 6 个球, 其中红、白、黑球的个数分别为 1, 2, 3 个. 现从箱中随机地取出 2 个球, 记 X 为取出的红球个数, Y 为取出的白球个数.

(I) 求随机变量 (X, Y) 概率分布;

(II) 求 $\text{Cov}(X, Y)$.

【分析】 随机地一次取出 2 个, 总共有 C_6^2 种不同取法. X 表示取出的红球数, 可能取值为 0, 1; Y 表示取出的白球数, 可能取值为 0, 1, 2. 按各种情况不难求出 (X, Y) 的分布. 而 $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$ 就可从 (X, Y) 的分布逐次求出.

【解】

(I)

$X \backslash Y$		Y		
		0	1	2
X	0	$\frac{C_3^2}{C_6^2}$	$\frac{C_2^1 C_3^1}{C_6^2}$	$\frac{C_2^2}{C_6^2}$
	1	$\frac{C_1^1 C_3^1}{C_6^2}$	$\frac{C_1^1 C_2^1}{C_6^2}$	0

即

$X \backslash Y$		Y		
		0	1	2
X	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$
	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	0

(II)

$X \backslash Y$		Y		
		0	1	2
X	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$
	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	0
		$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$E(X) = 0 \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$E(Y) = 0 \times \frac{2}{5} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{1}{15} = \frac{2}{3}$$

$$E(XY) = 1 \times 1 \times \frac{2}{15} + 0 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{5} \right) + 1 \times 2 \times 0 = \frac{2}{15}$$

$$\text{所以 } \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = \frac{2}{15} - \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = -\frac{4}{45}.$$



12 (2012, 22 题, 11 分) 设二维离散型随机变量 (X, Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(I) 求 $P\{X = 2Y\}$;

(II) 求 $\text{Cov}(X - Y, Y)$.

【分析】(I) $X = 2Y$ 就有几种可能: $X = 0, Y = 0$ 和 $X = 2, Y = 1$, 直接可以计算.

(II) $\text{Cov}(X - Y, Y) = \text{Cov}(X, Y) - \text{Cov}(Y, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) - D(Y)$.

只要设法找出 XY 的分布就可以计算了.

【解】(I) $P\{X = 2Y\} = P\{X = 0, Y = 0\} + P\{X = 2, Y = 1\} = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}$.

(II) 由 (X, Y) 的概率分布可得, X, Y, XY 的概率分布分别为

$X \backslash Y$	0	1	2	
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

$$\text{故 } E(X) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3},$$

$$E(Y) = \frac{1}{3}(0 + 1 + 2) = 1$$

$$D(Y) = \frac{1}{3}(0 - 1)^2 + \frac{1}{3}(1 - 1)^2 + \frac{1}{3}(2 - 1)^2 = \frac{2}{3}$$

XY	0	1	4
p	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

$$P\{XY = 0\} = P\{X = 0\} + P\{X \neq 0, Y = 0\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$$

$$P\{XY = 1\} = P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{1}{3}$$

$$E(XY) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{所以 } \text{Cov}(X - Y, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) - D(Y) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}.$$

13 (2018, 22 题, 11 分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P\{X=1\} = P\{X=-1\} = \frac{1}{2}$, Y 服从参数为 λ 的泊松分布. 令 $Z = XY$.

(I) 求 $\text{Cov}(X, Z)$;

(II) 求 Z 的概率分布.

【分析】 X 的分布

X	-1	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

, $Y \sim P(\lambda), P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k=0, 1, 2, \dots$

(I) 求 $\text{Cov}(X, Z) = \text{Cov}(X, XY) = E(X^2Y) - E(X)E(XY)$.

再根据 X, Y 相互独立, $E(X^2Y) = E(X^2)E(Y)$, 和 $E(XY) = E(X)E(Y)$, 不难求出 $\text{Cov}(X, Z)$.

(II) 求 $Z = XY$ 的分布, 首先确定 Z 的取值范围, Z 取值为 $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, 再利用 X, Y 的独立性, 就可以求出 Z 的分布.

【解】 (I) $\text{Cov}(X, Z) = \text{Cov}(X, XY) = E(X^2Y) - E(X)E(XY)$, 其中

$$E(X^2Y) = E(X^2)E(Y) = \left[(-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} \right] \lambda = \lambda$$

$$E(X)E(XY) = 0E(XY) = 0$$

所以, $\text{Cov}(X, Z) = \lambda$.

(II) X 取值 $-1, 1, Y$ 取值 $0, 1, 2, \dots$. 因此 $Z = XY$ 取值为 $0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

Z 的分布为 $P\{Z=0\} = P\{Y=0\} = e^{-\lambda}$,

$$P\{Z=k\} = P\{X=1, Y=k\} = P\{X=1\}P\{Y=k\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k=1, 2, 3, \dots$$

$$P\{Z=-k\} = P\{X=-1, Y=k\} = P\{X=-1\}P\{Y=k\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k=1, 2, 3, \dots$$

练习题

(2004, 数一, 4 分) 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 1)$ 独立同分布, 且其方差为 $\sigma^2 > 0$,

令 $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 则

(A) $\text{Cov}(X_1, Y) = \frac{\sigma^2}{n}$.

(B) $\text{Cov}(X_1, Y) = \sigma^2$.

(C) $D(X_1 + Y) = \frac{n+2}{n} \sigma^2$.

(D) $D(X_1 - Y) = \frac{n+2}{n} \sigma^2$.

练习题参考答案

【答案】 A.

【解析】 本题要求计算 $\text{Cov}(X_1, Y)$ 和 $D(X_1 + Y)$, 其中 $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$,

由于 X_1 与 Y 不是相互独立, 如果按定义来直接计算会比较复杂.

应该将 Y 中的 X_1 分离出来, 再用独立性来计算, 计算量减少.



$$\begin{aligned}
 \operatorname{Cov}(X_1, Y) &= \operatorname{Cov}\left(X_1, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \\
 &= \operatorname{Cov}\left(X_1, \frac{1}{n} X_1\right) + \operatorname{Cov}\left(X_1, \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i\right) \\
 &= \frac{1}{n} \sigma^2 + 0 = \frac{\sigma^2}{n}
 \end{aligned}$$

三、相关系数 ρ_{XY}

14 (2011, 22 题, 11 分) 设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

,

Y	-1	0	1
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P\{X^2 = Y^2\} = 1$.

(I) 求二维随机变量 (X, Y) 的概率分布;

(II) 求 $Z = XY$ 的概率分布;

(III) 求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} .

【分析】 由 $P\{X^2 = Y^2\} = 1$ 得 $P\{X^2 \neq Y^2\} = 0$,
 而 $P\{X^2 \neq Y^2\} = P\{X=0, Y=-1\} + P\{X=0, Y=1\} + P\{X=1, Y=0\} = 0$,
 即 $P\{X=0, Y=-1\} = P\{X=0, Y=1\} = P\{X=1, Y=0\} = 0$.

【解】 (I) (X, Y) 的概率分布的边缘分布为

$Y \backslash X$	-1	0	1	$P_{i\cdot}$
0				$\frac{1}{3}$
1				$\frac{2}{3}$
$P_{\cdot j}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

再填入 $P\{X=0, Y=-1\} = P\{X=0, Y=1\} = P\{X=1, Y=0\} = 0$.

得

$Y \backslash X$	-1	0	1	
0	0		0	$\frac{1}{3}$
1		0		$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

, 最后得到

$Y \backslash X$	-1	0	1	
0	0	$\frac{1}{3}$	0	
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	

(II) $Z = XY$ 的可能取值 $-1, 0, 1$. 由 (X, Y) 的概率分布可得 Z 的概率分布

Z	-1	0	1
p	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(Ⅲ) 由 X, Y 及 Z 的概率分布得

$$E(X) = \frac{2}{3}, D(X) = \frac{2}{9}, E(Y) = 0, D(Y) = \frac{2}{3}, E(XY) = E(Z) = 0$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = 0$$

所以 $\rho_{XY} = 0$.

15 (2014, 23 题, 11 分) 设随机变量 X, Y 的概率分布相同, X 的概率分布为 $P\{X=0\} = \frac{1}{3}$,

$P\{X=1\} = \frac{2}{3}$, 且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY} = \frac{1}{2}$.

(I) 求 (X, Y) 的概率分布;

(II) 求 $P\{X+Y \leq 1\}$.

【分析】 X 与 Y 同分布, 都取 0 或 1, 所以 (X, Y) 的分布必有形式:

$X \backslash Y$	0	1	
	a	b	$\frac{1}{3}$
0	a	b	$\frac{1}{3}$
1	c	d	$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

求 (X, Y) 分布, 就是要求 a, b, c, d . 实际上只要求出 a, b, c, d 中任一个数. 其余的数可由边缘分布推出.

现题给条件 $\rho_{XY} = \frac{1}{2}$, 而 $\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}}$. 又因为 X, Y 均为 0-1 分布.

$$D(X) = D(Y) = pq$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y), E(X) = E(Y) = p, E(XY) = d$$

这就不难求出 d , 然后解出 a, b, c .

有了 (X, Y) 分布, 计算 $P\{X+Y \leq 1\}$ 就容易了.

【解】 $\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}}, E(X) = E(Y) = \frac{2}{3}, D(X) = D(Y) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$.

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = d - \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = d - \frac{4}{9}$$

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}} = \frac{d - \frac{4}{9}}{\frac{2}{9}} = \frac{1}{2}$$

解得 $d = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$, 由此可得 $b = c = \frac{2}{3} - d = \frac{1}{9}, a = \frac{1}{3} - b = \frac{2}{9}$.



所以

Y \ X	0	1	
0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

$$(II) P\{X+Y \leq 1\} = 1 - P\{X+Y > 1\} = 1 - d = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}.$$

【评注】 因为 X, Y 均为 0-1 分布, 故 $\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}}$ 的计算大为简单

Y \ X	0	1	
0			
1		d	p_1
		p_2	

$$\text{则 } \rho_{XY} = \frac{d - p_1 p_2}{\sqrt{p_1(1-p_1)} \sqrt{p_2(1-p_2)}}.$$

如果 (X, Y) 的分布改成

Y \ X	Y_1	Y_2	
X_1			
X_2		d	p_1
		p_2	

$$\text{只要 } X_2 > X_1, Y_2 > Y_1, \text{ 不难证明仍有 } \rho_{XY} = \frac{d - p_1 p_2}{\sqrt{p_1(1-p_1)} \sqrt{p_2(1-p_2)}}.$$

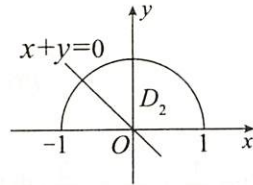
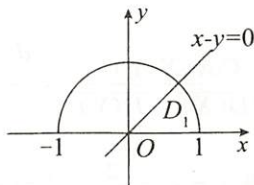
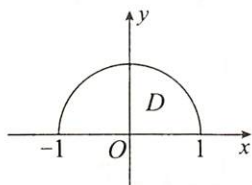
16 (2020, 22 题, 11 分) 设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) \mid 0 < y < \sqrt{1-x^2}\}$ 上服从均匀分布, 令

$$Z_1 = \begin{cases} 1, & X-Y > 0, \\ 0, & X-Y \leq 0, \end{cases} \quad Z_2 = \begin{cases} 1, & X+Y > 0 \\ 0, & X+Y \leq 0 \end{cases}$$

(I) 求二维随机变量 (Z_1, Z_2) 的概率分布;

(II) 求 Z_1 与 Z_2 的相关系数.

【解】 (I) (X, Y) 在 D 上均匀分布



$$Z_1 = \begin{cases} 1, & X-Y > 0, \\ 0, & X-Y \leq 0. \end{cases}$$

$$Z_2 = \begin{cases} 1, & X+Y > 0, \\ 0, & X+Y \leq 0. \end{cases}$$

$$P\{Z_1 = 1\} = P\{X - Y > 0\} = P\{(X, Y) \in D_1\} = \frac{1}{4}, \text{故}$$

Z_1	0	1
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$P\{Z_2 = 1\} = P\{X + Y > 0\} = P\{(X, Y) \in D_2\} = \frac{3}{4}, \text{故}$$

Z_2	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

总之 (Z_1, Z_2) 的分布

$Z_2 \backslash Z_1$	0	1	
0			$\frac{3}{4}$
1			$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	

$$P\{Z_1 = 1, Z_2 = 1\} = P\{(X, Y) \in D_1 \cap D_2\} = \frac{1}{4}$$

所以

$Z_2 \backslash Z_1$	0	1	
0			$\frac{3}{4}$
1			$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	

进一步有

$Z_2 \backslash Z_1$	0	1	
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	

$$(\text{II}) Z_1 \text{ 与 } Z_2 \text{ 的相关系数 } \rho_{Z_1 Z_2} = \frac{\text{Cov}(Z_1, Z_2)}{\sqrt{D(Z_1)} \sqrt{D(Z_2)}}$$

$$D(Z_1) = pq = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}, D(Z_2) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}, E(Z_1) = \frac{1}{4}, E(Z_2) = \frac{3}{4}$$

$$\text{Cov}(Z_1, Z_2) = E(Z_1 Z_2) - E(Z_1)E(Z_2) = 1 \times \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} - \frac{3}{16} = \frac{1}{16}$$

$$\rho_{Z_1 Z_2} = \frac{1/16}{\sqrt{3/16} \sqrt{3/16}} = \frac{1}{3}.$$



第五章 大数定律和中心极限定理

本章导读

本章内容不是考试的重点,2001年考过一次中心极限定理和2003年考过一次大数定律,近十年就没再考过,本章内容包括三个大数定律:切比雪夫大数定律,伯努利大数定律,辛钦大数定律;二个中心极限定理,棣莫弗-拉普拉斯定理,列维-林德伯格定理.

试题特点

本章试题大多是简单的选择题和填空题,只要把这些定律和定理的条件与结论记住就可以了.2001年曾经有用中心极限定理来近似计算的解答题,但由于考试时不能使用计算器,因计算量过大这类考题近几年也不太多出现.

练习题

1. (2002, 数四, 3分) 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, 则根据列维-林德伯格 (Levy-Lindberg) 中心极限定理, 当 n 充分大时, S_n 近似服从正态分布, 只要 $X_1, X_2, \dots, X_n$

(A) 有相同的数学期望.

(B) 有相同的方差.

(C) 服从同一指数分布.

(D) 服从同一离散分布.

2. (2005, 数四, 4分) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 为独立同分布的随机变量列, 且均服从参数为 $\lambda (\lambda > 1)$ 的指数分布, 记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则

$$(A) \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\lambda}{\lambda \sqrt{n}} \leq x \right\} = \Phi(x).$$

$$(B) \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq x \right\} = \Phi(x).$$

$$(C) \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\lambda \sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}} \leq x \right\} = \Phi(x).$$

$$(D) \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq x \right\} = \Phi(x).$$

练习题参考答案

1. 【答案】 C.

2. 【答案】 C.

【解析】 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 独立同分布、方差存在. 根据中心极限定理

第五章 大数定律和中心极限定理

$$(x)\Phi = \left\{ x \gg \frac{u^{\wedge}}{u - {}^tX \sum_u^{\lceil = t} \gamma} \right\} d^{\infty \leftarrow -t} \mathfrak{w} \mathfrak{l} =$$

$$\left\{ x \gg \frac{\frac{\gamma}{u}^{\wedge}}{\frac{\gamma}{u} - {}^tX \sum_u^{\lceil = t} \gamma} \right\} d^{\infty \leftarrow -t} \mathfrak{w} \mathfrak{l} = \left\{ x \gg \frac{({}^tX \sum_u^{\lceil = t} \gamma)^{\wedge}}{({}^tX \sum_u^{\lceil = t} \gamma) \mathfrak{E} - {}^tX \sum_u^{\lceil = t} \gamma} \right\} d^{\infty \leftarrow -t} \mathfrak{w} \mathfrak{l}$$

第六章 数理统计的基本概念

本章导读

本章是数理统计的基础,也是重点之一.数理统计的基本概念包括总体、简单随机样本、统计量、样本均值、样本方差等.特别对正态总体的分布及其性质应予以充分的注意,对 χ^2 分布、 t 分布和 F 分布,要掌握这些分布对应随机变量的典型模式和它们参数的确定.

试题特点

近几年数三的数理统计都只考一个小题,也就是4分的一个填空题或选择题,这个小题大多是属本章的一些基本概念.一般说数理统计是历届考生的薄弱点,很多考生感到公式多不好记,其实只要熟记一个总体的 $\bar{X}, S^2, E(\bar{X}), D(\bar{X}), E(S^2)$ 和 χ^2 分布, t 分布, F 分布的典型模式和参数,尤其是正态总体抽样分布的一些性质就可以了.

考题详析

1 (2010, 14题, 4分) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2) (\sigma > 0)$ 的简单随机样本. 记统计量 $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$, 则 $E(T) =$ _____.

【答案】 $\sigma^2 + \mu^2$.

【解析】 $E(T) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [D(X_i) + (E(X_i))^2] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\sigma^2 + \mu^2] = \sigma^2 + \mu^2$.

2 (2011, 8题, 4分) 设总体 X 服从参数为 $\lambda (\lambda > 0)$ 的泊松分布, $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自该总体的简单随机样本. 则对于统计量 $T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 和 $T_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n} X_n$, 有

(A) $E(T_1) > E(T_2), D(T_1) > D(T_2)$.

(B) $E(T_1) > E(T_2), D(T_1) < D(T_2)$.

(C) $E(T_1) < E(T_2), D(T_1) > D(T_2)$.

(D) $E(T_1) < E(T_2), D(T_1) < D(T_2)$.

【答案】 D.

【解析】 $X \sim P(\lambda)$, 所以, $E(X) = \lambda, D(X) = \lambda, X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立均服从 $P(\lambda)$, 不难直接求得 $E(T_i)$ 和 $D(T_i) (i = 1, 2)$, 再比较大小.

$$E(T_1) = E(\bar{X}) = \lambda, D(T_1) = D(\bar{X}) = \frac{\lambda}{n},$$

$$\text{而 } E(T_2) = \lambda + \frac{\lambda}{n}, D(T_2) = \frac{\lambda}{n-1} + \frac{\lambda}{n^2},$$

所以, $E(T_1) < E(T_2), D(T_1) < D(T_2)$.

答案应选(D).

3 (2012, 8 题, 4 分) 设 X_1, X_2, X_3, X_4 为来自总体 $N(1, \sigma^2) (\sigma > 0)$ 的简单随机样本, 则统计量

$\frac{X_1 - X_2}{|X_3 + X_4 - 2|}$ 的分布为

- (A) $N(0, 1)$. (B) $t(1)$. (C) $\chi^2(1)$. (D) $F(1, 1)$.

【答案】 B.

【解析】 $\frac{X_1 - X_2}{|X_3 + X_4 - 2|}$ 不可能为 $N(0, 1)$. $\chi^2(1)$ 是一个标准正态的平方也不可能. $F(1, 1)$

要求是两个独立的 χ^2 分布之商也不像. 当然作为选择题可以直接由此判断(A)(C)(D) 都不对. 就

选(B). 要证 $\frac{X_1 - X_2}{|X_3 + X_4 - 2|} \sim t(1) = \frac{X}{\sqrt{Y/1}}$, 要证明三点: (1) $X \sim N(0, 1)$, (2) $Y \sim \chi^2(1)$, (3) X

与 Y 相互独立.

(1) $X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$ 故

$$\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0, 1)$$

(2) $X_3 + X_4 - 2 \sim N(0, 2\sigma^2)$, 故

$$\frac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0, 1), \left(\frac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{2}\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(1)$$

(3) $X_1 - X_2$ 与 $X_3 + X_4 - 2$ 相互独立. $\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}$ 也与 $\left(\frac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{2}\sigma} \right)^2$ 独立.

所以

$$\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma} \bigg/ \sqrt{\frac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{2}\sigma}} = \frac{X_1 - X_2}{|X_3 + X_4 - 2|} \sim t(1)$$

答案应选(B).

4 (2014, 8 题, 4 分) 设 X_1, X_2, X_3 为来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 则统计量 $S =$

$\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2} |X_3|}$ 服从的分布为

- (A) $F(1, 1)$. (B) $F(2, 1)$. (C) $t(1)$. (D) $t(2)$.

【答案】 C.

【解析】 $F(n_1, n_2)$ 分布的典型模式是 $F = \frac{X}{Y}$, 其中 X 与 Y 独立, $X \sim \chi^2(n_1)$, $Y \sim \chi^2(n_2)$. $t(n)$

分布的典型模式是 $T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$, 其中 X 与 Y 独立, $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim \chi^2(n)$. 显然 $S = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2} |X_3|}$ 的

分子, 分母均不像 χ^2 分布. 就要确定 $t(1)$ 还是 $t(2)$.

(1) $X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$, 所以 $\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0, 1)$.



$$(2) X_3 \sim N(0, \sigma^2), \frac{X_3}{\sigma} \sim N(0, 1), \left(\frac{X_3}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1).$$

(3) $X_1 - X_2$ 与 X_3 相互独立, 故 $\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}$ 与 $\left(\frac{X_3}{\sigma}\right)^2$ 也独立.

$$\text{所以 } \frac{\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\left(\frac{X_3}{\sigma}\right)^2}} \sim t(1), \frac{\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\left(\frac{X_3}{\sigma}\right)^2}} = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2} |X_3|} = S.$$

答案选(C).

5 (2014, 14 题, 4 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{3\theta^2}, & \theta < x < 2\theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 θ 是未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 若 $E\left(c \sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \theta^2$, 则 $c =$ _____.

【答案】 $\frac{2}{5n}$.

【解析】 $E\left(c \sum_{i=1}^n X_i^2\right) = c \sum_{i=1}^n E(X_i^2) = cnE(X^2) = cn \int_{\theta}^{2\theta} \frac{2x^3}{3\theta^2} dx = cn \frac{5}{2} \theta^2 = \theta^2, c = \frac{2}{5n}$.

6 (2015, 8 题, 4 分) 设总体 $X \sim B(m, \theta)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自该总体的简单随机样本, $\bar{X}$ 为样本均值, 则 $E\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right] =$

(A) $(m-1)n\theta(1-\theta)$.

(B) $m(n-1)\theta(1-\theta)$.

(C) $(m-1)(n-1)\theta(1-\theta)$.

(D) $mn\theta(1-\theta)$.

【答案】 B.

【解析】 样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 且 $E(S^2) = D(X) = m\theta(1-\theta)$, 则

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right] &= (n-1)E\left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right] \\ &= (n-1)E(S^2) = (n-1)m\theta(1-\theta) \end{aligned}$$

答案应选(B).

7 (2017, 8 题, 4 分) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(\mu, 1)$ 的简单随机样本, 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 则下列结论中不正确的是

(A) $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布.

(B) $2(X_n - X_1)^2$ 服从 χ^2 分布.

(C) $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 服从 χ^2 分布.

(D) $n(\bar{X} - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布.

【答案】 B.

【解析】 由于 $X_i \sim N(\mu, 1), i = 1, 2, \dots, n$ 相互独立

$$X_n - X_1 \sim N(0, 2), \frac{X_n - X_1}{\sqrt{2}} \sim N(0, 1), \frac{(X_n - X_1)^2}{2} \sim \chi^2(1)$$

显然 $2(X_n - X_1)^2 \sim \chi^2$ 不正确. 答案应选(B).

8 (2018, 8 题, 4 分) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2) (\sigma > 0)$ 的简单随机样本, 令

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}, S^* = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}$$

则

$$(A) \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t(n).$$

$$(B) \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t(n-1).$$

$$(C) \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S^*} \sim t(n).$$

$$(D) \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S^*} \sim t(n-1).$$

【答案】 B.

【解析】 $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, 所以 $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$.

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

已知 S^2 与 $\bar{X}$ 独立, 且 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.

根据 t 分布典型模式: $\frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} / (n-1)}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t(n-1)$. 答案选(B).

【评注】 本题应该直接背出选(B).



第七章 参数估计

本章导读

本章要求了解点估计,估计量与估计值的概念,掌握矩估计法和最大似然估计法.

试题特点

要掌握离散型和连续型两种不同形式的处理方法,尤其要会写出似然函数.
统计量的无偏性不属考试范围,但应该会求统计量的数学期望.

考题详析

1 (2009, 14题, 4分) 设 $X_1, X_2, \dots, X_m$ 为来自二项分布总体 $B(n, p)$ 的简单随机样本, $\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 记统计量 $T = \bar{X} - S^2$, 则 $E(T) =$ _____.

【答案】 np^2 .

【解析】 本题考查样本均值, 样本方差和二项分布的概念及其数学期望. 总体 X 的期望和方差为 $E(X) = np, D(X) = np(1-p)$.

而由 $\bar{X}, S^2$ 的性质知 $E(\bar{X}) = E(X), E(S^2) = D(X)$.

$$\begin{aligned} E(T) &= E(\bar{X} - S^2) = E(\bar{X}) - E(S^2) \\ &= E(X) - D(X) = np - np(1-p) = np^2 \end{aligned}$$

2 (2013, 23题, 11分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 θ 为未知参数且大于零. $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求 θ 的矩估计量;

(II) 求 θ 的最大似然估计量.

【分析】 本题求矩估计量和最大似然估计量.

求矩估计量, 只要先求出 $E(X)$, 然后令 $E(X) = \bar{X}$,

求最大似然估计量关键在于求出似然函数 $L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$.

【解】 (I) 因为 $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0. \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

$$\text{所以 } E(X) = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\theta^2}{x^2} e^{-\frac{\theta}{x}} dx = \theta,$$

令 $\bar{X} = E(X)$, 其中 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 即有 $\bar{X} = \theta$,

所以 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta} = \bar{X}$, 其中 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

(II) 设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为样本观测值, 似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^{2n}}{(x_1 x_2 \cdots x_n)^3} e^{-\theta \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}, & x_1, x_2, \dots, x_n > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

当 $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ 时, $\ln L(\theta) = 2n \ln \theta - \theta \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} - 3 \sum_{i=1}^n \ln x_i$.

令 $\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = 0$, 求得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$,

所以 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}}$.

3 (2015, 23 题, 11 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{1-\theta}, & \theta \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 θ 为未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

(I) 求 θ 的矩估计量;

(II) 求 θ 的最大似然估计量.

【分析】 (I) 所求参数一个, 可用 $E(X) = \bar{X}$ 来求出 θ 的矩估计量;

(II) 给出 $f(x; \theta)$ 就可以构造似然函数 $L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$, 然后最大化求出 θ 的最大似然估计量.

【解】 (I) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{\theta}^1 \frac{x}{1-\theta} dx = \frac{1}{1-\theta} \frac{x^2}{2} \Big|_{\theta}^1 = \frac{1+\theta}{2}$.

$E(X) = \bar{X}$. 即 $\frac{1+\theta}{2} = \bar{X}$, $\theta = 2\bar{X} - 1$.

θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1 = 2\bar{X} - 1$, 其中 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

$$(II) L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \begin{cases} \left(\frac{1}{1-\theta}\right)^n, & \theta \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

要使 $L(\theta)$ 最大, 只有使 $1-\theta$ 尽量小, 或者 θ 尽量接近 1.

但 $\theta \leq x_1$, 故取 $\theta = \min(x_1, \dots, x_n)$ 或 $\theta = \min_{1 \leq i \leq n} x_i$,



θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_2 = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$.

【评注】 由于 $X \sim U[\theta, 1]$, 故 $E(X)$ 可直接写出 $\frac{1+\theta}{2}$.

4 (2016, 23 题, 11 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3}, & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $\theta \in (0, +\infty)$ 为未知参数, X_1, X_2, X_3 为来自总体 X 的简单随机样本, 令 $T = \max(X_1, X_2, X_3)$.

(I) 求 T 的概率密度;

(II) 确定 a , 使得 $E(aT) = \theta$.

【分析】 (I) 记 X 的分布函数为 $F(x)$ 和 T 的分布函数为 $F_T(t)$, 则 T 的概率密度 $f_T(t) = F'_T(t)$. 用定义 $F_T(t) = P\{T \leq t\}$ 求出 $F_T(t)$ 后就可得 $f_T(t)$.

(II) $E(aT) = aE(T) = a \int_{-\infty}^{+\infty} tf_T(t) dt = \theta$, 只要求出 $\int_{-\infty}^{+\infty} tf_T(t) dt$ 就可得到 a .

【解】 (I) 总体 X 的分布函数为 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x; \theta) dx = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^3}{\theta^3}, & 0 \leq x < \theta, \\ 1, & \theta \leq x. \end{cases}$

$$F_T(t) = P\{T \leq t\} = P\{\max(X_1, X_2, X_3) \leq t\} = P\{X_1 \leq t, X_2 \leq t, X_3 \leq t\}$$

由于 X_1, X_2, X_3 相互独立, 所以

$$F_T(t) = P\{X_1 \leq t\}P\{X_2 \leq t\}P\{X_3 \leq t\} = F^3(t)$$

$$f_T(t) = F'_T(t) = 3F^2(t)f(t; \theta) = \begin{cases} 3\left(\frac{t^3}{\theta^3}\right)^2 \frac{3t^2}{\theta^3}, & 0 < t < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} \frac{9t^8}{\theta^9}, & 0 < t < \theta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$(II) E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf_T(t) dt = \int_0^\theta \frac{9t^9}{\theta^9} dt = \frac{9}{10}\theta, \text{ 从而 } E(aT) = aE(T) = a \cdot \frac{9}{10}\theta = \theta.$$

$$\text{所以 } a = \frac{10}{9}.$$

5 (2017, 23 题, 11 分) 某工程师为了解一台天平的精度, 用该天平对一物体的质量做 n 次测量, 该物体的质量 μ 是已知的. 设 n 次测量结果 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$. 该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i = |X_i - \mu| (i = 1, 2, \dots, n)$, 利用 $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ 估计 σ .

(I) 求 Z_1 的概率密度;

(II) 利用一阶矩求 σ 的矩估计量;

(III) 求 σ 的最大似然估计量.

【分析】 $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ 已知, X_i 相互独立同分布, $Z_i = |X_i - \mu|$, 可以理解 $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ 为来自总体 Z 的简单随机样本, $Z_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的概率密度就是 Z 的概率密度 $f_Z(z)$. 设 Z 的分布函数 $F_Z(z)$, 只要求出 $F_Z(z)$, 则 $f_Z(z) = F'_Z(z)$.

(I) Z_1 的密度 $f_Z(z)$;

(II) $f_Z(z)$ 为 σ 的函数, 令 $E(Z) = \bar{Z}$, 其中 $\bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i$, 就可求出矩估计量 $\hat{\sigma}_1$;

(III) 用 $L = \prod_{i=1}^n f_Z(z_i)$ 对 σ 求最大, 解出 σ 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}_2$.

【解】(I) Z 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} = P\{|X_1 - \mu| \leq z\} \\ &= P\{-z \leq X_1 - \mu \leq z\} = P\left\{-\frac{z}{\sigma} < \frac{X_1 - \mu}{\sigma} \leq \frac{z}{\sigma}\right\} \\ &= \Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-z}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right) - 1, z \geq 0 \\ F_Z(z) &= 0, z < 0 \end{aligned}$$

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} \frac{2}{\sigma} \varphi\left(\frac{z}{\sigma}\right), & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

其中 $\varphi(x)$ 为标准正态密度函数, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (-\infty < x < +\infty)$.

$$\begin{aligned} \text{(II)} E(Z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} z f_Z(z) dz = \int_0^{+\infty} \frac{2z}{\sigma} \varphi\left(\frac{z}{\sigma}\right) dz \\ &= 2\sigma \int_0^{+\infty} \frac{z}{\sigma} \varphi\left(\frac{z}{\sigma}\right) d\left(\frac{z}{\sigma}\right) \\ &= 2\sigma \int_0^{+\infty} t \varphi(t) dt = 2\sigma \int_0^{+\infty} t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} d\left(\frac{t^2}{2}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi} \sigma. \end{aligned}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

矩估计 $\bar{Z} = E(Z)$, 即 $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma = \bar{Z}$, $\hat{\sigma}_1 = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \bar{Z}$.

$$\text{(III)} L = \prod_{i=1}^n f_Z(z_i) = \begin{cases} \frac{2^n}{\sigma^n} \prod_{i=1}^n \varphi\left(\frac{z_i}{\sigma}\right), & \begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{matrix} \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2^n}{\sigma^n} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^n z_i^2}{2\sigma^2}}, & \begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{matrix} \geq 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

z_1
 $z_2 \geq 0$ 时,
 $\vdots$
 z_n

$$\ln L = n \ln 2 - n \ln \sigma - \frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{\sum_{i=1}^n z_i^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{d \ln L}{d \sigma} = -n \cdot \frac{1}{\sigma} - \sum_{i=1}^n z_i^2 \frac{(-2)}{2\sigma^3} = 0, n\sigma^2 = \sum_{i=1}^n z_i^2$$

解得 $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^2}$,



所以最大似然估计量 $\hat{\sigma}_2 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i^2}$.

6 (2018, 23 题, 11 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \sigma) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}}, -\infty < x < +\infty$$

其中 $\sigma \in (0, +\infty)$ 为未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本. 记 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$.

(I) 求 $\hat{\sigma}$;

(II) 求 $E(\hat{\sigma})$ 和 $D(\hat{\sigma})$.

【分析】 $f(x; \sigma) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}}, -\infty < x < +\infty$, 求最大似然估计量 $\hat{\sigma}$, 先需写出似然函数

$$L(\sigma) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \sigma) = \frac{1}{(2\sigma)^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n |x_i|}{\sigma}}$$

然后求最大似然估计量, $\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = 0$, 解出 $\hat{\sigma}$, 有了 $\hat{\sigma}$ 不难计算 $E(\hat{\sigma})$ 和 $D(\hat{\sigma})$.

【解】 (I) 设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为样本观测值, 似然函数为

$$L(\sigma) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \sigma) = \frac{1}{(2\sigma)^n} e^{-\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n |x_i|}$$

$$\text{则 } \ln L = -n \ln 2 - n \ln \sigma - \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|}{\sigma}.$$

$$\text{令 } \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = 0 - \frac{n}{\sigma} + \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|}{\sigma^2} = 0, \text{ 解得 } \sigma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

$$\text{所以最大似然估计量 } \hat{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|.$$

$$\begin{aligned} \text{(II)} E(\hat{\sigma}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E|X_i| = E|X| = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x; \sigma) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}} dx \\ &= \frac{1}{\sigma} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x}{\sigma}} dx = \sigma \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sigma} e^{-\frac{x}{\sigma}} d\left(\frac{x}{\sigma}\right) = \sigma \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = \sigma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(\hat{\sigma}) &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D|X_i| = \frac{1}{n} D|X| = \frac{1}{n} [E|X|^2 - (E|X|)^2] \\ &= \frac{1}{n} [E(X^2) - \sigma^2] = \frac{1}{n} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}} dx - \sigma^2 \right] = \frac{1}{n} \left[\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sigma} e^{-\frac{x}{\sigma}} dx - \sigma^2 \right] \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \left(\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sigma^2} e^{-\frac{x}{\sigma}} d\left(\frac{x}{\sigma}\right) \right) - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\sigma^2}{n} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\sigma^2}{n}. \end{aligned}$$

7 (2019, 23 题, 11 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \sigma^2) = \begin{cases} \frac{A}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x \geq \mu \\ 0, & x < \mu \end{cases}$$

其中 μ 是已知参数, $\sigma > 0$ 是未知参数, A 是常数. $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求 A ;

(II) 求 σ^2 的最大似然估计量.

【分析】 (I) 求 A 可用性质:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x; \sigma^2) dx = 1$$

再利用正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的概率密度具有对称性可得.

(II) 求 σ^2 的最大似然估计量, 关键在于先写出似然函数 $L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \sigma^2)$.

【解】 (I) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x; \sigma^2) dx = 1$, 得

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x; \sigma^2) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= A \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= A \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

所以 $A = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

(II) 记 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的观测值, 则似然函数为

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \sigma^2) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}, & x_1, x_2, \dots, x_n \geq \mu \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

当 $x_1, x_2, \dots, x_n \geq \mu$ 时, 对数似然函数为

$$\ln L(\sigma^2) = \frac{n}{2} \ln\left(\frac{2}{\pi}\right) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{d \ln L(\sigma^2)}{d(\sigma^2)} = -\frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2\sigma^4}$$

令 $\frac{d \ln L(\sigma^2)}{d(\sigma^2)} = 0$, 得 $n\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$,

即 σ^2 的最大似然估计值为 $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$,

所以 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$.

8 (2020, 23 题, 11 分) 设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-(\frac{t}{\theta})^m}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 θ, m 为参数且大于零.



(I) 求概率 $P\{T > t\}$ 与 $P\{T > s+t \mid T > s\}$, 其中 $s > 0, t > 0$;

(II) 任取 n 个这种元件做寿命试验, 测得它们的寿命分别为 $t_1, t_2, \dots, t_n$, 若 m 已知, 求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.

【解】
$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-(\frac{t}{\theta})^m}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad f(x) = F'(x) = \begin{cases} m\left(\frac{t}{\theta}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{\theta} e^{-(\frac{t}{\theta})^m}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

$$(I) P\{T > t\} = \int_t^{+\infty} f(t) dt = F(t) \Big|_t^{+\infty} = F(+\infty) - F(t) = e^{-(\frac{t}{\theta})^m}, t > 0.$$

$$P\{T > s+t \mid T > s\} = \frac{P\{T > s+t, T > s\}}{P\{T > s\}} = \frac{P\{T > s+t\}}{P\{T > s\}} = \frac{e^{-(\frac{s+t}{\theta})^m}}{e^{-(\frac{s}{\theta})^m}} \\ = e^{-(\frac{s+t}{\theta})^m + (\frac{s}{\theta})^m}$$

(II) 给定 $t_1, t_2, \dots, t_n$, 似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(t_i) = \prod_{i=1}^n m\left(\frac{t_i}{\theta}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{\theta} e^{-(\frac{t_i}{\theta})^m} = m^n \prod_{i=1}^n \frac{t_i^{m-1}}{\theta^m} e^{-(\frac{t_i}{\theta})^m}$$

$$\ln L(\theta) = n \ln m + \sum_{i=1}^n (m-1) \ln t_i - mn \ln \theta - \sum_{i=1}^n \frac{t_i^m}{\theta^m}$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = -mn \frac{1}{\theta} - \sum_{i=1}^n \frac{(-m)t_i^m}{\theta^{m+1}} = 0, \quad -\frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \frac{t_i^m}{\theta^{m+1}} = 0,$$

解得 $\theta^m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^m$, 不难验证为最大值.

$$\text{最大似然估计值 } \hat{\theta} = \sqrt[m]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^m}.$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

金榜时代图书·书目

考研数学系列

书名	作者	出版时间
数学复习全书·基础篇(数学一、二、三通用)	李永乐等	2020年6月
数学基础过关660题(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2020年8月
数学历年真题全精解析·基础篇(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2020年10月
数学公式的奥秘	刘喜波等	2020年10月
数学复习全书(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2020年12月
数学历年真题全精解析(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2021年1月
数学强化通关330题(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2021年1月
高等数学辅导讲义	刘喜波 曹显兵	2021年1月
高等数学辅导讲义	武忠祥	2021年1月
高等数学解题密码·选填题	武忠祥	2021年6月
线性代数辅导讲义	李永乐	2021年1月
概率论与数理统计辅导讲义	王式安	2021年1月
线性代数满分过关150	姜晓千	2021年4月
概率论与数理统计满分过关15	姜晓千	2021年7月
数学压轴大题满分过关150	姜晓千	2021年9月
数学核心知识点乱序高效记忆手册	宋浩	2021年9月
数学决胜冲刺6套卷(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2021年10月
数学临阵磨枪(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2021年10月
经济类联考数学复习全书	李永乐等	2021年4月
经济类联考数学通关无忧题	薛威	2021年4月
农学门类联考数学复习全书	李永乐等	2021年4月

大学数学系列

书名	作者	出版时间
大学数学线性代数辅导	李永乐	2018年12月
大学数学高等数学辅导	章纪民	2021年5月
大学数学概率论与数理统计辅导	刘喜波	2021年5月

线性代数期末高效复习笔记	宋浩	2021 年 7 月
高等数学期末高效复习笔记	宋浩	2021 年 7 月
概率论与数理统计期末高效复习笔记	宋浩	2021 年 7 月

考研政治系列

书名	作者	出版时间
思想政治理论大纲命题解析	米鹏	2021 年 5 月
思想政治理论精雕细刻 1000 题	米鹏	2021 年 5 月
思想政治理论大串讲	米鹏	2021 年 10 月
思想政治理论最后 20 天必背 20 题	米鹏	2021 年 10 月
考研政治高分秘训 900 题	桑宏斌	2021 年 5 月
考研政治冲刺密押题	全国考研政治金榜命题研究中心	2021 年 11 月

考研英语系列

书名	作者	出版时间
考研英语词汇源来如此	全国考研英语金榜命题研究中心	2020 年 10 月
考研英语语法和长难句实战突破 18 讲	全国考研英语金榜命题研究中心	2020 年 10 月
考研英语阅读理解精雕细刻 80 篇	全国考研英语金榜命题研究中心	2021 年 4 月
考研词伙	李超	2019 年 3 月
考研句伙	李超	2019 年 3 月
考研英语阅卷人写作高分万能模板	方妍	2018 年 11 月
考研英语语法长难句抓分攻略	欧阳栾天	2021 年 2 月
考研英语实用语法与疑难句精讲笔记	白子墨	2020 年 12 月
考研英语写作精讲笔记	白子墨	2021 年 6 月
词维风暴	姜晗	2019 年 9 月
考研英语长难句核心语法	高维 赵亮	2021 年 2 月
考研英语核心词汇	赵亮 高维	2021 年 7 月
考研英语词汇通关“密”籍	许密杉	2021 年 5 月
考研英语阅读通关“密”籍	许密杉	2021 年 6 月

专业硕士系列

书名	作者	出版时间
写作复习指南	房文学	2021 年 1 月
逻辑复习指南	房文学	2021 年 3 月

逻辑精练 900 题	房文学	2021 年 3 月
逻辑真题全解	房文学	2021 年 3 月

医师资格考试系列

书名	作者	出版时间
贺银成国家临床执业医师资格考试辅导讲义(上、下册)	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业医师资格考试辅导讲义同步练习	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业医师资格考试全真模拟试卷及精析	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业及助理医师资格考试历年考点精析(上、下册)	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业及助理医师资格考试实践技能应试指南	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试辅导讲义(上、下册)	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试辅导讲义同步练习	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试全真模拟试卷及精析	贺银成	2020 年 12 月
国家临床执业及助理医师资格考试抢分速记定心丸	高鑫	2021 年 3 月
刘应科中医执业(助理)医师实践技能通关掌中宝	刘应科	2021 年 4 月
刘应科中医执业(助理)医师综合笔试通关掌中宝	刘应科	2021 年 4 月

考研西医系列

书名	作者	出版时间
贺银成考研西医临床医学综合能力辅导讲义(上、下册)	贺银成	2021 年 3 月
贺银成考研西医临床医学综合能力辅导讲义同步练习	贺银成	2021 年 3 月
贺银成考研西医临床医学综合能力全真模拟试卷及精析	贺银成	2021 年 3 月
贺银成考研西医临床医学综合能力历年真题精析	贺银成	2021 年 3 月

考研中医系列

书名	作者	出版时间
刘应科考研中医综合教材	刘应科	2021 年 3 月
刘应科考研中医综合教材同步练习 3000 题	刘应科	2021 年 3 月
刘应科考研中医综合历年真题精析及复习思路	刘应科	2021 年 3 月
刘应科考研中医综合终极预测试卷	刘应科	2021 年 9 月

中外名著系列

书名	作者	出版时间
小王子	[法]安托万·德·圣-埃克苏佩里	2018 年 12 月
飞鸟集	[印]泰戈尔	2018 年 12 月
瓦尔登湖	[美]亨利·戴维·梭罗	2018 年 12 月
了不起的盖茨比	[美]弗·司各特·菲茨杰拉德	2018 年 12 月
简·爱	[英]夏洛蒂·勃朗特	2018 年 12 月
老人与海	[美]海明威	2018 年 12 月
月亮和六便士	[英]威廉·萨默塞特·毛姆	2018 年 12 月
呼啸山庄	[英]艾米莉·简·勃朗特	2018 年 12 月
傲慢与偏见	[英]简·奥斯丁	2018 年 12 月
双城记	[英]查尔斯·狄更斯	2019 年 3 月
朝花夕拾·呐喊	鲁迅	2018 年 4 月
呼兰河传	萧红	2018 年 4 月
骆驼祥子	老舍	2018 年 4 月
我这一辈子	老舍	2018 年 4 月
茶馆	老舍	2018 年 4 月

以上图书书名及出版时间仅供参考,以实际出版物为准,均属金榜时代(北京)教育科技有限公司!

微信公众号:金榜时代考研



原公众号:金榜图书考研,名称已更改

@金榜时代官方微博



时代巨流图书专营店



微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)



乡村艺术 Ke 梦想社

音体美教师 志愿者招募

不要被摩天大厦挡个正着

去青瓦淡墨乡间

用我们的方式热爱这个时代



TEACH FOR CHINA

招募：乡村小学音体美青年教师志愿者

乡村艺术Ke梦想社创办于2017年，旨在改善乡村音体美教师紧缺现状，让乡村儿童感受音体美艺术之美，让更多的孩子，无论出身，都能获得同等的优质教育。梦想社创立之初，便启动了“助力乡村学校音体美课堂”行动计划，截止目前，该计划已牵手近300余名青年志愿者，落地学校已达10所。（详情敬请关注公众号“乡村艺术ke梦想社”）为善益众，求贤若渴，我们，正在远方，等着如诗般的你！

项目 简介

成为志愿者你将获得

- 服务学校包吃包住
- 每月1500元补助
- 志愿者服务期间的短期保障保险
- 方寸天地得享人生意趣，大美原乡遍寻香径落花

我们希望你

- 品行端正，有爱心，有耐心
- 身体健康，能适应艰苦乡村环境
- 受过良好教育且有音体美专业特长
- 认真负责，充满正能量，支教有清晰规划
- 吃苦耐劳，乐于助人，有良好的团队合作精神

报名方式

Step 1.

请以“**报名2021乡村艺术Ke梦想社音体美教师志愿者**”为邮件标题，发送邮件至：
CountryClass@126.com

Step 2.

邮件内容：正文简要介绍你

对社会公益的理解，

参加本次活动的原

因及您的一技之长；

附件1：支教课程设计（包括3节课以上的教案或课件）

附件2：个人简历（Word格式）



书名	出版时间	适用阶段
数学公式的奥秘	2020年3月	全程复习
数学复习全书·基础篇	2020年6月	夯实基础
数学基础过关660题	2020年8月	夯实基础
数学历年真题全精解析·基础篇	2020年10月	夯实基础
数学复习全书	2020年12月	全程复习
数学历年真题全精解析	2021年1月	全程复习
高等数学辅导讲义	2021年1月	强化提高
线性代数辅导讲义	2021年1月	强化提高
概率论与数理统计辅导讲义	2021年1月	强化提高
数学强化通关330题	2021年1月	强化提高
数学决胜冲刺6套卷	2021年10月	冲刺预测
数学临阵磨枪	2021年10月	冲刺预测

G20210010



微信扫一扫
解锁更多精彩内容



关注作者团队微博
与名师一起互动交流



责任编辑 / 吕睿

ISBN 978-7-109-27554-6



9 787109 275546 >

定价：99.80元