“助力乡村学校音体美课堂行动”官方合作图书

V研客及全国各大考研培训学校指定用书

金榜時代™

GLIST 明德·弘毅·品质 07

金榜时代考研数学系列

数学（数学三）

复习全书（综合提高篇）

2022

< 综合复习·全面提高 >

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

编著◎李永乐 王式安 刘喜波 武忠祥 宋浩 姜晓千 铁军 李正元 蔡燧林 胡金德

主编建议 | 与《真题全精解析》《基础过关660题》《强化通关330题》配合使用，效果更佳

通关攻略 | 超值赠送《题源探究同步练习》，高效刷题，举一反三，让学习不再是苦海

刷题绝配 | 微信扫右侧二维码观看本书配套精选视频，李永乐团队主讲，犹如名师在身旁

中国农业出版社
CHINA AGRICULTURE PRESS

金榜时代考研数学名师团队

线代王 · 李永乐

@清华李永乐考研数学辅导团队　微信公众号：永乐讲线代　B站：李永乐考研团队

- 原清华大学应用数学系教授
- 北京高教学会数学研究会副理事长
- 广受学生信赖的“线代王”
- 曾任全国硕士研究生入学考试北京地区数学阅卷组组长
- 百万畅销书《线性代数辅导讲义》《数学复习全书》主编

李老师作为全国著名的考研数学线性代数辅导专家，对考研数学出题形式、考试重点了如指掌，解题思路极其灵活，辅导针对性极强，效果优良，成绩显著，受到广大学员的交口称赞。其主编的《线性代数辅导讲义》《数学复习全书》《数学基础过关660题》等已被历届考生公认为复习首选辅导书。

前命题组组长 · 王式安

@清华李永乐考研数学辅导团队　B站：李永乐考研团队

- 原北京理工大学研究生院院长、应用数学系主任、教授
- 享受国务院特殊津贴的数学专家
- 美国哥伦比亚大学 、南佛罗里达大学、纽约大学等大学的客座教授
- 1987-2001年间担任全国硕士研究生入学考试数学命题组组长
- 百万畅销书《概率论与数理统计辅导讲义》《数学复习全书》主编

王老师凭借多年参加考研数学命题工作的深厚经验，对考研数学的命题思路和命题方向了如指掌。其主编的《概率论与数理统计辅导讲义》《数学复习全书》《数学基础过关660题》等已被历届考生公认为复习首选辅导书。

考研高数“三巨头”——刘喜波（高数波叔）

@清华李永乐考研数学辅导团

- 中国科学院数学博士
- 北方工业大学理学院统计学系系主任、教授

长期从事本科生的教育教学工作，曾荣获学校师德先进个人、十佳班导师等称号，是北京市中青年骨干教师、北京市公共数学优秀教学团队主要成员，主编教材1部、教学参考书3部、教育教学论文集1部、译著2部，参编教学参考书10余部。

微信公众号【研朱考研】
(ID: gjky66)

武忠祥

@清华李永乐考研数学辅导团队

原西安交通大学（985、211、双一流高校）数学系教授
美国爱荷华大学（2019美国综合性大学TOP100）访问学者
百万畅销书《高等数学辅导讲义》《数学复习全书》主编
高教社《工科数学分析基础》《高等数学基础》等教材主编

考研高数“三巨头”——宋浩（考研数学阅卷人）

@宋浩老师　B站：宋浩老师官方

- 山东大学数学院本科研究生、中国科学院博士
- 英国Queen Mary University of London访问学者
- 副教授，考研数学阅卷人

宋老师上课风趣幽默、由浅入深，能把复杂抽象的数学讲得诙谐有趣，上传至B站的数学视频《线性代数》《微积分》《概率论与数理统计》《高等数学》帮助了全国无数的大学生，总播放量近2000万次。宋老师讲考研数学，延续其风趣幽默的特点，喜欢从多种角度找寻思路，善于总结知识点，把晦涩难懂的考研知识讲的生动而有趣。

考研高数“三巨头”——姜晓千（全能名师）

@晓千老师　微信公众号：晓千老师

- 中国人民大学金融数学博士
- 全国各大省市考研辅导机构全程主讲
- 新浪、搜狐、腾讯、网易、中国教育在线等各大门户网站特邀访谈嘉宾

姜老师对考研数学历年真题有着极其深入的研究，授课风格高屋建瓴、激情洋溢、亲和幽默，深受考研学子喜爱。

“助力乡村学校音体美课堂行动”官方合作图书

V研客及全国考研培训学校指定用书

金榜時代™
GLIST 明德·弘毅·品质

金榜时代考研数学系列

2022

数学（数学三）

复习全书（综合提高篇）

<综合复习·全面提高>

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

编著◎李永乐 王式安 刘喜波 武忠祥 宋浩 姜晓千 铁军 李正元 蔡燧林 胡金德

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

@考研路上火力全开的你

学习知识要善于思考，思考，再思考。 ——爱因斯坦

中国农业出版社
CHINA AGRICULTURE PRESS
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

数学复习全书. 数学三 / 李永乐等编著. —北京：中国农业出版社，2020.12
ISBN 978-7-109-27551-5

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2020)第 210564 号

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

中国农业出版社出版
地址：北京市朝阳区麦子店街 18 号楼
邮编：100125
责任编辑：吕睿
印刷：河北正德印务有限公司
版次：2020 年 12 月第 1 版
印次：2020 年 12 月河北第 1 次印刷
发行：新华书店北京发行所
开本：787mm×1092mm 1/16
印张：28
字数：415 千字
定价：118.00 元

版权所有 · 侵权必究
凡购买本社图书，如有印装质量问题，我社负责调换。
服务电话：010-59195115 010-59194918

金榜时代™ 考研数学系列图书
GLIST 国王一定有品牌

内容简介及使用说明

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

考研数学满分150分，数学在考研成绩中的比重很大；同时又因数学学科本身的特点，考生的数学成绩历年来千差万别，数学成绩好在考研中很占优势，因此有“得数学者考研成”之说。既然数学对考研成绩如此重要，那么就有必要探讨一下影响数学成绩的主要因素。

本系列图书作者根据多年的命题经验和阅卷经验，发现考研数学命题的灵活性非常大，不仅表现在一个知识点与多个知识点的考查难度不同，更表现在对多个知识点的综合考查上，这些题目在表达上多一个字或多一句话，难度都会变得截然不同。正是这些综合型题目拉开了考试成绩的距离，而构成这些难点的主要因素，实际上是最基础的基本概念、定理和公式的综合。同时，从阅卷反映的情况来看，考生答错题目的主要原因也是对基本概念、定理和公式记忆和掌握得不够熟练。总结为一句话，那就是：要想数学拿高分，就必须熟练掌握、灵活运用基本概念、定理和公式。

基于此，李永乐考研数学辅导团队结合多年来考研辅导和研究的经验，精心编写了本系列图书，目的在于帮助考生有计划、有步骤地完成数学复习，从基本概念、定理和公式的记忆，到对其的熟练运用，循序渐进。以下介绍本系列图书的主要特点和使用说明，供考生复习时参考。

书名	本书特点	本书使用说明
《数学复习全书·基础篇》	**内容基础·提炼精准·易学易懂**（推荐使用时间：2020年6月—2020年12月）	
	本书根据大纲的考试范围将考研所需复习内容提炼出来，形成考研数学的基础内容和复习逻辑，实现大学数学同考研数学之间的顺利过渡，开启考研复习第一篇章。	考生复习过本校大学数学教材后，即可使用本书。如果大学没学过数学或者本校课本是自编教材，与考研大纲差别较大，也可使用本书替代大学数学教材。
《数学基础过关660题》	**题目经典·体系完备·逻辑清晰**（推荐使用时间：2020年9月—2021年4月）	
	本书主编团队出版20年的经典之作，一直被模仿，从未被超越。年销量达百万余册，是当之无愧的考研数学头号畅销书，拥有无数甘当“自来水”的粉丝读者，口碑爆棚，考研数学不可不入！“660”也早已成为考研数学的年度关键词。 本书重基础，重概念，重理论，一旦你拥有了《数学复习全书》《数学基础过关660题》教你的思维方式、知识逻辑、做题方法，你就能基础稳固、思维灵活，对知识、定理、公式的理解提升到新的高度，避免陷入复习中后期“基础不牢，地动山摇”的窘境。	与《数学复习全书·基础篇》搭配使用，在完成对基础知识的学习后，有针对性地做一些练习。帮助考生熟练掌握定理、公式和解题技巧，加强知识点的前后联系，将之体系化、系统化，分清重难点，让复习周期尽量缩短。 虽说书中都是选择题和填空题，同学们不要轻视，也不要一开始就盲目做题。看到一道题，要能分辨出是考哪个知识点，考什么，然后在做题过程中看看自己是否掌握了这个知识点，应用的定理、公式的条件是否熟悉，这样才算真正做好了一道题。
《数学历年真题全精解析·基础篇》	**分类详解·注重基础·突出重点**（推荐使用时间：2020年6月—2020年12月）	
	本书精选精析1987—2008年考研数学真题，帮助考生提前了解大学水平考试与考研选拔考试的差别，不会盲目自信，也不会妄自菲薄，真正跨入考研的门槛。	与《数学复习全书·基础篇》《数学基础过关660题》搭配使用，复习完一章，即可做相应的章节真题。不会做的题目做好笔记，二轮复习时的继续练习。

书名	本书特点	本书使用说明
《数学复习全书》(综合提高篇)	**系统全面·深入细致·综合提高**(推荐使用时间:2021年1月—2021年7月)	
	本书为作者团队扛鼎之作,常年稳居各大平台考研图书畅销榜前列,主编之一的李永乐老师更是入选2019年"当当20周年白金作家",考研界仅两位作者获此称号。 本书从基本理论、基础知识、基本方法出发,全面、深入、细致地讲解考研数学大纲要求的所有考点,不提供花拳绣腿的不实用技巧,也不提倡误人子弟的费时背书法,而是扎扎实实地带同学们深入每一个考点背后,找到它们之间的关联、逻辑,让同学们从知识点零碎、概念不清楚、期末考试过后即忘的"低级"水平,提升到考研必需的高度。	利用《数学复习全书·基础篇》把基本知识"捡"起来之后,再使用本书。本书及赠送本包含知识点的详细讲解、相应的练习题,以及笔记功能,有利于同学们建立考研知识体系和框架,打好基础。 在《数学基础过关660题》中若遇到不会做的题,可以放到这里来做。以章或节为单位,学习新内容前要复习前面的内容,按照一定的规律来复习。基础薄弱或中等偏下的考生,务必要利用考研当年上半年的时间,整体吃透书中的理论知识,摸清例题设置的原理和必要性,特别是对大纲中要求的基本概念、理论、方法要系统理解和掌握。
《数学历年真题全精解析》(强化篇)	**真题真练·总结规律·提升技巧**(推荐使用时间:2021年7月—2021年11月)	
	本书完整收录2009—2021年考研数学的全部试题,将真题按考点分类,还精选了其他卷的试题作为练习题。力争做到考点全覆盖,题型多样,重点突出,不简单重复。书中的每道题给出的参考答案有常用、典型的解法,也有技巧性强的特殊解法。分析过程逻辑严谨、思路清晰,具有很强的可操作性,通过学习,考生可以独立完成对同类题的解答。	边做题、边总结,遇到"卡壳"的知识点、题目,回到《数学复习全书》和之前听过的基础课、强化课中去补,争取把每个真题知识点吃透、搞懂,不留死角。 通过做真题,进一步提高解题能力和技巧,满足实际考试的要求。第一阶段,浏览每年真题,熟悉题型和常考点。第二阶段,进行专项复习。
《高等数学辅导讲义》 《线性代数辅导讲义》 《概率论与数理统计辅导讲义》	**经典讲义·专项突破·强化提高**(推荐使用时间:2021年7月—2021年10月)	
	三本讲义分别由作者的教学讲稿改编而成,系统阐述了考研数学的基础知识。书中例题都经过严格筛选、归纳,是多年经验的总结,对同学们的重点、难点的把握准确,有针对性。适合认真研读,做到举一反三。	哪科较薄弱,精研哪本。搭配《数学强化通关330题》一起使用,先复习讲义上的知识点,做章节例题、练习,再去听相关章节的强化课,做《数学强化通关330题》的相关习题,更有利于知识的巩固和提高。
《数学强化通关330题》	**综合训练·突破重点·强化提高**(推荐使用时间:2021年5月—2021年10月)	
	强化阶段的练习题,综合训练必备。具有典型性、针对性、技巧性、综合性等特点,可以帮助同学们突破重点、难点,熟悉解题思路和方法,增强应试能力。	与《数学基础过关660题》互为补充,包含选择题、填空题和解答题。搭配《高等数学辅导讲义》《线性代数辅导讲义》《概率论与数理统计辅导讲义》使用,效果更佳。
《数学决胜冲刺6套卷》	**冲刺模拟·有的放矢·高效提分**(推荐使用时间:2021年11月—2021年12月)	
	通过整套题的训练,对所学知识进行系统总结和梳理。不同于重点题型的练习,需要全面的知识,要综合应用。必要时应复习基本概念、公式、定理,准确记忆。	在精研真题之后,用模拟卷练习,找漏洞,保持手感。不要掐时间、估分,遇到不会的题目,回归基础,翻看以前的学习笔记,把每道题吃透。
《数学临阵磨枪》	**查漏补缺·问题清零·从容应战**(推荐使用时间:考前20天)	
	本书是常用定理公式、基础知识的清单。最后阶段,大部分考生缺乏信心,感觉没复习完,本来会做的题目,因为紧张、压力,也容易出错。本书能帮助考生在考前查漏补缺,确保基础知识不丢分。	搭配《数学决胜冲刺6套卷》使用。上考场前,可以再次回忆、翻看本书。

前言

Preface

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

为了帮助广大考生能够在较短的时间内,准确理解和熟练掌握考试大纲知识点的内容,全面提高解题能力和应试水平,编写团队依据十余年的命题与阅卷经验,并结合二十多年的考研辅导和研究精华,精心编写了本书,以帮助同学们提高综合分析和综合解题的能力。

一、本书的编排结构

全书分三篇,分别是微积分、线性代数、概率论与数理统计,各篇按大纲设置章节,每章的编排如下:

1.考点与要求　设置本部分的目的是使考生明白考试内容和考试要求,从而在复习时有明确的目标和重点。

2.内容精讲　本部分对考试大纲所要求的知识点进行全面阐述,并对考试重点、难点以及常考知识点进行深度剖析。搭建起脉络框架,浓缩教材内容。

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

3.例题分析　本部分对历年考题所涉及的题型进行归纳分类,总结各种题型的解题方法,注重对所学知识的应用,以便能够开阔考生的解题思路,使所学知识融会贯通,并能灵活地解决问题。本部分针对以往考生在解题过程中普遍存在的问题及常犯的错误,给出相应的注意事项,对有难度的例题给出解题思路帮助分析,以便加强考生对基本概念、公式和定理等内容的理解和正确运用。

二、本书的主要特色

1.权威打造　命题专家和阅卷专家联袂打造,站在命题专家的角度命题,站在阅卷专家的角度解题,为考生提供最权威的复习指导。

2.综合复习　与同类图书相比,本书加强了知识点前后交叉的综合性,将散落于不同章节的知识点进行整理归纳,帮助同学们梳理所学知识,并通过查漏补缺,提升自主学习的能力。

3.全面提高　本书既从宏观层面把握考研对知识的要求,又从微观层面对重要知识点进行深入细致的剖析,让考生思路清晰、顺畅。

4.一题多解　对于常考热点题型,均给出巧妙、新颖、简便的几种解法,拓展考生思维,锻炼考生

知识应用的灵活性。这些解法均来自各位专家多年教学实践总结和长期命题阅卷经验。

三、本书的复习建议

本书随书赠送《学霸养成笔记与题源探究同步练习》，同学们要发挥好笔记本与练习的作用，养成好的学习习惯能让同学们复习效率提高，受益终身。

笔记记下重点难点，后期复习减轻负担。练习是巩固所学必不可少的环节，因此，在每一章编写团队的老师都精心编写了部分练习题，供同学们练习。

建议考生在使用本书时不要就题论题，而是要多动脑，通过对题目的练习、比较、思考，总结并发现题目设置和解答的规律性，真正掌握应试解题的金钥匙，从而迅速提高知识水平和应试能力，取得理想分数。

使用本书的同时，也可以配合使用本书作者编写的《数学复习全书·基础篇》《数学基础过关660题》《数学历年真题全精解析》《数学强化通关330题》等，提高复习效率。

另外，为了更好地帮助同学们进行复习，“李永乐考研数学辅导团队”特在新浪微博上开设答疑专区，同学们在考研数学复习中，遇到任何问题，均可在线留言，教师团队将尽心为你解答。

微信公众号【顶尖考研】
(ID:dingjiankaoyan66)

新浪微博：清华李永乐考研数学辅导团队

微信公众号：金榜时代考研

最后，本书的成稿还要感谢考研数学原命题组组长单立波老师在编校过程中所付出的心血。

希望本书能为同学们的复习备考带来帮助。书中的不足和疏漏之处，恳请读者批评指正。

祝同学们复习顺利、心想事成、考研成功！

编 者

2020 年 12 月

目录

Contents

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

第一篇　微积分

第一章　函数、极限、连续

考点与要求 …… (3)
§1　函　数 …… (3)
内容精讲 …… (3)
一、函数的概念及表示方法 …… (3)
二、函数的性态 …… (3)
三、几个与函数相关的概念 …… (4)
四、重要公式与结论 …… (5)
例题分析 …… (6)
一、求函数的定义域及表达式 …… (6)
二、函数的特性 …… (8)
§2　极　限 …… (11)
内容精讲 …… (11)
一、极限的定义 …… (11)
二、数列极限的基本性质 …… (11)
三、函数极限的基本性质 …… (11)
四、无穷小量与无穷大量 …… (12)
五、极限的四则运算法则 …… (13)
六、两个重要极限 …… (13)
七、极限存在的两个准则 …… (13)
八、洛必达(L'Hospital)法则 …… (14)
九、重要公式与结论 …… (14)
例题分析 …… (15)
一、极限的概念与性质 …… (15)
二、求函数的极限 …… (16)
三、求数列的极限 …… (24)
四、求含参变量的极限 …… (26)
五、无穷小量阶的比较 …… (26)
六、函数极限的反问题 …… (27)
§3　函数的连续与间断 …… (29)
内容精讲 …… (29)
一、连续的定义 …… (29)
二、函数的间断点及其分类 …… (30)
三、连续函数性质 …… (30)
四、重要定理与结论 …… (30)
例题分析 …… (31)
一、函数的连续性及间断点的分类 …… (31)
二、连续函数性质的应用 …… (33)

第二章　一元函数微分学

考点与要求 …… (34)
§1　导数与微分 …… (34)
内容精讲 …… (34)
一、导数的概念 …… (34)
二、导数的计算 …… (35)
三、微分 …… (37)
四、重要公式与结论 …… (37)
例题分析 …… (38)
一、有关导数的定义及性质 …… (38)
二、含有绝对值函数的导数 …… (42)
三、导数的几何意义 …… (43)
四、变限积分的导数 …… (44)
五、利用导数公式及法则求导 …… (45)
六、可导条件下求待定的参数 …… (47)
七、求函数的高阶导数 …… (48)
§2　导数的应用 …… (49)
内容精讲 …… (49)
一、函数的单调性与极值 …… (49)
二、曲线的凹凸性与拐点 …… (50)
三、曲线的渐近线 …… (51)
四、函数图形的描绘 …… (51)

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

五、重要公式与结论 …… (51)
例题分析 …… (52)
一、求函数的单调区间与极值 …… (52)
二、判断曲线的凹凸性与拐点 …… (54)
三、求曲线的渐近线 …… (55)
四、导数的经济应用 …… (57)
§3 中值定理及不等式的证明 …… (59)
内容精讲 …… (59)
一、微分中值定理 …… (59)
二、补充公式与结论 …… (60)
三、与本章例题有关的其他内容 …… (60)
例题分析 …… (60)
一、证明存在 ξ 使 $f(\xi)=0$ …… (60)
二、讨论方程根的个数及范围 …… (62)
三、证明存在 ξ，使 $f^{(n)}(\xi)=0(n=1,2,\cdots)$ …… (64)
四、证明存在 ξ，使 $G(\xi,f(\xi),f'(\xi))=0$ …… (65)
五、含有 $f''(\xi)$(或更高阶导数)的介值问题 …… (66)
六、双介值问题 $F(\xi,\eta,\cdots)=0$ …… (67)
七、不等式的证明 …… (69)

第三章 一元函数积分学

考点与要求 …… (75)
§1 不定积分 …… (75)
内容精讲 …… (75)
一、不定积分的概念与性质 …… (75)
二、基本积分公式 …… (76)
三、三个积分方法 …… (76)
四、重要公式与结论 …… (77)
例题分析 …… (79)
一、不定积分的概念和性质 …… (79)
二、不定积分的计算 …… (80)
§2 定积分 …… (89)
内容精讲 …… (89)
一、定积分的概念与性质 …… (89)
二、定积分的几个定理 …… (91)
三、定积分的计算方法 …… (91)
四、重要公式与结论 …… (92)
例题分析 …… (93)
一、定积分的概念及性质 …… (93)
二、定积分的计算 …… (96)
三、有关变限积分的问题 …… (101)
四、定积分的证明题 …… (102)
§3 反常积分 …… (105)
内容精讲 …… (105)
一、无穷区间的反常积分 …… (105)
二、无界函数的反常积分 …… (105)
三、反常积分收敛的比较判别法 …… (106)
四、几个重要的反常积分 …… (107)
例题分析 …… (108)
§4 定积分的应用 …… (111)
内容精讲 …… (111)
一、定积分应用的基本原理 — 微元法(元素法) …… (111)
二、定积分的几何应用 …… (111)
三、定积分的经济应用 …… (112)
例题分析 …… (112)
一、定积分的几何应用 …… (112)
二、定积分的经济应用 …… (115)

第四章 多元函数微积分学

考点与要求 …… (116)
§1 多元函数微分学 …… (116)
内容精讲 …… (116)
一、多元函数的极限与连续 …… (116)
二、偏导数与全微分 …… (117)
三、复合函数求导法则 …… (118)
四、隐函数的求导公式 …… (119)
五、多元函数的极值 …… (119)
六、重要公式与结论 …… (120)
例题分析 …… (120)
一、二元函数的极限与连续 …… (120)
二、偏导数与全微分的概念 …… (122)
三、求复合函数的偏导数与全微分 …… (125)
四、求隐函数的偏导数与全微分 …… (130)

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

五、变量代换下表达式的变形 …… (133)
六、多元函数微分学的反问题 …… (135)
七、多元函数的极值与最值 …… (137)
§2 二重积分 …… (143)
内容精讲 …… (143)
一、二重积分的概念与性质 …… (143)
二、二重积分的计算 …… (144)
三、重要公式与结论 …… (145)
例题分析 …… (145)
一、二重积分的概念及性质 …… (145)
二、二重积分的基本计算 …… (147)
三、利用区域的对称性和函数的奇偶性计算积分 …… (150)
四、分块函数的二重积分 …… (154)
五、交换积分次序及坐标系 …… (155)
六、反常二重积分的计算 …… (158)
七、与二重积分相关的证明 …… (159)

第五章 无穷级数

考点与要求 …… (160)
§1 常数项级数 …… (160)
内容精讲 …… (160)
一、基本概念和基本性质 …… (160)
二、正项(不变号)级数敛散性的判别法 …… (161)
三、任意项(变号)级数敛散性的判别法 …… (162)
四、重要公式与结论 …… (162)
例题分析 …… (163)
一、正项级数敛散性的判定 …… (163)
二、交错级数的敛散性的判定 …… (167)
三、任意项级数敛散性的判定 …… (169)
四、数项级数敛散性的证明 …… (172)
五、利用收敛级数求极限 …… (174)
§2 幂级数 …… (175)
内容精讲 …… (175)
例题分析 …… (176)
一、求幂级数的收敛半径及收敛域 …… (176)
二、求幂级数的和函数 …… (180)
三、求数项级数的和 …… (183)
四、函数展开为幂级数 …… (185)
五、经济中的应用 …… (187)

第六章 常微分方程与差分方程

考点与要求 …… (188)
§1 常微分方程 …… (188)
内容精讲 …… (188)
一、几个基本概念 …… (188)
二、常见的一阶微分方程及其解法 …… (189)
三、二阶线性微分方程 …… (189)
例题分析 …… (191)
一、一阶微分方程的求解 …… (191)
二、常系数线性微分方程 …… (194)
三、可化为微分方程求解的问题 …… (198)
四、微分方程的应用 …… (201)
§2 差分方程 …… (203)
内容精讲 …… (203)
一、差分的概念 …… (203)
二、一阶常系数线性差分方程 …… (203)
例题分析 …… (203)

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)
微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

第二篇 线性代数

第一章 行列式

考点与要求 …… (207)
内容精讲 …… (207)
例题分析 …… (210)
一、数字型行列式的计算 …… (210)
二、抽象型行列式的计算 …… (216)

三、行列式 $|A|$ 是否为零的判定 …… (218)
四、关于代数余子式求和 …… (219)

第二章 矩 阵

考点与要求 …… (221)
内容精讲 …… (221)
§1 矩阵的概念及运算 …… (221)
一、矩阵的概念 …… (221)
二、矩阵的运算 …… (222)
三、矩阵的运算规则 …… (222)
四、特殊矩阵 …… (223)
§2 伴随矩阵、可逆矩阵 …… (223)
一、伴随矩阵、可逆矩阵的概念 …… (224)
二、伴随矩阵重要公式 …… (224)
三、n 阶矩阵 A 可逆的充分必要条件 … (224)
四、逆矩阵的运算性质 …… (224)
五、求逆矩阵的方法 …… (224)
§3 初等变换、初等矩阵 …… (225)
一、定义 …… (225)
二、初等矩阵与初等变换的性质 …… (226)
§4 矩阵的秩 …… (226)
一、矩阵秩的概念 …… (226)
二、矩阵秩的公式 …… (226)
§5 分块矩阵 …… (227)
一、分块矩阵的概念 …… (227)
二、分块矩阵的运算 …… (227)
例题分析 …… (228)
一、矩阵的概念及运算 …… (228)
二、特殊方阵的幂 …… (231)
三、伴随矩阵的相关问题 …… (233)
四、可逆矩阵的相关问题 …… (236)
五、初等变换、初等矩阵 …… (239)
六、矩阵方程 …… (241)
七、矩阵秩的计算 …… (242)

第三章 向 量

考点与要求 …… (246)
内容精讲 …… (246)
§1 n 维向量的概念与运算 …… (246)
§2 线性表出、线性相关 …… (246)
一、线性表出的概念 …… (247)
二、线性相关、线性无关的概念 …… (247)
三、线性表出、线性相关的重要定理 …… (247)
§3 极大线性无关组、秩 …… (248)
一、极大线性无关组、向量组秩的概念 ……
…… (248)
二、有关秩的定理 …… (248)
§4 Schmidt 正交化、正交矩阵 …… (248)
一、Schmidt 正交化(正交规范化方法) ……
…… (248)
二、正交矩阵 …… (249)
例题分析 …… (249)
一、线性相关的判别 …… (249)
二、向量的线性表示、向量组等价 …… (251)
三、线性相关与线性无关的证明 …… (254)
四、秩与极大线性无关组 …… (259)
五、正交化、正交矩阵 …… (261)

第四章 线性方程组

考点与要求 …… (263)
内容精讲 …… (263)
§1 克拉默法则 …… (263)
§2 齐次线性方程组 …… (263)
§3 非齐次线性方程组 …… (265)
例题分析 …… (266)
一、线性方程组的基本概念题 …… (266)
二、$Ax=0$,基础解系 …… (269)
三、解方程组 $Ax=b$ …… (275)
四、两个方程组的公共解 …… (280)
五、同解方程组 …… (282)
六、方程组的应用 …… (283)

第五章 特征值、特征向量、相似矩阵

考点与要求 …… (286)
内容精讲 …… (286)
§1 特征值、特征向量 …… (286)
一、定义 …… (286)
二、特征值的性质 …… (286)
三、求特征值、特征向量的方法 …… (286)

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

§2 相似矩阵、矩阵的相似对角化 …… (287)
一、定义 …… (287)
二、矩阵可相似对角化的充分必要条件 …… (287)
三、相似矩阵的性质及相似矩阵的必要条件 …… (288)
§3 实对称矩阵的相似对角化 …… (288)
一、定义 …… (288)
二、实对称阵的特征值，特征向量及相似对角化 …… (288)
三、实对称矩阵正交相似于对角阵的步骤 …… (288)
例题分析 …… (289)
一、特征值，特征向量的求法 …… (289)
二、两个矩阵有相同的特征值的证明 …… (293)
三、关于特征向量及其他给出特征值特征向量的方法 …… (294)
四、矩阵是否相似于对角阵 …… (296)
五、利用特征值、特征向量及相似矩阵确定参数 …… (298)
六、由特征值、特征向量反求 A …… (299)
七、矩阵相似及相似标准形 …… (300)
八、相似对角阵的应用 …… (305)

第六章 二次型

考点与要求 …… (309)
内容精讲 …… (309)
§1 二次型的定义、矩阵表示，合同矩阵 …… (309)
一、二次型概念 …… (309)
二、二次型的矩阵表示 …… (309)
§2 化二次型为标准形、规范形 合同二次型 …… (310)
一、二次型的标准形，规范形 …… (310)
二、化二次型为标准形，规范形 …… (311)
三、合同矩阵，合同二次型 …… (311)
§3 正定二次型、正定矩阵 …… (312)
例题分析 …… (312)
一、二次型的矩阵表示 …… (312)
二、化二次型为标准形、规范形 …… (313)
三、合同矩阵、合同二次型 …… (320)
四、正定性的判别与证明 …… (322)
五、二次型的应用 …… (328)

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

第三篇 概率论与数理统计

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

第一章 随机事件和概率

考点与要求 …… (333)
§1 事件、样本空间、事件间的关系与运算 …… (333)
内容精讲 …… (333)
例题分析 …… (335)
§2 概率、条件概率、独立性和五大公式 …… (337)
内容精讲 …… (337)
例题分析 …… (339)
§3 古典概型与伯努利概型 …… (344)
内容精讲 …… (344)
例题分析 …… (344)

第二章 随机变量及其概率分布

考点与要求 …… (347)
§1 随机变量及其分布函数 …… (347)
内容精讲 …… (347)
例题分析 …… (348)
§2 离散型随机变量和连续型随机变量 …… (349)
内容精讲 …… (349)
例题分析 …… (350)

§3 常用分布 …… (351)
内容精讲 …… (351)
例题分析 …… (354)
§4 随机变量函数的分布 …… (357)
内容精讲 …… (357)
例题分析 …… (358)

第三章 多维随机变量及其分布

考点与要求 …… (360)
§1 二维随机变量及其分布 …… (360)
内容精讲 …… (360)
例题分析 …… (362)
§2 随机变量的独立性 …… (368)
内容精讲 …… (368)
例题分析 …… (368)
§3 二维均匀分布和二维正态分布 …… (376)
内容精讲 …… (376)
例题分析 …… (377)
§4 两个随机变量函数 $Z=g(X,Y)$ 的分布 …… (380)
内容精讲 …… (380)
例题分析 …… (380)

第四章 随机变量的数字特征

考点与要求 …… (386)
§1 随机变量的数学期望和方差 …… (386)
内容精讲 …… (386)
例题分析 …… (388)
§2 矩、协方差和相关系数 …… (396)
内容精讲 …… (396)
例题分析 …… (397)
§3 切比雪夫不等式 …… (405)
内容精讲 …… (405)
例题分析 …… (405)

第五章 大数定律和中心极限定理

考点与要求 …… (406)
内容精讲 …… (406)
例题分析 …… (407)

第六章 数理统计的基本概念

考点与要求 …… (410)
§1 总体、样本、统计量和样本数字特征 …… (410)
内容精讲 …… (410)
例题分析 …… (411)
§2 常用统计抽样分布和正态总体的抽样分布 …… (413)
内容精讲 …… (413)
例题分析 …… (415)

第七章 参数估计

考点与要求 …… (420)
§1 点估计 …… (420)
内容精讲 …… (420)
例题分析 …… (420)
§2 估计量求法 …… (425)
内容精讲 …… (425)
例题分析 …… (427)

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

第一篇

微 积 分

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)
微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

微信公众号【顶尖考研】
(ID:dijin66)

第一章　函数、极限、连续

考点与要求

了解　函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性，反函数及隐函数的概念，初等函数的概念，极限的性质与极限存在的两个准则，连续函数的性质和初等函数的连续性.

理解　函数的概念，复合函数及分段函数的概念，极限的概念，函数左、右极限的概念以及函数极限存在与左、右极限之间的关系，无穷小量、无穷大量的概念，函数连续性的概念(含左连续与右连续)，闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理).

会　建立应用问题的函数关系，用等价无穷小量求极限，判别函数间断点的类型，应用闭区间上连续函数的性质.

掌握　函数的表示方法，基本初等函数的性质及其图形，极限的四则运算法则，利用两个重要极限求极限的方法，无穷小量的比较方法.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

§1　函　数

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

内容精讲

一、函数的概念及表示方法

1. 函数　设 x 和 y 是两个实变量，D 是一个给定的非空实数集，如果对于任意 $x \in D$，按照一定的法则，变量 y 总有唯一确定的值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y = f(x)$，其中 x 称作自变量，y 称作因变量，D 称作函数 $y = f(x)$ 的定义域，函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称作函数 $f(x)$ 的值域. 函数有公式法、表格法、图象法等表示方法.

要注意的是对于两个给定的函数，当且仅当它们的定义域和对应法则都相同时，才能说它们是相同的函数，否则它们就是不同的函数.

2. 邻域　设 $\delta > 0$，实数集合 $U(x_0, \delta) = \{x \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$ 称为点 x_0 的半径为 δ 的邻域. 实数集合 $\dot{U}(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 称为点 x_0 的半径为 δ 的去心邻域. 相应地 $\{x \mid 0 < x - x_0 < \delta\}$ 称为 x_0 的去心右邻域，$\{x \mid -\delta < x - x_0 < 0\}$ 称为 x_0 的去心左邻域.

二、函数的性态

1. 有界性　设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果存在正数 M，对于任意 $x \in I$，恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有界；否则称函数 $y = f(x)$ 在 I 上无界. 如果存在数 M_1，对于任意 $x \in I$，恒有 $f(x) \leqslant M_1$，则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有上界；如果存在数 M_2，对于任意 $x \in I$，恒有 $f(x) \geqslant M_2$，则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有下界. 显然，函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界的充分必要条件是它在 I 上既有上界又有下界.

常见的在$(-\infty,+\infty)$上有界函数有$\sin x,\cos x,\arctan x,\operatorname{arccot} x,\arcsin x,\arccos x$.

【注】 (1) 函数$y=f(x)$有界或无界是相对于某个区间而言的,例如$y=\frac{1}{x^2}$在区间$(0,1)$内无界,但在区间$[\frac{1}{4},1]$上是有界的.如不指明区间,那么是指在$f(x)$的定义域上的有界性.

(2) 无界函数和无穷大的区别:在某一变化过程中,若$f(x)$为无穷大,则存在对应的区间使$f(x)$无界;但是若$f(x)$在某个区间上无界,则$f(x)$不一定为无穷大.例如$y=\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$在区间$(0,1]$上无界,但函数不是$x\to 0^+$时的无穷大.

(3) 若函数$y=f(x)$在区间I上有界,则$f(x)$的导函数和原函数在区间I上不一定有界.例如$y=\sqrt{x}$在$(0,1]$上有界,但其导函数$y=\frac{1}{2\sqrt{x}}$在$(0,1]$上是无界的;$y=1-\sin x$在$(-\infty,+\infty)$上有界,$F(x)=x+\cos x$是其原函数,但它在$(-\infty,+\infty)$上是无界的.

2. 单调性 设函数$f(x)$在区间I上有定义,如果对于任意$x_1,x_2\in I$,当$x_1<x_2$时,恒有$f(x_1)<f(x_2)$(或$f(x_1)>f(x_2)$),则称函数$y=f(x)$在区间I上是单调增加(或减少)的.

【注】 若对任意$x_1,x_2\in I$,当$x_1<x_2$时,恒有$f(x_1)\leqslant f(x_2)$(或$f(x_1)\geqslant f(x_2)$),则称函数$y=f(x)$在区间I上是单调不减(或不增)的.

3. 周期性 设函数$f(x)$的定义域为D,如果存在一个常数$T>0$,使得对于任一$x\in D$,有$x\pm T\in D$且$f(x+T)=f(x)$恒成立,则称$f(x)$为周期函数,T称为$f(x)$的周期.通常(如果存在)把满足上式的最小正数T称为函数$f(x)$的最小正周期.

4. 奇偶性 设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称,如果对任意$x\in D$,恒有$f(-x)=f(x)$(或$f(-x)=-f(x)$),则称函数$f(x)$为偶函数(或奇函数).偶函数的图形关于y轴对称,奇函数的图形关于坐标原点对称.

【注】 若函数的定义域关于原点不对称,则此函数必定既不是奇函数,也不是偶函数.

三、几个与函数相关的概念

1. 复合函数 给定两个函数$y=f(u),u=\varphi(x)$,如果$u=\varphi(x)$的值域与$y=f(u)$的定义域有非空交集,则称函数$y=f[\varphi(x)]$为由$y=f(u)$及$u=\varphi(x)$复合而成的复合函数,u称为中间变量.

【注】 复合函数可多重复合,如$y=f[\varphi(\psi(x))]$可看作是由$y=f(u),u=\varphi(v)$和$v=\psi(x)$复合而成.

2. 反函数 设函数$y=f(x)$的定义域为D,值域为W.若对$\forall y\in W$,存在唯一确定的$x\in D$,使得$y=f(x)$,则得到x是y的函数,记作$x=f^{-1}(y)$,称为$y=f(x)$的反函数,而$y=f(x)$称为直接函数,习惯上将$y=f(x)$的反函数记为$y=f^{-1}(x)$.

【注】 (1) 单调函数一定存在反函数.

(2) 反函数$y=f^{-1}(x)$与直接函数$y=f(x)$有相同的单调性.

(3) 函数$y=f(x)$的图象与函数$x=f^{-1}(y)$的图象重合,但与函数$y=f^{-1}(x)$的图象关于直线$y=x$对称.

3. 隐函数 设有方程$F(x,y)=0$,若对$\forall x\in D$,存在唯一确定的y满足$F(x,y)=0$,由此确定的y与x的函数关系$y=y(x)$称为由方程$F(x,y)=0$所确定的隐函数.

4. 分段函数 在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同式子来表示的函数,称为分段函数.

分段函数一般不是初等函数. 这里用了“一般”两字，例如 $|x|=\sqrt{x^2}=\begin{cases}x, x\geqslant 0,\\ -x, x<0.\end{cases}$ 可以写成分段的形式，却是初等函数.

5. 基本初等函数与初等函数　常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

由基本初等函数经过有限次四则运算及复合运算而成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

【注】　幂指函数 $y=u(x)^{v(x)}(u(x)>0)$ 可化为 $u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}$.

四、重要公式与结论

1. 关于奇偶性

(1) 有限个奇函数的代数和仍是奇函数；有限个偶函数的代数和仍是偶函数.

(2) 奇数个奇函数的积是奇函数，偶数个奇函数的积是偶函数；有限个偶函数的积是偶函数；奇函数与偶函数的积是奇函数.

(3) 两个奇函数的复合是奇函数；两个偶函数的复合是偶函数；一个奇函数与一个偶函数的复合是偶函数.

(4) 若 $f(x)$ 是可导的偶函数，则 $f'(x)$ 为奇函数，且 $f'(0)=0$；若 $f(x)$ 是可导的奇函数，则 $f'(x)$ 为偶函数.

【注】　若 $f(x)$ 是偶函数且 $f'(0)$ 存在，则 $f'(0)=0$.

(5) 设 $f(x)$ 是连续函数，若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为奇函数；若 $f(x)$ 为奇函数，则对任意的 a，$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数.

(6) 若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的任意原函数，则

$f(x)$ 为奇函数 $\Leftrightarrow F(x)$ 为偶函数；$f(x)$ 为偶函数 $\nLeftrightarrow F(x)$ 为奇函数.

(7) 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，则 $f(x)$ 一定可以表示成奇函数与偶函数的和. 事实上，$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$，式中前者为奇函数，后者为偶函数.

(8) 奇函数在其对称区间的两边单调性相同，凹凸性相反，拐点关于原点对称；偶函数在其对称区间的两边单调性相反，凹凸性相同，拐点关于 y 轴对称.

2. 关于周期性

(1) 若 $f(x)$ 是以 T 为周期的可导函数，则 $f'(x)$ 仍是以 T 为周期的函数.

【注】　若 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数，且 $f'(x_0)$ 存在，则 $f'(x_0+T)=f'(x_0)$.

(2) 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，则

$$\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\mathrm{d}x,\qquad \int_0^{nT}f(x)\mathrm{d}x=n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.\ n\text{ 为正整数.}$$

3. 关于单调性

(1) 单调函数一定存在反函数，且它们的单调性相同.

(2) 单调函数的复合函数仍然是单调函数.

【注】　单调函数的导函数和原函数都不一定仍为单调函数. 例如 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加，而其导函数 $y'=3x^2$ 与原函数 $F(x)=\frac{1}{4}x^4$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内都不单调.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

4. 关于有界性

(1) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

(2) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

【注】 将有限区间 (a,b) 改为无穷区间，结论仍成立.

(3) 若 $f(x)$ 在集合 I 上有最大值(或最小值)，则 $f(x)$ 在集合 I 上有上(或下)界.

(4) 若 $f'(x)$ 在有限区间 I 上有界，则 $f(x)$ 在 I 上有界.

一、求函数的定义域及表达式

【例 1】 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, |x|\leqslant 1,\\ 1, 1<|x|\leqslant 2,\end{cases}$ 且 $g(x)=f(x^2)+f(x-1)$，求 $g(x)$ 的定义域.

解 $f(x)$ 的定义域为 $[-2,2]$，由 $f(x^2)$ 知 $0\leqslant x^2\leqslant 2$，即 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$，

由 $f(x-1)$ 知 $-2\leqslant x-1\leqslant 2$，即 $-1\leqslant x\leqslant 3$，

求其交集，得 $g(x)$ 的定义域为 $[-1,\sqrt{2}]$.

【例 2】 已知 $f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，试求函数 $\varphi(x)$ 的定义域.

解 由于 $1-x^2=f[\varphi(x)]=\sin\varphi(x)$，故 $\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$.

于是 $-1\leqslant 1-x^2\leqslant 1$，即 $0\leqslant x^2\leqslant 2$. 所以函数 $\varphi(x)$ 的定义域为 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【例 3】 求函数 $y=\ln\dfrac{x}{x-2}+\arccos\dfrac{3x-1}{5}$ 的定义域.

解题思路 根据对数函数中，真数要大于零；反余弦函数 $\arccos x$ 中 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 直接求解即得.

解 因为 $y=\ln\dfrac{x}{x-2}+\arccos\dfrac{3x-1}{5}$，所以

$$\begin{cases}\dfrac{x}{x-2}>0,\\ x-2\neq 0,\\ -1\leqslant\dfrac{3x-1}{5}\leqslant 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<0\text{ 或 }x>2,\\ x\neq 2,\\ -\dfrac{4}{3}\leqslant x\leqslant 2\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{4}{3}\leqslant x<0,$$

故所求定义域为 $-\dfrac{4}{3}\leqslant x<0$.

【评注】 求函数的定义域时注意：

(1) 分式中分母不能为零；

(2) 根式中负数不能开偶次方根；

(3) 对数函数中，底数要大于零不等于 1，真数要大于零；

(4) 反正弦函数 $\arcsin x$ 和反余弦函数 $\arccos x$ 中 $-1\leqslant x\leqslant 1$；

(5) $\tan x$，$\sec x\left(x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$，$k$ 为整数；$\cot x$，$\csc x(x\neq k\pi)$，k 为整数.

微信公众号顶尖考研 (ID:djky66)

【例 4】　设 $f(x)=\begin{cases}4-x^2, & |x|\leqslant 2,\\ 0, & |x|>2,\end{cases}$ 求 $f(f(x))$.

解　$f(f(x))=\begin{cases}4-f^2(x), & |f(x)|\leqslant 2,\\ 0, & |f(x)|>2.\end{cases}$

进一步，由下列不等式确定 x 取值范围，从而可得 $f(x)$ 的表达式，再代入上面式子：

(1) 由 $|f(x)|\leqslant 2$ 有 $\begin{cases}|4-x^2|\leqslant 2,\\ |x|\leqslant 2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}|0|\leqslant 2,\\ |x|>2.\end{cases}$ 即 $\sqrt{2}\leqslant|x|\leqslant 2$ 或 $|x|>2$.

(2) 由 $|f(x)|>2$ 有 $\begin{cases}|4-x^2|>2,\\ |x|\leqslant 2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}|0|>2,\\ |x|>2.\end{cases}$ 即 $|x|<\sqrt{2}$.

故 $$f(f(x))=\begin{cases}4, & |x|>2,\\ 4-(4-x^2)^2, & \sqrt{2}\leqslant|x|\leqslant 2,\\ 0, & |x|<\sqrt{2}.\end{cases}$$

【例 5】　已知 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x+x^3}{1+x^4}$，则函数 $f(x)=$ _____.

解　因为 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x+x^3}{1+x^4}=\frac{\frac{1}{x}+x}{\left(\frac{1}{x}+x\right)^2-2}$，令 $\frac{1}{x}+x=t$，则

$f(t)=\frac{t}{t^2-2}$，可见 $f(x)=\frac{x}{x^2-2}$.

【评注】　若按一般方法令 $\frac{1}{x}+x=t$，解出 x 再代入求 $f(t)$ 十分烦琐，应掌握一些基本技巧.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 6】　设 $f(x)$ 满足方程 $2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}$，求 $f(x)$.

解题思路　先将 x 换成 $\frac{1}{x}$，再求出 $f(x)$ 的表达式.

解　因为 $$2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}\qquad①$$

将 x 换成 $\frac{1}{x}$，有 $$2f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=x\qquad②$$

由 ①② 解得 $$f(x)=\frac{2-x^2}{3x}.$$

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

【例 7】　求函数 $y=\begin{cases}x, & -\infty<x<1,\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4,\\ 2^x, & 4<x<+\infty\end{cases}$ 的反函数.

解题思路　分段分别求各区间段的反函数即可.

解　当 $-\infty<x<1$ 时，$y=x$，其反函数为：$y=x$，$-\infty<x<1$；

当 $1 \leqslant x \leqslant 4$ 时，$y = x^2$，其反函数为：$y = \sqrt{x}, 1 \leqslant x \leqslant 16$；

当 $4 < x < +\infty$ 时，$y = 2^x$，其反函数为：$y = \log_2 x, 16 < x < +\infty$.

因此所求反函数为

$$y = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1, \\ \sqrt{x}, & 1 \leqslant x \leqslant 16, \\ \log_2 x, & 16 < x < +\infty. \end{cases}$$

小结

要掌握如下几种问题的作答：

1. 假设有关系式 $f(g(x)) = \varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 的表达式已知，有两种情况：

(1) 已知 f，求 g. 这相当于求反函数 $g(x) = f^{-1}(\varphi(x))$；

(2) 已知 g，求 f. 一般作变量代换 $g(x) = u \Rightarrow x = g^{-1}(u)$，于是有 $f(u) = \varphi(g^{-1}(u))$，再根据函数关系与变量字母无关，得 $f(x) = \varphi(g^{-1}(x))$.

以上(1)(2)均要求相应的反函数存在.

2. 求函数的定义域时注意事项见例 3 后的评注.

3. 求复合函数 $f(g(x))$ 的表达式. 先由外层函数 f 写出复合函数的表达式，同时写出内层函数 g，即中间变量的取值范围. 然后按内层函数 $g(x)$ 的取值范围确定自变量 x 的取值范围和复合函数 $f(g(x))$ 的表达式.

4. 求已知函数 $y = f(x)$ 的反函数，就是把已知函数 $y = f(x)$ 中的 x 用 y 表示为 $x = \varphi(y)$.

(1) 求出 $x = \varphi(y)$ 后将 x 与 y 互换，得 $y = \varphi(x)$；

(2) 求出直接函数的定义域便得反函数 $x = \varphi(y)$ 的值域，即 $y = \varphi(x)$ 的值域.

【注】 求分段函数的反函数，分段分别求各区间段的反函数.

微信公众号【顶尖考研】

二、函数的特性

【例 8】 判别下列函数的奇偶性：

(1) 符号函数 $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

(2) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

(3) $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，其中 a 为常数，$f(x)$ 为可积的奇函数.

顶尖考研公众号

解 (1) 因为 $\operatorname{sgn}(-x) = -\operatorname{sgn}(x)$，故 $\operatorname{sgn}(x)$ 为奇函数.

(2) 因为 $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

$$= \ln \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

$$= -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x).$$

故 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 为奇函数.

(3) $$F(-x) = \int_a^{-x} f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{t=-u} -\int_{-a}^{x} f(-u)\mathrm{d}u = \int_{-a}^{x} f(u)\mathrm{d}u$$

$$= \int_{-a}^{a} f(u)\mathrm{d}u + \int_a^x f(u)\mathrm{d}u = 0 + \int_a^x f(u)\mathrm{d}u = \int_a^x f(u)\mathrm{d}u = F(x).$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

【例 9】 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，“$M\Leftrightarrow N$”表示“M 的充分必要条件是 N”，则必有

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数.

解题思路 本题可直接推证，但最简便的方法还是通过反例用排除法找到答案.

解 【方法一】 任一原函数可表示为 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$，且 $F'(x)=f(x)$.

当 $F(x)$ 为偶函数时，有 $F(-x)=F(x)$，于是 $F'(-x)\cdot(-1)=F'(x)$，即 $-f(-x)=f(x)$，也即 $f(-x)=-f(x)$，可见 $f(x)$ 为奇函数.

反过来，若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数，从而 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$ 为偶函数，所以(A)为正确选项.

【方法二】 令 $f(x)=1$，则取 $F(x)=x+1$，排除(B)，(C). 令 $f(x)=x$，则取 $F(x)=\frac{1}{2}x^2$，排除(D). 故应选(A).

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

【例 10】 $x\to 0$ 时，$y=\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是

(A) 无穷大.　　(B) 无穷小.

(C) 非无穷大且在$(0,1]$上无界.　　(D) 在$(0,1]$上有界.

解 取 $x=\frac{1}{2n\pi}\to 0(n\to\infty)$ 时，有 $y=(2n\pi)^2\sin 2n\pi=0$.

取 $x=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\to 0(n\to\infty)$ 时，有

$$y=(2n\pi+\frac{\pi}{2})^2\sin(2n\pi+\frac{\pi}{2})=(2n\pi+\frac{\pi}{2})^2\to\infty.$$

故函数是无界且非无穷大量，即选(C).

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

【例 11】 $f(x)=\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在以下哪个区间有界.

(A)$(-1,0)$.　　(B)$(0,1)$.　　(C)$(1,2)$.　　(D)$(2,3)$.

解 本题要讨论的是开区间的有界性. 易知 $f(x)$ 的定义域是$(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$，在$(-1,0)$连续，且在 $x=-1$ 和 $x=0$ 的右、左极限为

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\frac{-\sin 3}{2\cdot 9}=-\frac{\sin 3}{18}.$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=-\frac{\sin 2}{4}.$$

故 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 有界，选(A).

另外，也可由 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\infty$，$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\infty$，分别排除(B)(C)以及(D). 从而选(A).

【例 12】 证明：函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界.

解题思路 虽然涉及的区间 $(0,+\infty)$ 是无穷区间，但 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续，仍可通过计算两个端点处的单侧极限的存在来证明.

证明 显然 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续，且

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to +\infty}f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x-1}{(x+1)e^x-1}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x+2}=0.$$

所以 $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界.

微信公众号【顶尖考研】(ID: diky66)

小结

函数的基本特性有：奇偶性、周期性、单调性和有界性. 对于函数的四个主要特性，奇偶性和周期性一般用定义检验；单调性则大多用导数符号分析；而有界性往往需要结合极限、连续与导数来确定. 另外，对周期性、有界性注意下面几点：

1. 周期性除了利用定义判别以外，还可利用常见周期函数的周期进行判别和计算. 例如由 $\sin x,\cos x$ 的周期为 2π，推知 $|\sin x|,|\cos x|,\sin 2x,\cos 2x$ 的周期为 π；由 $\tan x,\cot x$ 的周期为 π，推知 $|\tan x|,|\cot x|$ 的周期为 π，$\tan\dfrac{x}{2},\cot\dfrac{x}{2}$ 的周期为 2π.

2. 若 $f(x)$ 是可导的周期函数，则它的导函数仍是周期函数，且周期不变，但它的原函数不一定仍为周期函数. 例如 $f(x)=1+\sin x$ 是周期为 2π 的函数，其导函数 $f'(x)=\cos x$ 仍是周期为 2π 的函数，但 $F(x)=x-\cos x$ 是它的原函数不是周期函数.

3. 有界性除了利用定义判别以外，还应掌握下列判别法.

(1) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

(2) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

(3) 若 $f'(x)$ 在有限区间 I 有界，则 $f(x)$ 在 I 有界.

§2　极　限

内容精讲

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

一、极限的定义

1. 数列的极限

给定数列$\{x_n\}$及常数a,若对于任意给定的正数$\varepsilon>0$,总存在正整数N,使得当$n>N$时,有$|x_n-a|<\varepsilon$恒成立,则称常数a为数列$\{x_n\}$的极限,或者称数列$\{x_n\}$收敛于a,记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

2. 函数的极限

(1) **当$x\to\infty$时,函数$f(x)$的极限**　若存在常数A,对于任意给定的正数$\varepsilon>0$,总存在正数X,当$|x|>X$时,有$|f(x)-A|<\varepsilon$恒成立,则称常数A为$f(x)$当$x\to\infty$时的极限,记为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.类似可给出$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$及$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$的定义.

(2) **当$x\to x_0$时函数$f(x)$的极限**　若存在常数A,对于任意给定的正数$\varepsilon>0$,总存在$\delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$时,有$|f(x)-A|<\varepsilon$恒成立,则称常数A为$f(x)$当$x\to x_0$的极限,记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

(3) **当$x\to x_0$时函数$f(x)$的左、右极限**　若存在常数A,对于任意给定的正数$\varepsilon>0$,总存在$\delta>0$,当$0<x-x_0<\delta$时,有$|f(x)-A|<\varepsilon$恒成立,则称常数A为$f(x)$当$x\to x_0^+$时的右极限,记为$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$,或$f(x_0^+)=A$或$f(x_0+0)=A$.

若存在常数A,对于任意给定的正数$\varepsilon>0$,总存在$\delta>0$,使得当$0<x_0-x<\delta$时,有$|f(x)-A|<\varepsilon$恒成立,则称常数A为$f(x)$当$x\to x_0^-$时的左极限,记为$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$,或$f(x_0^-)=A$或$f(x_0-0)=A$.

二、数列极限的基本性质

1.(**极限的唯一性**)　如果数列$\{x_n\}$收敛,那么它的极限唯一.

2.(**收敛数列的有界性**)　如果数列$\{x_n\}$收敛,那么数列$\{x_n\}$一定有界,即存在常数$M>0$,使得,对任意n,有$|x_n|\leqslant M$.

3.(**收敛数列的保号性**)　如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,且$a>0$(或$a<0$),那么存在正整数$N$,当$n>N$时,都有$x_n>0$(或$x_n<0$).

【注】　1. 如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$,且$a>b$,那么存在正整数$N$,当$n>N$时,都有$x_n>y_n$.

2. 如果存在正整数N,当$n>N$时,都有$x_n\geqslant0$(或$x_n\leqslant0$),且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,那么$a\geqslant0$(或$a\leqslant0$).

4.(**收敛数列与其子数列间的关系**)　如果数列$\{x_n\}$收敛于a,那么它的任一子数列也收敛,且极限也是a.

三、函数极限的基本性质

1.(**极限的唯一性**)　如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=B$,那么$A=B$.

2.（函数极限的局部有界性） 如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，那么 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$内有界，即存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

3.（函数极限的局部保号性） 如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，而且 $A>0$（或 $A<0$），那么存在常数 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）. 如果在 x_0 的某去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$（或 $f(x)\leqslant 0$），而且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，那么 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

4.（函数极限与数列极限的关系） 如果极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 存在，$\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列，且满足：$x_n\neq x_0$，那么相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$ 必收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

【注】 上述函数极限的性质对 $x\to x_0^+$，x_0^-，∞，$+\infty$ 均成立.

四、无穷小量与无穷大量

以下lim表示$\lim\limits_{x\to x_0}$或$\lim\limits_{x\to\infty}$…的任意确定的一种.

1. 定义

无穷小量 如果 $\lim f(x)=0$，那么称函数 $f(x)$ 为此极限过程下的无穷小量.

无穷大量 如果 $\lim f(x)=\infty$，那么称函数 $f(x)$ 为此极限过程下的无穷大量.

【注】 1. 在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大量，那么$\dfrac{1}{f(x)}(f(x)\neq 0)$必为无穷小量；如果 $g(x)$ 为无穷小量，那么$\dfrac{1}{g(x)}(g(x)\neq 0)$必为无穷大量.

2. 不要把无穷小量与很小很小的数混为一谈，0是唯一可以作为无穷小量的常数；也不要把无穷大量与很大很大的数混淆，任何常数都不是无穷大量.

3. 无穷大量与无界函数之间的关系，见第1节二1的注(2).

2. 性质

性质1 $\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 是此极限过程下的无穷小量.

性质2

(1) 有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量.

(2) 有限个无穷小量的乘积仍是无穷小量.

(3) 无穷小量与有界量的乘积仍是无穷小量.

3. 无穷小量的比较

设在自变量 x 的同一变化过程中（如 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$），$\alpha(x)$，$\beta(x)$ 都是无穷小，且 $\beta(x)\neq 0$.

(1) 如果 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小，记作 $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

(2) 如果 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的低阶无穷小.

(3) 如果 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C(C\neq 0)$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小.

(4) 如果 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小，记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

(5) 如果 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)^k}=C(C\neq 0)$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小.

4. 等价无穷小代换定理

设在自变量 x 的同一变化过程中，$\alpha_1(x)$，$\alpha_2(x)$，$\beta_1(x)$，$\beta_2(x)$ 都

微信公众号【顶尖考研】(ID: dijian66)

是无穷小，而且 $\alpha_1(x)\sim\alpha_2(x)$，$\beta_1(x)\sim\beta_2(x)$，如果 $\lim\dfrac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}=A$，则

$$\lim\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim\frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}=A.$$

该定理表明，求两个无穷小之比的极限时，分子和分母都可用其等价无穷小代换，从而简化计算.

5. 常用等价无穷小　当 $x\to0$ 时，有（其中 $a>0,a\neq1,m\neq0$）

$\sin x\sim x$，　$\tan x\sim x$，　$\arcsin x\sim x$，

$\arctan x\sim x$，　$e^x-1\sim x$，　$a^x-1\sim x\ln a$，

$\ln(1+x)\sim x$，　$(1+x)^m-1\sim mx$，　$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，

$x-\sin x\sim\dfrac{1}{6}x^3$，　$x-\ln(1+x)\sim\dfrac{1}{2}x^2$，　$x-\arcsin x\sim-\dfrac{1}{6}x^3$，

$x-\tan x\sim-\dfrac{1}{3}x^3$，　$x-\arctan x\sim\dfrac{1}{3}x^3$.

若有 $\lim\alpha(x)=0$ 且 $\alpha(x)\neq0$，则上面式子中的 x 改为 $\alpha(x)$ 均成立.

【注】　本部分只对函数进行了讨论，对数列也有类似的结果.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

五、极限的四则运算法则

如果 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则有

$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$；　$\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$；

$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq0)$；　$\lim f(x)^{g(x)}=A^B(A>0)$.

【注】　极限运算法则成立的前提条件是极限 $\lim f(x)$，$\lim g(x)$ 均存在，其他情况请见下面例 1 的评注.

六、两个重要极限

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.　　2. $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$，或 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$.

七、极限存在的两个准则

1.（单调有界准则）　单调增加（或减少），且有上界（或下界）的数列 $\{x_n\}$ 必有极限.（这里的单调增加（减少）只要求单调不减（不增）就够了）.

2.（夹逼准则）　如果数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 以及 $\{z_n\}$ 满足下列条件：

(1) $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n=1,2,3,\cdots)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，

那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

【注】　1. 上面极限存在准则 1 写的是数列形式，对于函数情形有类似的准则，但具体叙述上有所不同. 极限存在准则 2 类似可以给出函数形式.

2. 第一个准则只给出了极限的存在性，并未给出极限是多少. 此时，一般是在判定了“极限存在”以后通过数列的递推表示，在等式的两边取极限得到.

八、洛必达(L'Hospital)法则

1. 设(1) 当 $x \to a$ 时,函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零或都趋于无穷大;

(2) 在点 a 的某去心邻域内,$f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在,且 $F'(x) \neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在(或为无穷大),

那么 $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

这就是说,当$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在时;$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{F(x)}$ 也存在且等于$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$;当$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 为无穷大时,$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{F(x)}$ 也是无穷大. 这种在一定条件下通过分子分母分别求导再求极限来确定未定式的值的方法称为洛必达(L'Hospital)法则.

2. 设(1) 当 $x \to \infty$ 时,函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零或都趋于无穷大;

(2) 当 $|x| > N$ 时,$f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在,且 $F'(x) \neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在(或为无穷大),

那么 $$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

【注】 (1) 只有对$\dfrac{0}{0}$ 或$\dfrac{\infty}{\infty}$ 的未定式,才可考虑用洛必达法则,并可能要多次使用.

(2) 其他未定式,如 $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$ 可通过代数运算或取对数化为$\dfrac{0}{0}$ 或$\dfrac{\infty}{\infty}$ 后,再考虑用洛必达法则.

(3) 每使用一次洛必达法则,要考虑将式子整理和化简,甚至要用变量代换.

(4) 尽量结合等价无穷小替换简化运算.

(5) 弄清楚洛必达法则的因果关系,即由 $\lim\limits \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$(或 ∞),可推出 $\lim\limits \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$(或 ∞),而不能简单地由 $\lim\limits \dfrac{f(x)}{g(x)} = A \Rightarrow \lim\limits \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$,也不能简单地由 $\lim\limits \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在(不是 ∞ 的不存在)$\Rightarrow \lim\limits \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在(不是 ∞ 的不存在),参见下面例 5.

(6) 若不能确定极限 $\lim\limits \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 是否存在,或不能确定分子与分母的可导性时,则不能用洛必达法则,而要借助于其他方法,如积分中值定理、导数定义等进行计算.

九、重要公式与结论

1. 极限的几个关系式

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A.$

(2) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A.$

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(n) = A$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = A \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right) = A.$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(4) 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

2. 两个重要极限的一般形式

(1) 设$\alpha(x)\to 0$，则$\lim\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$(在某对应的去心邻域内$\alpha(x)\neq 0$).

(2) 设$f(x)\to 1$，$g(x)\to\infty$，则

$$\lim[f(x)]^{g(x)}=\lim[1+(f(x)-1)]^{\frac{1}{f(x)-1}\cdot[f(x)-1]g(x)}\ (1^{\infty}\text{未定式})$$
$$=e^{\lim[f(x)-1]g(x)}.$$

或
$$\lim[f(x)]^{g(x)}=\lim e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}=e^{\lim g(x)[f(x)-1]}.$$

(因为$f(x)\to 1$，故$\ln f(x)\sim f(x)-1$).

3. 若干极限的重要结果

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}0, & n<m,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ \infty, & n>m.\end{cases}$ (其中$a_0,b_0\neq 0$).

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x)^{\frac{1}{x}}=1$；$\lim\limits_{x\to 0^+}(x)^{\frac{1}{x}}=0$；$\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=1$；$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,a>0$；$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

(3) 当$x\to+\infty$(或$n\to\infty$)时，下列函数(或数列)趋于正无穷大的速度越来越快，或者说越来越大：$\ln x,x^{\alpha}(\alpha>0),a^x(a>1),x^x$(或$\ln n,n^{\alpha}(\alpha>0),a^n(a>1),n!,n^n$).

于是，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}=0(\alpha>0)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0(a>1)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{n!}=+\infty$.

(4) $e^x\to\begin{cases}+\infty, & x\to+\infty,\\ 0, & x\to-\infty.\end{cases}$　$e^{\frac{1}{x}}\to\begin{cases}+\infty, & x\to 0^+,\\ 0, & x\to 0^-.\end{cases}$

$\arctan x\to\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & x\to+\infty,\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x\to-\infty.\end{cases}$　$\operatorname{arccot}x\to\begin{cases}0, & x\to+\infty,\\ \pi, & x\to-\infty.\end{cases}$

(5)$\lim f(x)=A>0,\lim g(x)=B\Rightarrow\lim f(x)^{g(x)}=A^B$.

(6)$\lim f(x)g(x)=A,\lim f(x)=\infty\Rightarrow\lim g(x)=0$；

$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=A,\lim g(x)=0\Rightarrow\lim f(x)=0$，其中$A$是一个数.

$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0,\lim f(x)=0\Rightarrow\lim g(x)=0$.

4. 无穷小量的几个结论

见本节内容精讲四之2,4,5.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

例题分析

一、极限的概念与性质

【例1】　设$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$均为非负数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有

(A)$a_n<b_n$对任意n成立.　　(B)$b_n<c_n$对任意n成立.

(C) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$不存在. (D) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在

解 【方法一】 由数列极限与数列前面有限项的大小无关,可立即排除(A),(B). 而极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$是$0\cdot\infty$型未定式,可能存在也可能不存在. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$属$1\cdot\infty$型,必为无穷大量,即不存在. 故应选(D).

【方法二】 举反例. 取$a_n=\frac{2}{n}$,$b_n=1$,$c_n=\frac{n}{2}(n=1,2,\cdots)$,则可立即排除(A),(B),(C),因此正确选项为(D).

【评注】 极限的运算注意如下几点:

1. 若$\lim f$存在,$\lim g$不存在,则$\lim(f\pm g)$一定不存在. 但$\lim fg$,$\lim\frac{f}{g}$可能存在,也可能不存在;

2. 若$\lim f=l\neq 0$,$\lim g=\infty$,则$\lim fg=\infty$;

3. 若f有界,$\lim g=\infty$,则$\lim[f\pm g]=\infty$,但$\lim fg$不一定为∞.

【例 2】 设函数$f(x)$在$x=0$点的左、右极限均存在,则下列等式中不正确的是

(A) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(-x^3)$. (B) $\lim\limits_{x\to0}f(x^4)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$.

(C) $\lim\limits_{x\to0}f(|x|)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x^3)$. (D) $\lim\limits_{x\to0}f(x^3)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$.

解 由左、右极限的定义可知(A),(B)与(C)三个等式的两边都是函数$f(x)$在$x=0$处的右极限,故等式正确. 而(D)式的左端表示$f(x)$在$x=0$点的极限,它不一定存在,故(D)不正确,应选(D).

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 3】 设$f(x)$在点$x=0$处连续,$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=-2$,则函数$f(x)$在点$x=0$处

(A) 可导且$f'(0)\neq0$. (B) 可导且取得极大值.

(C) 可导且取得极小值. (D) 可导且不取极值.

解 因为$\lim\limits_{x\to0}x^2=0$,且$f(x)$在点$x=0$处连续,则$f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$

故
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x^2}x=0,$$

即$f(x)$在$x=0$可导且$f'(0)=0$.

又$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=-2$,由极限的局部保号性得存在$\delta>0$,使得当$0<|x|<\delta$时,有$\frac{f(x)}{x^2}<0$,即$f(x)<0=f(0)$. 故$f(x)$在$x=0$处取极大值,因此选(B).

二、求函数的极限

基本思路:1. 先化简:包括无穷小量等价代换、约掉零因子(无穷因子)、提出极限不为零的因子的极限、根式有理化、变量代换等.

2. 用法则:包括洛必达(L'Hospital)法则、四则运算法则、泰勒公式、导数定义等.

3. 上述过程可重复进行.

类型 1 $\frac{0}{0}$、$\frac{\infty}{\infty}$型未定式

一般考虑用洛必达法则,但洛必达法则不是万能的

【例 4】　求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

解题思路　此题虽然是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式，但不适合直接用洛必达(L'Hospital)法则，而是通过分子分母同除以“最高次的项”x，再利用极限的四则运算法则求出. 另外，根式中提出因子时，应注意 x 的符号.

解　【方法一】　分子分母同除以 x，再由极限的四则运算法则得

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}=\frac{-2+1}{-1}=1.$$

【方法二】　令 $x=-t$，则

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{4t^2-t-1}-t+1}{\sqrt{t^2-\sin t}}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{4-\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}-1+\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{\sin t}{t^2}}}=1.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【评注】　分子分母同除以“最大的项”的本质是设法将表达式中的无穷大量转化为无穷小量，从而方便利用极限运算法则.

【例 5】　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$.

解题思路　此题虽然是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式，但不能用洛必达法则. 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+\sin x)'}{(x-\sin x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$ 极限不存在，而是通过分子分母同除以 x，再利用极限的四则运算法则及无穷小的性质求出.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\sin x/x}{1-\sin x/x}=1.$

【评注】　类似地 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+\sin x}{e^x-\sin x}$ 也不能用洛必达法则，因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(e^x+\sin x)'}{(e^x-\sin x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+\cos x}{e^x-\cos x}$，接着再用洛必达法则将出现循环现象. 实际上分子分母同除以 e^x 得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+\sin x}{e^x-\sin x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\sin x/e^x}{1-\sin x/e^x}=1$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例 6】　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2\tan x}-\sqrt{1+2\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

解题思路　含有根式函数的极限问题，求导较复杂的情况下，可考虑先有理化，然后再用四则运算、无穷小量等价代换以及洛必达法则等求极限.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2\tan x}-\sqrt{1+2\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$

$=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x[\ln(1+x)-x]}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+2\tan x}+\sqrt{1+2\sin x}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{\ln(1+x)-x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{\ln(1+x)-x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\frac{1}{1+x}-1}=-1.$

【例 7】 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{\tan x}}{\arcsin^3 x}$.

解题思路 此题虽然是 $\frac{0}{0}$ 型未定式，但不适合直接用洛必达法则，而是先将分子提出极限非零的因子，再通过无穷小等价代换化简后用洛必达法则.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{\tan x}}{\arcsin^3 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\tan x}(e^{x-\tan x}-1)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\tan x}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sec^2 x}{3x^2}=-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan^2 x}{3x^2}=-\dfrac{1}{3}.$

微信公众号【顶尖考研】(ID: dky66)

【例 8】 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[4]{1+4x}-1}{\ln(3-2\cos x+\sin x)}$.

解题思路 用等价无穷小代换化简计算.

解 当 $x\to0$ 时，有 $\sqrt[4]{1+4x}-1\sim x$，

$\ln(3-2\cos x+\sin x)=\ln[1+(2-2\cos x+\sin x)]\sim2-2\cos x+\sin x\sim\sin x\sim x.$

故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[4]{1+4x}-1}{\ln(3-2\cos x+\sin x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x}=1.$

【评注】 等价无穷小代换的几个重要结论.

(1) 乘、除因子项可直接用其等价无穷小代换.

(2) 在同一个变化过程中，若一个因子是由有限个不同阶的无穷小量相加而成，则它等价于阶数最低的无穷小量.

(3) 作为加减项的同阶的无穷小量不能随意用其等价无穷小代换.

例如极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}\neq\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$. 实际上，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\dfrac{1}{6}$.

【例 9】 设 $f'(x)$ 连续，$f(0)=0$，$f'(0)\neq0$，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}f(x^2-t)\,dt}{x^3\int_0^1 f(xt)\,dt}$.

解 在分子的积分式中，令 $x^2-t=u$，$dt=-du$，$t:0\to x^2$，$u:x^2\to0$；在分母的积分式中，

令 $xt=u,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}u,t:0\to1,u:0\to x$. 于是有

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}f(x^2-t)\mathrm{d}t}{x^3\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0}\frac{-\int_{x^2}^0 f(u)\mathrm{d}u}{x^3\int_0^x f(u)\frac{\mathrm{d}u}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}f(u)\mathrm{d}u}{x^2\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}\left(\frac{0}{0}\text{ 型}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2xf(x^2)}{2x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+x^2f(x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2f(x^2)}{2\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)}\left(\frac{0}{0}\text{ 型}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4xf'(x^2)}{3f(x)+xf'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{4f'(x^2)}{3\frac{f(x)-f(0)}{x}+f'(x)}$$

$$=\frac{4f'(0)}{3f'(0)+f'(0)}=1.$$

【评注】 (1) 当被积函数中含有参变量时，要设法将其提到积分号外面或变到积分限上.
(2) 最后一步要利用导数定义进行计算，因为不满足洛必达法则中可导性的条件.

【例 10】 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-\mathrm{e}^{x^2})\sin x^2}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

解题思路 本题虽为 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式，但不适宜直接用洛必达法则求解，因求导太复杂，而用泰勒(Taylor)公式非常方便.

解 因为 $\sqrt{1+x^2}=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)$，$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$，

$\mathrm{e}^{x^2}=1+x^2+o(x^2)$，

故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-\mathrm{e}^{x^2})\sin x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x^4}{8}+o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)}=-\dfrac{1}{12}$.

【评注】 对 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式极限，直接求导用洛必达法则比较复杂，也没有常见等价无穷小代换时，可考虑将每一项用带佩亚诺(Peano)余项的泰勒公式展开去计算. 常见函数的泰勒公式有：

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+o(x^3),$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3),$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5),$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4),$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+o(x^3),$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+o(x^3).$$

类型 2　$0\cdot\infty,\infty-\infty$ 未定式

基本思路：1. $0\cdot\infty$ 型转化为 $\frac{0}{0}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ 型，用洛必达法则等.

2. $\infty-\infty$ 型　(i) 通分；(ii) 变量代换(重点倒代换)转化为 $\frac{0}{0}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ 型.

【例 11】 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x$.

解题思路 合理选择转化类型，以“下放”后的函数求导简便为原则.

解 $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=-\lim\limits_{x\to0^+}x=0.$

【例 12】 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x(a^{\frac{1}{x^2}}-a^{\frac{1}{x+1}}),(a>0)$.

解题思路 这是 $\infty\cdot0$ 型未定式，通过提出极限不为零的因子的极限及无穷小等价代换化为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型.

解
$$\lim_{x\to\infty}x(a^{\frac{1}{x^2}}-a^{\frac{1}{x+1}})=\lim_{x\to\infty}xa^{\frac{1}{x+1}}(a^{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x+1}}-1)=\lim_{x\to\infty}xa^{\frac{1}{x+1}}(a^{\frac{x+1-x^2}{x^2(x+1)}}-1)$$
$$=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{(x+1-x^2)\ln a}{x^2(x+1)}=-\ln a.$$

(当 $x\to\infty$ 时，$a^{\frac{1}{x+1}}\to1$，$a^{\frac{x+1-x^2}{x^2(x+1)}}-1\sim\dfrac{x+1-x^2}{x^2(x+1)}\ln a$)

【例 13】 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2x}-\dfrac{\cos^2x}{x^2}\right)$.

解题思路 先通分化为“$\frac{0}{0}$”型极限，再利用等价无穷小与洛必达法则求解即可.

解
$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2x}-\frac{\cos^2x}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x\cos^2x}{x^2\sin^2x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\frac{1}{4}\sin^22x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{2x-\frac{1}{2}\sin4x}{4x^3}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos4x}{6x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(4x)^2}{6x^2}=\frac{4}{3}.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 14】　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

解题思路　作代换 $t=\frac{1}{x}$，转化 $\infty-\infty$ 型未定式为 $\frac{0}{0}$ 型.

解　令 $t=\frac{1}{x}$，用洛必达法则

$$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{t\to0}\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)\right]$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1}{2(1+t)}=\frac{1}{2}.$$

【例 15】　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

解　$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\cdot\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x}{1}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-1-t}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-1}{2t}=\frac{1}{2}.$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

【评注】　注意求极限过程中，等价无穷小代换、变量代换常常可以简化计算，因此要充分利用.

类型 3　$1^\infty,\infty^0,0^0$ 未定式

基本思路：幂指函数对数化 $\lim[f(x)]^{g(x)}=\lim e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}$，然后转化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型. 但对 1^∞ 型利用 $\lim[f(x)]^{g(x)}=\lim e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}=e^{\lim g(x)[f(x)-1]}$ 可能更方便.

【例 16】　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

解题思路　本题为“1^∞”型未定式，直接按第二类重要极限或化为指数函数求极限即可.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

解　【方法一】　令 $\frac{1}{x}=t$，则有

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to0}(\sin2t+\cos t)^{\frac{1}{t}}$$

$$=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin2t+\cos t-1}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to0}(2\cos2t-\sin t)}=e^2.$$

【方法二】　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)x}$，

而 $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}-1}{\dfrac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}+\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}=2,$$

故 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)x=e^2.$

【例 17】 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{e^x-1}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x(e^x-1)}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-1}{2(1+x)}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

【例 18】 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

解题思路 这是 0^0 型未定式，化为指数形式，用洛必达法则及等价无穷小代换即得.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djkyks)

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x}}$，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^{\frac{1}{x}}-1}\cdot x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{x(e^{\frac{\ln x}{x}}-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{x\cdot\frac{\ln x}{x}}=-1.$$

故原式 $=e^{-1}$.

【评注】 求解本题的关键是要用到下列结论：

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}=1$，$x^{\frac{1}{x}}-1=e^{\frac{\ln x}{x}}-1\sim\dfrac{\ln x}{x}(x\to+\infty)$.

【例 19】 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}=$ _____.

解题思路 本题为“∞^0”型未定式，先化为指数函数再求极限即可.

解 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\tan x\ln\frac{1}{\sqrt{x}}}=e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0^+}\tan x\ln x}$，

又 $\lim\limits_{x\to0^+}\tan x\cdot\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$，

故 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}=e^0=1.$

【评注】 “1^∞”，“0^0”，“∞^0”型未定式，可先取对数，如 $y=f(x)^{g(x)}$，$\ln y=g(x)\ln f(x)$，则 $\lim g(x)\ln f(x)$ 为“$0\cdot\infty$”型未定式.

类型 4　利用左右极限求极限

基本思路：利用极限存在的充分必要条件是其左右极限存在而且相等，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A;$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=A.$$

【例 20】　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{|\sin x|}{\ln(1+x)}\right)$.

解　$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{|\sin x|}{\ln(1+x)}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2\mathrm{e}^{-\frac{4}{x}}+\mathrm{e}^{-\frac{3}{x}}}{\mathrm{e}^{-\frac{4}{x}}+1}+\dfrac{\sin x}{\ln(1+x)}\right)=1,$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{|\sin x|}{\ln(1+x)}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}-\dfrac{\sin x}{\ln(1+x)}\right)=2-1=1.$

所以，原式 $=1$.

【例 21】　$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，试确定常数 a 的值，使 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\ln(1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})}+a[x]\right]$ 存在，并求出此极限.

解　$\lim\limits_{x\to 0^-}\left[\dfrac{\ln(1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})}+a[x]\right]=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln(1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})}-a=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}-a=-a$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})}+a[x]\right]=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}(1+\mathrm{e}^{-\frac{2}{x}})}{\ln\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}})}+0=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^{-\frac{2}{x}})}{\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}})}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2+x\ln(1+\mathrm{e}^{-\frac{2}{x}})}{1+x\ln(1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}})}=2.$$

所以 $a=-2$ 且所求极限为 2.

【评注】　(1) 当极限式中有分段函数，如绝对值函数，取整函数 $[x]$，最大 max，最小 min，符号函数 $\operatorname{sgn}(x)$，且求分段点的极限时，要从左右极限入手.

(2) 当极限式中包含 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$，$\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arccot} x$，$\lim\limits_{x\to\infty}a^x$ 时，要从 $x\to-\infty$，$x\to+\infty$ 入手.

(3) 当左右极限 $f(x_0^-)$，$f(x_0^+)$ 有一不存在或都存在但不相等时，极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

【例 22】　$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{2022}{x}\right]$.

解题思路　利用不等式 $x-1<[x]\leqslant x$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

解　由 $\dfrac{2022}{x}-1<\left[\dfrac{2022}{x}\right]\leqslant\dfrac{2022}{x}$，

当 $x>0$ 时，$2022-x<x\left[\dfrac{2022}{x}\right]\leqslant 2022$，用夹逼准则 $\lim\limits_{x\to 0^+}x\left[\dfrac{2022}{x}\right]=2022$.

当 $x<0$ 时，$2022\leqslant x\left[\dfrac{2022}{x}\right]<2022-x$，用夹逼准则 $\lim\limits_{x\to 0^-}x\left[\dfrac{2022}{x}\right]=2022$.

因而　$\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{2022}{x}\right]=2022$.

小结

函数极限的计算方法很多，但基本方法主要有：极限的运算法则、无穷小量的等价代换、洛必达法则、重要极限、泰勒公式、函数连续性与变量代换、左右极限、导数定义、微分中值定理或积分中值定理. 另外，一个典型的考题还经常会用到两个甚至两个以上的方法. 在解题过程中，特别注意下面几点：

1. 未定式极限的基本形式是：$\frac{0}{0}$、$\frac{\infty}{\infty}$ 型，其他未定式本质上均可化为此两种形式. 而求未定式极限的主要方法是洛必达法则，但在用洛必达法则之前应注意两点：一是先尽量用无穷小量的等价代换进行化简(便于求导)；二是将非零因子项(乘或除项)的极限用四则运算法则先求出来，再用洛必达法则求导.

2. $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式极限经常可采用分子分母同除以最大项来产生若干无穷小量的办法进行分析求解.

3. 若待求极限的函数表达式中含有 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin\dfrac{1}{x-x_0}$，或 $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ 等时，一般不用洛必达法则，而要考虑用重要结论：无穷小量乘有界量仍是无穷小.

4. 幂指函数的极限 $\lim f(x)^{g(x)}$ 一般先化为指数函数，再求极限，即

$$\lim f(x)^{g(x)} = \lim \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)} = \mathrm{e}^{\lim g(x)\ln f(x)}.$$

特别，当 $\lim f(x)=1$，$\lim g(x)=\infty$ 时，有 $\lim f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{\lim g(x)\ln[1+f(x)-1]} = \mathrm{e}^{\lim g(x)[f(x)-1]}$.

5. 熟记常用无穷小量的等价代换，见内容精讲四之5.

6. 个别情况下，当用上述无穷小量的等价代换求极限仍有困难时，也可考虑用泰勒公式(麦克劳林公式)进行展开，找出更高阶的等价无穷小量.

7. 在求极限的过程适当利用变量代换往往可以简化计算，特别是题设为 $x\to\infty$ 时，作变换 $t=\frac{1}{x}$，转化为 $t\to 0$ 后，问题经常一下就变简单了.

微信公众号【考研】 (ID：djky66)

三、求数列的极限

基本思路　一般有如下三种主要方法：

1. 若已知数列的通项表达式，可转化为函数极限进行计算，即：
如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A$.

2. 若数列通项是 n 项(也可多或少若干项)和或积时，可考虑用定积分定义，设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left[a+\frac{b-a}{n}k\right]\cdot\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

积的时候取对数化成 n 项的和处理. 参见例 24.

3. 若数列以递推公式给出，如 $x_n=f(x_{n-1})$，一般考虑用单调有界原理.

【例 23】　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)$.

解题思路　本题为“1^∞”型未定式，除可以利用重要极限进行计算或化为指数函数计算外，由于已知数列的表达式，也可将 n 换为 x，转化为函数极限进行计算.

一般地，若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A$.

解 因为

$$\lim_{x\to+\infty}\tan^x\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{x}\right)\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to0^+}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+2t\right)\right]^{\frac{1}{t}}\ (\text{“}1^\infty\text{”})$$

$$=e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{1}{t}\cdot\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+2t\right)-1\right]}=e^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\sec^2\left(\frac{\pi}{4}+2t\right)\cdot2}{1}}=e^4,(\text{“}1^\infty\text{”})$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)=e^4.$$

【评注】 一般地，对于需要利用洛必达法则求解的数列极限，要先转化为函数极限（因为数列不能求导），再利用下面结论即得：

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f(n)=A.\text{ 或 }\lim_{x\to0^+}f(x)=A\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)=A.$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例 24】 设 $y_n=\left[\frac{(2n)!}{n!n^n}\right]^{\frac{1}{n+1}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

解 取对数化为 n 项之和.

$$\ln y_n=\frac{1}{n+1}\ln\frac{(2n)!}{n!n^n}=\frac{1}{n+1}\ln\frac{(2n)(2n-1)\cdots(n+1)}{n^n}$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right),$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

由积分和式求极限公式，有

$$\lim_{n\to\infty}\ln y_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)$$

$$=1\cdot\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$=\ln2-1+\ln2=\ln\frac{4}{e},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\frac{4}{e}$.

【例 25】 设 $x_1=10,x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}(n=1,2,\cdots)$，试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在，并求此极限.

解题思路 除上述常见的两种解法，若题设给出数列的递推公式，一般都是通过证明此数列单调有界来确定数列极限的存在性，再在已知递推关系式两边同时取极限，求出具体的极限值.

解 由 $x_1=10$ 及 $x_2=\sqrt{6+x_1}=4$ 知，$x_1>x_2$.

设对某个正整数 k 有 $x_k>x_{k+1}$，则

$$x_{k+1}=\sqrt{6+x_k}>\sqrt{6+x_{k+1}}=x_{k+2}.$$

由数学归纳法知，对一切正整数 n，都有 $x_n>x_{n+1}$，即数列 $\{x_n\}$ 为单调减少数列.

又显然有 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$，即 $\{x_n\}$ 有下界，根据单调有界数列必有极限知，数列 $\{x_n\}$ 极限存在. 记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 对 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ 两边取极限，得 $a=\sqrt{6+a}$，从而有 $a^2-a-6=$

0，解得 $a=3$ 或 $a=-2$（舍去，因为 $x_n>0$），故得极限值为 $a=3$.

【评注】 本题也可利用 $x_{n+1}-x_n=\sqrt{6+x_n}-x_n=\dfrac{6+x_n-x_n^2}{\sqrt{6+x_n}+x_n}=\dfrac{(3-x_n)(2+x_n)}{\sqrt{6+x_n}+x_n}$，再根据 $x_n>0$ 及用数学归纳法证明 $x_n\geqslant 3$，从而推出数列 $\{x_n\}$ 单调减少且有下界，故极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

四、求含参变量的极限

涉及 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\mathrm{e}^{tx}$，$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\arctan tx$，$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\operatorname{arccot} tx$，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^t$，$\lim\limits_{x\to0^+}x^t$，$\lim\limits_{x\to\pm\infty}t^x$ 等极限，需考虑参数 t 的取值范围.

【例 26】 求极限 $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{t\mathrm{e}^{(1-t)x}+t^{2x}}{\mathrm{e}^{(1-t)x}+t^{2x+1}}(t\geqslant 0)$.

解题思路 此极限中含有 $\mathrm{e}^{(1-t)x}$，t^{2x}，因而 t 应与 1 比较.

解 当 $t=0$ 时，$I=0$；

当 $0<t<1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{(1-t)x}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}t^{2x}=0$，$I=t$；

当 $t=1$ 时，$I=1$；

当 $t>1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{(1-t)x}=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}t^{2x}=+\infty$，$I=\dfrac{1}{t}$，

所以，$I=\begin{cases}t, & 0\leqslant t<1,\\ \dfrac{1}{t}, & t\geqslant 1.\end{cases}$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

五、无穷小量阶的比较

【例 27】 设函数 $f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin(t^2)\mathrm{d}t$，$g(x)=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^6}{6}$ 则当 $x\to0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的

(A) 低阶无穷小.　　(B) 高阶无穷小.

(C) 等价无穷小.　　(D) 同阶但不等价的无穷小.

解题思路 利用结论：当 $x\to0$ 时，$f(x)\to0$，若 $f'(x)\sim Ax^k(k\geqslant0)$，则

$$f(x)\sim\frac{A}{k+1}x^{k+1}.$$

解 $f'(x)=\sin x\sin(1-\cos x)^2\sim x(1-\cos x)^2\sim\dfrac{1}{4}x^5$，

所以，$f(x)\sim\dfrac{1}{24}x^6$，而 $g(x)\sim\dfrac{x^5}{5}$，因而正确答案应选(B).

【例 28】 当 $x\to0$ 时，下列四个无穷小中，比其他三个更高阶的无穷小是

(A) $\sin x^2$.　　(B) $\ln(1+2x^2)$.　　(C) $\sqrt{1-x^2}-1$.　　(D) $\tan x-\sin x\cos x$.

解 因为当 $x\to 0$ 时，$\sin x^2\sim x^2$，$\ln(1+2x^2)\sim 2x^2$，$\sqrt{1-x^2}-1\sim -\frac{x^2}{2}$，故(A)，(B)，(C) 皆为同阶无穷小.

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos^2 x)}{x^2\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}x=0.$

所以应选(D).

【例 29】 已知 $x\to 0$ 时，$e^{-x^4}-\cos(\sqrt{2}x^2)$ 与 ax^n 是等价无穷小，试求 a，n 的值.

解 由泰勒公式得 $e^{-x^4}=1-x^4+\dfrac{x^8}{2!}+o(x^8)$，

$$\cos(\sqrt{2}x^2)=1-\frac{2x^4}{2!}+\frac{4x^8}{4!}+o(x^8).$$

于是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^4}-\cos(\sqrt{2}x^2)}{ax^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}x^8+o(x^8)}{ax^n}=1$. 故 $a=\dfrac{1}{3}$，$n=8$.

【例 30】 当 $x\to 0$ 时，用“$o(x)$”表示比 x 高阶的无穷小，则下列式子中错误的是

(A) $x\cdot o(x^2)=o(x^3)$.　　(B) $o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$.

(C) $o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$.　　(D) $o(x)+o(x^2)=o(x^2)$.

解题思路 利用无穷小阶的比较或无穷小运算的性质.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

解 (D) 是错误的. 要说明(D) 是错误的，一个方法是证明(A)(B)(C) 都正确，由排除法知(D) 是错误的. 此法留给读者. 另一方法是举反例说明(D) 是错误的. 反例如下：取第一个 $o(x)=x^{\frac{4}{3}}$，第二个 $o(x^2)=x^{\frac{8}{3}}$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x)+o(x^2)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{8}{3}}}{x^2}=\infty$，故 $x\to 0$ 时 $o(x)+o(x^2)\neq o(x^2)$.

小结

1. 无穷小量阶的比较常用方法为洛必达法则、常用的等价无穷小代换、等价无穷小的运算性质、泰勒公式及求导定阶：设 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)\to 0$，且 $\dfrac{d\alpha(x)}{dx}\sim x^k$，则 $\alpha(x)\sim\dfrac{1}{k+1}x^{k+1}$ $(x\to 0,\ k>0)$. 特别地，当 $\dfrac{d\alpha(x)}{dx}=c(c\neq 0)$ 时，则 $\alpha(x)\sim cx$.

2. 并非任何两个无穷小量都可比较其阶的高低. 例如，当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)=x$ 与 $\beta(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ 就无法比较其阶的高低.

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

六、函数极限的反问题

求已知极限中的待定参数、函数值、导数及函数等.

命题方式：1. 已知极限存在.

2. 已知无穷小阶的比较.

3. 已知函数的连续性或间断点类型.

【例 31】 若$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}=3$，求 a,b 的值.

解题思路 在分式中，分母趋于 0，分子必须趋于 0 才能有有限极限.

解 因$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}=3$，且$\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$，所以

$$\lim_{x\to 2}(x^2+ax+b)=4+2a+b=0\Rightarrow b=-4-2a.$$

于是有

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax-4-2a}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2+a)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}(x+2+a)=4+a=3.$$

由以上两式解得 $a=-1,b=-2$.

【例 32】 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则 $a=$_____，$b=$_____.

解 因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5\neq 0$，且$\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot(\cos x-b)=0$，所以

$\lim\limits_{x\to 0}(e^x-a)=0$，得 $a=1$. 于是极限化为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-1}(\cos x-b)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}(\cos x-b)=1-b=5,$$

得 $b=-4$. 因此 $a=1,b=-4$.

【评注】 一般地，已知$\lim\limits\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$，(1) 若 $g(x)\to 0$，则 $f(x)\to 0$；

(2) 若 $f(x)\to 0$，且 $A\neq 0$，则 $g(x)\to 0$.

【例 33】 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$.

解 因为$\dfrac{6+f(x)}{x^2}=\dfrac{6x+xf(x)}{x^3}=\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}+\dfrac{6x-\sin 6x}{x^3}$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{6-6\cos 6x}{3x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{x^2}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(6x)^2}{x^2}=36,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=36$.

【评注】 本题也可以用如下两种做法：

1. 利用泰勒公式，将 $\sin 6x$ 的泰勒公式写到 3 阶即可.

2. 利用极限的性质写出 $f(x)=\dfrac{x^3\alpha(x)-\sin 6x}{x}$，代入求出$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$，其中 $\alpha(x)\to 0$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 34】　已知函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^\alpha}$，设 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=0$，试求 α 的取值范围.

解题思路　本题是极限的反问题，利用洛必达法则求解.

解　欲使 $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=0$，用洛必达法则，

只需 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2}{\alpha x^{\alpha-1}}=0$，所以 $2>\alpha-1$，即 $\alpha<3$.

欲使 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$，用洛必达法则，

只需 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-1}}\cdot\dfrac{x^2}{1+x^2}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-1}}=0$，

所以 $\alpha>1$. 故 α 的取值范围为 $1<\alpha<3$.

小结

已知极限求待定的参数、极限等，一般仍用前面求极限的方法进行分析讨论. 但用洛必达法则时，必须注意其前提条件，已知 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}(\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty})=A$，是否一定也有

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}(\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty})=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=A,$$

从理论上说是不一定成立的. 因此在用洛必达法则时，必须先检验 $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ 或 ∞ 成立.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

§3　函数的连续与间断

内容精讲

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

一、连续的定义

1.（x_0 点处连续）　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一个邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，那么称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 左连续. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 右连续.

2.（开区间内连续）　如果对于 $\forall x_0\in(a,b)$，$f(x)$ 在 x_0 连续，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

3.（闭区间上连续）　如果 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且在点 $x=a$ 右连续，在点 $x=b$ 左连续，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

4.（半开半闭区间上连续）　如果 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且在点 $x=a$ 右连续（或在点 $x=b$ 左连续），则称 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$（或 $(a,b]$）上连续.

【注】　1. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，表示以下三条同时满足

(1)$f(x)$ 在点 x_0 有定义;(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在;(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2.($f(x)$ 在点 x_0 连续的充要条件) $f(x)$ 在点 x_0 连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 在点 x_0 既左连续,又右连续.

二、函数的间断点及其分类

1. 间断点 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义,并设有下列三种情形之一:(1) 在点 x_0 没有定义;(2) 在点 x_0 有定义,但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在;(3) 在点 x_0 有定义,且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$,则 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的不连续点. $f(x)$ 的不连续点称为 $f(x)$ 的间断点.

2. 间断点的分类

第一类间断点 $f(x)$ 在 x_0 处的左、右极限均存在的间断点称第一类间断点. 再细分,若 $f(x)$ 在 x_0 处的左、右极限均存在且相等的间断点,称为可去间断点;$f(x)$ 在 x_0 处的左、右极限存在,但不相等的间断点,称为跳跃间断点.

第二类间断点 $f(x)$ 在 x_0 的左、右极限中至少有一个不存在的间断点称第二类间断点. 第二类间断点又有无穷间断点,振荡间断点等等.

三、连续函数性质

1. 基本初等函数在其定义域内均连续,初等函数在其有定义的区间上连续.

2. 连续函数的和、差、积、商(分母不为零)以及复合仍为连续函数.

3. 连续函数在闭区间上的性质

(1)(**有界性与最大值最小值定理**)设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,那么在 $[a,b]$ 上有界且一定能取得最大值和最小值,即存在正数 $G>0$,使 $|f(x)|\leqslant G$,以及在闭区间 $[a,b]$ 上有两点 ξ_1,ξ_2,使得 $f(\xi_1)=m, f(\xi_2)=M$,其中 m,M 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值与最大值.

(2)(**介值定理**)设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且在这区间的端点取不同的函数值 $f(a)=A$ 及 $f(b)=B$,那么,对于 A 与 B 之间的任意一个数 C,在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ,使得 $f(\xi)=C(a<\xi<b)$.

【注】 在闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数 $f(x)$ 一定能取到最小值和最大值之间的任何值.

(3)(**零点定理**)设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号,即 $f(a)\cdot f(b)<0$,那么在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ 使得 $f(\xi)=0$.

四、重要定理与结论

1. 广义零点定理

(1) 设 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续,$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$,$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 存在且异号,那么在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ 使得 $f(\xi)=0$.

(2) 设 $f(x)$ 在开区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$,$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在且异号,那么在开区间 $(-\infty,+\infty)$ 内至少有一点 ξ,使得 $f(\xi)=0$.

2. 连续隐含的结论

(1) 设 $f(x)$ 在 x_0 处连续,则 $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则函数 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\ (a\leqslant x\leqslant b)$ 在 $[a,b]$ 上可导,对 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上可应用最值、介值、零点定理.

(3) 设 $f(x)$ 在 x_0 处连续,若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}=A$,则 $f(x_0)=0, f'(x_0)=A$.

例题分析

一、函数的连续性及间断点的分类

【例 1】　讨论函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}}$ 的间断点类型.

解题思路　显然 $x=1$ 为间断点，又 $\dfrac{x}{x-1}=0$，即 $x=0$ 也为间断点.

解　在 $x=0$ 处，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}}=+\infty$，所以 $x=0$ 为无穷间断点.

在 $x=1$ 处，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}}=0$，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}}=1$，

所以 $x=1$ 是跳跃间断点.

【例 2】　函数 $f(x)=\dfrac{(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\mathrm{e})\tan x}{x(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e})}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的第一类间断点是 $x=$ _____.

(A)0.　　(B)1.　　(C)$-\dfrac{\pi}{2}$.　　(D)$\dfrac{\pi}{2}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

解　函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的间断点是 $x=0,1,\pm\dfrac{\pi}{2}$，

而 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\mathrm{e})\tan x}{x(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e})}=1$，$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\mathrm{e})\tan x}{x(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e})}=-1$，

故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点；

但 $\lim\limits_{x\to\pm\frac{\pi}{2}}\dfrac{(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\mathrm{e})\tan x}{x(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e})}=\infty$，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\mathrm{e})\tan x}{x(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e})}=\infty$，答案应选(A).

【例 3】　设 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2x}-(\alpha+\beta\sin x)}{\sin^2x}$，且点 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，则 $\alpha=$ _____，$\beta=$ _____.

解　由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2x}-(\alpha+\beta\sin x)}{\sin^2x}$ 存在知

$\lim\limits_{x\to0}[\sqrt{1+\sin x+\sin^2x}-(\alpha+\beta\sin x)]=0$，可得 $\alpha=1$

用泰勒公式

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2x}-(\alpha+\beta\sin x)}{\sin^2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{1}{2}(\sin x+\sin^2x)-\frac{1}{8}(\sin x+\sin^2x)^2-(1+\beta\sin x)+o(\sin^2x)}{\sin^2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\frac{1}{2}-\beta)\sin x+\frac{3}{8}\sin^2x}{\sin^2x}\text{ 存在，有 }\beta=\frac{1}{2}.$$

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

故 $\alpha=1,\beta=\dfrac{1}{2}$.

【例 4】 设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数，且 $f'(0)$ 存在，则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$.

(A) 在 $x=0$ 处左极限不存在. (B) $x=0$ 是跳跃间断点.

(C) 在 $x=0$ 处右极限不存在. (D) $x=0$ 是可去间断点.

解 由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；由 $f(-x)=-f(x)$，得 $f(0)=-f(0)$，故 $f(0)=0$.

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0).$$

显然 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $x=0$ 处没有定义，所以 $x=0$ 是 $g(x)$ 的可去间断点. 选(D).

【例 5】 函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$ 的间断点为_____.

解题思路 先求极限得 $f(x)$ 的表达式，再求间断点.

解 因为

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=\begin{cases}0, & x\leqslant -1,\\ 1+x, & -1<x<1,\\ 1, & x=1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

于是

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=0,\lim_{x\to 1^-}f(x)=2.$$

所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点，其余点处 $f(x)$ 均连续. 故应填 $x=1$.

【例 6】 设函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}g(x)=\begin{cases}2-ax, & x\leqslant -1,\\ x, & -1<x<0,\\ x-b, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 若 $f(x)+g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，则

(A) $a=3,b=1$. (B) $a=3,b=2$.

(C) $a=-3,b=1$. (D) $a=-3,b=2$.

解 由题设条件得 $f(x)+g(x)=\begin{cases}1-ax, & x\leqslant -1,\\ x-1, & -1<x<0,\\ x-b+1, & x\geqslant 0.\end{cases}$

因为 $f(x)+g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，故

$\lim\limits_{x\to -1^+}[f(x)+g(x)]=f(-1)+g(-1)$，即 $-2=1+a$，

$\lim\limits_{x\to 0^-}[f(x)+g(x)]=f(0)+g(0)$，即 $-1=-b+1$.

所以 $a=-3,b=2$. 选(D).

【评注】 本题是 18 年数学二的考题，大家要注意分段函数的四则运算及复合运算.

小结

连续与间断的问题实质上还是极限问题.

1. 初等函数在定义区间上连续,因此,对初等函数求其间断点,只需找出其定义区间的端点,而间断点类型通过讨论相应极限确定.

2. 分段函数在分段点的连续性一般要考虑其左右极限.

3. 确定间断点的类型,一般应先求左右极限再判断.

4. 抽象函数的连续性应根据题中条件用定义处理.

5. 若函数以极限形式给出,先求极限再讨论连续性.

二、连续函数性质的应用

【例 7】　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$,$c_i>0$,$i=1,2,\cdots,n$,证明存在 $\xi\in[a,b]$,使得

$$f(\xi)=\frac{c_1f(x_1)+c_2f(x_2)+\cdots+c_nf(x_n)}{c_1+c_2+\cdots+c_n}.$$

证明　不妨设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值为 M,最小值为 m,则 $m\leqslant f(x_i)\leqslant M$,

$$c_im\leqslant c_if(x_i)\leqslant c_iM,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

$$m\sum_{i=1}^{n}c_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}c_if(x_i)\leqslant M\sum_{i=1}^{n}c_i$$

$$m\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{n}c_if(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}c_i}\leqslant M.$$

微信公众号:顶尖考研】
(ID:djky66)

由介值定理知,存在 $\xi\in[a,b]$,使

$$f(\xi)=\frac{c_1f(x_1)+c_2f(x_2)+\cdots+c_nf(x_n)}{c_1+c_2+\cdots+c_n}$$

【评注】　特殊情况,取 $c_i=1$,$i=1,2,\cdots,n$,存在 $\xi\in[a,b]$,使

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

此结论表明闭区间上连续的函数可以取到其区间上任意有限个函数值的平均值.

【例 8】　设 $b>a>0$,$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续、单调递增,且 $f(x)>0$,证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $a^2f(b)+b^2f(a)=2\xi^2f(\xi)$.

解题思路　构造辅助函数,用零点定理.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

证明　令 $F(x)=2x^2f(x)-a^2f(b)-b^2f(a)$,

$$F(a)=a^2[f(a)-f(b)]+(a^2-b^2)f(a)<0,$$

$$F(b)=b^2[f(b)-f(a)]+(b^2-a^2)f(b)>0,$$

由零点定理知,存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $F(\xi)=0$,即

$$a^2f(b)+b^2f(a)=2\xi^2f(\xi).$$

第二章　一元函数微分学

了解　导数的几何意义与经济意义(含边际与弹性的概念)，高阶导数的概念，微分的概念，导数与微分之间的关系以及一阶微分形式的不变性，柯西(Cauchy)中值定理，函数极值的概念.

理解　导数的概念及可导性与连续性之间的关系，罗尔(Rolle)定理，拉格朗日(Lagrange)中值定理和泰勒(Taylor)定理.

会　求平面曲线的切线方程和法线方程，求分段函数的导数，求反函数与隐函数的导数，求简单函数的高阶导数，求函数的微分，用罗尔(Rolle)定理、拉格朗日(Lagrange)中值定理、泰勒(Taylor)定理和柯西(Cauchy)中值定理，用导数判断函数图形的凹凸性，求函数图形的拐点以及水平、铅直和斜渐近线，描绘简单函数的图形.

掌握　基本初等函数的导数公式，导数的四则运算法则及复合函数的求导法则，用洛必达法则求未定式极限的方法，函数单调性的判别方法，函数极值、最大值和最小值的求法及其应用.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

§1　导数与微分

一、导数的概念

1. 导数定义　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内有定义，并设 $x_0+\Delta x\in U(x_0)$. 若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称这个极限为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记为 $f'(x_0)$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

也可记作 $y'\Big|_{x=x_0}$，$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$ 或 $\dfrac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}$. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导有时也说成 $f(x)$ 在点 x_0 处具有导数或导数存在.

2. 左导数、右导数　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个左邻域或右邻域内有定义，若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\text{ 或 }\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称其为 $f(x)$ 在点 x_0 处的左导数或右导数，分别记为 $f'_-(x_0)$ 或 $f'_+(x_0)$.

3. 可导的充要条件　函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导的充要条件是左、右导数存在且相等. 即

$$f'(x_0) \text{ 存在} \Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0).$$

如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的每一点都可导，就称 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导，对任意 $x\in(a,b)$，都对应着 $f(x)$ 的一个确定的导数值，构成一个新的函数，称为原来函数 $y=f(x)$ 的导函数，简称为导数，记作 y'，$f'(x)$，$\frac{dy}{dx}$ 或 $\frac{df(x)}{dx}$，即

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导，且 $f'_+(a)$ 及 $f'_-(b)$ 都存在，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导.

4. 导数的几何意义

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率，即 $f'(x_0)=\tan\alpha$，其中 α 是切线的倾角.

曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,f(x_0))$ 处的法线方程为 $y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.（当 $f'(x_0)\neq 0$）

特别地，如 $f'(x_0)=0$，切线方程 $y=f(x_0)$，法线方程 $x=x_0$.

5. 导数的经济意义　设函数 $f(x)$ 可导，则导函数 $f'(x)$ 称为边际函数，$f'(x_0)$ 称为在 $x=x_0$ 点的边际函数值，而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}\Big/\frac{\Delta x}{x}\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y}\right)=\frac{x}{y}f'(x)$ 称为 $f(x)$ 的弹性函数.（当 $x_0\neq 0, y_0=f(x_0)\neq 0$）.

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

二、导数的计算

1. 常数和基本初等函数的导数公式

(1) $(C)'=0$.　(2) $(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$.

(3) $(\sin x)'=\cos x$.　(4) $(\cos x)'=-\sin x$.

(5) $(\tan x)'=\sec^2 x$.　(6) $(\cot x)'=-\csc^2 x$.

(7) $(\sec x)'=\sec x\tan x$.　(8) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$.

(9) $(a^x)'=a^x\ln a$. $(a>0,a\neq 1)$.　(10) $(e^x)'=e^x$.

(11) $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$.　(12) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

(13) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.　(14) $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(15) $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$.　(16) $(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

2. 函数的和、差、积、商的导数

设 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 都可导，则

(1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$.　(2) $(Cu)'=Cu'$ (C 是常数).

(3) $(uv)'=u'v+uv'$.　(4) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}(v\neq 0)$.

3. 反函数的导数

设函数 $x=f(y)$ 在区间 I_y 内单调、可导且 $f'(y)\neq 0$，则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在区间 $I_x=f(I_y)$ 内也可导，且 $[f^{-1}(x)]'=\dfrac{1}{f'(y)}$ 或 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$.

4. 复合函数的导数

设函数 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 且 $f(u)$ 及 $g(x)$ 都可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 的导数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\text{ 或 }y'(x)=f'(u)\cdot g'(x).$$

5. 隐函数的导数

如果变量 x 和 y 满足一个方程 $F(x,y)=0$，在一定条件下，当 x 取某区间内的任一值时，相应地总有满足这方程的唯一的 y 值存在，那么就说方程 $F(x,y)=0$ 在该区间内确定了一个隐函数，记为 $y=y(x)$. 其导数可通过等式 $F(x,y)=0$ 两边直接对 x 求导，将 y 作为中间变量，按复合函数求导法则而得到.

6. 变限积分的导数

(1) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x)$.

(2) 设 $f(x)$ 连续，$g(x)$ 与 $h(x)$ 都可导，则

$$\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt\right)'=f[h(x)]h'(x)-f[g(x)]g'(x).$$

【注】 1. 若被积表达式中含有 x，求 $\left(\int_{g(x)}^{h(x)} a(x)f[\varphi(x,t)]dt\right)'$，先提出 $a(x)$，再令 $u=\varphi(x,t)$ 作积分变量代换，使被积表达式中不再含 x（变化至上、下限或使其能提出积分号外），然后再对 x 求导.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上连续.

7. 高阶导数

(1) 定义 一般地，函数 $y=f(x)$ 的导数 $y=f'(x)$ 仍然是 x 的函数. 我们把 $y=f'(x)$ 的导数叫作函数 $y=f(x)$ 的二阶导数，记作 y'' 或 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$，即 $y''=(y')'$ 或 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$. 相应地，把 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 叫作函数 $y=f(x)$ 的一阶导数.

类似地，二阶导数的导数，叫作三阶导数，三阶导数的导数叫作四阶导数，…，$(n-1)$ 阶导数的导数叫作 n 阶导数，分别记作

$$y''',y^{(4)},\ldots,y^{(n)}\quad\text{或}\quad\frac{d^3y}{dx^3},\frac{d^4y}{dx^4},\ldots,\frac{d^ny}{dx^n}.$$

函数 $y=f(x)$ 具有 n 阶导数，也常说成函数 $f(x)$ 为 n 阶可导. 二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数.

【注】 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有 n 阶导数，那么 $f(x)$ 在点 x_0 某一邻域内必定具有一切低于 n 阶的导数.

(2) 几个常见函数的 n 阶导数

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).\qquad(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

$$(e^x)^{(n)}=e^x.\qquad(a^x)^{(n)}=a^x\cdot(\ln a)^n.$$

微信公众号【向宇考研】(ID: djky66)

$$(x^m)^{(n)}=\begin{cases}0, & n>m,\\ n!, & n=m,\text{(其中 } m \text{ 为正整数)}\\ m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}, & n<m.\end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}.\qquad [\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

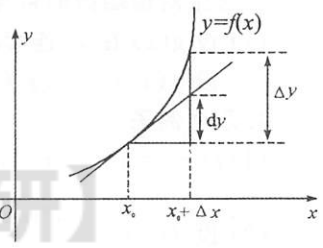
(3) 和、差、乘积的 n 阶导数公式

$$(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)},\qquad (uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}.$$

三、微分

1. 微分的定义　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内有定义，并设 $x_0+\Delta x\in U(x_0)$. 如果函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可表示为 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$，其中 A 是不依赖于 Δx 的常数，而 $o(\Delta x)$ 是比 Δx 高阶的无穷小，那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 是可微的，而 $A\Delta x$ 叫作函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 相应于自变量增量 Δx 的微分，记作 $\mathrm{d}y$，即 $\mathrm{d}y=A\Delta x$. 显然 $\mathrm{d}x=\Delta x$.

2. 微分的几何意义　$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处对应于自变量的增量 Δx 的纵坐标的增量，而微分 $\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,\ f(x_0))$ 的切线的纵坐标相应的增量(如图所示).



【注】　微分是函数增量的线性主要部分，可微与可导是等价的，其几何意义表示在一点的附近可用切线近似代替曲线. 另外，特别注意微分的下列结论：

(1) 设 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 可微，$f'(x_0)\neq 0$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，$f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的微分 $\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}$ 是 Δx 的同阶无穷小(特别地，当 $f'(x_0)=1$ 时为等价无穷小)；函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 也是 Δx 的同阶无穷小(事实上，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)\neq 0$)；但是 $\Delta y-\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}$ 是 Δx 的高阶无穷小.

(2) 当 u 为自变量时，$\mathrm{d}u=\Delta u$，即自变量的微分就是自变量的增量(也称改变量)；当 u 为另一变量的函数 $u=\varphi(x)$ 时，一般情况下，$\mathrm{d}u\neq\Delta u$，而是它们之间相差一个关于 Δx 的高阶无穷小量 $o(\Delta x)$. 例如 $u=x^2$，$\mathrm{d}u=2x\cdot\Delta x$，$\Delta u=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\cdot\Delta x+\Delta x^2$；但是，当 u 为 x 的线性函数，即 $u=ax+b$ 时，显然有 $\mathrm{d}u=\Delta u$.

3. 一阶微分形式不变性　设 $y=f(u)$ 可微，则微分 $\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$，其中 u 不论是自变量还是中间变量，以上微分形式保持不变，这一性质称为一阶微分形式不变性.

四、重要公式与结论

1. 导数与极限的联系

(1) $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{t\to x_0}\dfrac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$

(2) 若 $f'(x_0)$ 存在，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=x_0$，则(在下列极限存在时)

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f[g(x)]-f(x_0)}{g(x)-x_0}=f'(x_0)(g(x)\neq x_0);$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f[g(x)]-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)-x_0}{x-x_0}$,(设$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)-x_0}{x-x_0}$存在);

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f[g(x)]-f[h(x)]}{x-x_0}=f'(x_0)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)-h(x)}{x-x_0}$,

(设$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)-x_0}{x-x_0}$及$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)-x_0}{x-x_0}$存在).

(3) 设$f(x)$在$x=x_0$处连续,则

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}=A\Leftrightarrow f(x_0)=0,f'(x_0)=A$;

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{(x-x_0)^k}=A(k>1)\Rightarrow f(x_0)=0,f'(x_0)=0$;

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{(x-x_0)^k}=A\neq 0(0<k<1)\Rightarrow f(x_0)=0,f'(x_0)$不存在.

2. 可导、可微、连续及极限的关系

$f(x)$在x_0处可微$\Leftrightarrow f(x)$在x_0处可导$\Rightarrow f(x)$在x_0处连续$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

3. 含绝对值函数的可导性

(1) 设$g(x)$在x_0连续,则函数$f(x)=|x-x_0|g(x)$在x_0处可导$\Leftrightarrow g(x_0)=0$.

(2) 设$f(x_0)=0,f'(x_0)$存在,则$|f(x)|$在x_0处可导$\Leftrightarrow f'(x_0)=0$.

4. 几个例子

(1)$f(x)=|x-x_0|$在$x=x_0$处不可导.

(2) 设$f(x)=\begin{cases}x^\alpha\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$当$0<\alpha\leqslant 1$时,$f(x)$在$x=0$处连续,但不可导;当$1<\alpha\leqslant 2$时,$f(x)$在$x=0$处可导,但导函数$f'(x)$在这点不连续;当$\alpha>2$时,$f'(x)$在$x=0$处连续.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

5. 几个高阶导数公式($a\neq 0$)

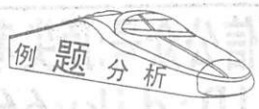
(1)$(x^n)^{(n)}=n!$.

(2)$(e^{ax+b})^{(n)}=a^ne^{ax+b}$; $(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a,(a>0,a\neq 1)$.

(3)$[\sin(ax+b)]^{(n)}=a^n\sin\left(ax+b+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$;

$[\cos(ax+b)]^{(n)}=a^n\cos\left(ax+b+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(4)$\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=(-1)^n\dfrac{a^n\cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}$; $\ln(ax+b)^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{a^n\cdot(n-1)!}{(ax+b)^n}$.



一、有关导数的定义及性质

基本思路:利用导数的定义讨论问题,一般有下列几种情形.

1. 求分段函数在分界点处的导数;

2. 已知极限求$f'(x_0)$;

3. 已知$f'(x_0)$求极限;

4. 抽象函数没给出可导的条件，考察在某点处的可导性或求函数的导函数.

【例 1】　设 $f(x)=\begin{cases}x^2+x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f'(0)$.

解题思路　由于分界点 $x=0$ 的左右两边表达式不同，因此它的导数要通过左右导数来讨论.

解　当 $x=0$ 时，有

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+x}{x}=1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1.$$

于是，$f'_-(0)=f'_+(0)$，故 $f'(0)$ 存在，且 $f'(0)=1$.

【评注】　也可用结论：$f(x)=\begin{cases}g(x), & x<x_0,\\ h(x), & x\geqslant x_0,\end{cases}$ 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续且 $\lim\limits_{x\to x_0^-}g'(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}h'(x)=A$，则 $f'(x_0)=A$.

但本题的做法更具一般性.

【例 2】　设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$，则

(A) $f(0)=0$ 且 $f'_-(0)$ 存在.　　(B) $f(0)=1$ 且 $f'_-(0)$ 存在.

(C) $f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$ 存在.　　(D) $f(0)=1$ 且 $f'_+(0)$ 存在.

解题思路　抽象函数只给出了在 $x=0$ 处的连续性，而选项中涉及了导数，因而考虑用导数的定义.

解　由 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$，得 $\lim\limits_{h\to 0}f(h^2)=0$，进而用 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，有 $f(0)=0$.

再由 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$，可得 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1\Rightarrow f'_+(0)=1$，答案应选(C).

【评注】　因 $h^2\geqslant 0$，只能推出 $f'_+(0)=1$，而得不出 $f'(0)=1$.

【例 3】　设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$，使得

(A) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加.

(B) $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少.

(C) 对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$.

(D) 对任意的 $x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

解题思路　已知抽象函数只在一点处可导，而要讨论函数的特性，显然只能用导数的定义，同时要用极限的保号性进行分析.

解　由导数的定义，知 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}>0$. 根据极限的保号性，存在 $\delta>0$，当 $x\in(-\delta,0)\cup(0,\delta)$ 时，有 $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0$，即当 $x\in(-\delta,0)$ 时，$f(x)<f(0)$；当 $x\in$

$(0,\delta)$ 时，有 $f(x)>f(0)$. 故应选(C).

【评注】 不要错选(A). 函数 $f(x)$ 在一点的导数大于0，不仅不能推出在一个邻域内 $f'(x)$ 也大于0，而且其可导性也没有保证. 事实上，存在仅在一点可导的函数.

有如下结果：若 $f'(a)>0$，且 $f'(x)$ 在 $x=a$ 连续，则存在 $\delta>0$，使得 $f(x)$ 在 $(a-\delta,a+\delta)$ 内单调增加. 理由为：$\lim\limits_{x\to a}f'(x)=f'(a)>0\Rightarrow$ 存在 $\delta>0$，当 $x\in(a-\delta,a+\delta)$ 时，有 $f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在 $(a-\delta,a+\delta)$ 内单调上升.

【例4】 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{\ln[f(x)+2]}=1$，求 $f'(0)$.

解题思路 已知极限求导数，用定义 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$，必须先由已知条件求出 $f(0)$，再进行讨论.

解 因 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{\ln[f(x)+2]}=1$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\ln[f(x)+2]=\ln[f(0)+2]=0$，即

$$f(0)+2=1,\qquad f(0)=-1.$$

当 $x\to0$ 时，$\ln[f(x)+2]=\ln[1+f(x)+1]\sim f(x)+1$，所以，

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln[f(x)+2]}{x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)+1}{x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{f(x)+1}{x}}{\dfrac{x-\sin x}{x}}=1.$$

因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+1}{x}=0$，即

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)+1}{x}=0.$$

【例5】 设 $f(x)$ 是以4为周期的函数，且 $f'(-1)=2$，求 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{h}{f(3-4h)-f(-1)}$.

解题思路 已知函数在一点处可导求另一极限，要用导数的定义.

解
$$\lim_{h\to0}\frac{h}{f(3-4h)-f(-1)}=\lim_{h\to0}\frac{h}{f(-1-4h+4)-f(-1)}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{h}{f(-1-4h)-f(-1)}=-\frac{1}{4}\lim_{h\to0}\frac{-4h}{f(-1-4h)-f(-1)}$$
$$=-\frac{1}{4}f'(-1)=-\frac{1}{8}.$$

【例6】 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且 $f'(0)=1$，$f(x+y)=f(x)e^{y}+f(y)e^{x}$，求 $f(x)$.

解题思路 抽象函数可导性未知，但给出了一点处的可导性，可利用导数的定义得到关于 $f(x)$ 的微分方程，解方程求得 $f(x)$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

解　令 $x=y=0$，得 $f(0)=f(0)+f(0)$，即 $f(0)=0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y} \\ &= \lim_{y\to 0}\frac{f(x)e^y+f(y)e^x-f(x)}{y} \\ &= \lim_{y\to 0}\left[f(x)\,\frac{e^y-1}{y}+e^x\,\frac{f(y)-f(0)}{y}\right] \\ &= f(x)+e^x f'(0)=f(x)+e^x, \end{aligned}$$

即 $f'(x)-f(x)=e^x$，所以 $f(x)=e^x(x+C)$.

又 $f(0)=0$，$C=0$，所以 $f(x)=xe^x$.

【评注】　此题也可以看作是求解函数方程的题型. 常用的方法是利用导数定义，将函数方程转化为微分方程，求解微分方程得函数的表达式. 一般地，若

$f(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x)$，$g'(0)=f(0)=0$，$f'(0)=g(0)=1$，

则有 $f'(x)=g(x)$.

【例 7】　设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\cos(xy)+\ln y-x=1$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\frac{2}{n}\right)-1\right]=$

(A) 2.　　(B) 1.　　(C) -1.　　(D) -2.

解题思路　利用隐函数求导方法与导数定义.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

解　在方程 $\cos(xy)+\ln y-x=1$ 中，令 $x=0$，得 $y=1$，等式两端对 x 求导得

$$-\sin(xy)\cdot(y+xy')+\frac{1}{y}\cdot y'-1=0.$$

将 $x=0$，$y=1$ 代入上式，得 $y'(0)=1$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}n\left[f\left(\frac{2}{n}\right)-1\right]=2\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{2}{n}}=2f'(0)=2.$$

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

答案应选(A).

【例 8】　(2016 年真题) 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant 0, \\ \dfrac{1}{n}, & \dfrac{1}{n+1}<x\leqslant\dfrac{1}{n}, \end{cases}(n=1,2,\cdots)$ 则

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.　　(B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(C) $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导.　　(D) $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

解　显然 $x=0$ 是 $f(x)$ 的连续点，由导数的定义

$$f'_-(0)=1,\ f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{n}}{x}\quad\left(\frac{1}{n+1}<x\leqslant\frac{1}{n}\right),$$

而 $1\leqslant\dfrac{\frac{1}{n}}{x}<\dfrac{n+1}{n}$，由夹逼准则得 $f'_+(0)=1$，所以 $f'(0)=1$，应选(D).

小结

1. 导数本质上是一类特殊函数的极限问题，即$\frac{0}{0}$型极限. 一般来说，题设在一点可导，往往需要利用导数在一点的定义，导数的定义是研究生考试的一个重要考点.

2. 设分段函数$f(x)=\begin{cases}g(x), & x<x_0,\\ h(x), & x\geqslant x_0.\end{cases}$且在$x=x_0$连续. 讨论其分段点的导数一般有下列两种方法：(1) 利用导数定义，分别计算$f'_+(x_0)$，$f'_-(x_0)$，若存在且相等，则

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)=f'_-(x_0);\text{否则 } f'(x_0)\text{ 不存在.}$$

(2) 分别计算$x<x_0$时的$g'(x)$和$x>x_0$时的$h'(x)$(假定存在)，若$\lim\limits_{x\to x_0^-}g'(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}h'(x)=A$，则$f'(x_0)=A$.

注意，(2) 中条件$\lim\limits_{x\to x_0^-}g'(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}h'(x)=A$是$f'(x_0)$存在且等于$A$的充分条件，但不是必要条件！

另外，绝对值、取整、最大(max)以及最小(min)等函数也属于分段函数.

二、含有绝对值函数的导数

【例 9】 求函数$f(x)=(x^2+x-2)|x^3-4x|\sin|x|$的不可导点.

解题思路 由$x^3-4x=0$，$x=0$知此函数的可能不可导点为$x=0,\pm 2$.

微信公众号【顶岸考研】(ID: dikv66)

解 当$x=0$时，$f(x)=[(x^2+x-2)|x^2-4|\sin|x|\,]|x|$，

而$\lim\limits_{x\to 0}[(x^2+x-2)|x^2-4|\sin|x|\,]=0$，所以，$f(x)$在$x=0$处可导.

当$x=2$时，$f(x)=[(x^2+x-2)|x(x+2)|\sin|x|\,]|x-2|$，

而$\lim\limits_{x\to 2}[(x^2+x-2)|x(x+2)|\sin|x|\,]\neq 0$，所以，$f(x)$在$x=2$处不可导.

当$x=-2$时，$f(x)=[(x^2+x-2)|x(x-2)|\sin|x|\,]|x+2|$，

而$\lim\limits_{x\to -2}[(x^2+x-2)|x(x-2)|\sin|x|\,]=0$，所以，$f(x)$在$x=-2$处可导.

所以，$f(x)$的不可导点只有$x=2$.

【评注】 可看出函数$f(x)=|(x-1)(x-2)^2(x-3)^3\cdots(x-2018)^{2018}|$的不可导点只有$x=1$.

【例 10】 设函数$f(x)$在点$x=a$处可导，则函数$|f(x)|$在点$x=a$处不可导的充分条件是

(A) $f(a)=0$且$f'(a)=0$.　　(B) $f(a)=0$且$f'(a)\neq 0$.

(C) $f(a)>0$且$f'(a)>0$.　　(D) $f(a)<0$且$f'(a)<0$.

解 【方法一】 举反例：如$f(x)=x^2$在点$x=0$处，$f(0)=0$且$f'(0)=0$，但$|f(x)|=x^2$在点$x=0$处可导，排除(A). $f(x)=x^2$在点$x=1$处，$f(1)>0$，$f'(1)>0$，但$|f(x)|=x^2$在点$x=1$处可导，排除(C). $f(x)=-x^2$在点$x=1$处，$f(1)<0$，$f'(1)<0$，但$|f(x)|=x^2$在点$x=1$处可导，排除(D). 故(B)为正确选项.

【方法二】　直接验证(B)成立，

$$\lim_{x\to a^-}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=-\lim_{x\to a^-}\left|\frac{f(x)}{x-a}\right|=-|f'(a)|,$$

$$\lim_{x\to a^+}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\left|\frac{f(x)}{x-a}\right|=|f'(a)|,$$

可见当 $f'(a)\neq 0$ 时，$|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处的左右导数不相等，因此导数不存在. 故 $f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq 0$ 是 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处导数不存在的充分条件. 因此应选(B).

【评注】　作为选择题，也可如下快速解题：找一个最熟悉的不可导函数 $|x|$，在 $x=0$ 处不可导，相当于此时 $f(x)=x$，在 $x=0$ 处，$f(0)=0$，$f'(0)=1\neq 0$，与选项(B)中的条件一致，故正确选项即为(B).

三、导数的几何意义

【例 11】　设 $f(x)$ 是可导的偶函数，它在 $x=0$ 的某邻域内满足

$$f(e^{x^2})-3f(1+\sin x^2)=2x^2+o(x^2),$$

求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程及法线方程.

解题思路　题中给出了 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的信息，利用可导偶函数的性质可得 $f(-1)=f(1)$，$f'(-1)=-f'(1)$，进而写出切线方程及法线方程.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

解　由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(e^{x^2})-3f(1+\sin x^2)-2x^2}{x^2}=0$，得

$$f(1)-3f(1)=0\Rightarrow f(1)=0.$$

变形　$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(e^{x^2})}{e^{x^2}-1}\cdot\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}-\dfrac{3f(1+\sin x^2)}{\sin x^2}\cdot\dfrac{\sin x^2}{x^2}-2\right)=0,$

有 $f'(1)-3f'(1)-2=0\Rightarrow f'(1)=-1.$

所以，$f(-1)=f(1)=0$，$f'(-1)=-f'(1)=1$，

切线方程为 $y=x+1$，法方程为 $y=-x-1$.

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

【例 12】　已知曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x}e^{-t^2}dt$ 在(0,0)处的切线相同，写出此切线方程，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\dfrac{2}{n}\right)$.

解题思路　两条曲线在(0,0)处的切线相同，意味着两条曲线均过(0,0)点，且在(0,0)点处的切线的斜率相同.

解　由题意知 $f(0)=0$，$f'(0)=e^{-\arctan^2 x}\dfrac{1}{1+x^2}\Big|_{x=0}=1$，所求的切线方程为 $y=x$.

再由导数的定义　$\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\dfrac{2}{n}\right)=2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{2}{n}}=2f'(0)=2.$

【例 13】 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 所确定，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为_____.

解 等式 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 两边同时对 x 求导，得

$$e^{2x+y}\cdot(2+y')+\sin(xy)\cdot(y+xy')=0.$$

将 $x=0,y=1$ 代入上式，得 $y'(0)=-2$. 故所求切线方程为 $y-1=-2x$，即 $y=-2x+1$，所以应填 $y=-2x+1$.

小结

导数在几何上的应用主要是求曲线的切线与法线方程，而本质上是在一点导数的计算问题. 因此，应熟练掌握显函数、隐函数等在一点的导数如何计算. 一般地曲线 $y=y(x)$ 上点 (x_0,y_0) 的切线与法线方程分别为

$$y-y_0=y'(x_0)\cdot(x-x_0),\qquad y-y_0=-\frac{1}{y'(x_0)}\cdot(x-x_0),(\text{后者 } y'(x_0)\neq 0).$$

特别地，若 $y'(x_0)=0$，则切线与法线方程分别为 $y=y_0,x=x_0$.

四、变限积分的导数

【例 14】 设 $f(x)$ 连续，$F(x)=\int_0^{x^2}tf(x-t)\mathrm{d}t$，求 $F'(x)$.

解 令 $x-t=u$，则

$$F(x)=-\int_x^{x-x^2}(x-u)f(u)\mathrm{d}u=x\int_{x-x^2}^{x}f(u)\mathrm{d}u-\int_{x-x^2}^{x}uf(u)\mathrm{d}u,$$

因而 $F'(x)=\int_{x-x^2}^{x}f(u)\mathrm{d}u+xf(x)+x(2x-1)f(x-x^2)-xf(x)-(2x-1)(x-x^2)f(x-x^2)$

$$=\int_{x-x^2}^{x}f(u)\mathrm{d}u+(2x-1)x^2f(x-x^2).$$

微信公众号【顶尖考研】(P:diky66)

【例 15】 设 $f(x)=\begin{cases}\int_x^{x^2}\dfrac{\sin xu}{u}\mathrm{d}u, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 求 $f''(0)$.

解题思路 $x\neq 0$ 时，这是变限积分求导问题，先经变量代换将参数提至积分号外再求导. 求 $f'(0),f''(0)$ 要用导数的定义.

解 当 $x\neq 0$ 时，

$$f(x)\xlongequal{ux=t}\int_{x^2}^{x^3}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

$$f'(x)=\frac{3x^2\sin x^3}{x^3}-\frac{2x\sin x^2}{x^2}.$$

当 $x=0$ 时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0$，所以，

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(3x\frac{\sin x^3}{x^3}-2\frac{\sin x^2}{x^2}\right)=-2.$$

【例 16】　设 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$（为常数），求 $\varphi'(x)$，并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解题思路　表面看上去，$\varphi(x)$ 是一个定积分的形式，实际上，作变量代换 $u=xt$ 后 $\varphi(x)$ 仍是变限积分的形式.

解　由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，得 $f(0)=0$，$f'(0)=A\Rightarrow\varphi(0)=0$.

当 $x\neq 0$ 时，$\varphi(x)=\dfrac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，$\varphi'(x)=\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$，

$$\varphi'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2},$$

所以，$\varphi'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}, & x\neq 0,\\ \dfrac{A}{2}, & x=0.\end{cases}$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=A-\dfrac{A}{2}=\dfrac{A}{2}=\varphi'(0)$，

即 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

五、利用导数公式及法则求导

【例 17】　设方程 $x=y^y$ 确定 y 是 x 的函数，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

解题思路　方程中含有幂指函数 y^y，可采用化为指数形式 $x=\mathrm{e}^{y\ln y}$ 或两边取对数 $\ln x=y\ln y$. 方程所确定的隐函数的导数有三种方法：方程两边求导、方程两边微分及公式法.

解　【方法一】　方程两边取对数得 $\ln x=y\ln y$，两边对 x 求导有

$$\frac{1}{x}=y'\ln y+y\cdot\frac{1}{y}y',\text{因而 }y'=\frac{1}{x(\ln y+1)}.$$

【方法二】　方程两边微分得 $\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln y\mathrm{d}y+y\mathrm{d}\ln y$，变形 $\mathrm{d}y=\dfrac{1}{x(\ln y+1)}\mathrm{d}x$，

因而 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x(\ln y+1)}$.

【方法三】　令 $F(x)=\ln x-y\ln y$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{\frac{1}{x}}{-(\ln y+1)}=\frac{1}{x(\ln y+1)}.$$

【例 18】 设函数 $y=y(x)$，由方程 $e^{xy}+\ln\frac{y}{x+1}=0$ 所确定，则 $y'(0)=$ _____.

解 由原方程知：当 $x=0$ 时，$y=\frac{1}{e}$. 在方程两边对 x 求导，得

$$e^{xy}(y+xy')+\frac{y'}{y}-\frac{1}{x+1}=0,$$

于是 $y'=\dfrac{\frac{1}{x+1}-ye^{xy}}{xe^{xy}+\frac{1}{y}}$. 将 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 代入可得 $y'(0)=\frac{1}{e}\left(1-\frac{1}{e}\right)$. 故应填 $\frac{1}{e}\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

【评注】 (1) 在求隐函数的导数时，首先将方程的两边对自变量 x 求导，凡遇到含有因变量 y 的项，将 y 看成 x 的函数，用复合函数求导法则，先对 y 求导再乘以 y 对 x 的导数 y'，然后从含有 y' 的方程中把 y' 解出，从而得出 y 对 x 的导数 y'，即 $\frac{dy}{dx}$.

(2) 在导数的表达式中允许含有因变量字母 y.

(3) 求隐函数在一具体点 x_0 的导数时，要由原方程求出对应的因变量值 y_0，不一定求出 y' 再代入所求的导数表达式中，可直接代入求导后的式子中，如把 $x=0, y=\frac{1}{e}$ 代入方程 $e^{xy}(y+xy')+\frac{y'}{y}-\frac{1}{x+1}=0$ 中，求得 $y'(0)=\frac{1}{e}\left(1-\frac{1}{e}\right)$ 更简单.

微信公众号【研术考研】 (djky66)

【例 19】 设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, & x\geqslant 1,\\ 2x-1, & x<1.\end{cases}$ $y=f(f(x))$，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=e}=$ _____.

解题思路 本题常规的做法是先求复合函数 $y=f(f(x))$，再求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=e}$，但较复杂. 实际上，直接利用复合函数的求导法则更为简单.

解【方法一】 由 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, & x\geqslant 1,\\ 2x-1, & x<1\end{cases}$ 得

$$y=f(f(x))=\begin{cases}\ln\sqrt{f(x)}, & f(x)\geqslant 1,\\ 2f(x)-1, & f(x)<1\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2}\ln x), & x\geqslant e^2,\\ \ln x-1, & 1\leqslant x<e^2,\\ 4x-3, & x<1.\end{cases}$$

因此 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=e}=(\ln x-1)'\Big|_{x=e}=\left.\frac{1}{x}\right|_{x=e}=\frac{1}{e}$. 应填 $\frac{1}{e}$.

【方法二】 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=e}=f'[f(x)]f'(x)|_{x=e}=f'[f(e)]f'(e)$

$$=f'(\tfrac{1}{2})f'(e)=\frac{1}{e}.$$

【例 20】 设函数 $y(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $y'(0)=$

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$.　　(B) $(-1)^n(n-1)!$.

(C) $(-1)^{n-1}n!$.　　(D) $(-1)^n n!$.

解【方法一】 用导数运算法则先求导函数，再求 $f'(0)$

因 $f'(x)=e^x\cdot(e^{2x}-2)(e^{3x}-3)\cdots(e^{nx}-n)+(e^x-1)\cdot 2e^{2x}\cdot(e^{3x}-3)\cdots(e^{nx}-n)$
$+\cdots+(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{(n-1)x}-n+1)\cdot ne^{nx}$,

故 $f'(0)=e^0\cdot(e^0-2)(e^0-3)\cdots(e^0-n)=(-1)^{n-1}(n-1)!$. 选 (A).

【方法二】　由导数定义立即得

$$y'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{y(x)-y(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to 0}(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)=(-1)^{n-1}(n-1)!,$$

故选(A).

【评注】　显然方法二比方法一要简单一些,在实际解题过程中,要灵活使用各种方法. 另本题虽然是求 n 项乘积的导数,但不适合用对数求导法,因为取对数后会出现函数 $\ln(e^x-1)$,而它在 $x=0$ 处没有导数.

【例 21】　若 $y=f(x)$ 存在单值反函数,且 $y'\neq 0$,求 $\dfrac{d^2x}{dy^2}$.

解　根据反函数的求导法则有 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y'}$,于是

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dy}\right)\frac{dx}{dy}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y'}\right)\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}.$$

【评注】　由 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y'}$,得 $\dfrac{d^2x}{dy^2}=\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{1}{y'}\right)=-\dfrac{y''}{(y')^2}$,结果是错误的. 因为 $\dfrac{1}{y'}$ 是以 x 为变量的函数,而不是以 y 为变量的函数,因此对 $\dfrac{1}{y'}$ 中的 y 求导时,应将 $\dfrac{1}{y'}$ 中的 x 看作中间变量,然后用复合函数求导法则得出 $\dfrac{d^2x}{dy^2}$ 的结果.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

小结

函数导数的计算是微积分学习中必须具有的基本功,包括熟练记忆基本求导公式,掌握复合函数、隐函数、反函数及四则运算求导法则. 另外,隐函数求二阶导数,一般直接在已知等式两边两次求导即可;反函数的二阶导数要掌握方法,不要死记公式;多项乘积及幂指函数的导数可用对数求导法.

六、可导条件下求待定的参数

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例 22】　设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x}+\dfrac{x}{2}, & x>0,\\ a, & x=0,\\ \dfrac{\sin bx}{x}+cx, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导,求 a,b,c.

解题思路　题中给出在 $x=0$ 处可导,注意隐含着在 $x=0$ 处连续. 利用连续及可导列出关于 a,b,c 的方程组,解方程求得 a,b,c.

解　由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,有 $f(0^+)=1=f(0^-)=b=f(0)=a\Rightarrow a=b=1$.

求得函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左右导数为

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{\ln(1+x)}{x}+\dfrac{x}{2}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln(1+x)+x^2-2x}{2x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2}{1+x}+2x-2}{4x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2}{4x(1+x)} = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{\sin x}{x}+cx-1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x + cx^2 - x}{x^2} = c,$$

进而 $c=0$.

【例 23】 设 $f(x)=\begin{cases} x^\alpha \sin\dfrac{1}{x^\beta}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ $\beta>0$，讨论在什么条件下，$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

解 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，即 $f'(0)$ 存在且 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$.

当 $x\neq 0$ 时，$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x^\beta} - \beta x^{\alpha-\beta-1}\cos\dfrac{1}{x^\beta}$.

由 $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x^\beta}$ 存在，

得 $\alpha>1$，且 $f'(0)=0$. 又

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(\alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x^\beta} - \beta x^{\alpha-\beta-1}\cos\frac{1}{x^\beta}\right) = f'(0) = 0,$$

得 $\alpha>\beta+1$.

所以，当 $\alpha>\beta+1$ 时，$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

七、求函数的高阶导数

【例 24】 求 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 的 $f^{(n)}(0)$.

解题思路 函数 $f(x)$ 是两项乘积的形式，且其中一项为多项式，用莱布尼茨公式较方便.

解 $n\leqslant 2$ 时，$f^{(n)}(0)=0$.

$n>2$ 时，由莱布尼茨公式

$$f^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^2)^{(k)}[\ln(1+x)]^{(n-k)}\Big|_{x=0} = C_n^2 2[\ln(1+x)]^{(n-2)}\Big|_{x=0}$$

$$= n(n-1)(-1)^{n-3}(n-3)!\frac{1}{(1+x)^{n-2}}\Big|_{x=0} = (-1)^{n-3}\frac{n!}{n-2}.$$

【评注】 本题也可用幂级数展开式(泰勒公式)

因为

$$f(x) = x^2\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-3}\frac{x^{n-2}}{n-2} + \cdots\right]$$

$$= x^3 - \frac{x^4}{2} + \cdots + (-1)^{n-3}\frac{x^n}{n-2} + \cdots,$$

所以 $f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n\leqslant 2, \\ (-1)^{n-3}\dfrac{n!}{n-2}, & n>2. \end{cases}$

【例 25】　设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$，则 $y^{(n)}(0)=$ _____.

解题思路　本题求函数的高阶导数，利用递推法或函数的麦克劳林展开式.

解　$y=\dfrac{1}{2x+3}$，$y'=-\dfrac{2}{(2x+3)^2}$，则 $y^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n 2^n n!}{(2x+3)^{n+1}}$，

故 $y^{(n)}(0)=\dfrac{(-1)^n 2^n n!}{3^{n+1}}$.

【评注】　此题如果是解答题，除了递推之外，应用数学归纳法加以证明. 当然，若对常见函数的高阶导数记忆很准确，可直接写出答案. 对于复杂的函数可采用拆分法，化为简单函数的高阶导数，如 $\left(\dfrac{1}{x^2-2x-3}\right)^{(n)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x+1}\right)^{(n)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x-3}\right)^{(n)}-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^{(n)}$.

【例 26】　设函数 $f(x)=\arctan x-\dfrac{x}{1+ax^2}$，且 $f'''(0)=1$，则 $a=$ _____.

解题思路　利用函数的泰勒展开式.

解　$f(x)=\arctan x-\dfrac{x}{1+ax^2}=\left(x-\dfrac{x^3}{3}+\cdots\right)-x(1-ax^2+\cdots)$

$=\left(a-\dfrac{1}{3}\right)x^3+\cdots$

由 $\dfrac{f'''(0)}{3!}=a-\dfrac{1}{3}$，得 $a=\dfrac{1}{2}$.

【评注】　本题若直接求 $f'''(0)$，运算量较大.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

小结

求高阶导数主要有如下几种方法：

1. 利用递推总结规律，再用数学归纳法证明；
2. 利用重要函数的高阶导数公式；
3. 利用莱布尼茨公式；
4. 利用幂级数展开(泰勒公式)

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \Rightarrow f^{(n)}(x_0)=a_n n!.$$

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

§2　导数的应用

本节主要讨论导数在研究函数性态方面的应用，还涉及导数的经济意义. 中值定理及其不等式的证明下节单独讨论.

内容精讲

一、函数的单调性与极值

1. 判定函数单调性的充分条件

设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导.

(1) 如果在(a,b)内$f'(x)>0$，那么函数$y=f(x)$在$[a,b]$上单调增加；

(2) 如果在(a,b)内$f'(x)<0$，那么函数$y=f(x)$在$[a,b]$上单调减少.

【注】 1° 如果把这个判定法中的闭区间换成其他各种区间(包括无穷区间)，那么结论也成立.

2° 若将前提中$f'(x)>0$(或$f'(x)<0$)改为$f'(x)\geqslant 0$(或$f'(x)\leqslant 0$)，且在区间内使$f'(x)=0$的点只有有限个，那么函数$y=f(x)$在该区间上仍是单调增加(或减少)的.

例如$y=x^3$，$-\infty<x<+\infty$，其导数$y'=3x^2\geqslant 0$，但$y=x^3$在$(-\infty,+\infty)$上是单调增加的.

2. 函数的极值

(1) **定义** 设函数$f(x)$在点x_0的某邻域$U(x_0)$内有定义，如果对于$U(x_0)$内的任一x，有$f(x)\leqslant f(x_0)$(或$f(x)\geqslant f(x_0)$)，那么就称$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个极大值(或极小值). 函数的极大值与极小值统称为函数的极值，使函数取得极值的点称为极值点.

(2) **取得极值的必要条件** 设函数$f(x)$在x_0处可导，且在x_0取得极值，那么$f'(x_0)=0$.

【注】 一个函数的可能极值点就是其导数为零或导数不存在的点.

(3) **取得极值的第一充分条件** 设函数$f(x)$在x_0处连续，且在x_0的某去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)$内可导.

若$x\in(x_0-\delta,x_0)$时，$f'(x)>0$，且$x\in(x_0,x_0+\delta)$时，$f'(x)<0$，则$f(x)$在x_0处取得极大值.

若$x\in(x_0-\delta,x_0)$时，$f'(x)<0$，且$x\in(x_0,x_0+\delta)$时，$f'(x)>0$，则$f(x)$在x_0处取得极小值.

若$x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$时，$f'(x)$的符号保持不变，则$f(x)$在$x_0$处没有极值.

(4) **取得极值的第二充分条件** 设函数$f(x)$在x_0处具有二阶导数且$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，那么

若$f''(x_0)<0$，函数$f(x)$在x_0处取得极大值；

若$f''(x_0)>0$，函数$f(x)$在x_0处取得极小值.

3. 函数的最大最小值问题

(1) 设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则其最大最小值的求法是：先求函数在(a,b)内的驻点和导数不存在的点，然后比较函数在驻点、导数不存在的点和区间端点处函数值的大小，从而可得最大最小值点.

(2) 设$f(x)$在开区间(a,b)上连续，则其最大最小值的求法：如果$f(x)$在开区间(a,b)内有唯一的驻点且取极大(小)值，则此极大(小)值就是函数的最大(最小)值.

(3) 实际应用问题一般由问题的性质可做出判定.

二、曲线的凹凸性与拐点

1. 曲线的凹凸性 设$f(x)$在区间I上连续，如果对I上任意两点x_1，x_2，$(x_1\neq x_2)$恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

那么称$f(x)$在I上的图形是凹的(或凹弧)；如果恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

那么称$f(x)$在I上的图形是凸的(或凸弧).

【注】 (1) 凹曲线弧上过任意一点$x_0\in(a,b)$的切线总在曲线的下方，即

微信公众号【顶尖考研】 ID: djkv66

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0);$$

(2) 凸曲线弧上过任意一点 $x_0 \in (a, b)$ 的切线总在曲线的上方，即

$$f(x) \leqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

2. 判别凹凸性的充分条件　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有一阶和二阶导数，那么

(1) 若在 (a,b) 内 $f''(x) > 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的；

(2) 若在 (a,b) 内 $f''(x) < 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凸的.

3. 曲线的拐点

连续曲线上凹弧与凸弧的分界点称为曲线的拐点. 即设 $y = f(x)$ 在区间 I 上连续，x_0 是 I 的内点，如果曲线 $y = f(x)$ 在经过点 $(x_0, f(x_0))$ 时，曲线的凹凸性发生了改变，那么称 $(x_0, f(x_0))$ 为此曲线的拐点.

【注】 (1) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，且 x_0 为拐点，那么 $f''(x_0) = 0$ 或 $f''(x_0)$ 不存在.

(2) 曲线拐点的求法：

若 $f'(x)$ 在 x_0 的左、右两侧邻近改变增减性，则 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

若 $f''(x)$ 在 x_0 的左、右两侧邻近的符号相反，则 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

若 $y = f(x)$ 满足 $f''(x_0) = 0$，$f'''(x_0) \neq 0$，则 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

三、曲线的渐近线

1. 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = C$ (C 为常数)，则 $y = C$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一条水平渐近线.

2. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$，则 $x = x_0$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一条铅直渐近线.

3. 若 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \neq 0$，而且 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - ax) = b$，则 $y = ax + b$ 是 $y = f(x)$ 的斜渐近线.

【注】 (1) 上述确定各种渐近线的极限过程只要单侧成立，就有渐近线.

(2) 一条曲线 $y = f(x)$ 在 $x \to +\infty$ 时若有水平渐近线，则在此方向上一定没有斜渐近线，在 $x \to -\infty$ 时亦有类似的结论. 但一条曲线可能有无穷多条铅直渐近线. 如正切曲线 $y = \tan x$ 有无穷多条铅直渐近线.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

四、函数图形的描绘

利用导数描绘函数图形的一般步骤如下：

1. 确定函数 $y = f(x)$ 的定义域及函数所具有的某些特性(如有界性、奇偶性、周期性等)，并求出函数的一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$；

2. 求出一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$ 在函数定义域内的全部零点，并求出函数 $f(x)$ 的间断点及 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 不存在的点，用这些点把函数的定义域划分成几个部分区间；

3. 确定在这些部分区间内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号，并由此确定函数图形的升降和凹凸，极值点和拐点；

4. 确定函数图形的水平、铅直、斜渐近线以及其他变化趋势；

5. 算出 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的零点以及不存在的点所对应的函数值，定出图形上相应的点；为了把图形描绘得更准确些，有时还需要补充一些点；然后结合第三、四步中得到的结果，连结这些点画出函数 $y = f(x)$ 的图形.

五、重要公式与结论

1. 设 $f'(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{x - x_0} = A$，则 $f'(x_0) = 0$，$f''(x_0) = A$. 因而，当

$A>0(<0)$ 时，$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极小(大)值.

2. 设 $f''(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)}{x-x_0}=A$，则 $f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)=A$. 因而，当 $A\neq 0$ 时，$(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

3. 若 $f(x)$ 在点 x_0 处满足：$f'(x_0)=0,\cdots,f^{(k-1)}(x_0)=0,f^{(k)}(x_0)\neq 0$，则当 k $(k\geqslant 2)$ 为偶数时，x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点，且 $f^{(k)}(x_0)>0$ 对应极小值点，$f^{(k)}(x_0)<0$ 对应极大值点；当 $k(k\geqslant 3)$ 为奇数时，点 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

一、求函数的单调区间与极值

【例 1】 求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}\,dt$ 的单调区间与极值.

解题思路 函数 $f(x)$ 处处可导，求其一阶导数，利用导数的符号判断极值并求单调区间.

解 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}\,dt=x^2\int_1^{x^2}e^{-t^2}\,dt-\int_1^{x^2}te^{-t^2}\,dt$，

$$f'(x)=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}\,dt+2x^3e^{-x^4}-2x^3e^{-x^4}=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}\,dt.$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=0,x=\pm 1$.

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$；当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$；

当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)>0$；当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$.

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,-1),(0,1)$；$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1,0),(1,+\infty)$；极小值为 $f(1)=f(-1)=0$，极大值为

$$f(0)=\int_1^0(0-t)e^{-t^2}\,dt=-\frac{1}{2}e^{-t^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(1-e^{-1}).$$

【评注】 也可用二阶导数的符号判断极值点.

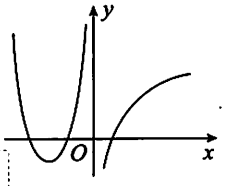
【例 2】 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则 $f(x)$ 有

(A) 一个极小值点和两个极大值点.

(B) 两个极小值点和一个极大值点.

(C) 两个极小值点和两个极大值点.

(D) 三个极小值点和一个极大值点.



解题思路 答案与极值点个数有关，而可能的极值点应是导数为零或导数不存在的点，共 4 个，是极大值点还是极小值可进一步由取极值的第一或第二充分条件判定.

解 根据导函数的图形可知，一阶导数为零的点有 3 个，而 $x=0$ 则是导数不存在的点. 三个一阶导数为零的点左右两侧导数符号不一致，必为极值点，且两个极小值点，一个极大值点；在 $x=0$ 左侧一阶导数为正，右侧一阶导数为负，可见 $x=0$ 为极大值点，故 $f(x)$ 共有两个

极小值点和两个极大值点，应选(C).

【评注】 (1) 利用导函数 $f'(x)$ 的符号确定函数 $f(x)$ 的单调性及极值是讨论函数性态的基本要求，导函数 $f'(x)$ 可通过极限形式表示出来，也可通过某微分方程的形式表现出来.

(2) $y=f(x)$，$y=f'(x)$，$y=f''(x)$ 三者在图形方面的关系，本质上也可通过单调性与导函数的符号关系进行讨论.

【例 3】 已知 $f''(x)>0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，则当 $x>0$ 时，$f(x)$

(A) 单调递减大于零.　　(B) 单调递增大于零.

(C) 单调递减小于零.　　(D) 单调递增小于零.

解 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 得 $f(0)=f'(0)=0$.

已知 $f''(x)>0\Rightarrow f'(x)$ 单调递增，有 $f'(x)>f'(0)=0$，

进而 $f(x)$ 单调递增，有 $f(x)>f(0)=0$. 答案应选(B).

【例 4】 求函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 的最大值和最小值.

解 $f(x)$ 为偶函数，故只需在 $[0,+\infty)$ 内求最值.

由 $f'(x)=2x(2-x^2)\mathrm{e}^{-x^2}=0$，得 $x=0$ 或 $\sqrt{2}$ 是可能极值点.

因 $f(0)=0$，$f(\sqrt{2})=\int_0^2(2-t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=1+\mathrm{e}^{-2}$.

又 $f(+\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\int_0^{+\infty}(2-t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=1$.

故 $f(0)=0$ 为最小值，$f(\pm\sqrt{2})=1+\mathrm{e}^{-2}$ 为最大值.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【评注】 本题给出了在无穷区间上求函数最值的方法，但请注意，无穷区间上不一定有最值. 例如 $\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不存在最大值与最小值.

【例 5】 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y=2$ 确定，求 $y(x)$ 的极大值与极小值.

解题思路 此题是求由方程确定的隐函数的极值，方法同显函数类似.

解 方程两边对 x 求导 $x^2+y^2y'-1+y'=0$，有 $y'=\dfrac{1-x^2}{1+y^2}$，令 $y'=0$，得 $x=1,-1$.

当 $x<-1$ 时，$y'<0$；当 $-1<x<1$ 时，$y'>0$；当 $x>1$ 时，$y'<0$. 所以 $x=-1$ 是 $y(x)$ 的极小值点，$x=1$ 是 $y(x)$ 的极大值点.

因此，$y(x)$ 的极小值为 $y(-1)=0$，$y(x)$ 的极大值为 $y(1)=1$.

【评注】 $x=1$ 时，有 $y^3+3y-4=0$，即 $(y-1)(y^2+y+4)=0$，故 $y(1)=1$；同理 $y(-1)=0$.

小结

1. 求具体连续函数 $f(x)$ 的单调区间与极值的步骤：先找出驻点($f'(x)=0$)及一阶导数不存在的点，这些点把 $f(x)$ 的定义域分成若干区间，然后用各区间 $f'(x)$ 的符号判断单调性及极值.

2. 抽象函数的单调性和极值要根据题中的条件用充分条件来判定.
3. 函数最值的确定见本节内容精讲的一之 3.

二、判断曲线的凹凸性与拐点

【例 6】 求曲线 $y=(x-2)^{\frac{5}{3}}-\frac{5}{9}x^2$ 的拐点及凹凸区间.

解 函数定义域为$(-\infty,+\infty)$,可求得

$$y'=\frac{5}{3}(x-2)^{\frac{2}{3}}-\frac{10}{9}x,\ y''=\frac{10}{9}\cdot\frac{1-(x-2)^{\frac{1}{3}}}{(x-2)^{\frac{1}{3}}}.$$

令 $y''=0$,得 $x_1=3$,y'' 不存在的点 $x_2=2$.

$x_1=3,x_2=2$ 把定义域分为区间$(-\infty,2),(2,3),(3,+\infty)$.

当 $x\in(-\infty,2)$ 时,$y''<0$;当 $x\in(2,3)$ 时,$y''>0$;当 $x\in(3,+\infty)$ 时,$y''<0$.

所以,曲线在区间$(-\infty,2),(3,+\infty)$ 上是凸的,在区间$(2,3)$ 上是凹的.

进而,曲线有两个拐点$(2,-\frac{20}{9}),(3,-4)$.

【评注】 拐点的求法见内容精讲二之 3 的注.

【例 7】 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y\ln y-x+y=0$ 确定,试判断曲线 $y=y(x)$ 在点(1,1) 附近的凹凸性.

解题思路 由凹凸性判别方法和隐函数的求导即得.

解 在 $y\ln y-x+y=0$ 两边对 x 求导得 $y'\ln y+2y'-1=0$,

解得 $$y'=\frac{1}{\ln y+2}$$

两边对 x 再求导得 $y''=\dfrac{-\frac{1}{y}\cdot y'}{(\ln y+2)^2}=-\dfrac{1}{y(\ln y+2)^3}$.

将 $x=1,y=1$ 代入得 $y''=-\frac{1}{8}$.

由于二阶导函数 y'' 在 $x=1$ 的附近是连续函数,所以由 $y''=-\frac{1}{8}<0$,可知存在 $\delta>0$,当 $x\in(1-\delta,1+\delta)$ 时,$y''<0$,故曲线 $y=y(x)$ 在点(1,1) 附近是凸的.

【例 8】 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$,且 $f'(0)=0$,则

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) 点$(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值,点$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

解题思路 由题设 $f'(0)=0$,是否为极值点可通过 $f''(0)$ 的符号来定,但易知 $f''(0)=0$,因此可进一步通过 $f'''(0)$ 的符号确定是否为拐点.若还有 $f'''(0)=0$,则要通过更高阶导数的符号才能进行判断其为极值点或拐点.

解　因为 $f'(0)=0$，由原关系式 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$ 知 $f''(0)=0$，因此点 $(0,f(0))$ 可能为拐点．由 $f''(x)=-[f'(x)]^2+x$，知 $f(x)$ 的三阶导数存在，且

$$f'''(x)=-2f'(x)f''(x)+1,$$

可见 $f'''(0)=1$，因此在 $x=0$ 的左侧 $f''(x)<0$，对应曲线弧是凸的；而在 $x=0$ 的右侧 $f''(x)>0$，对应曲线弧是凹的．故点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点．

故应选(C)．

【例 9】　设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间 $[0,1]$ 上

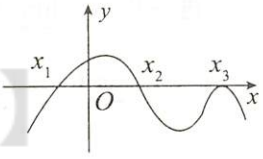
(A) 当 $f'(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$．　(B) 当 $f'(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$．

(C) 当 $f''(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$．　(D) 当 $f''(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$．

解题思路　利用凹凸性的几何意义．

解　当 $f''(x)\geqslant 0$ 时，曲线 $y=f(x)$ 是凹的，而 $g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$ 是连接两点 $(0,f(0))$ 与 $(1,f(1))$ 的直线，显然 $g(x)$ 在 $f(x)$ 的上方，所以 $f(x)\leqslant g(x)$．故选(D)．

【例 10】　设 $f(x)$ 有连续的二阶导数，其导函数 $f'(x)$ 的图形如图所示，若 $f(x)$ 有 p 个驻点，q 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 r 个拐点，则



(A) $p=q=r=3$．

(B) $p=q=r=2$．

(C) $p=3,q=2,r=3$．

(D) $p=3,q=2,r=1$．

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

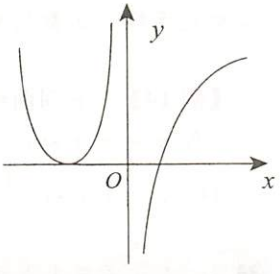
解　由图可看出 $f'(x)=0$ 的点有 3 个，因而 $p=3$．

利用 $f'(x)$ 的符号，x_1 是极小值点，x_2 是极大值点，x_3 不是极值点，因而 $q=2$．

再由 $f'(x)$ 的单调性，曲线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点，因而 $r=3$．答案应选(C)．

【评注】　给定导函数 $f'(x)$ 的信息，考察函数 $y=f(x)$ 特性的题目有一定难度，需熟练掌握相关的性质和结论．

【例 11】　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其二阶导函数 $f''(x)$ 的图形如图所示，则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为



(A)0.　(B)1.

(C)2.　(D)3.

解　曲线的拐点出现在二阶导数等于 0，或二阶导数不存在的点，并且在这点的左右两侧二阶导函数异号．因此，由 $f''(x)$ 的图形可得，曲线 $y=f(x)$ 存在两个拐点，故选(C)．

三、求曲线的渐近线

【例 12】　求曲线 $y=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 的渐近线．

解　函数 $y=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 处处连续，曲线没有铅直渐近线．

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

由于$\lim\limits_{x\to\infty}(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}=\infty$，因而曲线没有水平渐近线. 只考虑斜渐近线，

因为$a_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x}e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}=e^{\pi}$，$b_1=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-a_1x]=-2e^{\pi}$，

$a_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$，$b_2=\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-a_2x]=-2$，

所以，沿$x\to+\infty$所求渐近线为$y=e^{x}(x-2)$，沿$x\to-\infty$渐近线为$y=x-2$.

【例 13】 曲线$y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^{x})$，其渐近线的条数为

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

解题思路 先找出无定义点，确定其是否为对应垂直渐近线，再考虑水平或斜渐近线.

解 因为$\lim\limits_{x\to0}[\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^{x})]=\infty$，所以$x=0$为垂直渐近线；

又$\lim\limits_{x\to-\infty}[\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^{x})]=0$，所以$y=0$为水平渐近线；

进一步，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}[\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\ln(1+e^{x})}{x}]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^{x})}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}=1$，

$$\lim_{x\to+\infty}(y-1\cdot x)=\lim_{x\to+\infty}[\frac{1}{x}+\ln(1+e^{x})-x]=\lim_{x\to+\infty}[\ln(1+e^{x})-x]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}[\ln e^{x}(1+e^{-x})-x]=\lim_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-x})=0.$$

于是有斜渐近线$y=x$. 故应选(D).

【评注】 (1) 本题在$x<0$的一侧有水平渐近线，在此侧一定没有斜渐近线，而在$x>0$的一侧有斜渐近线. 关键应注意指数函数e^{x}当$x\to\infty$时极限不存在，必须分$x\to-\infty$和$x\to+\infty$进行讨论.

(2) 要特别注意的是，当$x\to\infty$时，或$x\to x_0$不存在时，则应考虑单侧极限，所有求渐近线的极限均可改为单侧极限.

(3) 一般说，求曲线的渐近线，先考虑铅直渐近线，再考虑水平渐近线，最后考虑斜渐近线. 处处连续的函数所对应的曲线一定没有铅直渐近线.

【例 14】 下列曲线中有渐近线的是

(A) $y=x+\sin x$. (B) $y=x^2+\sin x$.

(C) $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$. (D) $y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$.

解题思路 本题考查求渐近线的基本方法. 分别判断各曲线是否有水平、垂直和斜渐近线即得正确答案. 但考虑斜渐近线时，$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$存在，未必一定有斜渐近线.

解 因为$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin\frac{1}{x}}{x}=1$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sin\dfrac{1}{x}-x)=0$，

所以曲线 $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$ 有斜渐近线 $y=x$.

故选(C).

【评注】　如(A)$y=x+\sin x$,$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ 存在,但 $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在,因而没有斜渐近线.

四、导数的经济应用

【例 15】　已知某商品的需求函数为 $Q=12-\dfrac{P^2}{4}$,求其边际需求函数及 $P=8$ 时的边际需求,并说明此时的经济意义.

解　边际需求函数为 $Q'(P)=(12-\dfrac{P^2}{4})'=-\dfrac{P}{2}$,

因此 $P=8$ 时的边际需求为:$Q'(8)=-\dfrac{P}{2}\Big|_{P=8}=-4$.

$Q'(8)=-4$ 表示:当 $P=8$ 时,价格上涨 1 个单位时,需求将减少 4 个单位;价格下降 1 个单位时,需求将增加 4 个单位.

【例 16】　某工厂生产某产品,固定成本 20000 元,每生产一单位产品成本增加 100 元,已知总收益

$$R(Q)=\begin{cases}400Q-\dfrac{1}{2}Q^2, & 0\leqslant Q\leqslant 400,\\ 80000, & Q>400.\end{cases}$$

其中 Q 是年产量,问每年生产多少产品时,总利润最大?此时总利润是多少?

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

解　总成本函数 $C(Q)=20000+100Q$,总利润函数 $L(Q)=R(Q)-C(Q)$,则

$$L(Q)=\begin{cases}-\dfrac{Q^2}{2}+300Q-20000, & 0\leqslant Q\leqslant 400,\\ 60000-100Q, & Q>400.\end{cases}$$

$$L'(Q)=\begin{cases}-Q+300, & 0\leqslant Q\leqslant 400,\\ -100, & Q>400.\end{cases}$$

令 $L'(Q)=0\Rightarrow Q=300$,而 $L''(300)=-1<0$,所以当年产量为 300 个单位时,总利润最大,此时总利润 $L_{\max}=25000$ 元.

【例 17】　已知某商品需求函数为 $Q=\dfrac{1200}{P}$,求

(1) 从 $P=30$ 到 $P=20,50$ 各点间的需求弹性;

(2) $P=30$ 时的需求弹性,并说明其经济意义.

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

解　(1)　$\bar{\eta}_{(P_0,P_0+\Delta P)}=-\dfrac{\Delta Q}{\Delta P}\cdot\dfrac{P_0}{Q_0}$,$P_0=30$,$Q_0=\dfrac{1200}{P}\Big|_{P=30}=40$,

所求分别为 $\bar{\eta}_{(30,20)}=-\dfrac{\frac{1200}{20}-\frac{1200}{30}}{20-30}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{2}$,$\bar{\eta}_{(30,50)}=-\dfrac{\frac{1200}{50}-\frac{1200}{30}}{50-30}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{5}$.

(2) $Q'=-\frac{1200}{P^2}$，弹性为 $\eta(P)=-Q'(P)\cdot\frac{P}{Q(P)}=\frac{1200}{P^2}\cdot\frac{P}{\frac{1200}{P}}=1$.

所以 $\eta(30)=1$.

$\eta(P)=1$ 表示在任意点处，当价格上涨 1% 时，需求量减少 1%；当价格下降 1% 时，需求量增加 1%.

【评注】 本题中涉及的弹性均大于零，实际考题要看具体题目的要求.

【例 18】 为了实现利润最大化，厂商需要对某商品确定其定价模型. 设 Q 为该商品的需求量，P 为价格，MC 为边际成本，η 为需求弹性($\eta>0$).

(1) 证明定价模型为 $P=\frac{MC}{1-\frac{1}{\eta}}$；

(2) 若该商品的成本函数为 $C(Q)=1600+Q^2$，需求函数为 $Q=40-P$，试由(1)中的定价模型确定此商品的价格.

解 (1) 由于利润函数 $L(Q)=R(Q)-C(Q)=PQ-C(Q)$，

两边对 Q 求导，得

$$\frac{dL}{dQ}=P+Q\frac{dP}{dQ}-C'(Q)=P+Q\frac{dP}{dQ}-MC.$$

当且仅当 $\frac{dL}{dQ}=0$ 时，利润 $L(Q)$ 最大，此时 $\frac{dP}{dQ}=\frac{MC-P}{Q}$，

又由于 $\eta=-\frac{P}{Q}\cdot\frac{dQ}{dP}=-\frac{P}{Q}\frac{Q}{MC-P}=-\frac{P}{MC-P}$，解得 $P=\frac{MC}{1-\frac{1}{\eta}}$.

故当 $P=\frac{MC}{1-\frac{1}{\eta}}$ 时，利润最大.

(2) 由于 $MC=C'(Q)=2Q=2(40-P)$，则 $\eta=-\frac{P}{Q}\cdot\frac{dQ}{dP}=\frac{P}{40-P}$ 代入(1)中的定价模型，得 $P=\frac{2(40-P)}{1-\frac{40-P}{P}}$，从而解得 $P=30$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

小结

1. 经济数学中的常用函数.

(1) 成本函数 $C(x)$：$C(x)$ = 固定成本 + 可变成本；

(2) 需求函数 $Q(p)$：需求量为价格 p 的函数，常用线性函数为 $Q=a-bp$；

(3) 供给函数 $S(p)$：需求量为价格 p 的函数，常用线性函数为 $S=c+dp$；

(4) 收益函数 $R(x)$：$R(x)=x\cdot p$，x 是产量，p 是价格；

(5) 利润函数 $L(x)$：$L(x)=R(x)-C(x)$(或 $-T$，税收)；

(6) 平均成本函数：$\overline{C}(x)=\frac{C(x)}{x}$.

2. 掌握边际函数及弹性函数的概念，并能说明其经济意义.

§3　中值定理及不等式的证明

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

内容精讲

一、微分中值定理

1.（费马引理） 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)=(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内有定义，并且在 x_0 处可导，如果对任意的 $x\in U(x_0)$，有 $f(x)\leqslant f(x_0)$（或 $f(x)\geqslant f(x_0)$），那么 $f'(x_0)=0$.

【注】 费马引理实际上就是函数取得极值的必要条件.

2.（罗尔定理） 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，那么在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

3.（拉格朗日中值定理） 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，那么在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$，使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

【注】 (1) 拉格朗日中值定理也可等价表示为：存在 $\theta(0<\theta<1)$，使得

$$f(b)-f(a)=f'[a+\theta(b-a)](b-a).$$

(2) 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上的导数恒为零，那么 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数.

4.（柯西中值定理） 如果函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且对任一 $x\in(a,b)$，$F'(x)\neq 0$，那么在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

【注】 (1) 在柯西中值定理中，取 $F(x)=x$ 即得拉格朗日中值定理.

(2) 不要错误地认为柯西中值定理是对函数 $f(x)$，$F(x)$ 分别用拉格朗日中值定理

$$f(b)-f(a)=f'(\xi_1)(b-a),\quad F(b)-F(a)=F'(\xi_2)(b-a).$$

后相除的结果，因为这里的中间值 ξ_1，ξ_2 不一定相同.

5.（泰勒中值定理） 如果函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的某个开区间 (a,b) 内具有直到 $(n+1)$ 阶的导数，则对任一 $x\in(a,b)$，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，这里 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值. 此公式也称为带有拉格朗日型余项的 n 阶泰勒公式.

(1) 当 $R_n(x)=o[(x-x_0)^n]$ 时，上式称为带佩亚诺型余项的 n 阶泰勒公式.

(2) 在泰勒公式中，如果取 $x_0=0$，则 ξ 在 0 与 x 之间，此时可令 $\xi=\theta x(0<\theta<1)$. 下面两公式分别称为**带拉格朗日型余项的 n 阶麦克劳林**(Maclaurin)**公式和带佩亚诺型余项的 n 阶麦克劳林公式**：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}(0<\theta<1),$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n).$$

【注】 (1) 在用带佩亚诺型余项的 n 阶泰勒公式时，$f(x)$ 的可导性只要假定到 n 阶即可.

(2) 在需要用到泰勒公式时，必须要搞清楚三点：展开的基点；展开的阶数；余项的形式. 其中余项的形式，一般在求极限时用的是带佩亚诺余项的泰勒公式，在证明题时用的是带拉格朗日余项的泰勒公式. 基点和阶数，要根据具体的问题来确定.

6. 常见函数的带佩亚诺余项的麦克劳林公式

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n}),$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n),$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

二、补充公式与结论

1. 推广的罗尔(Rolle)定理

如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导，在区间端点处的单侧极限存在且相等，即 $f(a+0) = f(b-0)$，那么在 (a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$，使得 $f'(\xi) = 0$.

2. 导数零点定理及推论 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'_+(a)f'_-(b) < 0$，则至少存在一个 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

【注】 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导，且 $f'(x) \neq 0$，则 $f'(x)$ 在 (a,b) 内保持定号.

三、与本章例题有关的其他内容

积分中有关的定理见第三章；闭区间上连续函数有关中间值的定理见第一章.

例题分析

一、证明存在 ξ 使 $f(\xi) = 0$

基本思路：1. 若 $f(x)$ 满足：在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)f(b) < 0$. 用零点定理等式得证.

2. 若 $f(x)$ 不满足零点定理，可令 $F'(x) = f(x)$，验证 $F(x)$ 在某 $[a,b]$ 上满足罗尔定理.

【例 1】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(x) > 0$，证明存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x = \int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

解题思路 令 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \int_x^b f(t)\mathrm{d}t$，验证 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足零点定理的条件.

证明 令 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \int_x^b f(t)\mathrm{d}t$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且

$$F(a)F(b)=\left[-\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right]\int_a^b f(t)\mathrm{d}t<0,$$

故由连续函数的零点定理知：在(a,b)内存在ξ，使得$F(\xi)=0$，即$\int_a^{\xi}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\xi}^b f(x)\mathrm{d}x$.

而$\int_a^{\xi}f(x)\mathrm{d}x+\int_{\xi}^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，

所以$\int_a^{\xi}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\xi}^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

【评注】　实际上，$F'(x)=2f(x)>0$，满足题中的ξ是唯一的.

【例 2】　设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，证明存在$\xi\in(a,b)$使得

$$g(\xi)\int_a^{\xi}f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_{\xi}^b g(x)\mathrm{d}x.$$

解题思路　令$F(x)=g(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-f(x)\int_x^b g(t)\mathrm{d}t$，则$F(a)=-f(a)\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$，

$F(b)=g(b)\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$，显然$F(a),F(b)$的符号无法确定，零点定理失效.

再令$F'(x)=g(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-f(x)\int_x^b g(t)\mathrm{d}t=\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\int_b^x g(t)\mathrm{d}t\right)'$，可取辅助函数$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\int_b^x g(t)\mathrm{d}t$.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

证明　令$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\int_b^x g(t)\mathrm{d}t$，

$F(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导且$F(a)=F(b)=0$.

由罗尔定理，存在$\xi\in(a,b)$使得$F'(\xi)=0$，即

$$g(\xi)\int_a^{\xi}f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_{\xi}^b g(x)\mathrm{d}x.$$

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

【例 3】　设实数$a_1,a_2,\cdots,a_n$满足关系式$a_1-\frac{a_2}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{a_n}{2n-1}=0$，证明方程$a_1\cos x+a_2\cos 3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x=0$在$(0,\frac{\pi}{2})$内至少有一实根.

解题思路　令$f(x)=a_1\cos x+a_2\cos 3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x$，只要证明存在$\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$使得$f(\xi)=0$即可，但$f(x)$在$[0,\frac{\pi}{2}]$不满足零点定理的条件. 因而可构造辅助函数

$$f'(x)=a_1\cos x+a_2\cos 3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x,$$

积分一次，令$f(x)=a_1\sin x+\frac{a_2}{3}\sin 3x+\cdots+\frac{a_n}{2n-1}\sin(2n-1)x$.

证明　令$f(x)=a_1\sin x+\frac{a_2}{3}\sin 3x+\cdots+\frac{a_n}{2n-1}\sin(2n-1)x$，$f(x)$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上连续，在$(0,\frac{\pi}{2})$内可导，且$f(0)=0$，$f(\frac{\pi}{2})=a_1-\frac{a_2}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{a_n}{2n-1}=0$.

$f(x)$ 在$[0,\frac{\pi}{2}]$上满足罗尔定理的条件，存在 $\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$ 使得 $f'(\xi)=0$，即

方程 $a_1\cos x+a_2\cos 3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x=0$ 在$(0,\frac{\pi}{2})$内至少有一实根.

二、讨论方程根的个数及范围

基本思路：1. 对方程同解变形为 $f(x)=0$，使得求导 $f'(x)$ 容易，判断 $f'(x)$ 的符号方便；若方程中有参数，尽量分离参数；

2. 求出 $f(x)$ 的单调区间，在每一个单调区间内方程 $f(x)=0$ 至多有一个实根；

3. 用零点定理判断每一个单调区间内根的存在性.

【例 4】 证明方程 $\ln x=\frac{x}{e}-\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx$ 在区间$(0,+\infty)$内有且仅有两个不同的实根.

积分$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx$为一常数，可先计算出来(事实上，只需知道其大于零即可).

解 因为 $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx=\int_0^{\pi}\sqrt{2}\sin x\,dx=2\sqrt{2}$，原方程变形为

$$\ln x=\frac{x}{e}-2\sqrt{2}.$$

令 $F(x)=\frac{x}{e}-2\sqrt{2}-\ln x$，则 $F'(x)=\frac{1}{e}-\frac{1}{x}$. 令 $F'(x)=0$，得 $x=e$.

当 $0<x<e$ 时，$F'(x)<0$，$F(x)$ 严格单调减少；当 $e<x<+\infty$ 时，$F'(x)>0$，$F(x)$ 严格单调增加. 因此，$F(x)$ 在区间$(0,e)$和$(e,+\infty)$内分别至多有一个零点.

又 $F(e^{-3})>0$，$F(e)=-2\sqrt{2}<0$，$F(e^4)>0$. 由闭区间上连续函数的零点存在定理知，$F(x)$ 在区间(e^{-3},e)及(e,e^4)内分别至少有一个零点.

综上所述，方程 $\ln x=\frac{x}{e}-\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx$ 在区间$(0,+\infty)$内有且仅有两个不同的实根.

【评注】 在实际解题时可画出函数的草图，通过分析函数图形的单调区间和极值，最终确定零点的范围. 本书第 4 页中关于单调性的定义用的就是严格不等号，本题中用了“严格单调增加”、“严格单调减少”是为了强调而已.

【例 5】 试确定方程 $e^x=ax^2(a>0)$ 的根的个数，并指出每个根所在的范围.

若直接令 $f(x)=e^x-ax^2$，$f'(x)$ 的符号不易判断，因而先把方程同解变形，再作辅助函数，特别注意分离参数 a.

解 显然 $x=0$ 不是方程的根，于是方程可化为等价方程：$\frac{e^x}{x^2}=a$.

令 $f(x)=\frac{e^x}{x^2}-a$，由 $f'(x)=\frac{x-2}{x^3}\cdot e^x=0$ 得 $x=2$.

当 $0<x<2$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调下降；当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调上升. 故 $x=2$ 为极小值点，且极小值为 $f(2)=\frac{e^2}{4}-a$. 此时，$f(x)=\frac{e^x}{x^2}-a$ 在$(0,+\infty)$

微信公众号【顶尖考研】

内有 0 个，1 个，2 个根分别对应于 $f(2)>0$，$f(2)=0$，$f(2)<0$.

当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调增加，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-a$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=+\infty$. 此时，对任何正数 $a>0$，$f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}-a$ 在 $(-\infty,0)$ 内有且仅有一个根.

因此，(1) 当 $0<a<\dfrac{e^2}{4}$（即 $f(2)>0$）时，原方程只有一个根 $x_1\in(-\infty,0)$；

(2) 当 $a=\dfrac{e^2}{4}$（即 $f(2)=0$）时，原方程有两个根 $x_1\in(-\infty,0)$，$x_2=2$；

(3) 当 $a>\dfrac{e^2}{4}$（即 $f(2)<0$）时，原方程有三个根 $x_1\in(-\infty,0)$，$x_2\in(0,2)$，$x_3\in(2,+\infty)$.

【评注】 1. 方程可化为等价方程：$e^{-x}x^2=\dfrac{1}{a}$，构造辅助函数 $f(x)=e^{-x}x^2-\dfrac{1}{a}$；

2. 本题还可有其他形式：如方程 $e^x=ax^2(a>0)$ 有三个根，求 a 的范围；曲线 $y=e^x$ 与 $y=ax^2(a>0)$ 有三个交点，求 a 的范围等.

【例 6】 求方程 $k\arctan x-x=0$ 不同实根的个数，其中 k 为参数.

解题思路 构造辅助函数 $f(x)=k\arctan x-x$，利用零点定理及函数的单调性判断根的个数. 若本题仍然分离参数 k，则 $f'(x)$ 较复杂，也不易判断符号.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

解 显然 $x=0$ 一定是方程的根.

令 $f(x)=k\arctan x-x$，因 $f(x)$ 是奇函数，只考虑 $x>0$ 的情形. 易得

$$f'(x)=\frac{k}{1+x^2}-1=\frac{k-1-x^2}{1+x^2}.$$

(1) 当 $k\leqslant1$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 单调递减，所以 $x>0$ 无实根.

(2) 当 $k>1$ 时，$0<x<\sqrt{k-1}$，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{k-1})$ 上单调递增，$\sqrt{k-1}<x$，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(\sqrt{k-1},+\infty)$ 单调递减，且 $f(0)=0$，$f(\sqrt{k-1})>0$，$f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$. 所以，方程在 $(\sqrt{k-1},+\infty)$ 内有一实根.

综上所述：当 $k\leqslant1$ 时，方程只有一实根 $x=0$；当 $k>1$ 时，方程有三个实根.

【评注】 关于方程根的问题中，若含有参数一定要讨论参数的取值. 另外，本题中还涉及推广的零点定理.

【例 7】 已知方程 $\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}=k$ 在区间 $(0,1)$ 内有实根，确定常数 k 的取值范围.

解题思路 本题是方程有根的逆问题，即已知方程有根，反求方程中未知参数的取值范围. 这类问题一般还是从讨论函数的性态入手.

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

解 令 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}-k$，$x\in(0,1]$，则

$$f'(x)=-\frac{1}{(1+x)\ln^2(1+x)}+\frac{1}{x^2}=\frac{(1+x)\ln^2(1+x)-x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}.$$

显然，当 $x>0$ 时，$x^2(1+x)\ln^2(1+x)>0$.

于是，记 $g(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$，则

$$g'(x)=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x,$$

$$g''(x)=\frac{2\ln(1+x)}{1+x}+\frac{2}{1+x}-2=\frac{2[\ln(1+x)-x]}{1+x}.$$

当 $x\in(0,1]$ 时，$g''(x)<0$，故 $g'(x)$ 单调下降.

于是，当 $x\in(0,1]$ 时，有 $g'(x)<g'(0)=0$，从而 $g(x)$ 单调下降.

故 $g(x)<g(0)=0$，即 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内单调下降. 又

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}-k\right)=\frac{1}{2}-k,f(1)=\frac{1}{\ln 2}-1-k,$$

所以原方程在区间 $(0,1)$ 内有实根当且仅当 $\frac{1}{2}-k>0$，且 $f(1)=\frac{1}{\ln 2}-1-k<0$，即常数 k 的取值范围为 $\left(\frac{1}{\ln 2}-1,\frac{1}{2}\right)$.

三、证明存在 ξ，使 $f^{(n)}(\xi)=0(n=1,2,\cdots)$

基本思路：1. 函数 $f^{(n-1)}(x)$ 用费马定理或罗尔定理；

2. 函数 $f^{(k)}(x)(k<n-1)$ 多次用罗尔定理.

【例 8】 设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$，$f(3)=1$，证明存在一个 $\xi\in(0,3)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

解题思路 考虑 $f(x)$ 在某区间上用罗尔定理，由连续函数的性质存在 $\eta\in[0,2]$，使得 $f(\eta)=\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$，$f(x)$ 在 $[\eta,3]$ 上用罗尔定理.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

证明 因为 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且在 $[0,2]$ 上必有最大值 M 和最小值 m，于是

$$m\leqslant f(0)\leqslant M,m\leqslant f(1)\leqslant M,m\leqslant f(2)\leqslant M.$$

故

$$m\leqslant\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\leqslant M.$$

由介值定理知，至少存在一点 $\eta\in[0,2]$，使

$$f(\eta)=\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1.$$

因为 $f(\eta)=1=f(3)$，且 $f(x)$ 在 $[\eta,3]$ 上连续，在 $(\eta,3)$ 内可导，所以由罗尔定理知，必存在 $\xi\in(\eta,3)\subset(0,3)$，使 $f'(\xi)=0$.

【评注】 介值定理、微分中值定理与积分中值定理都是常考知识点，且一般是结合起来考. 本题是典型的结合介值定理与微分中值定理的情形.

【例 9】 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内具有二阶导数且 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{\cos\pi x}=0$，$2\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=f(2)$，证明存在 $\xi\in(0,2)$ 使得 $f''(\xi)=0$.

证明 由 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{\cos\pi x}=0$ 得 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=0$，进而

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{\cos\pi x}\frac{\cos\pi x}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{\cos\pi x}\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{-\pi\sin\pi x}{1}=0.$$

再由 $2\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\mathrm{d}x = f(2)$，用积分中值定理 $\exists \xi_1 \in \left[\frac{1}{2},1\right]$，使得 $2f(\xi_1)\left(1-\frac{1}{2}\right) = f(2)$，即 $f(\xi_1) = f(2)$.

在 $[\xi_1,2]$ 上应用罗尔定理，$\exists \xi_2 \in (\xi_1,2)$，使 $f'(\xi_2) = 0$.

再在 $\left[\frac{1}{2},\xi_2\right]$ 上对 $f'(x)$ 应用罗尔定理，知 $\exists \xi \in \left(\frac{1}{2},\xi_2\right) \subset (0,2)$，使 $f''(\xi) = 0$.

四、证明存在 ξ，使 $G(\xi, f(\xi), f'(\xi)) = 0$

基本思路：1. 原函数法或常微分方程法（用罗尔定理），具体步骤如下：

(1) ξ 换为 x，$G(x,f(x),f'(x)) = 0$；

(2) 恒等变形，便于积分；(3) 积分或解微分方程；

(4) 分离常数 $F(x,f(x)) = C$，$F(x,f(x))$ 即为辅助函数.

2. 直接用拉格朗日中值定理和柯西中值定理（一般说所证式子中 ξ 与 a,b 可分离）.

【例 10】 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $g'(x) \neq 0 (x \in (a,b))$，求证存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $\frac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

解题思路

1. ξ 换为 x，$\frac{f(a)-f(x)}{g(x)-g(b)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$；

2. 变形 $f(a)g'(x)+g(b)f'(x)-f'(x)g(x)-f(x)g'(x) = 0$；

3. 积分并分离常数 $f(a)g(x)+g(b)f(x)-f(x)g(x) = C$.

证明 令 $F(x) = f(a)g(x)+g(b)f(x)-f(x)g(x)$，

$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a) = F(b) = f(a)g(b)$.

由罗尔定理知，$\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $F'(\xi) = 0$，即 $\frac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

【例 11】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，且

$$f(1) = k\int_0^{\frac{1}{k}} x\mathrm{e}^{1-x} f(x)\mathrm{d}x, k > 1,$$

证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi) = (1-\xi^{-1})f(\xi)$.

解题思路

1. ξ 换为 x，$f'(x) = (1-x^{-1})f(x)$；

2. 变形 $\frac{f'(x)}{f(x)} = 1-\frac{1}{x}$；

3. 两边积分 $\ln f(x) = x - \ln x + \ln C$；

4. 分离常数 $\ln \frac{xf(x)}{\mathrm{e}^x} = \ln C$，即 $x\mathrm{e}^{-x}f(x) = C$，可令辅助函数 $F(x) = x\mathrm{e}^{-x}f(x)$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

证明 由 $f(1) = k\int_0^{\frac{1}{k}} x\mathrm{e}^{1-x} f(x)\mathrm{d}x$ 及积分中值定理知，至少存在一点 $\xi_1 \in [0,\frac{1}{k}] \subset [0,1)$，使得 $f(1) = \xi_1 \mathrm{e}^{1-\xi_1} f(\xi_1)$，即　$1 \times \mathrm{e}^{-1} f(1) = \xi_1 \mathrm{e}^{-\xi_1} f(\xi_1)$.

令 $F(x) = x\mathrm{e}^{-x}f(x)$，则 $F(x)$ 在 $[\xi_1,1]$ 满足罗尔定理，在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，有 $F'(\xi) = 0$，亦是 $f'(\xi) = (1-\xi^{-1})f(\xi)$.

【例 12】 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $f(a)=f(b)=\lambda$，证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)+f(\xi)=\lambda$.

解题思路
1. ξ 换为 x，$f'(x)+f(x)=\lambda$，这是关于 $f(x)$ 的一阶线性微分方程；
2. 解微分方程 $f'(x)+f(x)=\lambda$ 得 $f(x)=e^{-x}(\lambda e^{x}+C)$；
3. 分离常数$[f(x)-\lambda]e^{x}=C$，可令辅助函数 $F(x)=[f(x)-\lambda]e^{x}$.

证明 令 $F(x)=[f(x)-\lambda]e^{x}$，$F(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $F(a)=F(b)=0$.

$F(x)$ 在$[a,b]$上用罗尔定理，在$[a,b]$上至少存在一点 ξ，有 $F'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)+f(\xi)=\lambda.$$

【例 13】 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导$(0<a<b)$，求证：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=\xi\ln\dfrac{b}{a}f'(\xi)$.

解题思路 $f(b)-f(a)=\xi\ln\dfrac{b}{a}f'(\xi)$ 可变形为 $\dfrac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\xi f'(\xi)$，此式具备两个特点，一是 ξ 与 a,b 可分离，二是有柯西中值定理的形式. 可直接用柯西中值定理.

微信公众号【顶尖考研】(ID:dj668)

证明 令 $F(x)=\ln x$，$f(x)$，$F(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $F'(x)\neq 0$.

$f(x)$，$F(x)$ 在$[a,b]$上用柯西中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$ 有

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)},\text{即}\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\xi f'(\xi),$$

所以

$$f(b)-f(a)=\xi\ln\frac{b}{a}f'(\xi).$$

五、含有 $f''(\xi)$（或更高阶导数）的介值问题

基本思路：1. 原函数法（对 $f'(x)$ 仍用微分中值定理：罗尔定理，拉格朗日中值定理，柯西中值定理）；

2. 若题目中涉及到高阶导数，可考虑用泰勒公式.

【例 14】 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上二阶可导，且 $f(0)=f(1)$，试证至少存在一个 $\xi\in(0,1)$，使得

$$f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}.$$

解题思路 仍可用原函数法

1. ξ 换为 x，$f''(x)=\dfrac{2f'(x)}{1-x}$；

2. 变形 $\dfrac{f''(x)}{f'(x)}=\dfrac{2}{1-x}$；

3. 两边积分 $\ln f'(x)=-\ln(1-x)^2+\ln C$；

4. 分离常数 $f'(x)(1-x)^2=C$，可令辅助函数 $F(x)=f'(x)(1-x)^2$.

证明　由 $f(0)=f(1)$，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理的条件，至少存在一个 $\xi_1\in(0,1)$，使得 $f'(\xi_1)=0$.

令 $F(x)=f'(x)(1-x)^2$，$F(\xi_1)=F(1)=0$，$F(x)$ 在 $[\xi_1,1]$ 上用罗尔定理，至少存在一个 $\xi\in(\xi_1,1)\subset(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}.$$

【例 15】　设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$. 证明：在 $(-1,1)$ 内存在一点 ξ，使得 $f'''(\xi)=3$.

解题思路　已给条件中有函数值和一阶导数值的信息，而要证的是三阶导数的式子，这就是所谓的涉及跨阶导数的问题，一般来说要用泰勒公式.

证明　由泰勒公式得　$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi)x^3$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间，$x\in[-1,1]$.

分别令 $x=-1$ 和 $x=1$，并结合已知条件，得

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\xi_1),\ -1<\xi_1<0$$

$$1=f(1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\xi_2),\ 0<\xi_2<1$$

两式相减，可得

$$\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}=3,$$

进而由介值定理可证存在 $\xi\in[\xi_1,\xi_2]\subset(-1,1)$ 有 $f'''(\xi)=\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}=3$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

六、双介值问题 $F(\xi,\eta,\cdots)=0$

基本思路：1. 若两个介值相互间没有直接的约束，可用一次后再用一次中值定理；

2. 若两个介值相互间有直接的约束，可同时两次用拉格朗日中值定理或柯西中值定理.

【例 16】　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$0<a<b$，求证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\frac{f'(\eta)}{2\eta}(a+b)$.

解题思路　题中所涉及的两个中间值相互间没有制约，因而可两次用拉格朗日中值定理.

证明　$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上用拉格朗日中值定理，则至少存在一个 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

只要再证存在 $\eta\in(a,b)$ 使得 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}(a+b)$，即

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}.$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

函数 $f(x)$ 和 x^2 在 $[a,b]$ 上用柯西中值定理，等式得证.

【例 17】 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$，证明：(1) 存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$；

(2) 存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$ 使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

解题思路 第一问显然用闭区间上连续函数的介值定理；第二问为双介值问题，两个介值有制约，可考虑同时用两次拉格朗日中值定理，但应注意利用第一问已得结论.

解 (1) 令 $F(x)=f(x)-1+x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $F(0)=-1<0$，$F(1)=1>0$，于是由零点定理知，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=1-\xi$.

(2) 在 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 上对 $f(x)$ 分别应用拉格朗日中值定理，知存在两个不同的点 $\eta\in(0,\xi)$，$\zeta\in(\xi,1)$，使得 $f'(\eta)=\dfrac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}$，$f'(\zeta)=\dfrac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}$，于是

$$f'(\eta)f'(\zeta)=\frac{f(\xi)}{\xi}\cdot\frac{1-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{1-\xi}{\xi}\cdot\frac{\xi}{1-\xi}=1.$$

【评注】 中值定理的证明问题是历年出题频率最高的部分，而将中值定理与零点定理或积分中值定理结合起来命题又是最常见的命题形式.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 18】 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有 2 阶导数，且 $f(1)>0$，$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$. 证明：

(1) 方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根；

(2) 方程 $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根.

解题思路 (1) 用零点定理；(2) 利用原函数法构造辅助函数，再用中值定理.

$f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 变形为 $\dfrac{f''(x)}{f'(x)}=-\dfrac{f'(x)}{f(x)}$，两边积分 $\ln f'(x)=-\ln f(x)+\ln C$，分离常数 $f(x)f'(x)=C$，辅助函数即为 $F(x)=f(x)f'(x)$.

证明 (1) 由 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$ 与极限的保号性可知，存在 $c\in(0,1)$，使得 $f(c)<0$.

又 $f(1)>0$，在 $[c,1]$ 上用零点定理，至少存在一个 $\eta\in(c,1)$，使得 $f(\eta)=0$，即方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根.

(2) 由函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可导，从而一定连续，以及 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，得 $f(0)=0$.

由 (1) 得 $f(x)$ 在区间 $[0,\eta]$ 上满足罗尔定理条件，所以存在 $\xi\in(0,\eta)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

令 $F(x)=f(x)f'(x)$，显然 $F(0)=F(\xi)=F(\eta)=0$. 对函数 $F(x)$ 分别在区间 $[0,\xi]$ 及 $[\xi,\eta]$ 上用罗尔定理得，至少存在两个不同的 $\xi_1\in(0,\xi)$ 及 $\xi_2\in(\xi,\eta)$，使得

$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$，即

$$f(\xi_1)f''(\xi_1)+[f'(\xi_1)]^2=0 \text{ 及 } f(\xi_2)f''(\xi_2)+[f'(\xi_2)]^2=0.$$

因此，方程 $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根.

【评注】 此题 (2) 表面上是关于方程根的问题，实质上是双介值的证明题，要善于看到问

题的本质.

七、不等式的证明

基本思路：1. 先对不等式进行等价变形，然后再构造辅助函数；

2. 不等式的证明方法主要有：利用单调性、极值、凹凸性、微分中值定理及转化数字不等式为函数不等式等.

类型 1　利用函数的单调性

结论：若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，$f(a+0)$，$f(b-0)$ 存在，则

$f'(x)>0\Rightarrow f(a+0)<f(x)<f(b-0)$；$f'(x)<0\Rightarrow f(a+0)>f(x)>f(b-0)$.

【注】 1. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，在 $[a,b]$ 上连续，则

$f'(x)>0\Rightarrow f(a)<f(x)<f(b)$；$f'(x)<0\Rightarrow f(a)>f(x)>f(b)$.

2. 结论中 $f'(x)>0(<0)$ 可改为 $f'(x)\geqslant 0(\leqslant 0)$，且 $f'(x)=0$ 的点只有有限个.

【例 19】 设 $0<x<1$，求证：$xe^{-x}>\dfrac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$.

解题思路　直接取辅助函数 $f(x)=xe^{-x}-\dfrac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$ 求导会很麻烦，不可行，先进行不等式的等价变形.

证明　$xe^{-x}>\dfrac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}\Leftrightarrow \ln x-x>-\ln x-\dfrac{1}{x}$.

令 $f(x)=2\ln x-x+\dfrac{1}{x}$，则 $f'(x)=-\dfrac{(x-1)^2}{x^2}<0$，于是 $f(x)>f(1)=0$.

从而有 $\ln x-x>-\ln x-\dfrac{1}{x}$，即

$$xe^{-x}>\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}},\ 0<x<1.$$

【评注】 也可用如下解法：$xe^{-x}>\dfrac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}\Leftrightarrow x^2e^{-x+\frac{1}{x}}-1>0$，令 $f(x)=x^2e^{-x+\frac{1}{x}}-1$.

【例 20】 求证 $\dfrac{\tan x}{x}>\dfrac{x}{\sin x}$，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

解题思路　在用单调性证明不等式时，常将不等式变形以方便求导运算.

证明　显然，$\dfrac{\tan x}{x}>\dfrac{x}{\sin x}\Leftrightarrow \sin x\cdot\tan x-x^2>0$.

于是，令 $f(x)=\sin x\cdot\tan x-x^2$，则 $f'(x)=\sin x+\tan x\cdot\sec x-2x$，

$f''(x)=\cos x+\sec^3 x+\tan^2 x\cdot\sec x-2$，

$f'''(x)=-\sin x+5\sec^3 x\cdot\tan x+\tan^3 x\cdot\sec x$

$=\sin x(5\sec^4 x-1)+\tan^3 x\cdot\sec x>0$，$x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$.

因此，当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f''(x)$ 单调增加，$f''(x)>f''(0)=0$，故 $f'(x)$ 单调增加，

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

于是 $f'(x)>f'(0)=0$，即 $f(x)$ 单调增加，$f(x)>f(0)=0$.

所以 $$\frac{\tan x}{x}>\frac{x}{\sin x},\qquad 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

【评注】 若判断 $f'(x)$ 的符号困难，则可考虑求二阶，甚至三阶导数来递推确定. 当然，若此时无法确定导数符号，则说明此方法失效，应改用其他方法.

类型 2 利用函数的极值(最值)

基本思路：设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可能极值点 $x=x_0$ 唯一. 若 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的极小值点，必为最小值点，从而有 $f(x)\geqslant f(x_0)$；若 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的极大值点，必为最大值点，从而有 $f(x)\leqslant f(x_0)$.

【例 21】 设 $x<1$ 且 $x\neq 0$，证明 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\ln(1-x)}<1$.

解题思路 当 $x<1$ 且 $x\neq 0$ 时，$x\ln(1-x)<0$，对原不等式等价变形.

证明 原不等式等价于 $\ln(1-x)+x>x\ln(1-x)$.

令 $f(x)=\ln(1-x)+x-x\ln(1-x)$，则

$$f'(x)=\frac{1}{x-1}+1-\left[\ln(1-x)+\frac{x}{x-1}\right]=-\ln(1-x)\begin{cases}<0, & -\infty<x<0,\\ >0, & 0<x<1.\end{cases}$$

所以，$f(x)$ 在 $x=0$ 处取到最小值，所以 $f(x)>f(0)=0$，即

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln(1-x)}<1.$$

微信公众号【贾考研】(ID：djky66)

【例 22】 试证：当 $x>0$ 时，$(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$.

证明 【方法一】 令 $f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$，$f(1)=0$. 求导得

$$f'(x)=2x\ln x-x+2-\frac{1}{x},\ f'(1)=0.$$

$$f''(x)=2\ln x+1+\frac{1}{x^2},\ f'''(x)=\frac{2(x^2-1)}{x^3}.$$

易知，当 $0<x<1$ 时，$f'''(x)<0$；当 $1<x$ 时，$f'''(x)>0$，

因此 $x=1$ 为 $f''(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的最小值点，

即对 $x>0$ 有 $f''(x)\geqslant f''(1)=2>0$，从而 $f'(x)$ 单调增加. 注意到 $f'(1)=0$，故

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<f'(1)=0$；当 $1<x$ 时，$f'(x)>f'(1)=0$，

因此 $x=1$ 为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的最小值点，即对 $x>0$ 有 $f(x)\geqslant f(1)=0$，即

$$(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2.$$

【方法二】 先对要证的不等式作适当变形.

当 $x>0$ 时，$(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$ 等价于下面两种情况(注意等号在 $x=1$ 时成立)：

当 $0<x<1$ 时，$\ln x<\dfrac{x-1}{x+1}$；当 $1<x<+\infty$ 时，$\ln x>\dfrac{x-1}{x+1}$.

于是令 $f(x)=\ln x-\dfrac{x-1}{x+1}$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+1}{x(x+1)^2}>0$，$x>0$.

又 $f(1)=0$，可见当 $0<x<1$ 时，$f(x)<0$；当 $1<x<+\infty$ 时，$f(x)>0$.

从而当 $x>0$ 时，有

$$(x^2-1)f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2\geqslant 0(\text{等号在 } x=1 \text{ 时成立}),$$

故

$$(x^2-1)\ln x\geqslant (x-1)^2(x>0).$$

类型 3　利用曲线的凹凸性

基本思路： 若 $f''(x)>0$，$x\in(a,b)$，且当 $x\in[a,b]$ 时，$f'(x)$ 存在. 则 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上单增，进一步有 $f'(a)<f'(x)<f'(b)$. 但由 $f'(a)<0$ 或 $f'(b)>0$ 无法导出 $f'(x)$ 是定号的，且 $f'(x)=0$ 的点无法确定. 此时可由曲线的凹凸性得不等式

$$f(x)>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)(\text{曲线在切线之上 } x_0\in(a,b)),$$

或

$$f(x)<f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)(\text{曲线在割线之下}).$$

特别地，当 $f(a)=f(b)=0$ 时，有 $f(x)<0$，$a<x<b$.

类似地，可讨论 $f''(x)<0$ 的情形.

【例 23】　证明：当 $0<x<\pi$ 时，有 $\sin\frac{x}{2}>\frac{x}{\pi}$.

证明　设 $f(x)=\sin\frac{x}{2}-\frac{x}{\pi}$，则

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{\pi},\quad f''(x)=-\frac{1}{4}\sin\frac{x}{2}<0(0<x<\pi).$$

曲线是凸的. 又 $f(0)=f(\pi)=0$，故 $f(x)>0$ $(0<x<\pi)$，即 $\sin\frac{x}{2}>\frac{x}{\pi}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【评注】　本题也可令 $f(x)=\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x}-\dfrac{1}{\pi}$，用单调性证明.

【例 24】　设 $a>0$，$b>0$，证明不等式

$$a\ln a+b\ln b\geqslant(a+b)[\ln(a+b)-\ln 2].$$

证明　令 $f(x)=x\ln x$，则 $f'(x)=\ln x+1$，$f''(x)=\frac{1}{x}>0$ $(x>0)$，即曲线 $y=f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内是凹的，故对任意 $a>0$，$b>0$，有

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

代入得

$$\frac{a\ln a+b\ln b}{2}\geqslant\frac{a+b}{2}\ln\frac{a+b}{2},$$

即

$$a\ln a+b\ln b\geqslant(a+b)[\ln(a+b)-\ln 2].$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

类型 4　利用微分中值定理

基本思路： 1. 若所证不等式中出现函数值差的形式，可考虑用拉格朗日中值定理；

2. 若所证不等式中出现高阶导数，可考虑用泰勒公式.

【例 25】 证明：对任意正整数 n，都有 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$ 成立.

解题思路 因为 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n$，可在区间 $[n,n+1]$ 上用拉格朗日定理.

证明 根据拉格朗日定理，存在 $\xi\in(n,n+1)$，使得

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n=\frac{1}{\xi},$$

所以

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{\xi}<\frac{1}{n}.$$

【评注】 令 $x=\frac{1}{n}$ 也可用单调性证明函数不等式 $\frac{x}{x+1}<\ln(1+x)<x(0<x<1)$.

【例 26】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值等于 -1，试证：至少存一点 $\xi\in(0,1)$，使 $f''(\xi)\geqslant 8$.

解题思路 本题条件中给出了函数值的信息，而要证不等式涉及二阶导数，中间跨过一阶导数，应考虑用泰勒中值定理. 关键是基点应选最小值点.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

证明 由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值等于 -1 以及费马定理知，存在 $a\in(0,1)$，使得 $f(a)=-1$，$f'(a)=0$. 将 $f(x)$ 在 $x=a$ 点泰勒展开

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2=-1+\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2,\xi\text{在}a\text{与}x\text{之间}.$$

令 $x=0,x=1$ 得

$$0=-1+\frac{f''(\xi_1)}{2}a^2,0<\xi_1<a, \quad ①$$

$$0=-1+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-a)^2,a<\xi_2<1, \quad ②$$

若 $0<a<\frac{1}{2}$，则由 ① 得 $f''(\xi_1)>8$，取 $\xi=\xi_1$；

若 $\frac{1}{2}\leqslant a<1$，则由 ② 得 $f''(\xi_2)\geqslant 8$，取 $\xi=\xi_2$.

【例 27】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内 $(ab<0)$ 有 $f''(x)<0$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-\cos x}{\sin x^2}=\frac{1}{4}$，证明 $f(x)\leqslant 1$.

证明 由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-\cos x}{\sin x^2}=\frac{1}{4}$，得 $f(0)=1,f'(0)=0$.

用泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2=1+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2,$$

因为 $f''(\xi)<0$，所以 $f(x)\leqslant 1$.

【例 28】 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，则

(A) 当 $f'(x)<0$ 时，$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.　　(B) 当 $f''(x)<0$ 时，$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.

(C) 当 $f'(x)>0$ 时，$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.　　(D) 当 $f''(x)>0$ 时，$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.

解 考虑 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处的泰勒公式：

$$f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$（其中 ξ 在 x 与 $\frac{1}{2}$ 之间）.

对 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上积分得

$$\begin{aligned}0=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x&=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^1 f''(\xi)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x\\&=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\int_0^1 f''(\xi)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

所以，当 $f''(x)>0$ 时，$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\int_0^1 f''(\xi)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x<0$. 选(D).

【评注】 本题的关键要想到用泰勒中值定理.

类型 5　转化常数不等式为函数不等式

基本思路：将常数不等式转化为函数不等式，是证明不等式的一种重要方法，转化为函数不等式后，可方便利用一些常用的方法，如单调性、极值与最值、凹凸性、中值定理等来证明. 此方法一般是将不等式中的一个特殊常数或字母变换为变量 x，从而化成函数的不等式问题.

【例 29】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可微且 $f(0)=0$，$0<f'(x)\leqslant 1$，求证

$$\left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)^2\geqslant\int_0^1 f^3(t)\mathrm{d}t.$$

解题思路　将积分上限的特殊数字“1”变换为变量 x，证明函数不等式 $\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2\geqslant\int_0^x f^3(t)\mathrm{d}t$ 在 $[0,1]$ 上成立.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

证明 由题设条件知，当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)>0$.

令　$F(x)=\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2-\int_0^x f^3(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=f(x)\left[2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)\right]$，

又令 $G(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)$，则

$$G'(x)=2f(x)-2f(x)f'(x)=2f(x)[1-f'(x)]\geqslant 0.$$

于是 $G(x)$ 单调不减. 当 $x\in(0,1]$ 时，$G(x)\geqslant G(0)=0$. 从而 $F'(x)\geqslant 0$，$F(x)\geqslant F(0)=0$，$x\in(0,1]$. 故 $F(1)\geqslant 0$，即

$$\left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)^2\geqslant\int_0^1 f^3(t)\mathrm{d}t.$$

【例 30】 设 $e<a<b<e^2$，证明 $\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$.

解题思路 根据要证不等式的形式，可考虑用转化为函数不等式用单调性证明，也可以用拉格朗日中值定理证明.

证明 【方法一】 设 $\varphi(x)=\ln^2 x-\frac{4}{e^2}x$，则

$$\varphi'(x)=2\frac{\ln x}{x}-\frac{4}{e^2},\varphi''(x)=2\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

所以，当 $x>e$ 时，$\varphi''(x)<0$，故 $\varphi'(x)$ 单调减少，从而当 $e<x<e^2$ 时，

$$\varphi'(x)>\varphi'(e^2)=\frac{4}{e^2}-\frac{4}{e^2}=0,$$

$\varphi(x)$ 单调增加. 因此当 $e<x<e^2$ 时，$\varphi(b)>\varphi(a)$，代入得

$\ln^2 b-\frac{4}{e^2}b>\ln^2 a-\frac{4}{e^2}a$，即 $\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$.

【方法二】 对函数 $\ln^2 x$ 在 $[a,b]$ 上应用拉格朗日中值定理，得

$$\ln^2 b-\ln^2 a=\frac{2\ln\xi}{\xi}(b-a),a<\xi<b.$$

设 $\varphi(t)=\frac{\ln t}{t}$，则 $\varphi'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}$，当 $t>e$ 时，$\varphi'(t)<0$，$\varphi(t)$ 单调减少，从而 $\varphi(\xi)>\varphi(e^2)$，即 $\frac{\ln\xi}{\xi}>\frac{\ln e^2}{e^2}=\frac{2}{e^2}$，故 $\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$.

【评注】 本题也可设辅助函数为 $\varphi(x)=\ln^2 x-\ln^2 a-\frac{4}{e^2}(x-a)$，$e<a<x<e^2$，或 $\varphi(x)=\ln^2 b-\ln^2 x-\frac{4}{e^2}(b-x)$，$e<x<b<e^2$，再用单调性进行证明.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

数学家的小故事

阿基米德有一个怪癖，在他坐在炉火旁的时候，会把炉灰推平，在那上面画图。按照当地的习惯，出浴后他在身上涂抹橄榄油，但是这以后他会忘了穿衣服，而就浸在用指甲在自己涂了油的皮肤上画图。

第三章　一元函数积分学

考点与要求

了解　定积分的概念和基本性质，定积分中值定理，反常积分收敛的比较判别法.

理解　原函数与不定积分的概念，积分上限的函数，反常积分的概念.

会　求积分上限函数的导数，利用定积分计算平面图形的面积、旋转体的体积和函数的平均值，利用定积分求解简单的经济应用问题，计算反常积分.

掌握　不定积分的基本性质和基本积分公式，不定积分的换元积分法和分部积分法，牛顿-莱布尼茨公式以及定积分的换元积分法和分部积分法.

§1　不定积分

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

内容精讲

一、不定积分的概念与性质

1. 原函数与不定积分的定义

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在函数 $F(x)$，使得对任意 $x\in I$ 均有 $F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则其所有原函数为 $F(x)+C$，称 $F(x)+C$ 是 $f(x)$ 在 I 上的不定积分，记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$，即 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C(C$ 为任意常数$)$.

【注】 (1) 不定积分与区间相联系，比如，$\ln x,\ln|x|$ 均为 $\dfrac{1}{x}$ 的原函数，但前者为 $x>0$ 区间上的原函数，后者为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的原函数.

(2) 在计算不定积分的过程中不要遗漏积分常数 C.

(3) 对区间 $[a,b]$ 上任一连续函数 $f(x)$，有原函数 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，因此其不定积分可表示为

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+C.$$

2. 基本性质

(1) $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$　　或　　$\int \mathrm{d}f(x)=f(x)+C.$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)=f(x)$　　或　　$\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x.$

(3) $\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x(k$ 为非零常数$)$.

(4)$\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$.

【注】 积分与微分在某种意义上互为逆运算,即$\mathrm{d}\int\mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)=f(x)\mathrm{d}x$.

二、基本积分公式

(1)$\int k\mathrm{d}x=kx+C$ (k为常数),特别地$\int 0\mathrm{d}x=C$.

(2)$\int x^{\mu}\mathrm{d}x=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C(\mu\neq-1)$.

(3)$\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C$.

(4)$\int a^{x}\mathrm{d}x=\frac{a^{x}}{\ln a}+C,(a>0,a\neq1)$. 特别地$\int\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}+C$.

(5)$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2}}=\arctan x+C$.

(6)$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2}}}=\arcsin x+C$.

(7)$\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$.

(8)$\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$.

(9)$\int\sec^{2}x\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^{2}x}=\tan x+C$.

(10)$\int\csc^{2}x\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^{2}x}=-\cot x+C$.

(11)$\int\sec x\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$.

(12)$\int\csc x\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C$.

(13)$\int\sec x\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+C$.

(14)$\int\csc x\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C$.

(15)$\int\frac{1}{a^{2}+x^{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$ ($a>0$).

(16)$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$ ($a>0$).

三、三个积分方法

1. 第一换元积分法(凑微分法)

设$f(u)$具有原函数$F(u)$,$u=\varphi(x)$可导,则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)=\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C=F[\varphi(x)]+C.$$

【注】 在求不定积分时,被积函数不一定刚好表成了$f[\varphi(x)]\varphi'(x)$的形式,需要根据被积函数的特点,选择易于“积出来”的函数f及“凑”出中间变量$\varphi(x)$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

2. 第二换元积分法

设 $x=\varphi(t)$ 是单调的、可导的函数，并且 $\varphi'(t)\neq 0$，又设 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 具有原函数 $F(t)$，则有换元公式

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t=F(t)+C=F[\varphi^{-1}(x)]+C,$$

其中 $t=\varphi^{-1}(x)$ 是 $x=\varphi(t)$ 的反函数.

3. 分部积分法

设函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 具有连续导数，则有分部积分公式

$$\int uv'\mathrm{d}x=uv-\int u'v\mathrm{d}x \qquad \text{或} \qquad \int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u.$$

一般被积函数是两个不同类型函数相乘或只含有对数函数、反三角函数时，应考虑用分部积分法进行计算. 用分部积分法的关键是将被积表达式恰当地转换为 $v\mathrm{d}u$. u，v 的选取原则是：(1) v 要容易得到. (2) $\int v\mathrm{d}u$ 要比 $\int u\mathrm{d}v$ 容易积分.

【注】 使用分部积分法求不定积分时，有时会出现循环的情况，这时可将待求的不定积分当作未知量求出来，有时会引出递推关系式，这时可通过递推公式转化为最后易求出不定积分的情形.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

四、重要公式与结论

1. 有关原函数的结论

(1) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 存在原函数，且 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，而全体原函数可表示为 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+C$，$C$ 为任意常数. 不连续的函数也可能存在原函数. 如：

$$f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不连续，但其有原函数

$$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

(2) 初等函数在其定义区间上连续，因此一定存在此区间上的原函数，但其原函数不一定为初等函数. 例如 $\int \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$，$\int \sin x^2\mathrm{d}x$，$\int \dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$，$\int \dfrac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$ 等存在，但都不能表示成初等函数.

(3) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不连续，则 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 即使存在，甚至可导，也不一定是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的原函数.

(4) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有第一类间断点，由于导函数没有第一类间断点可知 $f(x)$ 一定没有原函数，即在 $[a,b]$ 上不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 不存在.

2. 补充积分公式(以下公式中常数 $a>0$).

(1) $\int \dfrac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+C$，　$\int \dfrac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right|+C.$

(2) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$，$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C.$

(3)$\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$.

(4)$\int \sqrt{x^2\pm a^2}\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C$.

3. 常用"凑"微分公式:

(1)$\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)(a\neq 0)$.

(2)$\int \frac{1}{x}f(\ln x)\mathrm{d}x=\int f(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)$.

(3)$\int f(ax^n+b)x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{na}\int f(ax^n+b)\mathrm{d}(ax^n+b)(a\neq 0,n\neq 0)$,

特别地$\int f(\frac{1}{x})\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\int f(\frac{1}{x})\mathrm{d}(\frac{1}{x})$, $\int \frac{1}{\sqrt{x}}f(\sqrt{x})\mathrm{d}x=2\int f(\sqrt{x})\mathrm{d}(\sqrt{x})$.

(4)$\int a^x f(a^x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln a}\int f(a^x)\mathrm{d}(a^x),(a>0,a\neq 1),\int \mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$.

(5)$\int \cos x\cdot f(\sin x)\mathrm{d}x=\int f(\sin x)\mathrm{d}(\sin x)$.

(6)$\int \sin x\cdot f(\cos x)\mathrm{d}x=-\int f(\cos x)\mathrm{d}(\cos x)$.

(7)$\int \sec^2 x\cdot f(\tan x)\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\cos^2 x}\cdot f(\tan x)\mathrm{d}x=\int f(\tan x)\mathrm{d}(\tan x)$.

(8)$\int \csc^2 x\cdot f(\cot x)\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\sin^2 x}\cdot f(\cot x)\mathrm{d}x=-\int f(\cot x)\mathrm{d}(\cot x)$.

(9)$\int \frac{1}{1+x^2}f(\arctan x)\mathrm{d}x=\int f(\arctan x)\mathrm{d}(\arctan x)$.

(10)$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(\arcsin x)\mathrm{d}x=\int f(\arcsin x)\mathrm{d}(\arcsin x)$.

(11)$\int \sec x\tan x\cdot f(\sec x)\mathrm{d}x=\int f(\sec x)\mathrm{d}(\sec x)$.

(12)$\int \csc x\cot x\cdot f(\csc x)\mathrm{d}x=-\int f(\csc x)\mathrm{d}(\csc x)$.

(13)$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}f(x)}{f(x)}=\ln|f(x)|+C$.

4. 常用的变量代换

(1) 三角代换

当被积函数含有

1° $\sqrt{a^2-x^2}$ 时,可令 $x=a\sin t,t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

2° $\sqrt{a^2+x^2}$ 时,可令 $x=a\tan t,t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

3° $\sqrt{-a^2+x^2}$ 时,可令 $x=a\sec t,t\in(0,\frac{\pi}{2})\cup(\pi,\frac{3\pi}{2})$.

(2) 根式代换

1° 当被积函数含有根式 $\sqrt[n]{ax+b}$ 或 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ 时,可直接令此根式为 t.

2° 当被积函数含有两种或两种以上的根式:$\sqrt[k]{ax+b},\cdots,\sqrt[l]{ax+b}$ 时,可直接令此根式为

微信公众号【顶尖考研】(ID:dky66)

$t=(ax+b)^{\frac{1}{n}}$,(其中 n 为各根指数的最小公倍数).

(3) **倒代换**

当被积函数分母的最高次幂高于分子的最高次幂时,可考虑作倒代换 $x=\frac{1}{t}$.

【注】 当被积函数含有根式 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 时,一般先配方,再作三角代换.当被积函数含有类似 $\sqrt{ae^{bx}+c}$ 时,可考虑直接作代换 $\sqrt{ae^{bx}+c}=t$.

例题分析

一、不定积分的概念和性质

【例 1】 下列等式中,正确的是

(A) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$.　　(B) $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)$.

(C) $\int \mathrm{d}f(x)=f(x)$.　　(D) $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$.

解题思路 本题考查不定积分的概念,以及微分与积分互为逆运算.

解 (B)(C) 中等式右端缺少常数 C;(D) 中等式右端缺少 $\mathrm{d}x$.答案应选(A).

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

【例 2】 若 $\int f'(x^2)\mathrm{d}x=x^5+C$,求 $f(x)$.

解题思路 等式两边求导得 $f'(x)$,再求不定积分可求得 $f(x)$.

解 由 $\int f'(x^2)\mathrm{d}x=x^5+C$,得 $f'(x^2)=5x^4$,

令 $x^2=t$,则 $f'(t)=5t^2$,从而 $f(x)=\int 5x^2\mathrm{d}x=\frac{5}{3}x^3+C$.

【例 3】 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数,$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,则

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时,$F(x)$ 必为偶函数.

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时,$F(x)$ 必为奇函数.

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时,$F(x)$ 必为周期函数.

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时,$F(x)$ 必为单调增函数.

解 【方法一】 $f(x)$ 的任一原函数可表示为 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$,且 $F'(x)=f(x)$.

若 $f(x)$ 为奇函数,则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数,从而 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$ 为偶函数.

答案应选(A).

【方法二】 令 $f(x)=1$,则取 $F(x)=x+1$,排除(B),(C);令 $f(x)=x$,则取 $F(x)=\frac{1}{2}x^2$,排除(D).故应选(A).

小结

涉及原函数与不定积分时，注意下面结论：

1. $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C, \mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$.

2. 设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，则

(1) $f(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 的任意原函数 $F(x)$ 为偶函数；

(2) $f(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 的原函数中只有一个为奇函数，即 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$；

(3) $f(x)$ 的任意原函数为周期函数 $\Rightarrow f(x)$ 为周期函数；

(4) $f(x)$ 为以 T 为周期的周期函数，且 $\int_0^T f(x)\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f(x)$ 的任意原函数是以 T 为周期的周期函数；

(5) 函数的单调性与其原函数的单调性之间没有逻辑上的因果关系.

3. 设连续的抽象函数 $f(x)$，考察 $f(x)$ 与其原函数 $F(x)$ 的奇偶性、周期性等问题时，常将原函数 $F(x)$ 表示成积分上限函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + C$，方便讨论.

二、不定积分的计算

类型 1　换元积分法

基本思路：要熟练掌握前面列出常见的凑微分形式以及常见的三角代换等.

微信公众号【顶尖考研】(ID: jiky66)

【例 4】　求不定积分 $\int \frac{2^x\cdot 3^x}{9^x-4^x}\mathrm{d}x$.

解　$\int \frac{2^x\cdot 3^x}{9^x-4^x}\mathrm{d}x = \int \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln\frac{3}{2}}\int \frac{\mathrm{d}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^2-1}$

$$= \frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\ln\left|\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x-1}{\left(\frac{3}{2}\right)^x+1}\right|+C$$

$$= \frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\ln\left|\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right|+C.$$

【评注】　本题利用了 $\left(\frac{3}{2}\right)^x\cdot\ln\frac{3}{2}\mathrm{d}x = \mathrm{d}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]$.

【例 5】　求 $\int \frac{1}{x^2}\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{x^2}}\mathrm{d}x$.

解题思路　可看出 $\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{x^2}} = \sqrt[3]{(1-\frac{1}{x})^2}$，利用 $\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathrm{d}(1-\frac{1}{x})$.

解　$\int \frac{1}{x^2}\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{x^2}}\mathrm{d}x = -\int \sqrt[3]{(1-\frac{1}{x})^2}\mathrm{d}(\frac{1}{x}) = \int \sqrt[3]{(1-\frac{1}{x})^2}\mathrm{d}(1-\frac{1}{x})$

$$= \frac{3}{5}(1-\frac{1}{x})^{\frac{5}{3}} + C.$$

【例 6】　求$\int \frac{x^5}{\sqrt[3]{1+x^3}}\mathrm{d}x$.

解　$\int \frac{x^5}{\sqrt[3]{1+x^3}}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{x^3\mathrm{d}(x^3)}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \frac{1}{3}\int \frac{(x^3+1-1)\mathrm{d}(1+x^3)}{\sqrt[3]{1+x^3}}$

$$\xlongequal{1+x^3=t} \frac{1}{3}\int (t^{\frac{2}{3}} - t^{-\frac{1}{3}})\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{5}(1+x^3)^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{2}(1+x^3)^{\frac{2}{3}} + C.$$

【例 7】　求$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x \cdot \sqrt{\sin x}}$.

解　$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x \cdot \sqrt{\sin x}} = \int \frac{\cos x\mathrm{d}x}{(1-\sin^2 x)\sqrt{\sin x}} = 2\int \frac{\mathrm{d}(\sqrt{\sin x})}{1-(\sqrt{\sin x})^4}$

$$\xlongequal{\sqrt{\sin x}=t} 2\int \frac{\mathrm{d}t}{1-t^4} = \int\left(\frac{1}{1+t^2} + \frac{1}{1-t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \arctan t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C$$

$$= \arctan\sqrt{\sin x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}} + C.$$

微信公众号【[illegible]考研】
(ID: djky[illegible])

【例 8】　求$\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x$.

解题思路　由于$\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{2}{1-x^2}$，可凑微分.

解　$\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)^2 + C.$

【评注】　主要利用了$\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)$，这种复杂因式的整体凑微分，需要我们平时的积累和训练.

【例 9】　求$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}}$.

解【方法一】　$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}} = \int \frac{2\mathrm{d}(\sqrt{x})}{\sqrt{4-x}} = 2\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2} + C.$

【方法二】　$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-(x-2)^2}} = \arcsin\frac{x-2}{2} + C.$

【方法三】 令$\sqrt{\frac{4-x}{x}}=t$,则$x=\frac{4}{1+t^2}$,$\mathrm{d}x=-\frac{8t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$,于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}}=\int\frac{1}{\frac{4}{1+t^2}\cdot t}\cdot\left(-\frac{8t}{(1+t^2)^2}\right)\mathrm{d}t=-\int\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$
$$=-2\arctan t+C$$
$$=-2\arctan\sqrt{\frac{4-x}{x}}+C.$$

【评注】 同一个不定积分,计算方法可能有若干种,结果的形式可能不一样,但它们最多相差一个常数项.

【例 10】 求$\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

解 $$\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1)}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\right)\mathrm{d}\mathrm{e}^x$$
$$=x-\ln(\mathrm{e}^x+1)+C.$$

【评注】 指数函数e^x有很好的特性,本题被积函数分子、分母同乘以e^x,变形后再积分,这种技巧有时候能够取得意想不到的效果.

【例 11】 求$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x(a>0)$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

解题思路 被积函数$f(x)$中含有根号$\sqrt{a^2-x^2}$,应作变换:$x=a\sin t$.

解 令$x=a\sin t$,$t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$,则$\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$,

$$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x=\int\frac{a\cos t}{a^4\sin^4 t}\cdot a\cos t\mathrm{d}t=\frac{1}{a^2}\int\cot^2 t\cdot\csc^2 t\mathrm{d}t=-\frac{\cot^3 t}{3a^2}+C$$
$$=-\frac{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}{3a^2x^3}+C.$$

【评注】 本题还可作变量代换$x=\frac{1}{t}$.需注意的是在最后结果中,回代$\cot t$时,不要用代数的方法计算,而应用直角三角形来计算.

【例 12】 求$I=\int\frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.

解题思路 被积函数$f(x)$中含有$\sqrt{1+x^2}$,可作变换$x=\tan t$.

解 令$x=\tan t$,则

$$I=\int\frac{\tan^3 t}{\sec^3 t}\cdot\sec^2 t\mathrm{d}t=\int\frac{\sin^3 t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t=-\int\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}\mathrm{d}(\cos t)$$
$$=\int\left(1-\frac{1}{\cos^2 t}\right)\mathrm{d}(\cos t)=\cos t+\frac{1}{\cos t}+C=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\sqrt{1+x^2}+C.$$

【评注】　若被积函数中含有$\sqrt{x^2+2x+2}=\sqrt{(x+1)^2+1}$，可作代换$x+1=\tan t$，其他情形类似.

【例 13】　求$\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}\mathrm{d}x$.

解题思路　被积函数$f(x)$中含有根号$\sqrt{x^2-4}$，应作变换：$x=2\sec t$.

解　当$x>2$时，令$x=2\sec t,t\in(0,\frac{\pi}{2})$，则$\mathrm{d}x=2\sec t\tan t\mathrm{d}t$，

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{4\sec^2 t\cdot 2\tan t}\cdot 2\sec t\tan t\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int\cos t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\sin t}{4}+C_1=\frac{\sqrt{x^2-4}}{4x}+C_1.$$

当$x<-2$时，令$x=-t$，则

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{t^2\sqrt{t^2-4}}\mathrm{d}t=-\frac{\sqrt{t^2-4}}{4t}-C_2=\frac{\sqrt{x^2-4}}{4x}-C_2.$$

最后可统一表示为

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{x^2-4}}{4x}+C.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

【评注】　实际上，只需作$x=2\sec t(t\in(0,\frac{\pi}{2})\cup(\pi,\frac{3}{2}\pi))$即可，不需要对$x$进行讨论.

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

【例 14】　求$\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$.

解　令$\sqrt[6]{x}=t$，则$x=t^6$，

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}=\int\frac{6t^5\mathrm{d}t}{(1+t^2)t^3}=6\int(1-\frac{1}{1+t^2})\mathrm{d}t=6(t-\arctan t)+C$$

$$=6\sqrt[6]{x}-6\arctan\sqrt[6]{x}+C.$$

【评注】　被积函数中含有几个同类根式，为了同时消去这几个根式，可令开方次数为它们的最小公倍数，本题 2 和 3 的最小公倍数为 6，故令$\sqrt[6]{x}=t$.

类型 2　分部积分法

基本思路　一般来说，分部积分法适用于被积函数为两类不同函数乘积的不定积分，合适的选取$u(x),v(x)$是解题的关键，常用有如下几种形式.

1. $\int P_n(x)\mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x,\int P_n(x)\sin x\mathrm{d}x,\int P_n(x)\cos x\mathrm{d}x$，其中$P_n(x)$为$n$次多项式，选取$P_n(x)$为$u(x)$.

2. $\int\mathrm{e}^{kx}\sin(ax+b)\mathrm{d}x,\int\mathrm{e}^{kx}\cos(ax+b)\mathrm{d}x,u(x),v(x)$的选取可随意. 若多次用分部积分法，前后几次所选的$u(x)$应为同类型函数.

3. $\int P_n(x)\ln x\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)\arcsin x\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)\arccos x\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)\arctan x\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)\operatorname{arccot} x\mathrm{d}x$. 选取对数函数、反三角函数为 $u(x)$.

另外，分部积分法的一个重要作用是，可以升高或降低被积函数导数的阶数.

【例 15】 求 $\int x\ln\dfrac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x$.

解题思路 本题可理解为被积函数为多项式乘以对数函数，用分部积分法.

解 $$\begin{aligned}\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{2}{1-x^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x}+\int\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x}+x-\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C.\end{aligned}$$

【例 16】 求 $\int\dfrac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

解题思路 本题被积函数为有理函数乘以对数函数，为了去掉对数函数，用分部积分法，选取 $u(x)=\ln x$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

解 $$\begin{aligned}\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x&=-\frac{1}{2}\int\ln x\mathrm{d}\frac{1}{1+x^2}=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x^2}\ln x-\int\frac{1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x\right]\\&=-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\ln x+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\ln x+\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+C.\end{aligned}$$

【例 17】 求 $I=\int\dfrac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x$.

解题思路 虽然被积函数含的根式中有 e^x，为了消去根号也可作变换 $t=\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$.

解 令 $\sqrt{\mathrm{e}^x-1}=t$，即 $x=\ln(1+t^2)$，从而

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x=\int\frac{(1+t^2)\ln(1+t^2)}{t}\cdot\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t=2\int\ln(1+t^2)\mathrm{d}t\\&=2t\ln(1+t^2)-4\int\frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t=2t\ln(1+t^2)-4t+4\arctan t+C\\&=2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-4\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+4\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C.\end{aligned}$$

【例 18】　求$\int x\arccos\frac{1}{x}\mathrm{d}x(x>0)$.

解题思路　本题被积函数为多项式乘以反余弦函数，为了去掉反余弦函数，用分部积分法，选取$u(x)=\arccos\frac{1}{x}$.

解　$$\begin{aligned}\int x\arccos\frac{1}{x}\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\left[\arccos\frac{1}{x}\cdot x^2-\int\left[-\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}}\right]\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot x^2\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{2}\left[x^2\arccos\frac{1}{x}-\int\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}(x^2-1)\\&=\frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}+C.\end{aligned}$$

【例 19】　求$\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.

解　用分部积分法

$$\begin{aligned}\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x&=\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}\mathrm{e}^{\arctan x}\\&=\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\\&=\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}\mathrm{e}^{\arctan x}\\&=\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

移项整理得

$$\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\frac{(x-1)\mathrm{e}^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C.$$

【评注】　1. 被积函数含有根号$\sqrt{1+x^2}$，典型地应作代换：$x=\tan t$，或被积函数含有反三角函数$\arctan x$，同样可考虑作变换：$\arctan x=t$，即$x=\tan t$. 此法留作练习.

2. 本题计算过程中，用了所谓的“循环积分法”：为了求不定积分I，经过一系列的运算，没有直接求出I，而是得到了关于I的方程，解方程求出I. 类似的例子如：

求不定积分$I=\int\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$.

类型 3　分段函数的不定积分

基本思路　分段函数的不定积分，应根据不同区间上的函数表达式分段分别积分，再利用原函数在分段点的连续性（可导一定连续）粘合起来，即将各段上的任意常数C_i统一成一个任意常数.

微信公众号【顶尖考研】(ID:dingjy66)

【例 20】 设 $f(x)=\begin{cases}\sin 2x, & x\leqslant 0,\\ \ln(2x+1), & x>0.\end{cases}$ 求 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

解 当 $x\leqslant 0$ 时，$\int f(x)\mathrm{d}x=\int \sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\cos 2x+C$

当 $x>0$ 时，$\int f(x)\mathrm{d}x=\int \ln(2x+1)\mathrm{d}x=x\ln(2x+1)-\int \frac{2x}{2x+1}\mathrm{d}x$

$$=x\ln(2x+1)-\int \mathrm{d}x+\int \frac{\mathrm{d}x}{2x+1}$$

$$=x\ln(2x+1)-x+\frac{1}{2}\ln(2x+1)+C_1$$

由 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 在点 $x=0$ 可导，故一定连续，得 $C_1=-\frac{1}{2}+C$. 所以

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}-\frac{1}{2}\cos 2x+C, & x\leqslant 0,\\ x\ln(2x+1)-x+\frac{1}{2}\ln(2x+1)-\frac{1}{2}+C, & x>0.\end{cases}$$

【评注】 由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，可求变限积分 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，进而得到不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$.

类型 4 几类特殊函数的不定积分

基本思路 数学三的考试大纲中，没有明确指出需掌握有理函数、三角有理函数、简单无理函数不定积分的求法，指的是不需要系统掌握这些函数的不定积分的计算，但利用变形等技巧应会算一些相关函数的不定积分.

1. 有理函数 $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 的不定积分，其中 $P_n(x)$，$Q_m(x)$ 分别为 n，m 次多项式.

若 $n\geqslant m$ 称为假分式，利用多项式的除法把假分式化为多项式与真分式的和，然后再把真分式化为“部分分式”(可积分项) 的和.

2. 三角有理式的不定积分(把有理函数 $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 中的 x 用各种三角函数替代).

三角有理式的积分是指以三角函数为变量的有理函数，由于其他三角函数皆可由 $\sin x$，$\cos x$ 表示，只需讨论 $R(\sin x,\cos x)$ 的形式，此类积分总可作代换 $t=\tan\frac{x}{2}$，使被积函数有理化，即 $\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$. 以下几种情况可作其他变换更简单一些.

(1) $\int R(\sin^2 x,\cos x)\sin x\mathrm{d}x\xrightarrow{\text{令 } t=\cos x}-\int R(1-t^2,t)\mathrm{d}t$

(2) $\int R(\sin x,\cos^2 x)\cos x\mathrm{d}x\xrightarrow{\text{令 } t=\sin x}\int R(t,1-t^2)\mathrm{d}t$

(3) $\int R(\tan x)\mathrm{d}x\xrightarrow{\text{令 } t=\tan x}\int R(t)\cdot\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$

实际考试题目中，更多的是利用三角公式等的变形技巧.

3. 简单无理函数的不定积分

根据题目的具体情况，利用变量代换想方设法去掉根号.

微信公众号【开心考研】 (ID: djky66)

【例 21】　求 $\int \frac{x^3+x^2+1}{x^2-1}\mathrm{d}x$.

解题思路　本题被积函数为假分式，$\frac{x^3+x^2+1}{x^2-1}=(x+1)+\frac{x+2}{x^2-1}$.

解　$\int \frac{x^3+x^2+1}{x^2-1}\mathrm{d}x=\int\left[(x+1)+\frac{x+2}{x^2-1}\right]\mathrm{d}x$

$=\int(x+1)\mathrm{d}x+\int\frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x+\int\frac{2}{x^2-1}\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$.

【例 22】　求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4(1+x^2)}$.

解　$I=\int\frac{1+x^2-x^2}{x^4(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2(1+x^2)}\right)\mathrm{d}x$

$=\int\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}x^{-3}+\frac{1}{x}+\arctan x+C$.

【例 23】　求 $\int\frac{1}{x+x^9}\mathrm{d}x$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

解　【方法一】　$\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^8)}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x^7}{1+x^8}\right)\mathrm{d}x=\ln|x|-\frac{1}{8}\ln(1+x^8)+C$.

【方法二】　$\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^8)}=\int\frac{x^7}{x^8(1+x^8)}\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\int\frac{\mathrm{d}x^8}{x^8(1+x^8)}=\frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{x^8}-\frac{1}{1+x^8}\right)\mathrm{d}x^8$

$=\frac{1}{8}[\ln x^8-\ln(1+x^8)]+C=\frac{1}{8}\ln\frac{x^8}{1+x^8}+C$.

【方法三】　$\int\frac{1}{x+x^9}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^9\left(1+\frac{1}{x^8}\right)}=-\frac{1}{8}\int\frac{\mathrm{d}x^{-8}}{1+x^{-8}}=-\frac{1}{8}\ln(1+x^{-8})+C$.

【例 24】　求 $\int\frac{3x^2-x+4}{x^3-x^2+2x-2}\mathrm{d}x$.

解　$x^3-x^2+2x-2=(x-1)(x^2+2)$.

令 $\frac{3x^2-x+4}{x^3-x^2+2x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2}$，得 $A=2,B=1,C=0$.

所以 $\int\frac{3x^2-x+4}{x^3-x^2+2x-2}\mathrm{d}x=\int\frac{2}{x-1}\mathrm{d}x+\int\frac{x}{x^2+2}\mathrm{d}x=2\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln(x^2+2)+C$.

【评注】　此题利用待定系数法，把被积函数变为部分分式的和. 此方法仅作参考.

【例 25】　求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$.

解　【方法一】　$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}=\int\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x-\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\tan x-\frac{1}{\cos x}+C$.

【方法二】 $\int \frac{dx}{1+\sin x}=\int \frac{dx}{1+\cos(\frac{\pi}{2}-x)}=\int \frac{dx}{1+\cos(x-\frac{\pi}{2})}=\int \frac{dx}{2\cos^2\frac{2x-\pi}{4}}$

$=\tan(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})+C.$

【方法三】 令 $\tan\frac{x}{2}=t,\sin x=\frac{2t}{1+t^2},dx=\frac{2dt}{1+t^2}$,则

$$\int \frac{dx}{1+\sin x}=\int \frac{2dt}{(1+t^2)(1+\frac{2t}{1+t^2})}=2\int \frac{dt}{(1+t)^2}=-\frac{2}{1+t}+C=\frac{-2}{1+\tan\frac{x}{2}}+C.$$

【例 26】 求 $I=\int \frac{dx}{\sin x\cos^4 x}$.

解题思路 此题用万能代换可求解,但鉴于被积函数的特点,变形分子 $1=\sin^2x+\cos^2x$.

解 【方法一】 $I=\int \frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin x\cos^4x}dx=\int \frac{\sin x}{\cos^4x}dx+\int \frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin x\cos^2x}dx$

$=-\int \frac{d\cos x}{\cos^4x}-\int \frac{d\cos x}{\cos^2x}+\int \frac{dx}{\sin x}$

$=\frac{1}{3\cos^3x}+\frac{1}{\cos x}+\ln|\csc x-\cot x|+C.$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djkj66)

【方法二】 $I=\int \frac{\sin x}{(1-\cos^2x)\cos^4x}dx=\int \frac{d(\cos x)}{(\cos^2x-1)\cdot\cos^4x}\xrightarrow{u=\cos x}\int \frac{du}{(u^2-1)u^4}$

$=\int\left(\frac{1}{u^2\cdot(u^2-1)}-\frac{1}{u^4}\right)du=\int\left(\frac{1}{u^2-1}-\frac{1}{u^2}\right)du+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{u^3}+C$

$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+\frac{1}{u}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{u^3}+C$

$=\frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\cos^3x}+C.$

【评注】 在涉及三角有理函数的不定积分中,时刻注意诸如 $1=\sin^2x+\cos^2x$,及 $\cos^2x=1-\sin^2x,\sin^2x=1-\cos^2x$ 等一些三角变形,此类题目较灵活,需在平时积累.有些三角函数的题目,不对被积函数作巧妙变换,难以求解.

【例 27】 求 $\int \frac{1+\sin x+\cos x}{1+\sin^2x}dx$.

解 $\int \frac{1+\sin x+\cos x}{1+\sin^2x}dx=\int \frac{dx}{2-\cos^2x}-\int \frac{d(\cos x)}{2-\cos^2x}+\int \frac{d(\sin x)}{1+\sin^2x}$

$=\int \frac{dx}{\cos^2x(2\sec^2x-1)}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\cos x}{\sqrt{2}-\cos x}+\arctan(\sin x)$

$=\int \frac{d(\tan x)}{1+2\tan^2x}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\cos x}{\sqrt{2}-\cos x}+\arctan(\sin x)$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\cos x}{\sqrt{2}-\cos x}+\arctan(\sin x)+C.$

【例 28】　计算不定积分$\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x(x>0)$.

解题思路　作代换$\sqrt{\frac{x+1}{x}}=t$,再用分部积分法.

解　令$\sqrt{\frac{x+1}{x}}=t$,得$x=\frac{1}{t^2-1}$.

$$\begin{aligned}\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x &= \int \ln(1+t)\mathrm{d}\left(\frac{1}{t^2-1}\right)=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int \frac{1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{t+1}\mathrm{d}t\\ &=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int\left[\frac{1}{4(t-1)}-\frac{1}{4(t+1)}-\frac{1}{2(t+1)^2}\right]\mathrm{d}t\\ &=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2(t+1)}+C\\ &=x\ln\left(1+\sqrt{\frac{x+1}{x}}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)-\frac{1}{2}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)+C.\end{aligned}$$

关于不定积分的计算,方法灵活多样,比如下一个例子,可用递推公式来计算.

【例 29】　求$I_n=\int \tan^n x\mathrm{d}x$的递推公式.

解　$$\begin{aligned}I_n &= \int \tan^{n-2}x(\sec^2x-1)\mathrm{d}x=\int \tan^{n-2}x\sec^2x\mathrm{d}x-\int \tan^{n-2}x\mathrm{d}x\\ &=\int \tan^{n-2}x\mathrm{d}\tan x-I_{n-2}=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-I_{n-2}.\end{aligned}$$

【评注】　得到上述的递推公式,分n的奇偶性,可求得不定积分I_n.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

小结

求不定积分与求导数(或微分)互为逆运算,计算一个函数的导数较容易,但计算不定积分要困难得多,不定积分的计算,往往需要综合多种积分方法,甚至于很多初等函数的原函数即使存在,我们也无法用初等函数表示出来.因此,要掌握好不定积分的基本概念及主要积分方法,不要把时间浪费在那些技巧特别强的题目上,熟能生巧,一定量的练习必不可少.

§2　定积分

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

内容精讲

一、定积分的概念与性质

1. 定积分的定义

设函数$f(x)$在$[a,b]$上有界,在$[a,b]$中任意插入$n-1$个分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

将$[a,b]$分为n个小区间$[x_{i-1},x_i]$,$i=1,\cdots,n$,$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$表示第i个小区间的长度,记

$\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$，在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上任意取一点$\xi_i(x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i)(i=1,\cdots,n)$. 若极限$\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$存在，则称此极限为$f(x)$在$[a,b]$上的定积分，记为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，并称$f(x)$在$[a,b]$可积，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

【注】 (1)$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$存在指的是对小区间$[x_{i-1},x_i]$的任意划分，$\xi_i$的任意选取，和式的极限$\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$均存在且相等. 特别地，若将区间$[a,b]n$等分，$\Delta x_i=\dfrac{b-a}{n}$，$\xi_i$可以取为小区间的右端点(或左端点)，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f\left[a+\frac{i}{n}(b-a)\right]\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\text{ 存在}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left[a+\frac{i}{n}(b-a)\right].$$

因此，定积分的定义提供了求数列极限的新途径.

(2)$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$是一个常数，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$与积分变量x的记号无关，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(u)\mathrm{d}u=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\cdots.$$

(3) 规定$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$，$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

2. 定积分存在的条件

(1) 必要条件：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$存在的必要条件是$f(x)$在$[a,b]$上有界.

(2) 充分条件：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$存在的充分条件是$f(x)$在$[a,b]$上连续，或仅有有限个间断点且有界.

3. 定积分的几何意义 若$f(x)\geqslant0$，定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x(a<b)$表示曲线$y=f(x)$，两条直线$x=a$，$x=b$与$x$轴所围成的曲边梯形面积.

一般地，定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$表示曲线$y=f(x)$与x轴，$x=a$，$x=b$所围图形面积的代数和(x轴上方的面积为正，下方的面积为负).

4. 定积分性质

(1) 线性性 设$f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$上可积，则

$$\int_a^b[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,k\in R.$$

(2) 可加性 设$f(x)$在$[a,b]$上可积，$c\in[a,b]$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

【注】 条件$c\in[a,b]$可去掉，只要能保证等式两边都有意义即可.

(3)$\int_a^b \mathrm{d}x = b-a$.

(4) 不等式　设 $f(x),g(x)$ 在$[a,b]$上可积,

① 若 $f(x)\geqslant 0,\forall x\in[a,b]$,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$.

② 若 $f(x)\leqslant g(x),\forall x\in[a,b],a<b$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

③ 若 $a<b$,则 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

【注】 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\nRightarrow f(x)\leqslant g(x),x\in[a,b]$.

若 $m\leqslant f(x)\leqslant M,\forall x\in[a,b],a<b$. 则

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a).$$

(5) **积分中值定理**　若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$,使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\cdot(b-a).$$

【注】 定理中 ξ 可属于开区间(a,b).

二、定积分的几个定理

1.(变上限定积分的导数) 设函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续,则变上限积分函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在$[a,b]$上可导,且

$$\Phi'(x)=\left[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]'=f(x).$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【注】 (1) 如果函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续,则函数$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 在$[a,b]$上的一个原函数.

(2) 如果函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上可积,则函数$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在$[a,b]$上未必可导,但其在$[a,b]$上一定连续.

2.(牛顿—莱布尼茨(Newton-Leibniz)公式) 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,$F(x)$ 是 $f(x)$ 在$[a,b]$上的一个原函数,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

【注】 牛顿—莱布尼茨公式要求 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,若 $f(x)$ 在$[a,b]$内存在间断点 $c\in(a,b)$,则可用积分可加性分段积分:$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

三、定积分的计算方法

1. 换元积分法

设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,$x=\varphi(t)$ 满足条件

(1)$\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$;

(2)$\varphi(t)$ 在$[\alpha,\beta]$或$[\beta,\alpha]$上具有连续导数,且其值域为$[a,b]$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

2. 分部积分法

设函数 $u(x),v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有连续导数，则有

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

或

$$\int_a^b u(x)\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\mathrm{d}u(x).$$

四、重要公式与结论

1. 利用定积分定义求 n 项和的极限

若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left[a+\dfrac{i}{n}(b-a)\right] = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 特别地

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

2. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)\geqslant 0$，且 $f(x)$ 不恒为零，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$.

一般地，设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)\geqslant g(x)$ 在 $[a,b]$ 上成立，但在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 不恒等于 $g(x)$，则必有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

3. 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$.

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续非负且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$，则 $f(x)\equiv 0, x\in[a,b]$.

5. 推广的积分中值定理　若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)$ 不变号，则至少存在一个 $\xi\in[a,b]$，使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

这里的 ξ 也可以取在开区间 (a,b) 内.

6. 推广的牛顿－莱布尼茨公式　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 在 (a,b) 内的一个原函数，且极限 $F(a+0),F(b-0)$ 均存在，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{a+0}^{b-0} = F(b-0) - F(a+0).$$

7. 若 $f(x)$ 连续，而 $a(x),b(x)$ 可导，则

$$\left[\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\mathrm{d}t\right]' = f[b(x)]b'(x) - f[a(x)]a'(x).$$

对于更一般情形 $\int_{a(x)}^{b(x)} g(x)h(t)f[\varphi(x,t)]\mathrm{d}t$，应先把 $g(x)$ 提到积分号外，再令 $u=\varphi(x,t)$，从而将积分化为被积函数不含变量 x 的变限积分，然后再求导.

8. 设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a [f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & \text{若 } f(x) \text{ 为偶函数,} \\ 0, & \text{若 } f(x) \text{ 为奇函数.} \end{cases}$$

9. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，则

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^{nT} f(x)\mathrm{d}x = n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

微信公众号：[启示考研] (ID: djky66)

特别地，(1)$\int_a^{a+\pi}|\sin x|\,dx=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=2$，$\int_a^{a+\pi}|\cos x|\,dx=\int_0^{\pi}|\cos x|\,dx=2$.

(2)$\int_0^{2\pi}\sin nx\sin mx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\,dx=\begin{cases}\pi, & n=m,\\ 0, & n\neq m.\end{cases}$

$\int_0^{2\pi}\cos nx\cos mx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx=\begin{cases}\pi, & n=m,\\ 0, & n\neq m.\end{cases}$

$\int_0^{2\pi}\sin nx\cos mx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx=0$.

其中 m,n 为整数.

10. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，周期为 T，则

(1)$f(x)$ 的原函数 $\int_0^x f(t)\,dt$ 以 T 为周期 $\Leftrightarrow\int_0^T f(x)\,dx=0$；

(2)$\int f(x)\,dx$（即 $f(x)$ 的原函数的全体）以 T 为周期 $\Leftrightarrow\int_0^T f(x)\,dx=0$.

11. 几个常用的公式：

$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{\pi a^2}{4}$，$\int_{-a}^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{\pi a^2}{2}$，$\int_0^a\sqrt{2ax-x^2}\,dx=\frac{\pi a^2}{4}$，

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{ 为正偶数},\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1, & n\text{ 为大于 1 的正奇数}.\end{cases}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

例题分析

一、定积分的概念及性质

【例 1】　设 $M=\int_{-1}^1\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x\,dx$，$N=\int_{-1}^1(\sin^3 x+\cos^4 x)\,dx$，$P=\int_{-1}^1(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)\,dx$，则

(A)$M<N<P$.　　(B)$N<M<P$.

(C)$P<M<N$.　　(D)$P<N<M$.

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

解题思路　直接计算三个定积分不容易，考虑利用对称区间上定积分的性质.

解　因为 $\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x$ 为奇函数，则 $M=0$.

又 $\sin^3 x$，$x^2\sin^3 x$ 也为奇函数，有 $N=\int_{-1}^1\cos^4 x\,dx>0$，$P=-\int_{-1}^1\cos^4 x\,dx<0$.

答案应选(C).

【例 2】　设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,dx$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\,dx$，$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,dx$，则 I,J,K 的大小关系是

(A)$I<J<K$.　　(B)$I<K<J$.

(C)$J<I<K$. (D)$K<J<I$.

解 在$[0,\frac{\pi}{4}]$上,$\sin x\leqslant\cos x\leqslant\cot x$,且$\ln x$是增函数,于是在$(0,\frac{\pi}{4}]$上有,

$\ln\sin x\leqslant\ln\cos x\leqslant\ln\cot x$,且不恒等. 因此

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\mathrm{d}x<K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x<J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\mathrm{d}x.$$

所以应选(B).

【评注】 1. 严格意义上讲$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\mathrm{d}x$是一个反常积分,应考虑它的收敛性;

2. $f(x),g(x)$连续,若$f(x)\leqslant g(x)$,$f(x)$不恒等于$g(x)$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

【例 3】 求$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$.

解 对于$0\leqslant x\leqslant1$,有$0\leqslant\frac{x^n}{1+x}\leqslant x^n$. 根据定积分的性质得

$$0\leqslant\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1},$$

利用极限的夹逼定理 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x=0$.

【评注】 若做成$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\xi^n}{1+\xi}=0(0<\xi<1)$是错误的,原因是$\xi$与$n$有关.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 4】 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)=$_____.

解
$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(\frac{1}{n})^2+1}+\frac{1}{(\frac{2}{n})^2+1}+\cdots+\frac{1}{(\frac{n}{n})^2+1}\right]\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

因此应填$\frac{\pi}{4}$.

【例 5】 设$f(x)=4x-\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$,求$f(x)$.

解题思路 本题的关键是注意积分$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$为一常数. 设$A=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$,得到关于$A$的方程,从中解出$A$.

解 令$A=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$,将$f(x)=4x-A$两边再积分,得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 4x\mathrm{d}x-\int_0^1 A\mathrm{d}x,$$

有 $A=2-A$，于是 $A=1$，从而 $f(x)=4x-1$.

【评注】　还可用其它方法去求解，关键是求出 $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，显然 $f'(x)=4$，

由分部积分法 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=f(1)-\int_0^1 4x\mathrm{d}x=f(1)-2$，

而 $f(1)=4-[f(1)-2]$，于是 $f(1)=3$，从而 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$.

【例 6】　设 $f(x)=x^2-x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，则 $f(x)=$ _____

解　令 $A=\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$，$B=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，则 $f(x)=x^2-Ax+2B$，

等式两边分别从 0 到 1，从 0 到 2 积分得

$$A=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{8}{3}-2A+4B,\quad B=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}-\frac{A}{2}+2B.$$

解得 $A=\frac{4}{3}$，$B=\frac{1}{3}$，所以 $f(x)=x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$.

【评注】　一般地，如果 $f(x)=g(x)+\varphi(x)\int_a^b P(x)f(x)\mathrm{d}x+\psi(x)\int_c^d Q(x)f(x)\mathrm{d}x$，

求 $f(x)$. 可用如下方法求解：

令 $A=\int_a^b P(x)f(x)\mathrm{d}x$，$B=\int_c^d Q(x)f(x)\mathrm{d}x$，有 $f(x)=g(x)+A\varphi(x)+B\psi(x)$，所以

$$\begin{cases}A=\int_a^b P(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b P(x)[g(x)+A\varphi(x)+B\psi(x)]\mathrm{d}x\\ B=\int_c^d Q(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_c^d Q(x)[g(x)+A\varphi(x)+B\psi(x)]\mathrm{d}x\end{cases}$$

解得 A,B，即得 $f(x)$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例 7】　证明下列不等式

$$\frac{\sqrt{\pi}}{80}\pi^2<\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sqrt{\tan x}\mathrm{d}x<\frac{\pi^2}{32}.$$

解题思路　利用定积分的估值性质，适当放大或缩小被积函数.

解　当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时，$0<x<\tan x<1$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sqrt{\tan x}\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\mathrm{d}x,$$

即 $\frac{\sqrt{\pi}}{80}\pi^2<\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sqrt{\tan x}\mathrm{d}x<\frac{\pi^2}{32}$.

【评注】　估计积分值常用以下方法：假设被积函数连续

1. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值为 M，最小值为 m，$f(x)$ 不恒为常数，则

$$m(b-a)<\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<M(b-a).$$

2. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值为 M，最小值为 m，$g(x)\geqslant 0$，$f(x)g(x)$ 不恒等于 $Mg(x)$，$mg(x)(x\in[a,b])$，则

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x < \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x < M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

二、定积分的计算

基本思路 1. 定积分的计算与不定积分的计算类似，要熟练掌握如下几种基本方法：分项积分法，凑微分法，换元积分法，分部积分法.

2. 与不定积分不同的是作变量代换时相应地要换积分限，不必变量还原了. 同时，要注意定积分计算的一些特点，如

(1) 奇(偶) 函数在对称区间上的积分；

(2) 周期函数的积分，定积分的几何意义等.

3. 如果被积函数的原函数可求出，一般可用牛顿 — 莱布尼茨公式求定积分.

4. 定积分是一个常数，它的计算又有许多技巧和方法，只要能把此数求出即可.

【例 8】 求 $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{2x+\sin 2x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

解题思路 先用分项积分法，然后对每一项用分部积分法.

解 $$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{2x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 2x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}2x\mathrm{d}(\tan x)+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}2\tan x\mathrm{d}x$$

$$=2x\tan x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}-2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\tan x\mathrm{d}x+2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\tan x\mathrm{d}x$$

$$=2\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\sqrt{3}-2\cdot\frac{\pi}{4}=2\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{4}\right).$$

【评注】 在实际计算过程中，我们不必把每一个积分都计算出来，如本题正好 $-2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\tan x\mathrm{d}x$，$2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\tan x\mathrm{d}x$ 相互抵消. 有的时候，两项不易计算(甚至算不出来) 的定积分相互抵消在计算定积分时十分方便.

【例 9】 求 $I=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^x\cos nx\mathrm{d}x$.

解题思路 被积函数是两类不同函数的乘积，用分部积分法，经过变换得到关于 I 的方程，解方程求出 I. 这类似于不定积分中的循环积分法.

解 $$I=\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}n\sin nx\cdot\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

$$=(\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi})(-1)^n+n\mathrm{e}^x\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}n^2\cos nx\cdot\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

$$=(-1)^n(\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi})-n^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=(-1)^n(\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi})-n^2 I,$$

所以

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n(\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi})}{n^2+1}.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【例 10】　求 $I=\int_2^3 \frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{(x-1)^2}\mathrm{d}x$.

解题思路　$\sqrt{3+2x-x^2}=\sqrt{4-(x-1)^2}$，积分区间为$[2,3]$，所以 $1\leqslant x-1\leqslant 2$，可作代换 $x-1=2\sin t$.

解　$I=\int_2^3 \frac{\sqrt{4-(x-1)^2}}{(x-1)^2}\mathrm{d}x \xlongequal{令\,x-1=2\sin t} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}}{4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\mathrm{d}t$

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\csc^2 t-1)\mathrm{d}t=-\cot t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$.

【例 11】　求 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}}\mathrm{d}x$.

解题思路　被积函数含有根式 $\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}}$，可考虑作变换：$\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}}=t$，或 $\mathrm{e}^{-x}=t$，$\mathrm{e}^{-x}=\sin t$.

解　令 $\mathrm{e}^{-x}=\sin t$，则

$\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot\frac{\cos t}{\sin t}\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin t}\mathrm{d}t-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\mathrm{d}t$

$=-\ln(\csc t+\cot t)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【例 12】　求 $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\mathrm{d}x$.

解　令 $\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}=u$，则 $\sin^2 u=\frac{x}{1+x}$，$x\cos^2 u=\sin^2 u$，$x=\tan^2 u$，此时 $x:0\to 3$ 时，$u:0\to\frac{\pi}{3}$，于是

$\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{3}} u\mathrm{d}(\tan^2 u)=(u\cdot\tan^2 u)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}1\cdot\tan^2 u\mathrm{d}u$

$=\pi-\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sec^2 u-1)\mathrm{d}u=\pi-\tan u\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+\frac{\pi}{3}$

$=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$.

【评注】　实际上本题可直接用分部积分法更自然.

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

【例 13】　求 $I=\int_{-1}^1 x(1+x^{2021})(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x$.

解题思路　拆分被积函数，可看出 $x^{2022}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$ 为奇函数，其积分为 0.

解　因为 $x^{2022}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$ 为奇函数，所以 $\int_{-1}^1 x^{2020}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x=0$.

因而 $$I=\int_{-1}^{1}x(e^{x}-e^{-x})dx=\int_{-1}^{1}xd(e^{x}+e^{-x})$$

$$=x(e^{x}+e^{-x})\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}(e^{x}+e^{-x})dx=\frac{4}{e}.$$

【评注】 若积分区间为对称区间，即使被积函数不具备奇偶性，也可考虑拆分函数，使其一部分具有奇偶性. 甚至积分区间不是对称区间，而被积函数(或部分)具备奇偶性，可考虑拆分区间，使其部分区间是对称的.

【例 14】 求 $I=\int_{0}^{4\pi}\frac{\sin x}{\sin^{2}x+1}dx$.

解题思路 被积函数是三角函数，可利用万能代换或变形后用换元积分法. 但可看出 $\frac{\sin x}{\sin^{2}x+1}$ 以 2π 为周期，且积分区间 $[0,4\pi]$ 的长度为 2π 的 2 倍，所以用周期函数的定积分性质计算更简单.

解 $\frac{\sin x}{\sin^{2}x+1}$ 以 2π 为周期且为奇函数，则 $I=2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin x}{\sin^{2}x+1}dx=0$.

【评注】 若 $f(x)$ 以 T 为周期，则

$$\int_{0}^{nT}f(x)dx=n\int_{0}^{T}f(x)dx=n\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)dx.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 15】 求 $I=\int_{-2}^{2}\sqrt{4-|x|-x^{2}}dx$.

解题思路 若被积函数是常见曲线的方程，定积分即为所围平面图形的面积.

解 $\sqrt{4-|x|-x^{2}}$ 为偶函数，则

$$I=2\int_{0}^{2}\sqrt{4x-x^{2}}dx=2\int_{0}^{2}\sqrt{2^{2}-(x-2)^{2}}dx,$$

而 $y=\sqrt{4x-x^{2}}$ 为以(2,0)为圆心，2 为半径的上半圆周，由定积分的几何意义

$$I=2\times(\frac{1}{4}\text{圆的面积})=2\times\frac{1}{4}\times\pi\times2^{2}=2\pi.$$

【评注】 利用定积分的几何意义，免去了具体的计算，尤其在客观题的解答中，能很快得到正确的答案.

【例 16】 求 $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^{2}x}{1+e^{-x}}dx$.

解题思路 本题被积函数可以理解为两类不同函数的乘积，但是利用分部积分法无法求解；若从积分区间来看，具有对称性，可是被积函数不具备奇偶性，也无法拆分. 我们可尝试作变换 $x=-t$，得到 $I=I_{1}$，有 $I=\frac{1}{2}(I+I_{1})$，而合并后的定积分 $I+I_{1}$ 可计算.

解 令 $x=-t$，则 $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 t}{1+\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$，

从而 $I=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos^2 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}+\frac{\cos^2 x}{1+\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-x}+1+\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^{-x})(1+\mathrm{e}^x)}\right)\cos^2 x\mathrm{d}x$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}.$

【评注】 一般地，有如下结论：作变换 $x=a+b-t$，则

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-t)\mathrm{d}t,$$

因而，$I=\frac{1}{2}\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x$. 用此方法可以方便地求一些定积分.

【例 17】 求 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

解题思路 令 $x=0+\frac{\pi}{2}-t=\frac{\pi}{2}-t$.

解 令 $x=\frac{\pi}{2}-t$，则

$$I=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\cos^3 t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t,$$

从而 $I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\frac{1}{2}\sin 2x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{8}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi-1}{4}.$

【评注】 要求 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$，可作变换 $x=\frac{\pi}{2}-t$，则 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos t,\sin t)\mathrm{d}t$，

有 $I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(\sin x,\cos x)+f(\cos x,\sin x)]\mathrm{d}x$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例 18】 求 $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

解 令 $x=\pi-t$，则

$$I=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t-\int_0^{\pi}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t-I.$$

解关于 I 的方程得 $I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\arctan\cos x\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{4}.$

【评注】 一般地，$I=\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x\xlongequal{x=\pi-t}\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)\mathrm{d}t$

$$=\pi\int_0^{\pi}f(\sin t)\mathrm{d}t-I.$$

解方程得 $I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin t)\mathrm{d}t$，转化为三角函数的积分.

【例 19】 求 $I=\int_{-2}^{2}\min(2,x^2)\mathrm{d}x$.

解题思路 先把被积函数写成分段函数的形式，然后再分区间求定积分.

解 令 $f(x)=\min(2,x^2)$，则有 $f(x)=\begin{cases}x^2, & |x|\leqslant\sqrt{2},\\ 2, & |x|>\sqrt{2}.\end{cases}$

于是 $\int_{-2}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{-\sqrt{2}}f(x)\mathrm{d}x+\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}f(x)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{2}}^{2}f(x)\mathrm{d}x$

$=\int_{-2}^{-\sqrt{2}}2\mathrm{d}x+\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}x^2\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{2}}^{2}2\mathrm{d}x=8-\frac{8}{3}\sqrt{2}.$

【评注】 若被积函数为分段函数，利用定积分的可加性，要把积分区间分为对应的若干部分再积分.

【例 20】 求 $f(x)=\int_0^1 t|t-x|\mathrm{d}t$.

解题思路 注意到关于积分变量 t 的被积函数中含有参数 x，积分应对 x 的取值分情况讨论. 同时，被积函数有绝对值，本质上理解为分段函数. 由于 $0\leqslant t\leqslant 1$，x 的取值分三种情形：$x\leqslant 0$，$x\geqslant 1$，$0<x<1$.

微信公众号【数学考研】 (ID: djky66)

解 当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=\int_0^1 t(t-x)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}-\frac{x}{2}$；

当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)=\int_0^1 t(x-t)\mathrm{d}t=\frac{x}{2}-\frac{1}{3}$；

当 $0<x<1$ 时，令 $|t-x|=0$，得分界点 $t=x$，

$$f(x)=\int_0^x t(x-t)\mathrm{d}t+\int_x^1 t(t-x)\mathrm{d}t=\frac{x^3}{3}-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}.$$

综合如上结果

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}-\frac{x}{2}, & x\leqslant 0,\\ \frac{x}{2}-\frac{1}{3}, & x\geqslant 1,\\ \frac{x^3}{3}-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}, & 0<x<1.\end{cases}$$

【评注】 在被积函数中若有参数，一定要讨论参数的取值，再积分. 另外，题目可延伸为求函数 $f(x)$ 的单调区间、极值等等.

【例 21】 求 $\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x$，$a,b>0$.

解题思路 化为二重积分计算.

解 $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\mathrm{d}x = \int_0^1 [\int_a^b x^t \mathrm{d}t]\mathrm{d}x = \int_a^b [\int_0^1 x^t \mathrm{d}x]\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{1}{t+1}x^{t+1}\Big|_0^1 \mathrm{d}t$

$= \int_a^b \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = \ln\frac{b+1}{a+1}.$

【评注】　本题的做法具有一定难度，但可开阔我们的思路.

小结

定积分的计算与不定积分有许多类似之处，要熟练掌握凑微分法、换元积分法和分部积分法. 但与不定积分不同的是：

1. 定积分换元积分时，要相应地改变积分限，不必将变量还原；

2. 尽量利用定积分的几何意义，函数的奇偶性，周期性等重要公式简化计算；

3. 分段函数、含绝对值的函数、最大最小(max,min) 函数的定积分，要注意它们在不同区间上表达式不同的特点，根据积分对区间的可加性，按分界点划分积分区间后逐段积分；

4. 含参数的定积分计算应注意参数的不同取值，当参数取正整数时，常用分部积分法求出递推公式，再求解.

三、有关变限积分的问题

【例 22】　设 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t}\mathrm{d}t$，求 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x$.

解题思路　因为 $f(x)$ 不是初等函数，直接求 $f(x)$ 很困难，但用分部积分法可把 $f(x)$ 中的积分号去掉.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

解 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi f(x)\mathrm{d}(x-\pi)$

$= (x-\pi)f(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi (x-\pi)f'(x)\mathrm{d}x$

$= -\int_0^\pi (x-\pi)\frac{\sin x}{\pi - x}\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x = 2.$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【评注】　1. 用分部积分法可把 $f(x)$ 转化为 $f'(x)$.

2. 适当凑微分(如本题中 $\mathrm{d}(x-\pi)$)，使得第一部分为 0，这是分部积分法中经常使用的手法.

【例 23】　设 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，$g(1) = 1$，$\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$，令 $f(x) = \int_0^x g(x-t)t^2\mathrm{d}t$，求 $f''(1)$，$f'''(1)$.

解题思路　在被积函数中含有 x，可作变换 $u = x - t$，把 x 变到积分号外或积分限上，再利用变限积分的求导公式.

解 令 $x - t = u$，则 $t = x - u$，$t^2 = x^2 - 2xu + u^2$，

$f(x) = \int_0^x g(u)(x^2 - 2xu + u^2)\mathrm{d}u$

$= x^2\int_0^x g(u)\mathrm{d}u - 2x\int_0^x ug(u)\mathrm{d}u + \int_0^x u^2 g(u)\mathrm{d}u.$

所以

$$f'(x)=2x\int_0^x g(u)\mathrm{d}u+x^2g(x)-2\int_0^x ug(u)\mathrm{d}u-2x^2g(x)+x^2g(x)$$
$$=2x\int_0^x g(u)\mathrm{d}u-2\int_0^x ug(u)\mathrm{d}u.$$
$$f''(x)=2\int_0^x g(u)\mathrm{d}u+2xg(x)-2xg(x)=2\int_0^x g(u)\mathrm{d}u.$$
$$f'''(x)=2g(x).$$

从而 $f''(1)=2\int_0^1 g(u)\mathrm{d}u=1$，$f'''(1)=2g(1)=2$.

【评注】 不要犯如下错误$(\int_0^x g(x-t)t^2\mathrm{d}t)'=g(0)x^2$.

小结

1. 熟练掌握变限积分在各种形式下导数的求法；
2. 变限积分经常与极限等联系在一起考察，具有一定的综合性.

四、定积分的证明题

基本思路 定积分的证明题包括等式及不等式的证明，常用如下几种方法：

1. 一般的积分方法，如换元积分法（由积分限及被积函数确定变量代换的形式），分部积分法（可升高或降低被积函数导数的阶数）等；

2. 根据所证的式子适当对积分区间或被积函数作拆分；

3. 转化数字（或字母）式子为函数式子，如$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$变为$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$等；

4. 还可考虑用积分中值定理或微分中值定理、泰勒公式.

微信公众号【考研数学】(ID: ljky66)

【例 24】 证明$\int_1^a f(x^2+\frac{a^2}{x^2})\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_1^a f(x+\frac{a^2}{x})\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x}$.

解题思路 比较等式左右两边被积函数的特点，可在左式中作变换$x^2=t$.

证明 令 $x^2=t$，则 $2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$，

$$\text{左边}=\frac{1}{2}\int_1^a f(x^2+\frac{a^2}{x^2})\frac{\mathrm{d}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}\int_1^{a^2} f(t+\frac{a^2}{t})\frac{\mathrm{d}t}{t}$$
$$=\frac{1}{2}\int_1^a f(t+\frac{a^2}{t})\frac{\mathrm{d}t}{t}+\frac{1}{2}\int_a^{a^2} f(t+\frac{a^2}{t})\cdot\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

在上式第二项中，令 $t=\frac{a^2}{u}$，则

$$\int_a^{a^2} f(t+\frac{a^2}{t})\cdot\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\int_a^1 f(\frac{a^2}{u}+u)\cdot\frac{u}{a^2}(-\frac{a^2}{u^2})\mathrm{d}u$$
$$=\int_1^a f(u+\frac{a^2}{u})\cdot\frac{1}{u}\mathrm{d}u=\text{右边}.$$

从而等式得证.

【评注】 1. 注意两次变换的特点；

2. 把积分区间分解成若干小区间是定积分中常用的手法.

【例 25】　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数，又 $f(a)=f'(a)=0$，求证：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-b)^2\mathrm{d}x.$$

解题思路　从等式两边被积函数看，右边涉及二阶导数，左边为 0 阶导数，因而想到用分部积分法 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}(x-b)$. 这样分部积分的首项 $f(x)(x-b)\Big|_a^b=0$，这一点应熟练掌握.

证明　连续利用分部积分法

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=\int_a^b f(x)\mathrm{d}(x-b)=-\int_a^b f'(x)(x-b)\mathrm{d}(x-b)\\&=-\frac{1}{2}\int_a^b f'(x)\mathrm{d}(x-b)^2=\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-b)^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

【评注】　也可用分部积分法从右向左降低导数的阶数.

【例 26】　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数且 $f(a)=f(b)=0$，$M=\max\limits_{[a,b]}|f''(x)|$，证明 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{(b-a)^3}{12}M$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

解题思路　用分部积分法导出 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与 $f''(x)$ 的有关积分的关系.

证明　$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=\int_a^b f(x)\mathrm{d}(x-a)=-\int_a^b f'(x)(x-a)\mathrm{d}(x-b)\\&=\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\mathrm{d}x+\int_a^b f'(x)(x-b)\mathrm{d}x\\&=\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\mathrm{d}x+\int_a^b(x-b)\mathrm{d}f(x)\\&=\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\mathrm{d}x$，因此

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|&\leqslant\frac{1}{2}M\int_a^b(x-a)(b-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}M\int_a^b(b-x)\mathrm{d}(x-a)^2\\&=\frac{1}{4}M\int_a^b(x-a)^2\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^3}{12}M.\end{aligned}$$

【评注】　1. 注意分部积分方法的技巧(凑 $\mathrm{d}(x-a)$)；

2. 本题还可用泰勒公式来证，留作练习.

【例 27】　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且严格单调增，证明

$$(a+b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<2\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x.$$

解题思路 可考虑把 b 换为 x，去证明函数不等式 $(a+x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t < 2\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t$.

本书中单调上升定义指的就是“<”，其中不含等号. 本题中添了“严格”两字是为了强调起见.

证明 令 $F(x) = (a+x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t - 2\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t, (a < x \leqslant b)$，则

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + (a+x)f(x) - 2xf(x) \\ &= \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + (a-x)f(x) \\ &= f(\xi)(x-a) + (a-x)f(x) \\ &= (x-a)[f(\xi) - f(x)], \end{aligned}$$

其中用积分中值定理 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(\xi)(x-a)$（这里 $\xi \in (a,x)$）.

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调上升，所以 $f(\xi) < f(x)$，从而 $F'(x) < 0$，即 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少，从而 $F(b) < F(a) = 0$，可得

$$(a+b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x < 2\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x.$$

【例 28】 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调增加，$0 \leqslant g(x) \leqslant 1$. 证明

(1) $0 \leqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}t \leqslant x-a, x \in [a,b]$；

(2) $\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

解题思路 第一问直接利用定积分的保号性即得，第二问的关键是将定积分不等式转化为函数不等式，再用导数性质证明.

证明 (1) 因为 $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$，由定积分的性质知，当 $x \in [a,b]$ 时，

$$0 \leqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x \mathrm{d}t = x-a.$$

(2) 令 $F(x) = \int_a^{a+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t} f(u)\mathrm{d}u - \int_a^x f(u)g(u)\mathrm{d}u, \quad x \in [a,b]$.

由 $f(x)$，$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续知，$F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导，且

$$F'(x) = [f(a+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t) - f(x)]g(x).$$

由(1)知 $a+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t \leqslant x$，又因为 $f(x)$ 单调增加，$0 \leqslant g(x) \leqslant 1$，所以 $F'(x) \leqslant 0$，从而 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调不增. 所以 $F(b) \leqslant F(a) = 0$，即

$$\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

§3　反常积分

内容精讲

一、无穷区间的反常积分

(1) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，取 $t>a$，极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ 称为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的反常积分，也称广义积分. 记作 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x.$$

若右边极限存在，称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 如果 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ 不存在，则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

(2) 类似地可定义 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x\xlongequal{\triangle}\lim\limits_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x.$

(3) 定义 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\xlongequal{\triangle}\int_{-\infty}^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{t\to-\infty}\int_t^c f(x)\mathrm{d}x+\lim\limits_{h\to+\infty}\int_c^h f(x)\mathrm{d}x$，其中 c 为任意取定的一个数. 当且仅当右端两个极限都存在时，才称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 否则，称之为发散.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

二、无界函数的反常积分

(1) 设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，在 $x=a$ 的任一邻域内无界，称点 a 为 $f(x)$ 的瑕点，并称极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$ 为函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上的反常积分，也称广义积分. 记作

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

若此极限存在，称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 如果 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$ 不存在，则称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

类似地有下列定义：

(2) 若 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续，在 $x=b$ 的任一邻域内无界，定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\xlongequal{\triangle}\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，$x=a$ 与 $x=b$ 均为 $f(x)$ 的瑕点，定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\xlongequal{\triangle}\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^c f(x)\mathrm{d}x+\lim_{\delta\to0^+}\int_c^{b-\delta} f(x)\mathrm{d}x.$$

(4) 若 $f(x)$ 在 $[a,c)\cup(c,b]$ 上连续，点 $x=c$ 为 $f(x)$ 的一个瑕点，则定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{\triangle} \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

当且仅当右端两个反常积分都收敛时，才称反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛.

【注】 1. 考研中反常积分的基本问题是计算，计算归结为“定积分＋极限”，即将反常积分写成相应的定积分，求出后再取极限. 极限存在(或不存在)就收敛(或发散).

2. 反常积分也有普通积分的相应性质与计算方法，如换元积分法、分部积分法，只是在计算过程中分解为加减运算时应注意每一项均保证收敛(即极限存在).

3. 反常积分的牛顿-莱布尼茨公式：若$F'(x)=f(x)$，则

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a).$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{-\infty}^b = F(b) - F(-\infty).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty).$$

若a为瑕点，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - \lim\limits_{x\to a^+} F(x).$

若b为瑕点，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = \lim\limits_{x\to b^-} F(x) - F(a).$

4. 反常积分的分部积分法：设$f(x),g(x)$在$[a,+\infty)$有连续的导数，

当且仅当$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x)$存在且$\int_a^{+\infty} f'(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛，则可以分成两项计算.

$$\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

这里$f(x)g(x)\Big|_a^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)g(x)] - f(a)g(a).$

当不满足以上条件时，应该是$\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)\mathrm{d}x = \left[f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x\right]_a^{+\infty}$的形式，而不能随便分开.

计算一般反常积分也应如此. 例如

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3x+2} &= \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x \\ &= [\ln(x+1) - \ln(x+2)]\Big|_0^{+\infty} \\ &= \ln\frac{x+1}{x+2}\Big|_0^{+\infty} = 0 + \ln 2 = \ln 2,\end{aligned}$$

不能写成$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3x+2} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x+2}.$

无界函数的反常积分也有类似的结果.

三、反常积分收敛的比较判别法

1. 无穷限反常积分的比较判别法

(1)(不等式形式)设两个非负函数$f(x),g(x)$在$[a,+\infty)$上连续，且$f(x)\leqslant g(x)$，若反常积分$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$收敛，则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$一定收敛.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(2)(极限形式) 设两个非负函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c$,则

1) 当 $0<c<+\infty$ 时,反常积分 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 同敛散;

2) 当 $c=0$ 时,若反常积分 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 一定收敛;

3) 当 $c=+\infty$ 时,若反常积分 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 发散,则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散;

【注】　经常取 $g(x)=\dfrac{1}{x^p}$.

2. 无界函数反常积分的比较判别法

(1)(不等式形式) 设两个非负函数 $f(x),g(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续,且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=\infty$,在 $(a,b]$ 上 $f(x)\leqslant g(x)$,若反常积分 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 一定收敛.

(2)(极限形式) 设两个非负函数 $f(x),g(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续,都以 a 为瑕点,且 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c$,则

1) 当 $0<c<+\infty$ 时,反常积分 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 同敛散;

2) 当 $c=0$ 时,若反常积分 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 一定收敛;

3) 当 $c=+\infty$ 时,若反常积分 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 发散,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散;

【注】　经常取 $g(x)=\dfrac{1}{(x-a)^p}$.

结合如上的判别法,有下面几点说明:

1. 若反常积分绝对收敛,则此反常积分一定收敛.

2. 判别法中函数的连续可改为可积.

3. 判别法中只给出了一种情形,其他情形有类似的结论.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

四、几个重要的反常积分

1. $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2. 若 $a>0$,则 $\int_a^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^p}=\begin{cases}\dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1,\\ +\infty, & p\leqslant 1.\end{cases}$　特别地 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^p}=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1}, & p>1,\\ +\infty, & p\leqslant 1.\end{cases}$

3. 若 $a>1$,则 $\int_a^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln^p x}=\begin{cases}\dfrac{\ln^{1-p}a}{p-1}, & p>1,\\ +\infty, & p\leqslant 1.\end{cases}$

特别地 $\int_e^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^p x}\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{p-1}, & p>1,\\ +\infty, & p\leqslant 1.\end{cases}$

4. $\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-kx}\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{k^2}, & k>0,\\ +\infty, & k\leqslant 0.\end{cases}$

一般地$\int_0^{+\infty} x^n\mathrm{e}^{-kx}\mathrm{d}x(n>0)$，当 $k>0$ 时收敛，当 $k\leqslant 0$ 时发散.

5. $\int_a^b \dfrac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}=\begin{cases}\dfrac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q<1,\\ +\infty, & q\geqslant 1.\end{cases}$

例题分析

【例 1】 求 $I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解题思路 因被积函数中有根号，为去掉根号，作变换 $t=\sqrt{x}$.

解 令 $t=\sqrt{x}$，则

$$I=\int_0^{+\infty}2t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=-2\int_0^{+\infty}t\mathrm{d}\mathrm{e}^{-t}=-2t\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

$$=0-2\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^{+\infty}=2.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【评注】 1. 上述的 $-2t\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^{+\infty}=\lim\limits_{t\to+\infty}(-2t\mathrm{e}^{-t})+2\times 0\times\mathrm{e}^{-0}=0$；

2. 若在分部积分法中第一部分极限不存在，分部积分法失效，应按定义去求.

【例 2】 求 $\int_0^1\dfrac{x\mathrm{d}x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

解题思路 本题是无界函数的反常积分，作三角代换即可.

解 【方法一】 令 $x=\sin t$，则 $\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$. 当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=1$ 时，$t=\dfrac{\pi}{2}$. 因此

$$\int_0^1\frac{x\mathrm{d}x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t\cos t}{(2-\sin^2 t)\cos t}\mathrm{d}t=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\cos t)}{1+\cos^2 t}$$

$$=-\arctan(\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

【方法二】 令 $\sqrt{1-x^2}=u$，则 $\mathrm{d}u=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

当 $x=0$ 时，$u=1$；当 $x=1$ 时，$u=0$. 因此

$$\int_0^1\frac{x\mathrm{d}x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}=-\int_1^0\frac{1}{2-(1-u^2)}\mathrm{d}u=\int_0^1\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u=\arctan u\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

【例 3】　求 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}\mathrm{d}x$.

解题思路　本题是无界函数的反常积分，瑕点在积分域的内部，先去绝对值符号，化为瑕点在积分区间端点的积分，然后分段进行计算.

解
$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}\mathrm{d}x \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\mathrm{d}x + \int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2-x}}\mathrm{d}x \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}\mathrm{d}x + \int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}}\mathrm{d}x \\
&= \arcsin(2x-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} + \ln\left[(x-\frac{1}{2})+\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}\right]\Big|_{1}^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{\pi}{2} + \ln(2+\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

【评注】　1. 被积函数中含有绝对值时，应先去绝对值符号，化为分段函数，然后根据积分可加性分段求积分.

2. 被积函数中含有 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 时，一般都先配方.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 4】　求 $\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$.

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

解题思路　本题既是一个无限区间上的反常积分，也是无界函数的反常积分，此称混合型的反常积分. 利用变量代换和牛顿－莱布尼茨公式仍可得所求的反常积分值.

解　【方法一】　令 $x=\sec t$，则 $\mathrm{d}x=\sec t\cdot\tan t\mathrm{d}t$，且当 $x=1$ 时，$t=0$；当 $x\to+\infty$ 时，$t\to\frac{\pi}{2}$，所以

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec t\tan t}{\sec t\tan t}\mathrm{d}t = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

【方法二】　令 $x=\frac{1}{t}$，则 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$，且当 $x=1$ 时，$t=1$；当 $x\to+\infty$ 时，$t\to0$，所以

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} &= \int_{1}^{0} \frac{1}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}(-\frac{1}{t^2})\mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \arcsin t\Big|_{0}^{1} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

【例 5】 求 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$.

解题思路 本题是有理函数的反常积分，仍可用拆分被积函数的方法计算.

解 注意到 $\frac{1}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{x^2}{(1+x^2)^2}$，及 $\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$，有

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x-\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x\\&=\arctan x\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}x\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\left[x\cdot\frac{1}{1+x^2}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\right]=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

【例 6】 讨论 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 因为 $\left|\frac{\sin x}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{1}{1+x^2}\leqslant\frac{1}{x^2}$，而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 收敛，

由比较判别法，反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 绝对收敛，进而 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 收敛.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

【例 7】 讨论 $\int_1^{+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{1+x^7}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 因为 $\frac{x^2}{\sqrt{1+x^7}}\leqslant\frac{x^2}{x^{\frac{7}{2}}}=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$，而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$ 收敛，

由比较判别法，反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{1+x^7}}\mathrm{d}x$ 是收敛的.

【例 8】 讨论 $\int_1^2\frac{\sqrt{x}}{\ln x}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 这是一个无界函数的反常积分，$x=1$ 为瑕点，

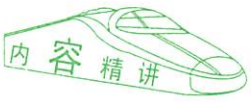
由于 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)\frac{\sqrt{x}}{\ln x}=1$，而反常积分 $\int_1^2\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x$ 是发散的，

用比较判别法的极限形式，反常积分 $\int_1^2\frac{\sqrt{x}}{\ln x}\mathrm{d}x$ 是发散的.

小结

反常积分的计算虽然与通常的定积分计算很相似，同样有换元积分法、分部积分法，且换元与分部积分的思路和普通积分一致. 但是反常积分在进行加减运算时应小心，一般来说加减运算是不成立的，且要注意对于上、下限都是无穷限，瑕点位于积分区间的中间，以及既有无穷限又有瑕点的反常积分，通常应该先插入分点，即分段积分化为若干个单一型反常积分，再分别计算或讨论其收敛性.

§4　定积分的应用



一、定积分应用的基本原理——微元法(元素法)

在用定积分求面积、体积、平均值等问题时,常常要利用微元法思想,其基本步骤如下:

1. 所求量 U 是与区间 $[a,b]$ 以及定义在其上的函数 $f(x)$ 有关的量;

2. U 对于区间 $[a,b]$ 具有可加性,即当把区间 $[a,b]$ 分成许多部分区间 Δx 之和时,U 相应地被分成许多部分量 ΔU,且 U 等于这些部分量之和;

3. 将 $f(x)$ 在小区间 $[x,x+\Delta x]$ 上近似为常量,则有 $\Delta U \approx f(x)\Delta x$;

4. 若 $\Delta U = f(x)\Delta x + o(\Delta x)(\Delta x \to 0)$,则把 $f(x)\Delta x$ 称为 U 的微元,记作 $\mathrm{d}U$,即 $\mathrm{d}U = f(x)\Delta x$,于是,所求量 $U = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

二、定积分的几何应用

1. 平面图形的面积

(1) 直角坐标情形

1° 由曲线 $y = f(x), y = g(x)[f(x) \leqslant g(x)]$,直线 $x = a, x = b$ 所围图形的面积为

$$S = \int_a^b [g(x) - f(x)]\mathrm{d}x.$$

2° 由曲线 $x = \varphi(y), x = \psi(y)[\varphi(y) \leqslant \psi(y)]$,直线 $y = c, y = d$ 所围图形的面积为

$$S = \int_c^d [\psi(y) - \varphi(y)]\mathrm{d}y.$$

(2) 极坐标情形

1° 由曲线 $r = r(\theta)$,及射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta, (\alpha < \beta)$ 所围平面图形的面积为

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

2° 由曲线 $r = r_1(\theta), r = r_2(\theta)[r_1(\theta) \leqslant r_2(\theta)], \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$ 所围平面图形的面积为

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [r_2^2(\theta) - r_1^2(\theta)]\mathrm{d}\theta.$$

2. 旋转体的体积.

(1) 由连续曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x = a, x = b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形

绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积为　$V_x = \pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x (a < b)$.

绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积为　$V_y = 2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x (f(x) \geqslant 0, b \geqslant a \geqslant 0)$.

(2) 由连续曲线 $x = \varphi(y)$ 与直线 $y = c, y = d$ 及 y 轴围成平面图形

绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积为　$V_y = \pi\int_c^d \varphi^2(y)\mathrm{d}y (c < d)$.

绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积为　$V_x = 2\pi\int_c^d y\varphi(y)\mathrm{d}y (\varphi(y) \geqslant 0, d \geqslant c \geqslant 0)$.

【注】 应掌握平面图形绕平行于坐标轴的直线所得旋转体体积的计算方法.

3. 函数的平均值 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值为

$$\bar{y}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

三、定积分的经济应用

(1) 设边际需求为 $Q'(p)$，则需求函数为 $Q(p)=\int_0^p Q'(p)\mathrm{d}p+Q(0)$；

(2) 设边际成本为 $C'(Q)$，则成本函数为 $C(Q)=\int_0^Q C'(Q)\mathrm{d}Q+C(0)$；

(3) 设边际收益为 $R'(Q)$，则收益函数为 $R(Q)=\int_0^Q R'(Q)\mathrm{d}Q+R(0)$；

(4) 设总产量对时间 t 的变化率为 $\theta'(t)$，则从第 a 天到第 b 天的平均日产量为

$$\bar{\theta}=\frac{1}{b-a}\int_a^b \theta'(t)\mathrm{d}t.$$

例题分析

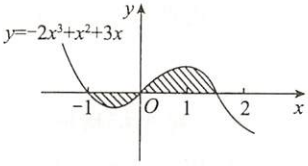
一、定积分的几何应用

【例 1】 求曲线 $y=-2x^3+x^2+3x$ 与 x 轴所围图形的面积.

解题思路 大致画出曲线，找到与 x 轴的三个交点即可求面积.

微信公众号【顺来考研】 (ID: djky66)

解 所求面积的图形如图所示，所求面积为



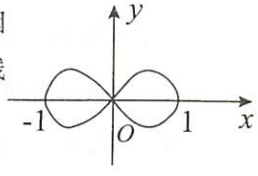
$$\begin{aligned}S&=-\int_{-1}^{0}(-2x^3+x^2+3x)\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{3}{2}}(-2x^3+x^2+3x)\mathrm{d}x\\&=\left(\frac{1}{2}x^4-\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(-\frac{1}{2}x^4+\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right)\Big|_0^{\frac{3}{2}}\\&=\frac{253}{96}.\end{aligned}$$

【例 2】 双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 所围成的区域面积可用定积分表示为

(A) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta$.　　(B) $4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta$.

(C) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos 2\theta}\mathrm{d}\theta$.　　(D) $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2\theta)^2\mathrm{d}\theta$.

解 双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 所围成的图形是关于 y 轴对称的，因此所求面积 S 为 $x\geqslant 0$ 部分图形面积 S_1 的两倍. 对于 $x\geqslant 0$ 部分双纽线的极坐标方程是



$$r^2=\cos 2\theta,\ -\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}.$$

于是有　　$S_1=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta$,

从而 $S=2S_1=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta$,因此正确选项为(A).

【例 3】　求曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x(x\geqslant 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

解题思路　把无界区域的面积写成无穷限反常积分,进而转化为数项级数的和.

解　所围图形的面积为

$$S=\int_0^{+\infty}|\mathrm{e}^{-x}\sin x|\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin x|\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

当 k 为偶数时,$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin x|\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x$

当 k 为奇数时,$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin x|\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x$

而 $\int\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\sin x+\cos x)+C$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

无论 k 为奇数还是偶数,均有 $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin x|\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-k\pi}(1+\mathrm{e}^{-\pi})$

有 $S=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin x|\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{-\pi})\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-k\pi}=\frac{1}{2}\frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}$.

【评注】　本题是一个定积分的几何意义、反常积分及数项级数相结合的综合题,有一定难度.

【例 4】　设区域 D 由 $(x-a)^2+y^2\leqslant a^2$ 和 $y\geqslant x$ 所确定,求区域 D 绕 $x=3a$ 旋转一周所得旋转体的体积($a>0$).

解题思路　以 y 为积分变量用微元法,

解　取 y 为积分变量,则旋转体的体积微元为

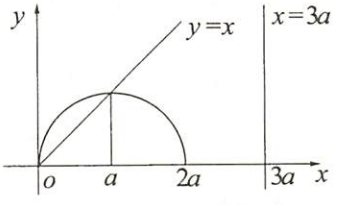
$$\mathrm{d}V=\{\pi[3a-(a-\sqrt{a^2-y^2})]^2-\pi(3a-y)^2\}\mathrm{d}y,$$

所以所求体积为

$$V=\int_0^a[\pi(3a-a+\sqrt{a^2-y^2})^2-\pi(3a-y)^2]\mathrm{d}y$$

$$=\pi\int_0^a[4a\sqrt{a^2-y^2}+6ay-2y^2-4a^2]\mathrm{d}y$$

$$=\pi^2a^3-\frac{5}{3}\pi a^3.$$



【评注】　用公式法求解,但容易出错,应熟练掌握微元法.

【例 5】 设位于曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2 x)}}(\mathrm{e}\leqslant x<+\infty)$ 下方，x 轴上方的无界区域为 G，则 G 绕 x 轴旋转一周所得空间区域的体积为_____.

解题思路 利用旋转体的体积公式即得.

解 应填 $\dfrac{\pi^2}{4}$.

$$V=\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\pi y^2\mathrm{d}x=\pi\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\mathrm{d}x=\pi\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{1+\ln^2 x}\mathrm{d}(\ln x)$$

$$=\pi\cdot\arctan\ln x\Big|_{\mathrm{e}}^{+\infty}=\pi\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{4}.$$

【例 6】 过点 $(0,1)$ 作曲线 $L:y=\ln x$ 的切线，切点为 A，又 L 与 x 轴交于 B 点，区域 D 由 L 与直线 AB 围成. 求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解 (1) 设切点 A 的坐标为 (x_0,y_0)，则曲线 $y=\ln x$ 在 A 点处的切线方程是

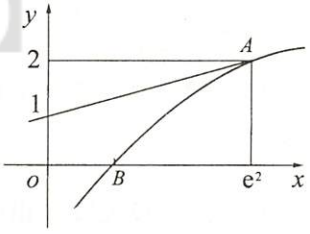
$$y=\ln x_0+\frac{1}{x_0}(x-x_0).$$

由该切线过点 $(0,1)$ 知 $\ln x_0-1=1$，从而 $x_0=\mathrm{e}^2$，所以 $y_0=2$.

又 L 与 x 轴交于 B 的坐标为 $(1,0)$，故平面图形 D 的面积为

$$S=\int_1^{\mathrm{e}^2}\ln x\mathrm{d}x-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^2-1)\cdot 2$$

$$=x\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}^2}-\int_1^{\mathrm{e}^2}\mathrm{d}x-\mathrm{e}^2+1=2.$$



(2) 直线 $AB:y=\dfrac{2}{\mathrm{e}^2-1}(x-1)$ 与 x 轴及直线 $x=\mathrm{e}^2$ 所围成的三角形绕 x 轴旋转一周所得圆锥体的体积为

$$V_1=\frac{1}{3}\pi\cdot 2^2(\mathrm{e}^2-1)=\frac{4\pi(\mathrm{e}^2-1)}{3}.$$

因此 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积

$$V=\pi\int_1^{\mathrm{e}^2}\ln^2 x\mathrm{d}x-V_1=\pi\left[x\ln^2 x\Big|_1^{\mathrm{e}^2}-\int_1^{\mathrm{e}^2}2\ln x\mathrm{d}x\right]-\frac{4\pi(\mathrm{e}^2-1)}{3}$$

$$=4\mathrm{e}^2\pi-\pi\left[2x\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}^2}-\int_1^{\mathrm{e}^2}2\mathrm{d}x\right]-\frac{4\pi(\mathrm{e}^2-1)}{3}$$

$$=2\pi(\mathrm{e}^2-1)-\frac{4\pi(\mathrm{e}^2-1)}{3}=\frac{2\pi(\mathrm{e}^2-1)}{3}.$$

小结

一元函数的定积分在实际中的应用很广泛，包括在几何、物理、经济中的应用，数学三只要求掌握在几何、经济中的应用. 计算时不一定非要死记一些公式，要理解其蕴含的思想，特别是微元法的运用.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

二、定积分的经济应用

【例 7】　设某产品的边际平均成本为 $\overline{C}'(Q)=0.1Q-\frac{4}{Q^2}-0.3$，已知产量 $Q=4$（百件）时的平均成本为 2.6（万元），求边际成本最小时的产量.

解题思路　先求出平均成本函数 $\overline{C}(Q)$ 和成本函数 $C(Q)$，再求出边际成本函数 $C'(Q)$，最后求 $C'(Q)$ 得最小值点.

解　由已知，$\overline{C}(4)=2.6$（万元），于是平均成本函数为

$$\overline{C}(Q)=\int_4^Q\overline{C}'(t)\mathrm{d}t+\overline{C}(4)=\int_4^Q(0.1t-\frac{4}{t^2}-0.3)\mathrm{d}t+2.6$$

$$=\frac{1}{20}Q^2-\frac{3}{10}Q+\frac{4}{Q}+2.$$

从而成本函数为　$C(Q)=Q\overline{C}(Q)=\frac{1}{20}Q^3-\frac{3}{10}Q^2+4+2Q.$

边际成本函数为　$C'(Q)=\frac{3}{20}Q^2-\frac{3}{5}Q+2.$

令 $C''(Q)=\frac{3}{10}Q-\frac{3}{5}=0$，得驻点 $Q=2$，

由于 $C'''(Q)=\frac{3}{10}>0$，所以当 $Q=2$ 时，$C'(Q)$ 取极小值，也为最小值.

故边际成本最小时的产量为 2 百件.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 8】　某公司投资 2000 万元建成一条生产线. 投产后，在时刻 t 的追加成本和追加收益分别为 $G(t)=5+2t^{\frac{2}{3}}$（百万元 / 年），$\Phi(t)=17-t^{\frac{2}{3}}$（百万元 / 年）. 试确定该生产线何时停产可获得最大利润？最大利润是多少？

解　边际利润为 $L'(t)=\Phi(t)-G(t)$，由 $L'(t)=\Phi(t)-G(t)=0$ 得 $t=8$.

又 $L''(8)<0$，则投产 8 年时可获最大利润，且其值为

$$L=\int_0^8L'(t)\mathrm{d}t-20=\int_0^8(12-3t^{\frac{2}{3}})\mathrm{d}t-20=18.4\text{ 百万元}.$$

数学是各式各样的证明技巧。

——维特根斯坦

第四章　多元函数微积分学

了解　多元函数的概念，二元函数的几何意义，二元函数的极限与连续的概念，有界闭区域上二元连续函数的性质，多元函数偏导数与全微分的概念，隐函数存在定理，多元函数极值和条件极值的概念，二元函数极值存在的充分条件，二重积分的基本性质，二重积分的中值定理，无界区域上较简单的反常二重积分.

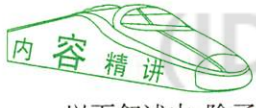
理解　二重积分的概念.

会　求多元复合函数一阶、二阶偏导数，求全微分，求多元隐函数的偏导数，求二元函数的极值，用拉格朗日乘数法求条件极值，求简单多元函数的最大值和最小值，并解决一些简单的应用问题，计算无界区域上较简单的反常二重积分.

掌握　多元函数极值存在的必要条件，二重积分的计算方法(直角坐标，极坐标).

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

§1　多元函数微分学



以下叙述中，除了一的 2、二的 2、五的 3 只适用于二元函数外，其他各项对多元函数均类似成立.

一、多元函数的极限与连续

1. 二元函数的定义

设 D 是平面上的一个点集，如果对于每一个点 $P(x,y)\in D$，变量 z 按照一定的法则总有唯一确定的值和它对应，则称 z 是变量 x,y 的二元函数(或点 P 的函数)，记为 $z=f(x,y)$. 点集 D 称为该函数的定义域，x,y 称为自变量，z 称为因变量.

2. 二元函数的几何意义

二元函数 $z=f(x,y),(x,y)\in D$，在几何上一般对应空间直角坐标系 $Oxyz$ 中一个空间曲面.

3. 二元函数的极限

设二元函数 $z=f(x,y)$ 在平面区域 D 有定义，点 $(x_0,y_0)\in D$ 或在 D 的边界上. 如果动点 $P(x,y)$ 以任何方式无限趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 总是无限趋于一个常数 A，则称当 $P(x,y)$ 趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 以 A 为极限，记作 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=A$，或 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 或 $\lim\limits_{P\to P_0} f(x,y)=A$，即 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=A$.

如果用 $\varepsilon-\delta$ 的语言，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=A\Leftrightarrow$ 对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当点 $P(x,y)$ 满足 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 且 $P(x,y)\in D$ 时，有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$.

【注】 二元函数的极限存在，要求沿着所有可能的路径趋于 (x_0,y_0) 时，对应的函数均要趋于同一个常数. 换句话说，如果沿着两条不同的路径趋于 (x_0,y_0) 时，对应的函数趋于不同的值，或者沿某一条路径趋于 $P(x_0,y_0)$ 时 $f(x,y)$ 不趋于某定值，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$ 不存在.

4. 二元函数的连续

若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续. 如果 $f(x,y)$ 在区域 D 上每一点都连续，则称 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续.

5. 有界闭区域上二元连续函数的性质

性质 1（最大值和最小值定理）在有界闭区域 D 上的二元连续函数，必取到最大值和最小值.

性质 2（介值定理）在有界闭区域 D 上的二元连续函数，必取到介于其最大值和最小值之间的任何数.

二、偏导数与全微分

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

1. 偏导数的定义

设二元函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记为 $f'_x(x_0,y_0)$ 或 $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$.

类似地，若极限 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$ 存在，则称此极限值为 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数，记为 $f'_y(x_0,y_0)$ 或 $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$.

【注】 由定义可见，若一元函数 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处的导数存在，$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数存在，则它们分别表示 $f'_x(x_0,y_0)$ 及 $f'_y(x_0,y_0)$，即 $f'_x(x_0,y_0)=\left.\dfrac{\mathrm{d}f(x,y_0)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$，$f'_y(x_0,y_0)=\left.\dfrac{\mathrm{d}f(x_0,y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=y_0}$.

如果二元函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 的每一点 (x,y) 处都有偏导数，一般地说，它们仍是 x,y 的函数，称为 $f(x,y)$ 的偏导函数，简称偏导数，记为 $f'_x(x,y)$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$f'_y(x,y)$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

2. 二元函数偏导数的几何意义

设有二元函数 $z=f(x,y)$，且 $z_0=f(x_0,y_0)$，则 $f'_x(x_0,y_0)$ 和 $f'_y(x_0,y_0)$ 在几何上分别表示曲线 $\begin{cases}z=f(x,y),\\y=y_0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}z=f(x,y),\\x=x_0\end{cases}$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的切线对 x 轴和对 y 轴的斜率.

3. 全微分

(1) 全微分的定义.

若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全增量可表示为

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

其中 A, B 与 $\Delta x, \Delta y$ 无关，$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，则称函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微，且 $A\Delta x + B\Delta y$ 称为 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的全微分，记为 $\mathrm{d}z\Big|_{(x_0, y_0)}$，即 $\mathrm{d}z\Big|_{(x_0, y_0)} = A\Delta x + B\Delta y$. 对自变量 x 与 y 约定 $\Delta x = \mathrm{d}x, \Delta y = \mathrm{d}y$，故全微分又可写成 $\mathrm{d}z = A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}y$.

(2) 可微与连续的关系.

若函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微，则必在 (x, y) 处连续.

(3) 可微的必要条件.

如果函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微，则该函数在点 (x, y) 处的两个偏导数 $f'_x(x, y)$，$f'_y(x, y)$ 都存在.

(4) 可微的充分条件.

如果函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数 $f'_x(x, y)$，$f'_y(x, y)$ 在点 (x, y) 连续，则函数在该点可微.

(5) 全微分的形式不变性.

设 $z = f(u, v)$，$u = u(x, y)$，$v = v(x, y)$，如果 $f(u, v)$，$u(x, y)$，$v(x, y)$ 分别有连续偏导数，则复合函数 $z = f(u, v)$ 在 (x, y) 处的全微分仍可表为 $\mathrm{d}z = \dfrac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u + \dfrac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v$，即无论 u, v 是自变量还是中间变量，上式总成立.

【注】 全微分形式不变性可理解为：在全微分 $\mathrm{d}z$ 的公式中，z 对什么变量求偏导就乘以什么变量的微分，不论这个变量是自变量，还是中间变量.

4. 高阶偏导数

如果二元函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数 $f'_x(x, y)$，$f'_y(x, y)$ 仍然具有偏导数，则它们的偏导数称为 $z = f(x, y)$ 的二阶偏导数，记作

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{或 } f''_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{或 } f''_{xy}(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{或 } f''_{yy}(x, y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{或 } f''_{yx}(x, y)$$

其中 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 称为二阶混合偏导数.

三、复合函数求导法则

1. 设 $u = \varphi(x, y)$ 和 $v = \psi(x, y)$ 在点 (x, y) 处偏导数存在，函数 $z = f(u, v)$ 在对应点 (u, v) 具有连续偏导数，则复合函数 $z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$ 在点 (x, y) 处偏导数存在，且

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

2. 设 $z = f(u, v)$ 有连续偏导数，一元函数 $u = \varphi(t)$，$v = \psi(t)$ 都可导，则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},$$

这里 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ 称为 z 对 t 的全导数.

3. 设 $z = f(u, v, w)$ 有连续偏导数，$u = \varphi(x, y)$，$v = \psi(x, y)$，$w = \omega(x, y)$ 偏导数存在，则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}.$$

【注】 1. 多元函数的复合函数求偏导不论复合关系多复杂，其基本原则是：有几个中间变量求出来就有几项，每项先对中间变量求偏导再乘以中间变量对自变量的偏导数.

2. 含有抽象函数的复合函数求二阶偏导是重点又是相对难点，应注意 $f(u,v)$ 对 u,v 求完偏导后一般还是 u,v 的函数.

四、隐函数的求导公式

1. 由方程确定的隐函数的导数

设函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域内具有连续的偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某邻域内能唯一确定一个单值连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$，它满足 $z_0=f(x_0,y_0)$，并有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}.$$

【注】 当 $F'_x(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ 或 $F'_y(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ 时，可分别确定隐函数 $x=\varphi(y,z)$ 或 $y=\psi(x,z)$.

2. 由方程组确定的隐函数的导数

设方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 确定了隐函数 $u=u(x,y),v=v(x,y)$，则通过等式两边同时对 x,y 求偏导，注意到 u,v 是 x,y 的函数，有

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

$$\begin{cases}F'_x+F'_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+F'_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\G'_x+G'_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+G'_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0.\end{cases}$$

解此方程组，并设运算过程中出现的分母 $\neq 0$，求出 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 即可. 完全类似，方程两端对 y 求偏导，可求出 $\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

五、多元函数的极值

1. 极值的定义

若在 (x_0,y_0) 的某邻域内恒有 $f(x,y)\leqslant f(x_0,y_0)$（或 $\geqslant f(x_0,y_0)$），则称 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 有极大值 $f(x_0,y_0)$（或极小值 $f(x_0,y_0)$）. 对于自变量的取值有附加条件的极值称为条件极值.

2. 极值存在的必要条件

设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 具有一阶偏导数，且在点 (x_0,y_0) 处有极值，则必有

$$f'_x(x_0,y_0)=0,f'_y(x_0,y_0)=0.$$

3. 二元函数极值存在的充分条件（此充分条件只适用于二元函数）

设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内且有一阶及二阶连续偏导数，又 $f'_x(x_0,y_0)=0$，$f'_y(x_0,y_0)=0$，令 $A=f''_{xx}(x_0,y_0),B=f''_{xy}(x_0,y_0),C=f''_{yy}(x_0,y_0)$. 则

(1) $B^2-AC>0$ 时，(x_0,y_0) 不是极值点；

(2) $B^2-AC<0$ 时，(x_0,y_0) 为极值点，且当 $A<0$ 时，(x_0,y_0) 为极大值点，$A>0$ 时，(x_0,y_0) 为极小值点；

(3) $B^2-AC=0$ 时，(x_0,y_0) 是否为极值点（需进一步用其他办法探讨，但不在考纲之内）.

4. 条件极值

求 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的可能极值点，先令

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),$$

解方程组 $\begin{cases}F'_x=f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y)=0,\\F'_y=f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y)=0,\\F'_\lambda=\varphi(x,y)=0,\end{cases}$ 得 x,y 及 λ，则其中 x,y 就是可能极值点的坐标.

【注】 条件极值问题找出可能极值点后，是否确为极值点，不能由无条件极值方法判定，一般根据问题的实际背景或比较可能极值点的函数值讨论确定. 另外，约束条件可多于一个.

5. 多元函数的最大值、最小值及其简单应用

闭区域上连续多元函数的最值可能在区域内部或边界上达到. 对于实际问题一般根据实际背景来确定是否取最值.（如可能极值点唯一，则极小(大) 值点即最小(大) 值点).

六、重要公式与结论

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A\Leftrightarrow f(x,y)=A+\alpha(x,y)$，其中 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\alpha(x,y)=0$.

2. 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 不存在的方法：当 (x,y) 沿不同路径趋于 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 趋于不同的值或不存在，或者取一条路径 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 而 $\lim f(x,y)$ 不存在，则 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 不存在.

3. 函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的几个概念的关系

$$\begin{array}{ccc}f'_x(x,y),f'_y(x,y)\text{ 在 }(x_0,y_0)\text{ 处连续} & \not\Leftarrow\ \Rightarrow & f(x,y)\text{ 在 }(x_0,y_0)\text{ 可微.}\\ \Downarrow\not\Uparrow & & \Downarrow\not\Uparrow\\ f(x,y)\text{ 在点 }(x_0,y_0)\text{ 连续} & \not\Leftarrow\ \Rightarrow & f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0)\text{ 存在.}\end{array}$$

4. 多元函数为常数的条件

(1) 设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上满足 $\frac{\partial f}{\partial x}\equiv 0,\frac{\partial f}{\partial y}\equiv 0$，则 $f(x,y)$ 在区域 D 上为常数.

(2) 设函数 $z=f(x,y)$ 定义在全平面上，若 $\frac{\partial f}{\partial x}\equiv 0$，则 $f(x,y)=\varphi(y)$；若 $\frac{\partial f}{\partial y}\equiv 0$，则 $f(x,y)=\psi(x)$；其中 $\varphi(y),\psi(x)$ 均为任意的一元函数.

5. $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微 $\Leftrightarrow\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta z-[f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y]}{\rho}=0$，其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

6. 若函数 $z=f(x,y)$ 的两个混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在区域 D 内连续，则在 D 内 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

一、二元函数的极限与连续

基本思路 求二元函数的极限要比求一元函数的极限困难得多，我们只需做到：一是会求一些简单二元函数的极限；二是能判断二元函数的极限不存在. 函数的连续实质上还是极限问题. 求极限的主要方法是：

微信公众号【启学考研】(ID: qjky66)

1. 利用一元函数求极限的方法，如：四则运算法则、无穷小代换、重要极限、有界变量与无穷小量的乘积为无穷小量、夹逼准则.

2. 作变量代换，化二元函数的极限为一元函数的极限.

【例 1】　求 $I=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

解题思路　此题为 1^∞ 型未定式，可把其转化为一元函数的极限.

解　$I=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{x}{x+y}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\frac{x}{x+y}}=\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$.

【例 2】　求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 2}}\dfrac{\sin(xy^2)}{x}$.

解题思路　令 $u=xy^2$，则 $\dfrac{\sin(xy^2)}{x}=y^2\dfrac{\sin u}{u}$，显然 $u\to 0$，利用重要极限及极限的四则运算法则即可.

解　令 $u=xy^2$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 2}}\dfrac{\sin(xy^2)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 2}}y^2\times\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=4$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)
微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

【例 3】　求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

解　由重要不等式有 $x^2y^2\leqslant\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}(x^2+y^2)^2$，则

$$0\leqslant\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\leqslant\frac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2}.$$

而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2}=0$，用夹逼准则得 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=0$.

【评注】　本题可用如下方法：令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{r\to 0}r\cos^2\theta\sin^2\theta=\frac{1}{4}\lim_{r\to 0}r\sin^2 2\theta=0.$$

【例 4】　求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\y\to 0}}\dfrac{\mathrm{e}^{x\sin y}-1}{\sqrt{1+x^2y}-1}$.

解题思路　利用无穷小量等价代换 $\mathrm{e}^{x\sin y}-1\sim x\sin y$，$\sqrt{1+x^2y}-1\sim\dfrac{1}{2}x^2y$.

解　$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\y\to 0}}\dfrac{\mathrm{e}^{x\sin y}-1}{\sqrt{1+x^2y}-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\y\to 0}}\dfrac{x\sin y}{\frac{1}{2}x^2y}=2\lim\limits_{\substack{x\to 1\\y\to 0}}\dfrac{1}{x}\lim\limits_{\substack{x\to 1\\y\to 0}}\dfrac{\sin y}{y}=2$.

【例 5】 讨论极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 的存在性.

解 当动点 $P(x,y)$ 沿曲线 $x=ky^2$ 趋于点 $(0,0)$ 时

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{ky^4}{k^2y^4+y^4} = \frac{k}{k^2+1}.$$

这个极限值不是一个确定的常数,它随着 k 的变化而改变,因此极限不存在.

【评注】 讨论极限的存在性,经常可考虑选取不同的路径,若沿着两条不同的路径的极限不相等,则函数的极限一定不存在.当沿着两条不同的路径的极限相等,不能得到函数的极限存在,但可知道若极限存在,只能为此数值,要想证明极限存在还需考虑其他方法.

【例 6】 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处的连续性.

解题思路 实际上,只需验证 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 是否存在且为 $f(0,0)$.

解 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,则有

$$0\leqslant |f(x,y)| = \left|\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{r^2\sin 4\theta}{4}\right| \leqslant \frac{r^2}{4}.$$

所以当 $(x,y)\to(0,0)$ 时,即 $r\to 0$ 时,$\dfrac{r^2}{4}\to 0$.故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0=f(0,0)$,可见 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

微信公众号【同学考研】 (ID: djky66)

小结

1. 求二元函数的极限是难点但不是重点,考试要求较低,一般说可借助一元函数求极限的方法.

2. 说明二元函数 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 的极限不存在,通常可取两条不同的路径具有不同的极限或沿某条曲线的极限不存在.

3. 考察分块二元函数在分界点处的连续性一般用定义 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$.

二、偏导数与全微分的概念

【例 7】 设 $z=(\sin y^3+x^3)(x+y^4)^{\frac{x}{x}+e^{x^3y^2}}$,求 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}$.

解题思路 直接求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$,再代入 $(1,0)$,但运算较复杂且易出错,可计算 $\left.\dfrac{\mathrm{d}z(x,0)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}$.

解 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)} = \left.\dfrac{\mathrm{d}z(x,0)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1} = (x^4)'\Big|_{x=1} = 4.$

【评注】 在可微的情况下,求一点处的偏导数转化为一元函数求导数要更方便一些.

【例 8】　已知函数 $f(x,y)$ 在点(0,0)的某邻域内有定义，且 $f(0,0)=0$，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}=1$，则 $f(x,y)$ 在点(0,0)处

(A) 极限存在但不连续.　　(B) 连续但偏导数不存在.

(C) 偏导数存在但不可微.　　(D) 可微.

解题思路　已知抽象函数 $f(x,y)$ 的有关极限存在，考察其极限、连续性、偏导数及可微性，一般利用定义来分析.

解　由于 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}=1$，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}(x^2+y^2)=0$，于是，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)=0$，又 $f(0,0)=0$，所以，$f(x,y)$ 在(0,0)处极限存在且连续. 又由 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}=1$ 得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)}{x^2}=1,\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)}{y^2}=1,$$

所以　$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)}{x^2}x=0.$$

同理，$f'_y(0,0)=0$. 故 $f(x,y)$ 在(0,0)处偏导数存在.

因为　$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-[f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y]}{\rho}=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}(\rho=\sqrt{x^2+y^2})$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}=0,$$

所以 $f(x,y)$ 在(0,0)处可微.

【评注】　一般地，若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y_0)=A$，且 $\lim\limits_{y\to y_0}f(x_0,y)=A$，但反之不然. 这里 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义.

【例 9】　考察函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在点(0,0)处是否连续？偏导数是否存在？是否可微？

解题思路　本题含有绝对值，且(0,0)恰好是 $|xy|$ 等于零的点，因而在(0,0)处的连续、偏导数及可微要用定义.

解　因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\sqrt{|xy|}=0$，且 $f(0,0)=0$，所以 $f(x,y)$ 在点(0,0)处连续.

又

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0,$$

所以 $f'_x(0,0)=0$. 同理 $f'_y(0,0)=0$. 即 $f(x,y)$ 在点(0,0)处的两个偏导数存在.

而　$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f-[f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y]}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x||\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

当动点沿直线 $y=x$ 趋于点(0,0)，即 $\Delta y=\Delta x\to 0$ 时，得

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x||\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

故函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在(0,0)处不可微.

【注】 1. 在一元函数中,函数在某点的可导性与可微性是等价的. 但对于多元函数,它在某点处的两个偏导数均存在不能保证它的可微性. 这是多元函数与一元函数的不同之处. 从本题还可看到,即使加上函数本身的连续性仍不能成为可微的充分条件.

2. 一元函数与多元函数在极限存在、连续、可导(偏导)、可微(全微分)的相互关系上,有相同之处,更有相异之处(见本节重要公式与结论).

【例 10】 设 $z=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 在(0,0)点,函数是否连续?是否偏导数存在?是否可微?一阶偏导数是否连续?

解题思路 (0,0)点是分块二元函数的分界点,在此点处的连续、偏导数、可微等用定义处理即可.

解 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z(x,y)=\lim_{r\to 0}\frac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^2}=\frac{1}{4}\lim_{r\to 0} r^2\sin^2 2\theta=0=z(0,0),$$

所以 $z(x,y)$ 在(0,0)连续.

由偏导数的定义 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{z(0+\Delta x,0)-z(0,0)}{\Delta x}=0$,同理 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=0$.

又因为 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta z-[z'_x(0,0)\Delta x+z'_y(0,0)\Delta y]}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{\frac{3}{2}}}=0$,

其中 $\rho=[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{\frac{1}{2}}$,故 $z(x,y)$ 在(0,0)处可微.

而当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\partial z}{\partial x}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)},\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\partial z}{\partial y}=\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}$$

所以在(0,0)处一阶偏导数连续.

【评注】 一阶偏导数在某点连续,则函数在此点一定可微. 一阶偏导数在某点不连续,函数在此点也可能可微. 如

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

【例 11】 设 $f(x,y)$ 具有一阶偏导数,且在任意的 (x,y),都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0,\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$,则

(A) $f(0,0)>f(1,1)$.　　(B) $f(0,0)<f(1,1)$.

(C) $f(0,1)>f(1,0)$.　　(D) $f(0,1)<f(1,0)$.

解 由 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$ 知 $f(x,y)$ 关于 x 单调递增,则 $f(1,y)>f(0,y)$.

微信公众号(顶尖考研)(ID:djky66)

由$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$知$f(x,y)$关于$y$单调减少，则$f(x,0)>f(x,1)$.

综合如上两个不等式得$f(1,0)>f(0,0)>f(0,1)$. 选(D).

小结

1. 分块函数在分界点处偏导数、可微的考察一般用定义.

2. 讨论二元函数$f(x,y)$在(x_0,y_0)的可微性，可从如下几个方面考虑.

(1) 若二元函数$f(x,y)$在(x_0,y_0)的偏导数至少有一个不存在，则函数不可微.

(2) 若二元函数$f(x,y)$在(x_0,y_0)不连续，则函数不可微.

(3) 若二元函数$f(x,y)$在(x_0,y_0)连续，两个偏导数存在，则考虑

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-[f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y]}{\rho},\text{其中}\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}.$$

若极限为0，则函数在(x_0,y_0)可微，否则不可微.

3. 注意一元函数微分学的有些结论不能随便照搬到多元函数中来.

三、求复合函数的偏导数与全微分

1. 具体函数的偏导数与全微分

基本思路：1. 一般来说，求具体函数的偏导数完全可以用一元函数求导数的方法，只不过是对一个变量求偏导数时，把其他变量看作常数而已.

2. 当具体函数表达式较复杂，而只需求一点处的偏导数，此时可利用结果

$$f'_x(x_0,y_0)=\left.\frac{\mathrm{d}f(x,y_0)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0},\quad f'_y(x_0,y_0)=\left.\frac{\mathrm{d}f(x_0,y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=y_0}.$$

3. 求具体函数的全微分有两种方法：一是求出各个偏导数后写出全微分，二是利用全微分形式不变性.

【例12】　设$f(x,y)=x^2\arctan\frac{y}{x}-y^2\arctan\frac{x}{y}$，求$\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

解题思路　用四则运算法则和复合函数求偏导法则.

解　$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\arctan\frac{y}{x}+\frac{x^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)-\frac{y^2}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y}=2x\arctan\frac{y}{x}-y,$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{2x}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}-1=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例13】　设$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}>0$，求$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}$.

解题思路　此题是复合函数求偏导. 注意利用对称性，只要求出$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$，其他同理可得.

解　$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}$，同理$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$.

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)=\frac{r-x\cdot\frac{\partial r}{\partial x}}{r^2}=\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3},\text{同理可得}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3},\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{1}{r}-\frac{z^2}{r^3}.$$

所以 $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\dfrac{3}{r}-\dfrac{x^2+y^2+z^2}{r^3}=\dfrac{3}{r}-\dfrac{1}{r}=\dfrac{2}{r}.$

【例 14】 设 $z=\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$，求 $\mathrm{d}z\Big|_{(1,2)}$.

解题思路 二元函数 $z=\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$ 对 x,y 求偏导，应当作幂指函数求导，可先取对数或化为指数函数再求导. 也可看作 $z=u^v,u=\dfrac{y}{x},v=\dfrac{x}{y}$ 的复合函数.

解 【方法一】 两边取对数，有 $\ln z=\dfrac{x}{y}\ln\dfrac{y}{x}\Rightarrow y\ln z=x(\ln y-\ln x)$，

两边对 x 求偏导，得 $y\cdot\dfrac{\frac{\partial z}{\partial x}}{z}=\ln y-\ln x+x\cdot\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\ln y-\ln x-1$，

当 $x=1$，$y=2$ 时，有 $z=\sqrt{2}$，代入上式得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,2)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2-1)$.

两边对 y 求偏导，得 $\ln z+y\cdot\dfrac{\frac{\partial z}{\partial y}}{z}=\dfrac{x}{y}$，

当 $x=1$，$y=2$ 时，有 $z=\sqrt{2}$，代入上式得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,2)}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1-\ln 2)$.

所以 $\mathrm{d}z\Big|_{(1,2)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2-1)\mathrm{d}x+\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1-\ln 2)\mathrm{d}y.$

【方法二】 化为指数函数形式 $z=\mathrm{e}^{\frac{x}{y}\ln\frac{y}{x}}$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{\frac{x}{y}\ln\frac{y}{x}}\left(\frac{1}{y}\ln\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\left(-\frac{1}{x}\right)\right)=\mathrm{e}^{\frac{x}{y}\ln\frac{y}{x}}\left(\frac{1}{y}\ln\frac{y}{x}-\frac{1}{y}\right),$$

把 $x=1$，$y=2$ 代入上式得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,2)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2-1)$.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^{\frac{x}{y}\ln\frac{y}{x}}\left(-\frac{x}{y^2}\ln\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\frac{1}{y}\right)=\mathrm{e}^{\frac{x}{y}\ln\frac{y}{x}}\left(-\frac{x}{y^2}\ln\frac{y}{x}+\frac{x}{y^2}\right),$$

把 $x=1$，$y=2$ 代入上式得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,2)}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1-\ln 2)$.

所以 $\mathrm{d}z\Big|_{(1,2)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2-1)\mathrm{d}x+\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1-\ln 2)\mathrm{d}y.$

【方法三】 令 $u=\dfrac{y}{x},v=\dfrac{x}{y}$，则 $z=u^v$，

所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=vu^{v-1}\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)+u^v\ln u\dfrac{1}{y}$

$$=\frac{x}{y}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}-1}\left(-\frac{y}{x^2}\right)+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}\ln\frac{y}{x}\frac{1}{y}=-\frac{1}{x}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}-1}+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}\frac{1}{y}\ln\frac{y}{x},$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

把 $x=1$，$y=2$ 代入上式得　$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2-1)$.

同理　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=vu^{v-1}\dfrac{1}{x}+u^v\ln u\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)$

$=\dfrac{x}{y}\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}-1}\dfrac{1}{x}-\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}\ln\dfrac{y}{x}\dfrac{x}{y^2}=\dfrac{1}{y}\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}-1}-\dfrac{x}{y^2}\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}\ln\dfrac{y}{x}$,

把 $x=1$，$y=2$ 代入上式得　$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1-\ln 2)$.

所以　$\left.\mathrm{d}z\right|_{(1,2)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2-1)\mathrm{d}x+\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1-\ln 2)\mathrm{d}y$.

【评注】 1. 从方法上说，方法三更方便一些.

2. 还可利用全微分形式不变性直接求全微分

$$\mathrm{d}z=vu^{v-1}\mathrm{d}u+u^v\ln u\mathrm{d}v=vu^{v-1}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}+u^v\ln u\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}$$

$$=\left[-\frac{1}{x}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}-1}+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}\frac{1}{y}\ln\frac{y}{x}\right]\mathrm{d}x+\left[\frac{1}{y}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}-1}-\frac{x}{y^2}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}\ln\frac{y}{x}\right]\mathrm{d}y.$$

代入可求得 $\left.\mathrm{d}z\right|_{(1,2)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2-1)\mathrm{d}x+\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1-\ln 2)\mathrm{d}y$. 同时也可求出两个偏导数.

2. 抽象函数的偏导数与全微分

基本思路：1. 求抽象函数的偏导数与全微分，从方法上来说同求具体函数的偏导数与全微分完全一样，但运算要复杂一些. 特别是，当函数复合所涉及的变量较多且关系复杂时，一定要画出复合关系的链导图，若对某一变量求偏导数，要看有几条路径从因变量到此变量，则求导后就有几项的和，每一条路径有几步，对应该条路径的项就是几项的乘积.

2. 注意运用合适的符号简化表达式的表示，如 $z=f(x+y,xy)$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'+yf_2'$，需注意的是，$f_1'$，$f_2'$ 的复合关系仍同 f 一样.

3. 大纲中明确指出，只要会求到二阶偏导数.

【例 15】　设 $u=f\left(\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{z}\right)$，$u=f(s,t)$ 有二阶连续偏导数，求 $\mathrm{d}u$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$.

解题思路　$u=f\left(\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{z}\right)$ 是 $u=f(s,t)$ 与 $s=\dfrac{x}{y}$，$t=\dfrac{y}{z}$ 复合而成的 x,y,z 的三元函数. 先求 $\mathrm{d}u$（从而也就求得 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}$），或者先求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}$，也就可求得 $\mathrm{d}u$，然后再由 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$（或 $\dfrac{\partial u}{\partial z}$）求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}\right)$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

解　由一阶全微分形式的不变性及全微分的四则运算法则，得

$$\mathrm{d}u=f_1'\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)+f_2'\mathrm{d}\left(\frac{y}{z}\right)=f_1'\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}+f_2'\frac{z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z}{z^2}$$

$$=\frac{1}{y}f_1'\mathrm{d}x+\left(-\frac{x}{y^2}f_1'+\frac{1}{z}f_2'\right)\mathrm{d}y-\frac{y}{z^2}f_2'\mathrm{d}z$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f_1'+\frac{1}{z}f_2',$$

所以 $$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}=-\frac{x}{y^2}f''_{12}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{z}\right)+\frac{1}{z}f''_{22}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{z}\right)-\frac{f'_2}{z^2}$$

$$=\frac{x}{yz^2}f''_{12}-\frac{y}{z^3}f''_{22}-\frac{1}{z^2}f'_2.$$

【评注】 注意记号 f'_1,f''_{12} 的含义及应用,特别是 f'_1 仍是以"1""2"为中间变量的复合函数.

【例 16】 设 $z=f(u,x,y)$ 有二阶连续偏导数,$u=xe^y$,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解题思路 形式上 $z=f(u,x,y)$ 是一个三元函数,实际上经过 $u=xe^y$ 变换,它是 x,y 的二元函数,注意区别 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 的不同,$\frac{\partial z}{\partial x}$ 是对自变量 x 的偏导数,$\frac{\partial f}{\partial x}$ 是作为三元函数 $f(u,x,y)$ 对 x 的偏导数,$\frac{\partial f}{\partial x}$ 经常记为 f'_2.

解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}\cdot 1=e^y f'_1+f'_2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^y f'_1+e^y[f''_{11}xe^y+f''_{13}\cdot 1]+f''_{21}xe^y+f''_{23}\cdot 1.$$

【例 17】 设函数 $z=f(xy,yg(x))$,函数 f 具有二阶连续偏导数,函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$,求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

微信公众号【顶尖考研】 (ID:djky66)

解题思路 利用抽象多元复合函数的求偏导法则及 $g'(1)=0$.

解 由题意 $g'(1)=0$. 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=yf'_1+yg'(x)f'_2$,有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'_1+y[xf''_{11}+g(x)f''_{12}]+g'(x)f'_2+yg'(x)[xf''_{21}+g(x)f''_{22}],$$

所以,令 $x=y=1$,且注意到 $g(1)=1$,$g'(1)=0$,得

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=f'_1(1,1)+f''_{11}(1,1)+f''_{12}(1,1).$$

【例 18】 设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)\mathrm{d}t$,其中函数 φ 具有二阶导数,ψ 具有一阶导数,则必有

(A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

解题思路 先分别求出 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$,$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$,再比较答案即可.

微信公众号:顶尖考研(ID:dJjky66)

解 因为$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x+y)+\varphi'(x-y)+\psi(x+y)-\psi(x-y)$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(x+y)-\varphi'(x-y)+\psi(x+y)+\psi(x-y),$$

于是
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi''(x+y)-\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)+\psi'(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y),$$

可见有$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$,应选(B).

【评注】 本题综合考查了复合函数求偏导和高阶偏导的计算.作为做题技巧,也可取$\varphi(t)=t^2,\psi(t)=1$,则$u(x,y)=2x^2+2y^2+2y$,容易验算只有$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$成立,同样可找到正确选项(B).

【例19】 设$x=f(u,v),y=g(u,v),f(u,v),g(u,v)$具有二阶连续偏导数,且$\dfrac{\partial f}{\partial u}=\dfrac{\partial g}{\partial v}$,$\dfrac{\partial f}{\partial v}=-\dfrac{\partial g}{\partial u}$,试证明函数$z=z(x,y)$满足:$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right]$,其中$z$具有连续的二阶偏导数.

微信公众号【顶尖考研】(ID:dJjky66)

解题思路 本题主要考查对抽象复合函数求偏导的熟练程度,x,y为中间变量,u,v为自变量,但运算较复杂,要耐着性子认真做下去.

证明 由复合函数的求导法则$\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}$,进一步有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}&=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\\&=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2},\end{aligned}$$

同样有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}.$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=&\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right]+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v}\right)+\\&\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\right]+\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\right).\end{aligned}$$

又因为$\dfrac{\partial x}{\partial u}=\dfrac{\partial f}{\partial u}=\dfrac{\partial g}{\partial v}=\dfrac{\partial y}{\partial v},\dfrac{\partial x}{\partial v}=\dfrac{\partial f}{\partial v}=-\dfrac{\partial g}{\partial u}=-\dfrac{\partial y}{\partial u}$,故

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}=0,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(-\frac{\partial y}{\partial u}\right)=\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}=0,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{\partial x}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)$$

$$=-\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}=0.$$

从而 $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right]=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right]$.

【评注】 复杂的运算能力是研究生数学考试中的一个重要的测试点.

【例 20】 设 $u=f(x,y,z)$，$y=\varphi(x,t)$，$t=\psi(x,z)$，其中 f,φ,ψ 均可微，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial z}$.

解题思路 本题中，变量之间的关系较为复杂，实际上 u 可看作是 x,z 的二元函数，利用链导图求偏导数，u 到 x 有三条路径，u 到 z 有两条路径.

解 用复合函数的求导法则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

四、求隐函数的偏导数与全微分

基本思路：1. 若由方程确定的隐函数可以显化，即能表示成一个显函数的形式，则按(三)中的方法求偏导数及全微分.

2. 若由方程确定的隐函数不能显化或不必要显化，可用如下三种方法来求：

(1) 方程两边对某变量求偏导数；

(2) 方程两边求全微分；

(3) 公式法：设 $F'_z\neq 0$，则由方程 $F(x,y,z)=0$ 确定 z 是 x,y 可微函数，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}.$$

【例 21】 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=e^{2x-3z}+2y$ 确定，求 $3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$.

解题思路 此题可利用复合函数求偏导法、公式法或求全微分求解.

解 【方法一】 在 $z=e^{2x-3z}+2y$ 的两边分别对 x,y 求偏导，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{2x-3z}\left(2-3\frac{\partial z}{\partial x}\right),\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=e^{2x-3z}\left(-3\frac{\partial z}{\partial y}\right)+2,$$

从而 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{1+3e^{2x-3z}}.$$

所以 $3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2\cdot\frac{1+3e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}=2.$

【方法二】 令 $F(x,y,z)=e^{2x-3z}+2y-z$，则

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2e^{2x-3z},\ \frac{\partial F}{\partial y}=2,\ \frac{\partial F}{\partial z}=e^{2x-3z}(-3)-1,$$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{\mathrm{e}^{2x-3z}\cdot 2}{-(1+3\mathrm{e}^{2x-3z})}=\frac{2\mathrm{e}^{2x-3z}}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{2}{-(1+3\mathrm{e}^{2x-3z})}=\frac{2}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}.$$

从而 $$3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2\left(\frac{3\mathrm{e}^{2x-3z}}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}+\frac{1}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}\right)=2.$$

【方法三】 等式两边求全微分

$$\mathrm{d}z=\mathrm{e}^{2x-3z}(2\mathrm{d}x-3\mathrm{d}z)+2\mathrm{d}y=2\mathrm{e}^{2x-3z}\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y-3\mathrm{e}^{2x-3z}\mathrm{d}z,$$

即 $$(1+3\mathrm{e}^{2x-3z})\mathrm{d}z=2\mathrm{e}^{2x-3z}\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y,$$

所以 $$\mathrm{d}z=\frac{2\mathrm{e}^{2x-3z}}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}\mathrm{d}x+\frac{2}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}\mathrm{d}y,$$

进而 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2\mathrm{e}^{2x-3z}}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}.$$

故 $$3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2.$$

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

【例 22】 设 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数，$y=y(x)$ 和 $z=z(x)$ 分别由方程 $x\mathrm{e}^{xy}-y=0$ 和 $\mathrm{e}^{z}-xz=0$ 确定，并设运算中出现的分母 $\neq 0$. 试求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

解题思路 本题是一个抽象复合函数求偏导及由方程所确定的隐函数求导的题目，先用隐函数求导法则求出 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$，再用抽象复合函数求偏导法则求全导数 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

解 $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\tag{1}$$

而由方程 $x\mathrm{e}^{xy}-y=0$ 的两边对 x 求导数，得 $\mathrm{e}^{xy}+xy\mathrm{e}^{xy}+x^2\mathrm{e}^{xy}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\mathrm{e}^{xy}(1+xy)}{x^2\mathrm{e}^{xy}-1}\tag{2}$$

由方程 $\mathrm{e}^{z}-xz=0$ 的两边对 x 求导，得

$$\mathrm{e}^{z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-z-x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,\ \text{所以}\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{z}{\mathrm{e}^{z}-x}.\tag{3}$$

把(2)、(3)代入(1)得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\left(-\frac{\mathrm{e}^{xy}(1+xy)}{x^2\mathrm{e}^{xy}-1}\right)+\frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{z}{\mathrm{e}^{z}-x}\right).$$

【例 23】 设 $u=f(x,y,xyz)$，函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\int_{xy}^{z}g(xy+z-t)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{xyz}$ 确定，其中 f 可微，g 连续，并设运算中出现的分母 $\neq 0$. 求 $x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}$.

解题思路 由变限函数的求导法则及隐函数求偏导法则求出$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$，再用抽象复合函数求偏导法则求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$.

解 令 $v=xy+z-t$，则$\int_{xy}^{z}g(xy+z-t)\mathrm{d}t=\int_{xy}^{z}g(v)\mathrm{d}v$，得方程$\int_{xy}^{z}g(v)\mathrm{d}v=\mathrm{e}^{xyz}$.

两边对 x 求偏导 $g(z)\frac{\partial z}{\partial x}-yg(xy)=\mathrm{e}^{xyz}\cdot y\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)$，

可得$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yg(xy)+yz\mathrm{e}^{xyz}}{g(z)-xy\mathrm{e}^{xyz}}$，类似$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xg(xy)+xz\mathrm{e}^{xyz}}{g(z)-xy\mathrm{e}^{xyz}}$.

又 $\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+f_3'\cdot y\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right),\frac{\partial u}{\partial y}=f_2'+f_3'\cdot x\left(z+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)$，

代入整理得 $x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}=xf_1'-yf_2'$.

【评注】 对于方程所确定的隐函数求偏导，可以采用两边微分的方法，熟练掌握后有很大的优越性，不用去考虑对谁求偏导.

【例 24】 设 $y=f(x,t)$，方程 $F(x,y,t)=0$ 确定了函数 $t=t(x,y)$，其中函数 f,F,t 均可微，并设运算中出现的分母均不为零，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

解题思路 由题中的关系可得方程 $y=f(x,t(x,y))$，此方程确定了 y 是 x 的一元函数.

解【方法一】 方程 $y=f(x,t(x,y))$ 两边对 x 求导数得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial t}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right),$$

而 $t=t(x,y)$ 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 确定，则

$$\frac{\partial t}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial t}},\frac{\partial t}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial t}},$$

所以$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial t}}+\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial t}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$，解得$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial t}}{\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial y}}$.

【方法二】 利用求全微分.

由 $y=f(x,t)$ 得 $\mathrm{d}y=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t$，方程 $F(x,y,t)=0$ 两边求全微分得

$$\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial F}{\partial t}\mathrm{d}t=0,$$

解得 $\mathrm{d}t=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial t}}\mathrm{d}x-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial t}}\mathrm{d}y$，代入 $\mathrm{d}y=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t$ 有

$$dy=\frac{\dfrac{\partial F}{\partial t}\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial t}}{\dfrac{\partial F}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial y}}dx,$$

所以
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{\partial F}{\partial t}\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial t}}{\dfrac{\partial F}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial y}}.$$

【评注】　可见方法二与方法一相比，方法二不需要考虑函数关系，只需利用全微分形式不变性即可.

五、变量代换下表达式的变形

【例 25】　设 $u=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，而 $x=\dfrac{s-\sqrt{3}t}{2}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}s+t}{2}$，

证明 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

证明　$\dfrac{\partial u}{\partial s}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial s}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial s}=f'_x\cdot\dfrac{1}{2}+f'_y\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial t}=f'_x\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+f'_y\cdot\dfrac{1}{2}$.

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2}=\dfrac{1}{2}f''_{xx}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}f''_{xy}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}f''_{yx}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}f''_{yy}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\dfrac{1}{4}f''_{xx}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}f''_{xy}+\dfrac{3}{4}f''_{yy}$,

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}f''_{xx}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}f''_{xy}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}f''_{yx}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\dfrac{1}{2}f''_{yy}\cdot\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{3}{4}f''_{xx}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}f''_{xy}+\dfrac{1}{4}f''_{yy}$.

所以　$\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=f''_{xx}+f''_{yy}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

【例 26】　设函数 $u=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足等式 $4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，确定 a，b 的值，使等式在变换 $\xi=x+ay$，$\eta=x+by$ 下化简为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$.

解题思路　利用复合函数的链导法则变形原等式即可.

解　由复合函数的链导法则得

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial\xi}\cdot\dfrac{\partial\xi}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\dfrac{\partial\eta}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+\dfrac{\partial u}{\partial\eta}$,

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial\xi}\cdot\dfrac{\partial\xi}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\dfrac{\partial\eta}{\partial y}=a\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+b\dfrac{\partial u}{\partial\eta}$,

所以　$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\xi}+\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right)$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}$$

$$=a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+(a+b)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial u}{\partial \xi}+b\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$=a\left(a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right)+b\left(b\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right)$$

$$=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+b^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+2ab\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}.$$

由 $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial u^2}{\partial x \partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，得

$$(5a^2+12a+4)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+(5b^2+12b+4)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+(12(a+b)+10ab+8)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}=0,$$

因而 $\begin{cases}5a^2+12a+4=0,\\ 5b^2+12b+4=0,\\ 12(a+b)+10ab+8\neq 0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-\frac{2}{5},\\ b=-2.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-2,\\ b=-\frac{2}{5}.\end{cases}$

【评注】 此题主要考查复合函数链导法则的熟练运用，是对运算能力的考核.

【例 27】 已知函数 $u=u(x,y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$. 试确定参数 a,b，使得原方程在变换 $u(x,y)=v(x,y)e^{ax+by}$ 下不出现一阶偏导数项.

(解) 由 $u(x,y)=v(x,y)e^{ax+by}$，得

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}e^{ax+by}+ave^{ax+by}=\left(\frac{\partial v}{\partial x}+av\right)e^{ax+by},\\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}e^{ax+by}+bve^{ax+by}=\left(\frac{\partial v}{\partial y}+bv\right)e^{ax+by}.\end{cases}$$

且

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+a\frac{\partial v}{\partial x}\right)e^{ax+by}+a\left(\frac{\partial v}{\partial x}+av\right)e^{ax+by}=\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2a\frac{\partial v}{\partial x}+a^2 v\right)e^{ax+by},\\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+2b\frac{\partial v}{\partial y}+b^2 v\right)e^{ax+by}.\end{cases}$$

将上面各式代入原方程中，并消去 e^{ax+by}，得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+(2a+1)\frac{\partial v}{\partial x}+(-2b+1)\frac{\partial v}{\partial y}+(a^2-b^2+a+b)v=0.$$

由题意可知，$2a+1=0$，$-2b+1=0$，即有 $a=-\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{2}$，此时方程就化为

微信公众号【数学考研】(ID: shuxue66)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

【例 28】 设函数 $u=f(x,y,z)$，$x=r\sin\theta\cos\varphi$，$y=r\sin\theta\sin\varphi$，$z=r\cos\theta$.

证明 (1) 如果 $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$，则 u 仅是 θ 和 φ 的函数；

(2) 如果 $\dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{x}=\dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial y}}{y}=\dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial z}}{z}$，则 u 仅是 r 的函数.

解题思路 (1) 只需证明 $\dfrac{\partial u}{\partial r}=0$，(2) 只需证明 $\dfrac{\partial u}{\partial\theta}=0,\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}=0$.

证明 (1) 利用复合函数求导公式，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r}&=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\theta\\&=\frac{1}{r}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}\right)=0,\end{aligned}$$

故当 $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$ 时，u 仅是 θ 和 φ 的函数.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

(2) 令 $\dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{x}=\dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial y}}{y}=\dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial z}}{z}=c$，因为

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial\theta}&=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\theta}\\&=r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial x}+r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial y}-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial z}\\&=cxr\cos\theta\cos\varphi+cyr\cos\theta\sin\varphi-czr\sin\theta\\&=cr^2[\sin\theta\cos\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)-\sin\theta\cos\theta]=0,\\\frac{\partial u}{\partial\varphi}&=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\varphi}=c\left(x\frac{\partial x}{\partial\varphi}+y\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)\\&=cr^2(-\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi+\sin^2\theta\cos\varphi\cdot\sin\varphi)=0,\end{aligned}$$

所以函数 u 与 θ,φ 无关，故 u 仅是 r 的函数.

六、多元函数微分学的反问题

基本思路：由已知满足的关系式或条件，利用多元函数微分学的方法和结论，求出待定的函数、参数等. 特别是已知偏导数或偏导数所满足的关系式(方程)求函数，主要有两种题型：

1. 已知偏导数，通过不定积分求函数.

设 $f(x,y)$ 有连续偏导数，且 $f'_x(x,y)=g(x,y)$，$f'_y(x,y)=h(x,y)$，则有

$$f(x,y)=\int f'_x(x,y)\mathrm{d}x+\varphi(y)=\int g(x,y)\mathrm{d}x+\varphi(y),$$

$$f(x,y)=\int f'_y(x,y)\mathrm{d}y+\psi(x)=\int h(x,y)\mathrm{d}y+\psi(x).$$

2. 已知多元函数的偏导数所满足的方程，通过变量代换，化为一元函数的导数所满足的方程，即常微分方程，求解微分方程得到函数.

【例 29】 已知$(axy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1+by\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$为某一函数$f(x,y)$的全微分，求$a,b$.

解题思路 由$\mathrm{d}f=(axy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1+by\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$得到关于$a,b$的方程组，解方程组求出$a,b$.

解 由题意知$\dfrac{\partial f}{\partial x}=axy^3-y^2\cos x,\dfrac{\partial f}{\partial y}=1+by\sin x+3x^2y^2$，从而有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=3axy^2-2y\cos x,\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=by\cos x+6xy^2.$$

显然$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$均连续，所以$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$，即

$$by\cos x+6xy^2=3axy^2-2y\cos x,$$

比较系数得$a=2,b=-2$.

【例 30】 设$z=f(x,y)$满足$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2x,f(x,1)=0,\dfrac{\partial f(x,0)}{\partial y}=\sin x$，求$f(x,y)$.

解题思路 由$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2x$两边求不定积分(需注意积分变量为$y$)，得$\dfrac{\partial f}{\partial y}=2xy+\varphi(x)$，不能把$\varphi(x)$写成任意常数$C$，进而确定$\varphi(x)$，类似地，进一步可求出$f(x,y)$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

解 由$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=2x$得$\dfrac{\partial f}{\partial y}=2xy+\varphi(x)$，$\varphi(x)$为$x$的任意函数，

进而$f(x,y)=xy^2+\varphi(x)y+\psi(x)$，$\psi(x)$也是$x$的任意函数，

从$\dfrac{\partial f(x,0)}{\partial y}=\sin x$，即$[2xy+\varphi(x)]\Big|_{y=0}=\sin x$，得$\varphi(x)=\sin x$，

又$f(x,1)=0$，得$[xy^2+\varphi(x)y+\psi(x)]\Big|_{y=1}=x+\sin x+\psi(x)=0$，

则$\psi(x)=-x-\sin x$，因此 $f(x,y)=xy^2+y\sin x-x-\sin x$.

【例 31】 设函数$u=f(\ln\sqrt{x^2+y^2})$，满足$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$，试求函数$f$的表达式.

解 设$t=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，则$x^2+y^2=\mathrm{e}^{2t}$，可求得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(t)\frac{x}{x^2+y^2},\frac{\partial u}{\partial y}=f'(t)\frac{y}{x^2+y^2},$$

进而

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(t)\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}+f'(t)\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(t)\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}+f'(t)\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

代入已知等式有$f''(t)=(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}=\mathrm{e}^{5t}$，积分两次得

$$f(t)=\frac{1}{25}\mathrm{e}^{5t}+C_1t+C_2.$$

七、多元函数的极值与最值

基本思路：1. 二阶偏导数连续的二元函数极值的求法（此充分条件仅适用于二元函数）

(1) 解方程组 $f'_x(x_0,y_0)=0, f'_y(x_0,y_0)=0$，得所有驻点；

(2) 对每一个驻点 (x_0,y_0)，求 $A=f''_{xx}(x_0,y_0), B=f''_{xy}(x_0,y_0), C=f''_{yy}(x_0,y_0)$ 的值；

(3) 由 B^2-AC 的符号确定是否为极值点，是极大值点还是极小值点.

2. 条件极值的求法一般用拉格朗日乘数法，有时也可转化为无条件极值.

3. 最值的求法

闭区域上连续多元函数的最值可能在区域内部或边界上达到，先求出在区域内部的所有驻点以及偏导数不存在的点，比较这些点与边界上最值点的函数值，最大者即为最大值，最小者即为最小值，其中边界上最值可用条件极值来求. 对于实际问题一般根据实际背景来确定是否取最值（如可能极值点唯一，则极小（大）值点即最小（大）值点）.

【例 32】 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi'_y(x,y)\neq 0$，已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是

(A) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$，则 $f'_y(x_0,y_0)=0$.

(B) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

(C) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f'_y(x_0,y_0)=0$.

(D) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

解题思路：利用拉格朗日函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ 在 (x_0,y_0,λ_0)（λ_0 是对应 x_0,y_0 的参数 λ 的值）取到极值的必要条件即可.

(ID:djky66)

解　作拉格朗日函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，并记对应 x_0,y_0 的参数 λ 的值为 λ_0，则

$$\begin{cases}F'_x(x_0,y_0,\lambda_0)=0\\F'_y(x_0,y_0,\lambda_0)=0\end{cases}\text{，即}\begin{cases}f'_x(x_0,y_0)+\lambda_0\varphi'_x(x_0,y_0)=0\\f'_y(x_0,y_0)+\lambda_0\varphi'_y(x_0,y_0)=0\end{cases}.$$

消去 λ_0，得

$$f'_x(x_0,y_0)\varphi'_y(x_0,y_0)-f'_y(x_0,y_0)\varphi'_x(x_0,y_0)=0,$$

整理得 $f'_x(x_0,y_0)=\dfrac{1}{\varphi'_y(x_0,y_0)}f'_y(x_0,y_0)\varphi'_x(x_0,y_0)$.（因为 $\varphi'_y(x,y)\neq 0$），

若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$. 故选(D).

【评注】 本题考查了二元函数极值的必要条件和拉格朗日乘数法.

【例 33】 已知函数 $f(x,y)$ 在点(0,0)的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则

(A) 点(0,0)不是 $f(x,y)$ 的极值点.

(B) 点(0,0)是 $f(x,y)$ 的极大值点.

(C) 点(0,0)是 $f(x,y)$ 的极小值点.

(D) 根据所给条件无法判断点(0,0)是否为 $f(x,y)$ 的极值点.

解题思路：由题设，容易推知 $f(0,0)=0$，因此点(0,0)是否为 $f(x,y)$ 的极值，关键看在点(0,0)的充分小的去心邻域内 $f(x,y)$ 是恒大于零、恒小于零还是变号.

解 由 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$ 知，分子的极限必为零，从而有 $f(0,0)=0$，且由极限的性质知，$\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1+\alpha(x,y)$，这里 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\alpha(x,y)=0$.

因而 $f(x,y)=xy+(x^2+y^2)^2[1+\alpha(x,y)]$，在点 $(0,0)$ 的某充分小去心邻域内，取 $y=x$ 且 $|x|$ 充分小时，$f(x,y)=x^2+4x^4[1+\alpha(x,x)]>0=f(0,0)$；

在点 $(0,0)$ 的某充分小去心邻域内，取 $y=-x$ 且 $|x|$ 充分小时，

$$f(x,y)=-x^2+4x^4[1+\alpha(x,-x)]<0=f(0,0).$$

故点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点，应选(A).

【评注】 本题综合考查了多元函数的极限、连续和多元函数的极值概念，题型比较新，有一定难度. 将极限表示式转化为极限值加无穷小量，是有关极限分析过程中常用的思想.

【例 34】 讨论二元函数 $z=x^3+y^3-2(x^2+y^2)$ 的极值.

解 对原函数分别求关于 x,y 的偏导，得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2-4x=x(3x-4)=0\\[2ex]\dfrac{\partial z}{\partial y}=3y^2-4y=y(3y-4)=0\end{cases}$$

解之，得驻点 $(0,0),(0,\frac{4}{3}),(\frac{4}{3},0),(\frac{4}{3},\frac{4}{3})$. 进而

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x-4,B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y-4$$

$$\Delta=B^2-AC=-4(3x-2)(3y-2)$$

在 $(0,0)$ 点，$\Delta=-16<0,A=-4<0$，故在 $(0,0)$ 点取极大值为 0；

在 $(0,\frac{4}{3})$ 点，$\Delta=16>0$，在 $(\frac{4}{3},0)$ 点，$\Delta=16>0$，故 $(0,\frac{4}{3}),(\frac{4}{3},0)$ 都不是极值点；

在 $(\frac{4}{3},\frac{4}{3})$ 点，$\Delta=-16<0,A=4>0$，所以在 $(\frac{4}{3},\frac{4}{3})$ 取极小值为 $-\frac{64}{27}$.

【例 35】 设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，求 $z=z(x,y)$ 的极值点与极值.

解 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 两边分别对 x,y 求偏导得

$$2x-6y-2y\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial z}{\partial x}=0,\qquad①$$

$$-6x+20y-2z-2y\frac{\partial z}{\partial y}-2z\frac{\partial z}{\partial y}=0.\qquad②$$

令 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\\[2ex]\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x-3y=0,\\-3x+10y-z=0.\end{cases}$ 故

$$\begin{cases}x=3y,\\z=y.\end{cases}$$

将上式代入 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$，可得

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

$$\begin{cases} x=9, \\ y=3, \\ z=3, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x=-9, \\ y=-3, \\ z=-3. \end{cases}$$

方程①② 两边分别对 x 求偏导得

$$2-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

$$-6-2\frac{\partial z}{\partial x}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0.$$

方程 ② 两边对 y 求偏导得

$$20-2\frac{\partial z}{\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

所以 $A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(9,3,3)}=\frac{1}{6}$，$B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(9,3,3)}=-\frac{1}{2}$，$C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(9,3,3)}=\frac{5}{3}$.

又 $B^2-AC=-\frac{1}{36}<0$，$A=\frac{1}{6}>0$，从而点(9,3) 是 $z(x,y)$ 的极小值点，极小值为 3.

类似地，由

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{1}{6},\ B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(-9,-3,-3)}=\frac{1}{2},\ C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{5}{3},$$

可知 $B^2-AC=-\frac{1}{36}<0$，$A=-\frac{1}{6}<0$，所以点$(-9,-3)$ 是 $z(x,y)$ 的极大值点，极大值为 -3.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

【例 36】 已知函数 $f(x,y)$ 满足 $f''_{xy}(x,y)=2(y+1)e^x$，$f'_x(x,0)=(x+1)e^x$，$f(0,y)=y^2+2y$，求 $f(x,y)$ 的极值.

解题思路 利用偏积分法求出 $f(x,y)$，再求二元函数的极值.

解 $f''_{xy}(x,y)=2(y+1)e^x$ 两边对 y 积分，得 $f'_x(x,y)=(y+1)^2e^x+\varphi(x)$，

由 $f'_x(x,0)=(x+1)e^x$，有 $\varphi(x)=xe^x$，

再 $f'_x(x,y)=(y+1)^2e^x+xe^x$ 两边对 x 积分，得

$$f(x,y)=(y+1)^2e^x+(x-1)e^x+\psi(y),$$

由 $f(0,y)=y^2+2y$，可知 $\psi(y)=0$，因而 $f(x,y)=(y+1)^2e^x+(x-1)e^x$.

解方程组 $\begin{cases} f'_x=(y+1)^2e^x+xe^x=0, \\ f'_y=2(y+1)e^x=0, \end{cases}$ 得 $x=0,y=-1$.

而 $f''_{xx}=(y+1)^2e^x+(x+1)e^x$，$f''_{yy}=2e^x$，$f''_{xy}=2(y+1)e^x$.

在$(0,-1)$ 点，$A=f''_{xx}(0,-1)=1$，$B=f''_{xy}(0,-1)=0$，$C=f''_{yy}(0,-1)=2$.

判别式 $\Delta=B^2-AC=-2<0$，$A=1>0$，$f(x,y)$ 在$(0,-1)$ 点取得极小值 $f(0,-1)=-1$.

【例 37】 求椭圆 $x^2+2xy+3y^2-8y=0$ 与直线 $x+y=8$ 之间的最短距离.

解题思路 这是一个条件极值问题，椭圆上任意一点 $P(x,y)$ 到直线 $x+y=8$ 的距离为 $d=\left|\frac{x+y-8}{\sqrt{2}}\right|$，利用等效性构造函数 $F(x,y)=d^2+\lambda(x^2+2xy+3y^2-8y)$，若用 d 的话，问题将变得很复杂.

解 椭圆上任意一点 $P(x,y)$ 到直线 $x+y=8$ 的距离的平方为

$$d^2=\frac{(x+y-8)^2}{2}.$$

令 $F(x,y)=\frac{1}{2}(x+y-8)^2+\lambda(x^2+2xy+3y^2-8y)$,

则有方程组 $\begin{cases}F'_x=x+y-8+(2\lambda x+2\lambda y)=0,\\F'_y=x+y-8+\lambda(2x+6y-8)=0,\\x^2+2xy+3y^2-8y=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=-2+2\sqrt{2}\\y=2\end{cases}$ 或者 $\begin{cases}x=-2-2\sqrt{2}\\y=2\end{cases}$，且 $d_1=4\sqrt{2}-2, d_2=4\sqrt{2}+2$.

所以所求的最短距离为 $4\sqrt{2}-2$.

【例 38】 求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4, y\geqslant 0\}$ 上的最大值和最小值.

解题思路 由于 D 为闭区域，在开区域内按无条件极值分析，而在边界上按条件极值讨论即可.

解 因为 $f'_x(x,y)=2x-2xy^2$, $f'_y(x,y)=4y-2x^2y$,

解方程组 $\begin{cases}f'_x=2x-2xy^2=0,\\f'_y=4y-2x^2y=0.\end{cases}$ 得开区域内的可能极值点为 $(\pm\sqrt{2},1)$，其对应函数值为 $f(\pm\sqrt{2},1)=2$.

又当 $y=0$ 时，$f(x,y)=x^2$ 在 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 上的最大值为 4，最小值为 0.

当 $x^2+y^2=4, y>0, -2<x<2$，构造拉格朗日函数

$$F(x,y,\lambda)=x^2+2y^2-x^2y^2+\lambda(x^2+y^2-4).$$

解方程组 $\begin{cases}F'_x=2x-2xy^2+2\lambda x=0,\\F'_y=4y-2x^2y+2\lambda y=0,\\F'_\lambda=x^2+y^2-4=0,\end{cases}$ 得可能极值点：$(0,2)$, $\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$，其对应函数值为 $f(0,2)=8$, $f\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\frac{7}{4}$.

比较函数值 $2,0,4,8,\frac{7}{4}$，知 $f(x,y)$ 在区域 D 上的最大值为 8，最小值为 0.

【评注】 其实，在求边界上最值时，本题完全可把其转化为无条件极值，但题中的做法更具一般性.

【例 39】 求函数 $u=xy+2yz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值和最小值.

解题思路 本题为条件极值问题，用拉格朗日乘数法.

解 令 $F(x,y,z,\lambda)=xy+2yz+\lambda(x^2+y^2+z^2-10)$,

解方程组
$$\begin{cases} F'_x = y + 2\lambda x = 0, \\ F'_y = x + 2z + 2\lambda y = 0, \\ F'_z = 2y + 2\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 10 = 0. \end{cases}$$

得 $x=1, y=\pm\sqrt{5}, z=2$,或 $x=-1, y=\pm\sqrt{5}, z=-2$, 或 $x=\pm 2\sqrt{2}, y=0, z=\mp\sqrt{2}$.

由 $u(1,\sqrt{5},2)=u(-1,-\sqrt{5},-2)=5\sqrt{5}$, $u(1,-\sqrt{5},2)=u(-1,\sqrt{5},-2)=-5\sqrt{5}$,

$u(2\sqrt{2},0,-\sqrt{2})=u(-2\sqrt{2},0,\sqrt{2})=0$,

得,所求最大值为 $5\sqrt{5}$, 最小值为 $-5\sqrt{5}$.

【评注】　求多元函数的极值已连续几年考查,仍属基本题型.

【例 40】　设函数 $f(x), g(x)$ 均有二阶连续导数,满足 $f(0)>0, g(0)<0$,且 $f'(0)=g'(0)=0$,则函数 $z=f(x)g(y)$ 在点(0,0) 处取得极小值的一个充分条件是

(A) $f''(0)<0, g''(0)>0$.　　(B) $f''(0)<0, g''(0)<0$.

(C) $f''(0)>0, g''(0)>0$.　　(D) $f''(0)>0, g''(0)<0$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

解题思路　直接利用二元函数取得极值的充分条件.

解　显然 $z'_x(0,0)=f'(0)g(0)=0, z'_y(0,0)=f(0)g'(0)=0$,

故 (0,0) 是 $z=f(x)g(y)$ 可能的极值点. 计算得

$z''_{xx}(x,y)=f''(x)g(y), z''_{yy}(x,y)=f(x)g''(y), z''_{xy}(x,y)=f'(x)g'(y)$,

所以 $A=z''_{xx}(0,0)=f''(0)g(0), B=z''_{xy}(0,0)=0, C=z''_{yy}(0,0)=f(0)g''(0)$.

由 $B^2-AC<0$,且 $A>0, C>0$,有 $f''(0)<0, g''(0)>0$. 因此应选(A).

【评注】　此题与最近几年关于直接求二元函数的极值形式上有所不同,但实质是一样的.

【例 41】　设 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数, $g(x,y)=f(e^{xy}, x^2+y^2)$, 且

$$f(x,y)=1-x-y+o(\sqrt{(x-1)^2+y^2}),$$

证明 $g(x,y)$ 在(0,0) 取得极值, 判断此极值是极大值还是极小值, 并求出此极值.

解　从 $f(x,y)=-(x-1)-y+o(\sqrt{(x-1)^2+y^2})$,

由全微分的定义知　　$f(1,0)=0$　　$f'_x(1,0)=f'_y(1,0)=-1$.

计算得 $g'_x=f'_1\cdot e^{xy}y+f'_2\cdot 2x, g'_y=f'_1\cdot e^{xy}x+f'_2\cdot 2y$,有

$$g'_x(0,0)=0,\quad g'_y(0,0)=0.$$

再求二阶偏导数

$g''_{xx}=(f''_{11}\cdot e^{xy}y+f''_{12}\cdot 2x)e^{xy}y+f'_1\cdot e^{xy}y^2+(f''_{21}\cdot e^{xy}y+f''_{22}\cdot 2x)2x+2f'_2$,

$g''_{xy}=(f''_{11}\cdot e^{xy}x+f''_{12}\cdot 2y)e^{xy}y+f'_1\cdot(e^{xy}xy+e^{xy})+(f''_{21}\cdot e^{xy}x+f''_{22}\cdot 2y)2x$,

$g''_{yy}=(f''_{11}\cdot e^{xy}x+f''_{12}\cdot 2y)e^{xy}x+f'_1\cdot e^{xy}x^2+(f''_{21}\cdot e^{xy}x+f''_{22}\cdot 2y)2y+2f'_2$.

所以 $A=g''_{xx}(0,0)=2f'_2(1,0)=-2$, $B=g''_{xy}(0,0)=f'_1(1,0)=-1$,

$C=g''_{yy}(0,0)=2f'_2(1,0)=-2$,

进而 $B^2-AC=-3<0$, 且 $A<0$, 故 $g(0,0)=f(1,0)=0$ 是极大值.

【例 42】 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=4$ 下的最大和最小值.

解题思路 本题考查两个约束条件 $\begin{cases}\varphi(x,y,z)=0,\\ \psi(x,y,z)=0\end{cases}$ 下的函数 $u=f(x,y,z)$ 的条件极值问题，可构造拉格朗日函数

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$$

解出可能极值点后，直接代入目标函数计算函数值再比较大小确定相应的极值(或最值)即可.

解 设拉格朗日函数为

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda(z-x^2-y^2)+\mu(x+y+z-4)$$

解方程组

$$\begin{cases}F'_x(x,y,z)=2x-2\lambda x+\mu=0,\\ F'_y(x,y,z)=2y-2\lambda y+\mu=0,\\ F'_z(x,y,z)=2z+\lambda+\mu=0,\\ F'_\lambda(x,y,z)=z-x^2-y^2=0,\\ F'_\mu(x,y,z)=x+y+z-4=0.\end{cases}$$

得 $\begin{cases}x=-2,\\ y=-2,\\ z=8.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1,\\ y=1,\\ z=2.\end{cases}$

故最大值、最小值分别为 $u_{\max}=(-2)^2+(-2)^2+8^2=72$，$u_{\min}=1^2+1^2+2^2=6$.

【例 43】 已知 x,y,z 为实数，且 $e^x+y^2+|z|=3$，求证 $e^xy^2|z|\leqslant 1$.

解题思路 本题表面上看是证明不等式，实际上可以将其化为求在 $e^x+y^2+|z|=3$ 约束条件下函数 $u=e^xy^2|z|$ 的极值问题.

证明 【方法一】 在 $e^x+y^2+|z|=3$ 约束条件下求函数 $u=e^xy^2|z|$ 的最值问题，但由于 $|z|$ 求导不方便，故不用拉格朗日乘数法，而是转化为无条件极值 $u=e^xy^2(3-e^x-y^2)$.

令 $\frac{\partial u}{\partial x}=0$，$\frac{\partial u}{\partial y}=0$，得驻点 $(0,\pm 1)$、$(x,0)$，且 $u(0,\pm 1)=1$，$u(x,0)=0$. 由题意判断知 $u(0,\pm 1)=1$ 是最大值，于是 $e^xy^2|z|\leqslant 1$.

【方法二】 本题可化为以下等价的问题：已知 $X>0$，$Y\geqslant 0$，$Z\geqslant 0$，且 $X+Y+Z=3$，求证 $XYZ\leqslant 1$，事实上，只要令 $X=e^x$，$Y=y^2$，$Z=|z|$ 即可.

用拉格朗日乘数法求解上述条件极值

令 $L=XYZ+\lambda(X+Y+Z-3)$，

解 $\begin{cases}L'_X=YZ+\lambda=0,\\ L'_Y=XZ+\lambda=0,\\ L'_Z=XY+\lambda=0,\\ L'_\lambda=X+Y+Z-3=0,\end{cases}$ 得 $X=3,Y=0,Z=0$ 和 $X=Y=Z=1$ 为可能极值点，由题意知最大值必存在，最大值为 $u(1,1,1)=1$，于是 $XYZ\leqslant 1$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 44】　某企业为生产甲、乙两种型号的产品投入的固定成本为 10000(万元)，设该企业生产甲、乙两种产品的产量分别为 x(件) 和 y(件)，且这两种产品的边际成本分别为 $20+\frac{x}{2}$(万元 / 件) 与 $6+y$(万元 / 件).

(1) 求生产甲、乙两种产品的总成本函数 $C(x,y)$(万元)；

(2) 当总产量为 50 件时，甲、乙两种产品的产量各为多少时可使总成本最小?求最小成本；

(3) 求总产量为 50 件且总成本最小时甲产品的边际成本，并解释其经济意义.

解　(1) 总成本函数 $C(x,y)=10000+20x+\frac{x^2}{4}+6y+\frac{y^2}{2}$(万元).

(2) 由题意知，求 $C(x,y)$ 在当 $x+y=50$ 时的最小值. 构造拉格朗日函数：

$$F(x,y,\lambda)=C(x,y)+\lambda(x+y-50)=10000+20x+\frac{x^2}{4}+6y+\frac{y^2}{2}+\lambda(x+y-50),$$

解方程组 $\begin{cases}F'_x=20+\frac{x}{2}+\lambda=0,\\F'_y=6+y+\lambda=0,\\x+y-50=0.\end{cases}$　得　$x=24,y=26.$

因可能极值点唯一，且实际问题存在最小值，故当总产量为 50 件时，甲乙两种产品的产量分别为 24，26 时可使总成本最小. 且此时投入总费用

$$C_{\min}(x,y)=10000+20\times24+\frac{24^2}{4}+6\times26+\frac{26^2}{2}=11118(\text{万元}).$$

(3) 甲产品的边际成本函数：$C'_x(x,y)=20+\frac{x}{2}$，于是，当总产量为 50 件且总成本最小时甲产品的边际成本

$$C'_x(x,y)=20+\frac{24}{2}=32.$$

其经济意义为：当甲乙两种产品的产量分别为 24，26 时，若甲方的产量每增加一件，则总成本增加 32 万元.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

§2　二重积分

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

一、二重积分的概念与性质

1. 二重积分的定义

设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数，将闭区域 D 任意分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$($\Delta\sigma_i$ 也表示小区域的面积)，任取一点 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i$，$d$ 表示各小闭区域直径中的最大值，若 $\lim\limits_{d\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 总存在(与 $\Delta\sigma_i$ 的分法及 (ξ_i,η_i) 的取法均无关)，则称此极限值为函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的二重积分，记作 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 或 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，即

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim_{d\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

【注】 (1) 二重积分的几何意义：当 $z=f(x,y)\geqslant 0$ 时，二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 表示以 D 为底，曲面 $z=f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积.

(2) 若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 一定存在.

2. 二重积分的性质

设 $f(x,y),g(x,y)$ 在有界闭区域 D 上可积，则有

(1)(线性性) $\iint\limits_D [k_1 f(x,y)\pm k_2 g(x,y)]\mathrm{d}\sigma=k_1\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\pm k_2\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

(2)(可加性) $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=D_1\cup D_2$，而且 D_1,D_2 仅在边上重叠，其他处不相互重叠.

(3)(不等式) 若在 D 上，$f(x,y)\leqslant g(x,y)$，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

【注】 ① $\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right|\leqslant\iint\limits_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma$.

② 若 $f(x,y),g(x,y)$ 在区域 D 上连续，$f(x,y)\leqslant g(x,y)$，且 $f(x,y)\not\equiv g(x,y)$，则有严格不等式 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma<\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

(4)(中值定理) 设函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，σ 是 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ,η)，使得 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta)\sigma$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

二、二重积分的计算

1. 利用直角坐标计算二重积分

若 $D:a\leqslant x\leqslant b,\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)$，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$.

若 $D:c\leqslant y\leqslant d,\psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y)$，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$.

【注】 二重积分本质上可化为定积分进行计算. 根据区域 D 的不同形状，可先定 x 的变化范围，再定 y 的变化范围，即先对 y 积分再对 x 积分；也可反过来考虑. 有时两种方式都可以，有时只能用其中一种方式计算，如何定积分次序才会尽量简便，可参考经验方法：先看被积区域的边界曲线方程，哪个变量次幂高或哪个变量关系复杂，先定哪个变量，即后对此变量积分；若被积函数只有一个变量，一般先定此变量，即后对此变量积分.

2. 利用极坐标计算二重积分

令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，则 $f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.

若积分区域为圆域或圆域的一部分，被积函数为形如 $f(\sqrt{x^2+y^2}),f\left(\frac{y}{x}\right),f\left(\frac{x}{y}\right)$ 等，可考虑采用在极坐标系下进行计算，注意化为极坐标后，面积元素 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$，不要遗漏了 r. 由积分区域定限，大致为下述 3 种：

(1) 若极点 O 在积分区域 D 的外部，如果 D 可以表示为 $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,\varphi_1(\theta)\leqslant r\leqslant\varphi_2(\theta)$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

(2) 若极点 O 在积分区域 D 的边界上，如果 D 可以表示为：$\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, 0 \leqslant r \leqslant \varphi(\theta)$，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r.$$

但是注意，O 在 D 的边界上时，r 不一定总是从 0 到 $\varphi(\theta)$，而可能仅当 θ 等于某值时 $r=0$；θ 等于其他值时 $r \neq 0$. 此时对 r 的积分限并不总是从 0 到某 $\varphi(\theta)$. 请见例 8 的【评注】.

(3) 若极点 O 在积分区域 D 的内部，如果 D 的边界方程为 $r=\varphi(\theta)$，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r.$$

三、重要公式与结论

1. 若 D 关于 x 轴对称，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(x,-y) = -f(x,y) \text{ 时}, \\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & \text{当 } f(x,-y) = f(x,y) \text{ 时}. \end{cases}$$

其中 D_1 为 D 的上半平面部分.

2. 若 D 关于 y 轴对称，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(-x,y) = -f(x,y) \text{ 时}, \\ 2\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & \text{当 } f(-x,y) = f(x,y) \text{ 时}, \end{cases}$$

其中 D_2 为 D 的右半平面部分.

3. (轮换对称性) 若 $x \longleftrightarrow y$ 互换，D 保持不变时，即 D 关于直线 $y=x$ 对称，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint_D [f(x,y)+f(y,x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

例题分析

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

一、二重积分的概念及性质

【例 1】 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} =$

(A) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y.$　　(B) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \dfrac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y.$

(C) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \dfrac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y.$　　(D) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y.$

解题思路　用二重积分(或定积分)的定义.

解　因为

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{n}{n\left(1+\frac{i}{n}\right)n^2\left[1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right]}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left[1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right]}\cdot\frac{1}{n^2}$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$$

所以应选(D).

【例 2】 设闭区域 $D:x^2+y^2\leqslant y, x\geqslant 0$. $f(x,y)$ 为 D 上的连续函数,且

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

求 $f(x,y)$.

解题思路 $\iint_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=A$ 为常数,通过求二重积分得到关于 A 的方程,解方程求出 A 即可.

解 设 $\iint_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=A$,在已知等式两边求区域 D 上的二重积分,有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{8A}{\pi}\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

从而 $$A=\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-A,$$

所以 $$2A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta}\sqrt{1-r^2}\cdot r\mathrm{d}r=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^3\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right),$$

于是 $$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{4}{3\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

【评注】 本题还可一般化,如

$$f(x,y)=g(x,y)+\iint_D f(u,v)p(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\iint_D f(u,v)q(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

其中 $g(x,y),p(x,y),q(x,y)$ 已知,可令 $\iint_D f(u,v)p(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=A$, $\iint_D f(u,v)q(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=B$,上式两边同乘以 $p(x,y),q(x,y)$,再积分可得到关于 A,B 的方程组,解出 A,B 可求得 $f(x,y)$.

【例 3】 设 $I_1=\iint_D\cos\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma, I_2=\iint_D\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma, I_3=\iint_D\cos(x^2+y^2)^2\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$,则

(A) $I_3>I_2>I_1$. (B) $I_1>I_2>I_3$.

(C) $I_2>I_1>I_3$. (D) $I_3>I_1>I_2$.

解题思路 关键在于比较 $\sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2$ 与 $(x^2+y^2)^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$ 上的大小.

解 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$ 上,有 $0\leqslant x^2+y^2\leqslant 1$,从而有

$$\frac{\pi}{2}>1\geqslant\sqrt{x^2+y^2}\geqslant x^2+y^2\geqslant(x^2+y^2)^2\geqslant 0.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

由于 $\cos x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上为单调减函数，于是

$$0 \leqslant \cos\sqrt{x^2+y^2} \leqslant \cos(x^2+y^2) \leqslant \cos(x^2+y^2)^2,$$

因此 $\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma < \iint\limits_D \cos(x^2+y^2)\,d\sigma < \iint\limits_D \cos(x^2+y^2)^2\,d\sigma$，故应选(A).

【评注】　本题比较二重积分大小，本质上涉及用重积分的不等式性质和一元函数的单调性进行分析讨论.

【例 4】　设 D 是 xOy 平面以 $(1,1),(-1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域，D_1 是 D 的第一象限的部分，且 $f(x,y) = xy + \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$，则

(A) $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy.$

(B) $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy.$

(C) $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = 2\iint\limits_{D_1} f(y,x)\,dxdy.$

(D) $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_D f(y,x)\,dxdy.$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

解题思路　先求出 $f(x,y)$ 的表达式，再利用二重积分的对称性.

解　由 $f(x,y) = xy + \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = xy + A$，其中 $A = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ 为常数，有 $A = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_D (xy + A)\,dxdy = 2A$，于是 $A = 0$，即 $f(x,y) = xy$.

(A)(B)(C) 三个选项中，左端项均为零，但右端项均不为零，故应选(D).

【小结】　1. $\iint\limits_D f(u,v)\,dudv = A$ 为常数，与积分变量用哪个字母表示无关.

2. 二重积分不等式性质须注意条件，如

(1) $f(x,y) \geqslant g(x,y)$ 得不到 $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy > \iint\limits_D g(x,y)\,dxdy$，但加上 $f(x,y),g(x,y)$ 连续且 $f(x,y)$ 不恒等于 $g(x,y)$，则结论正确.

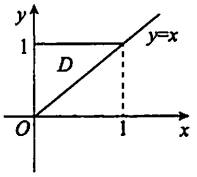
(2) $f(x,y) \geqslant 0$ 且 $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = 0$ 推不出 $f(x,y) = 0$，但添上 $f(x,y)$ 连续条件，则结论正确.

二、二重积分的基本计算

【例 5】　计算二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{y^2 - xy}\,dxdy$，其中 D 是由直线 $y = x, y = 1, x = 0$ 所围成的平面区域.

解题思路　画出积分域，将二重积分化为累次积分即可.

解 积分区域如右图. 因为根号下的函数为关于 x 的一次函数,"先 x 后 y"积分较容易,所以



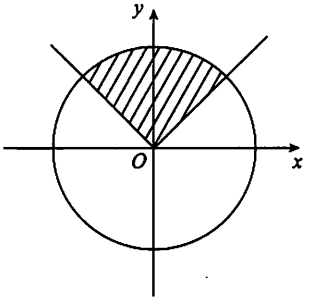
$$\iint_D \sqrt{y^2-xy}\,dxdy = \int_0^1 dy\int_0^y \sqrt{y^2-xy}\,dx$$

$$= -\frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{y}(y^2-xy)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^y dy$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 y^2 dy = \frac{2}{9}.$$

【评注】 计算二重积分时,首先画出积分区域的图形,然后结合积分域的形状和被积函数的形式,选择坐标系和积分次序.

【例 6】 计算二重积分 $I=\iint_D \sqrt{1-y^2}\,dxdy$,其中 D 如图所示为 $x^2+y^2=1$ 与 $y=|x|$ 所围成的阴影区域.



解题思路 因为被积函数 $f(x,y)=\sqrt{1-y^2}$,所以积分次序为先 x 后 y. 又因为被积函数关于 x 为偶函数与积分区域关于 y 轴对称,故只需考虑积分区域 D 在第一象限部分的情况.

解 $$I = 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy\int_0^y \sqrt{1-y^2}\,dx + 2\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2}\,dx$$

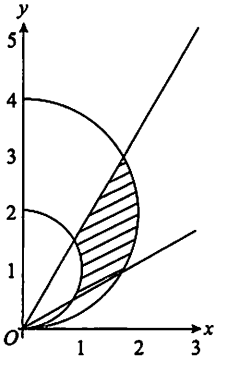
$$= 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y\sqrt{1-y^2}\,dy + 2\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (1-y^2)dy$$

$$= -\frac{2}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + 2\left(y-\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 = 2-\sqrt{2}.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【评注】 本题若先对变量 y 求积分,虽然只有一个积分表达式 $I=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-y^2}\,dy$,但积分却比较烦琐.

【例 7】 计算 $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$,其 D 为由圆 $x^2+y^2=2y$,$x^2+y^2=4y$ 及直线 $x-\sqrt{3}y=0$,$y-\sqrt{3}x=0$ 所围成的平面闭区域.



解题思路 这是典型的利用极坐标计算的二重积分.

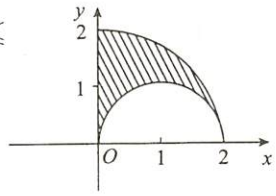
解 边界曲线在极坐标下的方程为

$$y-\sqrt{3}x=0 \Rightarrow \theta_2=\frac{\pi}{3},\quad x^2+y^2=4y \Rightarrow r=4\sin\theta,$$

$$x-\sqrt{3}y=0 \Rightarrow \theta_1=\frac{\pi}{6},\quad x^2+y^2=2y \Rightarrow r=2\sin\theta,$$

所以 $$\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} r^2\cdot r\,dr = 15\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right).$$

【例 8】　计算$\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 为由不等式 $\sqrt{2x-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2}$ 所确定的在第一象限内区域.



解　积分区域为圆域的一部分，可转换为极坐标系下的二次积分来计算.

积分区域可表示为 $D:0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}, 2\cos\theta \leqslant r \leqslant 2$，于是

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{2\cos\theta}^2 r^3 \mathrm{d}r = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^4\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{5}{4}\pi.$$

【评注】　1. 不能因为极点 O 在积分区域 D 的边界上，就误认为分次积分对 r 积分的积分下限是 0.

2. 极坐标系下化二重积分为二次积分一般选择的积分次序是先 r 后 θ，定限时仍采用穿线法. 为确定 θ 的变化范围，令极轴沿逆时针方向转动，极轴与积分域开始接触时的 θ 角即为 θ 的下限，离去时的 θ 角即为 θ 的上限. 穿线是固定 θ 找 r 的变化范围，由于极径 $r \geqslant 0$，故穿线为从极点出发作射线穿过区域 D，穿入时碰到的 D 的边界曲线 $r_1(\theta)$ 为下限，穿出时离开的 D 的边界曲线 $r_2(\theta)$ 为上限.

【例 9】　计算二重积分$\iint\limits_D (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 其中 $D=\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+(y-1)^2 \leqslant 2, y \geqslant x\}$.

解题思路　利用极坐标计算或直角坐标计算，但极坐标计算要简单得多.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

解　【方法一】　由 $(x-1)^2+(y-1)^2 \leqslant 2$，得　$r \leqslant 2(\sin\theta+\cos\theta)$，

所以 $\iint\limits_D (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)} (r\cos\theta - r\sin\theta) r\mathrm{d}r$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \left[\frac{1}{3}(\cos\theta-\sin\theta)r^3\Big|_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)}\right]\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{8}{3}(\cos\theta-\sin\theta)\cdot(\sin\theta+\cos\theta)^3\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} (\sin\theta+\cos\theta)^3 \mathrm{d}(\sin\theta+\cos\theta)$$

$$= \frac{8}{3}\times\frac{1}{4}(\sin\theta+\cos\theta)^4\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}$$

$$= -\frac{8}{3}.$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【方法二】　将区域 D 分成 D_1, D_2 两部分，其中

$D_1 = \{(x,y)\,|\,1-\sqrt{2-(x-1)^2} \leqslant y \leqslant 1+\sqrt{2-(x-1)^2}, 1-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 0\}$，

$D_2 = \{(x,y)\,|\,x \leqslant y \leqslant 1+\sqrt{2-(x-1)^2}, 0 \leqslant x \leqslant 2\}$

由二重积分的性质知

$$\iint\limits_D (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因为 $\iint\limits_{D_1}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{1-\sqrt{2}}^{0}\mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{2-(x-1)^2}}^{1+\sqrt{2-(x-1)^2}}(x-y)\mathrm{d}y$

$$=\int_{1-\sqrt{2}}^{0}2(x-1)\sqrt{2-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2}{3}(\sqrt{2-(x-1)^2})^3\Big|_{1-\sqrt{2}}^{0}=-\frac{2}{3},$$

$$\iint\limits_{D_2}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^{1+\sqrt{2-(x-1)^2}}(x-y)\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}\int_0^2\left[2-2(x-1)\sqrt{2-(x-1)^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\left[4+\frac{2}{3}(\sqrt{2-(x-1)^2})^3\Big|_0^2\right]=-2,$$

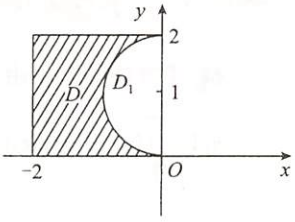
所以 $$\iint\limits_{D}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{8}{3}.$$

【例 10】 计算$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $x=-2,y=0,y=2$ 以及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成平面区域.

解题思路 从积分区域 D 的形状来看，应用直角坐标计算，但计算稍显复杂. 而利用积分的可加性，转化为矩形 $\{(x,y)\mid -2\leqslant x\leqslant 0,0\leqslant y\leqslant 2\}$ 的积分减去 D_1 的积分，在 D_1 上的积分用极坐标，计算较为方便.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

解 【方法一】 用直角坐标系，积分次序为先 x 后 y，则



$$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2 y\mathrm{d}y\int_{-2}^{-\sqrt{2y-y^2}}\mathrm{d}x=4-\int_0^2 y\sqrt{1-(y-1)^2}\,\mathrm{d}y.$$

令 $y-1=\sin t$，有$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin t)\cos^2 t\mathrm{d}t=4-\frac{\pi}{2}$.

实际上，在计算$\int_0^2 y\sqrt{1-(y-1)^2}\,\mathrm{d}y$ 时，可令 $y-1=t$，则

$$\int_{-1}^{1}(t+1)\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}t\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t+\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

其中，第一个定积分利用了对称性，第二个定积分用了定积分的几何意义.

【方法二】 用二重积分的可加性，有

$$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D+D_1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-2}^{0}\mathrm{d}x\int_0^2 y\mathrm{d}y-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}r\sin\theta\cdot r\mathrm{d}r=4-\frac{\pi}{2}.$$

三、利用区域的对称性和函数的奇偶性计算积分

【例 11】 设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0\}$，计算二重积分$\iint\limits_D\frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解题思路 由于积分区域 D 关于 x 轴对称，故可先利用二重积分的对称性结论简化所求积分，又积分区域为圆域的一部分，则将其化为极坐标系下累次积分即可.

解 因为区域 D 关于 x 轴对称，函数 $\frac{1}{1+x^2+y^2}$ 是变量 y 的偶函数，函数 $\frac{xy}{1+x^2+y^2}$ 是变量 y 的奇函数. 则

$$\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_{D_1} \frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \frac{r}{1+r^2}\mathrm{d}r = \frac{\pi\ln 2}{2},$$

$$\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

故 $$\iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi\ln 2}{2}.$$

【评注】 只要见到积分区域具有对称性的二重积分计算问题，就要想到考察被积函数或其代数和的每一部分是否具有奇偶性，以便简化计算.

【例 12】 计算 $\iint_D \frac{1+y+y\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D: x^2+y^2 \leqslant 1, y \geqslant 0$.

解题思路 虽然被积函数形式复杂，但其一部分 $\frac{y\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2+y^2}$ 关于 x 是奇函数.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

解 由对称性知，$\iint_D \frac{y\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$.

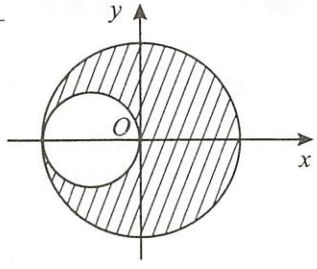
于是 $$\text{原式} = \iint_D \frac{1+y}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \frac{1+r\sin\theta}{1+r^2}r\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln 2 + \int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 \frac{r^2}{1+r^2}\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

【例 13】 求 $\iint_D (\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆 $x^2+y^2=4$ 和 $(x+1)^2+y^2=1$ 所围成的平面区域.

解题思路 首先，将积分区域 D 分为大圆 $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$ 减去小圆 $D_2=\{(x,y)\mid (x+1)^2+y^2\leqslant 1\}$，再利用对称性与极坐标计算即可.

解 令 $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$，$D_2=\{(x,y)\mid (x+1)^2+y^2\leqslant 1\}$，由对称性，$\iint_D y\mathrm{d}\sigma = 0$.



而 $$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma - \iint_{D_2} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\mathrm{d}r - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{-2\cos\theta} r^2\mathrm{d}r.$$

$$= \frac{16\pi}{3} - \frac{32}{9} = \frac{16}{9}(3\pi-2).$$

所以 $\iint_D (\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma = \frac{16}{9}(3\pi-2)$.

【评注】 本题中利用积分的可加性拆分区域也是在考题中经常出现的技巧.

【例 14】 设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$,$f(x)$ 为 D 上的正值连续函数,a,b 为常数,则 $\iint\limits_D \dfrac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma=$

(A) $ab\pi$. (B) $\dfrac{ab}{2}\pi$. (C) $(a+b)\pi$. (D) $\dfrac{a+b}{2}\pi$.

解题思路 由于未知 $f(x)$ 的具体形式,直接化为用极坐标计算显然是困难的. 本题可考虑用轮换对称性.

解 由轮换对称性,有

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma&=\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}\sigma\\&=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left[\frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}+\frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}\right]\mathrm{d}\sigma\\&=\frac{a+b}{2}\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{1}{4}\pi\cdot 2^2=\frac{a+b}{2}\pi.\end{aligned}$$

应选(D).

【评注】 1. 被积函数含有抽象函数时,一般可考虑用对称性分析. 特别地,当具有轮换对称性(x,y 互换,D 保持不变)时,往往用如下方法:

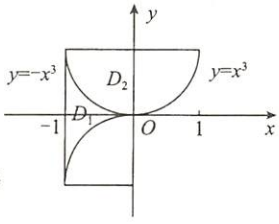
$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_D[f(x,y)+f(y,x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2. 作为选择题,可令 $f(x)=f(y)=1$,则 $\iint\limits_D \dfrac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma=\dfrac{a+b}{2}\pi$. 应选(D).

【例 15】 计算二重积分 $I=\iint\limits_D x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中积分区域 D 为 $y=x^3,y=1,x=-1$ 所围成的平面区域,f 连续.

解题思路 补充曲线 $y=-x^3$,拆分积分区域 D 分别关于 x 坐标轴、y 坐标轴对称.

解 $$\begin{aligned}I&=\iint\limits_D=\iint\limits_{D_1}+\iint\limits_{D_2}=\iint\limits_{D_1}[x+xyf(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{D_1}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_1}xyf(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2\iint\limits_{D_1(\text{上})}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{0}^{-x^3}x\mathrm{d}y=-\frac{2}{5}.\end{aligned}$$



【评注】 本题中的被积函数含有抽象的未知函数,则通过采用拆分区域及函数应用二重积分关于坐标轴的对称性将其消掉.

【例 16】　设平面内区域 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，计算

$$\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解题思路　根据积分区域的形状易想到利用极坐标计算.

解　【方法一】　令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r\sin\pi r\mathrm{d}r\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta\cdot\frac{1}{\pi}\left(-r\cos\pi r\Big|_1^2+\int_1^2\cos\pi r\mathrm{d}r\right)\\&=-\frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

又　$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta\quad(\text{令}\ \theta=\frac{\pi}{2}-t)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{4}.$$

所以，$\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{3}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}=-\frac{3}{4}$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【方法二】　显然积分区域 D 关于 x，y 有轮换对称性，于是

$$\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D \frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{y+x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

所以

$$\begin{aligned}&\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\left[\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D \frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{y+x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\\&=\frac{1}{2}\iint_D \sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r\sin\pi r\mathrm{d}r\quad(\text{令}\ x=r\cos\theta,y=r\sin\theta)\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\cdot\frac{1}{\pi}\left(-r\cos\pi r\Big|_1^2+\int_1^2\cos\pi r\mathrm{d}r\right)=\frac{\pi}{4}\cdot\left(-\frac{3}{\pi}\right)=-\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

【评注】　重积分的计算中一定要利用好积分区域的对称性、被积函数的奇偶性和坐标变换等手段.

【例 17】　已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid |x|\leqslant y,(x^2+y^2)^3\leqslant y^4\}$，计算二重积分 $\iint_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解题思路　利用积分区域的对称性，采用极坐标计算.

解　曲线 $(x^2+y^2)^3=y^4$ 的极坐标方程为 $r=\sin^2\theta$，积分区域 D 关于 y 轴对称，则

$$\iint_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin^2\theta}\frac{r\sin\theta}{r}r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin^5\theta\mathrm{d}\theta=-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(1-\cos^2\theta)^2\mathrm{d}\cos\theta$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\cos\theta-\frac{2}{3}\cos^3\theta+\frac{1}{5}\cos^5\theta\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}=\frac{43}{120}\sqrt{2}.$$

【评注】 本题有一定难度，关键是积分区域的边界曲线不是常见的曲线，但我们应会从表达式看出它的对称性.

四、分块函数的二重积分

基本思路：形如$\iint\limits_D|f(x,y)|\mathrm{d}\sigma$，$\iint\limits_D\max\{f(x,y),g(x,y)\}\mathrm{d}\sigma$，$\iint\limits_D\min\{f(x,y),g(x,y)\}\mathrm{d}\sigma$，$\iint\limits_D[f(x,y)]\mathrm{d}\sigma$，$\iint\limits_D\mathrm{sgn}\{f(x,y)-g(x,y)\}\mathrm{d}\sigma$等的被积函数均应当作分块函数看待，利用积分的可加性分区域积分.

【例 18】 计算二重积分$\iint\limits_D|x^2+y^2-1|\mathrm{d}\sigma$，其中$D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

解题思路 被积函数含有绝对值，应当看作分块函数对待，利用积分的可加性分区域积分即可.

解 记$D_1=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1,(x,y)\in D\}$，$D_2=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2>1,(x,y)\in D\}$，

于是 $\iint\limits_D|x^2+y^2-1|\mathrm{d}\sigma=-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1(r^2-1)r\mathrm{d}r+\iint\limits_D(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\pi}{8}+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x^2+y^2-1)\mathrm{d}y-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1(r^2-1)r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}.$$

【例 19】 设$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant\sqrt{2},x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，$[1+x^2+y^2]$表示不超过$1+x^2+y^2$的最大整数. 计算二重积分$\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解题思路 首先应设法去掉取整函数符号，为此将积分区域分为两部分即可.

解 令 $D_1=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x^2+y^2<1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，

$D_2=\{(x,y)\,|\,1\leqslant x^2+y^2\leqslant\sqrt{2},x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$.

则 $\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\iint\limits_{D_2}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_1^{\sqrt[4]{2}}r^3\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 20】　设积分区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi\}$，计算二重积分

$$I=\iint_D \sin x\sin y\max\{x,y\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解题思路　首先应设法去掉最大值符号 max，为此将积分区域分为两部分即可.

解　设积分区域

$$D_1=\{(x,y)\mid y\geqslant x,0\leqslant y\leqslant\pi\},D_2=\{(x,y)\mid x>y,0\leqslant x\leqslant\pi\}.$$

于是，$I=\iint_{D_1} y\sin x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2} x\sin x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{\pi} y\sin y\mathrm{d}y\int_0^{y}\sin x\mathrm{d}x+\int_0^{\pi} x\sin x\mathrm{d}x\int_0^{x}\sin y\mathrm{d}y=\frac{5}{2}\pi.$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

五、交换积分次序及坐标系

基本思路：1. 交换积分次序是常考的题型，通常有如下两种情形

(1) 题目本身要求交换积分次序；

(2) 计算时，按原积分次序计算比较复杂或无法计算，需交换积分次序，一般可从被积函数的类型看出，如含有形如 e^{x^2}，$\dfrac{\sin x}{x}$ 等，应后对 x 积分.

2. 须注意的是一定要准确地画出积分区域.

3. 有些累次积分仅交换积分次序不能解决问题，此时应考虑交换坐标系.

4. 极坐标系下的交换积分次序虽然没有考过，但须关注.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【例 21】　设函数 $f(x,y)$ 连续，则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1} f(x,y)\mathrm{d}y$ 等于

(A) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi} f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(B) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi} f(x,y)\mathrm{d}x$.

(C) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y} f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(D) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)\mathrm{d}x$.

解题思路　本题是直接交换二次积分的积分次序，先根据二次积分确定积分区域，然后写出新的二次积分.

解　由题设可知，$\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi,\sin x\leqslant y\leqslant 1$，则 $0\leqslant y\leqslant 1,\pi-\arcsin y\leqslant x\leqslant\pi$，

故应选(B).

【评注】　本题为基础题型，画图更易看出.

【例 22】　设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t\mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$，则 $F'(2)$ 等于

(A)$2f(2)$.　　(B)$f(2)$.　　(C)$-f(2)$.　　(D)0.

解题思路　先求导，再代入 $t=2$ 求 $F'(2)$ 即可. 关键是求导前应先交换积分次序，使得被积函数中不含有变量 t.

解 交换积分次序，得

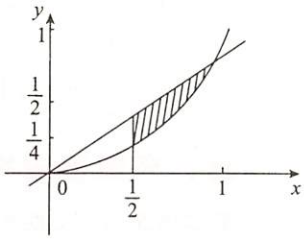
$$F(t)=\int_1^t \mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x=\int_1^t\left[\int_1^x f(x)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_1^t f(x)(x-1)\mathrm{d}x$$

于是，$F'(t)=f(t)(t-1)$，从而有 $F'(2)=f(2)$，故应选(B).

【评注】 在应用变限的积分对变量 x 求导时，应注意被积函数中不能含有变量 x，否则，应先通过恒等变形、变量代换和交换积分次序等将被积函数中的变量 x 换到积分号外或积分限上.

【例 23】 计算 $I=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{y}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x$.

解题思路 $\int\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x$ 不能用初等函数表示，须改变积分次序.



解 如图有

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^{1}x(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{x})\mathrm{d}x=\frac{3}{8}\mathrm{e}-\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}.$$

【例 24】 求 $I=\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\int_0^{y}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x+\int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^{R}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

解题思路 在直角坐标系下交换积分次序仍然无法计算，因而用极坐标试之.

微信公众号【顶尖考研】(ID: diky66)

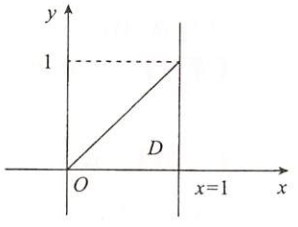
解 转化为极坐标

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{R}\mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{8}(1-\mathrm{e}^{-R^2}).$$

【例 25】 计算二重积分 $\iint_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$，其中 $D=\{(r,\theta)\mid 0\leqslant r\leqslant\sec\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\}$.

解题思路 化极坐标积分区域为直角坐标区域，相应的被积函数也化为直角坐标系下的表示形式，然后计算二重积分.

解 直角坐标系下 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x\}$.



所以 $I=\iint_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$

$$=\iint_D r\sin\theta\sqrt{1-r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=\iint_D y\sqrt{1-x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x y\sqrt{1-x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2+y^2}\mathrm{d}(1-x^2+y^2)$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{3}[1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}]\mathrm{d}x=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\ (\text{令 } x=\sin\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{8}\cos 4\theta\right)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}-\frac{1}{16}\pi.$$

【评注】　在计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta$时，可直接利用公式$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$.

【例 26】　已知函数$f(x,y)$具有二阶连续偏导数，且$f(1,y)=0,f(x,1)=0$，$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$，其中$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，计算二重积分

$$\iint_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

解题思路　把二重积分化为二次积分，用分部积分法.

解　$\iint_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 x\left(\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\left(\int_0^1 y\mathrm{d}f'_x(x,y)\right)\mathrm{d}x.$

用分部积分法$\int_0^1 y\mathrm{d}f'_x(x,y)=yf'_x(x,y)\Big|_0^1-\int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y=-\int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y.$

交换积分次序

$$\int_0^1 x\left(\int_0^1 y\mathrm{d}f'_x(x,y)\right)\mathrm{d}x=-\int_0^1 x\left(\int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=-\int_0^1\left(\int_0^1 xf'_x(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

再用分部积分法

$$\int_0^1 xf'_x(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}f(x,y)=xf(x,y)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=-\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x.$$

所以　$\iint_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=a.$

【评注】　注意在计算二次积分的过程中对分部积分法及已知条件的应用.

【例 27】　二次积分$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\left(\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}-\mathrm{e}^{y^2}\right)\mathrm{d}x=$_____.

解题思路　本题考查二重积分的计算，需要利用交换积分次序和分部积分方法.

解　二次积分$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\left(\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}-\mathrm{e}^{y^2}\right)\mathrm{d}x$的积分区域为

$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1,y\leqslant x\leqslant 1\}=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x\}.$

交换积分次序得

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\left(\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}-\mathrm{e}^{y^2}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\left(\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}-\mathrm{e}^{y^2}\right)\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\mathrm{e}^{x^2}-\int_0^x\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x-\int_0^1\left(\int_0^x\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x-x\int_0^x\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y\Big|_0^1+\int_0^1\mathrm{e}^{x^2}\cdot x\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 e^{x^2}dx - \int_0^1 e^{y^2}dy + \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{e-1}{2}.$$

【评注】 当被积函数中含有变上限积分时，常常要把变上限积分看作一个普通函数进行分部积分等运算.

【例 28】 在极坐标下交换积分次序

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr.$$

解题思路 画出积分区域，把其分为两块，然后交换积分次序.

解 $I = \int_0^{\sqrt{2}} dr \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arccos\frac{r}{2}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r d\theta + \int_{\sqrt{2}}^{2} dr \int_{-\arccos\frac{r}{2}}^{\arccos\frac{r}{2}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r d\theta.$

【评注】 极坐标系下一般是先 r 后 θ，但先 θ 后 r 也值得关注.

六、反常二重积分的计算

基本思路：1. 可否将无界区域上的二重积分转化为正常的二重积分；

2. 同二重积分的计算方法，化为累次积分，对每个累次积分按反常积分的方法处理.

【例 29】 设 $f(x,y) = \begin{cases} x^2 y, & 1 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant x, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

求 $\iint_D f(x,y)dxdy, D: x^2 + y^2 \geqslant 2x.$

微信公众号【数学研】 (ID: djky66)

解题思路 虽然形式上是反常二重积分，实际上根据被积函数的特点可转化为通常的二重积分.

解 $I = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy = \int_1^2 x^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{x} y dy = \int_1^2 (x^4 - x^3)dx = \frac{49}{20}.$

【例 30】 计算反常二重积分 $\iint_D x e^{-y^2} dxdy$，D 是第一象限内在曲线 $y = 4x^2$ 和 $y = 9x^2$ 之间的区域.

解题思路 仿照二重积分的计算方法，先 x 后 y 化为累次积分.

解 积分区域 $D = \left\{(x,y) \mid 0 \leqslant y < +\infty, \frac{\sqrt{y}}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{y}}{2}\right\}$，则

$$\iint_D x e^{-y^2} dxdy = \int_0^{+\infty} dy \int_{\frac{1}{3}\sqrt{y}}^{\frac{1}{2}\sqrt{y}} x e^{-y^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{4}y - \frac{1}{9}y\right) e^{-y^2} dy = \frac{5}{144}.$$

【例 31】　计算$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\min\{x,y\}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$.

解题思路　去掉被积函数中的最小值符号，分成两块区域积分.

解　$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\min\{x,y\}e^{-(x^2+y^2)}dxdy&=\iint\limits_{x\leqslant y}xe^{-(x^2+y^2)}dxdy+\iint\limits_{x>y}ye^{-(x^2+y^2)}dxdy\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{y}xe^{-(x^2+y^2)}dx+\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{x}ye^{-(x^2+y^2)}dy\\&=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}.\end{aligned}$$

七、与二重积分相关的证明

【例 32】　设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，且 $f(x)>0$. 证明
$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx\geqslant(b-a)^2.$$

解题思路　看上去不等式的左边是两个定积分的乘积，我们可以把其写成一个二重积分的形式$\int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx=\iint\limits_D f(x)\frac{1}{f(y)}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x,y\leqslant b\}$.

证明　$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx&=\int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{1}{f(y)}dy\\&=\iint\limits_D\frac{f(x)}{f(y)}dxdy=\iint\limits_D\frac{f(y)}{f(x)}dxdy(\text{利用轮换对称性})\\&=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left[\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right]dxdy\geqslant\iint\limits_D dxdy=(b-a)^2.\end{aligned}$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例 33】　求证$\left(\int_0^1 e^{-x^2}dx\right)^2>\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

解题思路　由于 e^{-x^2} 的原函数不是初等函数，直接计算$\int_0^1 e^{-x^2}dx$不可能，但可把不等式左边写成$\left(\int_0^1 e^{-x^2}dx\right)^2=\int_0^1 e^{-x^2}dx\int_0^1 e^{-y^2}dy=\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$，其中 $D:0\leqslant x,y\leqslant 1$.

证明　令 $D_1:x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0$，则
$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 e^{-x^2}dx\right)^2&=\int_0^1 e^{-x^2}dx\int_0^1 e^{-y^2}dy=\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy\\&>\iint\limits_{D_1}e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 e^{-r^2}rdr=\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e}\right).\end{aligned}$$

第五章　无穷级数

考点与要求

了解　任意项级数绝对收敛与条件收敛的概念以及绝对收敛与收敛的关系，幂级数在其收敛区间内的基本性质(和函数的连续性、逐项求导和逐项积分).

理解　常数项级数收敛、发散以及收敛级数的和的概念，幂级数收敛半径的概念.

会　用积分判别法，求一些幂级数在收敛区间内的和函数，由此求出某些数项级数的和，将一些简单函数间接展开为幂级数.

掌握　级数的基本性质和级数收敛的必要条件，几何级数及 p 级数的收敛与发散的条件，正项级数收敛性的比较判别法、比值判别法、根值判别法，交错级数的莱布尼茨判别法，幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域的求法，e^x，$\sin x$，$\cos x$，$\ln(1+x)$ 及 $(1+x)^\alpha$ 的麦克劳林(Maclaurin)展开式，并会用它们将一些简单函数间接展开为幂级数.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

§1　常数项级数

内容精讲

一、基本概念和基本性质

1. 级数的定义

设有数列$\{u_n\}$，表达式$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$称为无穷级数. 令$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$(级数的部分和数列)，若极限$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$存在，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；若$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$不存在(包括$\{S_n\}$为无穷大量)，则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

2. 收敛级数的和

若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则其和定义为$S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}u_k=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

【注】　若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛于$S$，此时称$r_n=S-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的余项. 显然，如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}r_n=0$.

3. 级数的性质

(1) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都收敛，$k_1$和$k_2$是与$n$无关的常数，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(k_1u_n+k_2v_n)$也收敛，且

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(k_1u_n+k_2v_n)=k_1\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n+k_2\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$.

(2) 收敛级数任意添加括号后仍然收敛.

(3) 任意去掉(增加或改变)级数的有限项,不改变其敛散性.

(4) 必要条件:若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=0$.

4. 几何级数与 p 级数的敛散性

(1) 几何级数:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^n$,当$|r|<1$时收敛;当$|r|\geqslant 1$时发散.

(2) p 级数(或对数 p 级数):$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}\left(\text{或}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^p n}\right)$,当$p>1$时收敛,当$p\leqslant 1$时发散.

二、正项(不变号)级数敛散性的判别法

1. 收敛的充要条件

若$u_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数;它收敛的充要条件是部分和数列有界.

2. 比较判别法

若$0\leqslant u_n\leqslant v_n$,$n=k,k+1,k+2,\cdots,k$为某个正整数,若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛;若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

3. 比较判别法的极限形式(比 2 常用)

当$n\to\infty$时,若$\{u_n\}$与$\{v_n\}$是同阶无穷小量,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$有相同的敛散性;若$\{u_n\}$是$\{v_n\}$的高阶无穷小,则由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛可判定$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散可判定$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散.

4. 比值判别法

设$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$,则

(1) 当$\rho<1$时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛;

(2) 当$\rho>1$时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散;

(3) 当$\rho=1$时,此方法失效(此时可考虑其他方法).

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

5. 根值判别法

设$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$,则

(1) 当$\rho<1$时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛;

(2) 当$\rho>1$时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散;

(3) 当$\rho=1$时,此方法失效(此时可考虑其他方法).

6. 积分判别法

若 $f(x)$ 在区间$[1,+\infty)$是正的，且单调递减，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛当且仅当反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

如：调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 的敛散性，由于 $\dfrac{1}{x}$ 在区间$[1,+\infty)$的值是正的、单调递减，且反常积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=+\infty$ 发散，用积分判别法知调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 是发散的.

三、任意项（变号）级数敛散性的判别法

1. 绝对收敛与条件收敛

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛.

(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 一定收敛；换言之，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 一定发散.

2. 交错级数

(1) 设 $u_n>0(n=1,2,\cdots)$，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$（或 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$）为交错级数.

(2) 莱布尼茨定理：若 $u_n\geqslant u_{n+1}>0(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$（或 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$）收敛.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

四、重要公式与结论

1. 对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，令 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$ 表示其部分和数列，则

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_{n-1}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=0$；

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，或该极限不存在，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

2. 对于四个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)$

(1) 如果有两个收敛，则另外两个收敛；

(2) 如果其中一个收敛，另一个发散，则另外两个发散；

(3) 如果有两个发散，则另外两个的敛散性不能确定；

(4) 如果有两个绝对收敛，则另外两个绝对收敛；

(5) 如果其中一个绝对收敛，另一个条件收敛，则另外两个条件收敛；

(6) 如果有两个条件收敛，则另外两个收敛，但不能确定是绝对收敛还是条件收敛.

3. 对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{2n-1}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{2n}$ 都收敛；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^p(p\geqslant 1)$ 一定收敛；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$

收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{2n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{3n}$ 等均收敛.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|u_n|+u_n}{2}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|u_n|-u_n}{2}$ 都收敛；

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|u_n|+u_n}{2}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|u_n|-u_n}{2}$ 都发散；

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|u_n|+u_n}{2}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|u_n|-u_n}{2}$，一个收敛，一个发散 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

5. 设 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$. 如果 $\rho>1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\infty$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 都发散. 即对于任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，且是由比值判别法判定的，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散.

例题分析

一、正项级数敛散性的判定

基本思路　给定级数，其收敛与发散二者必居其一，但要判断其敛散性有时会是比较困难的，我们只需掌握一些基本级数敛散性的判定以及判定级数敛散性的基本方法. 正项级数敛散性判定的思路如下：

1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；否则进一步判断.

2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，可考虑先利用无穷小等价替换化简 u_n 为 v_n，视其特点选择适当的判别法：

(1) 若 v_n 中含有 $\dfrac{1}{n^a}$（或 $\dfrac{1}{n^a\ln^p n}$），则可与 p 级数（或对数 p 级数）比较；

(2) 若 v_n 中含有 n 的乘积的形式（包括 $n!$），则可考虑用比值判别法；

(3) 以上方法均失效，则可利用已知级数的敛散性质，结合敛散的定义和性质，考察其收敛性.

【注】　若级数的一般项 u_n 中含有参数，而级数的敛散性与参数有关时，一定要讨论参数的取值.

【例 1】　判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$ 的敛散性.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

解题思路　可计算一般项的极限.

解　一般项 $u_n=\dfrac{n^n\cdot n^{\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}=\dfrac{n^{\frac{1}{n}}}{(1+\frac{1}{n^2})^n}$，

而 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^n=\lim\limits_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}]^{\frac{1}{n}}=e^0=1$；

所以$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=1\neq 0$，即原级数发散.

【评注】 对于具体的数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，可先求$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$，若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散；若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，再考虑其他方法，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$可能收敛也可能发散.

【例 2】 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)!}{n^{n+1}}$的敛散性.

解题思路 一般项含有阶乘$(n+1)!$，可考虑用比值判别法.

解 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!}{(n+1)^{n+2}}\cdot\dfrac{n^{n+1}}{(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{n+1}\cdot\dfrac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}=\frac{1}{\mathrm{e}}<1,$$

由比值判别法知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)!}{n^{n+1}}$是收敛的.

【例 3】 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}(x>0)$的敛散性.

微信公众号【顶尖考研】

解题思路 一般项含有乘积项$(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)$，可考虑用比值判别法. 同时，还含有参数$x$，因而也需讨论参数$x$的取值.

解 用比值判别法. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{n+1})}\cdot\frac{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}{x^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{1+x^{n+1}}=\begin{cases}x,0<x<1,\\ \dfrac{1}{2},x=1,\\ 0,x>1.\end{cases}$$

当$x>0$时，极限均小于1，所以原级数收敛.

【例 4】 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$的敛散性.

解题思路 一般项是一个定积分，当然我们可以求出定积分，但运算量较大，甚至有时候无法计算，此时可考虑用定积分的不等式性质放大或缩小定积分，然后再用比较判别法.

解 由于

$$0<\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 是收敛的，由比较判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 是收敛的.

【例 5】　判定下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right)$.

解题思路　$\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right)$ 为正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right)=0$，对一般项作无穷小等价替换.

解　由泰勒公式 $\ln\frac{n+1}{n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$，则 $\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\sim\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是收敛的，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right)$ 收敛.

【评注】　1. 正项级数的收敛本质上是一般项趋向于 0 的速度要足够快. 对两个一般项都趋向 0 的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$，若 $u_n\sim v_n$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 同敛散.

2. 本题也可用如下方法：由不等式 $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x(x>-1)$ 得

$$0<\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}-\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n^2},$$

则原级数收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$.

解题思路　该级数为正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)=0$，对一般项作无穷小等价替换.

解　因为 $1-\cos\frac{1}{n}\sim\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ 收敛.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

解题思路　该级数为正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=0$，对一般项作无穷小等价替换.

解　因为 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n}$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 发散.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【例 6】 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数，下列结论中正确的是

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(B) 若存在非零常数 λ，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lambda$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

(C) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n=0$.

(D) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则存在非零常数 λ，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lambda$.

解题思路 对于抽象级数敛散性的判定问题，一般以选择题的形式出现，往往直接推证较困难，此时可用反例通过排除法找到正确选项.

解 取 $a_n=\dfrac{1}{n\ln n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ 发散，排除(A)，(D)；又取 $a_n=\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，但 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n=\infty$，排除(C)，故应选(B).

【评注】 本题也可用比较判别法的极限形式，$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\frac{1}{n}}=\lambda\neq0$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也发散，故应选(B).

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 7】 下列选项正确的是

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 必收敛.

(B) 若 $u_n>0$ 单调下降，且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln u_n$ 必收敛.

(C) 若 $u_n>0$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_n}$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必收敛.

(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^nu_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+u_n)$ 必收敛.

解 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_n}$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{u_n}=0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{\sqrt{u_n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{u_n}=0$，由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必收敛，应选(C).

【评注】 1. 对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^p(p\geqslant1)$ 一定收敛.

2. 本题也可用举反例的方法排除错误答案，取 $u_n=(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 可排除(A)，取 $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 可排除(B)，(D).

【例 8】　判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(n+2)}{\left(a+\dfrac{1}{n}\right)^n}$ $(a>0)$ 的敛散性.

解　用根值判别法

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\ln(n+2)}}{a+\frac{1}{n}}=\frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln(n+2)}=\frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln\ln(n+2)}{n}}$$

$$=\frac{1}{a}e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\ln(x+2)}{x}}=\frac{1}{a}e^{0}=\frac{1}{a}$$

当 $0<\dfrac{1}{a}<1$，即 $a>1$ 时，原级数收敛，当 $\dfrac{1}{a}>1$ 即 $0<a<1$ 时，原级数发散.

当 $a=1$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(n+2)}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}$，因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(n+2)}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=+\infty$，原级数也发散.

【评注】　含有参数的级数的敛散性一般要讨论参数的取值. 本题也可用比值判别法.

二、交错级数的敛散性的判定

基本思路　给定交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$（或 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$），其中 $u_n>0$.

1. 优先考虑用莱布尼茨判别法，但莱布尼茨判别法只给出了收敛的充分条件.

2. 若不满足莱布尼茨判别法的条件，考虑正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，若此级数收敛，则原交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 绝对收敛.

3. 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，此时可用级数敛散的定义或级数的基本性质进行判定.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【例 9】　判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(n\pi+\dfrac{1}{n-\ln n}\right)$ 的敛散性.

解题思路　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(n\pi+\dfrac{1}{n-\ln n}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{1}{n-\ln n}$，该级数为交错级数，可考虑用莱布尼茨判别法.

解　令 $f(x)=\dfrac{1}{x-\ln x}$，则 $f'(x)<0(x>1)$，所以 $u_n=\sin\dfrac{1}{n-\ln n}$ 单调递减，且 $u_n\to 0(n\to\infty)$，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{1}{n-\ln n}$ 收敛.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例 10】　判定级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 的敛散性.

解题思路　由于 $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}>0$，此级数为交错级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}=0$. 但 $\{u_n\}$ 不是单调递减的，如 n 为偶数时，$u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}+1}$，$u_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-1}$，并有 $(\sqrt{n+1}-1)-(\sqrt{n}+1)=$

$(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-2=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}-2<0$，则 $u_{n+1}>u_n$. 此时，莱布尼茨判别法失效，若考虑级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}\right|=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}-(-1)^n}{n-1}$，因为 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n-1}$ 是发散的，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n-1}$ 是收敛的，则 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}\right|$ 是发散的. 因而应用其他方法.

解 【方法一】 由于 $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\dfrac{(-1)^n[\sqrt{n}-(-1)^n]}{n-1}=\dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}-\dfrac{1}{n-1}$，用莱布尼茨判别法知：级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$ 收敛（$\dfrac{\sqrt{n}}{n-1}$ 单调递减、极限为 0），而级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n-1}$ 发散.

由级数的性质，级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 是发散的.

【方法二】 原级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt{3}-1}+\frac{1}{\sqrt{4}+1}-\frac{1}{\sqrt{5}-1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}+1}-\frac{1}{\sqrt{2n+1}-1}+\cdots,$$

加括号得级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt{3}-1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{4}+1}-\frac{1}{\sqrt{5}-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{2n}+1}-\frac{1}{\sqrt{2n+1}-1}\right)+\cdots.$$

而 $\dfrac{1}{\sqrt{2n}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}-1}=\dfrac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}-2}{(\sqrt{2n}+1)(\sqrt{2n+1}-1)}\sim-\dfrac{1}{n}$，且 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 是发散的，则原级数加括号后是发散的，所以原级数是发散的.

【评注】 方法一把级数一般项拆分，然后用级数的性质；方法二直接用级数性质的逆否命题，这两种解法均有一定的技巧.

【例 11】 设 $a_n>0$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\lambda\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n\tan\dfrac{\lambda}{n})a_{2n}$

(A) 绝对收敛. (B) 条件收敛. (C) 发散. (D) 敛散性与 λ 有关.

解题思路 尽管级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n\tan\dfrac{\lambda}{n})a_{2n}$ 为交错级数，但不能判定它是否满足莱布尼茨判别法的条件，因此应将其看作任意项级数，先考虑是否绝对收敛.

解 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 收敛，而当 $n\to\infty$ 时，$\left|(-1)^n(n\tan\dfrac{\lambda}{n})a_{2n}\right|\sim\lambda a_{2n}$，因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n\tan\dfrac{\lambda}{n})a_{2n}$ 绝对收敛，应选(A).

【评注】 抽象级数敛散性的判定一般以选择题的形式出现，综合考查对级数的概念及性质的理解和掌握，题目相对有一定难度. 本题用到了正项级数如下性质：若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收

微信公众号【圣斗考研】

敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{3n}$ 等均收敛，但此结论对一般的数项级数不成立.

三、任意项级数敛散性的判定

基本思路　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为任意项级数，若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；否则进一步判断. 考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$，用正项级数的判别法判断其敛散性.

1. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛.

2. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，则看 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是否是交错级数，若是，用莱布尼茨判别法判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是否条件收敛.

3. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也不是交错级数，或虽然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是交错级数，但莱布尼茨判别法失效，此时只能用级数的定义及性质来判定级数的敛散性.

4. 涉及抽象级数的选择题，还可考虑用举反例排除错误的选项.

【例 12】　讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{n^p}(p>0)$ 的敛散性.

解题思路　本题首先要讨论常数 a 的取值情况. 当 $|a|=1$ 时，还要进一步讨论 p 的取值情况.

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

解　根据比值判别法，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a|^{n+1}}{(n+1)^p}\cdot\dfrac{n^p}{|a|^n}=|a|$，所以当 $|a|<1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{n^p}$ 绝对收敛；当 $|a|>1$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a^n}{n^p}\right|=+\infty$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{n^p}$ 发散；

当 $a=1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$. 由 p 级数的敛散性知：

当 $0<p\leqslant 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 发散；当 $p>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 收敛.

当 $a=-1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p}$. 由交错级数的莱布尼茨判别法与绝对值的判敛法知：

当 $0<p\leqslant 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p}$ 条件收敛；当 $p>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p}$ 绝对收敛.

【例 13】　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

解题思路　先考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 的敛散性，再由级数的运算性质，可得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 的敛散性.

解 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}$ 绝对收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 必发散.

【例 14】 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)$（$k$ 为常数）

(A) 绝对收敛.　　(B) 条件收敛.

(C) 发散.　　(D) 收敛性与 k 有关.

解
$$\left|\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$
$$=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$
$$\leqslant\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

因而级数绝对收敛，选(A).

【例 15】 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都发散，则

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 发散.　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 发散.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 发散.　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ 发散.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

解 用反证法，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ 收敛，由于 $|a_n|\leqslant|a_n|+|b_n|$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，矛盾. 应选(C).

【评注】 本题也可用举反例的方法排除错误答案，取 $a_n=b_n=\dfrac{1}{n}$ 可排除(B)，(D)，取 $a_n=\dfrac{1}{n}$，$b_n=-\dfrac{1}{n}$ 可排除(A).

【例 16】 设 $\{u_n\}$ 是数列，则下列命题正确的是

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛.

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛.

(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

解题思路 利用级数敛散性的性质.

解 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则该级数加括号后得到的级数仍收敛，因此应选(A).

【例 17】 设 $a_n>0,n=1,2,\cdots$，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，则下列结论正确的是

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 发散.　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 发散.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛.　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$ 收敛.

解题思路 利用性质收敛级数加括号后仍收敛.

解 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，又

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2n-1}-a_{2n})+\cdots,$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$ 收敛，应选(D).

【评注】 通过反例用排除法找答案是求解类似无穷级数选择问题的最常用方法.

取 $a_n=\dfrac{1}{n}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 均发散，排除(A)，(B)选项，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 发散，进一步排除(C)，故应选(D).

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

【例 18】 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛.　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$ 收敛.　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛.

解题思路 可以通过举反例及级数的性质来判定.

解 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$ 收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛，故应选(D).

或利用排除法：取 $a_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$，则可排除选项(A)，(B)；取 $a_n=(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，则可排除选项(C). 故(D)项正确.

【例 19】 设有两个数列 $\{a_n\},\{b_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则

(A) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n b_n$ 收敛.　　(B) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n b_n$ 发散.

(C) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$收敛. (D) 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$发散.

解题思路 应用举反例法排除错误答案.

解 取$a_n=b_n=(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，排除(A). 取$a_n=b_n=\dfrac{1}{n}$，排除(B)(D).

【评注】 可直接证明(C)正确，由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，知存在$M>0$，当$n$充分大时，有$|a_n|\leqslant M$，因而$a_n^2b_n^2\leqslant M^2b_n^2$，由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$收敛可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$收敛，所以应选(C).

四、数项级数敛散性的证明

【例20】 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义，在$x=0$的某个邻域内有一阶连续导数且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=a>0$，证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^nf\left(\dfrac{1}{n}\right)$收敛，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$发散.

解题思路 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=a$是一重要的隐含条件：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=a\Leftrightarrow f(0)=0,f'(0)=a$.

证明 由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=a\Rightarrow f(0)=0,f'(0)=a$，由$f(x)$在$x=0$的某个邻域内有一阶连续导数及$f'(0)=a>0$，知存在$l>0$，使在$[0,l]$上$f'(x)>0$，于是存在$N>0$，使当$n>N$时，$f\left(\dfrac{1}{n}\right)>f(0)=0$，而且$f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)<f\left(\dfrac{1}{n}\right)$，$\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)=0$.

可见交错级数$\sum\limits_{n=N}^{\infty}(-1)^nf\left(\dfrac{1}{n}\right)$收敛，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^nf\left(\dfrac{1}{n}\right)$收敛.

又$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}=f'(0)=a>0$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$发散.

【例21】 设有方程$x^n+nx-1=0$，其中n为正整数. 证明此方程存在唯一正实根x_n，并证明当$\alpha>1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$收敛.

解题思路 利用介值定理证明根的存在性，利用单调性证明根的唯一性. 而正项级数的敛散性可用比较法判定.

证明 记$f_n(x)=x^n+nx-1$. 由$f_n(0)=-1<0,f_n(1)=n>0$，及连续函数的介值定理知，方程$x^n+nx-1=0$存在正实数根$x_n\in(0,1)$.

当$x>0$时，$f_n'(x)=nx^{n-1}+n>0$，可见$f_n(x)$在$[0,+\infty)$上单调增加，

故方程$x^n+nx-1=0$存在唯一正实数根x_n.

由$x_n^n+nx_n-1=0$与$0<x_n<1$知$0<x_n=\dfrac{1-x_n^n}{n}<\dfrac{1}{n}$，

微信公众号【慎尔考研】(ID: dikyeb)

故当 $\alpha>1$ 时，$0<x_n^{\alpha}<\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$.

而正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ 收敛，所以当 $\alpha>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$ 收敛.

【评注】　本题综合考查了介值定理和无穷级数的敛散性，题型设计比较新颖，但难度并不大，只要基本概念清楚，应该可以轻松求证.

【例 22】　设 $a_1=2,a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right),n=1,2,\cdots$，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在；　(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

解题思路　(1) 由递推公式给出的数列，一般用单调有界数列必有极限来证明极限的存在；
(2) 利用(1)的结果，由正项级数的比较或比值判别法进行判断.

解　(1) 显然 $a_n\geqslant 0(n=1,2,3,\cdots)$，由于 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)-a_n=\frac{1-a_n^2}{2a_n}$，

而 $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant\sqrt{a_n\cdot\frac{1}{a_n}}=1$，于是 $a_{n+1}-a_n\leqslant 0$，故数列 $\{a_n\}$ 单调减少且有下界，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

(2) 由于数列 $\{a_n\}$ 单调减少，所以有 $0\leqslant\frac{a_n}{a_{n+1}}-1=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_{n+1}}\leqslant a_n-a_{n+1}$，而正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 的前 n 项部分和 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-a_{i+1})=a_1-a_{n+1}$，又极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，所以，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在，即正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 收敛，则由正项级数的比较判别法得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛.

【评注】　本题综合考查了数列极限存在准则与级数收敛的判别法. 在确定数列的界时，往往可由 $a_{n+1}-a_n$ 的符号进行反推，本题由 $a_{n+1}-a_n=\frac{1-a_n^2}{2a_n}$，提示证明 $a_n\leqslant 1$ 或 $a_n\geqslant 1$.

另外，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)$ 或 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n+1})$ 收敛的充要条件是极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 存在.

【例 23】　设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，试问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 是否收敛？并说明理由.

解题思路　根据单调有界数列必有极限知，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，而正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 的敛散性可用比较判别法判定，问题的关键在于证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n>0$，这可由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散得到.

解 由已知正项数列$\{a_n\}$单调减少，根据单调有界数列必有极限知，极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在，记$a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，则有$a_n\geqslant a\geqslant 0$，如$a=0$，则由莱布尼茨判别法得交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛，这与已知条件相矛盾，所以$a>0$.

又由于$\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n\leqslant\left(\frac{1}{a+1}\right)^n$，而$\frac{1}{a+1}<1$，几何级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a+1}\right)^n$收敛，所以，由正项级数的比较判别法，得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$收敛.

【评注】 本题巧妙地将数列极限存在准则、正项级数判别法、交错级数的莱布尼茨判别法综合起来进行考查，只要熟练掌握了相关的基本概念、基本理论和基本方法，便可以正确解答的.

小结

证明数项级数敛散性的题型，一般都具有一定的综合性，而且级数的通项通常不是直接给出具体的表达式. 对于该类题型，最常见的方法是正项级数的比较判别法与收敛级数的定义.

(1) 利用比较判别法证明正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛(或发散)，根据已知所给出的$u_n$具有的特性或满足的关系式，对$u_n$进行适当的放大(或缩小)，即$u_n\leqslant v_n$(或$u_n\geqslant v_n$)，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$由已知条件知是收敛(或发散)的，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$也经常是$p$级数或几何级数.

(2) 利用级数收敛的定义证明级数的敛散性，求出部分和S_n，并证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$的存在性.

(3) 比较判别法、比值判别法只能证明正项级数的敛散性；莱布尼茨判别法只能证明交错级数的敛散性；而定义可以证明任意项级数的敛散性.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

五、利用收敛级数求极限

基本思路：由级数收敛的必要条件：若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$. 利用此结论，可以求一些极限为0的数列的极限，虽然有一定的局限性，但不失为一种求数列极限的方法.

【例24】 求下列数列的极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$.

解题思路 用级数收敛的必要条件.

解 (1) 考虑级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{1}{\mathrm{e}}<1,$$

则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$收敛，因而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

(2) 考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}\frac{(n!)^2}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{n+1}=0<1,$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}$ 收敛，因而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}=0$.

§2　幂级数

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

内容精讲

设 $\{a_n\}$ 为一数列，形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 的级数称为 $x-x_0$ 的幂级数. 当 $x_0=0$ 时，成为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，称为 x 的幂级数.

1. 幂级数的收敛半径、收敛区间和收敛域

(1)(**阿贝尔定理**) 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 在 $x_1(x_1\neq x_0)$ 处收敛，则对任何满足 $|x-x_0|<|x_1-x_0|$ 的 x，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 绝对收敛；

若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 在 $x_1(x_1\neq x_0)$ 处发散，则对任何满足 $|x-x_0|>|x_1-x_0|$ 的 x，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 发散.

(2)(**阿达玛公式**) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径为 $R=\dfrac{1}{\rho}$(当 $\rho=0$ 时，规定 $R=+\infty$；当 $\rho=+\infty$ 时，规定 $R=0$).

(3) 使幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 收敛的 $x=x^*$ 称为该幂级数的收敛点. 一个幂级数的收敛点的集合称为该幂级数的收敛域. 幂级数的收敛域一定是一个区间(可开，可闭或半开半闭)或仅是 $x=x_0$ 一点；幂级数的收敛区间定义为收敛域去掉端点后所成的开区间；若 $R>0$ 为它的收敛半径，则其收敛区间为 $|x-x_0|<R$，即 (x_0-R,x_0+R)，再考虑 $x=x_0\pm R$ 的收敛性，可求得收敛域.

2. 幂级数的和函数及其在收敛区间内的基本性质

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径为 $R>0$，和函数为 $S(x)$，则在收敛区间 (x_0-R,x_0+R) 内有：

(1) $S(x)$ 连续并有任意阶导数；

(2) $S'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}[a_n(x-x_0)^n]'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nn(x-x_0)^{n-1}$(逐项微分)；

(3)$\int_{x_1}^{x} S(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{x_1}^{x} a_n(t-x_0)^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}[(x-x_0)^{n+1}-(x_1-x_0)^{n+1}]$(逐项积分),特别地有$\int_{x_0}^{x} S(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$;

(4)$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 绝对收敛.

3. 函数展开成泰勒级数的充要条件

设 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内具有各阶导数,则 $f(x)$ 在该邻域内能展开成泰勒级数的充分必要条件是 $f(x)$ 的泰勒公式中的余项 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\to 0(n\to\infty,x$ 是该邻域中的点,ξ 介于 x_0 与 x 之间). 此时函数 $f(x)$ 可展开为泰勒级数:

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

4. 几个常见函数的麦克劳林展开式

函数在 $x_0=0$ 处的泰勒级数称为麦克劳林级数,也称麦克劳林展开式. 常见的几个麦克劳林级数如下:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},x\in(-\infty,+\infty);$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1},x\in(-1,1];$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},x\in(-\infty,+\infty);$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},x\in(-\infty,+\infty);$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,x\in(-1,1);$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots,x\in(-1,1)$$

(该级数在 $x=\pm1$ 的收敛性取决于 α 的值,需要单独判断,从略)特别是 $\alpha=-1$ 时,

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n,x\in(-1,1).$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

例题分析

一、求幂级数的收敛半径及收敛域

基本思路 对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$.

1. 由阿达玛公式 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$,得 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径为 $R=\frac{1}{\rho}$(当 $\rho=0$ 时,规定 $R=+\infty$;当 $\rho=+\infty$ 时,规定 $R=0$).

2. 当 $0<R<+\infty$ 时,$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 的收敛区间为 (x_0-R,x_0+R),收敛域为 $(x_0-R,$

x_0+R）与收敛端点的并集；当 $R=0$ 时仅在 $x=x_0$ 处收敛；当 $R=+\infty$ 时，收敛区间 = 收敛域 $=(-\infty,+\infty)$.

注意对缺项幂级数的处理方法，参见后面的例子.

【例 1】　求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2^n}$ 的收敛域.

解题思路　缺项的幂级数可以看为含参数 x 的数项级数来处理.

解　当 $x=0$ 时显然收敛. 当 $x\neq 0$ 时，由比值判别法 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{x^{2n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{x^{2n-1}}{2^n}}\right|=\dfrac{1}{2}|x|^2$，

当 $\dfrac{1}{2}|x|^2<1$，即 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ 时，级数绝对收敛；

当 $\dfrac{1}{2}|x|^2>1$，即 $\sqrt{2}<x$ 或 $x<-\sqrt{2}$ 时，级数发散；

当 $\dfrac{1}{2}|x|^2=1$，即 $x=\pm\sqrt{2}$ 时，原级数为 $\pm\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，级数发散.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

所以原级数的收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

【评注】　若直接用公式 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1/2^{n+1}}{1/2^n}\right|=\dfrac{1}{2}$，得收敛半径为 2 是错误的. 因为当 n 为偶数时 $a_n=0$，求收敛半径的公式不适用. 缺项的幂级数的收敛域有两种求法，一是将 x 看作参数，如本例；二是作变量代换后转化为不缺项的幂级数，例如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2^n}=\dfrac{x}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-2}}{2^{n-1}}$

$=\dfrac{x}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^{n-1}=\dfrac{x}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u^{n-1},\left(u=\dfrac{x^2}{2}\right)$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

【例 2】　求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$ 的收敛域.

解题思路　可直接用收敛半径公式，求出收敛半径及收敛区间，区间端点处的收敛性可转化为数项级数敛散性的判定.

解　因为 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}}{\frac{1}{n\cdot 3^n}}=\dfrac{1}{3}$，所以收敛半径为 $R=\dfrac{1}{\rho}=3$，

因此当 $|x-3|<3$，即 $0<x<6$ 时，幂级数收敛，

当 $x=0$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(0-3)^n}{n\cdot 3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$ 收敛，

当 $x=6$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(6-3)^n}{n\cdot 3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散.

故所求的收敛域为 $[0,6)$.

【评注】 本题也可以令 $x-3=t$，先求出幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n\cdot 3^n}$ 的收敛域，再得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$ 的收敛域.

【例 3】 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}(x-1)^{2n}$ 的收敛域.

解题思路 由于该幂级数只有偶数次幂项，参见例 1 的解法及其评注.

解 令 $t=(x-1)^2$，考虑幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}t^n$.

因为 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}=\frac{1}{2}$，所以原级数的收敛半径为 $R=\sqrt{2}$，

因此当 $|x-1|<\sqrt{2}$，即 $1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$ 时，幂级数收敛.

当 $x=1-\sqrt{2}$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$ 发散，

当 $x=1+\sqrt{2}$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$ 发散.

故所求的收敛域为 $(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2})$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 4】 已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛，在 $x=-4$ 处发散，求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛域.

解题思路 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 在 $x=a$ 处收敛，则当 $|x-x_0|<|a-x_0|$ 时，此幂级数绝对收敛；若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 在 $x=b$ 处发散，则当 $|x-x_0|>|b-x_0|$ 时，此幂级数发散.

解 由题设知，当 $|x+2|<|0+2|=2$，即 $-4<x<0$ 时，幂级数收敛；而当 $|x+2|>|-4+2|=2$，即 $x<-4$ 或 $x>0$ 时，幂级数发散. 可见幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为 2.

于是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 当 $|x-3|<2$，即 $1<x<5$ 时收敛，

故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛区间为 $(1,5)$.

另外，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛，相当于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 在 $x=5$ 处收敛，故所求收敛域为 $(1,5]$.

【评注】 再次提醒，收敛区间指的是开区间，而收敛域应考虑在端点的敛散性.

【例 5】　设数列$\{a_n\}$单调减少，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(n=1,2,\cdots)$无界，则幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$的收敛域是

(A)$(-1,1]$.　(B)$[-1,1)$.　(C)$[0,2)$.　(D)$(0,2]$.

解题思路　利用阿贝尔定理及已知条件，属基本题型.

解　幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$的收敛区间是以 1 为中心的对称区间，排除(A)(B). 而$x=0$时，由莱布尼茨判别法，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛.

$x=2$时，由部分和数列$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(n=1,2,\cdots)$发散知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散. 因此应选(C).

【例 6】　设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的收敛半径为 3，则幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$的收敛区间为_____.

解　幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$与$(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n)'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_n x^{n-1}$有相同的收敛区间，

即$\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_n x^{n-1}$的收敛区间为$|x|<3$，

所以，幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}=(x-1)^2\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_n(x-1)^{n-1}$的收敛区间为$|x-1|<3$，即$(-2,4)$.

【评注】　1. 考试大纲明确规定收敛区间是指开区间，不须考虑端点的敛散性；

2. 幂级数经过有限次的逐项求导或积分，不改变其收敛半径与收敛区间，但收敛域可能发生变化.

【例 7】　设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$在$x=-2$处条件收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2(x-a)^n$在$x=\ln\frac{1}{2}$处

(A) 绝对收敛.　(B) 条件收敛.　(C) 必发散.　(D) 敛散性由a确定.

解题思路　本题要确定$x=\ln\frac{1}{2}$是否在$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2(x-a)^n$的收敛区间内，因此需确定其收敛半径及$a$.

解　幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$的收敛半径为 1，由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$在$x=-2$处条件收敛知，$x=-2$为收敛区间的端点，则$a=-3$或$a=-1$.

而$a=-3$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$在$x=-2$处条件收敛矛盾，所以$a=-1$.

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2(x-a)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2(x+1)^n$ 的收敛半径为 1，收敛区间为 $(-2,0)$，且 $\ln\frac{1}{2}\in(-2,0)$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2(x-a)^n$ 在 $x=\ln\frac{1}{2}$ 处绝对收敛. 答案应选(A).

二、求幂级数的和函数

基本思路 求幂级数在其收敛区间内的和函数 $S(x)$ 主要有以下几种方法：

1. 先通过幂级数的代数运算、逐项微分、逐项积分等性质将其化为内容精讲中的几个典型的幂级数来求和.

2. 通过幂级数的代数运算、逐项微分、逐项积分等性质转化为关于和函数 $S(x)$ 的微分方程问题，解微分方程求出 $S(x)$.

3. 部分和函数 $S_n(x)$ 容易求时，也可用定义求 $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$.

【例 8】 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

由此幂级数的构成知，其和函数可以通过几何级数求导和求积分得到，因此可以先求和函数，再由幂级数的性质得收敛半径，然后讨论端点处的收敛性，得幂级数的收敛域.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

解 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)^2+2}{2n+1}x^{2n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}$，

因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}\right)'=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$，$-1<x<1$，

当 $x\neq0$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}=\frac{2}{x}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$，

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}=\int_0^x\frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\qquad -1<x<1,$$

因为 $x=0$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}=2$，所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}=\begin{cases}\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}, & x\in(-1,0)\cup(0,1),\\ 2, & x=0.\end{cases}$$

当 $x=\pm1$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}=+\infty\neq0$ 知级数发散.

当 $x=0$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=3$，

因此，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛区间及收敛域均为 $-1<x<1$，

和函数 $S(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}, & x\in(-1,0)\cup(0,1),\\ 3, & x=0.\end{cases}$

【例 9】　求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域及收敛区间内的和函数.

解题思路　用比值判别法确定收敛区间，进而确定收敛域；利用幂级数的逐项求导求和函数.

解　当 $x=0$ 时显然收敛. 当 $x\neq 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{2n+2}(2n-1)}{x^{2n}(2n+1)}\right|=x^2$，所以当 $x^2<1$，即 $-1<x<1$ 时，原幂级数绝对收敛.

当 $x=\pm 1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$，由莱布尼茨判别法显然收敛，故原幂级数的收敛域为 $[-1,1]$.

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$，令 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$，$x\in(-1,1)$，

则 $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}=\dfrac{1}{1+x^2}$.

由于 $f(0)=0$，所以 $f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t+f(0)=\arctan x$.

从而幂级数的收敛域为 $[-1,1]$，在收敛区间 $(-1,1)$ 内的和函数为 $x\arctan x$.

【例 10】　求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n2^n}x^{n-1}$ 的收敛区间及收敛域，并求其和函数.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

解题思路　先用公式求出收敛半径及收敛区间，再考察端点处的敛散性可得到收敛域. 将幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n2^n}x^{n-1}$ 转化为几个常见的麦克劳林级数之一可求得和函数，是一个不错的办法.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

解　因为 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}}=\dfrac{1}{2}$，

所以收敛半径 $R=2$，收敛区间为 $(-2,2)$.

当 $x=2$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$ 发散，当 $x=-2$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n}$ 收敛，

所以幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n2^n}x^{n-1}$ 的收敛域为 $[-2,2)$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n2^n}x^n=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}(-1)^{n-1}\left(-\dfrac{x}{2}\right)^n=-\ln\left(1-\dfrac{x}{2}\right)$，$-1\leqslant\dfrac{x}{2}<1$.

于是，当 $x\neq 0$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n2^n}x^{n-1}=\dfrac{1}{x}S(x)=-\dfrac{1}{x}\ln\left(1-\dfrac{x}{2}\right)$，

当 $x=0$ 时，$\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n2^n}x^{n-1}\right]_{x=0}=\dfrac{1}{2}$，因此，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}\ln\left(1-\dfrac{x}{2}\right), & -2\leqslant x<2,x\neq 0,\\ \dfrac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$$

【评注】 本题是套用 $\ln(1+x)$ 的麦克劳林展开式，按该展开式后注的是收敛域.

【例 11】 设 $\{a_n\}$ 满足条件：$a_0=3, a_1=1, a_{n-2}-n(n-1)a_n=0(n\geqslant 2)$，$S(x)$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数.

(1) 证明 $S''(x)-S(x)=0$；

(2) 求 $S(x)$ 的表达式.

解题思路 利用幂级数可逐项求导的性质，验证(1)成立；解微分方程求出 $S(x)$，注意初值条件的使用.

解 (1) $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 得 $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$，$S''(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$，再由 $a_{n-2}-n(n-1)a_n=0$，有

$$S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S(x),$$

即 $S''(x)-S(x)=0$.

(2) 二阶常系数齐次线性微分方程 $S''(x)-S(x)=0$ 的特征方程为 $\lambda^2-1=0$，解得 $\lambda=\pm 1$，于是 $S''(x)-S(x)=0$ 的通解为

$$S(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}.$$

显然，初值条件为 $\begin{cases}S(0)=a_0,\\ S'(0)=a_1,\end{cases}$ 进而有 $\begin{cases}C_1+C_2=3,\\ C_1-C_2=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}C_1=2,\\ C_2=1.\end{cases}$

所以 $S(x)=2e^x+e^{-x}$.

微信公众号【[illegible]考研】(ID: djky66)

【例 12】 设 $a_0=1, a_1=0, a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})(n=1,2,3,\cdots)$，$S(x)$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数.

(1) 证明幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径不小于 1；

(2) 证明 $(1-x)S'(x)-xS(x)=0(x\in(-1,1))$，并求 $S(x)$ 的表达式.

解题思路 本题是将幂级数问题转化为微分方程的综合题. 关键是利用递推公式得到和函数所满足的微分方程.

解 (1) 由 $a_0=1, a_1=0, a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})$，利用数学归纳法有 $0\leqslant a_{n+1}\leqslant 1$.

记 R 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径. 当 $|x|<1$ 时，因为 $|a_nx^n|\leqslant|x|^n$，且级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ 绝对收敛，所以幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 绝对收敛. 于是，$(-1,1)\subseteq(-R,R)$，即 $R\geqslant 1$.

(2) 因为 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，所以 $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$. 于是

$$(1-x)S'(x)-xS(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}$$
$$=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n-\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n$$
$$=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)a_{n+1}-na_n-a_{n-1}]x^n$$
$$=0.$$

解微分方程$(1-x)S'(x)-xS(x)=0$得$S(x)=\dfrac{Ce^{-x}}{1-x}$.

由$S(0)=a_0=1$得$C=1$,故$S(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$.

【评注】　实际上,由$a_0=1,a_1=0,a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})$可推得$a_n=\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k!}$$(n\geqslant 2)$,用阿达玛公式知收敛半径大于等于1.

三、求数项级数的和

基本思路　求数项级数的和主要有以下的思路与方法:

1. 幂级数法:套用现成的幂级数或构造适当的幂级数,转化为幂级数求和函数问题. 应先用级数的代数运算等性质对级数进行适当变形,以便构造易于求和的幂级数形式.

对于收敛级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb^n$,一般构造幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$(显然要求它在$x=b$处收敛),求出其和函数$S(x)$,则有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb^n=S(b)$. 而对于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,相当于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb^n$当$b=1$时的特殊情形.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

2. 利用收敛级数的定义及其性质:即求部分和数列的极限$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$,也经常将通项$u_n$进行分解:$u_n=a_n\pm b_n$,先求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$的和,再根据级数的运算性质得到级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的和.

【例13】　求数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$的和.

解题思路　求出S_n,用定义求级数的和$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

解　一般项$u_n=\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$,

部分和$S_n=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}-\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3}-\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$

$=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$,

所以　$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{4}$,即$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{4}$.

【例14】　求数项级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{n!}$的和.

解题思路　拆分级数的一般项$\dfrac{n+1}{n!}=\dfrac{1}{(n-1)!}+\dfrac{1}{n!}$,利用重要结果$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}=e$.

解 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=2\mathrm{e}.$

【例 15】 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 等于

(A)3. (B)7. (C)8. (D)9.

解 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+(-1)^{n-1}a_n)=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 收敛，所以，由级数的运算性质得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，且有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=10-2=8$. 应选(C).

【例 16】 求级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和.

解题思路 先将其转化为求幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1}$ 的和函数，再令 $x=\frac{1}{2}$ 以求得数项级数的和.

解 令 $S(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1}$，易知它的收敛区间为 $(-1,1)$.

$$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1}=\frac{1}{2}\Big(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}\Big)=\frac{x}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}-\frac{1}{2x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}(x\neq 0)$$

$$=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\frac{1}{2x}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-x-\frac{1}{2}x^2\Big),$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n}=-\ln(1-x)(-1\leqslant x<1)$，

所以 $S(x)=-\frac{x}{2}\ln(1-x)+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2x}\ln(1-x)(x\neq 0)$.

于是 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2.$

【例 17】 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2-n+1}{2^n}$ 的和.

解题思路 数项级数的求和问题一般可通过构造幂级数，转化为幂级数求和函数问题. 应先设法对数项级数进行变形，以便构造易于求和的幂级数形式.

解 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2-n+1}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$，

几何级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}$，令 $S(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}$，有

$$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\Big(\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\Big)'=\Big(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\Big)''$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: diky66)

$$=\left(\frac{x}{1-x}\right)''=\frac{2}{(1-x)^3}(-1<x<1),$$

于是 $$\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)(-\frac{1}{2})^n=(-\frac{1}{2})^2S(-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{(1+\frac{1}{2})^3}=\frac{4}{27},$$

所以 $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2-n+1}{2^n}=\frac{2}{3}+\frac{4}{27}=\frac{22}{27}.$$

四、函数展开为幂级数

基本思路　将函数在某点处展开成幂级数有直接法与间接法，一般考查间接展开法，即通过适当的恒等变形、求导或积分等，将函数转化为幂级数展开式已知的函数. 数学三要求较低.

求出展开式后，要写出展开式成立的区间. 幂级数经过有限次的逐项求导、积分不改变其收敛半径及收敛区间，但在收敛区间的端点处的敛散性可能会改变. 因此，需判别展开式在收敛区间的端点处是否收敛.

另外，利用函数幂级数展开式的唯一性，可求函数 $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x_0)$，特别是 $f^{(n)}(0)$. 求出函数 $f(x)$ 的幂级数展开式 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，又 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$，根据函数幂级数展开式的唯一性，得

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=a_nx^n,\text{即 }f^{(n)}(0)=a_n\cdot n!.\text{（参见第二章的例子）}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【例 18】　将 $f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$ 展开为 x 的幂级数.

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

解题思路　幂级数展开有两种方法，即直接法和间接法. 一般考查间接法，通过适当的恒等变形、求导或积分等，转化为幂级数展开式已知的函数.

解　因为 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$，所以 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}(-1<x<1)$，有

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}+\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nt^{2n}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}(-1\leqslant x<1).$$

【评注】　幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}$ 的收敛域为 $(-1,1)$，但逐项积分后所得幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ 的收敛域为 $[-1,1)$，在 $x=-1$ 处该幂级数的和是不是就是 $f(-1)$？在此不讨论了.

【例 19】　将函数 $f(x)=\frac{x}{2+x-x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

解题思路　将函数 $f(x)$ 分成部分分式的和，利用常见函数的幂级数展开式.

解　$f(x)=\frac{x}{2+x-x^2}=\frac{x}{(2-x)(1+x)}=\frac{A}{2-x}+\frac{B}{1+x}$,

比较两边系数可得 $A=\frac{2}{3}, B=-\frac{1}{3}$，即 $f(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{2-x}-\frac{1}{1+x}\right)=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{1-\frac{x}{2}}-\frac{1}{1+x}\right]$.

而 $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, x\in(-1,1), \frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n, x\in(-2,2)$,

故 $f(x)=\frac{x}{2+x-x^2}=\frac{1}{3}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^n\right)$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^{n+1}+\frac{1}{2^n}\right)x^n, x\in(-1,1).$$

【评注】 分式函数的幂级数展开一般采用间接法. 要熟记常用函数的幂级数展开公式.

【例 20】 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2-3x-4}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数，并指出其收敛区间.

解 $f(x)=\frac{1}{x^2-3x-4}=\frac{1}{(x-4)(x+1)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+1}\right)$

$$=-\frac{1}{15}\frac{1}{1-\frac{x-1}{3}}-\frac{1}{10}\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}$$

$$=-\frac{1}{15}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n-\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^n}$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{15\cdot 3^n}+\frac{(-1)^n}{10\cdot 2^n}\right)(x-1)^n.$$

其中，第一个幂级数的收敛区间为 $|x-1|<3$，第二个幂级数的收敛区间为 $|x-1|<2$，故幂级数的收敛区间为 $|x-1|<2$，即 $-1<x<3$.

微信公众号【顶尖考研】 (ID:djky66)

【例 21】 已知 $\cos 2x-\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n(-1<x<1)$，求 a_n.

解题思路 利用已知函数的幂函数展开的唯一性，比较函数的同次幂系数即可求得 a_n.

解 因 $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^n, -1<x<1$,

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}, -\infty<x<+\infty,$$

所以 $\cos 2x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{4^n}{(2n)!}x^{2n}, -\infty<x<+\infty$,

$$-\frac{1}{(1+x)^2}=\left(\frac{1}{1+x}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot(n+1)x^n, -1<x<1.$$

由题设知 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{4^n}{(2n)!}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot(n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$.

由幂函数展开式的唯一性，比较两边幂函数的系数得

$$\begin{cases}a_{2n}=\frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!}-2n-1,\\ a_{2n+1}=2n+2\end{cases}(n=0,1,2,\cdots).$$

五、经济中的应用

基本思路　级数在经济中的应用，主要是与复利相关的问题.

复利公式：分期复利计息公式 $A = A_0(1+r)^t$，其中 r 为年利率；连续复利计息公式 $A = A_0 e^{rt}$；现值公式 $A_0 = Ae^{-rt}$.

【例 22】　设银行存款的年利率为 $r = 0.05$，并依年复利计算. 某基金会希望通过存款 A 万元，实现第一年提取 19 万元，第二年提取 28 万元，…，第 n 年提取 $(10+9n)$ 万元，并能按此规律一直提取下去，问 A 至少应为多少万元？

解题思路　按年复利计算，第 n 年的 A_n 万元，相当于现值 $\frac{A_n}{(1+r)^n}$. A 不小于各年现值和即可，问题转化为无穷级数求和.

解　设 A_n 为用于第 n 年提取 $(10+9n)$ 万元的贴现值，则

$$A_n = (1+r)^{-n}(10+9n),$$

故
$$A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10+9n}{(1+r)^n} = 10\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n}{(1+r)^n}$$

$$= 200 + 9\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1+r)^n}.$$

设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$，$x \in (-1,1)$，因为

$$S(x) = x\Big[\sum_{n=1}^{\infty} x^n\Big]' = x\Big(\frac{x}{1-x}\Big)' = \frac{x}{(1-x)^2}, x \in (-1,1).$$

所以 $S(\frac{1}{1+r}) = S(\frac{1}{1.05}) = 420$（万元），故 $A = 200 + 9 \times 420 = 3980$（万元），即至少应存入 3980（万元）.

【评注】　本题若改为按连续复利计算，则第 n 年提取 $(10+9n)$ 万元的贴现值为 $(10+9n)e^{-rt}$，于是

$$A = 19e^{-0.05} + 28e^{-0.05\times 2} + \cdots + (10+9n)e^{-0.05n} + \cdots$$

$$= 10\sum_{n=1}^{\infty} e^{-0.05n} + \sum_{n=1}^{\infty} 9ne^{-0.05n} = 10\,\frac{e^{-0.05}}{1-e^{-0.05}} + \sum_{n=1}^{\infty} 9n(e^{-0.05})^n$$

设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 9nx^{n-1}$，则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 9\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}\mathrm{d}t = 9\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{9x}{1-x}, |x|<1.$

再求导，得 $f(x) = 9\Big(\frac{x}{1-x}\Big)' = \frac{9}{(1-x)^2}$. 故

$$A = 10\,\frac{e^{-0.05}}{1-e^{-0.05}} + e^{-0.05}\sum_{n=1}^{\infty} 9n(e^{-0.05})^{n-1}$$

$$= 10\cdot\frac{e^{-0.05}}{1-e^{-0.05}} + e^{-0.05}\cdot\frac{9}{(1-e^{-0.05})^2} = \frac{19e^{-0.05} - 10e^{-0.1}}{(1-e^{-0.05})^2} = 3794.29.$$

可见 A 至少应为 3795（万元），比按年复利计算的数额要少.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

第六章　常微分方程与差分方程

考点与要求

了解　微分方程及其阶、解、通解、初始条件和特解等概念，差分与差分方程及其通解与特解等概念，一阶常系数线性差分方程的求解方法.

理解　线性微分方程解的性质及解的结构.

会　解某些高于二阶的常系数齐次线性微分方程，解自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数以及它们的和与积的二阶常系数非齐次线性微分方程，用微分方程求解简单的经济应用问题.

掌握　变量可分离的微分方程、齐次微分方程和一阶线性微分方程的求解方法，二阶常系数齐次线性微分方程的解法.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

§1　常微分方程

内容精讲

一、几个基本概念

1. 微分方程，微分方程的阶，常微分方程

含有未知函数、未知函数的导函数与自变量之间关系的方程，叫作微分方程；未知函数导函数的最高阶数称为该微分方程的阶；未知函数是一元函数的微分方程称为常微分方程.

2. 线性微分方程

如果一个微分方程中的未知函数及其导函数只以它们的线性组合的形式出现(系数为已知函数)，则称该微分方程是线性的；否则称为非线性的.

n 阶微分方程的一般形式为

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0; \tag{①}$$

解出 $y^{(n)}$ 的形式为

$$y^{(n)}=f(x,y',\cdots,y^{(n-1)}). \tag{②}$$

3. 微分方程的解，通解

如果函数 $y=\varphi(x)$ 代入 ① 或 ②，使之成为恒等式，即

$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))\equiv 0$ 或 $\varphi^{(n)}(x)=f(x,\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n-1)}(x))$，

则称函数 $y=\varphi(x)$ 为微分方程 ① 或 ② 的解(有时还要求该函数具有直到 n 阶连续的导函数)；如果解的表达式含有个数与方程阶数相等的独立常数，则称其为**通解**.

4. 初始条件，特解

可以确定通解中任意常数的条件称为定解条件. 最常见的定解条件是初始条件. n 阶方程

① 或 ② 的初始条件一般为

$$y\Big|_{x=x_0}=k_0,\ y'\Big|_{x=x_0}=k_1,\cdots,y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0}=k_{n-1},$$

其中 $x_0,k_0,k_1,\cdots,k_{n-1}$ 是事先给定的.

满足初始条件的解称为特解.

5. 微分方程的积分曲线

微分方程的解 $y=\varphi(x)$ 所表示的曲线称为该微分方程的积分曲线.

二、常见的一阶微分方程及其解法

1. 可分离变量的方程

形式：$\dfrac{dy}{dx}=g(x)f(y)$.

解法：把自变量 x 的函数及 dx 和因变量 y 的函数及 dy 分离开来，分别放在方程的不同两端，然后再积分，可求得通解：$\int\dfrac{dy}{f(y)}=\int g(x)dx$. 注意满足 $f(y)=0$ 的常值函数 $y\equiv y_0$ 也是原给方程的解.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

2. 齐次微分方程

形式：$\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

解法：令 $u=\dfrac{y}{x}$，则 $y=ux$，$dy=udx+xdu$，并经分离变量后，方程化为

$$\frac{du}{f(u)-u}=\frac{dx}{x}(f(u)\neq u),$$

积分可得通解 $\int\dfrac{du}{f(u)-u}=\ln|x|+C$. 注意满足 $f(u)=u$ 的常数 u_0 所对应的 $y=u_0x$ 也是方程的解.

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

3. 一阶线性微分方程

形式：$y'+p(x)y=q(x)$.

解法：有两种方法：(1) 用常数变易法，将方程两边同乘以 $e^{\int p(x)dx}$，化为

$$\frac{d}{dx}(ye^{\int p(x)dx})=q(x)e^{\int p(x)dx}$$

两边积分并整理，得到

通解公式：$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]$，其中 C 是任意常数，不定积分只选一个原函数. 其中两个不定积分 $\int p(x)dx$ 取同样的原函数.

(2) 公式法，直接用上述公式.

三、二阶线性微分方程

1. 线性微分方程解的性质及解的结构定理

设方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x),\qquad①$$

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0.\qquad②$$

$f(x)$ 不恒为 0 时，① 称为二阶非齐次线性微分方程；② 称为与其对应的二阶齐次线性微

分方程.

(1) 若 $y_1(x), y_2(x)$ 是齐次方程 ② 的特解，则 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 仍是齐次方程 ② 的解.

(2) 若 $y_1(x), y_2(x)$ 是非齐次方程 ① 的特解，则 $y_1(x)-y_2(x)$ 是齐次方程 ② 的解.

(3) 若 $y_1(x)$ 是非齐次方程 ① 的特解，$y_2(x)$ 是齐次方程 ② 的解，则 $y_1(x)+y_2(x)$ 是非齐次方程 ① 的解.

(4) 若 $y_1(x), y_2(x)$ 是齐次方程 ② 的两个线性无关解 $\left(\text{即}\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}\neq\text{常数}\right)$，$y^*(x)$ 是非齐次方程 ① 的特解，则齐次方程 ② 的通解为 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$；非齐次方程 ① 的通解为

$$C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y^*(x).$$

(5)(叠加原理) 设 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 分别是方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x) \text{ 与 } y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)$$

的特解，则 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=C_1f_1(x)+C_2f_2(x)$ 的特解.

【注】 上述结论对于 n 阶线性方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$$

及其对应的齐次方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$$

仍然成立.

2. 二阶常系数线性微分方程

形式：$y''+py'+qy=f(x)$.

解法：(1) 先求对应齐次方程的通解 $y_0(x)$：

求特征方程：$\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的根.

1) 若特征方程有相异实根 λ_1,λ_2，则通解为 $y_0(x)=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$；

2) 若特征方程有重根 λ，则通解为 $y_0(x)=(C_1+C_2x)e^{\lambda x}$；

3) 若特征方程有共轭复根 $\alpha\pm i\beta(\beta\neq0)$，则通解为

$$y_0(x)=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

(2) 根据非齐次项 $f(x)$ 的形式再求 ① 的一个特解 $y^*(x)$，详见下表.

$f(x)$ 的类型	特解 $y^*(x)$ 的形式
$f(x)=P_n(x)$，其中 $P_n(x)$ 为 x 的 n 次多项式.	(1) 0 不是特征方程的根，$y^*(x)=R_n(x)$，其中 $R_n(x)$ 为待定的 x 的 n 次多项式； (2) 0 是特征方程的单根，$y^*(x)=xR_n(x)$； (3) 0 是特征方程的重根，$y^*(x)=x^2R_n(x)$.
$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$.	(1)α 不是特征方程的根，$y^*(x)=e^{\alpha x}R_n(x)$，其中 $R_n(x)$ 为待定的 x 的 n 次多项式； (2)α 是特征方程的单根，$y^*(x)=xe^{\alpha x}R_n(x)$； (3)$\alpha$ 是特征方程的重根，$y^*(x)=x^2e^{\alpha x}R_n(x)$.
$f(x)=A_0\sin\beta x$ 或 $B_0\cos\beta x$.	(1)$i\beta$ 不是特征方程的根，$y^*(x)=A\cos\beta x+B\sin\beta x$； (2)$i\beta$ 是特征方程的根，$y^*(x)=x(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$，其中 A,B 为待定常数.

(3) 方程的通解为 $y(x)=y_0(x)+y^*(x)$.

3. 高于二阶的某些常系数齐次微分方程

形式：$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0$.

解法：特征方程：$\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\cdots+p_{n-1}\lambda+p_n=0$.

微信公众号【顶尖考研】
qq：qjky66

(1) 若特征方程有 n 个相异实根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则通解为

$$C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}+\cdots+C_ne^{\lambda_n x}$$

(2) 若 λ_0 是特征方程的 k 重实根，则通解中含有

$$(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})e^{\lambda_0 x}$$

(3) 若 $\alpha\pm\beta i$ 是特征方程的 k 重共轭复根，则通解中含有

$$e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x]$$

例题分析

一、一阶微分方程的求解

基本思路　1. 先判断方程的类型，可将方程写成形式：$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 或 $\frac{dx}{dy}=g(x,y)$（这里将变量 x 看作函数，y 看作自变量）.

2. 应熟练掌握考试大纲所要求的一阶方程类型及其解法：

(1) 可分离变量方程：分离变量化为 $f(x)dx=g(y)dy$.

(2) 齐次方程：将方程化为 $\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$，令 $u=\frac{y}{x}$.

另外，有时齐次方程化为形式：$\frac{dx}{dy}=g(\frac{x}{y})$ 进行求解会更简单，此时令 $u=\frac{x}{y}$. 这里将变量 x 看作函数，y 看作自变量.

(3) 一阶线性方程：将方程化为标准形式：$y'+p(x)y=q(x)$.

一阶线性方程的另一种形式为：$x'+p(y)x=q(y)$，这里将变量 x 看作函数，y 看作自变量.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例 1】　已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\frac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$，且当 $\Delta x\to 0$ 时，α 是 Δx 的高阶无穷小，$y(0)=\pi$，则 $y(1)$ 等于

(A) 2π.　　(B) π.　　(C) $e^{\frac{\pi}{4}}$.　　(D) $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$.

解题思路　由题设可知函数 $y=y(x)$ 在点 x 处可微，根据微分与导数的关系，可得 $y'=\frac{y}{1+x^2}$，解此可分离变量方程即可.

解　根据微分的定义，可知函数 $y=y(x)$ 在点 x 处可微，且由微分与导数的关系，有 $y'=\frac{y}{1+x^2}$，此为可分离变量方程，分离变量得 $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{1+x^2}$，两边积分得 $\ln|y|=\arctan x+\ln|C_1|$，即 $|y|=|C_1|e^{\arctan x}$，亦是

$$y=Ce^{\arctan x}\quad(C=\pm C_1).$$

代入 $y(0)=\pi$，得 $C=\pi$，于是 $y=\pi e^{\arctan x}$，$y(1)=\pi e^{\frac{\pi}{4}}$，故选 (D).

【评注】　由 $\Delta y=\frac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$，根据导数定义得

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{y}{1+x^2}+\frac{\alpha}{\Delta x}\right)=\frac{y}{1+x^2}.$$

另外，从本题可知，由函数在任意点 x 处的微分或导数定义，可构造微分方程，这样可将微

分或导数的定义与微分方程结合起来，构造较综合的题目.

【例 2】 求微分方程 $\frac{dy}{dx}=2xy$ 的通解.

解题思路 这是标准的可分离变量微分方程.

解 可分离变量为 $\frac{dy}{y}=2xdx$，$\ln|y|=x^2+C_1$，(通解非全部解)，

即 $|y|=e^{x^2+C_1}$，亦是 $y=\pm e^{C_1}e^{x^2}$.

又 $y=0$ 也是解，所以 $y=Ce^{x^2}$ 是所求的通解(通解、全部解).

【例 3】 求解下列初值问题：

$$(x+y)dx+(y-x)dy=0,y|_{x=1}=-1.$$

解 由于 $y=x$ 不是此方程的解，方程化为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}.$$

这是一个齐次方程. 令 $y=ux$，得到 $x\frac{du}{dx}+u=\frac{1+u}{1-u}$，分离变量得 $\frac{1-u}{1+u^2}du=\frac{dx}{x}$，

积分并整理，有

$$|x|\sqrt{1+u^2}=Ce^{\arctan u},$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 代回上式，得到原方程的通解为 $\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\arctan\frac{y}{x}}$，$C$ 为任意的常数.

由初始条件得 $\sqrt{2}=Ce^{-\frac{\pi}{4}}$ 即 $C=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$.

因此，所求的解为 $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}e^{\arctan\frac{y}{x}+\frac{\pi}{4}}$.

【评注】 对于齐次方程，有时化为形式：$\frac{dx}{dy}=g(\frac{x}{y})$ 进行求解会更简单，此时令 $u=\frac{x}{y}$，有 $\frac{dx}{dy}=u+y\frac{du}{dy}$，方程化为 $\frac{du}{g(u)-u}=\frac{dy}{y}$，这里将变量 x 看作函数，y 看作自变量.

【例 4】 微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\frac{1}{9}$ 的特解为_____.

解题思路 先将方程化为一阶线性微分方程的标准形式，再利用其通解公式即可.

解 将原方程化为

$$y'+\frac{2}{x}y=\ln x,$$

于是通解为 $y=e^{-\int\frac{2}{x}dx}[\int\ln x\cdot e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+C]=\frac{1}{x^2}\cdot[\int x^2\ln x dx+C]$

$$=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x+C\frac{1}{x^2},$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

代入 $y(1)=-\frac{1}{9}$ 得 $C=0$，故所求解为 $y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x$.

【评注】　本题也可如下求解：原方程可化为

$$x^2y'+2xy=x^2\ln x,$$

即 $[x^2y]'=x^2\ln x$，两边积分得

$$x^2y=\int x^2\ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C,$$

再代入初始条件即可得所求解为 $y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x$.

【例 5】　求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1-y}{y-x}$ 的通解.

解题思路　从微分方程的结构中看不出是何类型，因此不妨将变量 x,y 的位置对调.

解　将方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{y-x}{1-y}=-\frac{1}{1-y}x+\frac{y}{1-y}.$$

这是一阶线性方程，用公式法，所求的通解为

$$x=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{1-y}\mathrm{d}y}\left(C+\int\frac{y}{1-y}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{1-y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y\right)=(1-y)\ln|1-y|+C(1-y)+1.$$

微信公众号（顶尖考研）(ID：diky66)

【评注】　形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{s(y)}{t(y)x+q(y)}$ 的微分方程，一般要考虑将变量 x 作为未知函数，y 作为自变量，使其成为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{t(y)x+q(y)}{s(y)}=\frac{t(y)}{s(y)}x+\frac{q(y)}{s(y)},$$

这是一个关于变量 x 为未知函数的一阶线性微分方程，其中 $s(y)\neq 0$.

【例 6】　已知 $f(x)=\begin{cases}2,x<1,\\0,x>1.\end{cases}$ 求一个在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数 $y=y(x)$，使在 $(-\infty,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 内都满足方程 $y'+y=f(x)$ 且满足条件 $y(0)=0$.

解题思路　本题主要考查非齐次项为分段函数的微分方程的求特解的方法以及解的连续性问题.

解　一阶线性微分方程 $y'+y=f(x)$ 的通解为 $y=\mathrm{e}^{-x}\left(C+\int f(x)\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x\right)$，即

$$y=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}(C_1+2\mathrm{e}^{x}), & x<1,\\ C_2\mathrm{e}^{-x}, & x>1.\end{cases}$$

其中 C_1,C_2 均为任意常数.

由初始条件 $y(0)=0$，有 $C_1=-2$，由于要求 $y=y(x)$ 是连续的，则

$\lim\limits_{x\to1^+}y(x)=\lim\limits_{x\to1^-}y(x)$，即 $C_2\mathrm{e}^{-1}=\mathrm{e}^{-1}(-2+2\mathrm{e})$，得 $C_2=2(\mathrm{e}-1)$.

补充 $y(1)=2(\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{-1}$，所求的连续函数为

$$y=\begin{cases}2(1-e^{-x}),x\leqslant 1,\\ 2(e-1)e^{-x},x>1.\end{cases}$$

【评注】 此函数 y 在 $(-\infty,+\infty)$ 内并不是初值问题 $\begin{cases}y'+y=f(x),\\ y(0)=0\end{cases}$ 的解，其原因是此函数在 $x=1$ 处不可导.

【例 7】 解微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-x+1}{y+x+5}$.

解题思路 本题表面上看不属于大纲中要求的三种类型，但可经过适当的变量代换化为基本形式，此类型题目仅作参考. 一般的方法如下：

对方程 $\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+C_1}{a_2x+b_2y+C_2}\right)$，分两种情况

1. 若 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}(=k)$，则令 $z=a_2x+b_2y$，方程化为

$\dfrac{dz}{dx}=b_2f\left(\dfrac{kz+C_1}{z+C_2}\right)+a_2$，它是变量可分离方程.

2. 若 $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$，则方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y+C_1=0,\\ a_2x+b_2y+C_2=0\end{cases}$ 有唯一解 $x=\alpha,y=\beta$.

令 $u=x-\alpha,v=y-\beta$，方程化为

$$\frac{dv}{du}=f\left(\frac{a_1+b_1\dfrac{v}{u}}{a_2+b_2\dfrac{v}{u}}\right)=g\left(\frac{v}{u}\right),g(t)=f\left(\frac{a_1+b_1t}{a_2+b_2t}\right),$$

它是齐次微分方程.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

解 方程组 $\begin{cases}y-x+1=0,\\ y+x+5=0\end{cases}$ 有唯一解 $\begin{cases}x=-2,\\ y=-3.\end{cases}$

令 $u=x+2,v=y+3$ 方程化为 $\dfrac{dv}{du}=\dfrac{v-u}{v+u}$，再令 $z=\dfrac{v}{u}$，有

$$z+u\frac{dz}{du}=\frac{z-1}{z+1},\text{即}-\frac{z+1}{z^2+1}dz=\frac{1}{u}du,$$

两边积分 $-\dfrac{1}{2}\ln(z^2+1)-\arctan z=\ln|u|+C.$

所求的解为 $-\dfrac{1}{2}\ln\left[\left(\dfrac{y+3}{x+2}\right)^2+1\right]-\arctan\dfrac{y+3}{x+2}=\ln|x+2|+C.$

二、常系数线性微分方程

基本思路 对二阶常系数线性微分方程，会求自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数的二阶常系数非齐次线性微分方程的通解.

【例 8】 设 $y=e^x(C_1\sin x+C_2\cos x)(C_1,C_2$ 为任意常数) 为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解，则该方程为_____.

解题思路 由于二阶常系数线性齐次微分方程由其特征方程唯一确定，因此由通解表达式得到对应的特征根，即可确定特征方程，从而得到齐次微分方程.

解 根据二阶常系数线性齐次微分方程的特征根与其通解表达式之间的关系，可知特征根为一对复数根 $\lambda_{1,2}=1\pm i$，根据根与系数的关系，得特征方程为 $\lambda^2-2\lambda+2=0$，

因此相应的二阶常系数线性齐次微分方程为 $y''-2y'+2y=0$.

【评注】 1. 对于二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$，函数 $Ae^{\alpha x}$ 是其解的充要条件为 $\lambda=\alpha$ 是特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的根；函数 $Ae^{\alpha x}\sin\beta x$，$Be^{\alpha x}\cos\beta x$ 或 $e^{\alpha x}(A\sin\beta x+B\cos\beta x)$ 是其解的充要条件为 $\lambda=\alpha\pm\beta i$ 是特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的根.

2. 本题还可用下列方法求解，由通解 $y=e^x(C_1\sin x+C_2\cos x)$，

求出　$y'=e^x[(C_1-C_2)\sin x+(C_1+C_2)\cos x]$，$y''=e^x(-2C_2\sin x+2C_1\cos x)$，

从 y,y',y'' 中消去 C_1,C_2，即可得到所求的二阶方程.

【例 9】 设 $y_1=1,y_2=e^x,y_3=2e^x,y_4=e^x+\dfrac{1}{\pi}$ 都是某二阶常系数齐次线性微分方程的解，则此二阶常系数齐次线性微分方程为_____.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

解 在解 $y_1=1,y_2=e^x,y_3=2e^x,y_4=e^x+\dfrac{1}{\pi}$ 中，

$$2e^x=2\cdot e^x,e^x+\frac{1}{\pi}=1\cdot e^x+\frac{1}{\pi}\cdot 1$$

故 $2e^x,e^x+\dfrac{1}{\pi}$ 不是方程的独立解，而 $\dfrac{1}{e^x}\neq$ 常数，知 1 和 e^x 是方程的两个线性无关的解. 1，e^x 对应特征根分别为 0 和 1，对应特征方程为 $\lambda(\lambda-1)=0$，即 $\lambda^2-\lambda=0$，

所求的微分方程为 $y''-y'=0$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

【例 10】 微分方程 $y''-y=e^{-x}+2$ 的特解可设为

(A) $ae^{-x}+b$.　(B) $axe^{-x}+b$.　(C) $ae^{-x}+bx$.　(D) $axe^{-x}+bx$.

解题思路 此二阶常系数非齐次线性微分方程的自由项为两个函数的和，利用叠加原理写出特解的形式.

解 特征方程为 $\lambda^2-1=0$，解得特征根 $\lambda_{1,2}=\pm 1$.

因为 -1 是特征方程的单根，方程 $y''-y=e^{-x}$ 的特解可设为 $y_1^*=axe^{-x}$.

因为 0 不是特征方程的根，方程 $y''-y=2$ 的特解可设为 $y_2^*=b$.

所以微分方程 $y''-y=e^{-x}+2$ 的特解可设为 $y^*=axe^{-x}+b$，答案应选(B).

【例 11】 设线性无关的函数 y_1,y_2,y_3 都是微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解，C_1，C_2 为任意常数，则此非齐次线性微分方程的通解是

(A) $C_1y_1+C_2y_2+y_3$.

(B) $C_1y_1+C_2y_2-(C_1-C_2)y_3$.

(C) $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$.

(D) $C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$.

解题思路 此题主要考查一般系数的线性微分方程解的结构和性质，非齐次线性微分方程的通解是对应齐次线性微分方程的通解与非齐次线性微分方程的一个特解的和. 需判断哪一个选项符合此条件.

解 显然 y_1-y_3, y_2-y_3 是对应齐次线性微分方程的两个解，且是线性无关的.

线性无关性可证明如下：设 $a(y_1-y_3)+b(y_2-y_3)=0$，则

$$ay_1+by_2-(a+b)y_3=0,$$

由于 y_1, y_2, y_3 是线性无关的，因而 $a=b=0$. 又 y_3 是非齐次线性微分方程的解，所以此非齐次线性微分方程的通解是

$$\begin{aligned} y &= C_1(y_1-y_3)+C_2(y_2-y_3)+y_3 \\ &= C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3. \end{aligned}$$

答案应选(C).

【例 12】 设 $y_1=xe^x+e^{2x}, y_2=xe^x-e^{-x}, y_3=xe^x+e^{2x}+e^{-x}$ 都是某二阶常系数非齐次线性微分方程的解，则此二阶常系数非齐次线性微分方程为_____.

解题思路 本题有两种解法：一是设所求方程为 $y''+py'+qy=f(x)$，把三个解代入方程求出 $p, q, f(x)$. 二是利用特征根写出齐次线性微分方程，再求自由项 $f(x)$.

解 【方法一】 设所求方程为 $y''+py'+qy=f(x)$，分别将 y_1, y_2, y_3 代入方程，解得

$$p=-1, q=-2, f(x)=e^x(1-2x),$$

所求方程为 $y''-y'-2y=e^x(1-2x)$.

【方法二】 利用解的性质，$y_3-y_1=e^{-x}$ 是齐次线性微分方程的解，则 $y_2+e^{-x}=xe^x$ 是非齐次线性微分方程的解，进而 $y_1-xe^x=e^{2x}$ 是齐次线性微分方程的解，所以齐次线性微分方程对应的两个特征根为 $-1, 2$.

特征方程为 $(\lambda+1)(\lambda-2)=0$，即 $\lambda^2-\lambda-2=0$，则齐次线性微分方程为

$$y''-y'-2y=0.$$

设所求方程为 $y''-y'-2y=f(x)$，把 $y=xe^x$ 代入得 $f(x)=e^x(1-2x)$.

所求方程为 $y''-y'-2y=e^x(1-2x)$.

【评注】 可见方法一要比方法二简单一些，但熟练掌握线性微分方程解的结构和性质是十分必要的.

【例 13】 求 $y''-3y'+2y=2xe^x$ 的通解.

解题思路 直接利用二阶常系数线性微分方程的求解方法.

解 由方程 $y''-3y'+2y=0$ 的特征方程 $\lambda^2-3\lambda+2=0$ 解得特征根 $\lambda_1=1, \lambda_2=2$，所以方程 $y''-3y'+2y=0$ 的通解为 $\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{2x}$.

设 $y''-3y'+2y=2xe^x$ 的特解为 $y^*=x(ax+b)e^x$，则

$$(y^*)'=(ax^2+2ax+bx+b)e^x, (y^*)''=(ax^2+4ax+bx+2a+2b)e^x.$$

代入原方程，解得 $a=-1, b=-2$，故特解为：

$$y^*=x(-x-2)e^x,$$

所以原方程的通解为 $y=\bar{y}+y^*=C_1e^x+C_2e^{2x}-x(x+2)e^x$.

【例 14】　求 $y''+y=4\sin x$ 的一个特解.

解题思路　直接利用二阶常系数非齐次线性微分方程求特解的方法.

解　由 $\lambda^2+1=0$,得 $\lambda=\pm i$. 故可设特解为 $y^*=x(A\cos x+B\sin x)$. 代入原方程得

$$[2(-A\sin x+B\cos x)+x(-A\cos x-B\sin x)]+x(A\cos x+B\sin x)=4\sin x$$

待定系数 $A=-2,B=0$. 所求特解为 $y^*=-2x\cos x$.

【评注】　对于二阶常系数非齐次线性微分方程,自由项为多项式函数、指数函数、正弦函数与余弦函数,如何用待定系数法确定特解,应熟练掌握.

【例 15】　求 $y''+y=\sin x+x\cos 2x$ 的通解.

解题思路　利用二阶常系数非齐次线性微分方程特解的叠加性.

解　特征方程的根为 $\lambda=\pm i$. $y''+y=4\sin x$ 特解为 $y_1^*=-2x\cos x$,(参见例 14)

$y''+y=x\cos 2x$ 特解 $y_2^*=-\frac{1}{3}x\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x$,则原方程的特解为

$$y^*=\frac{1}{4}y_1^*+y_2^*,$$

原方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x-\frac{1}{3}x\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 16】　已知 $y_1(x)=e^x,y_2(x)=u(x)e^x$ 是二阶微分方程 $(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0$ 的两个解,若 $u(-1)=e,u(0)=-1$,求 $u(x)$,并写出该微分方程的通解.

解题思路　根据已知的关系式,变形得到关于 $u(x)$ 的微分方程,解微分方程求得 $u(x)$.

解　计算得

$$y_2'(x)=[u'(x)+u(x)]e^x,y_2''(x)=[u''(x)+2u'(x)+u(x)]e^x,$$

将 $y_2(x)=u(x)e^x$ 代入方程 $(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0$ 有

$$(2x-1)u''(x)+(2x-3)u'(x)=0,$$

$$\frac{u''(x)}{u'(x)}=-\frac{2x-3}{2x-1},$$

两边积分　$\ln u'(x)=-x+\ln(2x-1)+\ln C_1$,

即　$u'(x)=C_1(2x-1)e^{-x}$

因而　$u(x)=-C_1(2x+1)e^{-x}+C_2$

由条件 $u(-1)=e,u(0)=-1$,得 $C_1=1,C_2=0,u(x)=-(2x+1)e^{-x}$.

$y_1(x),y_2(x)$ 是二阶微分方程 $(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0$ 两个线性无关的解,所以所求的通解为

$$y(x)=C_1e^x+C_2(2x+1).$$

【例 17】 求微分方程 $y'''+6y''+(9+a^2)y'=0$ 的通解，其中常数 $a>0$.

解题思路 本题为三阶常系数齐次线性微分方程，先求出特征方程的根，然后写出对应齐次方程的通解.

解 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^3+6\lambda^2+(9+a^2)\lambda=0$，求解得根为 $\lambda_1=0,\lambda_{2,3}=-3\pm ai$，故对应齐次方程的通解为

$$\overline{y}=C_1+\mathrm{e}^{-3x}(C_2\cos ax+C_3\sin ax)$$

【评注】 本题也可先作变量代换 $y'=u$，将原方程化为二阶常系数线性齐次微分方程进行求解.

【例 18】 具有特解 $y_1=\mathrm{e}^{-x},y_2=2x\mathrm{e}^{-x},y_3=3\mathrm{e}^{x}$ 的 3 阶常系数齐次线性微分方程是_____.

解 根据常系数齐次线性微分方程的特征根与其通解表达式之间的关系，可知特征根为 $\lambda_{1,2}=-1,\lambda_3=1$，得特征方程为 $(\lambda+1)^2(\lambda-1)=0$，即 $\lambda^3+\lambda^2-\lambda-1=0$.

因此相应的 3 阶常系数齐次线性微分方程为 $y'''+y''-y'-y=0$.

三、可化为微分方程求解的问题

基本思路 本题型主要有以下两类问题

1. 以积分方程的形式给出，经过变形、求导，去掉积分运算，转化为可解的微分方程；

2. 以多元函数偏导数的等式给出，可利用多元函数微分学的方法，去掉偏导数符号，转化为可解的微分方程.

微信公众号【尚学考研】 (ID: djky66)

【例 19】 求连续函数 $f(x)$，使它满足 $f(x)+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x^2$.

解题思路 先在等式两边对 x 求导，消去变限积分，将原方程化为关于未知函数 $f(x)$ 的微分方程，再求解该微分方程.

解 方程 $f(x)+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x^2$ 两边对 x 求导得 $f'(x)+2f(x)=2x$，

令 $x=0$，由原方程得 $f(0)=0$.

于是，原问题就转化为求微分方程 $f'(x)+2f(x)=2x$ 满足初始条件 $f(0)=0$ 的特解.

由一阶线性微分方程的通解公式，得

$$\begin{aligned}f(x)&=\mathrm{e}^{-\int 2\mathrm{d}x}\left[\int 2x\cdot\mathrm{e}^{\int 2\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\\&=\mathrm{e}^{-2x}\left[\int 2x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x+C\right]\\&=C\mathrm{e}^{-2x}+x-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

代入初始条件 $f(0)=0$，得 $C=\frac{1}{2}$，从而 $f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}+x-\frac{1}{2}$.

【评注】 1. 对于含有变限积分的函数方程问题，一般先在等式两边对 x 求导，消去变限

积分，将原方程化为关于未知函数的微分方程，再求解该微分方程.

2. 本题虽然只给出 $f(x)$ 是连续函数，实际上，隐含着 $f(x)$ 可导. 因为变限积分 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 可导，所以 $f(x)=x^2-2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 可导.

3. 由含有变限积分的函数方程转化为微分方程，一般隐含着初始条件，应在原方程中确定初始条件.

【例 20】 设 $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$，其中 f 为连续函数，求 $f(x)$.

解题思路 先在等式两边对 x 求导，消去变限积分，将原方程化为关于未知函数 $f(x)$ 的微分方程，再求解该微分方程.

解 $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$ 化为

$$f(x)=\sin x-x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t, \tag{1}$$

两边对 x 求导得

$$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-xf(x)+xf(x),$$

即
$$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t, \tag{2}$$

两边再对 x 求导得

$$f''(x)+f(x)=-\sin x,$$

令 $x=0$，由 (1) (2) 式，得 $f(0)=0,f'(0)=1$.

于是，原问题就转化为求微分方程 $f''(x)+f(x)=-\sin x$ 满足初始条件 $f(0)=0,f'(0)=1$ 的特解.

方程 $f''(x)+f(x)=-\sin x$ 对应的齐次方程的特征方程为 $\lambda^2+1=0$，特征根为 $\lambda_{1,2}=\pm\mathrm{i}$，故对应的齐次方程通解为 $C_1\cos x+C_2\sin x$.

因为 $\pm\mathrm{i}$ 是特征根，因此原方程的特解可设为 $y^*=x(A\cos x+B\sin x)$，

代入方程得 $A=\frac{1}{2},B=0$，所以方程的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}x\cos x$.

代入初始条件 $f(0)=0,f'(0)=1$，得 $C_1=0,C_2=\frac{1}{2}$，从而

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}x\cos x.$$

【例 21】 已知函数 $f(x)$ 连续可导，且满足

$$f(x)-xf(-x)+\int_0^x f(t-x)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}x^2,$$

(1) 求 $f(x)$ 的表达式；(2) 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

解 (1) 两边对 x 求导，得 $f'(x)+xf'(-x)=x$，用 $-x$ 代 x 得

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)
微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

$$f'(-x)-xf'(x)=-x,$$

解得 $$f'(x)=\frac{x+x^2}{1+x^2}.$$

故 $$f(x)=\int\frac{x+x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+x-\arctan x+C.$$

因为 $f(0)=0$，则 $f(x)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+x-\arctan x$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x+x^2}{2x(1+x^2)}=\frac{1}{2}$.

【评注】 注意 $\int_0^x f(t-x)\,\mathrm{d}t\xlongequal{u=t-x}\int_{-x}^0 f(u)\,\mathrm{d}u$.

【例 22】 设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，而 $z=f(\mathrm{e}^x\sin y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z\mathrm{e}^{2x}$，求 $f(u)$.

解题思路 令 $u=\mathrm{e}^x\sin y$，利用多元复合函数的求导法则，由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z\mathrm{e}^{2x}$ 可得到关于 $f(u)$ 的微分方程，解方程求得 $f(u)$.

微信搜索【顶尖考研】(ID: diky66)

解 令 $u=\mathrm{e}^x\sin y$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\mathrm{e}^x\sin y,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)\mathrm{e}^{2x}\sin^2 y+f'(u)\mathrm{e}^x\sin y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\mathrm{e}^x\cos y,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)\mathrm{e}^{2x}\cos^2 y-f'(u)\mathrm{e}^x\sin y,$$

代入 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z\mathrm{e}^{2x}$，得 $f''(u)=f(u)$，即 $f''(u)-f(u)=0$.

解此二阶常系数齐次线性微分方程得 $f(u)=C_1\mathrm{e}^u+C_2\mathrm{e}^{-u}$.

【评注】 若在题目中再增加条件，还可确定 C_1,C_2，如由 $\lim\limits_{u\to0}\frac{f(u)}{u}=1$ 得到结果：$f(0)=0,f'(0)=1$.

小结

对于含有变限积分的函数方程问题，应熟练掌握该题型的解题思路与方法.

由变限积分所构造的函数方程的常见形式为：$f(x)+g(x)\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=h(x)$，其中 $g(x)$，$h(x)$ 为已知可导函数，$g(x)\neq0$，求连续函数 $f(x)$.

一般先将原方程化为 $\frac{f(x)}{g(x)}+\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{h(x)}{g(x)}$，两边对 x 求导，得到关于 $f(x)$ 的一阶线性方程；再令 $x=a$，代入原方程得到初始条件 $f(a)=h(a)$，解此初值问题，即可求出 $f(x)$.

这里须注意：

1. 将原方程化为 $\frac{f(x)}{g(x)}+\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{h(x)}{g(x)}$ 的目的是通过求导能消去变限积分，从而将原方程转化为微分方程.

2. 因为 a 是积分 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 的下限，当 $x=a$ 时，积分 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=0$，所以，一般令 $x=a$，代入原方程确定微分方程的初始条件.

3. 虽然已知条件只给出函数 $f(x)$ 连续，但是，由于函数 $g(x)$，$h(x)$，$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 均可导，所以 $f(x)=h(x)-g(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 可导.

4. 在方程 $f(x)=\sin x-x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$ 中含有两个变限积分 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 与 $\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$，不能按常规的思路通过一次求导，消去变限积分，一般要进行两次求导才能消去变限积分，并转化为二阶微分方程问题.

四、微分方程的应用

基本思路　对于数学三的同学，微分方程的应用主要有两个方面，一是几何上的应用，二是经济上的应用，关键是根据实际问题列出微分方程，然后解微分方程求出所要的解. 列微分方程遵循如下步骤：

1. 根据实际要求确定要研究的量（几何量或经济量）；
2. 找出这些量所满足的规律（几何的或经济的）；
3. 运用这些规律列出方程；
4. 列出初始条件，往往隐含在题目中.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例 23】　设曲线 $y=f(x)$，其中 $y=f(x)$ 是可导函数，且 $f(x)>0$. 已知曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0$，$x=1$ 及 $x=t(t>1)$ 所围成的曲边梯形，绕 x 轴旋转一周所得的立体体积值是曲边梯形面积值的 πt 倍，求该曲线方程.

解题思路　利用体积值和面积值的关系列出微分方程，解方程得到曲线的方程.

解　**【方法一】**　旋转体的体积为 $V=\int_1^t \pi f^2(x)\mathrm{d}x=\pi\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x$，

曲边梯形的面积为 $S=\int_1^t f(x)\mathrm{d}x$，则由题意知 $V=\pi tS$.

因而　$$\pi\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x=\pi t\int_1^t f(x)\mathrm{d}x,$$

即　$$\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x=t\int_1^t f(x)\mathrm{d}x,$$

两边对 t 求导可得　$$f^2(t)=\int_1^t f(x)\mathrm{d}x+tf(t),\qquad (*)$$

再对 t 求导　$2f(t)f'(t)-f(t)-tf'(t)=f(t)$，

化简可得　$(2f(t)-t)f'(t)=2f(t)$，

变形为　$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}+\frac{1}{2y}t=1,$$

解之得 $t = C \cdot y^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}y$.

在(*)式中令 $t \to 1$,有 $f^2(1) - f(1) = 0$,因为 $f(t) > 0$,所以 $f(1) = 1$,

代入 $t = C \cdot y^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}y$ 得 $C = \frac{1}{3}$,进而 $t = \frac{1}{3}(\frac{1}{\sqrt{y}} + 2y)$.

所以,该曲线方程为 $2y + \frac{1}{\sqrt{y}} - 3x = 0$.

【方法二】 同方法一,得 $2f(t)f'(t) = 2f(t) + tf'(t)$, $f(1) = 1$.

整理得 $\frac{dy}{dt} = \frac{2y}{2y - t}$. 令 $\frac{y}{t} = u$,则 $\frac{dy}{dt} = u + t\frac{du}{dt}$,原方程变成 $t\frac{du}{dt} = \frac{3u - 2u^2}{2u - 1}$.

分离变量得 $\frac{2u - 1}{u(3 - 2u)}du = \frac{1}{t}dt$, 即 $\frac{1}{3}(\frac{-1}{u} + \frac{4}{3 - 2u})du = \frac{dt}{t}$.

积分得 $-\frac{1}{3}\ln u(3 - 2u)^2 = \ln Ct$, 即 $u^{-\frac{1}{3}}(3 - 2u)^{-\frac{2}{3}} = Ct$.

代入 $t = 1, u = 1$,得 $C = 1$,所以 $u(3 - 2u)^2 = \frac{1}{t^3}$.

代入 $u = \frac{y}{t}$ 化简得 $y(3t - 2y)^2 = 1$, 即 $t = \frac{1}{3\sqrt{y}} + \frac{2}{3}y$.

故所求曲线方程为 $x = \frac{2}{3}y + \frac{1}{3\sqrt{y}}$.

【评注】 注意利用隐含的条件确定常数 C.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 24】 设 $y = y(x)$ 是区间 $(-\pi, \pi)$ 内过 $(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{\sqrt{2}})$ 的光滑曲线,当 $-\pi < x < 0$ 时,曲线上任一点处的法线都过原点;当 $0 \leqslant x < \pi$ 时,函数满足 $y'' + y + x = 0$. 求 $y(x)$ 的表达式.

解 由题意知,当 $-\pi < x < 0$ 时, $y = -\frac{x}{y'}$,即 $ydy = -xdx$,可得

$$y^2 = -x^2 + C.$$

由初始条件 $y(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$,得 $C = \pi^2$,所以 $y = \sqrt{\pi^2 - x^2}$.

当 $0 \leqslant x < \pi$ 时, $y'' + y + x = 0$, $y'' + y = 0$ 的通解为 $y^* = C_1\cos x + C_2\sin x$,令 $y'' + y + x = 0$ 的特解为 $y_1 = Ax + b$,则有 $0 + Ax + b + x = 0$,得 $A = -1, b = 0$,故 $y_1 = -x$,因而 $y'' + y + x = 0$ 的通解为 $y = C_1\cos x + C_2\sin x - x$.

由于 $y = y(x)$ 是 $(-\pi, \pi)$ 内的光滑曲线,故 y 在 $x = 0$ 处连续,于是由 $y(0^-) = \pi, y(0^+) = C_1$,故 $C_1 = \pi$.

又 $y'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0^-}\frac{y(x) - y(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-}\frac{\sqrt{\pi^2 - x^2} - \pi}{x} = 0$, $y'_+(0) = C_2 - 1$.

由 $y'_+(0) = y'_-(0)$,得 $C_2 - 1 = 0$,即 $C_2 = 1$,

故 $y = y(x)$ 的表达式为 $y = \begin{cases} \sqrt{\pi^2 - x^2}, & -\pi < x < 0, \\ \pi\cos x + \sin x - x, & 0 \leqslant x < \pi. \end{cases}$

【例 25】　某商品市场价格 $p=p(t)$ 随时间变化，而需求函数 $Q_A=b-ap(a,b>0)$，供给函数 $Q_B=-d+cp(c,d>0)$，且 p 随时间的变化率与超额需求 (Q_A-Q_B) 成正比，求价格函数 $p=p(t)$.

解　由题意知 $\frac{dp}{dt}=k(Q_A-Q_B)=-k(a+c)p+k(b+d)$，其中 k 是比例系数，且 $p(t)\Big|_{t=0}=p(0)$.

由一阶线性微分方程的通解公式有

$$p(t)=e^{-\int k(a+c)dt}\left[\int k(b+d)e^{\int k(a+c)dt}dt+C\right],$$

则 $C=p(0)-\frac{b+d}{a+c}$，从而 $p(t)=\left(p(0)-\frac{b+d}{a+c}\right)e^{-k(a+c)t}+\frac{b+d}{a+c}$.

【评注】　本题是微分方程在经济中的应用，最为重要的是根据题意列出微分方程.

§2　差分方程

内容精讲

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky06)

一、差分的概念

给定函数 $y_t=f(t)$，其自变量 t 取值为等间隔整数值，即 $t=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$，则 $f(t)$ 在 t 时刻的一阶差分定义为 $\Delta y_t=y_{t+1}-y_t=f(t+1)-f(t)$，一阶差分 Δy_t 的差分称为 $f(t)$ 的二阶差分，记为 $\Delta^2 y_t$，即 $\Delta^2 y_t=\Delta y_{t+1}-\Delta y_t=y_{t+2}-2y_{t+1}+y_t$.

一般地，$f(t)$ 的 $k-1$ 阶差分 $\Delta^{k-1}y_t$ 的差分称为 $f(t)$ 在 t 时刻的 k 阶差分，即

$$\Delta^k y_t=\Delta^{k-1}y_{t+1}-\Delta^{k-1}y_t=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_k^i y_{t+k-i},k=1,2,\cdots,\text{其中 } C_k^i=\frac{k!}{i!(k-i)!}.$$

二、一阶常系数线性差分方程

形如 $y_{t+1}-py_t=f(t)(t=0,1,2,\cdots)$ 的方程，称为一阶常系数线性差分方程，其中 p 为非零常数，$f(t)$ 为已知函数. $y_{t+1}-py_t=0$ 称为它对应的常系数一阶线性齐次差分方程.

一阶常系数线性差分方程的通解为：$y_t=kp^t+y_t^*$，其中 y_t^* 为特解.

若 $f(t)=(A_0t^n+A_1t^{n-1}+\cdots+A_n)b^t$，则待定特解 y_t^* 具有下列形式：

$$y_t^*=t^s(B_0t^n+B_1t^{n-1}+\cdots+B_n)b^t,$$

其中，当 $p\neq b$ 时，$s=0$；当 $p=b$ 时，$s=1$.

例题分析

基本思路　差分方程的考查要求较低，只要会解简单的一阶常系数线性差分方程，以及差分方程的简单应用即可，考试中出现的频率较低.

【例 1】 差分方程 $2y_{t+1}+10y_t-5t=0$ 的通解为_____.

解题思路 先将方程化为标准形式：$y_{t+1}+ay_t=f(t)$，再求解方程.

解 将原方程化为标准形式 $y_{t+1}+5y_t=\frac{5}{2}t$. 对应的齐次方程的通解为 $\tilde{y}_t=C(-5)^t$.

设非齐次方程的特解为 $y_t^*=at+b$，代入方程得 $a=\frac{5}{12}$，$b=-\frac{5}{72}$，

因此，原方程的通解为 $y_t=C(-5)^t+\frac{5}{12}(t-\frac{1}{6})$.

【例 2】 求差分方程 $y_{t+1}-y_t=t2^t$ 的通解.

解 对应的齐次差分方程为 $y_{t+1}-y_t=0$，则其通解为 $\tilde{y}_t=c\times 1^t=c$，其中 c 为任意常数.

因为非齐次项 $f(t)=t2^t$，且 $2\neq 1$，故设原差分方程的特解为 $y_t^*=2^t(At+B)$，代入到原差分方程中，得 $2^{t+1}[A(t+1)+B]-2^t(At+B)=t\cdot 2^t$，

即 $At+2A+B=t$. 比较系数知 $A=1$，$B=-2$，故 $y_t^*=2^t(t-2)$.

从而原差分方程的通解为 $y_t=\tilde{y}_t+y_t^*=c+2^t(t-2)$.

【例 3】 差分方程 $y_{t+1}-2y_t=2^t$ 的通解为 $y_t=$_____.

解题思路 这是一阶常系数线性差分方程的求解，属于基本题型.

解 显然，对应齐次方程的通解为 $\tilde{y}_t=C2^t$. 根据原方程的右端项形式，可设非齐次方程的特解为 $y_t^*=At2^t$，代入原方程得 $A=2^{-1}$.

因此，原方程的通解为 $y_t=C2^t+t2^{t-1}$，其中 C 为任意常数.

小结

一阶常系数线性差分方程 $y_{x+1}-ay_x=f(x)(a\neq 0)$ 的通解 y_x 为对应的齐次方程 $y_{x+1}-ay_x=0$ 的通解 $\tilde{y}_x$ 与非齐次方程 $y_{x+1}-ay_x=f(x)$ 的特解 y_x^* 之和，即 $y_x=\tilde{y}_x+y_x^*$.

1. 齐次方程 $y_{x+1}-ay_x=0$ 的通解为 $\tilde{y}_x=Aa^x$（A 为任意常数）.

2. 确定非齐次方程 $y_{x+1}-ay_x=f(x)$ 的特解 y_x^*.

(1) 当 $f(x)=c$ 时（c 为常数），$y_x^*=\begin{cases}\frac{c}{1-a}, & a\neq 1,\\ cx, & a=1.\end{cases}$

(2) 当 $f(x)=cb^x$ 时（c,b 为常数且 $b\neq 1$），$y_x^*=\begin{cases}\frac{c}{b-a}b^x, & b\neq a,\\ cxb^{x-1}, & b=a.\end{cases}$

(3) 当 $f(x)=cx^n$ 时（c 为常数），$y_x^*=\begin{cases}B_0+B_1x+\cdots+B_nx^n, & a\neq 1,\\ x(B_0+B_1x+\cdots+B_nx^n), & a=1.\end{cases}$

将 y_x^* 代入方程，确定待定系数 $B_0,B_1,\cdots,B_n$，即可得到特解 y_x^*.

第二篇

线性代数

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

微信公众号【顶尖考研】
djky66)

第一章　行列式

考点与要求

了解　行列式的概念、方阵乘积.

掌握　行列式的性质.

会用　行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.

内容精讲

1.1　n 阶行列式的概念

n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

是所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的代数和,这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时,该项的前面带正号;当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时,该项的前面带负号,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.1}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和. 式(1.1)称为 n 阶行列式的**完全展开式**.

【注】　所谓排列是指由 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 所构成的一个有序数组,通常用 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 表示 n 阶排列,显然共有 $n!$ 个 n 阶排列.

一个排列中,如果一个大的数排在小的数之前,就称这两个数构成一个**逆序**. 一个排列的逆序总数称为这个排列的**逆序数**. 用 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

如果一个排列的逆序数是偶数,则称这个排列为**偶排列**,否则称为**奇排列**.

特别地,2 阶与 3 阶行列式的完全展开式:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

1.2 行列式的性质

1. 经过转置行列式的值不变，即 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

由此可知行列式行的性质与列的性质是对等的.

2. 两行（或列）互换位置，行列式的值变号.

特别地，两行（或列）相同，行列式的值为 0.

3. 某行（或列）如有公因子 k，则可把 k 提出行列式记号外（亦即用数 k 乘行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 等于用 k 乘它的某行或列）.

特别地：(1) 某行（或列）的元素全为 0，行列式的值为 0.

(2) 若两行（或列）的元素对应成比例，行列式的值为 0.

4. 如果行列式某行（或列）是两个元素之和，则可把行列式拆成两个行列式之和.

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

5. 把某行（或列）的 k 倍加到另一行（或列），行列式的值不变.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+ka_1 & b_2+ka_2 & b_3+ka_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(微信公众号【顶尖考研】 (ID: djky66)

1.3 行列式按行（或列）展开公式

n 阶行列式的值等于它的任何一行（列）元素，与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$|\boldsymbol{A}| = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}, \quad i=1,2,\cdots,n. \tag{1.2}$$

$$|\boldsymbol{A}| = a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}, \quad j=1,2,\cdots n. \tag{1.2'}$$

公式(1.2) 称 $|\boldsymbol{A}|$ 按第 i 行展开的展开式，公式(1.2′) 称 $|\boldsymbol{A}|$ 按第 j 列展开的展开式.

【注】 关于代数余子式的概念一定要搞清楚.

在 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中划去 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列的元素，由剩下的元素按原来的位置排法构成的一个 $n-1$ 阶的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称其为 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij}；称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的**代数余子式**，记为 A_{ij}，即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \tag{1.3}$$

1.4　几个重要公式

1. 上(下)三角形行列式的值等于主对角线元素的乘积

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \tag{1.4}$$

2. 关于副对角线的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}. \tag{1.5}$$

3. 两个特殊的拉普拉斯展开式

如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别是 m 阶和 n 阶矩阵，则

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & * \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| \tag{1.6}$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

4. 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j). \tag{1.7}$$

1.5　抽象 n 阶方阵行列式公式

1. 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|$； (1.8)

2. 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则 $|k\boldsymbol{A}| = k^n |\boldsymbol{A}|$； (1.9)

3. (行列式乘法公式) 若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，则 $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$，
特别地 $|\boldsymbol{A}^2| = |\boldsymbol{A}|^2$，$|\boldsymbol{A}^n| = |\boldsymbol{A}|^n$； (1.10)

4. 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$； (1.11)

5. 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}$； (1.12)

6. 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 $|\boldsymbol{A}| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$； (1.13)

7. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似，即 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，则 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$. (1.14)

【注】　一般情况 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| \neq |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}|$，$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}| \neq |\boldsymbol{A}| - |\boldsymbol{B}|$，$|k\boldsymbol{A}| \neq k|\boldsymbol{A}|$.

1.6　代数余子式性质的补充

1. 行列式的任一行(列)元素与另一行(列)元素的代数余子式乘积之和为 0，即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0, \quad i \neq j.$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0, \quad i \neq j. \tag{1.15}$$

2. 若 A 是 n 阶矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，则

$$AA^* = A^*A = |A|E. \tag{1.16}$$

例题分析

一、数字型行列式的计算

计算行列式值的最基本方法是用按行（或列）展开公式，通过降阶来实现，但在用展开公式之前，为运算的简洁，往往先用行列式的性质，例如把某行（或列）的 k 倍加到另一行（或列），以期出现 0 或公因式，从而使计算量大为减少.

【例 1】 计算 $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 11 \\ 2 & 5 & 4 & 9 \\ 5 & 3 & 2 & 12 \\ 14 & -11 & 21 & 29 \end{vmatrix} =$ _____.

分析 本题行列式元素中没有 ± 1，若马上利用倍加性质直接消零计算会比较烦琐，故可先利用倍加性质，化出一个元素为 1 或 -1，然后再化零，然后再用展开公式求值.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 11 \\ 2 & 5 & 4 & 9 \\ 5 & 3 & 2 & 12 \\ 14 & -11 & 21 & 29 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 9 \\ 5 & 3 & 2 & 12 \\ 14 & -11 & 21 & 29 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 2 & 5 \\ 5 & 8 & -3 & 2 \\ 14 & 3 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 8 & -3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & -33 & 0 \\ 2 & -17 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 8 & 33 \\ -2 & 17 \end{vmatrix} = 136 + 66 = 202.$$

微信公众号【贝尔考研】 (ID: djky66)

【例 2】 计算 $D_4 = \begin{vmatrix} a+x & a & a & a \\ a & a+x & a & a \\ a & a & a+x & a \\ a & a & a & a+x \end{vmatrix} =$ _____.

解题思路 根据行列式的结构，应有将其三角化的构思.

分析 【方法一】 由于每行元素之和均为 $x+4a$，故可把 2，3，4 列都加到第 1 列，提出公因子 $x+4a$，再消 0，即有

$$D_4 = \begin{vmatrix} a+x & a & a & a \\ a & a+x & a & a \\ a & a & a+x & a \\ a & a & a & a+x \end{vmatrix} = (x+4a)\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & a+x & a & a \\ 1 & a & a+x & a \\ 1 & a & a & a+x \end{vmatrix}$$

$$= (x+4a)\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = (x+4a)x^3.$$

【方法二】　三角化也可如下进行，把第 1 行的 -1 倍分别加到其余各行，再把 2,3,4 列均加到第 1 列，即

$$D_4=\begin{vmatrix} a+x & a & a & a \\ a & a+x & a & a \\ a & a & a+x & a \\ a & a & a & a+x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+x & a & a & a \\ -x & x & 0 & 0 \\ -x & 0 & x & 0 \\ -x & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 4a+x & a & a & a \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}=(4a+x)x^3.$$

【方法三】　利用行列式拆开的性质，应当为 2^4 个 4 阶行列式，但有 2 个或 2 个以上子列相等，其行列式值必为 0，不为 0 的只有 5 个，即

$$D_4=\begin{vmatrix} a+x & a+0 & a+0 & a+0 \\ a+0 & a+x & a+0 & a+0 \\ a+0 & a+0 & a+x & a+0 \\ a+0 & a+0 & a+0 & a+x \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ a & x & 0 & 0 \\ a & 0 & x & 0 \\ a & 0 & 0 & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & a & x & 0 \\ 0 & a & 0 & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & 0 & a & 0 \\ 0 & x & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & a \\ 0 & x & 0 & a \\ 0 & 0 & x & a \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$=(x+4a)x^3$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【方法四】　用特征值(目前有困难可暂且先略过)

设　$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a+x & a & a & a \\ a & a+x & a & a \\ a & a & a+x & a \\ a & a & a & a+x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}=x\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$

由 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{bmatrix}$ 是秩为 1 的矩阵，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $4a,0,0,0$.

所以矩阵 $\boldsymbol{A}=x\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $x+4a,x,x,x$.

故　$D_4=|\boldsymbol{A}|=(x+4a)x^3$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例 3】　计算行列式的值

(1) $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=$ _____.　　(2) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ b_2 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & c_2 \end{vmatrix}=$ _____.

(3)(1992,3)* 设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=a$，$|\boldsymbol{B}|=b$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$，则 $|\boldsymbol{C}|=$ ____.

* 指本题是 1992 年数三的考题，后同.

分析 (1) 本题有范德蒙行列式的基本结构，可考虑用行列式性质将其转化，把第 2 行加至第 1 行，有

$$D=\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b).$$

(2) 如果能用行列式的性质把 0 对换到行列式的右上角，那么特殊的拉普拉斯展开式就可以套用了. 先 2,3 两行互换，再 2,3 两列互换

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ b_2 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & c_2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ b_2 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ 0 & d_2 & 0 & c_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & d_1 \\ 0 & 0 & d_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$=(a_1a_2-b_1b_2)(c_1c_2-d_1d_2).$$

(3) 直接用拉普拉斯展开式，有

$$|\boldsymbol{C}|=\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}=(-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=(-1)^{mn}ab.$$

【例 4】 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a_3 \end{vmatrix}=$ _____.

分析 关于三对角线行列式可以用逐行相加将其三角化. 本题可从第一行开始，依次把每一行加至下一行，有

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1.$$

【例 5】 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

解 本题可用逐行相加的技巧依次把 x 消去，把第 i 行的 x 倍加到第 $i+1$ 行，i 由 1 开始，即

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2+a_1x & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2+a_1x & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3+a_2x+a_1x^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2+a_1x & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3+a_2x+a_1x^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}+a_{n-2}x+\cdots+a_1x^{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2+a_1x & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3+a_2x+a_1x^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}+a_{n-2}x+\cdots+a_1x^{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ a_n+a_{n-1}x+\cdots+a_1x^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)\cdot(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:diky66)

【评注】　因第1列元素的代数余子式都是三角形行列式，故本题也可以按第1列展开计算.

【例6】　(1990,4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 10×10 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 10^{10} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{E}$ 为10阶单位矩阵，λ 为常数，则行列式 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=$ _____.

分析　由于 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ 10^{10} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$ 中有较多的0，且有较好的规律，故可直接用展开公式.

例如，$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}$ 或 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=a_{11}A_{11}+a_{10,1}A_{10,1}$ 显然代数余子式 $A_{10,1}$ 比 A_{12} 好计算，故可按第1列展开，有

$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=$

$$(-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + 10^{10}(-1)^{10+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

$= (-\lambda)(-\lambda)^9 - 10^{10} = \lambda^{10} - 10^{10}$.

当然，本题也可考虑分别把第 2 列的 λ 倍，第 3 列的 λ^2 倍，…，第 10 列的 λ^9 倍分别加到第 1 列，再按第 1 列展开，有

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ 10^{10} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda^2 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ 10^{10} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda^3 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ 10^{10} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -\lambda^9 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ 10^{10} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ 10^{10}-\lambda^{10} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (10^{10}-\lambda^{10})(-1)^{10+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \end{vmatrix} = \lambda^{10} - 10^{10}.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky56)

【例 7】 (2015,1) n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} =$ _____.

【答案】 $2(2^n-1)$.

【分析】【方法一】 (用每一行的 $\frac{1}{2}$ 倍逐行相加)

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 2+\frac{2}{2} \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & \frac{2+2^2}{2} \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & \frac{2+2^2+2^3}{2^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ & 2 & 0 & \cdots & 0 & \frac{2+2^2}{2} \\ & & 2 & \cdots & 0 & \frac{2+2^2+2^3}{2^2} \\ & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & 2 & \frac{2+2^2+\cdots+2^{n-1}}{2^{n-2}} \\ & & & & & \frac{2+2^2+\cdots+2^n}{2^{n-1}} \end{vmatrix}$$

$=2+2^2+\cdots+2^n=2(2^n-1)$.

【方法二】（把每一行的 2 倍加到第一行）

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2^2 & 0 & \cdots & 0 & 2+2^2 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2^3 & \cdots & 0 & 2+2^2+2^3 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 2^{n-1} & 2+2^2+\cdots+2^{n-1} \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2+2^2+\cdots+2^n \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$=(2+2^2+\cdots+2^n)(-1)^{n+1}\cdot(-1)^{n-1}=2(2^n-1)$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【评注】　这些例题告诉我们在计算行列式的过程中，先把某行(列)的 k 倍分别加到其余各行(列)；或者先把每行(列)都加到同一行(列)；或者先用逐行(列)相加化简，然后再用展开公式，这些方法是基本的也是重要的.

除此之外，数学归纳法、公式法也应该会.

数学归纳法　如果 n 阶行列式结构上有很好的规律且其值与 n 有关，可以考虑用数学归纳法.

数学归纳法有两种形式：

一、验证 $n=1$ 时命题正确；假设 $n=k$ 时，命题正确；证明 $n=k+1$ 时，命题正确.

二、验证 $n=1$ 和 $n=2$ 命题都正确，假设 $n<k$ 命题正确，证明 $n=k$ 命题正确.

【例 8】 已知 n 阶矩阵

$$A=\begin{bmatrix}5&3&&&\\2&5&3&&\\&2&5&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&3\\&&&2&5\end{bmatrix}$$

证明 $|A|=3^{n+1}-2^{n+1}$.

解题思路 对于 n 阶的三对角线行列式，通常可用数学归纳法.

证明 记 n 阶行列式的值为 D_n.

(1) $n=1$ 时，$D_1=5=3^2-2^2$，命题正确.

$n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix}5&3\\2&5\end{vmatrix}=19=3^3-2^3$，命题正确.

(2) 设 $n<k$ 时，命题 $D_k=3^{k+1}-2^{k+1}$ 正确.

(3) 当 $n=k$ 时，对 $|A|$ 按第 1 列展开，有

$$D_k=5\begin{vmatrix}5&3&&&\\2&5&\ddots&&\\&\ddots&\ddots&3&\\&&2&5\end{vmatrix}_{k-1}+2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3&&&&\\2&5&3&&\\&2&5&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&3\\&&&2&5\end{vmatrix}_{k-1}$$

$$=5D_{k-1}+2\cdot(-1)^{1+2}\cdot 3\begin{vmatrix}5&3&&&\\2&5&3&&\\&2&5&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&3\\&&&2&5\end{vmatrix}_{k-2}$$

$$=5D_{k-1}-6D_{k-2}=5(3^k-2^k)-6(3^{k-1}-2^{k-1})=3^{k+1}-2^{k+1}$$

故命题正确.

二、抽象型行列式的计算

【例 9】 设 4 阶矩阵 $A=[\alpha,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3]$，$B=[\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3]$，其中 $\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 是 4 维列向量，且 $|A|=3$，$|B|=-1$，则 $|A+2B|=$ _____.

解题思路 用行列式性质，把 $|A+2B|$ 化简，向已知条件 $|A|$，$|B|$ 靠拢.

分析 本题是在考查行列式的性质，矩阵的运算等基本知识.

由矩阵运算知 $A+2B=[\alpha+2\beta,3\gamma_1,3\gamma_2,3\gamma_3]$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

那么　$|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta},3\boldsymbol{\gamma}_1,3\boldsymbol{\gamma}_2,3\boldsymbol{\gamma}_3|=3^3|\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3|$

$=3^3(|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3|+2|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3|)=27.$

【评注】　$|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$ 与 $|\boldsymbol{\alpha},k\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}|=k|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}|$ 不要混淆；$|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}|\neq|\boldsymbol{A}|+|2\boldsymbol{B}|$ 这些容易出错的地方要搞清楚、搞仔细.

【例 10】　已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，如果 $|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{4}$，则 $|(\frac{2}{3}\boldsymbol{A})^{-1}-8\boldsymbol{A}^*|=$ _____.

解题思路　利用矩阵的公式、法则先化简，目标是已知条件 $|\boldsymbol{A}|$.

分析　本题是在考查抽象方阵行列式的性质、矩阵的运算. 要注意 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|\neq|\boldsymbol{A}|-|\boldsymbol{B}|$，由 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$ 及 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}$ 有

$$|(\frac{2}{3}\boldsymbol{A})^{-1}-8\boldsymbol{A}^*|=|\frac{3}{2}\boldsymbol{A}^{-1}-2\boldsymbol{A}^{-1}|=|-\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}|=(-\frac{1}{2})^3|\boldsymbol{A}^{-1}|=-\frac{1}{2}.$$

【例 11】　(2010，$\frac{2}{3}$) 已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，若 $|\boldsymbol{A}|=3$，$|\boldsymbol{B}|=2$，$|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=$ _____.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

解题思路　由于 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 没有运算法则，本题要注意单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 恒等变形的构思.

分析　$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{E}|=|(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})|$

$$=|\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}^{-1}|\cdot|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{2}\cdot2\cdot3=3.$$

当然也可作如下恒等变形

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1})+(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{B}^{-1}|$$

$$=|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{B}^{-1}|=3\cdot2\cdot\frac{1}{2}=3.$$

【例 12】　已知 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2，3，4，5，$\boldsymbol{E}$ 为 4 阶单位矩阵，则 $|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}|=$ _____.

解题思路　已知条件是相似，要联想到如 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$ (1.14).

分析　由 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 得 $\boldsymbol{B}$ 的特征值也为 2，3，4，5. 进而知 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$ 的特征值为 1，2，3，4.

故 $|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}|=24$.

或者，因为 $\boldsymbol{A}$ 有 4 个不同的特征值，知 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}2&&&\\&3&&\\&&4&\\&&&5\end{bmatrix}$，那么 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{\Lambda}$，从而 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}\sim\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{E}$，进而知 $|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{E}|$，亦可求出行列式的值.

【评注】 在求抽象行列式值时，要有用特征值(1.13)与相似(1.14)的构思.

【例 13】 设4阶矩阵 A 和 B 相似，B^* 是 B 的伴随矩阵，若 B^* 的特征值是 $1,2,4,-1$，则 $|2A^{\mathrm{T}}|=$ _____.

分析 由 B^* 的特征值，知

$$|B^*|=1\cdot 2\cdot 4\cdot(-1)=-8$$

又 $|B^*|=|B|^3$ 得 $|B|=-2$，因 $A\sim B$ 有 $|A|=-2$

所以 $|2A^{\mathrm{T}}|=2^4|A^{\mathrm{T}}|=2^4|A|=-32$.

或由 $A\sim B\Rightarrow A^*\sim B^*\Rightarrow|A^*|=|B^*|$ 下略.

【例 14】 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是3维线性无关的列向量. 若 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$，$B=[\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3]$，且 $|A|=1$. 那么 $|B|=$ _____.

分析 利用分块矩阵乘法，有

$$B=[\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3]$$

$$=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&3\\1&1&9\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&3\\1&1&9\end{bmatrix}$$

$$|B|=|A|\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&3\\1&1&9\end{vmatrix}=(-1-1)(3-1)(3-(-1))=-16$$

或利用行列式性质恒等变形，有

$$|B|=|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3|$$
$$=|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,-2\alpha_2,2\alpha_2+8\alpha_3|$$
$$=-2|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2,2\alpha_2+8\alpha_3|$$
$$=-2|\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2,8\alpha_3|$$
$$=-16|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=-16$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djkyen)

三、行列式 $|A|$ 是否为零的判定

解题思路 若 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$ 是 n 阶矩阵，那么

行列式 $|A|=0\Leftrightarrow$ 矩阵 A 不可逆

$\Leftrightarrow$ 秩 $r(A)<n$

$\Leftrightarrow Ax=0$ 有非零解

$\Leftrightarrow 0$ 是矩阵 A 的特征值

$\Leftrightarrow A$ 的列(行)向量线性相关.

因此，判断行列式是否为零的问题，常用的思路有：① 用秩；② 用齐次方程组是否有非零解；③ 用特征值能否为零；④ 反证法也是重要的；…

因为行列式是一个数，若 $|A|=k|A|$，且 $k\neq 1$ 时亦能得出 $|A|=0$ 的结论.

【例 15】 满足 $A^{\mathrm{T}}=-A$ 的矩阵称为反对称矩阵，证明：若 A 是奇数阶反对称阵，则 $|A|=0$.

证明 设 A 的阶数为 $2k+1$，k 为正整数. 由

$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|-\boldsymbol{A}|=(-1)^{2k+1}\cdot|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|$，得　$2|\boldsymbol{A}|=0$，$|\boldsymbol{A}|=0$.

【例 16】　已知 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶非零矩阵，满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，证明 $|\boldsymbol{A}|=0$.

证明　（反证法）　如 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆，那么对 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 两边用 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 乘，得

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}$$

与 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$ 矛盾.

（用秩）　由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 有 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$，

因为 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}\Rightarrow r(\boldsymbol{B})\geqslant 1\Rightarrow r(\boldsymbol{A})<n$，故 $|\boldsymbol{A}|=0$.

【例 17】　已知 ξ 是 n 维列向量，且 $\xi^{\mathrm{T}}\xi=1$，若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\xi\xi^{\mathrm{T}}$，证明 $|\boldsymbol{A}|=0$.

证明【方法一】　从 $\xi^{\mathrm{T}}\xi=1$ 知 ξ 是非零列向量，又

$$\boldsymbol{A}\xi=(\boldsymbol{E}-\xi\xi^{\mathrm{T}})\xi=\xi-\xi(\xi^{\mathrm{T}}\xi)=\xi-\xi=\boldsymbol{0}$$

从而齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，故 $|\boldsymbol{A}|=0$.

【方法二】　由 $\xi^{\mathrm{T}}\xi=1$ 有 $(\xi\xi^{\mathrm{T}})\xi=\xi(\xi^{\mathrm{T}}\xi)=\xi=1\cdot\xi$，

知矩阵 $\boldsymbol{B}=\xi\xi^{\mathrm{T}}$ 有特征值 $\lambda=1$，那么矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ 有特征值 $\lambda=0$，故 $|\boldsymbol{A}|=0$.

【方法三】　因为

$$\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{E}-\xi\xi^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}-\xi\xi^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{E}-2\xi\xi^{\mathrm{T}}+\xi\xi^{\mathrm{T}}\xi\xi^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-\xi\xi^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$$

如果 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆，那么

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}\text{ 与 }\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\xi\xi^{\mathrm{T}}\text{ 矛盾.}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例 18】　已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，证明 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2|=0$.

证明　由 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$ 有

$$|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=1$$

若 $|\boldsymbol{A}|=1$，那么

$$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{E}|=|-(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}|=(-1)^3|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$$

从而 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$.

若 $|\boldsymbol{A}|=-1$，那么

$$|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}|=-|\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=-|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|$$

从而 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$.

又　　$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2|=|(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})|=|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|$

那么不论 $|\boldsymbol{A}|=1$ 或 $|\boldsymbol{A}|=-1$ 必有 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2|=0$.

四、关于代数余子式求和

解题思路　在代数余子式求和的问题上，除了按代数余子式的定义直接计算再求和之外，大体的思路有：

(1) 用行列式的按行或按列展开公式. 由于 A_{ij} 的值与 a_{ij} 等于几是没关系的，故可构造一个新的行列式 $|\boldsymbol{B}|$，通过求新行列式的代数余子式间接求出原行列式的代数余子式.

(2) 用第 i 行(或列) 元素乘以第 j 行(或列) 相应代数余子式乘积之和为 0 的性质 (1.15).

(3) 根据伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的定义，通过求 $\boldsymbol{A}^*$ 再来求和.

【例 19】 已知 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&0&3\\-1&2&4\\1&5&9\end{vmatrix}$，求(1)$A_{12}-A_{22}+A_{32}$；(2)$A_{31}+A_{32}+A_{33}$.

解 作为 3 阶行列式我们当然可以按定义直接求出每个代数余子式的值然后求和. 但对复杂一点的行列式如果也按定义来求就不妥了. 要会用(1.2)或(1.15)来处理问题.

(1) 在本题中，若能注意到 $a_{11}=1, a_{21}=-1, a_{31}=1$，那么

$$A_{12}-A_{22}+A_{32}=a_{11}A_{12}+a_{21}A_{22}+a_{31}A_{32}$$

根据(1.15)，立即知其和为 0.

(2) 由于代数余子式 A_{ij} 的值与元素 a_{ij} 的数值无关，那么可构造一个新的行列式，令 $a_{31}=1$，$a_{32}=1, a_{33}=1$，即

$$|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}1&0&3\\-1&2&4\\\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\-1&2&7\\1&1&-2\end{vmatrix}=-11$$

因为行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 和 $|\boldsymbol{B}|$ 有相同的 A_{31}, A_{32}, A_{33}. 那么对 $|\boldsymbol{B}|$ 按第 3 行展开，就是

$$|\boldsymbol{B}|=\mathbf{1}\cdot A_{31}+\mathbf{1}\cdot A_{32}+\mathbf{1}\cdot A_{33}$$

所以 $A_{31}+A_{32}+A_{33}=-11$.

【例 20】 若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\3&5&0&0\\0&0&4&-6\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ 则 (1)$A_{11}+A_{22}+A_{33}+A_{44}=$ _____；(2)$A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}=$ _____.

微信公众号【顶尖考研】(ddyjk (ID: diky66)

分析 因为 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2\\3&5\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}4&-6\\0&1\end{vmatrix}=-4, \boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-5&2&0&0\\3&-1&0&0\\0&0&\frac{1}{4}&\frac{3}{2}\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

所以 $\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}20&-8&0&0\\-12&4&0&0\\0&0&-1&-6\\0&0&0&-4\end{bmatrix}$

故 $A_{11}+A_{22}+A_{33}+A_{44}=20+4+(-1)+(-4)=19$

$A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}=-8+4+0+0=-4.$

【评注】 本题求 $|\boldsymbol{A}|$ 可用拉普拉斯(1.6)，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 应当用 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix}$，当求出伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^{*}$ 后，再按 $\boldsymbol{A}^{*}$ 的定义就可求所需代数余子式的和.

数学的主要目标是公众的利益和自然现象的解释。

——傅里叶

第二章　矩　阵

考点与要求

了解　单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵、三角矩阵、对称矩阵、反对称矩阵及正交矩阵等的定义及性质；方阵的幂与方阵乘积的行列式的性质；矩阵的初等变换、初等矩阵、矩阵等价；分块矩阵.

理解　矩阵的概念、逆矩阵、伴随矩阵、矩阵的秩的概念.

掌握　矩阵的线性运算、乘法、转置及它们的运算规律；逆矩阵的性质、矩阵可逆的充分必要条件；用初等变换求矩阵的逆矩阵和秩的方法；分块矩阵的运算法则.

会用　伴随矩阵求逆矩阵.

内容精讲

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

§1　矩阵的概念及运算

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

一、矩阵的概念

定义 2.1　$m\times n$ 个数排成如下 m 行 n 列的一个表格

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为是一个 $m\times n$ 矩阵，当 $m=n$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵.

如果一个矩阵的所有元素都是 0，即

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

则称这个矩阵是零矩阵，可简记为 $\boldsymbol{O}$.

两个矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{s\times t}$，如果 $m=s$，$n=t$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵.

两个同型矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{m\times n}$，如果对应的元素都相等，即 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$ 的元素所构成的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，记成 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det\boldsymbol{A}$.

【注】 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个表格，而行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 是一个数，这里的概念与符号不要混淆. $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 与 $|\boldsymbol{A}|=0$ 是不同的，不能搞错. 当 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 时可以有 $|\boldsymbol{A}|=0$，当然也可能有 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$；这些基本常识要想清楚.

二、矩阵的运算

定义 2.2(加法)　两个同型矩阵可以相加，且

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=[a_{ij}]_{m\times n}+[b_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}.$$

定义 2.3(数量乘法、简称数乘)　设 k 是数，$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ 是矩阵，则定义数与矩阵的乘法为

$$k\boldsymbol{A}=k[a_{ij}]_{m\times n}=[ka_{ij}]_{m\times n}.$$

定义 2.4(乘法)　设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times s$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是一个 $s\times n$ 矩阵($\boldsymbol{A}$ 的列数 $=\boldsymbol{B}$ 的行数)，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可乘，且乘积 $\boldsymbol{AB}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵. 记成 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=[c_{ij}]_{m\times n}$，其中 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 行、第 j 列元素 c_{ij} 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行 s 个元素和 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列的 s 个对应元素两两乘积之和，即

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

矩阵的乘法可图示如下：

$$\begin{matrix} \\ i \end{matrix}\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{is} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vdots & b_{1j} & \vdots \\ \vdots & b_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{sj} & \vdots \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \vdots \\ \cdots \quad c_{ij} \quad \cdots \\ \vdots \end{bmatrix}i$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad j \qquad\qquad\qquad\quad j$$

$$m\times s \qquad\qquad s\times n \qquad\qquad m\times n$$

特别地，设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶方阵，则记 $\overbrace{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{A}}^{k\text{个}}=\boldsymbol{A}^k$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次幂.

定义 2.5(转置)　将 $m\times n$ 型矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$ 的行列互换得到的 $n\times m$ 矩阵 $[a_{ji}]_{n\times m}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，即若

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\text{则 }\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

三、矩阵的运算规则

(1) 加法　$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是同型矩阵，则

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$　　交换律

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$　　结合律

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$　其中 $\boldsymbol{O}$ 是元素全为零的同型矩阵

$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$

(2) 数乘矩阵

$$k(mA)=(km)A=m(kA);\qquad (k+m)A=kA+mA;$$
$$k(A+B)=kA+kB;\qquad 1A=A,0A=O;$$

(3) 乘法　A,B,C 满足可乘条件

$$(AB)C=A(BC);$$
$$A(B+C)=AB+AC;$$
$$(B+C)A=BA+CA.$$

注意一般情况　$AB\neq BA$

(4) 转置

$$(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{T};\qquad (kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}};$$
$$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}};\qquad (A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A.$$

(5) 方阵的幂

$$(A^k)^l=A^{kl},A^kA^l=A^{k+l}.$$

【注意】　$(AB)^2=(AB)(AB)\neq A^2B^2.$

$$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2\neq A^2+2AB+B^2.$$
$$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2\neq A^2-B^2.$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

四、特殊矩阵

设 A 是 n 阶矩阵.

(1) 单位阵:主对角元素为 1,其余元素为 0 的矩阵称为单位阵,记成 E_n.(有时 E 记为 I).

(2) 数量阵:数 k 与单位阵 E 的积 kE 称为数量阵.

(3) 对角阵:非对角元素都是 0 的矩阵(即 $\forall i\neq j$ 恒有 $a_{ij}=0$) 称为对角阵,记成 A.

$A=\mathrm{diag}[a_1,a_2,\cdots,a_n]$.

(4) 上(下) 三角阵:当 $i>j(i<j)$ 时,有 $a_{ij}=0$ 的矩阵称为上(下) 三角阵.

(5) 对称阵:满足 $A^{\mathrm{T}}=A$,即 $a_{ij}=a_{ji}$ 的矩阵称为对称阵.

(6) 反对称阵:满足 $A^{\mathrm{T}}=-A$,即 $a_{ij}=-a_{ji},a_{ii}=0$ 的矩阵称为反对称阵.

(7) 正交阵:$A^{\mathrm{T}}A=AA^{\mathrm{T}}=E$ 的矩阵称为正交阵. 即 $A^{\mathrm{T}}=A^{-1}$.

(8) 初等矩阵:单位矩阵经过一次初等变换所得到的矩阵.

设 A 是 $m\times n$ 矩阵

(9) 行阶梯矩阵:

如果1° 矩阵中有零行,则零行都在矩阵的底部

2° 每个非零行的主元(即该行最左边的第 1 个非 0 元) 所在列的下面元素都是 0,称为行阶梯矩阵

(10) 行最简矩阵:

一个行阶梯矩阵,进一步还满足:

非零行的主元都是 1,且主元所在列的其他元素都是 0,则称为行最简矩阵.

§2　伴随矩阵、可逆矩阵

主要定理:

定理 2.1　若 A 可逆,则 A 的逆矩阵唯一.

定理 2.2　A 可逆 $\Leftrightarrow |A|\neq 0$.

一、伴随矩阵、可逆矩阵的概念

定义 2.6　由矩阵 A 的行列式 $|A|$ 所有的代数余子式所构成的形如

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

的矩阵称为矩阵 A 的伴随矩阵，记为 A^*.

定义 2.7　设 A 是 n 阶矩阵，如果存在 n 阶矩阵 B 使得

$$AB = BA = E(\text{单位矩阵})$$

成立，则称 A 是可逆矩阵或非奇异矩阵，B 是 A 的逆矩阵，记成 $A^{-1} = B$.

二、伴随矩阵重要公式

$$AA^* = A^*A = |A|E;$$

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \frac{1}{|A|}A \quad (|A| \neq 0);$$

$$(A^*)^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^*;$$

$$(kA)^* = k^{n-1}A^*;$$

$$|A^*| = |A|^{n-1}; \quad (A^*)^* = |A|^{n-2}A \quad (n \geqslant 2).$$

$$r(A^*) = \begin{cases} n, \text{如 } r(A) = n, \\ 1, \text{如 } r(A) = n-1, \\ 0, \text{如 } r(A) < n-1. \end{cases}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID：dlKy66)

三、n 阶矩阵 A 可逆的充分必要条件

(1) 存在 n 阶矩阵 B，使 $AB = E$(或 $BA = E$).

(2) $|A| \neq 0$，或秩 $r(A) = n$，或 A 的列(行) 向量线性无关.

(3) 齐次方程组 $Ax = 0$ 只有零解.

(4) $\forall b$，非齐次线性方程组 $Ax = b$ 总有唯一解.

(5) 矩阵 A 的特征值全不为 0.

四、逆矩阵的运算性质

若 $k \neq 0$，则 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$；若 A, B 可逆，则 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$，特别地 $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$；

若 A^{T} 可逆，则 $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$；$(A^{-1})^{-1} = A$；$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

【注意】　即使 A, B 和 $A + B$ 都可逆，一般地 $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$.

五、求逆矩阵的方法

方法一　用公式，若 $|A| \neq 0$，则

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*.$$

方法二　初等变换法

$$(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{E}) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\boldsymbol{E}\,|\,\boldsymbol{A}^{-1}).$$

方法三　用定义求 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

方法四　用分块矩阵.

设 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都是可逆矩阵，则

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{-1}\end{bmatrix};\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{-1}\\ \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}.$$

§3　初等变换、初等矩阵

主要结论：用初等矩阵 $\boldsymbol{P}$ 左乘 $\boldsymbol{A}$，所得 $\boldsymbol{PA}$ 矩阵就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作了一次和矩阵 $\boldsymbol{P}$ 同样的行变换.（若右乘就是相应的列变换）.

一、定义

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

定义 2.8（初等变换）　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，

(1) 用某个非零常数 $k(k\neq 0)$ 乘 $\boldsymbol{A}$ 的某行（列）的每个元素；

(2) 互换 $\boldsymbol{A}$ 的某两行（列）的位置；

(3) 将 $\boldsymbol{A}$ 的某行（列）元素的 k 倍加到另一行（列）；

称为矩阵的三种初等行（列）变换，且分别称为初等倍乘、互换、倍加行（列）变换，统称初等变换.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

定义 2.9（初等矩阵）　由单位矩阵经一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵，它们分别是（以三阶为例）

(1) 倍乘初等矩阵，记

$$\boldsymbol{E}_2(k)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & k & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{E}_2(k)$ 表示由单位阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 2 行（或第 2 列）乘 $k(k\neq 0)$ 倍得到的矩阵.

(2) 互换初等矩阵，记

$$\boldsymbol{E}_{12}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{E}_{12}$ 表示由单位阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 1，第 2 行（或 1，2 列）互换得到的矩阵.

(3) 倍加初等矩阵，记

$$\boldsymbol{E}_{31}(k)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ k & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{E}_{31}(k)$ 表示由单位阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 1 行的 k 倍加到第 3 行得到的矩阵. 当看成列变换时，应是 $\boldsymbol{E}$ 的第 3 列的 k 倍加到第 1 列得到的矩阵.

定义 2.10（等价矩阵）　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，记成 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$. 若 $\boldsymbol{A}\cong\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$，则后者称为 $\boldsymbol{A}$ 的等价标准形（$\boldsymbol{A}$ 的等价标准形是与 $\boldsymbol{A}$ 等价的所有矩阵中的最简矩阵）.

二、初等矩阵与初等变换的性质

(1) 初等矩阵的转置仍是初等矩阵.

(2) 初等矩阵均是可逆阵,且其逆矩阵仍是同一类型的初等矩阵.

注意: $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&5&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-5&1\end{bmatrix}$

即 $E_i^{-1}(k)=E_i(\frac{1}{k}),E_{ij}^{-1}=E_{ij},E_{ij}^{-1}(k)=E_{ij}(-k)$.

(3) 用初等矩阵左乘(右乘)A,相当于对 A 作相应的初等行(列)变换.

(4) 当 A 是可逆阵时,则 A 可作一系列初等行变换化成单位阵,即存在初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_N$,使得 $P_N\cdots P_2P_1A=E$.

§4 矩阵的秩

求秩主要方法:

定理 2.3 经初等变换矩阵的秩不变.

定理 2.4 如果 A 可逆,则 $r(AB)=r(B),r(BA)=r(B)$.

一、矩阵秩的概念

定义 2.11(矩阵的秩) 设 A 是 $m\times n$ 矩阵,若 A 中存在 r 阶子式不等于零,且所有 $r+1$ 阶子式(如果存在的话)均等于零,则称矩阵 A 的秩为 r,记成 $r(A)$,零矩阵的秩规定为 0.

【注】 在 $m\times n$ 矩阵 A 中,任取 k 行与 k 列($k\leqslant m,k\leqslant n$),位于这些行与列的交叉点上的 k^2 个元素按其在原来矩阵 A 中的次序可构成一个 k 阶行列式,称其为矩阵 A 的一个 k 阶**子式**.

秩 $r(A)=r\Leftrightarrow$ 矩阵 A 中非零子式的最高阶数是 r.

$r(A)<r\Leftrightarrow A$ 中每一个 r 阶子式全为 0

$r(A)\geqslant r\Leftrightarrow A$ 中有 r 阶子式不为 0

特别地,$r(A)=0\Leftrightarrow A=O$

$A\neq O\Leftrightarrow r(A)\geqslant 1$

若 A 是 n 阶矩阵,$r(A)=n\Leftrightarrow |A|\neq 0\Leftrightarrow A$ 可逆

$r(A)<n\Leftrightarrow |A|=0\Leftrightarrow A$ 不可逆

若 A 是 $m\times n$ 矩阵,则 $r(A)\leqslant \min(m,n)$.

二、矩阵秩的公式

$r(A)=r(A^{\mathrm{T}});r(A^{\mathrm{T}}A)=r(A)$.

当 $k\neq 0$ 时,$r(kA)=r(A);r(A+B)\leqslant r(A)+r(B)$,

$r(AB)\leqslant \min(r(A),r(B))$.

若 A 可逆,则 $r(AB)=r(B),r(BA)=r(B)$.

若 A 是 $m\times n$ 矩阵,B 是 $n\times s$ 矩阵,$AB=O$,则 $r(A)+r(B)\leqslant n$.

分块矩阵 $r\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}=r(A)+r(B)$.

微信公众号【顶尖考研】

§5　分块矩阵

一、分块矩阵的概念

将矩阵用若干纵线和横线分成许多小块，每一小块称为原矩阵的子矩阵(或子块)，把子块看成原矩阵的一个元素，则原矩阵叫分块矩阵.

由于不同的需要，同一个矩阵可以用不同的方法分块，构成不同的分块矩阵.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{bmatrix},\text{其中 } \boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})(i=1,2,\cdots,m) \text{ 是 } \boldsymbol{A} \text{ 的子矩阵，} \boldsymbol{A} \text{ 是以行分块的分块阵.}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n],$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

其中 $\boldsymbol{\beta}_j=(b_{1j},b_{2j},\cdots,b_{mj})^{\mathrm{T}}(j=1,2,\cdots,n)$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的子矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是以列分块的分块阵.

$$\boldsymbol{C}=\left[\begin{array}{cc:ccc} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \end{array}\right]=\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C}_3 & \boldsymbol{C}_4 \end{bmatrix}$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

其中 $\boldsymbol{C}_1=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix},\boldsymbol{O}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\boldsymbol{C}_3=\begin{bmatrix} c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{bmatrix},\boldsymbol{C}_4=\begin{bmatrix} c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{43} & c_{44} & c_{45} \end{bmatrix}$ 是 $\boldsymbol{C}$ 的子矩阵.

二、分块矩阵的运算

对矩阵适当地分块处理(要保证相对应子块的运算能够合理进行)，就有如下运算法则：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{B}_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{A}_3+\boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{A}_4+\boldsymbol{B}_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{W} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{AX}+\boldsymbol{BZ} & \boldsymbol{AY}+\boldsymbol{BW} \\ \boldsymbol{CX}+\boldsymbol{DZ} & \boldsymbol{CY}+\boldsymbol{DW} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{D}^{T} \end{bmatrix}$$

若 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别是 m 阶与 s 阶矩阵，则

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}^{n}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^{n} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{n} \end{bmatrix}$$

若 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 分别是 m 阶与 n 阶可逆矩阵，则

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{-1} \end{bmatrix},\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{-1} \\ \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$$

若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times s$ 矩阵且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，对 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{O}$ 矩阵按列分块有

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s]=[\boldsymbol{A\beta}_1,\boldsymbol{A\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{A\beta}_s]=[\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{0}]$$

$$\boldsymbol{A\beta}_i=\boldsymbol{0}\quad(i=1,2,\cdots,s).$$

即 $\boldsymbol{B}$ 的列向量是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$,其中 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times s$ 矩阵,则对 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 按行分块有

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{cases} a_{11}\boldsymbol{\beta}_1+a_{12}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_{1n}\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{\alpha}_1, \\ a_{21}\boldsymbol{\beta}_1+a_{22}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_{2n}\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{\alpha}_2, \\ \quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}\boldsymbol{\beta}_1+a_{m2}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_{mn}\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{\alpha}_m. \end{cases}$$

可见矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的行向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由 $\boldsymbol{B}$ 的行向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性表出.

类似地,对矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 按列分块,有

$$[\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n]\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix}=[\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2,\cdots,\boldsymbol{\delta}_s]$$

由此得

$$\begin{cases} b_{11}\boldsymbol{\gamma}_1+b_{21}\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+b_{n1}\boldsymbol{\gamma}_n=\boldsymbol{\delta}_1, \\ b_{12}\boldsymbol{\gamma}_1+b_{22}\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+b_{n2}\boldsymbol{\gamma}_n=\boldsymbol{\delta}_2, \\ \quad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\qquad\vdots \\ b_{1s}\boldsymbol{\gamma}_1+b_{2s}\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+b_{ns}\boldsymbol{\gamma}_s=\boldsymbol{\delta}_s, \end{cases}$$

即矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的列向量可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表出.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

例题分析

一、矩阵的概念及运算

【例 1】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$,求 $\boldsymbol{AB},\boldsymbol{BA},\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A\beta}$.

解 易见 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{O}$,

$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}$,

$\boldsymbol{A\alpha}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{A\beta}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$.

通过这个简单的例子,对于矩阵的乘法我们要注意三个细节:

(1) 矩阵乘法没有交换律,一般情况 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

(2) 本题 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,不仅 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 而且也有 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$.

(3) 本题 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$ 但 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E},\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 但 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{\beta}$,即矩阵没有消去律.

【例 2】　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_1 & & \\ & b_2 & \\ & & b_3 \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$.

解　易见 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1b_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2b_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3b_3 \end{bmatrix}$

要记住两个对角矩阵相乘的法则，引申一步有

$$\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} a_1^n & & \\ & a_2^n & \\ & & a_3^n \end{bmatrix}.$$

如 $a_1a_2a_3\neq 0$，则由

$$\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & \\ & \frac{1}{a_2} & \\ & & \frac{1}{a_3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

可知对角矩阵逆矩阵的公式

$$\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & \\ & \frac{1}{a_2} & \\ & & \frac{1}{a_3} \end{bmatrix}.$$

微信公众号【顶尖考研(ID: djky66)】
微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

【例 3】　(2003,2) 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维列向量，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置，若 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=$ _____.

分析　设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}[a_1,a_2,a_3]=\begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_2a_1 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3^2 \end{bmatrix}$.

又 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,a_3]\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}=a_1^2+a_2^2+a_3^2$.

注意到 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=a_1^2+a_2^2+a_3^2$ 正好是矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的主对角线元素之和.

所以本题 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1+1+1=3$.

【评注】　本题是考查矩阵的乘法运算，特别是考查符号 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 的区别. 一般地，若 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 都是 n 维列向量，符号 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 都是秩为 1 的矩阵，而且 $(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，而符号 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 都是数，且这两数相等 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，它是矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 的迹(也就是矩阵主对角元素之和)，当然这也是矩阵 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的迹.

【例 4】 (1)A 是 n 阶反对称矩阵,对任意的 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,计算 $x^{\mathrm{T}}Ax$ 的值.

(2) 设 A 是 3 阶矩阵,若对任意的 $x=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$ 都有 $x^{\mathrm{T}}Ax=0$,证明 A 是反对称阵.

解 (1) 按定义,有 $A^{\mathrm{T}}=-A$,又对任意的 x,$x^{\mathrm{T}}Ax$ 是一个数,那么

$$x^{\mathrm{T}}Ax=(x^{\mathrm{T}}Ax)^{\mathrm{T}},$$

故

$$(x^{\mathrm{T}}Ax)^{\mathrm{T}}=x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}x=-x^{\mathrm{T}}Ax,$$

从而有 $2x^{\mathrm{T}}Ax=0$,即对任何 x 均有 $x^{\mathrm{T}}Ax=0$.

(2) 设 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$,因已知对任意的 $x=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$,均有 $x^{\mathrm{T}}Ax=0$. 故取 $x=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$,有 $x^{\mathrm{T}}Ax=a_{11}=0$.

同理,取 $x=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 时得 $a_{22}=0$,取 $x=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 时得 $a_{33}=0$.

取 $x=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$,有 $x^{\mathrm{T}}Ax=a_{12}+a_{21}=0$,知 $a_{12}=-a_{21}$;取 $x=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$,可得 $a_{13}=-a_{31}$;再取 $x=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$,又得 $a_{23}=-a_{32}$,所以 A 是反对称阵.

【例 5】 已知 A,B 都是 n 阶矩阵,且 $AB=A+B$,证明 $AB=BA$.

证明 由 $AB=A+B$,得

$$AB-A-B+E=E \quad \text{即} \quad (A-E)(B-E)=E$$

那么 $A-E$ 可逆,且 $(A-E)^{-1}=B-E$.

于是 $(A-E)(B-E)=(B-E)(A-E)$

即 $AB-A-B+E=BA-B-A+E$

所以 $AB=BA$.

【评注】 这里用的是:如果 A 可逆,则 $AA^{-1}=A^{-1}A$.

【例 6】 设 A 是 n 阶矩阵,且 $A+E$ 可逆,证明 $(A+E)^{-1}$ 与 $A-E$ 可交换.

证明 由 $(A+E)(A-E)=A^2-E=(A-E)(A+E)$

上式两端左乘 $(A+E)^{-1}$,得

$$A-E=(A+E)^{-1}(A-E)(A+E)$$

再右乘 $(A+E)^{-1}$,得

$$(A-E)(A+E)^{-1}=(A+E)^{-1}(A-E)$$

即 $(A+E)^{-1}$ 和 $A-E$ 可交换.

小结

矩阵是一个表格,一方面它能描述很多东西,另一方面它有运算、能作初等变换又能带来全新的信息.

矩阵的乘法是基本的也是重要的,注意不要和习惯的数字运算相混淆:矩阵的乘法一般没有交换律;矩阵有零因子,即当 $A\neq O,B\neq O$ 时,有可能 $AB=O$(或者说当 $AB=O$ 时 $\nRightarrow A=O$ 或 $B=O$);矩阵没有消去律,即当 $AB=AC,A\neq O$ 时 $\nRightarrow B=C$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

二、特殊方阵的幂

【例 7】　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 6 & 3 & -3\\ -4 & -2 & 2\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^n=$ _____.

分析　由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任何两行(列)都成比例，提出比例系数，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可分解为两个矩阵的乘积，例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}[2,1,-1]$$

那么 $\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}\left([2,1,-1]\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}\right)[2,1,-1]=7\boldsymbol{A}$,

归纳得，$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{A}=7\boldsymbol{A}^2=7^2\boldsymbol{A},\cdots$

所以　$\boldsymbol{A}^n=7^{n-1}\boldsymbol{A}=7^{n-1}\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 6 & 3 & -3\\ -4 & -2 & 2\end{bmatrix}$.

【评注】　上述具有代表性，其一般情况是：若秩 $r(\boldsymbol{A})=1$，则 $\boldsymbol{A}$ 可分解为两个矩阵的乘积，有 $\boldsymbol{A}^2=l\boldsymbol{A}$ 之规律，从而

$$\boldsymbol{A}^n=l^{n-1}\boldsymbol{A}.$$

例如　$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3\\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3\\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}[b_1,b_2,b_3]=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{A}^n=l^{n-1}\boldsymbol{A}.$

那么　$\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=l\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=l\boldsymbol{A}$

其中　$l=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【例 8】　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 5\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^n=$ _____.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

分析　由于 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}.$

又 $\boldsymbol{B}^2=\begin{bmatrix}0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}^3=\boldsymbol{B}^4=\cdots=\boldsymbol{O}.$

所以 $\boldsymbol{A}^n=(2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^n=(2\boldsymbol{E})^n+n(2\boldsymbol{E})^{n-1}\boldsymbol{B}+\frac{1}{2}n(n-1)(2\boldsymbol{E})^{n-2}\boldsymbol{B}^2$

$$=\begin{bmatrix}2^n & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 0 & 2^n\end{bmatrix}+n\cdot 2^{n-1}\begin{bmatrix}0 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\frac{1}{2}n(n-1)\cdot 2^{n-2}\begin{bmatrix}0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2^n & -n\cdot 2^{n-1} & 5n\cdot 2^{n-1}-3n(n-1)2^{n-3}\\ 0 & 2^n & 3n\cdot 2^{n-1}\\ 0 & 0 & 2^n\end{bmatrix}.$$

【评注】 2007 年考题是：设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^3$ 的秩为_____.

本题难度系数：数一 0.678，数二 0.698，数三 0.696，数四 0.68.

你完成的如何？知道这里的规律吗？

注意，若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&a&b&c\\0&0&d&e\\0&0&0&f\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^3=\begin{bmatrix}0&0&0&adf\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{O}$.

【例 9】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^n=$_____.

分析 利用分块矩阵 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^n&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}^n\end{bmatrix}$.

现将 $\boldsymbol{A}$ 分块如下

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{cc:cc}1&1&0&0\\1&1&0&0\\\hdashline 0&0&1&0\\0&0&1&1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{bmatrix},\text{其中 }\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix},$$

由于

$$\boldsymbol{B}^n=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}^n=\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}\right)^n=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)^{n-1}\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}=2^{n-1}\boldsymbol{B},$$

$$\boldsymbol{C}^n=\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\right)^n=\boldsymbol{E}^n+n\boldsymbol{E}^{n-1}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+\boldsymbol{O}+\cdots+\boldsymbol{O}=\begin{bmatrix}1&0\\n&1\end{bmatrix},$$

故 $\boldsymbol{A}^n=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^n&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}^n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^{n-1}&2^{n-1}&0&0\\2^{n-1}&2^{n-1}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&n&1\end{bmatrix}$.

【例 10】 (1999，$\frac{3}{4}$) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，而 $n\geqslant 2$ 为正整数，则 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=$_____.

分析 因为

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{bmatrix}=2\boldsymbol{A}.$$

故有 $$\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=\boldsymbol{A}^{n-2}(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}.$$

或者， $$\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=\boldsymbol{A}^{n-1}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: diky66)

由 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{bmatrix}$，又 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

亦可知 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=\boldsymbol{O}$. 本题难度系数 0.78.

【例 11】 (1988,1) 设 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$，且 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^5=$ _____.

分析 由 $|\boldsymbol{P}|=-1\neq 0$，知 $\boldsymbol{P}$ 可逆，由 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$ 得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似，因为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}$，于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^5&=(\boldsymbol{PBP}^{-1})(\boldsymbol{PBP}^{-1})(\boldsymbol{PBP}^{-1})(\boldsymbol{PBP}^{-1})(\boldsymbol{PBP}^{-1})\\&=\boldsymbol{PB}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P})\boldsymbol{BP}^{-1}=\boldsymbol{PB}^5\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&0&\\&&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

在复习特征值之后，应当把这儿的思想方法好好地整理、熟练.

小结

通过这几个例题，你应当归纳一下求 $\boldsymbol{A}^n$ 的大体思路：

(1) 当秩 $r(\boldsymbol{A})=1$ 时，有 $\boldsymbol{A}^2=l\boldsymbol{A}$，$l=\sum a_{ii}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹.

(2) 特殊的二项式展开 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^n$.

(3) 分块矩阵 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^n&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}^n\end{bmatrix}$.

(4) 特征值、特征向量、相似.

(5) 简单试乘后如有规律可循，再用归纳法.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

三、伴随矩阵的相关问题

核心公式 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$

【例 12】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{bmatrix}$ 则 (1) $\boldsymbol{A}^*=$ _____；(2) $(\boldsymbol{A}^{-1})^*=$ _____.

分析 (1) 按伴随矩阵定义，求出代数余子式

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1&2\\-1&-1\end{vmatrix}=1,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}1&2\\-1&-1\end{vmatrix}=-1,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}1&1\\-1&-1\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{21}=3,\quad A_{22}=-1,\quad A_{23}=-2,\quad A_{31}=5,\quad A_{32}=-1,\quad A_{33}=-2;$$

故
$$\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&5\\-1&-1&-1\\0&-2&-2\end{bmatrix},$$

(2) 因为 $(\boldsymbol{A}^{-1})^*=(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$

而
$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{vmatrix}=-2$$

所以 $$(\boldsymbol{A}^{-1})^{*}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}.$$

【评注】 在用定义法求伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^{*}$ 时，注意 $\boldsymbol{A}^{*}$ 的元素是行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的代数余子式，因此要小心正负号，在用 A_{ij} 构造伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^{*}$ 时，排列的次序不要出错.

对于 2 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，由 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$ 易见代数余子式 $A_{11}=d, A_{22}=a, A_{12}=-c, A_{21}=-b$，故 $\boldsymbol{A}^{*}=\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$.

可知 2 阶矩阵的伴随矩阵有主对角线元素互换，副对角线元素变号的规则.

例如 $\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix}^{*}=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$.

【例 13】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^{*}=$ _____.

解题思路 本题当然可如上题那样按定义求出代数余子式再来构造 $\boldsymbol{A}^{*}$，但这样计算是烦琐的. 本题通过 $\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$ 且分块求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 好求. 那么求 $\boldsymbol{A}^{*}$ 就简便了.

解 由拉普拉斯展开式，知

$$|\boldsymbol{A}|=(-1)^{2\times 3}\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=5$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，由 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{-1}\\ \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$

得 $$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\text{故 }\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 5 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 5 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5\\ 2 & -3 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

【评注】 要掌握求伴随矩阵的方法，上面的 2 个例题给出了求伴随矩阵的两种方法. 一个是用定义，一个是在 $\boldsymbol{A}$ 可逆且 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 便于计算时. 通过 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 来转换.

【例 14】 (2002,4) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^{*},\boldsymbol{B}^{*}$ 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 对应的伴随矩阵，分块矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{C}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{C}^{*}=$

(A) $\begin{bmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{*} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{*}\end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{*} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{*}\end{bmatrix}$.

(C)$\begin{bmatrix} |A|B^* & O \\ O & |B|A^* \end{bmatrix}$.　　(D)$\begin{bmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{bmatrix}$.

分析　由于对任何 n 阶矩阵 A,B 关系式都要成立. 那么 A,B 可逆时关系式仍应当成立，故可加强条件来看 A,B 都可逆时应成立的关系式.

由　$C^* = |C|C^{-1} = \begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix}\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1}$

$$= |A||B|\begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A||B|A^{-1} & O \\ O & |A||B|B^{-1} \end{bmatrix}$$

知应选(D).

【例 15】　设 A 是 n 阶可逆矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，证明 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

证明　由于 $AA^* = A^*A = |A|E$，又 $|A| \neq 0$，故有

(1)$A\dfrac{A^*}{|A|} = \dfrac{A^*}{|A|}A = E \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$

(2)$\dfrac{A}{|A|}A^* = A^*\dfrac{A}{|A|} = E \Rightarrow (A^*)^{-1} = \dfrac{A}{|A|}$.　①

因为 $AA^* = A^*A = |A|E$ 对任意的 n 阶矩阵 A 都是成立的，那么对于 A^{-1} 上述关系式也应当成立. 故有

$$A^{-1}(A^{-1})^* = (A^{-1})^*A^{-1} = |A^{-1}|E$$

$$\Rightarrow \quad (A^{-1})^* = |A^{-1}|A = \frac{1}{|A|}A \qquad ②$$

比较 ①，② 得　$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)
微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

【例 16】　已知 A,B 都是 n 阶可逆矩阵，证明 $(AB)^* = B^*A^*$.

证明　因为 A,B 都是 n 阶可逆矩阵，由 $|AB| = |A||B| \neq 0$ 知 AB 是 n 阶可逆矩阵. 那么

$$(AB)(AB)^* = |AB|E$$

即有 $(AB)^* = |AB|(AB)^{-1} = |A||B|B^{-1}A^{-1} = (|B|B^{-1})(|A|A^{-1}) = B^*A^*$.

【例 17】　设 A 是 n 阶矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，证明：

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n, \\ 1, & r(A) = n-1, \\ 0, & r(A) < n-1. \end{cases}$$

证明　若秩 $r(A) = n$，则 $|A| \neq 0$，由于 $|A^*| = |A|^{n-1}$，故 $|A^*| \neq 0$，所以秩 $r(A^*) = n$.

若秩 $r(A) < n-1$，则 A 中所有 $n-1$ 阶子式均为 0，即行列式 $|A|$ 的所有代数余子式均为 0，即 $A^* = O$，故 $r(A^*) = 0$.

若秩 $r(A) = n-1$，则 $|A| = 0$ 且 A 中存在 $n-1$ 阶子式不为 0. 那么，由 $|A| = 0$ 有

$$AA^* = |A|E = O$$

从而 $r(A) + r(A^*) \leqslant n$，得 $r(A^*) \leqslant 1$.

又因 A 中有 $n-1$ 阶子式非 0，知有 $A_{ij} \neq 0$，即 $A^* \neq O$，得 $r(A^*) \geqslant 1$，故 $r(A^*) = 1$.

小结

伴随矩阵在考研线性代数中是重要的知识点，出现频率较高，把握好代数余子式和伴随矩阵的定义，对核心公式 $\boldsymbol{AA}^{*}=\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 一定要会灵活变形.

四、可逆矩阵的相关问题

【例 18】 若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$，对 $\boldsymbol{A}^{-1}=$ _____.

分析 这是基础题，考场上虽不会有这种考题，但求逆必须要过硬. 因为求逆会出现在矩阵方程、相似、…

【方法一】（用伴随矩阵）

因 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=3$，

又代数余子式 $A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{vmatrix}=0, A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0, A_{13}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-3$

$A_{21}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=1, A_{22}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1, A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=2$

$A_{31}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1, A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-2, A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1$

故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}=\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ -3 & 2 & -1\end{bmatrix}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【方法二】（用初等行变换）

$$[\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{E}]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & 1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & -3 & 3 & -2 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{array}\right]$$

故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ -3 & 2 & -1\end{bmatrix}$.

【评注】 (1) 由于代数余子式的计算量较大，当 $\boldsymbol{A}$ 的阶数较高时一般不用 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}$ 这一方法. 假如用这一方法求 $\boldsymbol{A}^{-1}$，那么求出 $\boldsymbol{A}^{*}$ 后不要忘记除以 $|\boldsymbol{A}|$，再有就是要小心正负号

与排序.

(2) 用初等行变换求 A^{-1} 的常规步骤：

$$(A\quad E)\xrightarrow{\text{由上往下}}\begin{pmatrix}\diagdown & \\ \approx & \diagdown\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{由下往上}}\begin{pmatrix}\diagdown & \\ & \diagdown\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{某行乘 }k}(E\quad A^{-1}).$$

【例 19】 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2+2A-3E=O$，(1) 证明 A，$A+2E$ 可逆，并求它们的逆；(2) 当 $A\neq E$ 时，判断 $A+3E$ 是否可逆，并说明理由.

解题思路 用定义法求逆矩阵. 例如要求 $A+5E$ 的逆矩阵，那就由已知条件出发，经恒等变形构造出 $(A+5E)B=E$ 的形式，那么 $(A+5E)^{-1}$ 就是矩阵 B.

证明 因 $A^2+2A-3E=O$，故有

(1) $A(A+2E)=3E$，$A\dfrac{(A+2E)}{3}=E$，A 可逆，且 $A^{-1}=\dfrac{A+2E}{3}$；

类似地，$\dfrac{1}{3}A(A+2E)=E$，$(A+2E)$ 可逆，且 $(A+2E)^{-1}=\dfrac{1}{3}A$.

(2) 当 $A\neq E$ 时，$A-E\neq O$，因 $A^2+2A-3E=(A+3E)(A-E)=O$，即齐次方程组 $(A+3E)x=0$ 有非零解，故有 $|A+3E|=0$，所以 $A+3E$ 不可逆.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例 20】 已知 A，B，$A+B$ 都是 n 阶可逆矩阵.

证明 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆且 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=B(A+B)^{-1}A$.

解题思路 A 可逆 $\Leftrightarrow |A|\neq 0$. 由于 $|A+B|$ 没有运算法则，注意 E 恒等变形的处理.

证明 由于 $|A^{-1}+B^{-1}|=|EA^{-1}+B^{-1}E|=|(B^{-1}B)A^{-1}+B^{-1}(AA^{-1})|$

$$=|B^{-1}(B+A)A^{-1}|=|B^{-1}||B+A||A^{-1}|\neq 0$$

所以矩阵 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆.

因为 $(A^{-1}+B^{-1})B(A+B)^{-1}A=(A^{-1}B+E)(A+B)^{-1}A=A^{-1}(B+A)(A+B)^{-1}A=E$

所以 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=B(A+B)^{-1}A$.

【评注】 要证 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=B(A+B)^{-1}A$ 也可如下进行：

(1) $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=(A^{-1}E+EB^{-1})^{-1}=(A^{-1}BB^{-1}+A^{-1}AB^{-1})^{-1}$

$$=[A^{-1}(B+A)B^{-1}]^{-1}=(B^{-1})^{-1}(A+B)^{-1}(A^{-1})^{-1}=B(A+B)^{-1}A$$

(2) 设 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=X$，则 $(A^{-1}+B^{-1})X=E$

$\Rightarrow$ $A(A^{-1}+B^{-1})X=A\Rightarrow(E+AB^{-1})X=A$

$\Rightarrow$ $(BB^{-1}+AB^{-1})X=A\Rightarrow(B+A)B^{-1}X=A$

$\Rightarrow$ $B^{-1}X=(A+B)^{-1}A\Rightarrow X=B(A+B)^{-1}A$.

【例 21】 (1997，$\dfrac{3}{4}$) 设 A 是 n 阶非奇异阵，α 是 n 维列向量，b 是常数，记分块矩阵

$$P=\begin{bmatrix}E & O\\ -\alpha^{\mathrm{T}}A^{*} & |A|\end{bmatrix},Q=\begin{bmatrix}A & \alpha\\ \alpha^{\mathrm{T}} & b\end{bmatrix}.$$

(1) 计算 PQ，并化简；

(2) 证明：Q 可逆的充要条件是 $\alpha^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha\neq b$.

解 (1) 由分块矩阵的乘法知

$$PQ=\begin{bmatrix}E & O\\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^{*} & |A|\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & b\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}A & \boldsymbol{\alpha}\\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^{*}A+|A|\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^{*}\boldsymbol{\alpha}+|A|b\end{bmatrix}\qquad(\text{注 } A^{*}A=|A|E)$$

$$=\begin{bmatrix}A & \boldsymbol{\alpha}\\ O & |A|(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{\alpha})\end{bmatrix}.\qquad(\text{注 } A^{*}=|A|A^{-1})$$

(2) 由于 $|A|(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{\alpha})$ 是一个数,对行列式 $|PQ|$ 按第 $n+1$ 行展开,得

$$|PQ|=\begin{vmatrix}A & \boldsymbol{\alpha}\\ O & |A|(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{\alpha})\end{vmatrix}=|A|(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{\alpha})|A|=|A|^{2}(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{\alpha})$$

同样地,$|A|$ 是一个数,对行列式 $|P|$ 按第 $n+1$ 列展开,得

$$|P|=\begin{vmatrix}E & O\\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^{*} & |A|\end{vmatrix}=|A||E|=|A|$$

因为 $|PQ|=|P||Q|$,即 $|A|^{2}(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{\alpha})=|A||Q|$.

由于 A 可逆,$|A|\neq 0$,有

$$|Q|=|A|(b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{\alpha})$$

所以 Q 可逆 $\Leftrightarrow |Q|\neq 0\Leftrightarrow b-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq 0\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq b$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky88)

【例 22】 设 $H=\begin{bmatrix}A & O\\ C & B\end{bmatrix}$,其中 A,B 分别是 m 阶和 n 阶可逆矩阵,证明矩阵 H 可逆,并求其逆.

证明 因为 A,B 可逆,由拉普拉斯展开式(1.9)有

$$|H|=\begin{vmatrix}A & O\\ C & B\end{vmatrix}=|A||B|\neq 0$$

所以矩阵 H 可逆.

设 $H^{-1}=\begin{bmatrix}X & Y\\ Z & W\end{bmatrix}$,则 $\begin{bmatrix}A & O\\ C & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X & Y\\ Z & W\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_m & O\\ O & E_n\end{bmatrix}$ 即

$$\begin{cases}AX=E\\ AY=O\\ CX+BZ=O\\ CY+BW=E\end{cases}\quad\text{解出}\quad\begin{cases}X=A^{-1}\\ Y=O\\ Z=-B^{-1}CA^{-1}\\ W=B^{-1}\end{cases}$$

故

$$\begin{bmatrix}A & O\\ C & B\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A^{-1} & O\\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1}\end{bmatrix}.$$

【例 23】 设 A,B 为 n 阶矩阵,如果 $E+AB$ 可逆,证明矩阵 $E+BA$ 可逆.

证明 (反证法) 如果 $E+BA$ 不可逆,则行列式 $|E+BA|=0$,那么齐次方程组 $(E+BA)x=0$ 有非零解.

设 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $(E+BA)x=0$ 的非 0 解,即 $(E+BA)\boldsymbol{\eta}=0,\boldsymbol{\eta}\neq 0$. 亦即 $BA\boldsymbol{\eta}=-\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}\neq 0$.

因为 $(E+AB)(A\boldsymbol{\eta})=A\boldsymbol{\eta}+A(BA\boldsymbol{\eta})=A\boldsymbol{\eta}-A\boldsymbol{\eta}=0$,且 $A\boldsymbol{\eta}\neq 0$(否则 $-\boldsymbol{\eta}=BA\boldsymbol{\eta}=B0=0$ 与 $\boldsymbol{\eta}\neq 0$ 矛盾).

所以齐次方程组 $(E+AB)x=0$ 有非零解,行列式 $|E+AB|=0$ 与 $E+AB$ 可逆相矛盾.

小结

复习可逆矩阵时，一要重视通过初等行变换和伴随矩阵求逆的基础计算，注意基本功；二要把握好用定义法求抽象矩阵的逆矩阵，特别要注意单位矩阵恒等变形的技巧；三要小心 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$ 是没有运算法则的.

五、初等变换、初等矩阵

基本思路　看清矩阵变换的情况，想清左乘还是右乘，记住初等矩阵逆矩阵的公式.

【例 24】 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{P}$ 均为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{P}$ 的转置矩阵，且 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$，若 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$，$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1,2\boldsymbol{\alpha}_3]$ 则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=$ _____.

分析 注意到矩阵 $\boldsymbol{P}$ 经过两次列变换可得到矩阵 $\boldsymbol{Q}$，

$$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1,2\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

于是 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\left(\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\right)$

$$=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&6\\3&0&6\\14&2&36\end{bmatrix}.$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例 25】 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}^{2000}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{2001}=$ _____.

分析 因为 $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$，故

$$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{2n}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{2n+1}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

因此 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{1,3}^{2n}=\boldsymbol{A}$，而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{1,3}^{2n+1}$ 是把 $\boldsymbol{A}$ 的 1,3 两列互换

所以 $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{2001}=\begin{bmatrix}3&2&1\\4&3&2\\5&4&3\end{bmatrix}$

又因 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&4&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&6&1\end{bmatrix},\cdots$

一般地 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2n&1\end{bmatrix}$

所以 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}^{2000}\begin{bmatrix}3&2&1\\4&3&2\\5&4&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2&1\\4&3&2\\5+4000\cdot4&4+4000\cdot3&3+4000\cdot2\end{bmatrix}$

故本题答案是 $\begin{bmatrix}3&2&1\\4&3&2\\16005&12004&8003\end{bmatrix}$.

【例 26】 设 A 为 3 阶可逆矩阵，把 A 的第 2 行的 -3 倍加到第 1 行得 B，再将 B 的第 1 列的 3 倍加到第 2 列得 C. 记 $P=\begin{bmatrix}1&-3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 则

(A)$C^{-1}=PA^{-1}P^{-1}$.　　(B)$C^{-1}=PA^{-1}P^{\mathrm{T}}$.

(C)$C^{-1}=P^{-1}A^{-1}P$.　　(D)$C^{-1}=P^{\mathrm{T}}A^{-1}P$.

分析 按已知条件，用初等矩阵描述有

$$B=\begin{bmatrix}1&-3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}A,\ C=B\begin{bmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

那么 $C=\begin{bmatrix}1&-3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

所以 $C^{-1}=\left(\begin{bmatrix}1&-3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}A^{-1}\begin{bmatrix}1&-3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}$

$$=\begin{bmatrix}1&-3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}A^{-1}\begin{bmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=PA^{-1}P^{-1}$$

故应选(A).

【评注】 关于矩阵的初等变换首先要看清是行变换还是列变换，这涉及到初等矩阵是左乘还是右乘的问题. 关于初等矩阵的逆矩阵、初等矩阵的方幂等应当清晰.

【例 27】 设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&-1&1\\0&2&a\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

(1) 问 a 为何值时，矩阵 A 和 B 等价；

(2) 当矩阵 A 和 B 等价时，用初等变换把矩阵 A 化成矩阵 B，写出所用的初等矩阵.

解题思路 所谓矩阵 A 和 B 等价是指矩阵 A 经过初等变换可以变成 B，而 $A\cong B\Leftrightarrow r(A)=r(B)$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

解 (1)$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 同型,$\boldsymbol{A}$ 等价于 $\boldsymbol{B} \Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B})$.

对于 $\boldsymbol{B}$,显然有 $r(\boldsymbol{B}) = 2$.

对于 $\boldsymbol{A}$,因 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$,要求 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B}) = 2$,故应有

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a+4 \end{vmatrix}$$
$$= -(a+4) = 0,$$

得 $a = -4$. 因此,当 $a = -4$ 时,有 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B}) = 2 \Rightarrow \boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$.

(2) 当 $a = -4$ 时,$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ 先作行变换,有

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\boldsymbol{P}_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\boldsymbol{P}_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}_1$$

其中 $\boldsymbol{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$,

对矩阵 $\boldsymbol{B}_1$ 作列变换可得矩阵 $\boldsymbol{B}$,

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\boldsymbol{Q}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

于是 $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{B}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

六、矩阵方程

【例 28】　已知 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{X} =$ _____.

分析 因 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$,矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 可逆.

于是　$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

或者对 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{A}$ 可逆,有 $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B}) \xrightarrow{\text{行}} (\boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{X})$

即 $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 9 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$

所以 $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

【例 29】 设 $XA=A^{\mathrm{T}}+X$,其中 $A=\begin{bmatrix}2&0&1\\1&0&0\\0&1&3\end{bmatrix}$,则 $X=$ _____.

分析 由 $XA=A^{\mathrm{T}}+X$ 有 $X(A-E)=A^{\mathrm{T}}$.

因 $A-E=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&1&2\end{bmatrix}$ 可逆,于是

$$X=A^{\mathrm{T}}(A-E)^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&0&1\\1&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&1&2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}6&-4&-3\\-1&1&1\\-1&2&2\end{bmatrix}.$$

【例 30】 (1998,3) 设矩阵 A,B 满足 $A^*BA=2BA-8E$,其中 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,则 $B=$ _____.

分析 先化简矩阵方程,左乘 A 右乘 A^{-1},有

$$A(A^*BA)A^{-1}=A(2BA)A^{-1}-A(8E)A^{-1}$$

利用 $AA^*=|A|E$,本题 $|A|=-2$,得

$$B+AB=4E$$

$$B=4(A+E)^{-1}=4\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-4&0\\0&0&2\end{bmatrix}.$$

微信公众号【贝贝考研】(ID:djky66)

【例 31】 已知 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$,又 $AXA+XA-AX-X=AB+B$,则 $X=$ _____.

分析 恒等变形,有

$$(A+E)XA-(A+E)X=(A+E)B$$

易见 $A+E$ 可逆,于是左乘 $(A+E)^{-1}$,有

$$XA-X=B$$

即

$$X(A-E)=B$$

故 $X=B(A-E)^{-1}$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&1&0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

七、矩阵秩的计算

要把握好矩阵秩的概念和计算

【例 32】 判断下列命题是否正确

(1) 若 $r(A)=r$,那么矩阵 A 中能否有 $r-1$ 阶子式为 0?能否有 $r-1$ 阶子式不为 0?

(2) 若 $r(\boldsymbol{A})=r$,那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中能否有 r 阶子式为 0?能否有 $r+1$ 阶子式不为 0?

分析 (1) 当 $r(\boldsymbol{A})=r$ 时,$\boldsymbol{A}$ 中可以有 $r-1$ 阶子式为 0(但不能所有的 $r-1$ 阶子式全为 0). 必须有 $r-1$ 阶子式不为 0(否则 $\boldsymbol{A}$ 中 r 阶子式一定全为 0,那必有 $r(\boldsymbol{A})<r$).

(2) 当 $r(\boldsymbol{A})=r$ 时,$\boldsymbol{A}$ 中可以有 r 阶子式为 0(但不能所有的 r 阶子式全为 0). 不能有 $r+1$ 阶子式不为 0. (否则 $r(\boldsymbol{A})>r$).

【例 33】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b & b & b & b \\ b & a & b & b & b \\ b & b & a & b & b \\ b & b & b & a & b \\ b & b & b & b & a \end{bmatrix}$,则 $r(\boldsymbol{A})=$ _____.

分析 对 $\boldsymbol{A}$ 作初等变换,得

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b & b & b & b \\ b & a & b & b & b \\ b & b & a & b & b \\ b & b & b & a & b \\ b & b & b & b & a \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} a & b & b & b & b \\ b-a & a-b & 0 & 0 & 0 \\ b-a & 0 & a-b & 0 & 0 \\ b-a & 0 & 0 & a-b & 0 \\ b-a & 0 & 0 & 0 & a-b \end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix} a+4b & b & b & b & b \\ 0 & a-b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-b \end{bmatrix}.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)
微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

由 $\boldsymbol{A}$ 的等价阶梯形矩阵知

当 $a=b=0$ 时,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$,$r(\boldsymbol{A})=0$;当 $a=b\neq 0$ 时,$r(\boldsymbol{A})=1$;

当 $a+4b=0$ 时(此时 $a\neq b$),$r(\boldsymbol{A})=4$;当 $a\neq b$ 且 $a\neq -4b$ 时,$r(\boldsymbol{A})=5$.

【评注】 (1) 本题也可通过计算行列式的值用定义法来分析讨论矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

计算出 $|\boldsymbol{A}|=(a+4b)(a-b)^4$ 之后,当 $a+4b\neq 0$ 且 $a-b\neq 0$ 知 $r(\boldsymbol{A})=5$;当 $a=b=0$ 知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$,此时 $r(\boldsymbol{A})=0$;当 $a=b\neq 0$ 易见 $r(\boldsymbol{A})=1$,当 $a=-4b$ 且 $b\neq 0$ 时,$|\boldsymbol{A}|=0$ 但

$$\begin{vmatrix} -4b & b & b & b \\ b & -4b & b & b \\ b & b & -4b & b \\ b & b & b & -4b \end{vmatrix}=125b^4\neq 0,$$

知 $r(\boldsymbol{A})=4$.

(2) 因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,必有 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$ 且 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\Lambda})$. 那么当把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值求出来,得到 $\boldsymbol{\Lambda}$ 后,亦可用 $r(\boldsymbol{\Lambda})$ 来求 $r(\boldsymbol{A})$.

【例 34】 (1) 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & a & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$,且 $r(\boldsymbol{AB})=2$,则 $a=$ _____.

(2) 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 2 阶非 0 矩阵且 $\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{O}$,则 $r(\boldsymbol{A})=$ _____.

分析 (1) 对行列式 $|\boldsymbol{B}|$ 按第 2 列展开,易见 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$,所以 $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵,

那么 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})=2$.

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有 2 阶子式 $\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}\neq 0$,故 $r(\boldsymbol{A})=2\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|=0$

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2&5\\2&a&7\\1&3&2\end{vmatrix}=3(5-a)$$

即 $a=5$ 时 $r(\boldsymbol{AB})=2$.

(2) 因为 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$,知 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 1$. 由 $\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{O}\Rightarrow|\boldsymbol{A}|^5=0\Rightarrow|\boldsymbol{A}|=0$ 所以 $r(\boldsymbol{A})=1$.

【例 35】 (2018 选择题改编) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 3 阶矩阵.

(1) 证明 $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$.

(2) 举例说明 $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{A})$ 是错误的.

解 (1) 设 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$,对矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 分别按列分块,记 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$,$\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3]$,记 $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$. 那么由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$,有

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}=[\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3]$$

即 $\begin{cases}\boldsymbol{\gamma}_1=b_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+b_{31}\boldsymbol{\alpha}_3\\ \boldsymbol{\gamma}_2=b_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+b_{32}\boldsymbol{\alpha}_3\\ \boldsymbol{\gamma}_3=b_{13}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{23}\boldsymbol{\alpha}_2+b_{33}\boldsymbol{\alpha}_3\end{cases}$

故 $\boldsymbol{AB}$ 的列向量 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

又因 $r(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$ 的列秩

故 $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{A})$.

(2) 若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

$$r[\boldsymbol{A},\boldsymbol{BA}]=r\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}=3$$,而 $r(\boldsymbol{A})=2$,所以 $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{A})$ 是错误的.

【例 36】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times s$ 矩阵,证明秩

$$r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min(r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})).$$

证明 【方法一】 对于齐次方程组

$$(\mathrm{I})\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}\text{ 与 }(\mathrm{II})\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$$

若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是方程组(Ⅱ)的任一个解,则由

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B\alpha})=\boldsymbol{A0}=\boldsymbol{0}$$

知 $\boldsymbol{\alpha}$ 是方程组(Ⅰ)的解. 因此方程组(Ⅱ)的解集合是方程组(Ⅰ)的解集合的子集合.

又因(Ⅰ)的解向量的秩为 $s-r(\boldsymbol{AB})$,(Ⅱ)的解向量的秩为 $s-r(\boldsymbol{B})$,故有

$$s-r(\boldsymbol{B})\leqslant s-r(\boldsymbol{AB})$$

即 $r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{B})$.

微信客服【顶尖考研】(dingjian66)

另一方面，$r(\boldsymbol{AB})=r((\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\leqslant r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{A})$. 命题得证.

【方法二】　记 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，并对 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{C}$ 按列分块，有

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1s}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2s}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{ns}\end{bmatrix}=[\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s]$$

说明 $\boldsymbol{AB}$ 的列向量 $\boldsymbol{\gamma}_i(i=1,2,\cdots,s)$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出. 因此据定理 3.6 与 3.7 有

$$r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s)\leqslant r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=r(\boldsymbol{A})$$

类似地，对 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 分别按行分块，有

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\\boldsymbol{\beta}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\beta}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\delta}_1\\\boldsymbol{\delta}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\delta}_m\end{bmatrix}$$

说明 $\boldsymbol{AB}$ 的行向量 $\boldsymbol{\delta}_j(j=1,2,\cdots,m)$ 可由 $\boldsymbol{B}$ 的行向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性表出，因此

$$r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2,\cdots,\boldsymbol{\delta}_m)\leqslant r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=r(\boldsymbol{B}).$$

【例 37】　若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，证明：

$$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID：diky66)

证明　由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，得 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$，故

$$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\leqslant n. \qquad ①$$

又 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$，有

$$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\geqslant r[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})]=r(2\boldsymbol{E})=n. \qquad ②$$

比较 ①，② 得证　$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

小结

矩阵的秩是一些同学感到困难的知识点，但矩阵的秩在线性代数里几乎无孔不入，希望同学在秩的概念上花一些时间把它理解清楚. 有几个简单的问题：例如 $\boldsymbol{A}$ 是 3×4 矩阵，那么秩 $r(\boldsymbol{A})$ 能为 4 吗？又若秩 $r(\boldsymbol{A})=2$，那么 $\boldsymbol{A}$ 中能否有某 2 阶子式为 0？能否有某 3 阶子式不为 0？

又如，增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{cccc:c}1&-1&2&3&6\\&1&0&4&0\\&&&5&0\end{array}\right]$，那么 $r(\boldsymbol{A})=?,r(\overline{\boldsymbol{A}})=?$

在求矩阵秩时，基本方法是：经过初等变换矩阵的秩不变. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B})$，$r(\boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{B})$.

给我最大快乐的，不是已懂得知识，而是不断的学习；不是已有的东西，而是不断的获取；不是已达到的高度，而是继续不断的攀登。

——高斯

第三章　向　量

考点与要求

了解　向量的概念，内积的概念.

理解　向量的线性组合与线性表示、向量组线性相关、线性无关的概念，向量组的极大线性无关组的概念，向量组等价的概念，矩阵的秩与其行(列)向量组的秩之间的关系.

掌握　向量的加法和数乘的运算法则，向量组线性相关、线性无关的有关性质及判别法，线性无关向量组正交规范化的施密特(Schmidt)方法.

会求　向量组的极大线性无关组及秩.

内容精讲

§1　n 维向量的概念与运算

微信公众号【贝大考研】

n 维向量　n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 所构成的一个有序数组称为 n 维向量. 记成 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 或 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，分别称为 n 维行向量或 n 维列向量，数 a_i 称为向量的第 i 个分量.

零向量　所有分量都是 0 的向量称为零向量，记为 $\mathbf{0}$.

n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 相等

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}\Leftrightarrow a_1=b_1,a_2=b_2,\cdots,a_n=b_n.$$

n 维向量的运算. 如 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 则

(1) 加法　$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)^{\mathrm{T}}$.

(2) 数乘　$k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)^{\mathrm{T}}$.

(3) 内积　$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$

特别地，如 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$，则称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交.

又 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$，称 $\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度.

向量的加法、数乘满足：

$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha},(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}),\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$，

$1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha},k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha},(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha},k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$.

向量内积满足：

$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}),k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},k\boldsymbol{\beta})$，

$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}),(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geqslant 0$，等号成立当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

§2　线性表出、线性相关

线性组合　m 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 及 m 个数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 所构成的向量

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

称为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个**线性组合**，数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 称为组合系数.

一、线性表出的概念

定义 3.1　对 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}$，如果存在实数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \boldsymbol{\beta}$$

则称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 是向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的**线性组合**，或者说向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ **线性表出(示)**.

定义 3.2　设有两个 n 维向量组(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$；(Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$，如果(Ⅰ)中每个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i (i = 1, 2, \cdots, s)$ 都可由(Ⅱ)中的向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出，则称向量组(Ⅰ)可由向量组(Ⅱ)线性表出.

如果(Ⅰ)，(Ⅱ)这两个向量组可以互相线性表出，则称这两个**向量组等价**.

【注】 (1) 等价向量组具有传递性、对称性、反身性.

(2) 向量组和它的极大线性无关组是等价向量组.

(3) 向量组的任意两个极大线性无关组是等价向量组.

(4) 等价的向量组有相同的秩，但秩相等的向量组不一定等价.

二、线性相关、线性无关的概念

定义 3.3　对于 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$，如果存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \boldsymbol{0}$$

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ **线性相关**，否则称它**线性无关**.

所谓线性无关，应当理解清晰：

只要 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 不全为零，必有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s \neq \boldsymbol{0}$.

或者，当且仅当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$ 时，才有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \boldsymbol{0}$.

显然，含有零向量；相等向量；坐标成比例的向量组都是线性相关的，而阶梯形向量组一定是线性无关的.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

三、线性表出、线性相关的重要定理

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

定理 3.1　n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

$$\Leftrightarrow \text{齐次方程组}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \text{ 有非零解.}$$

$\Leftrightarrow$ 秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) < s$.

推论　(1) n 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n| = 0$.

(2) $n+1$ 个 n 维向量必线性相关.

(3) 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 必线性相关.

(4) 如果 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则它的延伸组 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_s \\ \boldsymbol{\beta}_s \end{pmatrix}$ 必线性无关.

定理 3.2　n 维向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出

$\Leftrightarrow$ 非齐次方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots x_m\boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{\beta}$ 有解

$\Leftrightarrow$ 秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m) = r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta})$

定理 3.3　向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 至少有一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可以由其余 $s-1$ 个向量

线性表出.

定理 3.4 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 线性相关，则向量 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出，且表示法唯一.

定理 3.5 设有两个 n 维向量组(Ⅰ)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，(Ⅱ)$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$，

如果(Ⅰ)能由(Ⅱ)线性表出，且 $s>t$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 必线性相关.

推论 若 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出，且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则 $s\leqslant t$.

§3 极大线性无关组、秩

一、极大线性无关组、向量组秩的概念

定义 3.4 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中，有一个部分组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}(1\leqslant r\leqslant s)$，满足条件

(1)$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性无关；

(2)再添加任一向量 $\alpha_j(1\leqslant j\leqslant s)$，向量组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r},\alpha_j$ 必线性相关，

则称向量组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个**极大线性无关组**.

【注】 (1)只有一个零向量构成的向量组没有极大线性无关组.

(2)一个线性无关的向量组的极大线性无关组是该向量组本身.

(3)向量组的极大线性无关组一般不唯一，但其极大线性无关组的向量个数是一样的.

(4)条件(2)的等价说法是：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任一个向量 $\alpha_j(1\leqslant j\leqslant s)$ 必可由 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性表出.

定义 3.5 向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的极大线性无关组中所含向量的个数 r 称为**向量组的秩**. 记为 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r$.

【注】 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\leqslant r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1})$.

二、有关秩的定理

定理 3.6 如果向量组(Ⅰ)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由(Ⅱ)$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出.

则 $r(\text{Ⅰ})\leqslant r(\text{Ⅱ})$.

推论 如果向量组(Ⅰ)和(Ⅱ)等价，则 $r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅱ})$.

定理 3.7 $r(A)=A$ 的行秩(矩阵 A 的行向量组的秩)$=A$ 的列秩(矩阵 A 的列向量组的秩).

定理 3.8 经初等变换向量组的秩不变.

§4 Schmidt 正交化、正交矩阵

一、Schmidt 正交化(正交规范化方法)

设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，其正交规范化方法步骤如下：

令 $\beta_1=\alpha_1$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 两两正交.

再将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 单位化，取

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{|\boldsymbol{\beta}_1|},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{|\boldsymbol{\beta}_2|},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{\boldsymbol{\beta}_3}{|\boldsymbol{\beta}_3|}$$

则 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 是正交规范向量组(即两两正交且均是单位向量).

二、正交矩阵

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵.

$\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$

$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的列(行)向量组是正交规范向量组

如 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，则行列式 $|\boldsymbol{A}|=1$ 或 -1.

例题分析

一、线性相关的判别

【例 1】 (1) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,5,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(3,-2,3,-4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,t,3)^{\mathrm{T}}$ 线性相关，则 $t=$ _____.

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a+2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,4,a+9)^{\mathrm{T}}$ 线性无关，则 a _____.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

解题思路　已知向量的坐标要判断相关、无关应转化为考察齐次方程组是否有非零解.

分析　(1)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 齐次方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$ 有非零解

代入分量，有

$$x_1\begin{bmatrix}1\\0\\5\\2\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}3\\-2\\3\\-4\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-1\\1\\t\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

即$\begin{cases}x_1+3x_2-x_3=0\\-2x_2+x_3=0\\5x_1+3x_2+tx_3=0\\2x_1-4x_2+3x_3=0\end{cases}$有非零解，

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{bmatrix}1&3&-1\\0&-2&1\\5&3&t\\2&-4&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&-1\\0&-2&1\\0&-12&t+5\\0&-10&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&-1\\0&-2&1\\0&0&t-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})<n$. 可见 $t=1$.

(2)4 个 4 维向量线性无关 $\Leftrightarrow|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4|\neq0$

由$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&2\\2&3&a+2&4\\3&5&1&a+9\end{vmatrix}=(a+1)(a+2)$

从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关 $\Leftrightarrow a\neq -1$ 且 $a\neq -2$.

【评注】 对于(2)当然也可用(1)的方法通过解齐次方程组来分析判断.

【例 2】 (1)已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,则正确的命题是

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

(B)$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

(D)$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

(2)已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,那么线性无关的向量组是

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+5\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(B)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$.

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3$.

(D)$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1-5\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3$.

在向量坐标未知的情况下,应考虑用观察法(用定义).

或$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{C}$的技巧,参见例 10 的方法二.

分析 (1)由观察法可知

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4)-(\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{0}$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4)+(\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{0}$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4)+(\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{0}$$

可见(A),(B),(C)均线性相关,故应选(D).

(2)如令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+5\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

即 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出,所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 必线性相关(定理 3.5),所以(A)必线性相关.

易见$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3)-(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0}$可知(B)必线性相关.

关于(C)若令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3$,则有

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&2&3\\1&4&9\end{bmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关且 $\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}\neq 0$. 所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 必线性无关,故应选(C).

至于(D),当然也可用(C)的方法. 由 $\begin{vmatrix}1&1&2\\-1&1&-5\\0&2&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&2\\0&2&-3\\0&2&-3\end{vmatrix}=0$ 知必线性相关.

【例 3】 (1988,1)n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(3\leqslant s\leqslant n)$ 线性无关的充分必要条件是

(A)存在一组不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\boldsymbol{0}$.

(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量都线性无关.

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中存在一个向量,它不能由其余向量线性表出.

(D)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表出.

微信公众号【慕尘考研】
(ID:cdky66)

分析 (A) 一个向量组中只要有非零向量，就一定有不全为 0 的 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\mathbf{0}$. 而线性无关是要求对任意一组不全为 0 的 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，必有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\mathbf{0}$. 即(A) 只是必要条件.

(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关时，其任意一个子集合必线性无关，从而任意两个向量必线性无关. 但子集合线性无关不能保证整体一定线性无关，例如

$$(1,0,0)^{\mathrm{T}},(0,1,0)^{\mathrm{T}},(1,1,0)^{\mathrm{T}}$$

因而(B) 只是必要条件.

(C) 当某一个向量不能由其他向量线性表出时，不能保证这个向量组一定线性无关，例如

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$$

虽然 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，但 $2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关. (C) 仍然是必要条件.

线性无关 $\Leftrightarrow$ 每一个向量都不能由其他向量线性表出，故应选(D).

二、向量的线性表示、向量组等价

【例 4】 (1) 若向量 $\boldsymbol{\beta}=(1,2,t)^{\mathrm{T}}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,2,7)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,-4)^{\mathrm{T}}$ 线性表出，则 $t=$ _____.

(2) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,a)^{\mathrm{T}}$，如果向量 $\boldsymbol{\beta}=(1,2,6)^{\mathrm{T}}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，则 $a=$ _____.

解题思路 已知向量的坐标，从而线性表出的问题转化为方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$ 是否有解.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

分析 (1) 对方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$ 的增广矩阵做行变换，有

代入分量，有

$$x_1(2,1,1)^{\mathrm{T}}+x_2(-1,2,7)^{\mathrm{T}}+x_3(1,-1,-4)^{\mathrm{T}}=(1,2,t)^{\mathrm{T}}$$

即方程组 $\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=1\\x_1+2x_2-x_3=2\\x_1+7x_2-4x_3=t\end{cases}$ 有解.

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

$$\left[\begin{array}{ccc:c}2&-1&1&1\\1&2&-1&2\\1&7&-4&t\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&-1&2\\2&-1&1&1\\1&7&-4&t\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&-1&2\\0&-5&3&-3\\0&0&0&t-5\end{array}\right]$$

方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})$. 可见 $t=5$.

(2) 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 是 4 个 3 维向量必线性相关. 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关则 $\boldsymbol{\beta}$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，现在 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 必线性相关，由行列式

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=\begin{vmatrix}1&2&1\\0&1&3\\1&2&a\end{vmatrix}=a-1=0$$

求出 $a=1$.

【评注】 关于(2) 亦可如同(1) 一样通过解方程组来分析. 假如 $\boldsymbol{\beta}=(1,2,b)^{\mathrm{T}}$，对 b 有什么要求？

【例 5】 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(a,1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(4,a^2,-4)^{\mathrm{T}}$

(1) 当 a 为何值时，向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

(2) 当 a 为何值时，向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，且表示法不唯一，写出此时 $\boldsymbol{\beta}$ 的表达式.

解 设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$，对增广矩阵作初等行变换，有

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&a&4\\-1&a&1&a^2\\1&-1&2&-4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&-1&2&-4\\1&1&a&4\\-1&a&1&a^2\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&-1&2&-4\\0&2&a-2&8\\0&0&(a+1)(4-a)&2a(a-4)\end{array}\right]$$

(1) 当 $a=-1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=2,r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解.

向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

(2) 当 $a=4$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$，方程组有无穷多解.

$$\overline{\boldsymbol{A}}\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&-1&2&-4\\0&2&2&8\\0&0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&3&0\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

令 $x_3=k$ 解出 $x_2=4-k,x_1=-3k$.

从而 $\boldsymbol{\beta}=-3k\boldsymbol{\alpha}_1+(4-k)\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$，$k$ 为任意常数.

【评注】 建议大家把表示法唯一的条件和表示法写出来.

微信公众号【顶尖考研】

【例 6】 (2003,4) 设向量组(Ⅰ)：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a+2)^{\mathrm{T}}$ 和向量组(Ⅱ)：$\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,a+3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(2,1,a+6)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(2,1,a+4)^{\mathrm{T}}$. 试问当 a 为何值时，向量组(Ⅰ)和(Ⅱ)等价？当 a 为何值时，向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)不等价？

解题思路 向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价，即(Ⅰ)与(Ⅱ)可以互相线性表出.

(Ⅰ),(Ⅱ)等价 $\Leftrightarrow r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅱ})=r(\text{Ⅰ},\text{Ⅱ})$

解 【方法一】 (用秩)

由于
$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\2&3&a+2\end{vmatrix}=a+1$$

$$|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=\begin{vmatrix}1&2&2\\2&1&1\\a+3&a+6&a+4\end{vmatrix}=6$$

当 $a\neq-1$ 时，(Ⅰ)与(Ⅱ)等价；

当 $a=-1$ 时，(Ⅰ)与(Ⅱ)不等价.

【方法二】 (用线性表出)

对 $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\,|\,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]$ 作初等行变换

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\,|\,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&1\\2&3&a+2&a+3&a+6&a+4\end{array}\right]$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&1\\0&0&a+1&a-1&a+1&a-1\end{array}\right]$$

当 $a\neq-1$ 时，方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_j(j=1,2,3,)$ 均有解. 即(Ⅱ)可由(Ⅰ)线性表出. 又

$$|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=\begin{vmatrix}1&2&2\\2&1&1\\a+3&a+6&a+4\end{vmatrix}=6\neq0$$

$\forall a,x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$ 均有解，即(Ⅰ)可由(Ⅱ)线性表出.

所以 $a\neq-1$ 时，(Ⅰ)与(Ⅱ)等价.

当 $a=-1$ 时，由

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\mid\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&1\\0&0&0&-2&0&-2\end{array}\right]$$

$\boldsymbol{\beta}_1$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，于是(Ⅰ)与(Ⅱ)不等价.

【例 7】 (2019,2,3) 已知向量组 Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,a^2+3)^{\mathrm{T}}$，Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,a+3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(0,2,1-a)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(1,3,a^2+3)^{\mathrm{T}}$.

若向量组 Ⅰ 与 Ⅱ 等价，求 a 的取值，并将 $\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

解题思路 向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价，即两个方程组 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 同时有解，亦即 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$.

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

解 对 $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\mid\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]$ 作初等行变换，由

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\mid\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&1\\1&0&2&1&2&3\\4&4&a^2+3&a+3&1-a&a^2+3\end{array}\right]$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&1\\0&-1&1&0&2&2\\0&0&a^2-1&a-1&1-a&a^2-1\end{array}\right]$$

当 $a\neq\pm1$ 时，

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=3$$

向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价.

当 $a=1$ 时，

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=2$$

向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价.

当 $a=-1$ 时，

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2,r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=3$$

向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)不等价.

所以 $a\neq-1$ 时向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价.

当 $a\neq\pm1$ 时，对方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_3$，有

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3]=\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&-1&1&2\\0&0&a^2-1&a^2-1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{array}\right]$$

方程组有唯一解$(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$,

故 $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

当 $a=1$ 时,对方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_3$,有

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3]=\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&-1&1&2\\0&0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&2&3\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

方程组通解:$(3,-2,0)^{\mathrm{T}}+k(-2,1,1)^{\mathrm{T}}$,$k$ 为任意常数.

故 $\boldsymbol{\beta}_3=(3-2k)\boldsymbol{\alpha}_1+(-2+k)\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$,$k$ 为任意常数.

【例 8】 (1998,4) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关;$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta}$ 线性相关,则

(A)$\boldsymbol{\alpha}$ 必可由 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ 线性表示.

(B)$\boldsymbol{\beta}$ 必不可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ 线性表示.

(C)$\boldsymbol{\delta}$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示.

(D)$\boldsymbol{\delta}$ 必不可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示.

解题思路 向量的坐标未知时,要用推理分析的方法来判断能否线性表出.此时,出发点是:线性相关,线性无关、线性表示的概念、定理,还要注意反证法.

分析 由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关 $\Rightarrow\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关,又因 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta}$ 线性相关,

可见 $\boldsymbol{\delta}$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性表示 $\Rightarrow\boldsymbol{\delta}$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示,故(C) 正确.

【评注】 如令 $\boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{\beta}$ 可知(A) 不正确.若令 $\boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{\alpha}$ 可知(B) 不正确.利用相关、无关的几何意义亦可知(C) 必正确.

三、线性相关与线性无关的证明

基本思路 证明线性无关通常思路是:用定义法(同乘或拆项重组),用秩(等于向量个数),齐次方程组只有零解或反证法.

【例 9】 已知 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

(1) 证明:$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}-\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_n-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关.

(2) 证明:$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}-\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

解 (1)(用定义) 由于

$$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+\cdots+(\boldsymbol{\alpha}_{n-1}-\boldsymbol{\alpha}_n)+(\boldsymbol{\alpha}_n-\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$$

组合系数 $1,1,\cdots,1$ 不全为 0.

故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关.

或者,(由秩) 由于

$$[\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}-\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_n-\boldsymbol{\alpha}_1]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0&-1\\-1&1&\cdots&0&0\\0&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\\0&0&\cdots&-1&1\end{bmatrix}$$

因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关,矩阵$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]$ 为 n 阶可逆矩阵.

而行列式 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$，即 $r(\boldsymbol{A})<n$，

所以 $r[\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n-\boldsymbol{\alpha}_1]=r(\boldsymbol{A})<n$

故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关.

【注】 n 个 n 维向量用行列式更简单.

(2)(用定义)

设

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+\cdots+k_{n-1}(\boldsymbol{\alpha}_{n-1}-\boldsymbol{\alpha}_n)=\boldsymbol{0} \tag{①}$$

即

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+(-k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(-k_{n-2}+k_{n-1})\boldsymbol{\alpha}_{n-1}-k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0} \tag{②}$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，那么 ② 成立的充分必要条件是

$$\begin{cases} k_1 = 0 \\ -k_1+k_2 = 0 \\ \quad\vdots \quad\quad \vdots \\ -k_{n-2}+k_{n-1}=0 \\ k_{n-1} = 0 \end{cases} \tag{③}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

由于齐次方程组 ③ 只有零解

$$k_1=0,k_2=0,\cdots,k_{n-1}=0,$$

故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}-\boldsymbol{\alpha}_n$ 必线性无关.

或(用秩). 因为

$$[\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}-\boldsymbol{\alpha}_n]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}$$

因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，矩阵 $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]$ 为 n 阶可逆矩阵.

而矩阵 $\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}$ 是秩为 $n-1$ 的 $n\times(n-1)$ 矩阵

所以秩 $r[\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}-\boldsymbol{\alpha}_n]=r(\boldsymbol{A}_1)=n-1$

故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}-\boldsymbol{\alpha}_n$ 必线性无关.

【例 10】 已知 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，证明 $\forall k$，向量组 $2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

证明 【方法一】（用定义）

设 $x_1(2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3)+x_2(-\boldsymbol{\alpha}_2)+x_3[\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0}$，即

$$(2x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_1-x_2\boldsymbol{\alpha}_2+[2kx_1+(k+1)x_3]\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}.$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，故

$$\begin{cases}2x_1 & & +x_3=0,\\ & -x_2 & =0,\\ 2kx_1 & & +(k+1)x_3=0,\end{cases}\tag{1}$$

因 $\begin{vmatrix}2&0&1\\0&-1&0\\2k&0&k+1\end{vmatrix}=-2\neq 0$，即齐次方程组(1)只有零解，故必有 $x_1=0,x_2=0,x_3=0$.

因此 $\forall k$，向量组 $2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

【方法二】（用秩）

令 $\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2=-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$，则有

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}2&0&1\\0&-1&0\\2k&0&k+1\end{bmatrix}$$

由矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&-1&0\\2k&0&k+1\end{bmatrix}$ 可逆，以及 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则有

$$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3.$$

所以 $\forall k$，向量组 $2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

微信公众号【顶尖考研】(ID: ujky66)

【例 11】 (1993,1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times m$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵，其中 $n<m$，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，证明 $\boldsymbol{B}$ 的列向量线性无关.

证明 【方法一】（定义法，同乘） 对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 按列分块，记 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n]$，如 $x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{0}$，用分块矩阵可写成

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},\quad \text{即 } \boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}.$$

用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘上式，并代入 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，得 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Ex}=\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{A0}=\boldsymbol{0}$. 所以 $\boldsymbol{B}$ 的列向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关.

【方法二】（用秩） 因为 $\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵，且 $n<m$，从矩阵秩的定义知：$r(\boldsymbol{B})\leqslant n$. 又因

$$r(\boldsymbol{B})\geqslant r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{E})=n,$$

所以 $r(\boldsymbol{B})=n$，那么 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的秩是 n，即其线性无关.

【例 12】 (2001,4) 设 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,r,r<n)$ 是 n 维实向量，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，已知 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \cdots\\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0\end{cases}$$

的非零解向量，试判断向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 的线性相关性.

解题思路 $\boldsymbol{\beta}$ 是齐次方程组的解，即

$$\begin{cases}a_{11}b_1+a_{12}b_2+\cdots+a_{1n}b_n=0\\ a_{21}b_1+a_{22}b_2+\cdots+a_{2n}b_n=0\\ \cdots\\ a_{r1}b_1+a_{r2}b_2+\cdots+a_{rn}b_n=0\end{cases}$$

即 $\boldsymbol{\beta}$ 与每个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,r)$ 的内积都为 0，亦即都正交.

解 设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+k\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$ (1)

由 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 是齐次方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \cdots\\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0\end{cases}$$

的非零解，知 $\boldsymbol{\beta}$ 与每个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 都正交，有 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i=0(i=1,2,\cdots,r)$

用 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 左乘(1)，并把 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i=0$ 代入，有

$$k\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$$

因 $\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0}$，有 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\neq0$，从而 $k=0$.

把 $k=0$ 代入(1)式，有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\boldsymbol{0} \quad (2)$$

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，由(2)知

$$k_1=0,k_2=0,\cdots,k_r=0$$

所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 必线性无关.

【例 13】 如果向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出，证明：表示法唯一的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

证明 $\Rightarrow$ 必要性(反证法) 如 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则存在不全为 0 的数 $l_1,l_2,\cdots,l_s$，使

$$l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0}.$$

因已知 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出，设 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$.

两式相加，可得到

$$\boldsymbol{\beta}=(k_1+l_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+l_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_s+l_s)\boldsymbol{\alpha}_s.$$

由于 l_i 不全为 0，故 $k_1+l_1,k_2+l_2,\cdots,k_s+l_s$ 与 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 是两组不同的数，即 $\boldsymbol{\beta}$ 有两种不同

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)
微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

的表示法，与已知矛盾.

⇐ 充分性(反证法)　若 $\boldsymbol{\beta}$ 有两种不同的表达式，设为

$$\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}=y_1\boldsymbol{\alpha}_1+y_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+y_s\boldsymbol{\alpha}_s.$$

两式相减，得　$(x_1-y_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_2-y_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(x_s-y_s)\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0}$，

由于 $x_1-y_1,x_2-y_2,\cdots,x_s-y_s$ 不全为0(否则是一种表示法)得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，与已知矛盾.

【例 14】　设 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 线性无关，且与非零向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 都正交. 证明 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\beta}_1$ 线性无关.

证明　用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 构造 $(n-1)\times n$ 矩阵：$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_{n-1}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$.

因为 $\boldsymbol{\beta}_1$ 与每个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 都正交，有 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_1=0$，进而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{\beta}_1$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的非零解. 同理 $\boldsymbol{\beta}_2$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

又因 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1})=n-1$，齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系仅由 $n-r(\boldsymbol{A})=1$ 个解向量构成，从而 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关. 若

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+l\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{0},\tag{*}$$

那么，用 $\boldsymbol{\beta}_1$ 作内积，有 $k_1(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_{n-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_{n-1})+l(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)=0$.

因为 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_i)=0(i=1,2,\cdots,n-1)$，及 $\|\boldsymbol{\beta}_1\|\neq 0$，有 $l(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)=l\|\boldsymbol{\beta}_1\|^2=0$，得到 $l=0$. 将 $l=0$ 代入(*)式，有　$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\boldsymbol{0}$.

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 线性无关，得 $k_1=k_2=\cdots=k_{n-1}=0$，所以(*)中组合系数必全是零，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\beta}_1$ 线性无关.

【例 15】　证明定理：设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，λ_1,λ_2 是 $\boldsymbol{A}$ 的不同的特征值，对应的特征向量分别是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$. 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

证明　按特征值、特征向量定义，有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$

设　$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}\tag{1}$$

用 $\boldsymbol{A}$ 左乘(1)式，有

$$k_1\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}\tag{2}$$

(1)$\times\lambda_2$ −(2)得

$$k_1(\lambda_2-\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}\tag{3}$$

因 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是特征向量知 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，又 $\lambda_1\neq\lambda_2$.

故由(3)知必有 $k_1=0$，把 $k_1=0$ 代入(1)，又 $\boldsymbol{\alpha}_2\neq\boldsymbol{0}$，得必有 $k_2=0$，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

【注】　利用数学归纳法，可知若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各不相等的特征值，那么它们所对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 必线性无关.

【例 16】　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 都是3维列向量，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关. 证明存在非零向量 $\boldsymbol{\gamma}$，使得 $\boldsymbol{\gamma}$ 既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示也可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示.

微信公众号【阿尘考研】(ID:ajky66)

证明 因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是 4 个 3 维向量，必线性相关，故存在不全为 0 的 k_1,k_2,l_1,l_2 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}$$

移项并令 $\boldsymbol{\gamma}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=-l_1\boldsymbol{\beta}_1-l_2\boldsymbol{\beta}_2$，那么必有 $\boldsymbol{\gamma}\neq\mathbf{0}$，否则

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0},-l_1\boldsymbol{\beta}_1-l_2\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}$$

因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关必有 $k_1=0,k_2=0$，由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关又有 $l_1=0,l_2=0$. 从而 k_1,k_2,l_1,l_2 全为 0. 与 k_1,k_2,l_1,l_2 不全为 0 相矛盾，从而 $\boldsymbol{\gamma}\neq\mathbf{0}$.

于是 $\boldsymbol{\gamma}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\gamma}=-l_1\boldsymbol{\beta}_1-l_2\boldsymbol{\beta}_2$ 非 $\mathbf{0}$，既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，也可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示.

四、秩与极大线性无关组

【例 17】 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,3,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(4,5,-2,6)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_5=(-3,-5,-1,-7)^{\mathrm{T}}$ 的秩、极大线性无关组，并将其余的向量用极大无关组线性表出.

解 用列向量组作初等行变换，因初等行变换将方程组变成同解方程组，故变换前后的任何相应的部分（或全部）列向量组成的方程组仍同解，故它们具有相同的线性相关性.

$$\begin{matrix}\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_2&\boldsymbol{\alpha}_3&\boldsymbol{\alpha}_4&\boldsymbol{\alpha}_5\end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&4&-3\\2&1&3&5&-5\\1&-1&3&-2&-1\\3&1&5&6&-7\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4-3r_1]{r_2-2r_1\\r_3-r_1}\begin{bmatrix}1&1&1&4&-3\\0&-1&1&-3&1\\0&-2&2&-6&2\\0&-2&2&-6&2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-2r_2}\begin{bmatrix}1&1&1&4&-3\\0&-1&1&-3&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[(-1)r_2]{r_1+r_2}\begin{matrix}\boldsymbol{\beta}_1&\boldsymbol{\beta}_2&\boldsymbol{\beta}_3&\boldsymbol{\beta}_4&\boldsymbol{\beta}_5\end{matrix}\begin{bmatrix}1&0&2&1&-2\\0&1&-1&3&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)
微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

由右端阶梯形矩阵知 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=2$，由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关知，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，是向量组的极大无关组，且 $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，由方程

易见　　$\boldsymbol{\beta}_3=2\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\beta}_1+3\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_5=-2\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2$，

即有　　$\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5=-2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$.

【例 18】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\2&3&a&3\\3&5&1&5\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，求 $r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{A}^*)$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的极大线性无关组.

解 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 并对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\2&3&a&3\\3&5&1&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\0&1&a-2&1\\0&2&-2&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&b\\0&0&a-1&1-b\\0&0&0&2-2b\end{bmatrix}$$

当 $a\neq1$ 且 $b\neq1$ 时，

$r(\boldsymbol{A})=4, r(\boldsymbol{A}^*)=4$，极大线性无关组：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$；

当 $a=1$ 且 $b\neq 1$ 时，

$r(\boldsymbol{A})=3, r(\boldsymbol{A}^*)=1$，极大线性无关组：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$；

当 $a\neq 1$ 且 $b=1$ 时，

$r(\boldsymbol{A})=3, r(\boldsymbol{A}^*)=1$，极大线性无关组：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$；

当 $a=1$ 且 $b=1$ 时，

$r(\boldsymbol{A})=2, r(\boldsymbol{A}^*)=0$，极大线性无关组：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 中任意两个（此时 $\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_4$）.

【例 19】 已知向量组（Ⅰ）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$；（Ⅱ）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$；（Ⅲ）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$，如果它们的秩分别为 $r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅱ})=3, r(\text{Ⅲ})=4$，求 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5)$.

解题思路 由于 $r(\text{Ⅰ})=3$，得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，那么向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩至少是 3，能否是 4？关键就看 $\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5$ 能否用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，或者看向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5$ 是线性相关还是线性无关.

解 【方法一】 由 $r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅱ})=3$，知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，故 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出. 设 $\boldsymbol{\alpha}_4=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_3\boldsymbol{\alpha}_3$.

如果 $\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，设 $\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，则

$$\boldsymbol{\alpha}_5=(k_1-l_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2-l_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_3-l_3)\boldsymbol{\alpha}_3.$$

于是 $\boldsymbol{\alpha}_5$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性相关，与已知 $r(\text{Ⅲ})=4$ 相矛盾.

所以 $\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5$ 不能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，由秩的定义知 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5)=4$.

【方法二】 如果 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4(\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5)=\boldsymbol{0}$，把 $\boldsymbol{\alpha}_4=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_3\boldsymbol{\alpha}_3$（理由同前，略）代入有

$$(x_1+l_1x_4)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_2+l_2x_4)\boldsymbol{\alpha}_2+(x_3+l_3x_4)\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_5=\boldsymbol{0}.$$

由 $r(\text{Ⅲ})=4$，知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关，从而

$$\begin{cases} x_1+l_1x_4=0, \\ x_2+l_2x_4=0, \\ x_3+l_3x_4=0, \\ x_4=0 \end{cases} \Rightarrow \quad x_1=x_2=x_3=x_4=0, \text{下略.}$$

【方法三】 同前，设 $\boldsymbol{\alpha}_4=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_3\boldsymbol{\alpha}_3$，构造矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5)$ 作初等列变换.

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5)\xrightarrow[\substack{l_2c_2+c_4\\ l_3c_3+c_4}]{l_1c_1+c_4}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5+l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_3\boldsymbol{\alpha}_3),$$

即 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5)\xrightarrow{\text{列变换}}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5+\boldsymbol{\alpha}_4)$. 由于初等变换不改变秩，故

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5+\boldsymbol{\alpha}_4)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5)=4.$$

【例 20】 证明定理：如果向量组（Ⅰ）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组（Ⅱ）$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示，则秩 $r(\text{Ⅰ})\leqslant r(\text{Ⅱ})$.

证明 【方法一】 向量组（Ⅰ）可由（Ⅱ）线性表示

微信公众号（读尽考研）

$\Leftrightarrow$ 方程组$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_1,(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_s$ 都有解

$\Leftrightarrow$ 矩阵方程$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$ 有解

$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$

所以 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\leqslant r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)$，即 $r(\mathrm{Ⅰ})\leqslant r(\mathrm{Ⅱ})$.

【方法二】　设 $r(\mathrm{Ⅰ})=r,r(\mathrm{Ⅱ})=p$.

并设 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是(Ⅰ)的极大线性无关组，$\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_p}$ 是(Ⅱ)的极大线性无关组.

由于 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 可由(Ⅰ)线性表示，而(Ⅰ)可由(Ⅱ)线性表示，又(Ⅱ)可由 $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_t}$ 线性表示. 从而 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_t}$ 线性表示.

又因 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是极大线性无关组必线性无关. 那么按定理 3.5 推论得 $r\leqslant t$，即 $r(\mathrm{Ⅰ})\leqslant r(\mathrm{Ⅱ})$.

【例 21】　设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，证明秩 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$.

解题思路　由三秩相等，即 $r(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$ 的列秩 $=\boldsymbol{A}$ 的行秩，通过向量组的极大线性无关组转换出矩阵秩的信息.

证明　设 $r(\boldsymbol{A})=r,\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大线性无关组，设 $r(\boldsymbol{B})=t$，$\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_t}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组成的一个极大线性无关组.

那么 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 的每一个列向量 $\boldsymbol{\alpha}_k(k=1,2,\cdots,n)$ 均可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表出，同样地，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$ 的每一个列向量 $\boldsymbol{\beta}_k(k=1,2,\cdots,n)$ 也均可由 $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_t}$ 线性表出. 于是 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的每一个列向量 $\boldsymbol{\alpha}_k+\boldsymbol{\beta}_k(k=1,2,\cdots,n)$ 都能由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r},\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_t}$ 线性表出.

因此，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\beta}_n$ 的极大线性无关组中向量个数不大于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r},\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_t}$ 中向量的个数.

即 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r+t=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$.

【评注】　由 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\beta}_n$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r},\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_t}$ 线性表示，那么据定理 3.6 有 $r(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\beta}_n)\leqslant r(\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r},\boldsymbol{\beta}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_t})\leqslant r+t$ 亦即 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$.

五、正交化、正交矩阵

【例 22】　与 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,-1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_3=(2,1,1,3)^{\mathrm{T}}$ 都正交的向量是_____.

分析　设所求向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$. 则由 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 都正交得

$$\begin{cases}(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\alpha})=x_1+x_2-x_3+x_4=0, & ①\\ (\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\alpha})=x_1-x_2-x_3+x_4=0, & ②\\ (\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\alpha})=2x_1+x_2+x_3+3x_4=0, & ③\end{cases}$$

系数矩阵

$$\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\1&-1&-1&1\\2&1&1&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&-2&0&0\\0&-1&3&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-4&0\\0&1&0&0\\0&0&3&1\end{bmatrix}$$

微信公众号：跟我考研（ID：dky66）

得通解为 $k(4,0,1,-3)^{\mathrm{T}}$，其中 k 是任意常数.

【例 23】 已知 $A=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$ 是 3 阶正交矩阵. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_3=$ _____.

分析 按正交矩阵的几何意义，列向量要两两正交且都是单位向量.

设 $\boldsymbol{\alpha}_3=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，则有

$$\begin{cases}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x_1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}x_3=0\\(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=x_2=0\\x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\end{cases}\quad\text{故 }\boldsymbol{\alpha}_3=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

【例 24】 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维非零列向量，E 为 n 阶单位矩阵.

证明：$A=E-\dfrac{2}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是正交矩阵.

解题思路 按正交矩阵定义，证出 $AA^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}A=E$ 即可.

证明 因 $A^{\mathrm{T}}=\left(E-\dfrac{2}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=E^{\mathrm{T}}-\left(\dfrac{2}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=E-\dfrac{2}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$

$=E-\dfrac{2}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=A$

故 $AA^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}A=A^2=\left(E-\dfrac{2}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)^2=E-\dfrac{4}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\left(\dfrac{2}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\right)^2(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})$

$=E-\dfrac{4}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\dfrac{4}{(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^2}\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=E$

所以 A 是正交矩阵.

【评注】 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 是一个数，$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是 n 阶矩阵. $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$.

小结

向量是初学线性代数时的一个难点，主要表现在对定义的理解、语言的表述、逻辑推理的正确等方面. 当然也是考研的重点.

首先应理解线性相关、线性无关的概念，会利用定义推导论证某向量组的线性相关性，掌握线性相关的判别定理.

其次是理解极大线性无关组、向量组的秩，等价向量组等概念，搞清矩阵的秩(行列式秩)及其按列(行)分块后的列(行)向量组秩的联系. 两组向量有表出关系时，它们秩之间的制约关系，等价向量组与等价矩阵的联系与区别，等价向量组的必要条件，会求向量组的极大线性无关组及秩，并会灵活应用有关秩的等式和不等式.

最后应了解两个向量的内积、正交矩阵及 Schmidt 正交化方法.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

第四章　线性方程组

考点与要求

理解　齐次线性方程组的基础解系的概念，非齐次方程组解的结构及通解的概念.

掌握　非齐次线性方程组有解和无解的判定方法，齐次线性方程组的基础解系和通解的求法，用初等行变换求解线性方程组的方法.

会用　克拉默法则解线性方程组.

内容精讲

§1　克拉默法则

克拉默法则　若 n 个方程 n 个未知量构成的非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)
微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

的系数行列式 $|A|\neq 0$，则方程组有唯一解，且唯一解为

$$x_i=\frac{|A_i|}{|A|},i=1,2,\cdots,n.$$

其中 $|A_i|$ 是 $|A|$ 中第 i 列元素（即 x_i 的系数）替换成方程组右端的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 所构成的行列式.

推论　包含 n 个方程 n 个未知量的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

的系数行列式 $|A|\neq 0$ 的充要条件是方程组有唯一零解.

反之，若齐次线性方程组有非零解，充要条件是其系数行列式 $|A|=0$.

§2　齐次线性方程组

齐次线性方程组的表达形式　n 个未知量，m 个方程组成的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad ①$$

称为齐次线性方程组，① 式称为齐次线性方程组的一般形式.

方程组 ① 写成向量形式，则是

$$\boldsymbol{\alpha}_1 x_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 x_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_n x_n = \boldsymbol{0}, \quad ②$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})^{\mathrm{T}}$，$j = 1, 2, \cdots n$，$\boldsymbol{0} = (0, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$.

写成矩阵形式，则是

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \quad ③$$

其中 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

齐次线性方程组的解 若将有序数组 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 分别代入方程组的未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，使每个方程等式成立，则称 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)^{\mathrm{T}}$ 为方程组的一个解（或解向量），记成 $\boldsymbol{\xi} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^{\mathrm{T}}$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1 c_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 c_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_n c_n = \boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{A\xi} = \boldsymbol{0}$，即齐次方程组 ① 的解是使 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性组合为零的线性组合系数. 若方程 ① 只有零解 $\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

齐次线性方程组的基础解系

设 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解向量，若满足

(1) $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关.

(2) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的任一解向量 $\boldsymbol{\xi}$ 均可由 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性表出.

则称向量组 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系.

条件(2)“$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的任一解向量 $\boldsymbol{\xi}$ 均可由 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性表出”等价于“加入任一解向量 $\boldsymbol{\xi}$，使得 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}, \boldsymbol{\xi}$ 线性相关”，等价于“$r(\boldsymbol{A}) = r$”，即线性无关解向量的个数为 $n - r$，满足 $r(\boldsymbol{A})$ + 线性无关解的个数 $= n$（n 是未知量个数）.

$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解的性质 若 $\boldsymbol{\xi}_1$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解，则 $k\boldsymbol{\xi}_1$ 仍是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解，其中 k_1 是任意常数.

同样，若 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_s$ 均是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解，则 $k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\xi}_s$ 仍是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解，其中 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 均是任意常数.

$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的有解条件 齐次线性方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 一定有解，至少有零解.

齐次线性方程组

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n]\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}_1 x_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 x_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_n x_n = \boldsymbol{0}$$

只有零解（有非零解）$\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$（方程组的列向量组，即 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组）线性无关（线性相关）$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = r(\boldsymbol{A}_{m\times n}) = n$ $(r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = r(\boldsymbol{A}_{m\times n}) < n)$.

基础解系向量个数与 $r(\boldsymbol{A})$ 的关系 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，$r(\boldsymbol{A}) = r < n$，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 存在基础解系，且基础解系有 $n - r$ 个线性无关解向量组成. 故

基础解系向量个数 $+ r(\boldsymbol{A}) = n$（未知量个数）.

$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的通解 若 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系. 则

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}$$

微信公众号【顶尖考研】

是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解(或称一般解),其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 是任意常数.

基础解系和通解的求法

利用初等行变换不改变线性方程组的解,将 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换化成阶梯形矩阵,可具体求得基础解系.

设
$$\boldsymbol{A}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}=\boldsymbol{B} \tag{4}$$

则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$
$$\begin{cases} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r+c_{1,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{1n}x_n=0 \\ c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r+c_{2,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{2n}x_n=0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\ c_{rr}x_r+c_{r,r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{rn}x_n=0 \end{cases} \tag{5}$$

是同解方程组.

阶梯形方程的每行中第一个系数不为零的 r 个未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 称为独立未知量,而后面的 $n-r$ 个未知量 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 称为自由未知量,将自由未知量 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 分别赋下列 $n-r$ 组值
$$(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},(0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,(0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$$
代入方程,求出相应的独立未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_r$,并得到 $n-r$ 个解.
$$\begin{aligned} \xi_1&=(d_{11},d_{12},\cdots d_{1r},1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}} \\ \xi_2&=(d_{21},d_{22},\cdots,d_{2r},0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}} \\ &\vdots \\ \xi_{n-r}&=(d_{n-r1},d_{n-r2},\cdots d_{n-rr},0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

可以证明,$\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_{n-r}$ 即是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系(证明见教材),所以方程组的通解为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$,其中 $k_i(i=1,2,\cdots,n-r)$ 是任意常数.

【注】 初等行变换化阶梯形的过程不同,自由未知量的选择和赋值方法不同,基础解系表示法不唯一,但所含线性无关向量个数一样,故全体解的解集合是一样的.

§3　非齐次线性方程组

非齐次线性方程组的表达形式　n 个未知量,m 个方程组成的方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{6}$$

称为非齐次线性方程组,⑥ 式称为非齐次线性方程组的一般形式,其中右端常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 不全为零.

方程组 ⑥ 写成向量形式则是
$$\boldsymbol{\alpha}_1x_1+\boldsymbol{\alpha}_2x_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_nx_n=\boldsymbol{b}, \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})^{\mathrm{T}},(j=1,2,\cdots,n)$. $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$.

方程组 ⑥ 写成矩阵形式则是

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}, \tag{8}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}.$$

非齐次线性方程组的解 若将有序数组 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 分别代入方程组 ⑥ 的未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使得每个方程等式成立，则称 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$ 为方程组 ⑥ 的一个解（或解向量），记成 $\boldsymbol{\eta}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$，即 $c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b}$，或 $\boldsymbol{A\eta}=\boldsymbol{b}$，即非齐次方程组 ⑦ 的解是 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表出的表出系数.

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解的性质 设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个解. $\boldsymbol{\xi}$ 是对应齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，则

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_1+k\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{b}.\text{（其中 } k \text{ 是任意常数）}$$

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的有解条件

$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 无解 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{b}$ 不能由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出

$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})\neq r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})$ $\quad(r(\boldsymbol{A})+1=r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b}))$.

$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})$，即 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b})\Leftrightarrow\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}\cong\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b}\}$.

若 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=n=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b})\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b}$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出，且表出法唯一 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解.

若 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b})=r<n\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关，$\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出，且表出法不唯一 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解.

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解结构 设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有特解 $\boldsymbol{\eta}$，对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}+\boldsymbol{\eta}$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 是任意常数.

非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 通解的求法

用高斯消元法，将增广矩阵 $(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})$ 作初等行变换化成阶梯形矩阵，先求出对应齐次线性方程组的基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}(r(\boldsymbol{A})=r)$（见本章 §2），再求一个非齐次特解设为 $\boldsymbol{\eta}$（求 $\boldsymbol{\eta}$ 时，可取自由未知量为任意值）为简单计，一般将自由未知量均取零值，代入方程，求得独立未知量，并得 $\boldsymbol{\eta}$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}+\boldsymbol{\eta}$$

其中 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是对应齐次方程组的通解，$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 是任意常数，$\boldsymbol{\eta}$ 是非齐次方程组的一个特解.

一、线性方程组的基本概念题

【例 1】 (1991,4) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 所对应的齐次方程组，则下列结论正确的是

(A) 若 $Ax=0$ 仅有零解，则 $Ax=b$ 有唯一解.

(B) 若 $Ax=0$ 有非零解，则 $Ax=b$ 有无穷多解.

(C) 若 $Ax=b$ 有无穷多解，则 $Ax=0$ 仅有零解.

(D) 若 $Ax=b$ 有无穷多解，则 $Ax=0$ 有非零解.

分析 $Ax=0$ 只有零解 $\Leftrightarrow r(A)=n$，

$Ax=b$ 有唯一解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})=n$.

由于 $r(A)=n \not\Rightarrow r(\overline{A})=n$（当 $m>n$ 时），

例如 $\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_1-x_2=0 \\ 2x_1+2x_2=0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_1-x_2=1 \\ 2x_1+2x_2=2 \end{cases}$

有 $r(A)=2=n$，而 $r(\overline{A})=3=n+1$，所以(A) 不正确.

由 $r(A)<n \not\Rightarrow r(A)=r(\overline{A})<n$，所以(B) 不正确. 请自编反例.

$Ax=b$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})<n$，此时必有 $r(A)<n$.

从而(C) 一定错，(D) 必正确.

【例 2】 已知 A 是秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵，对于非齐次线性方程组 $Ax=b$，正确的命题是

(A) 当 $r=m$ 时，$Ax=b$ 必有解.

(B) 当 $r=m$ 时，$Ax=0$ 必有非零解.

(C) 当 $r=n$ 时，$Ax=b$ 必有唯一解.

(D) 当 $r<n$ 时，$Ax=b$ 必有无穷多解.

分析 关于(A)，若 $r=m$，则

$$m=r(A)\leqslant r(\overline{A})\leqslant m$$

从而 $r(A)=r(\overline{A})$，故 $Ax=b$ 必有解，所以(A) 正确. 或因 $r(A)=m=A$ 的行数，即 A 的行向量组线性无关，又 $\overline{A}$ 的行向量是 A 的行向量的延伸（增加一个分量），于是仍线性无关. 那么 $\overline{A}$ 的行向量组的秩仍是 m，即 $r(A)=r(\overline{A})$，亦知(A) 正确.

关于(B)，若 $m=n$，则 $r(A)=r=n$，那么 $Ax=0$ 只有零解.

关于(C)，若 $m>n$，则当 $r(A)=n$ 时，不能保证必有 $r(\overline{A})=n$. 即 $Ax=b$ 有可能无解.

关于(D)，当 $r(A)=r<n$ 时，不能保证必有 $r(\overline{A})=r$. 此时 $Ax=b$ 一定没有唯一解（可能无解，也可能无穷多解）.

【例 3】 设非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=b_1 \\ -2x_1+x_2-2x_3=b_2 \\ -x_2+x_3=b_3 \\ 3x_1+5x_2+2x_3=b_4 \end{cases} \quad ①$$

则线性方程组 ① 有解的充要条件是 b_1,b_2,b_3,b_4 满足_____.

解题思路 方程组 ① 有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A\mid b)\Leftrightarrow b$ 可由 A 的列向量组线性表出.

分析 应填 $11b_1+b_2-3b_3-3b_4=0$.

将方程组 ① 的增广矩阵作初等行变换：

$$[\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b}]=\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&b_1\\-2&1&-2&b_2\\0&-1&1&b_3\\3&5&2&b_4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&b_1\\0&3&0&b_2+2b_1\\0&-1&1&b_3\\0&2&-1&b_4-3b_1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&b_1\\0&-1&1&b_3\\0&0&1&b_4-3b_1+2b_3\\0&0&3&b_2+2b_1+3b_3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&b_1\\0&-1&1&b_3\\0&0&1&b_4-3b_1+2b_3\\0&0&0&-3b_4+b_2+11b_1-3b_3\end{array}\right],$$

方程组①有解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=3=r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})\Leftrightarrow -3b_4+b_2+11b_1-3b_3=0$.

【例 4】 设 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,2,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(2,1,4)^{\mathrm{T}}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{2\times3}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，则下列向量中是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量的是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,3)^{\mathrm{T}}$.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_4=(-2,1,3)^{\mathrm{T}}$.

解题思路 若方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 已经具体给出或可以求出，问 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 哪个是方程组的解向量，则只需逐个代入验算即可得出结论. 现给出的是基础解系，若 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由基础解系线性表出，则 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 是解向量.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

分析 应选(C).

现题设条件给出的是方程组的基础解系，则可有

【方法一】 由 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 反求出方程组再逐个验算 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 中哪个是方程组的解. 请读者计算.

【方法二】 向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解 $\Leftrightarrow$ 向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 应属于通解 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由基础解系线性表出 $\Leftrightarrow$ 方程组 $x_1\boldsymbol{\xi}_1+x_2\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\alpha}_i$ 有解. 逐个检查即可. 为计算方便，可一起检查，将增广矩阵合并成 $[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2\mid\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$ 一起作初等行变换，得

$$[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2\mid\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]=\left[\begin{array}{cc:cccc}1&2&1&1&1&-2\\2&1&0&3&0&1\\-1&4&0&5&3&3\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cc:cccc}1&2&1&1&1&-2\\0&-3&-2&1&-2&5\\0&0&-3&8&0&11\end{array}\right].$$

由阶梯形矩阵知

$$r(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)=r(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2.$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 线性表出，故 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量，故应选(C).

或因 $r(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)=2$，而 $r(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\alpha}_1)=r(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)=r(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\alpha}_4)=3\neq2$. 故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均不能由 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 线性表出. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 不是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解. 由排除法应选(C).

【评注】 若已知非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有通解 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\eta}$，问 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是否是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，如何判别？

二、$Ax=0$，基础解系

【例 5】　已知 $A=\begin{bmatrix}1&3&2\\-1&2&3\\2&1&a\\-2&-1&1\end{bmatrix}$. 若 $Ax=0$ 有非零解，则其基础解系是_____.

分析　$Ax=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow r(A)<n$.

$$A=\begin{bmatrix}1&3&2\\-1&2&3\\2&1&a\\-2&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&2\\0&5&5\\0&-5&a-4\\0&5&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&2\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$r(A)<3\Leftrightarrow a=-1$$

$$A\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

由 $n-r(A)=3-2=1$，令 $x_3=1$ 得基础解系 $(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

【例 6】　齐次方程组

$$\begin{cases}x_1+3x_2-x_3-2x_4=0\\2x_1+9x_2+4x_3+5x_4=0\\x_1+4x_2+x_3+x_4=0\end{cases}$$

的通解_____.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)
微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

分析　对系数矩阵作初等行变换

$$A=\begin{bmatrix}1&3&-1&-2\\2&9&4&5\\1&4&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&-1&-2\\0&3&6&9\\0&1&2&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&-1&-2\\0&1&2&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-7&-11\\0&1&2&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$n-r(A)=4-2=2$$

得同解方程组

$$\begin{cases}x_1-7x_3-11x_4=0\\x_2+2x_3+3x_4=0\end{cases}$$

【方法一】　令 $x_3=1,x_4=0$ 及 $x_3=0,x_4=1$，

得基础解系

$$\eta_1=(7,-2,1,0)^{\mathrm{T}},\eta_2=(11,-3,0,1)^{\mathrm{T}}$$

故通解为 $k_1\eta_1+k_2\eta_2,k_1,k_2$ 是任意常数.

【方法二】　令 $x_3=t,x_4=u$，则 $x_1=7t+11u,x_2=-2t-3u$.

从而 $x=t\begin{bmatrix}7\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+u\begin{bmatrix}11\\-3\\0\\1\end{bmatrix}$，$t,u$ 是任意常数.

【例 7】 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

的基础解系和通解.

解 将系数矩阵用高斯消元法化成阶梯形矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4 - 2r_1]{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - 4r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 + r_2]{r_3 - 3r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}r_3]{r_4 - \frac{4}{3}r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\text{记}}{=\!=} \boldsymbol{B}$$

知，$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 是同解方程组，且 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B}) = 3$.

由于 $n - r(\boldsymbol{A}) = 5 - 3 = 2$，故方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系由两个线性无关解向量组成，其中，可取 x_1, x_2, x_4 为独立未知量，x_3, x_5 为自由未知量.

【方法一】 先求基础解系，后求通解. 对 x_3, x_5，按(1,0)及(0,3)赋值，回代入方程，从而求得方程组的基础解系：

$$\boldsymbol{\xi}_1 = (-1,1,1,0,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\xi}_2 = \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, 0, 1, 3\right)^{\mathrm{T}},$$

故通解是 $k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2$，其中 k_1, k_2 是任意常数.

【方法二】 先求通解，后求基础解系. 取自由未知量 $x_3 = k_1, x_5 = 3k_2$，回代方程，得

$$x_4 = k_2,$$

$$x_2 = x_3 + x_4 + \frac{1}{2} \times x_5 = k_1 + \frac{5}{2}k_2,$$

$$x_1 = -x_2 + 3x_4 + x_5 = -k_1 + \frac{7}{2}k_2.$$

由此得通解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 + \frac{7}{2}k_2 \\ k_1 + \frac{5}{2}k_2 \\ k_1 + 0 \\ 0 + k_2 \\ 0 + 3k_2 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

其中 k_1, k_2 是任意常数，基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = (-1,1,1,0,0)^{\mathrm{T}} \text{ 和 } \boldsymbol{\xi}_2 = \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, 0, 1, 3\right)^{\mathrm{T}}.$$

【评注】 (1) 由阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$ 知：未知量 x_2, x_3 地位等同，同样 x_4, x_5 的地位也等同，自由未知量也可以取为 x_2, x_4 或 x_2, x_5 或 x_3, x_4 或 x_3, x_5.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(2) 自由未知量的取值可任意，但自由未知量组成的向量组应线性无关，为计算方便，本题分别为 x_3,x_5 赋值(1,0) 及(0,3). 这样赋值，为什么说计算方便？

(3) 方程组求解的回代过程也可以用初等行变换来实现，即对阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$ 继续作初等行变换，化成含最高阶单位矩阵的同解方程组：

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&0&-3&-1\\0&-2&2&2&1\\0&0&0&3&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{3}r_3]{-\frac{1}{2}r_2}\begin{bmatrix}1&1&0&-3&-1\\0&1&-1&-1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&1&-\frac{1}{3}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{bmatrix}1&0&1&-2&-\frac{1}{2}\\0&1&-1&-1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&1&-\frac{1}{3}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1+2r_3]{r_2+r_3}\begin{bmatrix}1&0&1&0&-\frac{7}{6}\\0&1&-1&0&-\frac{5}{6}\\0&0&0&1&-\frac{1}{3}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xlongequal{\text{记}}\boldsymbol{C}.$$

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{Cx}=\boldsymbol{0}$ 均为同解方程，对 $\boldsymbol{Cx}=\boldsymbol{0}$，先求基础解系，后求通解.

对自由未知量 x_3,x_5 分别赋值(1,0) 及(0,3) 得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2},0,1,3\right)^{\mathrm{T}}$$

因此，方程组的通解为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$，其中 k_1,k_2 是任意常数.

当然也可以先求通解，后求基础解系.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

【例 8】 (2002,3) 设齐次线性方程组

$$\begin{cases}ax_1+bx_2+bx_3+\cdots+bx_n=0\\bx_1+ax_2+bx_3+\cdots+bx_n=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\bx_1+bx_2+bx_3+\cdots+ax_n=0\end{cases}$$

其中 $a\neq 0,b\neq 0,n\geqslant 2$，试讨论 a,b 为何值时方程组仅有零解，有无穷多组解？在有无穷多组解时求出全部解，并用基础解系表示全部解.

解 系数行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b\\b&a&b&\cdots&b\\b&b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\b&a&b&\cdots&b\\b&b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&a-b&0&\cdots&0\\0&0&a-b&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&a-b\end{vmatrix}=(a-b)^{n-1}[a+(n-1)b]$$

(1)$a\neq b$ 且 $a\neq(1-n)b$ 时,$r(\boldsymbol{A})=n$. 方程组只有零解.

(2) 当 $a=b$ 时

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&a&a&\cdots&a\\a&a&a&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$$

$n-r(\boldsymbol{A})=n-1$. 取 $x_2,x_3,\cdots,x_n$ 为自由变量,得基础解系

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$$

通解 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$,$k_1,\cdots,k_{n-1}$ 为任意常数.

(3) 当 $a=(1-n)b$ 时

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}(1-n)b&b&b&\cdots&b\\b&(1-n)b&b&\cdots&b\\b&b&(1-n)b&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&b&\cdots&(1-n)b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1-n&1&1&\cdots&1\\n&-n&0&\cdots&0\\n&0&-n&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&0&0&\cdots&-n\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}0&0&0&\cdots&0\\-1&1&0&\cdots&0\\-1&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

$r(\boldsymbol{A})=n-1$,$n-r(\boldsymbol{A})=1$. 自由变量 $x_1=1$,得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$,于是通解 $\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{\alpha}$,$k$ 是任意常数.

【例 9】 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 个 n 维的列向量,已知齐次线性方程组 $\boldsymbol{\alpha}_1x_1+\boldsymbol{\alpha}_2x_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_nx_n=\boldsymbol{0}$ 只有零解,问齐次线性方程组

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)x_1+(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)x_2+\cdots+(\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+\boldsymbol{\alpha}_n)x_{n-1}+(\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1)x_n=\boldsymbol{0}\qquad(*)$$

是否有非零解. 若没有,说明理由;若有,求出方程组(*)的通解.

解题思路 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解(只有零解). $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})<n(r(\boldsymbol{A})=n)$,其中 n 是 $\boldsymbol{A}$ 的列数.

解 因方程组

$$\boldsymbol{\alpha}_1x_1+\boldsymbol{\alpha}_2x_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_nx_n=\boldsymbol{0}$$

只有零解,故 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=n$. $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵.

而方程组(*)的系数矩阵(记成)$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 有关系

$$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0&1\\1&1&0&\cdots&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&1&1\end{bmatrix}\xlongequal{\text{记}}\boldsymbol{AC}.$$

因 $\boldsymbol{A}$ 可逆,故 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{C})$,而

$$|\boldsymbol{C}|=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&1\\1&1&0&\cdots&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&1&1\end{vmatrix}=1+(-1)^{1+n},$$

当 $n=2k+1$ 时，$|\boldsymbol{C}|=2\neq 0$，$r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{C})=n$，方程组（$*$）只有零解；

当 $n=2k$ 时，$|\boldsymbol{C}|=0$，$r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{C})<n$，方程组（$*$）有非零解，此时将 $\boldsymbol{C}$ 的第 $1,3,\cdots,2k-1$ 行乘 -1，第 $2,4,\cdots,2k-2$ 行乘 1 加到第 $n=2k$ 行，则第 n 行全部消成零，即

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0&0&1\\1&1&0&\cdots&0&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&1&0\\0&0&0&\cdots&0&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0&0&1\\1&1&0&\cdots&0&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&1&0\\0&0&0&\cdots&0&0&0\end{bmatrix}\overset{\text{记}}{=\!=}\boldsymbol{C}'$$

故知 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{C})=r(\boldsymbol{C}')=n-1$. 方程组的通解形式为 $k\boldsymbol{\xi}$.

因　$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4)-\cdots+(\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+\boldsymbol{\alpha}_n)-(\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{0}$，

故 $\boldsymbol{\xi}=(1,-1,1,\cdots,1,-1)^{\mathrm{T}}$，方程组（$*$）的通解为

$$k(1,-1,1,\cdots,1,-1)^{\mathrm{T}},\text{其中 } k \text{ 是任意常数.}$$

【评注】（1）本题说明当向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1$ 只当 $n=2k+1$ 时是线性无关的，而当 $n=2k$ 时，则是线性相关的.

（2）当 $n=2k$ 时，因 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{ACx}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{Cx}=\boldsymbol{0}$ 是同解方程组，所以方程组（$*$）的基础解系也可由 $\boldsymbol{Cx}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 解得.

（3）已知 $\boldsymbol{\alpha}_1x_1+\boldsymbol{\alpha}_2x_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_nx_n=\boldsymbol{0}$ 只有零解. 问齐次线性方程组

$$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)x_1+(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)x_2+\cdots+(\boldsymbol{\alpha}_{n-1}-\boldsymbol{\alpha}_n)x_{n-1}+(\boldsymbol{\alpha}_n-\boldsymbol{\alpha}_1)x_n=\boldsymbol{0}$$

是否有非零解，你能得出什么结论呢？若有非零解，求出其通解.（通解为 $k(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$）

【例 10】　设 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，则下列向量组中也是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系的是

(A) $\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_2-\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_3-\boldsymbol{\xi}_1$.

(B) $\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_2-\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_3+\boldsymbol{\xi}_1$.

(C) $\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2-\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_1+2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3,2\boldsymbol{\xi}_1+3\boldsymbol{\xi}_2$.

(D) $\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_3+\boldsymbol{\xi}_1$.

解题思路　本题基础解系应由三个线性无关解向量组成，题设的四个选项均是三个向量，且由解的性质知，三个向量均是解向量，故关键是看哪个选项是线性无关向量组.

分析　应选(D).

(A) 因 $(\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2)+(\boldsymbol{\xi}_2-\boldsymbol{\xi}_3)+(\boldsymbol{\xi}_3-\boldsymbol{\xi}_1)=\boldsymbol{0}$，

(B) 因 $-(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2)+(\boldsymbol{\xi}_2-\boldsymbol{\xi}_3)+(\boldsymbol{\xi}_3+\boldsymbol{\xi}_1)=\boldsymbol{0}$，

(C) 因 $(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2-\boldsymbol{\xi}_3)+(\boldsymbol{\xi}_1+2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_3)-(2\boldsymbol{\xi}_1+3\boldsymbol{\xi}_2)=\boldsymbol{0}$，

故(A)(B)(C) 中向量组都是线性相关的，由排除法，应选(D).

或当(D)ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关时，因$[\xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3,\xi_3+\xi_1]=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{记}$

$[\xi_1,\xi_2,\xi_3]C$. 其中 $|C|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq 0$. 得知 $\xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3,\xi_3+\xi_1$ 是线性无关的. 故应选(D).

【评注】 对(A)(B)(C)的判别，也可用对(D)的判别法，如对(A)

因$[\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3-\xi_1]=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]\begin{bmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]C$

其中 $C=\begin{vmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{vmatrix}=0$，知 $\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3-\xi_1$ 线性相关.

【例 11】 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，$\boldsymbol{\beta}_1=t_1\boldsymbol{\alpha}_1+t_2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=t_1\boldsymbol{\alpha}_2+t_2\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s=t_1\boldsymbol{\alpha}_s+t_2\boldsymbol{\alpha}_1$，其中 t_1,t_2 为实常数. 试问 t_1,t_2 满足什么关系时，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系？

解题思路 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 是基础解系，且满足三个条件：(1)$\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,\cdots,s)$ 是解. (2)$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关. (3) 向量个数为 $s(s=n-r(\boldsymbol{A}))$.

微信公众号(侯关考研) (ID: gjky66)

解 (1) 因 $\boldsymbol{A\alpha}_j=\boldsymbol{0},j=1,2,\cdots,s$. 故

$$\boldsymbol{A\beta}_i=\boldsymbol{A}(t_1\boldsymbol{\alpha}_i+t_2\boldsymbol{\alpha}_{i+1})=\boldsymbol{0}(\text{记 }\boldsymbol{\alpha}_{s+1}=\boldsymbol{\alpha}_1)\quad i=1,2,\cdots,s,$$

故对任意 $t_1,t_2,\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,\cdots,s)$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

(2) 下面讨论 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 何时线性无关.

【方法一】 设 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{0}$，

即 $$k_1(t_1\boldsymbol{\alpha}_1+t_2\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(t_1\boldsymbol{\alpha}_2+t_2\boldsymbol{\alpha}_3)+\cdots+k_s(t_1\boldsymbol{\alpha}_s+t_2\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{0},$$

整理得

$$(k_1t_1+k_st_2)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2t_1+k_1t_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_st_1+k_{s-1}t_2)\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，因此有

$$\begin{cases}t_1k_1+t_2k_s=0,\\t_2k_1+t_1k_2=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\t_2k_{s-1}+t_1k_s=0\end{cases}\qquad(*)$$

因其系数行列式为

$$D_s=\begin{vmatrix}t_1&0&\cdots&0&t_2\\t_2&t_1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&t_1&0\\0&0&\cdots&t_2&t_1\end{vmatrix}=t_1^s+(-1)^{s+1}t_2^s,$$

所以当 $t_1^s+(-1)^{s+1}t_2^s\neq 0$(即 $s=2n$ 时，$t_1\neq\pm t_2$；$s=2n+1$ 时，$t_1\neq -t_2$) 时，方程组(*)

有唯一零解，从而 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关.

【方法二】　由题设知

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s]\begin{bmatrix}t_1 & 0 & \cdots & 0 & t_2\\ t_2 & t_1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & t_1 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & t_2 & t_1\end{bmatrix}.$$

当 $|\boldsymbol{C}|=\begin{vmatrix}t_1 & 0 & \cdots & 0 & t_2\\ t_2 & t_1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & t_1 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & t_2 & t_1\end{vmatrix}=t_1^s+(-1)^{s+1}t_2^s\neq 0$ 时，$\boldsymbol{C}$ 可逆，且

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s]=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s]\boldsymbol{C}^{-1},$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 等价 $\Rightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)=s$，故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关.

(3) 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 中向量个数也为 s.

由(1),(2),(3)可知，若当 $s=2n$ 时，$t_1\neq\pm t_2$；或当 $s=2n+1$ 时，$t_1\neq -t_2$，则向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 也是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

【例 12】　已知两个方程四个未知量的齐次线性方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=k_1(1,0,2,3)^{\mathrm{T}}+k_2(0,1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，求原齐次线性方程组.

解　设两个方程四个未知量的齐次线性方程组为

$$\boldsymbol{A}_{2\times 4}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},$$

其通解 $\boldsymbol{x}=k_1(1,0,2,3)^{\mathrm{T}}+k_2(0,1,-1,1)^{\mathrm{T}}\xrightarrow{\text{记为}}k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$，则有 $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2]=\boldsymbol{O}$.

两边转置，得 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$. 即以原方程组的基础解系作新的方程组的系数矩阵的行向量，求解新的方程组，则新方程组的基础解系即是原方程组系数矩阵的行向量.

作方程组 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{cases}y_1+2y_3+3y_4=0,\\ y_2-y_3+y_4=0.\end{cases}\qquad(*)$$

方程组(*)的系数矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix},$$

求得方程组(*)的基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1=(-2,1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=(-3,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，故原方程组为

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=0,\\ -3x_1-x_2+x_4=0.\end{cases}$$

【评注】　所求方程组表达式不唯一，但均是同解方程组.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

三、解方程组 $Ax=b$

【例 13】　(1987,3) 解方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2+4x_3-3x_4=-4\\ x_1+x_3-x_4=-3\\ 3x_1+x_2+x_3=1\\ 7x_1+7x_3-3x_4=3\end{cases}$$

解 对增广矩阵作初等行变换，有

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{cccc:c}2&-1&4&-3&-4\\1&0&1&-1&-3\\3&1&1&0&1\\7&0&7&-3&3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&1&-1&-3\\2&-1&4&-3&-4\\3&1&1&0&1\\7&0&7&-3&3\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&1&-1&-3\\0&-1&2&-1&2\\0&1&-2&3&10\\0&0&0&4&24\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&1&-1&-3\\0&1&-2&1&-2\\0&0&0&1&6\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\text{(行阶梯)}$$

$$\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&1&0&3\\0&1&-2&0&-8\\0&0&0&1&6\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\text{(行最简)}$$

$$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3,n-r(\boldsymbol{A})=4-3=1$$

令 $x_3=0$，得方程组特解 $\boldsymbol{\alpha}=(3,-8,0,6)^{\mathrm{T}}$，

令 $x_3=1$ 得 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系 $\boldsymbol{\eta}=(-1,2,1,0)^{\mathrm{T}}$，

故方程组通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\eta},k\text{ 为任意常数}$$

【注】 基础题基本功，要认真对待.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 14】 线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2.\end{cases}$$

λ 为何值时，方程组无解？λ 为何值时，方程组有解？方程组有解时，求其全部解.

解 【方法一】 将增广矩阵用高斯消元法化成阶梯形矩阵：

$$[\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b}]\to\left[\begin{array}{ccc:c}\lambda&1&1&1\\1&\lambda&1&\lambda\\1&1&\lambda&\lambda^2\end{array}\right]\xrightarrow{*}\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&\lambda&\lambda^2\\1&\lambda&1&\lambda\\\lambda&1&1&1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&\lambda&\lambda^2\\0&\lambda-1&1-\lambda&\lambda(1-\lambda)\\0&1-\lambda&1-\lambda^2&1-\lambda^3\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&\lambda&\lambda^2\\0&\lambda-1&1-\lambda&\lambda(1-\lambda)\\0&0&(1-\lambda)(2+\lambda)&(1-\lambda)(1+\lambda)^2\end{array}\right].$$

(1) 当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq-2$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=3$，方程组有唯一解. 回代方程得唯一解

$$\left(-\frac{\lambda+1}{\lambda+2},\frac{1}{\lambda+2},\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}\right)^{\mathrm{T}}.$$

(2) 当 $\lambda=1$ 时，方程组有无穷多解. 由于 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=1$，故方程组有两个 $(n-1=2)$ 自由未知量 x_2,x_3，赋值 $(1,0),(0,1)$，得齐次方程组的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，

$\xi_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，非齐次方程组的一个特解为 $\eta=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，故 $\lambda=1$ 时，非齐次方程组的通解为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta$，其中 k_1,k_2 是任意常数.

(3)$\lambda=-2$ 时，$r(\boldsymbol{A})=2\neq r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=3$，方程组无解.

【方法二】　方程组的系数矩阵是3阶方阵，故可利用克拉默法则，先讨论方程组何时有唯一解，何时无解，何时有无穷多解. 读者自行计算.(*)处首先将1,3行互换，会方便许多.

【方法三】　希望你用爪型消元来处理.

【例15】　设非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=1 \\ 2x_1-x_2+3x_3-x_4=4 \\ x_2+ax_3+cx_4=c \\ x_1-3x_2+(3-a)x_3=-4 \end{cases} \tag{*}$$

问 a,c 为何值时，方程组(*)无解?有解?有解时，求其全部解.

解　对(*)的增广矩阵作初等行变换

$$[\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b}]=\begin{bmatrix}1&-1&2&0&1\\2&-1&3&-1&4\\0&1&a&c&c\\1&-3&3-a&0&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&2&0&1\\0&1&-1&-1&2\\0&1&a&c&c\\0&-2&1-a&0&-5\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&-1&2&0&1\\0&1&-1&-1&2\\0&0&a+1&c+1&c-2\\0&0&-1-a&-2&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&2&0&1\\0&1&-1&-1&2\\0&0&a+1&c+1&c-2\\0&0&0&c-1&c-3\end{bmatrix}$$

$\overset{记}{=\!=}\boldsymbol{B}$.

(1) 由 $\boldsymbol{B}$ 知，$a\neq-1$ 且 $c\neq1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=4=r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})$，(*)有唯一解，其解为

$$x_4=\frac{c-3}{c-1},x_3=\frac{1}{a+1}\left(\frac{5-c}{c-1}\right),x_2=\frac{1}{a+1}\left(\frac{5-c}{c-1}\right)+\frac{3c-5}{c-1}$$

$$x_1=\frac{1}{a+1}\left(\frac{5-c}{c-1}\right)+2\left(\frac{2c-3}{c-1}\right)$$

(2) 当 $a=-1$ 时，再对 $\boldsymbol{B}$ 作初等行变换

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-1&2&0&1\\0&1&-1&-1&2\\0&0&0&c+1&c-2\\0&0&0&c-1&c-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&2&0&1\\0&1&-1&-1&2\\0&0&0&2&1\\0&0&0&c-1&c-3\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&1&0&\frac{7}{2}\\0&1&-1&0&\frac{5}{2}\\0&0&0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0&0&\frac{c-5}{2}\end{bmatrix}\overset{记}{=\!=}\boldsymbol{D}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

由 $\boldsymbol{D}$ 知

当 $c \neq 5$ 时，$(*)\ r(\boldsymbol{A}) = 3 \neq r(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}) = 4$，方程组无解.

当 $c = 5$ 时，方程组 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}) = 3$，有无穷多解. 因 $n = 4$，其通解结构为 $k\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}$. 其中齐次基础解系为 $\boldsymbol{\xi} = (-1,1,1,0)^{\mathrm{T}}$，非齐次的一个特解为 $\boldsymbol{\eta} = \left(\frac{7}{2},\frac{5}{2},0,\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$，通解 $k(-1,1,1,0)^{\mathrm{T}} + \left(\frac{7}{2},\frac{5}{2},0,\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$，$k$ 为任意常数.

【评注】 (1)$a \neq -1$ 时，由 $\boldsymbol{B}$ 知，若 $c = 1$，$r(\boldsymbol{A}) = 3 \neq r(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}) = 4$，$(*)$ 无解. 此结果已经包含于 $c \neq 5$ 之中.

(2)$a = -1$ 时，若 $\boldsymbol{B}$ 中 3,4 两行若成比例，此时第 4 行可全化为零，化成阶梯形 $\boldsymbol{D}$. 即

$$\begin{vmatrix} c+1 & c-2 \\ c-1 & c-3 \end{vmatrix} = (c+1)(c-3) - (c-2)(c-1) = c - 5 = 0$$

$c = 5$，第 3,4 行成比例，$(*)$ 有无穷多解.

$c \neq 5$，第 3,4 行不成比例，$(*)$ 无解.

【例 16】 设线性方程组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 x_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 x_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 x_3 + \boldsymbol{\alpha}_4 x_4 = \boldsymbol{\beta},$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_i (i = 1,2,3,4)$ 及 $\boldsymbol{\beta}$ 均是四维列向量，有通解

$$k(-2,3,1,0)^{\mathrm{T}} + (4,-1,0,3)^{\mathrm{T}}.$$

(1) 问 $\boldsymbol{\beta}$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出，若能表出，则表出之；若不能表出，说明理由.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，说明理由.

(3) 求线性方程组

$$[\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$$

的通解.

微信公众号【顾尖考研】 (ID: djky66)

解题思路

由解的结构，知

(1)$r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}}) = 3$，

(2)$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$，即 $-2\boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0}$，

(3)$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\beta}$，即 $4\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 + 3\boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{\beta}$.

解 (1)$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出.

由题设条件知，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出，且

$$\boldsymbol{\beta} = (-2k+4)\boldsymbol{\alpha}_1 + (3k-1)\boldsymbol{\alpha}_2 + k\boldsymbol{\alpha}_3 + 3\boldsymbol{\alpha}_4$$，其中 k 是任意常数.

当 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 的系数 $-2k+4 = 0$，即 $k = 2$ 时，得 $\boldsymbol{\beta}$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的表出式如下

$$\boldsymbol{\beta} = 5\boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3 + 3\boldsymbol{\alpha}_4.$$

【注】 $\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 及 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出吗？

(2)$\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

由方程组的通解知

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta})=3.$$

且
$$-2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},$$

得
$$\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2. \tag{1}$$

若 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，设为

$$\boldsymbol{\alpha}_4=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3,$$

将 ① 式 $\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2$ 代入上式，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_4&=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3\\&=(k_1+2k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2-3k_3)\boldsymbol{\alpha}_2.\end{aligned} \tag{2}$$

由 ①，② 知，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\leqslant 2$，这和 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$ 矛盾，故 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

(3) 由于方程组 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$

有解 $k(-2,3,1,0)^{\mathrm{T}}+(4,-1,0,3)^{\mathrm{T}}$，知

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=r(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3,$$

故方程组

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$$

有解，其通解的结构形式为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\eta}$，其中 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 是对应的齐次方程组的基础解系，$\boldsymbol{\eta}$ 是非齐次方程的一个特解.

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

显然

$0\cdot(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta})+4\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_3+3\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\beta}$，得 $\boldsymbol{\eta}_1=(0,4,-1,0,3)^{\mathrm{T}}$；

$0\cdot(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta})-2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{\xi}=(0,-2,3,1,0)^{\mathrm{T}}$；

$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})-\boldsymbol{\alpha}_1+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_2+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_3+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\beta}$，得 $\boldsymbol{\eta}_2=(1,-1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$.

得所求方程组的通解为(其中 $\boldsymbol{\xi}$ 与 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 不成比例，线性无关)

$$k_1\boldsymbol{\xi}+k_2(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)+\boldsymbol{\eta}_1=k_1\begin{bmatrix}0\\-2\\3\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\5\\-1\\0\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\4\\-1\\0\\3\end{bmatrix}.$$

【例 17】 设 $\boldsymbol{A}$ 是四阶矩阵，$r(\boldsymbol{A})=2$，$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的三个线性无关解，其中

$$\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2=(-1,2,5,1)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\eta}_2-2\boldsymbol{\eta}_3=(2,1,3,-3)^{\mathrm{T}},$$
$$5\boldsymbol{\eta}_3+3\boldsymbol{\eta}_1=(1,-2,1,-1)^{\mathrm{T}},$$

求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

解题思路 $\boldsymbol{A}$ 是四阶方阵，$r(\boldsymbol{A})=2$，故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解结构为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\eta}$. 只需求出 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系及一个非齐次方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的特解，即可得到非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

解 因 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_2-2\boldsymbol{\eta}_3)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_2-2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_3=\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}$，

故知 $\boldsymbol{\eta}=-(\boldsymbol{\eta}_2-2\boldsymbol{\eta}_3)=(-2,-1,-3,3)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解.

因 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2+2(\boldsymbol{\eta}_2-2\boldsymbol{\eta}_3))=\boldsymbol{A\eta}_1+\boldsymbol{A\eta}_2+2\boldsymbol{A\eta}_2-4\boldsymbol{A\eta}_3=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,

故
$$\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2+2(\boldsymbol{\eta}_2-2\boldsymbol{\eta}_3)=(-1,2,5,1)^{\mathrm{T}}+2(2,1,3,-3)^{\mathrm{T}}$$
$$=(3,4,11,-5)^{\mathrm{T}}$$

是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个非零解.

$$\boldsymbol{A}[8(\boldsymbol{\eta}_2-2\boldsymbol{\eta}_3)+(5\boldsymbol{\eta}_3+3\boldsymbol{\eta}_1)]=8\boldsymbol{A\eta}_2-16\boldsymbol{A\eta}_3+5\boldsymbol{A\eta}_3+3\boldsymbol{A\eta}_1$$
$$=8\boldsymbol{b}-16\boldsymbol{b}+5\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},$$

故
$$\boldsymbol{\xi}_2=8(\boldsymbol{\eta}_2-2\boldsymbol{\eta}_3)+5\boldsymbol{\eta}_3+3\boldsymbol{\eta}_1=(16,8,24,-24)^{\mathrm{T}}+(1,-2,1,-1)^{\mathrm{T}}$$
$$=(17,6,25,-25)^{\mathrm{T}}$$

是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个非零解,且 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 线性无关.

故由 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解结构知,$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\eta}=k_1\begin{bmatrix}3\\4\\11\\-5\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}17\\6\\25\\-25\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\-1\\-3\\3\end{bmatrix},\text{其中 } k_1,k_2 \text{ 为任意常数.}$$

【评注】 (1) 答案的表达式不唯一.

(2) 因 $\boldsymbol{A\eta}_1=\boldsymbol{b},\boldsymbol{A\eta}_2=\boldsymbol{b},\boldsymbol{A\eta}_3=\boldsymbol{b}$,故 $\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+k_3\boldsymbol{\eta}_3)=(k_1+k_2+k_3)\boldsymbol{b}$,

若 $k_1+k_2+k_3=1$,则 $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+k_3\boldsymbol{\eta}_3$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解;

若 $k_1+k_2+k_3=0$,则 $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+k_3\boldsymbol{\eta}_3$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(3) 因 $[\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_2-2\boldsymbol{\eta}_3,5\boldsymbol{\eta}_3+3\boldsymbol{\eta}_1]=[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3]\begin{bmatrix}1&0&3\\1&1&0\\0&-2&5\end{bmatrix}=[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3]\boldsymbol{C}$,其中

$$|\boldsymbol{C}|=\begin{vmatrix}1&0&3\\1&1&0\\0&-2&5\end{vmatrix}=-1\neq 0,\boldsymbol{C}\text{ 可逆},$$

故 $[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3]=[\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_2-2\boldsymbol{\eta}_3,5\boldsymbol{\eta}_3+3\boldsymbol{\eta}_1]\boldsymbol{C}^{-1}$ 可直接求得方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的三个线性无关的解 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$,从而求得 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解

$$k_1(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)+k_2(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3)+\boldsymbol{\eta}_1,\text{其中 } k_1,k_2 \text{ 是任意常数.}$$

四、两个方程组的公共解

方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{B}_{s\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的公共解是满足方程组 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

【例 18】 设线性方程组

$$(\mathrm{I})\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2-x_4=0\end{cases}\quad(\mathrm{II})\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\x_2-x_3+x_4=0\end{cases}$$

(1) 分别求方程组(Ⅰ),(Ⅱ)的基础解系.

(2) 求方程组(Ⅰ),(Ⅱ)的公共解.

解 (1) 由方程组即得

$$(\mathrm{I})\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\end{bmatrix},\text{基础解系为 } \boldsymbol{\xi}_1=(0,0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(-1,1,0,1)^{\mathrm{T}};$$

(Ⅱ)$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-1&1&0\\0&1&-1&1\end{bmatrix}$，基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1=(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2=(-1,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

(2)【方法一】　直接解(Ⅰ)，(Ⅱ)的联立方程组，即解 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 因

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\1&-1&1&0\\0&1&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\0&-2&1&0\\0&0&-1&2\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&-1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

故得公共解为 $k(-1,1,2,1)^{\mathrm{T}}$，其中 k 是任意常数.

【方法二】　在方程组(Ⅰ)(或(Ⅱ))的通解中找出满足方程组(Ⅱ)(或(Ⅰ))的解，即是(Ⅰ)，(Ⅱ)的公共解.

方程组(Ⅰ)的通解为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2=(-k_2,k_2,k_1,k_2)^{\mathrm{T}}$，代入方程组(Ⅱ)，得

$$\begin{cases}-k_2-k_2+k_1=0,\\k_2-k_1+k_2=0.\end{cases}$$

解得 $k_1=2k_2$，代入方程组(Ⅰ)的通解，得方程组(Ⅰ)，(Ⅱ)的公共解是 $(-k_2,k_2,2k_2,k_2)^{\mathrm{T}}=k_2(-1,1,2,1)^{\mathrm{T}}$，其中 k_2 是任意常数.

【方法三】　从方程组(Ⅰ)，(Ⅱ)的通解中求出公共解.

求法 1　(Ⅰ)的通解为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$，(Ⅱ)的通解为 $\lambda_1\boldsymbol{\eta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\eta}_2$，则公共解应满足

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2=\lambda_1\boldsymbol{\eta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\eta}_2,$$

即

$$k_1\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\1\end{bmatrix}=\lambda_1\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{bmatrix}.\tag{*}$$

由上式对应分量相等可得 $k_2=\lambda_2$；　$k_2=\lambda_1-\lambda_2$；　$k_1=\lambda_1$；　$k_2=\lambda_2$.

故　　$k_2=\lambda_1-\lambda_2=k_1-k_2$，　得 $2k_2=k_1$；

或　　$k_2=\lambda_2=\lambda_1-\lambda_2$，　得 $\lambda_1=2\lambda_2$.

因此，公共解为 $2k_2\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2=k_2[2\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2]=k_2(-1,1,2,1)^{\mathrm{T}}$，其中 k_2 是任意常数；或 $2\lambda_2\boldsymbol{\eta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\eta}_2=\lambda_2(2\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)=\lambda_2(-1,1,2,1)^{\mathrm{T}}$，其中 λ_2 是任意常数.

求法 2　利用解方程.

由(*)式得

$$k_1\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\1\end{bmatrix}+\lambda_1\begin{bmatrix}0\\-1\\-1\\0\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&0&1\\0&1&-1&1\\1&0&-1&0\\0&1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\lambda_1\\\lambda_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}.$$

因

$$\begin{bmatrix}0&-1&0&1\\0&1&-1&1\\1&0&-1&0\\0&1&0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&-1&0&1\\0&0&-1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

解得$(k_1,k_2,\lambda_1,\lambda_2)=t(2,1,2,1)$，$t$是任意常数，故公共解为$t(2\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2)=t\begin{bmatrix}-1\\1\\2\\1\end{bmatrix}$或$t(2\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)$，其中$t$是任意常数.

【评注】 本题除给出两个方程组，求其公共解之外，还可转化成给出一个方程组和另一个方程组的通解(或基础解)，然后求公共解(求解见方法二)，或者给出两个方程组的通解(或基础解系)，然后求公共解(求解见方法三). 当然也可将一个方程组改成满足某个(或某些)条件(其实满足另一个方程组就是满足某些条件).

五、同解方程组

两个方程组$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$和$\boldsymbol{B}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$有完全相同的解，则称为同解方程组.

【例19】 设线性方程组

$$(\mathrm{I})\begin{cases}x_1+3x_3+5x_4=0\\x_1-x_2-2x_3+2x_4=0\\2x_1-x_2+x_3+3x_4=0\end{cases}$$

在线性方程组(Ⅰ)的基础上，添加一个方程$ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0$，得方程组

$$(\mathrm{II})\begin{cases}x_1+3x_3+5x_4=0\\x_1-x_2-2x_3+2x_4=0\\2x_1-x_2+x_3+3x_4=0\\ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0\end{cases}$$

问a,b,c,d满足什么条件时，方程组(Ⅰ)，(Ⅱ)是同解方程组.

解 当新添的方程是多余方程时，方程组(Ⅰ)，(Ⅱ)是同解方程组，即新添方程可由原方程组线性表出，设为

$$ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=k_1(x_1+3x_3+5x_4)+k_2(x_1-x_2-2x_3+2x_4)+k_3(2x_1-x_2+x_3+3x_4),$$

对应系数相等，得$a=k_1+k_2+2k_3$，$b=-k_2-k_3$，$c=3k_1-2k_2+k_3$，$d=5k_1+2k_2+3k_3$，表示成向量形式为

$$\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1+k_2+2k_3\\0k_1-k_2-k_3\\3k_1-2k_2+k_3\\5k_1+2k_2+3k_3\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}1\\0\\3\\5\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\\2\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}2\\-1\\1\\3\end{bmatrix},(k_1,k_2,k_3\text{为任意常数})$$

即新添方程的系数行向量可由原方程组系数矩阵的行向量组线性表出时，方程组(Ⅰ)，(Ⅱ)同解.

【评注】 新添方程可由原方程组线性表出，即是新添方程的系数行向量$\boldsymbol{\beta}=(a,b,c,d)$可由原方程组系数行向量，

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,3,5),\ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,-2,2),\ \boldsymbol{\alpha}_3=(2,-1,1,3)$$

线性表出，将$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$处理成列向量，即是指方程组

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}x_1+\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}x_2+\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}x_3=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$$

有解. 看$\boldsymbol{\beta}$的分量a,b,c,d满足什么条件上述方程组有解也是一样.

微信公众号【顶尖考研】

【例 20】　设 A 是 n 阶实矩阵，A^{T} 是 A 的转置矩阵.

证明：(1) 方程组(Ⅰ)$Ax=0$ 和(Ⅱ)$A^{\mathrm{T}}Ax=0$ 是同解方程组.

(2)$r(A)=r(A^{\mathrm{T}}A)=r(AA^{\mathrm{T}})$.

证明　(1) 若存在 x，使 $Ax=0$，则两边左乘 A^{T}，得 $A^{\mathrm{T}}Ax=0$，故方程组(Ⅰ)的解必是方程组(Ⅱ)的解.

若存在 x，使 $A^{\mathrm{T}}Ax=0$，则两边左乘 x^{T}，得 $x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax=(Ax)^{\mathrm{T}}Ax=0$.

因 A 是实矩阵，Ax 是实向量，设 $Ax=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$，则 $(Ax)^{\mathrm{T}}Ax=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2=0$，得 $a_i=0\ (i=1,2,\cdots,n)$，故 $Ax=0$，从而知方程组(Ⅱ)的解必是方程组(Ⅰ)的解.

故方程组(Ⅰ)，(Ⅱ)是同解方程组.

(2) 因 $Ax=0$ 和 $A^{\mathrm{T}}Ax=0$ 是同解方程组，它们有相同的基础解系，故

$$r(A)=r(A^{\mathrm{T}}A),$$

又因 $r(A)=r(A^{\mathrm{T}})=r((A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}})=r(AA^{\mathrm{T}})$. 从而得 $r(A)=r(A^{\mathrm{T}}A)=r(AA^{\mathrm{T}})$.

【评注】　(1) 若 A 是 $m\times n$ 实矩阵，$Ax=0$ 和 $A^{\mathrm{T}}Ax=0$ 也是同解方程组.

(2) 当 A 是 $m\times n$ 实矩阵时，同样有

$$r(A)=r(A^{\mathrm{T}}A)=r(AA^{\mathrm{T}}).$$

六、方程组的应用

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例 21】　求与矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}$ 可以交换的矩阵.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

解题思路　矩阵的乘法没有交换律，一般情况 $AB\neq BA$. 若 $AB=BA$，则称 A 与 B 可交换，为了求与 A 可交换的矩阵，通常是按定义，设未知数，构造方程组，然后求解得所需矩阵.

解　设 $X=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}$ 与矩阵 A 可交换，即 $AX=XA$，即

$$\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_1+2x_3&x_2+2x_4\\3x_3&3x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1&2x_1+3x_2\\x_3&2x_3+3x_4\end{bmatrix}$$

$$\text{即}\begin{cases}x_1+2x_3=x_1\\x_2+2x_4=2x_1+3x_2\\3x_3=x_3\\3x_4=2x_3+3x_4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2-x_4=0\\x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-t+u\\x_2=t\\x_3=0\\x_4=u\end{cases}$$

所以和 A 可以交换的矩阵是 $\begin{bmatrix}-t+u&t\\0&u\end{bmatrix}$，$\forall\, t,u$.

【例 22】　已知 $\begin{bmatrix}1&3&2\\2&6&5\\-1&-3&1\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}4&-1\\7&3\\-7&16\end{bmatrix}$，则 $X=$ _____.

分析　因 $A=\begin{bmatrix}1&3&2\\2&6&5\\-1&-3&1\end{bmatrix}$ 不可逆. 设 $X=\begin{bmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\\x_3&y_3\end{bmatrix}$

则由 $\begin{bmatrix}1&3&2\\2&6&5\\-1&-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\\x_3&y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-1\\7&3\\-7&16\end{bmatrix}$，有

$$\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3=4\\2x_1+6x_2+5x_3=7\\-x_1-3x_2+x_3=-7\end{cases}\text{和}\begin{cases}y_1+3y_2+2y_3=-1\\2y_1+6y_2+5y_3=3\\-y_1-3y_2+y_3=16\end{cases}$$

两个方程组系数矩阵一样.

$$\left[\begin{array}{ccc|cc}1&3&2&4&-1\\2&6&5&7&3\\-1&-3&1&-7&16\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|cc}1&3&2&4&-1\\0&0&1&-1&5\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|cc}1&3&0&6&-11\\0&0&1&-1&5\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

解出 $x_1=6-3t,x_2=t,x_3=-1$ 和 $y_1=-11-3u,y_2=u,y_3=5$.

所以 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}6-3t&-11-3u\\t&u\\-1&5\end{bmatrix}$，$t,u$ 是任意实数.

【例 23】 (2018，$\frac{1}{2,3}$) 已知 a 是常数，且矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{bmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}$.

(1) 求 a；

(2) 求满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

解 (1) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 等价 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$.

由 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&a\\1&3&0\\3&9&0\end{vmatrix}=0$，$\forall a$，恒有 $r(\boldsymbol{A})=2$.

又 $|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{vmatrix}=2-a$，$\boldsymbol{B}$ 中有 2 阶子式 $\begin{vmatrix}0&1\\-1&1\end{vmatrix}\neq 0$.

所以 $r(\boldsymbol{B})=2\Leftrightarrow|\boldsymbol{B}|=0\Leftrightarrow a=2$.

(2) 满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的 $\boldsymbol{P}$ 就是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的解.

$$[\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{B}]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&2&2\\1&3&0&0&1&1\\2&7&-2&-1&1&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&6&3&4&4\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

故 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}3-6k_1&4-6k_2&4-6k_3\\-1+2k_1&-1+2k_2&-1+2k_3\\k_1&k_2&k_3\end{bmatrix}$.

$$|\boldsymbol{P}|=\begin{vmatrix}3-6k_1&4-6k_2&4-6k_3\\-1+2k_1&-1+2k_2&-1+2k_3\\k_1&k_2&k_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&4&4\\-1&-1&-1\\k_1&k_2&k_3\end{vmatrix}=k_3-k_2\neq 0.$$

【例 24】　已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-3,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(5,-5,a,11)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-3,6,3)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\beta}=(2,-1,3,b)^{\mathrm{T}}$，当 a,b 为何值时 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？何时 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示并写出其表达式.

解　设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$，对 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\mid\boldsymbol{\beta})$ 作初等行变换，有

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{cccc}1&5&1&2\\2&-5&-3&-1\\-3&a&6&3\\1&11&3&b\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc}1&5&1&2\\0&3&1&1\\0&a-12&0&0\\0&0&0&b-4\end{array}\right]$$

$\forall a,b\neq 4$ 时，$r(\boldsymbol{A})\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})$，方程组无解，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示

当 $a=12,b=4$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$，

$$\overline{\boldsymbol{A}}\to\left[\begin{array}{cccc}1&5&1&2\\0&3&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc}1&2&0&1\\0&3&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

令 $x_2=t$ 解出 $x_1=1-2t,x_3=1-3t$，

有 $\boldsymbol{\beta}=(1-2t)\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{\alpha}_2+(1-3t)\boldsymbol{\alpha}_3$，$t$ 为任意常数.

当 $a\neq 12,b=4$ 时

$$\overline{\boldsymbol{A}}\to\left[\begin{array}{cccc}1&5&1&2\\0&a-12&0&0\\0&3&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，方程组有唯一解 $(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，于是 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)
微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

小结

线性方程组是线性代数基础内容之一，有广泛的实际应用.

首先要会解线性方程组.解线性方程组的主要方法是高斯消元法，即利用初等行变换，因初等行变换不改变方程组的解.特别是含有参数的方程组的求解，有关参数的讨论不能遗漏，应培养良好的计算习惯.特殊情况可考虑用克拉默法则.

齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 总是有解的，至少有零解，问题是何时有非零解，有多少非零解，如何表达这些非零解？关键是理解基础解系的概念，并掌握基础解系的求法.掌握 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 中未知量的个数，$r(\boldsymbol{A})$ 及基础解系中线性无关解的个数三者之间的关系.

非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，要会利用 $r(\boldsymbol{A})$ 与 $r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})$ 的关系判别无解，唯一解，无穷多解.掌握解的结构.

线性方程有三种表示形式，利用向量的表示形式，理解 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解与 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的关系，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解与 $\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的关系，利用向量的内积运算理解 $\boldsymbol{A}$ 的行向量与 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量的关系.在证明某些有关方程组的命题时，尽量利用方程组的向量形式或矩阵形式是方便的.

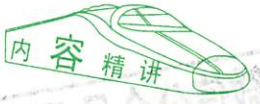
两个方程组的公共解，同解方程组是方程组问题的推广.

第五章　特征值、特征向量、相似矩阵

了解　矩阵可相似对角化的充分必要条件.

理解　矩阵的特征值、特征向量的概念，矩阵相似的概念.

掌握　矩阵特征值的性质，求矩阵特征值和特征向量的方法，相似矩阵的性质，将矩阵化为相似对角矩阵的方法，实对称矩阵的特征值和特征向量的性质.



微信公众号【顶尖考研】
(ID: djkyba)

§1　特征值、特征向量

一、定义

定义 5.1　**特征值，特征向量**　$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，如果对于数 λ，存在 n 维非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$，使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}\quad(\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}) \tag{1}$$

成立，则称 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的**特征值**，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ 的**特征向量**.

定义 5.2　由式 ① 得，$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，因 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，故

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}=0. \tag{2}$$

式 ② 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征方程**，是未知元素 λ 的 n 次方程，在复数域内有 n 个根，式 ② 的左端多项式称为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征多项式**，矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 称为**特征矩阵**.

二、特征值的性质

设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$，$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$；

(2) $\prod\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=|\boldsymbol{A}|$.

三、求特征值、特征向量的方法

【方法一】　设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$，则由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值 λ_i，再由齐次线性方

程组

$$(\lambda_i E - A)x = 0$$

求出 A 的对应于特征值 λ_i 的特征向量. 基础解系即是 A 的对应于 λ_i 的线性无关特征向量，通解即是 A 的对应于 λ_i 的全体特征向量(除 0 向量).

例如：对角阵 $\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$、上(下)三角阵的特征值，即是主对角元素.

【方法二】　利用定义，凡满足关系式 $A\alpha = \lambda\alpha$ 的数 λ 即是 A 的特征值，$\alpha(\alpha \neq 0)$ 即是 A 的对应于 λ 的特征向量. 一般用于抽象矩阵，或元素为文字的矩阵.

例如：若齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有基础解系 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-r}$，因 $A\alpha_i = 0 = 0\alpha_i, i = 1, 2, \cdots, n-r$，故 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-r}$ 是 A 的对应于 $\lambda = 0$ 的特征向量. 故当 $|A| = 0$ 时，A 有特征值 $\lambda = 0$.

§2　相似矩阵、矩阵的相似对角化

一、定义

定义 5.3(相似矩阵)　设 A, B 都是 n 阶矩阵，若存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = B$，则称 A 相似于 B，记成 $A \sim B$. 若 $A \sim \Lambda$，其中 Λ 是对角阵，则称 A 可相似对角化. Λ 是 A 的相似标准形.

微信公众号【顶尖考研】

二、矩阵可相似对角化的充分必要条件

定理 5.1　n 阶矩阵 A 可对角化 $\Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量.

定理 5.2　$\lambda_1 \neq \lambda_2$ 是 A 的特征值 $\Rightarrow A$ 的对应于 λ_1, λ_2 的特征向量 α_1, α_2 线性无关.

推论　n 阶矩阵 A 有 n 个互不相同的特征值 $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_n, \Rightarrow A$ 有 n 个线性无关特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$. $\Leftrightarrow A$ 可相似于对角阵. 取 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$，则有 $P^{-1}AP = \Lambda$，其中

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

注意 P 中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 排列次序应与 Λ 中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的排列次序一致.

定理 5.3　λ_i 是 n 阶矩阵 A 的 r_i 重特征值，则其对应的线性无关特征向量个数少于等于 r_i 个.

推论　n 阶矩阵 A 可相似对角化 $\Leftrightarrow A$ 的每一个 r_i 重特征值对应的线性无关特征向量个数等于该特征值的重数 r_i.

当 A 的 r_i 重特征值 λ_i 对应的线性无关特征向量个数少于特征值的重数 r_i 时，A 不能相似于对角阵.

例如 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$|\lambda E - A| = (\lambda - 1)^2 = 0, \lambda = 1$ 是 A 的二重特征值，但由于 $r(E - A) = r\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$，$(E - A)x = 0$ 只有一个线性无关解，即对应于 $\lambda = 1$(二重根)只有一个线性无关特征向量. 故 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 不能与对角阵相似.

三、相似矩阵的性质及相似矩阵的必要条件

1. 性质

(1) $A \sim A$,反身性.

(2) 若 $A \sim B \Rightarrow B \sim A$,对称性.

(3) 若 $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$,传递性.

2. 两个矩阵相似的必要条件

$A \sim B \Rightarrow$ (1) $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$;

(2) $r(A) = r(B)$;

(3) A, B 有相同的特征值;

(4) $|A| = |B| = \prod\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$;

(5) $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$,即 $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}B = \mathrm{tr}\Lambda$.

§3 实对称矩阵的相似对角化

微信公众号【顶尖考研】(ID: djkyoo)

一、定义

定义 5.4 实对称阵 元素 a_{ij} 都是实数的对称矩阵称为实对称矩阵,a_{ij} 是实数 $\Leftrightarrow a_{ij} = \bar{a}_{ij}$ ($\bar{a}_{ij}$ 是 a_{ij} 的共轭.) 记 $\bar{A} = [\bar{a}_{ij}]$,则 A 是实对称阵 $\Leftrightarrow A^{\mathrm{T}} = A$,且 $\bar{A} = A$.

二、实对称阵的特征值,特征向量及相似对角化

定理 5.4 实对称矩阵的特征值全部是实数.

定理 5.5 实对称矩阵的属于不同特征值对应的特征向量相互正交.

定理 5.6 实对称矩阵必相似于对角阵,即存在可逆阵 P,使得 $P^{-1}AP = \Lambda$. 且存在正交阵 Q,使得 $Q^{-1}AQ = Q^{\mathrm{T}}AQ = \Lambda$.

三、实对称矩阵正交相似于对角阵的步骤

(1) 解特征方程 $|\lambda E - A| = 0$,求出全部特征值:$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$(均为实数)(若求得的是特征值的取值范围,则 λ 的取值范围应限于实数,去除复数.).

(2) 求 $(\lambda_i E - A)x = 0$ 的基础解系 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ik_i}$, $i = 1, 2, \cdots, r$,即是 A 的属于特征值 λ_i 的线性无关的特征向量. 若 λ_i 是 k_i 重根,则必有 k_i 个线性无关特征向量.(若求解方程 $(\lambda_i E - A)x = 0$ 的基础解系时,使 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ik_i}$ 能相互正交更好,可免去下一步将 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ik_i}$ 正交化的工作.)

(3) 将每个属于 λ_i 的特征向量 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ik_i}$ 正交化.(不同特征值对应的特征向量已相互正交) 正交后的向量组记成 $\beta_{i1}, \beta_{i2}, \cdots, \beta_{ik_i}$.

(4) 将全部特征向量单位化. 得标准正交向量组记成

$$\beta^{\circ}_{11}, \beta^{\circ}_{12}, \cdots, \beta^{\circ}_{1k_1}, \beta^{\circ}_{21}, \beta^{\circ}_{22}, \cdots, \beta^{\circ}_{2k_2}, \cdots, \beta^{\circ}_{r1}, \beta^{\circ}_{r2}, \cdots, \beta^{\circ}_{rk_r}.$$

(5) 将 n 个单位正交特征向量合并成正交矩阵,记为

$$Q=[\boldsymbol{\beta}_{11}^{\circ},\boldsymbol{\beta}_{12}^{\circ},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{1k_1}^{\circ},\boldsymbol{\beta}_{21}^{\circ},\boldsymbol{\beta}_{22}^{\circ},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{2k_2}^{\circ},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r1}^{\circ},\boldsymbol{\beta}_{r2}^{\circ},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{rk_r}^{\circ}]$$

此即是所求的正交阵，且有

$$Q^{-1}AQ=Q^{\mathrm{T}}AQ=\boldsymbol{\Lambda}$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值组成的对角阵(注意 λ_i 和 $\boldsymbol{\beta}_{ik_i}^{\circ}$ 的排列次序要求一致).

本节内容与下一章“二次型”有紧密关系，请注意两者的联系.

例题分析

一、特征值，特征向量的求法

(1) 数值矩阵的特征值、特征向量的求法

【例 1】　求下列矩阵的特征值和特征向量：

$$(1)\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&-2&-4\\-2&6&-2\\-4&-2&3\end{bmatrix};\qquad(2)\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{bmatrix}.$$

解　(1) 对矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&-2&-4\\-2&6&-2\\-4&-2&3\end{bmatrix}$，由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&2&4\\2&\lambda-6&2\\4&2&\lambda-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-3&2&4\\2&\lambda-6&2\\7-\lambda&0&\lambda-7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-3&2&\lambda+1\\2&\lambda-6&4\\7-\lambda&0&0\end{vmatrix}$$

$$=(7-\lambda)(8-(\lambda-6)(\lambda+1))$$

$$=(7-\lambda)(-\lambda^2+5\lambda+14)=(\lambda-7)^2(\lambda+2)=0$$

得 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=7,\lambda_3=-2$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=7$ 时，由 $(7\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{bmatrix}4&2&4\\2&1&2\\4&2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},\qquad①$$

解得对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，全体特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$，其中 k_1,k_2 不全为零.

当 $\lambda_3=-2$ 时，由 $(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{bmatrix}-5&2&4\\2&-8&2\\4&2&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},\qquad②$$

解得对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,2)^{\mathrm{T}}$，全体特征向量为 $k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，其中 $k_3\neq0$.

(2) 对矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{bmatrix}$，由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-2\\-5&\lambda+3&-3\\1&0&\lambda+2\end{vmatrix}\xrightarrow{c_1+c_2-c_3}\begin{vmatrix}\lambda+1&1&-2\\\lambda+1&\lambda+3&-3\\-\lambda-1&0&\lambda+2\end{vmatrix}$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

$$= (\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & \lambda+3 & -3 \\ -1 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & \lambda+2 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)(\lambda^2+2\lambda+1) = (\lambda+1)^3$$

得特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ 时，由 $(\lambda E - A)x = 0$，即

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

解得全部特征向量为 $k(1,1,-1)^T$，其中 k 为任意非零常数.

【评注】 在利用线性齐次方程 $(\lambda E - A)x = 0$ 求 A 的对应于特征值 λ 的特征向量时，由于必有 $|\lambda E - A| = 0$，故 $r(\lambda E - A) < n$，$\lambda E - A$ 的行向量组必线性相关. 方程组中至少有一个方程是多余的. 例如

例 1(1) 中，$\lambda_1 = \lambda_2 = 7$，$r(7E - A) = 1$，方程组 ① 只需解同解方程

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \text{ 即可.}$$

$\lambda_3 = -2$，$r(-2E - A) = 2$，方程组 ② 只需解同解方程

$$\begin{cases} 2x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

即可(去掉了多余的第一个方程).

例 1(2) 中有同样的情况.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

【例 2】 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & b & b \\ b & 1 & b \\ b & b & 1 \end{bmatrix}$，其中 $b \neq 0$，求 A 的特征值和特征向量.

解 【方法一】 由特征方程 $|\lambda E - A| = 0$ 求 λ.

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -b & -b \\ -b & \lambda-1 & -b \\ -b & -b & \lambda-1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1+c_2+c_3} \begin{vmatrix} \lambda-(1+2b) & -b & -b \\ \lambda-(1+2b) & \lambda-1 & -b \\ \lambda-(1+2b) & -b & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= [\lambda-(1+2b)]\begin{vmatrix} 1 & -b & -b \\ 0 & \lambda-(1-b) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-(1-b) \end{vmatrix}$$

$$= [\lambda-(1+2b)][\lambda-(1-b)]^2 = 0,$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1-b$(二重根)，$\lambda_3 = 1+2b$.

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1-b$ 时，由 $(\lambda E - A)x = 0$，即

$$\begin{bmatrix} -b & -b & -b \\ -b & -b & -b \\ -b & -b & -b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0, \quad ①$$

其同解方程为

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad ②$$

得基础解系即 A 的对应于 $\lambda = 1-b$ 的线性无关的特征向量为 $\alpha_1 = (1,-1,0)^T$，$\alpha_2 = (1,0,-1)^T$(全体特征向量为 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$，其中 k_1, k_2 是不全为零的任意常数).

当 $\lambda_3 = 1+2b$ 时，由 $(\lambda E - A)x = 0$，即

$$\begin{bmatrix} 2b & -b & -b \\ -b & 2b & -b \\ -b & -b & 2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \tag{3}$$

因 $\lambda = 1+2b$ 是单根，对应的线性无关特征向量有且只有一个，因 $(\lambda E - A)$ 的每行元素之和为零，故有(解)特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$(全体特征向量为 $k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，其中 $k_3 \neq 0$ 的任意常数)(显然 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可从解方程 ③ 或者方程 ③ 的同解方程得到).

$$\begin{bmatrix} -b & 2b & -b \\ -b & -b & 2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{4}$$

【方法二】　由特征值、特征向量的定义求.

观察 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和为 $1+2b$，故有

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b & b \\ b & 1 & b \\ b & b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2b \\ 1+2b \\ 1+2b \end{bmatrix} = (1+2b) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

由定义知 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda = 1+2b$，对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$(全体特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1$，$k_1 \neq 0$).

又 $\boldsymbol{A}$ 中 1,2 行前两个元素为 1,b 和 b,1；第 3 行前两个元素均是 b,b，故有

$$\begin{bmatrix} 1 & b & b \\ b & 1 & b \\ b & b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-b \\ b-1 \\ 0 \end{bmatrix} = (1-b) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

故知 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_2 = 1-b$，对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,-1,0)^{\mathrm{T}}$.

同理，因

$$\begin{bmatrix} 1 & b & b \\ b & 1 & b \\ b & b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-b \\ 0 \\ b-1 \end{bmatrix} = (1-b) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

故知 $\lambda_3 = 1-b$，对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3 = (1,0,-1)^{\mathrm{T}}$ 且 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1-b$ 是二重特征值，对应的线性无关特征向量为

$\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,-1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = (1,0,-1)^{\mathrm{T}}$(全体特征向量为 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，其中 k_2，k_3 是不全为零的任意常数).

【方法三】　因

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & b & b \\ b & 1 & b \\ b & b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b+1-b & b & b \\ b & b+1-b & b \\ b & b & b+1-b \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b+1 & 0 & 0 \\ 0 & b+1 & 0 \\ 0 & 0 & b+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{bmatrix} = (1-b)\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B},$$

其中 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{bmatrix}$，$r(\boldsymbol{B}) = 1$，$\boldsymbol{B}$ 有特征值 $\mu_1 = \mu_2 = 0$(二重根)，另一个特征值为 $\mu_3 = \sum\limits_{i=1}^{3} b_{ii} = 3b$.

故 $\boldsymbol{A} = (1-b)\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1-b$，$\lambda_3 = 1-b+3b = 1+2b$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

当 $\mu_1=\mu_2=0$ 时，$\boldsymbol{B}$ 有特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\mu_3=3b$ 时，由 $[3b\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{bmatrix} 2b & -b & -b \\ -b & 2b & -b \\ -b & -b & 2b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$$

得 $\mu_3=3b$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

$\boldsymbol{A}$ 的特征向量和 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量一致(见例 3，例 4)，故

当 $\lambda_1=\lambda_2=1-b$ 时，$\boldsymbol{A}$ 有特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$；

当 $\lambda=1+2b$ 时，$\boldsymbol{A}$ 有特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

【评注】 方法一、方法二是求特征值、特征向量的两个基本思路和方法. 一般数值矩阵(见例 1)用方法一，抽象矩阵(见后面的例题)用方法二，方法三有一定的技巧，是将 $\boldsymbol{A}$ 分解成 $\boldsymbol{A}=f(\boldsymbol{B})$，其中 f 是多项式，在 $\boldsymbol{B}$ 的特征值，特征向量特别好求时用.

(2) **抽象矩阵特征值、特征向量的求法**

【例 3】 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 λ，对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$. 求 $k\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}^2$，$\boldsymbol{A}^k$，$f(\boldsymbol{A})$ 的特征值和特征向量，其中 $f(x)$ 是多项式，$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$.

解 利用定义，由题设条件，$\boldsymbol{A}$ 有特征值 λ，对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 即有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha},(\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}). \tag{1}$$

式 ① 两边乘 k，得

$$k\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=k\lambda\boldsymbol{\alpha}, \tag{2}$$

故由式 ② 知，$k\boldsymbol{A}$ 有特征值 $k\lambda$，特征向量仍是 $\boldsymbol{\alpha}$.

式 ① 两边左乘 $\boldsymbol{A}$，并代入式 ①，得

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda^2\boldsymbol{\alpha}. \tag{3}$$

由式 ③ 知，$\boldsymbol{A}^2$ 有特征值 λ^2，特征向量仍是 $\boldsymbol{\alpha}$.

式 ① 两边连乘 $k-1$ 个 $\boldsymbol{A}$，并逐个代入式 ①，得

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\lambda^2\boldsymbol{A}^{k-2}\boldsymbol{\alpha}=\cdots=\lambda^k\boldsymbol{\alpha}. \tag{4}$$

由式 ④ 知，$\boldsymbol{A}^k$ 有特征值 λ^k，特征向量仍是 $\boldsymbol{\alpha}$.

由式 ①，②，③，④ 得

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}&=(a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+a_2\boldsymbol{A}^2+\cdots+a_n\boldsymbol{A}^n)\boldsymbol{\alpha} \\ &=a_0\boldsymbol{\alpha}+a_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+a_2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\cdots+a_n\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha} \\ &=a_0\boldsymbol{\alpha}+a_1\lambda\boldsymbol{\alpha}+a_2\lambda^2\boldsymbol{\alpha}+\cdots+a_n\lambda^n\boldsymbol{\alpha} \\ &=f(\lambda)\boldsymbol{\alpha}. \end{aligned} \tag{5}$$

由式 ⑤ 知，$f(\boldsymbol{A})$ 有特征值 $f(\lambda)$，特征向量仍是 $\boldsymbol{\alpha}$.

【评注】 1° 已知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ，对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$，求与 $\boldsymbol{A}$ 有关矩阵的特征值，特征向量，同样若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，你会求 $\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值和特征向量吗？请利用定义求之.

2° 本题也可利用特征方程，如已知 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 λ，特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$. 求 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值、特征向量，即已知

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$$

两边左乘 $|\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|$，得

$$|\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}||\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda^2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2|=0$$

知 $\boldsymbol{A}^2$ 有特征值 λ^2，又

$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}$，两边左乘，$\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$，得

微信公众号【顶尖考研】(ID: dkyk66)

$$(\lambda E+A)(\lambda E-A)\alpha=(\lambda^2E-A^2)\alpha=0$$

知 A^2 对应于 λ^2 的特征向量为 α.

3° 已知 A 的特征值、特征向量，则与 A 有关矩阵的特征值、特征向量列表如下表，在其他问题中可直接使用.

矩阵	A	kA	A^k	$f(A)$	A^{-1}	A^*	$A^{-1}+f(A)$
特征值	λ	$k\lambda$	λ^k	$f(\lambda)$	λ^{-1}	$\dfrac{\lvert A\rvert}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda}+f(\lambda)$
对应特征向量	α	α	α	α	α	α	α

【例 4】 设 A 是 n 阶矩阵，且满足 $A^2=A$（此时 A 称为幂等阵），

(1) 求 A 的特征值的取值范围；

(2) 证明 $E+A$ 是可逆矩阵.

解 (1)【方法一】 用定义. 设 A 有特征值 λ，其对应的特征向量为 α，则

$$A\alpha=\lambda\alpha.$$

两边左乘 A，得

$$A^2\alpha=\lambda A\alpha=\lambda^2\alpha.$$

又 $A^2=A$，故

$$A^2\alpha=A\alpha=\lambda\alpha,$$

得

$$\lambda^2\alpha=\lambda\alpha,(\lambda^2-\lambda)\alpha=0,\alpha\neq0,$$

$$\lambda^2-\lambda=\lambda(\lambda-1)=0,$$

得 A 的特征值的取值范围是 1 或 0.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【方法二】 用特征方程.

由题设条件，$A^2=A$，故 $A-A^2=A(E-A)=O$. 两边取行列式，得

$$|A(E-A)|=|A||E-A|=0,\text{即}|A|=0 \quad \text{或} \quad |E-A|=0,$$

故 A 的特征值为 0 或 1.

【方法三】 利用例 3 的结论.

由题设条件 $A^2=A$，故 $A^2-A=O$，设 A 有特征值为 λ，则由例 3 知 A^2-A 有特征值 $\lambda^2-\lambda$，但 $A^2-A=O$ 是零矩阵，其特征值为零，故有

$$\lambda^2-\lambda=0,\quad \lambda=0 \text{ 或 } 1.$$

(2) 由(1)知，满足 $A^2=A$ 的矩阵 A 的特征值的取值范围是 0 或 1，$E+A$ 的特征值的取值范围是 1 或 2，均不为 0，故 $|E+A|\neq0$，得证 $E+A$ 是可逆阵（或假设 $|E+A|=0$，则 -1 是 A 的特征值，这和(1)中结论矛盾，故 $E+A$ 是可逆矩阵）.

【评注】 (1) 满足条件 $A^2=A$ 的矩阵很多，例如 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$，均有 $A^2=A$，而它们的特征值分别是 1,1;1,0;0,0. 由(1)可知，满足条件 $A^2=A$ 的矩阵的特征值的取值范围为 0 或 1. 但不能具体确定.

(2) 类似的，若 $A^2=O$（幂零阵）或 $A^2=E$（幂幺阵），A 的特征值的取值范围是什么？若 $A^2-2A-3E=O$ 呢？

(3) 当 $A^2=A$（或 $A^2=O$，或 $A^2=E$）时，矩阵 $kE+A$ 何时为可逆矩阵？

二、两个矩阵有相同的特征值的证明

【例 5】 证明：(1) A 和 A^{T} 有相同的特征值；(2) 若 $A\sim B$，则 A,B 有相同的特征值.

证明 (1) 因 $|\lambda E-A|=|(\lambda E-A)^{\mathrm{T}}|=|(\lambda E)^{\mathrm{T}}-A^{\mathrm{T}}|=|\lambda E-A^{\mathrm{T}}|$，即 A 和 A^{T} 有相

同的特征方程. 故 A 和 A^{T} 有相同的特征值.

(2) 由 $A \sim B$ 知,存在可逆矩阵 P,使得 $P^{-1}AP = B$,且

$$|\lambda E - B| = |\lambda E - P^{-1}AP| = |\lambda P^{-1}P - P^{-1}AP|$$
$$= |P^{-1}(\lambda E - A)P| = |P^{-1}||\lambda E - A||P| = |\lambda E - A|,$$

故 A,B 有相同的特征值.

【评注】 (1) 证明两个矩阵有相同的特征值,只要证明它们有相同的特征方程即可.

(2)$A \sim B$ 的必要条件是 A,B 有相同的特征值,但 A,B 有相同的特征值,但 A,B 不一定相似,即反之不成立.

例如,$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,$A,B$ 有相同的二重特征值 $\lambda = 0$,但 A,B 不相似,因对任何可逆矩阵 P,均有 $P^{-1}AP = O \neq B$.

【注】 举反例要举有重特征值的例子,若 A,B 有 n 个互不相同的特征值,则 $A \sim B$.

【例 6】 设 A,B 是 n 阶矩阵,

(1)A,B 均是对称阵,证明 AB 和 BA 有相同的特征值;

(2)A 是可逆矩阵(或 B 是可逆矩阵),证明 AB 和 BA 有相同的特征值.

证明 (1)【方法一】 由 $A^{\mathrm{T}} = A, B^{\mathrm{T}} = B$,故 $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = BA$. 故由上题知 AB 和 $(AB)^{\mathrm{T}} = BA$ 有相同的特征值.

【方法二】 因 $A^{\mathrm{T}} = A, B^{\mathrm{T}} = B$,故有

$$|\lambda E - AB| = |(\lambda E - AB)^{\mathrm{T}}| = |\lambda E - (AB)^{\mathrm{T}}|$$
$$= |\lambda E - B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}| = |\lambda E - BA|.$$

从而知,AB 和 BA 的特征方程一样,故 AB 和 BA 有相同的特征值.

(2) 由题设条件,A 可逆,并利用矩阵乘法的结合律,有

$$A^{-1}(AB)A = (A^{-1}A)BA = BA,$$

故 $AB \sim BA$. 由上题,相似矩阵有相同的特征值,得证 AB 和 BA 有相同的特征值.

微信公众号【原点考研】(ID: yuandiankaoyan)

三、关于特征向量及其他给出特征值特征向量的方法

【例 7】 已知 A 是三阶矩阵,非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 有通解 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + 3\beta$,求 A 的特征值和特征向量.

解 因 3β 是 $Ax = \beta$ 的特解,故

$$A(3\beta) = \beta = \frac{1}{3}(3\beta),$$

故 3β 是 A 的对应于 $\lambda = \frac{1}{3}$ 的特征向量.

又 $$A\alpha_1 = 0 = 0\alpha_1,\ A\alpha_2 = 0 = 0\alpha_2,$$

故 α_1,α_2(线性无关)均是 A 的对应于特征值 $\lambda = 0$ 的特征向量.

【例 8】 A 是 n 阶矩阵,A 的每行元素之和为 3,求 A 的一个特征值及其所对应的特征向量.

解 因 $a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in} = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 3 (i = 1,2,\cdots,n)$,故有

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ \vdots \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

故 A 有一个特征值 $\lambda = 3$，对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha} = (1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$.

【评注】 例 7，例 8 要注意已知条件与 A 的特征值、特征向量的联系.

【例 9】 设 n 阶矩阵 A 有特征值 λ_0，对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$.

(1) 证明 $\boldsymbol{\alpha}$ 也是 A^2 的对应于 λ_0^2 的特征向量.

(2) 反之，A^2 有特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$，问 A 是否必有特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$？

(3) 设 A 是 n 阶可逆矩阵，满足 $A^3\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$，$A^5\boldsymbol{\alpha} = \mu\boldsymbol{\alpha}$，证明 $\boldsymbol{\alpha}$ 也是 A 的特征向量.

证明 (1) 由题设 $A\boldsymbol{\alpha} = \lambda_0\boldsymbol{\alpha}$. 两边左乘 A，得 $A^2\boldsymbol{\alpha} = \lambda_0 A\boldsymbol{\alpha} = \lambda_0^2\boldsymbol{\alpha}$，故 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 A^2 的对应于 λ_0^2 的特征向量.

(2) 反之不成立. 例如，$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$A^2$ 有特征值 $\lambda = 0$，对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，但 $\boldsymbol{\xi}_2$ 不是 A 的特征向量，因为对于任何 λ，

$$A\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda\boldsymbol{\alpha}_2.$$

微信公众号【虎哥考研】(ID: djky66)

(3) 若 $A^3\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$，则由(1)知，$A^6\boldsymbol{\alpha} = \lambda^2\boldsymbol{\alpha} = AA^5\boldsymbol{\alpha}$. 代入 $A^5\boldsymbol{\alpha} = \mu\boldsymbol{\alpha}$，得 $A\mu\boldsymbol{\alpha} = \lambda^2\boldsymbol{\alpha}$. 因 A 可逆，A^5 可逆，$\mu \neq 0$，故 $A\boldsymbol{\alpha} = \dfrac{\lambda^2}{\mu}\boldsymbol{\alpha}$. 从而知，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 A 的对应于特征值 $\dfrac{\lambda^2}{\mu}$ 的特征向量.

【例 10】 (1) 设 λ_1，λ_2 是 A 的两个不同的特征值，$\boldsymbol{\alpha}$ 是对应于 λ_1 的特征向量，证明 $\boldsymbol{\alpha}$ 不是 λ_2 的特征向量(即一个特征向量不能属于两个不同的特征值).

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 A 的分别对应于不同特征值 λ_1，λ_2 的特征向量，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$ 不是 A 的特征向量.

解 (1) 用反证法. 由题设知 $A\boldsymbol{\alpha} = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}$. 假设 $\boldsymbol{\alpha}$ 也是 A 的对应于 λ_2 的特征向量，则有 $A\boldsymbol{\alpha} = \lambda_2\boldsymbol{\alpha}$，即得 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha} = \lambda_2\boldsymbol{\alpha}$. 即 $(\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$.

由于 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$，故 $\lambda_1 = \lambda_2$，这和已知 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 矛盾，故一个特征向量不能属于两个不同的特征值.

(2) 用反证法.

假设 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$ 是 A 的特征向量，其对应的特征值是 μ，则有

$$A(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) = \mu(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2),$$

而由题设知

$$A\boldsymbol{\alpha}_1 = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1, \quad A\boldsymbol{\alpha}_2 = \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2,$$

故

$$A(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) = A\boldsymbol{\alpha}_1 + A\boldsymbol{\alpha}_2 = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \mu\boldsymbol{\alpha}_1 + \mu\boldsymbol{\alpha}_2,$$

从而有

$$(\lambda_1 - \mu)\boldsymbol{\alpha}_1 + (\lambda_2 - \mu)\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}.$$

因不同特征值对应的特征向量线性无关，故有 $\lambda_1 = \mu = \lambda_2$，这与 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 矛盾，故不同特征值对应的特征向量之和不再是 A 的特征向量.

四、矩阵是否相似于对角阵

【例 11】 下列三阶矩阵中，能相似于对角阵的矩阵是

(A)$\boldsymbol{A}_{3\times3}$：其中 $a_{ii}=1,i=1,2,3$，且 $a_{13}=1$，其余元素均为零.

(B)$\boldsymbol{B}_{3\times3}$：其中 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，且 $\boldsymbol{B}^3=\boldsymbol{O}$.

(C)$\boldsymbol{C}_{3\times3}$：$r(\boldsymbol{C})=1$，且 $\sum\limits_{i=1}^{3}c_{ii}=0$.

(D)$\boldsymbol{D}_{3\times3}$：$r(\boldsymbol{D})=1$，且 $\sum\limits_{i=1}^{3}d_{ii}=1$.

解 应选(D).

对(D)，因 $r(\boldsymbol{D})=1$，$\boldsymbol{Dx}=\boldsymbol{0}$ 有两个线性无关解，是 $\boldsymbol{D}$ 的对应于 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 的两个线性无关的特征向量，记 ξ_1,ξ_2. 又由 $\sum\limits_{i=1}^{3}\lambda_i=\sum\limits_{i=1}^{3}d_{ii}$ 知 $\boldsymbol{D}$ 的另一个特征值为 $\lambda_3=1$，对应的特征向量为 ξ_3. 从而知 $\boldsymbol{D}$ 有三个线性无关的特征向量，故 $\boldsymbol{D}\sim\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}0&&\\&0&\\&&1\end{bmatrix}$，故应选(D).

或由排除法，排除(A)(B)(D).

(A)$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$，$r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=1$.

故 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有两个线性无关解，即 $\boldsymbol{A}$ 的三重特征值 1 只有两个线性无关特征向量，故 $\boldsymbol{A}\not\sim\boldsymbol{\Lambda}$.

(B) 设 $\boldsymbol{B}$ 有特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，则 $\boldsymbol{B}^3$ 有特征值 $\lambda_1^3,\lambda_2^3,\lambda_3^3$. $\boldsymbol{B}^3=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{B}^3$ 是零矩阵，其特征值全部为零，$\lambda_1^3=\lambda_2^3=\lambda_3^3=0$，$\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$，但 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，$r(\boldsymbol{B})\geqslant1$，$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 最多有两个线性无关特征向量，故 $\boldsymbol{B}\not\sim\boldsymbol{\Lambda}$.

(C)$r(\boldsymbol{C})=1$，$\boldsymbol{Cx}=\boldsymbol{0}$ 只有两个线性无关解，即对应于 $\lambda=0$，只有两个线性无关特征向量，又 $\sum\limits_{i=1}^{3}\lambda_i=\sum\limits_{i=1}^{3}c_{ii}=0$，故 $\lambda_3=0$. 即 0 是 $\boldsymbol{C}$ 的三重特征值，但只有两个线性无关特征向量，故 $\boldsymbol{C}\not\sim\boldsymbol{\Lambda}$，由排除法，应选(D).

【评注】 矩阵特征值的重数 > 对应线性无关特征向量的个数，则矩阵不能相似于对角阵.

【例 12】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{bmatrix}$，$f(x)=x^3-2x+5$，$\boldsymbol{B}=f(\boldsymbol{A})$. 问 $\boldsymbol{B}$ 能否相似于对角阵？说明理由. 若能相似于对角阵，求可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

解 $\boldsymbol{A}$ 是实对称阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，故

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{E}=\boldsymbol{B}$$

$\boldsymbol{B}$ 仍是实对称阵，故 $\boldsymbol{B}=f(\boldsymbol{A})$ 必相似于对角阵.

求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值、特征向量，

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&1\\1&\lambda-1&1\\1&1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)^2,$$

微信公众号【顶尖考研】(ID：djk66)

故 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=2$.

当 $\lambda_1=-1$ 时，由 $(-E-A)x=0$，即

$$\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=0,$$

得 $\lambda_1=-1$ 对应的特征向量为 $\alpha=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时，由 $(2E-A)x=0$，即

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=0,$$

得 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 对应的线性无关特征向量为

$$\alpha_2=(1,-1,0)^{\mathrm{T}},\quad \alpha_3=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}.$$

因 $A\alpha=\lambda\alpha$，则 $B\alpha=f(A)\alpha=f(\lambda)\alpha$.

故 $B=f(A)=A^3-2A+5E$ 的特征值为 $f(\lambda_i)$，其中

$$\mu_1=f(\lambda_1)=f(-1)=6,$$
$$\mu_2=\mu_3=f(\lambda_3)=f(2)=9,$$

而对应的特征向量仍是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，故知存在可逆阵 P，

取 $P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$，有

$$P^{-1}BP=\Lambda=\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{bmatrix}.$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

【评注】　判别 A 是否相似于对角阵的步骤如下：

(1) 看 A 是否是实对称阵，实对称阵必相似于对角阵.

(2) A 不是实对称阵时，看 A 是否有 n 个互不相同的特征值，若有 n 个互不相同的特征值，则 A 相似于对角阵.

(3) 若 A 有 $r(r\geqslant 2)$ 重根的特征值，对应有 r 个线性无关特征向量，则 A 相似于对角阵，否则 A 不能相似于对角阵.

(4) 本题由 $A\sim\Lambda_1$ 计算得 $B=f(A)\sim f(\Lambda_1)=\begin{bmatrix}f(\lambda_1) & 0 & 0\\ 0 & f(\lambda_2) & 0\\ 0 & 0 & f(\lambda_3)\end{bmatrix}=\Lambda_2$.

【例 13】　设 A 是 3 阶方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的三维列向量，满足 $A\alpha_1=\alpha_2-\alpha_3$，$A\alpha_2=\alpha_1+\alpha_3$，$A\alpha_3=-\alpha_1+\alpha_2$. 问 A 是否相似于对角阵. 若相似，求出相似的对角阵，若不相似，说明理由.

解　由题设

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_2-\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3,-\alpha_1+\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\overset{\text{记}}{=}P$，即有 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\overset{\text{记}}{=\!=}B$

对 $\boldsymbol{B}$，因

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 1\\ -1 & \lambda & -1\\ 1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 1\\ \lambda-2 & \lambda & -1\\ \lambda & -1 & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 1\\ \lambda-2 & \lambda & -1\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-2)=(\lambda-1)^2(\lambda+2).$$

故 $\boldsymbol{B}$ 有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-2$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$$

得 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3=-2$ 时，

$$(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 1\\ -1 & -2 & -1\\ 1 & -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$$

得 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

故 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3]$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$，

得 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}\sim\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -2\end{bmatrix}$，故 $\boldsymbol{A}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$.

微信公众号【质尖考研】
(ID: dikv66)

五、利用特征值、特征向量及相似矩阵确定参数

【例 14】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$，已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,k,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征向量，求 k 及 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 所对应的特征值.

解 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征向量，也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量. 设 $\boldsymbol{A}$ 的其对应的特征值为 μ，则

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ k\\ 1\end{bmatrix}=\mu\begin{bmatrix}1\\ k\\ 1\end{bmatrix},$$

对应分量相等，得

$$\begin{cases}3+k=\mu, & ①\\ 2+2k=k\mu, & ②\\ 3+k=\mu, & ③\end{cases}$$

① 式代入 ② 式得 $2+2k=k(3+k)$，$k^2+k-2=0$，得 $k=1$ 或 $k=-2$.

当 $k=1$ 时，$\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\mu=4$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 所对应的特征值为 $\lambda=\dfrac{1}{\mu}=\dfrac{1}{4}$.

当 $k=-2$ 时，$\boldsymbol{\alpha}=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$，$\mu=1$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 所对应的特征值为 $\lambda=\dfrac{1}{\mu}=1$.

【评注】 已知 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征向量，因 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^{-1}$ 有相同的特征向量，故不必求出 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

六、由特征值、特征向量反求 A

【例 15】　设 A 是三阶矩阵，三个特征值分别是 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$，其对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，求 A.

解　由题设条件知，$\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则存在可逆阵 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{bmatrix},$$

从而有
$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0&0\\1&2&0\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

【例 16】　设 A 是三阶实对称矩阵，$\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$ 是 A 的特征值，对应于 $\lambda_1=-1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，求 A.

解题思路　A 是实对称阵，A 必相似于对角阵，对应 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 二重特征值，必有两个线性无关特征向量，且必与 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 正交，反之在三维空间中任意与 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 正交的非零向量均是 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量，据此求出 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，从而求得可逆阵 $\boldsymbol{P}$（或正交阵 $\boldsymbol{Q}$），最后求出矩阵 A.

解　【方法一】　利用相似对角阵反求 A.

设对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 正交，故 $\boldsymbol{\alpha}$ 应满足

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=x_2+x_3=0,$$

解得　$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$，

得可逆阵 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

其中
$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&0&-1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&1&1\\2&0&0\\0&1&-1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&1&1\\2&0&0\\0&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{bmatrix}.$$

【方法二】　利用正交相似于对角阵，反求 A.

由方法一解得 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$，因 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 已经正交，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 必正交，只需将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化，得 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\circ}=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\circ}=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\circ}=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}})^{\mathrm{T}}$，即可合并成正交阵

$$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\alpha}_1^{\circ},\boldsymbol{\alpha}_2^{\circ},\boldsymbol{\alpha}_3^{\circ}]=\begin{bmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&\sqrt{2}&0\\1&0&1\\1&0&-1\end{bmatrix},$$

且有 $Q^{-1}AQ = Q^{\mathrm{T}}AQ = \Lambda$，

$$A = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & \sqrt{2} & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ \sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}.$$

【评注】 (1) 实对称阵，不同特征值对应的特征向量相互正交，从而反求 A 时，不必给出全部特征向量，这里实对称的条件是重要的.

(2) 方法二中用正交相似于 A 来反求 A，由于正交阵 Q 满足 $Q^{\mathrm{T}} = Q^{-1}$，用转置来实现求逆，减少了求逆计算工作量是方便的.

七、矩阵相似及相似标准形

1. 相似矩阵

【例 17】 A, B 均是 n 阶矩阵，有 $|A| \neq 0$，证明：AB 相似于 BA.

证明 因 $|A| \neq 0$，故 A 可逆，取 $P = A$，则

$$A^{-1}(AB)A = (A^{-1}A)BA = BA,$$

故

$$AB \sim BA.$$

【评注】 要证 $AB \sim BA$，即证存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}(AB)P = BA$，这个可逆矩阵哪里找？要从题设的已知条件中找，即取 $P = A$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

2. 矩阵的相似标准形

【例 18】 设矩阵 $A = \begin{bmatrix}3 & 2 & -2\\ -k & -1 & k\\ 4 & 2 & -3\end{bmatrix}$，问 k 为何值时，存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵，并求出 P 和相应的对角阵.

解 A 能相似于对角阵 $\Leftrightarrow A$ 应有三个线性无关的特征向量. 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix}\lambda-3 & -2 & 2\\ k & \lambda+1 & -k\\ -4 & -2 & \lambda+3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 2\\ 0 & \lambda+1 & -k\\ \lambda-1 & -2 & \lambda+3\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 2\\ 0 & \lambda+1 & -k\\ 0 & 0 & \lambda+1\end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+1)^2$$

得，A 有特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$.

因 $A \sim \Lambda \Leftrightarrow$ 故对应特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ 应有两个线性无关的特征向量，

$\Leftrightarrow r(-E - A) = 1$.

由

$$r(-E - A) = r\left(\begin{bmatrix}-4 & -2 & 2\\ k & 0 & -k\\ -4 & -2 & 2\end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix}-4 & -2 & 2\\ k & 0 & -k\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right) = 1$$

知，$k = 0$.

当 $k = 0$，且 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ 时，有 $(-E - A)x = 0$，即

$$\begin{bmatrix}-4 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ -4 & -2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

得线性无关特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda=1$ 时，有 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即 $\begin{bmatrix}-2 & -2 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$

得 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda=1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$（只要解前两个方程即可，为什么？）

令 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$，有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}-1 & & \\ & -1 & \\ & & 1\end{bmatrix}.$$

【例 19】　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & a\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & b\end{bmatrix}$，且已知 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，求可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

解题思路　先利用 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 的必要条件，确定 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 中的参数 a,b，再通过求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值、特征向量求出可逆阵 $\boldsymbol{P}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

解　因 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，故有 $\sum\limits_{i=1}^{3}a_{ii}=\sum\limits_{i=1}^{3}b_{ii}$，及 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$，即有

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{3}a_{ii}=1+4+a=2+2+b=\sum\limits_{i=1}^{3}b_{ii}\\ |\boldsymbol{A}|=6a-6=4b=|\boldsymbol{B}|\end{cases}$$

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

解得 $a=5,b=6$，且

$$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix},$$

知 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=6$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & -2 & 2\\ 3 & 3 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$

解得线性无关特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3=6$ 时，由 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}5 & 1 & -1\\ -2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$，

解得对应线性无关特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-2,3)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}$ 即为所求，且有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}.$$

【评注】 (1) 若对 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 的必要条件不熟悉，亦可用 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\Lambda}$，故 $\lambda=2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值，且对应有两个线性无关特征向量，故 $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$.

即

$$r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r\left(\begin{bmatrix}1&1&-1\\-2&-2&2\\3&3&2-a\end{bmatrix}\right)=1,\text{得 } 2-a=-3,a=5.$$

或 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&-1\\-2&\lambda-4&2\\3&3&\lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-(a+3)\lambda+3(a-1))$

由于 $\lambda=2$ 是二重特征值，故 2 是方程 $\lambda^2-(a+3)\lambda+3(a-1)=0$ 的根，可求得 $a=5$.

(2) 若已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{bmatrix}\sim\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&-5&5\\0&5&-3\\0&-1&b\end{bmatrix}$.

如何求可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$?

(提示：先定出参数 a,b，求出 $\boldsymbol{B}$ 的（也是 $\boldsymbol{A}$ 的）特征值. 并将 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 同时相似于同一个对角阵，即求 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2$，使 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{bmatrix}$，则有 $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1})=\boldsymbol{B}$. 其中 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}$.)

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【例 20】 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&1&-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^*)^2$.

(1) 求可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}_1$；

(2) 求可逆阵 $\boldsymbol{W}$，使得 $\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{W}=\boldsymbol{\Lambda}_2$.

解 (1) $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-2\\-5&\lambda+3&-3\\1&-1&\lambda+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-2\\-5&\lambda+3&-3\\\lambda-1&0&\lambda-1\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}\lambda&1&-2\\-2&\lambda+3&-3\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2+3\lambda+2)$$

$$=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+2)$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2$.

$\lambda_1=1$，由 $(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-1&1&-2\\-5&4&-3\\1&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{\alpha}_1=(5,7,1)^{\mathrm{T}}$.

$\lambda_2=-1$，由 $(\lambda_2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-3&1&-2\\-5&2&-3\\1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

$\lambda_3=-2$，由 $(\lambda_3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-4&1&-2\\-5&1&-3\\1&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,-1)^{\mathrm{T}}$.

故存在可逆阵 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{bmatrix}5&1&1\\7&1&2\\1&-1&-1\end{bmatrix}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}_1,\text{其中 }\boldsymbol{\Lambda}_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$$

(2) $\boldsymbol{A}$ 有特征值　$1,-1,-2$，

$\boldsymbol{A}^*$ 有特征值　$2,-2,-1$.

$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^*$ 有特征值　$3,-1,0$.

$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^*)^2$ 有特征值　$9,1,0$.

又 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^*)^2$ 有相同的特征向量，故 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^*)^2$ 的对应于特征值 $\lambda_1=9,\lambda_2=1,\lambda_3=0$ 的特征向量仍是 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$，取 $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3]=\begin{bmatrix}5&1&1\\7&1&2\\1&-1&-1\end{bmatrix}$，使得

$$\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{W}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^*)^2\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}9&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}.$$

3. 实对称阵的正交相似对角阵

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 21】　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$，已知线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有解，且不唯一.

试求：(1) a 的值；

(2) 正交阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角阵.

解　(1) 因 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有解且不唯一，即方程组有无穷多解，故知 $r(\boldsymbol{A})=r[\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{\beta}]<3$. 对增广矩阵 $[\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{\beta}]$ 作初等行变换

$$[\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{\beta}]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&a&1\\1&a&1&1\\a&1&1&-2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&a&1\\0&a-1&1-a&0\\0&1-a&1-a^2&-a-2\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&a&1\\0&a-1&1-a&0\\0&0&(a-1)(a+2)&a+2\end{array}\right],$$

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解，故 $a=-2$.

(2) 当 $a=-2$ 时，得 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{bmatrix}$，由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&2\\-1&\lambda+2&-1\\2&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+3)(\lambda-3),$$

故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=3,\lambda_3=-3$.

当 $\lambda_1=0$ 时，$(\lambda_1 E-A)x=0$，由

$$\begin{bmatrix}-1&-1&2\\-1&2&-1\\2&-1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{*}\begin{bmatrix}1&1&-2\\0&3&-3\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得 $\lambda_1=0$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_2=3$ 时，$(\lambda_2 E-A)x=0$，由 $\begin{bmatrix}2&-1&2\\-1&5&-1\\2&-1&2\end{bmatrix}\xrightarrow{*}\begin{bmatrix}1&-5&1\\0&9&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，

当 $\lambda_2=3$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3=-3$ 时，$(\lambda_3 E-A)x=0$，由

$$\begin{bmatrix}-4&-1&2\\-1&-1&-1\\2&-1&-4\end{bmatrix}\xrightarrow{*}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得 $\lambda_3=-3$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$.

A 是实对称阵，三个特征值互异，其对应的特征向量已经正交(请验证)，故只需进行单位化.

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{\circ}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\circ}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\circ}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)^{\mathrm{T}}.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

令 $Q=[\boldsymbol{\alpha}_1^{\circ},\boldsymbol{\alpha}_2^{\circ},\boldsymbol{\alpha}_3^{\circ}]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{-2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$，得

$$Q^{\mathrm{T}}AQ=Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}0&&\\&3&\\&&-3\end{bmatrix}.$$

【评注】 显然 $|\lambda_i E-A|=0,i=1,2,3$. 故 $(\lambda_i E-A)x=0$ 中至少有一个方程是多余方程. 在 $\xrightarrow{*}$ 可去除一行，对不成比例的另两行作初等变换即可.

【例 22】 设

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&4&6&8\\3&6&9&12\\4&8&12&16\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\4&4&4&4\\9&9&9&9\\16&16&16&16\end{bmatrix}$$

证明 A 相似于 B，即 $A\sim B$.

证明 A 的各行元素对应成比例，$r(A)=1$，$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ 是 A 的三重特征值，另一个非零特征值为 $\lambda_4=\sum\limits_{i=1}^{4}a_{ii}=1+4+9+16=30$.

B 的各行元素也对应成比例，$r(B)=1$，$\mu_1=\mu_2=\mu_3=0$ 是 B 的三重特征值，另一个非

零特征值为 $\mu_4=\sum\limits_{i=1}^{4}b_{ii}=30$.

$\boldsymbol{A}$ 是 4 阶实对称阵，必相似于由其特征值成的对角阵，即

$$\boldsymbol{A}\sim\begin{bmatrix}0&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&30\end{bmatrix}$$

因 $r(\boldsymbol{B})=1$，对应于 $\mu_1=\mu_2=\mu_3=0$，$(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有 3 个线性无关特征向量，故

$$\boldsymbol{B}\sim\begin{bmatrix}0&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&30\end{bmatrix}$$

由相似矩阵的传递性，得证 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

八、相似对角阵的应用

【例 23】　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，有特征值 $\lambda=1,2,\cdots,n$，求 $|3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|$.

解　n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值 $\lambda=1,2,\cdots,n$，故存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$，其中，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1&&&\\&2&&\\&&\ddots&\\&&&n\end{bmatrix}$. 代入行列式，得

$$|3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=|3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}|=|3\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}|$$

$$=|\boldsymbol{P}||3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\Lambda}||\boldsymbol{P}^{-1}|=|3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\Lambda}|=\begin{vmatrix}4&&&\\&5&&\\&&\ddots&\\&&&3+n\end{vmatrix}$$

$$=\frac{(3+n)!}{3!}.$$

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

【评注】　上述解法是利用相似对角阵来计算行列式，但 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda=1,2,\cdots,n$，故 $3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\mu=3+1,3+2,\cdots,3+n$，从而有 $|3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=(3+n)!/3!$. 这种方法更简便些.

【例 24】　设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，有特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2$. 求 $|3\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{A}^{-1}|$.

解　$\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 有特征值 $\mu_1=1,\mu_2=\mu_3=\frac{1}{2}$，

$3\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{A}^{-1}$ 有特征值 $l_1=3+2=5,l_2=l_3=3+2\cdot\frac{1}{2}=4$，

故 $|3\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{A}^{-1}|=l_1\cdot l_2\cdot l_3=5\cdot4\cdot4=80$.

【评注】　以下计算是否有问题？$\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2$，故存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix},\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1&&\\&\frac{1}{2}&\\&&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1},$$

故 $|3E+2A^{-1}|=|3PP^{-1}+2PA^{-1}P^{-1}|=|P||3E+2\Lambda^{-1}||P^{-1}|$,

$$=|3E+2\Lambda^{-1}|=\begin{vmatrix}3+2 & 0 & 0\\ 0 & 3+1 & 0\\ 0 & 0 & 3+1\end{vmatrix}=80.$$

上述计算结果与答案的结果一致,但这个计算过程有问题,问题在哪里?A 有特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2$,是否必有可逆阵 P,(A 并没设定是实对称阵)使得

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{bmatrix}?$$

若 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$,显然 A 的特征值与题设一致,但 $A\sim\Lambda$ 吗?

【例 25】 设 $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$,求 A^n.

解 A 是分块对角阵,记 $A=\begin{bmatrix}B & O\\ O & C\end{bmatrix}$,其中,$B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$,$C=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$,则

$$A^n=\begin{bmatrix}B & O\\ O & C\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}B^n & O\\ O & C^n\end{bmatrix}.$$

对于 $B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$,$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)$.

当 $\lambda_1=-1$ 时,$(\lambda_1E-B)x=0$,得 $\alpha_1=(1,1)^{\mathrm{T}}$;

当 $\lambda_2=2$ 时,$(\lambda_2E-B)x=0$,得 $\alpha_2=(-2,1)^{\mathrm{T}}$. 于是有

$$P^{-1}BP=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix},\text{其中},P=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix},P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix},$$

$$B^n=\left[P\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}P^{-1}\right]^n$$

$$=P\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}^nP^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-1)^n & 0\\ 0 & 2^n\end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}(-1)^n+2^{n+1} & (-1)^n2-2^{n+1}\\ (-1)^n-2^n & (-1)^n2+2^n\end{bmatrix}.$$

对于 $C=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$,因 $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}^n=O,n\geqslant 2$,故

$$C^n=\left(2E+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)^n$$

$$=2^nE+n2^{n-1}E\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^n & n2^{n-1}\\ 0 & 2^n\end{bmatrix}.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

因此，$\boldsymbol{A}^n=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^n & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^n\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{(-1)^n}{3}+\dfrac{2^{n+1}}{3} & \dfrac{2}{3}(-1)^n-\dfrac{2^{n+1}}{3} & 0 & 0\\ \dfrac{(-1)^n}{3}-\dfrac{2^n}{3} & \dfrac{2}{3}(-1)^n+\dfrac{2^n}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2^n & n2^{n-1}\\ 0 & 0 & 0 & 2^n\end{bmatrix}.$$

【例 26】　设二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_1=-2,\lambda_2=1$，对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(3,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(-7,7)^{\mathrm{T}}$. 计算(1)$\boldsymbol{A}^{100}\boldsymbol{\alpha}_1$；(2)$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}$.

解　(1) 因 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1$，故 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{A}\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda_1^2\boldsymbol{\alpha}_1$，

$$\boldsymbol{A}^{100}\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda_1^{100}\boldsymbol{\alpha}_1=(-2)^{100}\boldsymbol{\alpha}_1=2^{100}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^{100}\\2^{101}\end{bmatrix}.$$

(2) 将 $\boldsymbol{\beta}$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，设

$$\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2,$$

即

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}x_1+\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}x_2=\begin{bmatrix}-7\\7\end{bmatrix},$$

由

$$\left[\begin{array}{cc:c}1 & 3 & -7\\ 2 & -1 & 7\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc:c}1 & 3 & -7\\ 0 & -7 & 21\end{array}\right],$$

解得 $x_1=2,x_2=-3$.

$\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2$.

$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A}^n(2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2)=2\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_2=2\lambda_1^n\boldsymbol{\alpha}_1-3\lambda_2^n\boldsymbol{\alpha}_2$

$$=2(-2)^n\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}-3(1)^n\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(-2)^n-3^2\\4(-2)^n+3\end{bmatrix}.$$

【评注】　$\boldsymbol{\beta}$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，为了利用 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}=\lambda^n\boldsymbol{\alpha}$. 计算 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}$ 时，将 $\boldsymbol{\beta}$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 表出，转而计算 $\boldsymbol{A}^n(x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2)$ 更方便. 若直接由 $\lambda,\boldsymbol{\alpha}$ 反求出 $\boldsymbol{A}$. 再计算 $\boldsymbol{A}^n$ 及 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}$ 显然要麻烦得多.

【例 27】　(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 5 阶实对称的幂等阵(满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为幂等阵)，$r(\boldsymbol{A})=3$，求 $|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|$.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 5 阶幂等阵，$r(\boldsymbol{A})=3$，求 $|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|$.

解　(1) 因 $\boldsymbol{A}$ 是幂等阵，由例 4 知，$\boldsymbol{A}$ 的特征值取值范围是 0 或 1，又 $\boldsymbol{A}$ 是实对称阵，$\boldsymbol{A}$ 必相似于对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，且 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\Lambda})=3$，故知 $\lambda=1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 3 重特征值(从而 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的 2 重特征值)，且存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_3 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}_2\end{bmatrix},$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

从而有 $|A-2E|=\left|P\begin{bmatrix}E_3 & O\\ O & O_2\end{bmatrix}P^{-1}-2E\right|$

$=|P|\left|\begin{bmatrix}E_3 & O\\ O & O_2\end{bmatrix}-2PP^{-1}\right||P^{-1}|=\begin{vmatrix}-E_3 & O\\ O & -2E_2\end{vmatrix}$

$=(-1)^5 2^2=-4.$

(2) 同(1). A 的特征值的取值范围是 0 或 1，又由 $A^2=A$ 得

$$(E-A)A=O, \qquad ①$$

$r(A)=3$，知 A 中有三个列向量线性无关. 知方程组 $(E-A)x=0$ 至少有 3 个线性无关的解向量，即 A 有特征值 $\lambda_1=1$，且至少是 3 重特征值，又 $r(A)=3$，故

$$Ax=0 \qquad ②$$

有 2 个线性无关解向量，即 A 有特征值 $\lambda_2=0$ 且至少是 2 重根. 由 ①② 知，$\lambda_1=1$ 是 3 重根，$\lambda_2=0$ 是 2 重根，且 A 有 5 个线性无关的特征向量，故知存在可逆阵 P，使得

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}E_3 & O\\ O & O_2\end{bmatrix}.$$

同(1)，得 $|A-2E|=(-1)^5 2^2=-4.$

【评注】 1°(1)(2) 两个小题的区别在于(1) 中 A 是实对称阵，其必相似于对角阵，且 $r(A)=r(A)=r$，从而知 $A\sim\begin{bmatrix}E_r & O\\ O & O\end{bmatrix}$. 但(2) 中是一般的 n 阶矩阵，未必相似于对角阵，只有确定它有 n 个线性无关的特征向量时，才能确定 $A\sim\begin{bmatrix}E_r & O\\ O & O\end{bmatrix}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

2°(1)(2) 小题也可由 A 的特征值为 $\lambda=1$(3 重)，$\lambda=0$(5−3=2 重) 知，$A-2E$ 的特征值为 $\mu_1=-1$(3 重)，$\mu_2=-2$(2 重)，故

$$|A-2E|=(-1)^5 2^{5-3}=-4.$$

小结

本章只讨论方阵，方阵的特征值、特征向量问题是研究生数学入学考试命题中线性代数的重点章节，应引起考生的特别关注.

首先要会求特征值、特征向量，对具体的数值矩阵，一般先由特征方程 $|\lambda E-A|=0$ 求出特征值 λ. ($|\lambda E-A|=0$ 是一元 n 次方程，应有 n 个根，含重根，复根. 实对称阵只有实根，一般矩阵可能有复根，复根尚未考过，一般不会考) 再由齐次线性方程组 $(\lambda E-A)x=0$ 求解 λ 对应的特征向量，因 $|\lambda E-A|=0$，故 $(\lambda E-A)x=0$ 必有非零解，该非零解即是特征向量，其基础解系即是 A 的对应于 λ 的线性无关特征向量，除零向量之外的通解即是 λ 对应的全体特征向量. 对抽象矩阵要会利用定义 $A\alpha=\lambda\alpha$，$\alpha\neq 0$ 求解，若 A 有特征值 λ，则 kA，A^k，$f(A)$ ($f(x)$ 是多项式) 的特征值可直接得到. 若 A 还可逆，则 $f(A^{-1})$，$f(A^*)$ ($f(x)$ 是多项式) 的特征值应可直接得到，若 A 满足某个条件，应联想到 λ 满足的条件，可求得 A 的 λ 的取值范围，有关特征值、特征向量的性质应会灵活应用.

矩阵相似对角化是重点，要掌握能对角化的充要条件. 会判别 A 能否相似于对角阵，注意一般矩阵和实对称矩阵在对角化方面的联系和区别. 若 A 可对角化，应会求可逆阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$. 若 $A=A^{\mathrm{T}}$，应会求正交阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ=Q^{\mathrm{T}}AQ=\Lambda$，也应会用特征值、特征向量、相似、可对角化等确定参数. 乃至反求 A. 会利用相似对角阵求 A^n 等应用问题.

第六章　二次型

了解　二次型秩的概念，合同变换与合同矩阵的概念，二次型的标准形、规范形等概念，惯性定理.

理解　正定二次型、正定矩阵的概念.

掌握　二次型及其矩阵表示，正定二次型、正定矩阵的判别方法.

会用　正交变换和配方法化二次型为标准形.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

§1　二次型的定义、矩阵表示，合同矩阵

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

一、二次型概念

定义 6.1(二次型)　n 个变量的一个二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = {} & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \cdots\cdots \\ & + a_{mn}x_n^2 \end{aligned} \qquad ①$$

称为 n 个变量的二次型，系数均为实数时，称为 n 元实二次型.

例如：$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + x_3^2$ 是一个三元二次齐次多项式，称为三元二次型.

二、二次型的矩阵表示

为了用矩阵研究二次型，首先将二次型表示成矩阵形式，因 $x_ix_j = x_jx_i$，具有对称性，若令 $a_{ij} = a_{ji}, i < j$，则 $2a_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i$，则二次型 ① 可以写成矩阵形式：

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \\ &= [x_1,x_2,\cdots,x_n]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}. \end{aligned} \qquad ②$$

其中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，称为二次型 f 的对应矩阵.

例如：$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2^2+6x_2x_3+x_3^2$

取 $a_{11}=1,a_{22}=2,a_{33}=1,a_{12}=a_{21}=1,a_{13}=a_{31}=2,a_{23}=a_{32}=3$，则

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&3&1\end{bmatrix},$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$$=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.$$

其中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$.

【注】 (1) 当 $\boldsymbol{A}$ 是对称阵时，二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 一一对应. 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶对称阵，$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},g=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 是两个二次型，

若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\Leftrightarrow f=g$；

若 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}\Leftrightarrow f$ 合同于 g；

若 $r(\boldsymbol{A})=r\Leftrightarrow r(f)=r$；

若 $\boldsymbol{A}$ 正定 $\Leftrightarrow f$ 正定.

故在研究二次型和研究其对应的对称矩阵之间是可以相互转化的.

(2) 二次型的对应矩阵必须是对称阵，只有对应矩阵是对称阵时，二次型的对应矩阵才是唯一确定的. 若不要求 $\boldsymbol{A}$ 是对称阵，那么同一个二次型将有无穷多种矩阵的表示方法，例如：

$$f(x_1,x_2)=x_1^2-2x_1x_2+3x_2^2=[x_1,x_2]\begin{bmatrix}1&-1\\-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\quad\text{(唯一正确表示法)}$$

$$\text{(以下均不正确)}=[x_1,x_2]\begin{bmatrix}1&-2\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=[x_1,x_2]\begin{bmatrix}1&1\\-3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\cdots$$

$$=[x_1,x_2]\begin{bmatrix}1&n-2\\-n&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\cdots.$$

§2 化二次型为标准形、规范形 合同二次型

一、二次型的标准形，规范形

定义 6.2 若二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 只有平方项，没有混合项(即混合项的系数全为零)，即

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_px_p^2-d_{p+1}x_{p+1}^2-\cdots-d_{p+q}x_{p+q}^2 \quad ③$$

其中 $d_i>0,i=1,2,\cdots,p+q,r=p+q\leqslant n$. 则称二次型为标准形(又称平方和).

在二次型的标准形中，若平方项的系数 d_i 只是 $1,-1,0$，即

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_{p+q}^2 \quad ④$$

则称为二次型的规范形.

(④式中1的个数是 p 个，-1 的个数是 q 个，0 的个数是 $n-(p+q)=n-r$ 个).

二、化二次型为标准形，规范形

定理 6.1　对任意一个 n 元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，必存在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，其中 $\boldsymbol{Q}$ 是正交阵，化二次型为标准形. 即

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\xrightarrow{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值，λ_i 为 r 重特征值，则计为 r 个特征值(详见第五章).

【注】　正交变换只能化二次型为标准形，一般不能化规范形.(除非特征值全部在{1，−1，0}的范围之内).

用矩阵的语言表达：对任意一个 n 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$，必存在正交阵 $\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{bmatrix}$，$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，即 $\boldsymbol{A}$ 既相似又合同于对角阵.

定理 6.2　任一个 n 元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，都可以通过(配方法)可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，其中 $\boldsymbol{C}$ 是可逆阵，化成标准形. 即

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\xrightarrow{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2.$$

【注】　当 d_i 只取值为 1，−1，0 时，称为规范形.

用矩阵的语言表达：对任意一个 n 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$，一定存在可逆阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Lambda}$. 其中

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}d_1&0&\cdots&0\\0&d_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&d_n\end{bmatrix}$$

即实对称阵必合同于对角阵(还可和对角元素为 1，−1，0 的对角阵合同).

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

三、合同矩阵，合同二次型

定义 6.3(合同)　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶方阵，若存在可逆阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 合同于 $\boldsymbol{B}$，记成 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$.

定理 6.3(惯性定理)　对某个二次型，作可逆线性变换化成标准形(或规范形). 所作的可逆线性变换不唯一，标准形也不唯一，但其标准形中正平方项的项数 p，负平方项的项数 q 都是由所给二次型唯一确定的.

正平方项的项数 p 称为正惯性指数，负平方项的项数 q 称为负惯性指数，$p+q=r$ 是二次型对应矩阵的秩，$p-q$ 称为符号差.

定理 6.4　实对称阵 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 有相同的正、负惯性指数，且 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}\Rightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$.

§3 正定二次型、正定矩阵

定义 6.4(正定) 若对于任意的非零向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,恒有

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0,$$

则称二次型 f 为正定二次型,对应矩阵为正定矩阵.

例如:$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$,其中 $d_i>0,i=1,2,\cdots,n$. 因其对任意的非零向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$,均有

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2>0,$$

故 f 是正定二次型,其对应矩阵(对角元素都大于零的对角阵)是正定矩阵. 显然当 $d_i=1$, $i=1,2,\cdots,n$ 时,即

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$$

(规范形中系数都是 1,没有 0 和 -1)其对应矩阵是单位阵 $\boldsymbol{E}$,也是正定二次型.

反之,只有平方项的二次型正定,则其系数 $d_i>0,i=1,2,\cdots,n$(请用反证法证之),故

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2\ \text{正定}\Leftrightarrow d_i>0,i=1,2,\cdots,n.$$

即正惯性指数 $p=r=n$.

定理 6.5 可逆线性变换不改变二次型的正定性

由定理可知,对一般的二次型(或对称阵)应设法作可逆线性变换化成标准形(或规范形),看 d_i 是否均大于零来判别其正定性.

定理 6.6 f 正定的充要条件

$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数 $p=r=n$(r 是 $\boldsymbol{A}$ 的秩,n 是未知量个数)$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{E}$,即存在可逆阵 $\boldsymbol{C}$,使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}$,其中 $\boldsymbol{D}$ 是可逆阵 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的全部特征值 $\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,n,\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的全部顺序主子式大于零,即

若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$ 正定 $\Leftrightarrow a_{11}>0,\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{vmatrix}>0,\cdots,|\boldsymbol{A}|>0.$

定理 6.7 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定的必要条件

若二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定,则

(1)$\boldsymbol{A}$ 的主对角元素 $a_{ii}>0$.

(2)$\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|>0$.

一、二次型的矩阵表示

【例 1】 二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+4x_2x_3$$

的对应矩阵是_____.

解【方法一】　利用展开式中系数与对应矩阵的元素之间的对应关系

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+4x_2x_3$ 是三个变量的二次型，故其对应的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是三阶对称阵，平方项的系数是 $\boldsymbol{A}$ 的对角元素.

$$a_{11}=1,a_{22}=2,a_{33}=3$$

混合项 x_ix_j 的系数的一半是 a_{ij}，一半是 a_{ji}，故

$$a_{12}=a_{21}=-1,a_{13}=a_{31}=0,a_{23}=a_{32}=2.$$

从而知二次型 f 的对应矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&2\\0&2&3\end{bmatrix}.$$

【方法二】　利用两两乘积的和，可以表示成两个向量的内积.（见（*）处）

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+4x_2x_3\\&=x_1^2-x_1x_2+0x_1x_3+2x_2^2-x_2x_1+2x_2x_3+0x_3x_1+2x_3x_2+3x_3^2\\&=x_1(x_1-x_2+0x_3)+x_2(-x_1+2x_2+2x_3)+x_3(0x_1+2x_2+3x_3)\\&=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}x_1-x_2+0x_3\\-x_1+2x_2+2x_3\\0x_1+2x_2+3x_3\end{bmatrix}\overset{(*)}{=\!=}[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&2\\0&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\end{aligned}$$

故知 f 的对应矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&2\\0&2&3\end{bmatrix}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

【评注】　方法二是二次型写成矩阵表达式的推导过程，而方法一是利用方法二中总结出来的二次型的系数与其对应矩阵中元素之间的关系直接写出对应矩阵. 显然方法一简便一些.

二、化二次型为标准形、规范形

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

1. 用正交变换化二次型为标准形

用正交变换化二次型为标准形的步骤如下：

(1) 将二次型表示成矩阵形式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.

(3) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值对应的特征向量.

(4) 检查不同特征值对应的特征向量是否正交，将重特征值对应的特征向量用施密特正交化方法正交化.

(5) 将全部特征向量单位化，设为 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$.

(6) 构造正交矩阵 $\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n]$.

(7) 令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，则 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$.

【例 2】　设 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$，求正交变换化二次型标准形并写出所作的正交变换.

解 (1) 二次型的对应矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&3\end{bmatrix}$$

(2) 求 λ

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-5&1&-3\\1&\lambda-5&3\\-3&3&\lambda-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-5&1&-3\\\lambda-4&\lambda-4&0\\-3&3&\lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-6&1&-3\\0&\lambda-4&0\\-6&3&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda^2-9\lambda+18-18)$$

$$=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9),$$

得 $\lambda_1=0,\lambda_2=4,\lambda_3=9$,

(3) 求 λ 对应的特征向量.

当 $\lambda_1=0$ 时,由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,即 $\begin{bmatrix}-5&1&-3\\1&-5&3\\-3&3&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$,解得对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,2)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_2=4$ 时,由 $(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,即 $\begin{bmatrix}-1&1&-3\\1&-1&3\\-3&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$,解得对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3=9$ 时,由 $(9\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,即 $\begin{bmatrix}4&1&-3\\1&4&3\\-3&3&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$,解得对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

(4) 将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 正交化. 因 $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 已相互正交(请检查是否已正交).

(5) 将正交特征向量组单位化.

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{\circ}=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\circ}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\circ}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^{\mathrm{T}}.$$

(6) 取 $\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\alpha}_1^{\circ},\boldsymbol{\alpha}_2^{\circ},\boldsymbol{\alpha}_3^{\circ}]$,则 $\boldsymbol{Q}$ 是正交阵.

(7) 作正交变换. 令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$,则二次型化成标准形为

$$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{bmatrix}\boldsymbol{y}$$

$$=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2=4y_2^2+9y_3^2.$$

所作正交变换为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y},\text{其中 }\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【评注】(1) 用正交变换只能化二次型为标准形，且标准形的系数即是特征值.

(2) 若只要求用正交变换化标准形，则只要求出特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=4,\lambda_3=9$，即可得二次型的标准型为 $f(x_1,x_2,x_3)\xrightarrow{x=Qy}4y_2^2+9y_3^2$.

【例 3】 用正交变换化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 为标准形.

解 二次型的对应矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{bmatrix},$$

其特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&2\\-2&\lambda-5&4\\2&4&\lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&0\\-2&\lambda-5&\lambda-1\\2&4&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&0\\-4&\lambda-9&0\\2&4&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-11\lambda+18-8)$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda-10).$$

则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=1,\lambda_3=10$.

$\lambda=1$ 时，由方程组

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-1&-2&2\\-2&-4&4\\2&4&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

得线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-2,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,1)^{\mathrm{T}}$；

$\lambda=10$ 时，由方程组

$$(10\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}8&-2&2\\-2&5&4\\2&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,-2)^{\mathrm{T}}$.

将对应于二重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的两个特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 用施密特正交化方法作标准正交化.

$$\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(-2,1,0)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\eta}_1)}{(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_1)}\boldsymbol{\eta}_1=(2,0,1)^{\mathrm{T}}-\frac{-4}{5}(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$$

$$=(\frac{2}{5},\frac{4}{5},1)^{\mathrm{T}},\text{取整为}(2,4,5)^{\mathrm{T}}.$$

再将 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化，得正交阵 $\boldsymbol{Q}$，

$$\boldsymbol{\eta}_1^{\circ}=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2^{\circ}=\frac{1}{\sqrt{45}}(2,4,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\circ}=\frac{1}{3}(1,2,-2)^{\mathrm{T}}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

$$Q=\begin{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{45}} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix},$$

则 $$Q^{-1}AQ=Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 10\end{bmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{x}=Q\boldsymbol{y}$，原二次型化成标准形，即

$$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}\xrightarrow{\boldsymbol{x}=Q\boldsymbol{y}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(Q^{\mathrm{T}}AQ)\boldsymbol{y}=y_1^2+y_2^2+10y_3^2.$$

【评注】 (1)λ 是实对称阵 A 的 r 重根时，一定有 r 个线性无关的特征向量，也一定有 r 个两两正交的特征向量，为免去正交化的运算，在求对应特征向量时，可预先考虑求正交特征向量. 如本题 $\lambda=1$(二重根) 时，对应特征向量应满足

$$-x_1-2x_2+2x_3=0.$$

取一个特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$ 后，再求 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 时，可使 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 正交(这只要取 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,a)^{\mathrm{T}}$ 即可，a 待定)，且让 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 满足方程 $-x_1-2x_2+2x_3=0$，得

$$-1-4+2a=0,\quad a=\frac{5}{2},$$

即得 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,\frac{5}{2})^{\mathrm{T}}$，也可取整为 $(2,4,5)^{\mathrm{T}}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:dingjian360)

(2) 正交变换不唯一，但正交变换得到的标准形是唯一的(不考虑对角元的次序时). 只要求出了 A 的特征值，二次型在正交变换下的标准形即被确定是 $\lambda_1y_1^2+\lambda_1y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$，其中 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 A 的全部特征值.

(3) 正交变换只能化二次型为标准形，一般不能化成规范形(除非特征值均属于 $\{1,-1,0\}$).

(4) 计算过程可用下列各条验算：① 特征值之和应等于主对角线元素之和(特征值之积应等于 A 的行列式)；② 不同特征值对应的特征向量应相互正交；③ 正交化后特征向量应仍满足方程 $(\lambda E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$；④ $Q^{\mathrm{T}}AQ=Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$.

【例 4】 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=Q\boldsymbol{y}$ 化成标准形 $f=6y_1^2$，则参数 $a=$ _____.

解题思路

f 的标准形为 $f=6y_1^2=6y_1^2+0y_2^2+0y_3^2$.

故知 f 的对应矩阵 A 有特征值 $\lambda_1=6,\lambda_2=\lambda_3=0$，且

$$A=\begin{bmatrix}a & 2 & 2\\ 2 & a & 2\\ 2 & 2 & a\end{bmatrix}\text{既相似又合同于}\begin{bmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 6\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}.$$

分析　应填 2.

【方法一】　$\sum\limits_{i=1}^{3}a_{ii}=3a=\sum\limits_{i=1}^{3}\lambda_i=6$，故 $a=2$.

【方法二】　$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$ 且 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{\Lambda}$，故 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\Lambda})$ 其中 $r(\boldsymbol{\Lambda})=1$.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&2&2\\2&a&2\\2&2&a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}a+4&2&2\\a+4&a&2\\a+4&2&a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}a+4&2&2\\0&a-2&0\\0&0&a-2\end{bmatrix},$$

$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\Lambda})=1$，故 $a=2$.

【方法三】　因 $\boldsymbol{A}$ 有 $\lambda_2=\lambda_3=0$. 故应有 $|\boldsymbol{A}|=0$. 且对应有二个线性无关特征向量.

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a&2&2\\2&a&2\\2&2&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+4&2&2\\a+4&a&2\\a+4&2&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+4&2&2\\0&a-2&0\\0&0&a-2\end{vmatrix}=(a+4)(a-2)^2=0$$

得 $a=-4,a=-4$ 时，$r(\boldsymbol{A})=2$. 只有一个线性无关特征向量，不合题意. 或 $a=2$，当 $a=2$ 时，$\lambda_1=\lambda_2=0$ 为二重根，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有两个线性无关解. 故应填 $a=2$.

或 $\lambda_1=6$，故 $|6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，且对应一个线性无关特征向量，故

$$\begin{vmatrix}6-a&-2&-2\\-2&6-a&-2\\-2&-2&6-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-a&-2&-2\\2-a&6-a&-2\\2-a&-2&6-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-a&-2&-2\\0&8-a&0\\0&0&8-a\end{vmatrix}$$

$$=(2-a)(8-a)^2=0,$$

得 $a=8$，不合题意. 或 $a=2$. 当 $a=2$ 时，$(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有一个线性无关解，应填 $a=2$.

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

【例 5】　设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3(b>0)$，其中二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之和为 1，特征值之积为 -12.

(1) 求 a,b 的值.

(2) 利用正交变换将二次型化为标准形，并写出所作的正交变换和对应的正交矩阵.

解　(1) 二次型 f 的对应矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&0&b\\0&2&0\\b&0&-2\end{bmatrix}.$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，则由题设条件得

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a+2+(-2)=1,$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|\boldsymbol{A}|=-4a-2b^2=-12.$$

解得 $a=1,b=\pm2$，已知 $b>0$，故 $b=2$，即 $a=1,b=2$.

(2) 由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-2\\0&\lambda-2&0\\-2&0&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2+\lambda-6)$$

$$=(\lambda-2)^2(\lambda+3),$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-3$.

对 $\lambda_1=\lambda_2=2$，由 $(2E-A)x=\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&0&0\\-2&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$，

求得对应于 $\lambda=2$ 的特征向量为

$$\xi_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\xi_2=(2,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

其中 ξ_1,ξ_2 已正交.

对 $\lambda_3=-3$，由 $(-3E-A)x=\begin{bmatrix}-4&0&-2\\0&-5&0\\-2&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$，

求得对应于 $\lambda=-3$ 的特征向量为 $\xi_3=(1,0,-2)^{\mathrm{T}}$.

由于 ξ_1,ξ_2,ξ_3 已两两正交，故只需单位化，有

$$\xi_1^{\circ}=\frac{\xi_1}{|\xi_1|}=(0,1,0)^{\mathrm{T}};\xi_2^{\circ}=\frac{\xi_2}{|\xi_2|}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{\mathrm{T}};\xi_3^{\circ}=\frac{\xi_3}{|\xi_3|}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

得正交阵

$$Q=[\xi_1^{\circ},\xi_2^{\circ},\xi_3^{\circ}]=\begin{bmatrix}0&\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{-2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}.$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

令 $x=Qy$，则有

$$f=x^{\mathrm{T}}Ax\xrightarrow{x=Qy}y^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}AQy=y^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&-3\end{bmatrix}y$$

$$=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2.$$

2. 用配方法化二次型为标准形

方法如下：(1) 若二次型中有平方项，不妨设 $a_{11}\neq 0$，则对所有含 x_1 的项配完全平方(经配方后，使所余各项中不再含有 x_1)，再配第二个平方项，…，直至配成完全平方之和(完全平方的项数 $\leqslant n$)，令 $x=Cy$，得标准形 $x^{\mathrm{T}}Ax=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$.

(2) 若二次型中没有平方项，只有混合项，不妨设 $a_{12}\neq 0$，则令 $x_1=y_1+y_2$，$x_2=y_1-y_2$，$x_3=y_3$，…，$x_n=y_n$. 使二次型中出现 $a_{12}y_1^2-a_{12}y_2^2$，再按 1° 进行配方，连续使用 1°，2°，则可得任一二次型配成完全平方之和，且所作变换为可逆线性变换.

【例 6】 用配方法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+8x_2x_3$ 为标准形，并将二次型表示成矩阵形式，写出标准形相应的对角阵 Λ 及所作可逆线性变换矩阵 C，验证 $C^{\mathrm{T}}AC=\Lambda$.

解 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+8x_2x_3$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+4x_3^2+6x_2x_3$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+3x_3)^2-5x_3^2.$$

$$令\begin{cases}y_1=x_1+x_2+x_3,\\ y_2=\quad x_2+3x_3,\\ y_3=\quad\quad x_3,\end{cases}\quad 即\begin{cases}x_1=y_1-y_2+2y_3,\\ x_2=\quad y_2-3y_3,\\ x_3=\quad\quad y_3,\end{cases}得$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+y_2^2-5y_3^2.$$

二次型的矩阵形式为

$$f(x_1,x_2,x_3)=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-5\end{bmatrix},$$

所作可逆线性变换为 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&1&-3\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$，且

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\2&-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&1&-3\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&0&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&1&-3\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-5\end{bmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}.$$

【评注】 当配方后完全平方项的项数少于变量个数时，作变换时应补充所缺的平方项，使变换成为可逆线性变换. 如本题二次型中，将 $5x_3^2$ 改为 $10x_3^2$，则

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+10x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+8x_2x_3$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+3x_3)^2,$$

则仍旧应令

$$\begin{cases}y_1=x_1+x_2+x_3,\\ y_2=\quad x_2+3x_3,\\ y_3=\quad\quad x_3.\end{cases}\quad 即\begin{cases}x_1=y_1-y_2+2y_3,\\ x_2=\quad y_2-3y_3,\\ x_3=\quad\quad y_3.\end{cases}$$

若只令 $\begin{cases}y_1=x_1+x_2+x_3\\ y_2=\quad x_2+3x_3\end{cases}$，但这个变换是不可逆的. 无法求得 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 中的可逆阵 $\boldsymbol{C}$.

【例 7】 用配方法将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$ 化成标准形、规范形，并写出所作的可逆线性变换.

解 因二次型中没有平方项，只有混合项，故先令 $\begin{cases}x_1=y_1+y_2,\\ x_2=y_1-y_2,\\ x_3=y_3,\end{cases}$ 则

$$f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2-y_2^2+2y_1y_3+2y_2y_3+4y_1y_3-4y_2y_3$$

$$=(y_1+3y_3)^2-9y_3^2-2y_2y_3-y_2^2$$

$$=(y_1+3y_3)^2-(y_2+y_3)^2-8y_3^2.$$

$$令\begin{cases}z_1=y_1+3y_3,\\ z_2=y_2+y_3,\\ z_3=y_3,\end{cases}即\begin{cases}y_1=z_1-3z_3,\\ y_2=z_2-z_3,\\ y_3=z_3,\end{cases}且\begin{cases}x_1=y_1+y_2=z_1+z_2-4z_3,\\ x_2=y_1-y_2=z_1-z_2-2z_3,\\ x_3=y_3=z_3.\end{cases}$$

得二次型的标准形为 $f(x_1,x_2,x_3)=z_1^2-z_2^2-8z_3^2$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

再令 $\begin{cases} z_1 = u_1, \\ z_2 = u_2, \\ z_3 = \dfrac{1}{\sqrt{8}}u_3, \end{cases}$ 即令 $\begin{cases} x_1 = u_1 + u_2 - \dfrac{4}{\sqrt{8}}u_3, \\ x_2 = u_1 - u_2 - \dfrac{2}{\sqrt{8}}u_3, \\ x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{8}}u_3, \end{cases}$

得二次型的规范形为 $f(x_1,x_2,x_3) = u_1^2 - u_2^2 - u_3^2$.

【评注】 在配方法中所作可逆线性变换不唯一,标准形不唯一,但规范形是唯一的(在不计较1,−1,0 的排列次序时),即正惯性指数、负惯性指数、二次型的秩是可逆线性变换中的不变量.

三、合同矩阵、合同二次型

【例 8】 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶实对称矩阵,证明:

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同,则 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B})$,反之是否成立?说明理由.

(2)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同的充分必要条件是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的秩和正惯性指数.

证明 (1) 因 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同,由定义,存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$,使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}$,故有 $r(\boldsymbol{B}) = r(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}) = r(\boldsymbol{A})$.

反之,$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B})$,但 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不一定合同. 如 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{E}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$,有 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B}) = 2$,但对任何可逆矩阵 $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} \neq \boldsymbol{B}, \text{因}(c_{12}^2 + c_{22}^2 \neq -1 = b_{22}).$$

(2) 因 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同,设 $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{\Lambda}$,则由合同关系的传递性知,$\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B} \simeq \boldsymbol{\Lambda}$,即 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 合同于同一个对角阵. 故 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的秩和正惯性指数.

反之,设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的秩 r,正惯性指数为 p,则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2$,使得

$$\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_p & & \\ & -\boldsymbol{E}_{r-p} & \\ & & \boldsymbol{O}_{n-r} \end{bmatrix} = \boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}_2,$$

从而有

$$(\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2^{-1} = (\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2^{-1} = \boldsymbol{B},$$

故

$$\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}.$$

【评注】 (1)$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B})$ 是 $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}$ 的必要条件,但不是充分条件.

(2)$\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的秩及正惯性指数 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的正、负惯性指数.

这是判别 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是否合同的重要结论.

【例 9】 下列二次型中,与 $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$ 合同的是

(A)$g = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$.　　(B)$h = x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_1x_2$.

(C)$w = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2$.　　(D)$r = x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2$.

解题思路 两个二次型合同 $\Leftrightarrow$ 两个二次型有相同的正、负惯性指数. 将二次型用配方法化标准形即可. 或两个二次型合同,即其对应矩阵合同,求对应矩阵的特征值也可求得二次型的标准形.

微信公众号【顶尖考研】

分析 应选(D).

【方法一】 将二次型用配方法化标准形

题　$f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-4x_1x_2=(x_1-2x_2)^2-3x_2^2$,

(A)　$g(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2=(x_1+x_2)^2$,

(B)　$h(x_1,x_2)=x_1^2+5x_2^2+4x_1x_2=(x_1+2x_2)^2+x_2^2$,

(C)　$w(x_1,x_2)=2x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2=2(x_1+\frac{1}{2}x_2)^2+\frac{3}{2}x_2^2$,

(D)　$r(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2+6x_1x_2=(x_1+3x_2)^2-8x_2^2$.

由标准形可知 f 和 r 有相同的正惯性指数 1,负惯性指数 1,故 $f\simeq r$. 其余的均不合同,应选取(D).

【方法二】 写出二次型的 f,g,h,w,r 的对应矩阵 $\boldsymbol{F},\boldsymbol{G},\boldsymbol{H},\boldsymbol{W},\boldsymbol{R}$,并求出特征值

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}1&-2\\-2&1\end{bmatrix},$$

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{F}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2\\2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda+1)=0,\text{得}\lambda_1=3,\lambda_2=-1.$$

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},$$

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{G}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1\\-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)=0,\text{得}\lambda_1=0,\lambda_2=2.$$

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix},$$

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{H}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\-2&\lambda-5\end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+1=0,$$

得 $\lambda_{1,2}=\dfrac{6\pm\sqrt{36-4}}{2}>0$.

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix},$$

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{W}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-1)=0,\text{得}\lambda_1=1,\lambda_2=3.$$

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}1&3\\3&1\end{bmatrix},$$

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{R}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-3\\-3&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+2)=0,\text{得}\lambda_1=4,\lambda_2=-2.$$

比较特征值可知,f 和 r 的正、负惯性指数的个数相同,故 $f\simeq r$,f 与其余的不合同,故应选(D).

【评注】 两个二次型合同 $\Leftrightarrow$ 两个二次型的正、负惯性指数个数相同,(并不要求其具体的数值相同). $\Leftrightarrow$ 二次型的秩及正惯性指数(或负惯性指数)相同.

【例 10】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1&&\\&a_2&\\&&a_3\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_3&&\\&a_1&\\&&a_2\end{bmatrix}$,问 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是否合同,若合同,求可逆阵 $\boldsymbol{C}$,使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

(解) A,B 均为对角阵，它们对应的二次型有相同的正，负惯性指数，故 $A \simeq B$. 下面求可逆阵 C，使 $C^{\mathrm{T}}AC = B$.

【方法一】 A 是对称阵，B 是对角阵，且 A、B 有相同的特征值. 故可利用正交变换来求 C.

显然 A 有特征值 $\lambda_1 = a_1, \lambda_2 = a_2, \lambda_3 = a_3$，其对应的特征向量分别是 $\xi_1 = (1,0,0)^{\mathrm{T}}, \xi_2 = (0,1,0)^{\mathrm{T}}, \xi_3 = (0,0,1)^{\mathrm{T}}$，且已是标准正交特征向量. 取正交阵 $P = [\xi_3, \xi_1, \xi_2]$（$\xi_i$ 的排列和 B 的对角元素排列一致）则有

$$P^{\mathrm{T}}AP = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} a_3 & & \\ & a_1 & \\ & & a_2 \end{bmatrix} = B$$

故所求可逆阵 $C = P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

【方法二】 A,B 均是对角阵，看成二次型的标准形，且 $A \simeq B$.（有相同的正、负惯性指数），故可用逆线性变换求 C.

A 对应二次型 $f = x^{\mathrm{T}}Ax = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2$

$$\text{令} \begin{cases} x_1 = y_2 \\ x_2 = y_3 \\ x_3 = y_1 \end{cases}, \text{即} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = Cy$$

则有 $f = x^{\mathrm{T}}Ax = (Cy)^{\mathrm{T}}A(Cy) = y^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)y = a_1y_2^2 + a_2y_3^2 + a_3y_1^2 = y^{\mathrm{T}}By$

即 $C^{\mathrm{T}}AC = B$. 其中 $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 即为所求.

微信公众号【顶尖考研】(ID: ding66)

【评注】 也可用初等变换法，求 C.

将 A 的 2,3 两行互换，并将 2,3 两列互换，得 D. 再将 D 的 1,2 两行互换，并将 1,2 两列互换得 B 即

$$E_{23}AE_{23} = E_{23}\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{bmatrix}E_{23} = \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_3 & \\ & & a_2 \end{bmatrix} = D,$$

$$E_{12}DE_{12} = E_{12}\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & a_3 & \\ & & a_2 \end{bmatrix}E_{12} = \begin{bmatrix} a_3 & & \\ & a_1 & \\ & & a_2 \end{bmatrix} = B$$

故有 $$E_{12}E_{23}AE_{23}E_{12} = (E_{23}E_{12})^{\mathrm{T}}AE_{23}E_{12} = C^{\mathrm{T}}AC = B.$$

其中 $C = E_{23}E_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

此方法在考研大纲中没有要求，但能用此法正确解题，也会给满分.

四、正定性的判别与证明

【例 11】 判别二次型

$$f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

的正定性.

解【方法一】　$f(x_1,x_2,x_3)$ 的对应矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&2\end{bmatrix}$.

因 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式 $2>0$，$\begin{vmatrix}2&-1\\-1&2\end{vmatrix}=3>0$，

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-1&0\\-1&2&1\\1&-1&1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}2&-1&0\\-2&3&0\\1&-1&1\end{vmatrix}=4>0,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，f 是正定二次型.

【方法二】　f 正定 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的全部特征值 $\lambda_i>0$.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-1\\1&\lambda-2&1\\-1&1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda-1)^2.$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=4,\lambda_2=\lambda_3=1$ 全部大于零，故 $\boldsymbol{A}$ 正定，f 是正定二次型.

【方法三】　f 正定 $\Leftrightarrow f$ 的标准形的正惯性指数 $p=r=n$（r 是 $\boldsymbol{A}$ 的秩，n 是未知量个数）.

将 f 用配方法化标准形

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

$$=2\left(x_1-\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\left(x_2-\frac{1}{3}x_3\right)^2+\frac{4}{3}x_3^2.$$

微信公众号【顶尖考研】
djky66

由二次型的标准形可知，f 的正惯性指数 $p=r=3$. 故 f 是正定二次型.

【方法四】　利用定义，f 正定 $\Leftrightarrow$ 对任给的 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$，有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$.

将二次型配成正的平方和（注意，这里配完全平方和的方法与配方法化标准形的方法不同，这里没有要求将某平方项及其有关的混合项一次配完），即

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

$$=(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2\geqslant 0,$$

且

$$f(x_1,x_2,x_3)=0\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x_1-x_2=0,\\x_2-x_3=0,\\x_3+x_1=0.\end{cases}\tag{1}$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

因方程组 ① 的系数行列式

$$\begin{vmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\1&0&1\end{vmatrix}=2\neq 0,$$

故方程组 ① 只有零解，即 $f=0\Leftrightarrow x_1=x_2=x_3=0$，从而有任意的 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$，恒有 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$，故 f 是正定二次型.

【方法五】　f 正定 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}$，其中 $\boldsymbol{D}$ 是可逆阵. 由方法四中的平方和用矩阵形式表出，得

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$$

$$=(x_1-x_2,x_2-x_3,x_3+x_1)\begin{bmatrix}x_1-x_2\\x_2-x_3\\x_3+x_1\end{bmatrix}$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},$$

故知 f 的对应矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}$. 其中

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\1&0&1\end{bmatrix},\ |\boldsymbol{D}|=\begin{vmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\1&0&1\end{vmatrix}=2\neq 0.$$

故 $\boldsymbol{D}$ 是可逆阵，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}$. 故 f 是正定二次型.

【评注】 二次型正定的每一个充要条件都是判别二次型是否正定的一个准则. 可以从每个充要条件去考察，对于具体的数值二次型（数值实对称阵）主要用方法一，判别顺序主子式全部大于零比较方便，但对其他的各种情况，则应根据题设条件作相应的选择.

【例 12】 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 是正定二次型，则参数 t 应满足_____.

分析 应填 $-\frac{4}{5}<t<0$.

f 对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&t&-1\\t&1&2\\-1&2&5\end{bmatrix}$，$f$ 正定 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 正定 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式全部大于零.

$$1>0,\ \begin{vmatrix}1&t\\t&1\end{vmatrix}=1-t^2>0,t^2<1,-1<t<1.$$

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&t&-1\\t&1&2\\-1&2&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&t&-1\\t+2&1+2t&0\\4&2+5t&0\end{vmatrix}$$

$$=4(1+2t)-(t+2)(2+5t)$$

$$=-5t^2-4t>0,\text{得}-\frac{4}{5}<t<0.$$

故当 $-\frac{4}{5}<t<0$ 时，二次型 f 是正定二次型.

【例 13】 判别二次型 $\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^2+\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_j$ 的正定性.

解 【方法一】 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 正定 $\Leftrightarrow f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{A}$ 正定 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式全部大于零.

二次型的对应矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix},$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

其顺序主子式　$\Delta_1=1>0,\Delta_2=\begin{vmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{vmatrix}=\frac{3}{4}>0$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{vmatrix}=\frac{1}{8}\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{4}{8}\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}>0$$

$$\Delta_4=\frac{1}{16}\begin{vmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix}=\frac{5}{16}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{5}{16}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{5}{16}>0.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

$\boldsymbol{A}$ 的全部顺序主子式大于零，故二次型正定.

【方法二】　f 正定 $\Leftrightarrow$ 对应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的特征值全部大于零. 因

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\lambda-1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\lambda-1&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2^4}\begin{vmatrix}2(\lambda-1)&-1&-1&-1\\-1&2(\lambda-1)&-1&-1\\-1&-1&2(\lambda-1)&-1\\-1&-1&-1&2(\lambda-1)\end{vmatrix}$$

$$=\frac{2\lambda-5}{2^4}\begin{vmatrix}1&-1&-1&-1\\1&2(\lambda-1)&-1&-1\\1&-1&2(\lambda-1)&-1\\1&-1&-1&2(\lambda-1)\end{vmatrix}$$

$$=\frac{2\lambda-5}{2^4}\begin{vmatrix}1&-1&-1&-1\\0&2\lambda-1&0&0\\0&0&2\lambda-1&0\\0&0&0&2\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2^4}(2\lambda-5)(2\lambda-1)^3$$

$$\lambda_1=\frac{5}{2},\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\frac{1}{2}$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值全部大于零，故二次型正定.

【评注】 (1)$\boldsymbol{A}$ 的特征值还可用下法求得

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}[1,1,1,1]\right)=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})$$

其中 $\boldsymbol{B}^2=4\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}$ 的特征值的取值范围为 4，0，于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征的取值范围为 $\frac{5}{2},\frac{1}{2}$，全部大于零，故二次型正定.

(2) 本题推广到 n 元二次型为 $f=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$. 请判别其是否正定.

微信公众号【顶尖考研】

【例 14】 设 n 元二次型

$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1-ax_2)^2+(x_2-ax_3)^2+\cdots+(x_{n-1}-ax_n)^2+(x_n-ax_1)^2$.

问 a 为何值时，二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 正定？

解 【方法一】 f 是正的平方和，对任意 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 均有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant 0$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-ax_2=0\\x_2-ax_3=0\\\cdots\cdots\cdots\\x_{n-1}-ax_n=0\\x_n-ax_1=0\end{cases}\quad(*)$$

$$(*)\text{ 唯一零解}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}1&-a&0&\cdots&0&0\\0&1&-a&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&-a\\-a&0&0&\cdots&0&1\end{vmatrix}=1+(-1)^{1+n}(-a)^n=1-a^n\neq 0$$

$$\Leftrightarrow a^n\neq 1\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq\pm 1,n=2k\\a\neq 1,n=2k+1.\end{cases}$$

故当 $\begin{cases}a\neq\pm 1,n=2k\\a\neq 1,n=2k+1\end{cases}$ 时，$(*)$ 唯一零解，对 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots x_n)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$ 时，

$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0$，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 正定.

【方法二】

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1-ax_2)^2+(x_2-ax_3)^2+\cdots+(x_{n-1}-ax_n)^2+(x_n-ax_1)^2$$

$$=\begin{bmatrix}x_1-ax_2,x_2-ax_3,\cdots,x_{n-1}-ax_n,x_n-ax_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1-ax_2\\x_2-ax_3\\\cdots\cdots\\x_{n-1}-ax_n\\x_n-ax_1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}x_1,x_2,\cdots,x_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0&-a\\-a&1&0&\cdots&0&0\\0&-a&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&-a&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-a&0&\cdots&0&0\\0&1&-a&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&-a\\-a&0&0&\cdots&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

$\xrightarrow{\text{记成}}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}$，

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1&-a&\cdots&&0&0\\0&1&-a&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\vdots&1&-a\\-a&0&0&\cdots&0&1\end{bmatrix}$$

由方法一知 $|\boldsymbol{D}|=1-a^n$.

当 $\begin{cases}a\neq\pm1,n=2k\\a\neq1,n=2k+1\end{cases}$ 时 $\Rightarrow|\boldsymbol{D}|\neq0,\boldsymbol{D}$ 可逆 $\Rightarrow\boldsymbol{A}$ 正定，即 f 正定.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)
微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

【例 15】 已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵，证明 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正定阵.

证明 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵 $\Rightarrow\boldsymbol{A}$ 对称、可逆 $\Rightarrow$ 因 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{A}^*$ 可逆，且 $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^*$，所以 $\boldsymbol{A}^*$ 对称.

又 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的全部特征值 $\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,n.\boldsymbol{A}^*$ 的全部特征值为 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_i}>0$（其中 $|\boldsymbol{A}|>0,\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,n$），故 $\boldsymbol{A}^*$ 也正定.

【评注】 (1) 已知 $\boldsymbol{A}$ 是正定，即已知由定义对任意的 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$，均有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$，且所有有关正定的充要条件全部成立，要证 $\boldsymbol{A}^*$ 也正定，只要证明正定的定义或任一条充要条件成立即可，本证明选择了证特征值大于零. 其余方法请读者证明.

(2) 同理可以证明：n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定时，与 $\boldsymbol{A}$ 有关的矩阵 $k\boldsymbol{A}(k>0),\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}^k,\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{A}^*,f(\boldsymbol{A})$（其中，$f(x)=a_0+a_1x_1+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 是多项式，且 $a_i>0,i=0,1,2,\cdots,n$）等均是正定矩阵，请读者证明.

【例 16】 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称阵，有特征值 $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n$，问：

(1) a 满足什么条件时，$a\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 正定？

(2) 正数 ε 满足什么条件时，$\boldsymbol{E}+\varepsilon\boldsymbol{A}$ 正定？

解 (1) $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$，则 $a\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 有特征值 $a+\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$，由题设

条件知

$$a+\lambda_1<a+\lambda_2<\cdots<a+\lambda_n,$$

当 $a+\lambda_1>0$ 时，即 $a>-\lambda_1$ 时，有 $a+\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，$a\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

(2)$\boldsymbol{A}$ 有特征值 λ_i，则 $\boldsymbol{E}+\varepsilon\boldsymbol{A}$ 有特征值 $1+\varepsilon\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$. 因 ε 是正数，故 $\varepsilon>0$，由题设条件知

$$1+\varepsilon\lambda_1<1+\varepsilon\lambda_2<\cdots<1+\varepsilon\lambda_n.$$

当 $\lambda_1\geqslant 0$ 时，对任意的 $\varepsilon>0$，有 $1+\varepsilon\lambda_1>0\Rightarrow 1+\varepsilon\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,n\Rightarrow\boldsymbol{E}+\varepsilon\boldsymbol{A}$ 正定；

当 $\lambda_1<0$ 时，只需 $1+\varepsilon\lambda_1>0$，即

$$\varepsilon\lambda_1>-1,\varepsilon<\frac{-1}{\lambda_1},\text{就有 }1+\varepsilon\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n),$$

从而 $\boldsymbol{E}+\varepsilon\boldsymbol{A}$ 正定.

【例 17】 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定阵，

(1)$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶可逆矩阵，证明 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 也是正定阵；

(2)$\boldsymbol{C}$ 是 $n\times m$ 矩阵，且 $r(\boldsymbol{C})=m$，证明 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 也是正定阵.

证明 (1) 因 $(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$，故 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 也是对称阵. 设 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{W}$，其中 $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵. 故 $\boldsymbol{W}\simeq\boldsymbol{A}$. 又 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵，$\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{E}$，从而有 $\boldsymbol{W}\simeq\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 也是正定阵.

(2) 因 $(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，故 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 也是对称阵. 又 $r(\boldsymbol{C}_{n\times m})=m$，将 $\boldsymbol{C}$ 按列分块设为 $\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_m]$，则 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_m$ 线性无关. 对任给 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_m]^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$，有

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_m)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{bmatrix}=x_1\boldsymbol{\gamma}_1+x_2\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\gamma}_m\neq\boldsymbol{0},$$

而 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，故对任意的 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$，有 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，且恒有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{x})>0,$$

故 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 是正定矩阵.

【评注】 在证明正定之前，先证明是对称阵.

五、二次型的应用

【例 18】 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶正定矩阵. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维非零列向量，满足 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_j=0,(i\neq j)$，证明 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$ 是可逆矩阵.

解题思路 只需证 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

证明 【方法一】 用定义证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

设有数 k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$$

两边左乘 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$，$(i=1,2,3)$ 得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=0(i=1,2,3)$$

由已知 $i\neq j$ 时有 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_j=0$，又 $\boldsymbol{A}$ 是正定阵，$\boldsymbol{\alpha}_i\neq\boldsymbol{0}$，有 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i>0$，故 $i=1,2,3$ 时，分别得

微信公众号【长天考研】(ID: djk166)

$k_1=0,k_2=0,k_3=0$，得证：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 故 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$ 可逆.

【方法二】　证线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

上式线性方程组左乘 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$，得

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}[\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3]\boldsymbol{x}$$

$$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha}_3\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha}_3\\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha}_3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

已知 $i\neq j$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha}_j=0$. 又 $\boldsymbol{A}$ 正定，$\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha}_i>0,i=1,2,3$，故 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$ 是对角元素大于零的对角阵，得 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 故 $\boldsymbol{B}$ 可逆.

【例 19】　设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$，且 $|\boldsymbol{A}|=0$.

(1) 证明存在 n 维列向量 $\boldsymbol{\xi}_0$，使得 $f\big|_{x=\xi_0}=\boldsymbol{\xi}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\xi}_0=0$.

(2) 当 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$ 时，求 $\boldsymbol{\xi}_0$，使得 $f\big|_{x=\xi_0}=\boldsymbol{\xi}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\xi}_0=0$.

解　(1) $|\boldsymbol{A}|=\prod\lambda_i=0$ 知 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda=0$，设其对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_0$，则有

$$\boldsymbol{A\xi}_0=\lambda\boldsymbol{\xi}_0=0\boldsymbol{\xi}_0=\boldsymbol{0},$$

上式两边左乘 $\boldsymbol{\xi}_0^{\mathrm{T}}$，得 $f\big|_{x=\xi_0}=\boldsymbol{\xi}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\xi}_0=0$.

即 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 $\lambda=0$ 的对应的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_0$ 处取值为 0.

(2) 当 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$ 时，

因　$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\0&0&0\end{vmatrix}=0$$

知 $\boldsymbol{A}$ 有 $\lambda=0$，其对应的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_0$，由 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-3&3&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

解得 $\boldsymbol{\xi}_0=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，

故有 $f\big|_{x=\xi_0=(1,1,1)^{\mathrm{T}}}=(1,1,1)\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=[1,1,1]\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=0.$

【评注】　本题二次型为 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$

$$=(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2.$$

显然 $f\big|_{\xi_0=(1,1,1)^{\mathrm{T}}}=0$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)
微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

【例 20】 设 A 是三阶实对称矩阵，满足 $A^2=E$，且 $r(E-A)=2$.

求一个三维向量 ξ，使得二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^{\mathrm{T}}Ax$ 在 ξ 处的值为零，即有 $f(x_1,x_2,x_3)\Big|_{x=\xi}=x^{\mathrm{T}}Ax\Big|_{x=\xi}=\xi^{\mathrm{T}}A\xi=0$.

解 $A^2=E\Rightarrow(E-A)(E+A)=O, r(E-A)+r(E+A)\leqslant 3$.

又 $r(E-A)=2$ 故 $r(E+A)\leqslant 1$，但 $A\neq -E$.（若 $A=-E$，则 $r(E-A)=r(2E)=3\neq 2$ 和已知 $r(E-A)=2$ 矛盾）

故 $r(E+A)=1$.

由 $r(E-A)=2$，A 有特征值 $\lambda_1=1$，对应有一个线性无关特征向量，并且是单位特征向量，记为 α_1，$|\alpha_1|=1$.

由 $r(E+A)=1$，A 有特征值 $\lambda_2=-1$，有两个线性无关特征向量，并将其单位化，记为 α_2,α_3，$|\alpha_2|=|\alpha_3|=1$.

又不同特征值对应的特征向量相互正交，故有

$$(\alpha_1,\alpha_2)=0,(\alpha_1,\alpha_3)=0$$

取 $\xi=\alpha_1+\alpha_2$，（或 $\alpha_1+\alpha_3$）则有

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)\Big|_{x=\xi}=x^{\mathrm{T}}Ax\Big|_{x=\xi}&=\xi^{\mathrm{T}}A\xi=(\alpha_1+\alpha_2)^{\mathrm{T}}A(\alpha_1+\alpha_2)\\&=\alpha_1^{\mathrm{T}}A\alpha_1+\alpha_1^{\mathrm{T}}A\alpha_2+\alpha_2^{\mathrm{T}}A\alpha_1+\alpha_2^{\mathrm{T}}A\alpha_2\\&=1+0+0-1=0.\end{aligned}$$

微信公众号【顶尖考研】

小结

二次型与实对称矩阵一一对应，这样二次型的问题可以用矩阵的理论与方法来研究；另一方面实对称矩阵的问题也可以转换成二次型的思想方法来解决.

二次型的中心问题有两个，一个是化标准形. 二次型化标准形是通过作可逆线性变换实现的. 它有三种办法：

(1) 配方法. 是特殊要求下的配完全平方，以保证所作线性变换是可逆的. 配方法化标准形，矩阵而言是实对称阵合同于对角阵.

(2) 正交变换法. 这和实对称矩阵正交相似于对角阵是同一个问题，矩阵而言是实对称阵既相似又合同于对角阵.

(3) 初等变换法. 不属大纲范围.

另一个问题是判别二次型或实对称矩阵的正定性问题，一般数值二次型（或矩阵）用顺序主子式全部大于零判别较方便，应会用正定的定义及充分必要条件来判别或证明正定性，注意若已知（或要证）A 正定. 即已知（或要证）$\forall x\neq 0$，有 $x^{\mathrm{T}}Ax>0$；$p=n=r$；有可逆阵 C，使 $C^{\mathrm{T}}AC=E$；有可逆阵 D 使 $A=D^{\mathrm{T}}D$；A 的特征值全部大于零；A 的顺序主子式全部大于零. 要有选择的使用定义及充分必要条件.

要说明不正定，则利用不满足正定的定义或正定的必要条件则是方便的.

第三篇

概率论与数理统计

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

第一章　随机事件和概率

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

了解　样本空间

理解　随机事件,概率,条件概率,事件的独立性,独立重复试验.

掌握　事件的关系及运算,概率的基本性质,概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式,用事件独立性进行概率计算、用独立重复试验计算有关事件的概率.

会　计算古典型概率和几何型概率.

§1　事件、样本空间、事件间的关系与运算

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

1.1.1　随机试验

定义　对随机现象进行观察或实验称为随机试验,简称试验,记作 E. 它具有如下特点:

(1) 可以在相同条件下重复进行;

(2) 所得的可能结果不止一个,且所有可能结果都能事前已知;

(3) 每次具体实验之前无法预知会出现哪个结果.

例如,抛一枚硬币,记录其结果是正面向上还是反面向上?测试灯泡使用寿命有多长?购买福利彩票中奖或不中奖?等等,都可看成随机试验.

1.1.2　样本空间

定义　随机试验的每一可能结果称为样本点,记作 ω. 由所有样本点全体组成的集合称为样本空间,记作 Ω.

【注】　显然,样本点是组成样本空间的元素.

1.1.3　随机事件

定义　样本空间的子集称为随机事件,简称事件,常用字母 A,B,C 等表示.

随机事件是由样本空间中的元素即样本点组成,由一个样本点组成的子集是最简单事件,称为基本事件. 随机事件既然由样本点组成,因此,也可能将随机事件看成是由基本事件组成.

如果一次试验的结果为某一基本事件出现,就称该基本事件出现或发生. 如果组成事件 A 的一个基本事件出现或发生,也称事件 A 出现或发生.

把 Ω 看成一事件,则每次试验必有 Ω 中某一基本事件(即样本点)发生,也就是每次试验 Ω 必然发生,称 Ω 为必然事件.

把不包含任何样本点的空集 $\varnothing$ 看成一个事件. 每次试验 $\varnothing$ 必不发生,称 $\varnothing$ 为不可能事件.

【例】　写出下列随机试验的样本空间及相应的随机事件:

(1) 抛一枚硬币两次,设事件 A 为第一次抛得结果为正面向上,事件 B 为两次抛得结果中

出现正面向上；

(2) 对一个目标不断射击，直到击中目标为止. 事件 A 为在三次内击中，事件 B 为至少打了三次；

(3) 灯泡使用寿命 t 进行测试，事件 A 为使用寿命小于 1000 小时.

【解】 (1) 将正面向上记为“正”，正面向下记为“反”，则样本空间为 $\Omega=\{(正,正),(反,正),(正,反),(反,反)\}$. 事件 $A=\{(正,正),(正,反)\}$，事件 $B=\{(正,正),(反,正),(正,反)\}$.

(2) 目标可能一次就击中，也可能在第 n 次时才击中，则样本空间为 $\Omega=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$. 事件 $A=\{1,2,3\}$，事件 $B=\{3,4,5,\cdots\}$.

(3) 灯泡使用寿命 t 可能为大于 0 的任何数，则样本空间 $\Omega=\{t\mid t>0\}$，事件 $A=\{t\mid t<1000\}$.

1.1.4 事件的包含

定义 如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 包含于事件 B，记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$.

【注】 从集合关系来说，事件 A 的每一个样本点都属于事件 B.

1.1.5 事件的相等

定义 如果 $A\supset B$ 与 $B\supset A$ 同时成立，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A=B$.

【注】 $A=B$ 表示事件 A 与事件 B 有完全相同的样本点.

1.1.6 事件的交

定义 如果事件 A 与事件 B 同时发生，则称这样的一个事件为事件 A 与事件 B 的交或积，记为 $A\cap B$ 或 AB.

集合 $A\cap B$ 是由同时属于 A 与 B 的所有公共样本点构成.

事件的交可以推广到有限多个事件或可数无穷多个事件的情形：

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n,\quad \bigcap_{i=1}^{+\infty}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots.$$

1.1.7 互斥事件

定义 如果事件 A 与事件 B 的关系为 $AB=\varnothing$，即 A 与 B 不能同时发生，则称事件 A 和事件 B 为互斥或互不相容.

互斥的两事件没有公共样本点.

事件的互斥可以推广到有限多个事件或可数无穷多个事件的情形：

若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个事件均互斥，即 $A_iA_j=\varnothing,i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n$，则称这 n 个事件是两两互斥或两两互不相容.

如果可数无穷个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中任意两个事件均互斥，即 $A_iA_j=\varnothing,i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n,\cdots$，则称这可数无穷个事件是两两互斥或两两互不相容.

【例】 设随机事件 A 与 B 互斥，且 $A=B$，则 $A=$ _____.

【解】 A 与 B 互斥，即 $AB=\varnothing$，且 $A=B$，故有 $AA=A=\varnothing$.

答案应填 $\varnothing$.

1.1.8 事件的并

定义 如果事件 A 与事件 B 至少有一个发生，则称这样一个事件为事件 A 与事件 B 的并或和，记为 $A\cup B$.

集 $A\cup B$ 是由属于 A 与 B 的所有样本点构成.

事件的并可推广到有限多个事件或可数无穷多个事件的情形：

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$，$\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$.

1.1.9　对立事件

定义　如果事件 A 与事件 B 有且仅有一个发生，即同时成立 $A \cup B = \Omega$，且 $A \cap B = \varnothing$，则称事件 A 与事件 B 为对立事件或互逆事件，记为 $\overline{A} = B$ 或 $\overline{B} = A$.

【注】　在样本空间中，集合 $\overline{A}$ 是由所有不属于事件 A 的样本点构成的集合.

1.1.10　事件的差

定义　事件 A 发生而事件 B 不发生称为事件 A 与事件 B 的差，记为 $A - B$.

在样本空间中集合 $A - B$ 是由属于事件 A 而不属于事件 B 的所有样本点构成的集合. 显然 $A - B = A\overline{B}$.

直观上常用几何图形表示集合. 事件间的关系：包含、相等、互斥、对立和事件间的运算：交、并、差也可以用几何图形直观表示. 如图 1-1 所示.

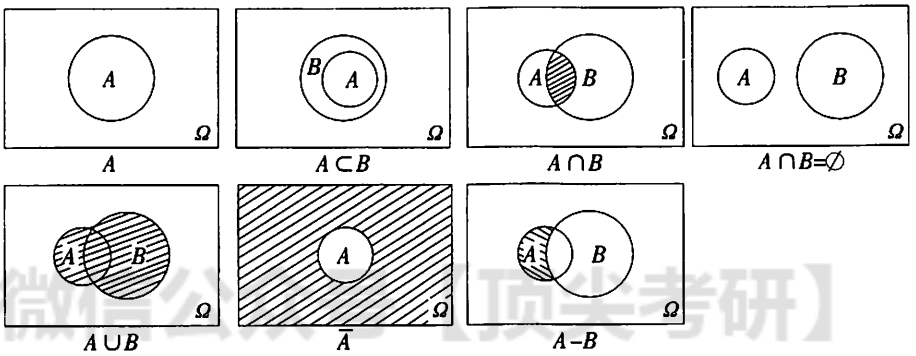


图 1-1

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

1.1.11　事件的运算规律

(1) 交换律　$A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$.

(2) 结合律　$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$，

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(3) 分配律　$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$，

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(4) 对偶律　$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$，$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$，

$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$，$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

例题分析

【例 1】　设随机事件 A 与 B 是对立事件，则事件 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 仍为对立事件.

证明　因为 A 与 B 是对立事件，即 $A \cup B = \Omega$，$AB = \varnothing$，也就有 $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{AB} = \overline{\varnothing} = \Omega$，且 $\overline{A}\,\overline{B} = \overline{A \cup B} = \overline{\Omega} = \varnothing$，所以 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 仍为对立事件.

【例 2】　从一批产品中每次抽一件，不放回，如此抽取三次，用 $A_i (i = 1,2,3)$ 表示事件“第 i 次取到的产品为正品”，试用文字叙述下列事件：

(1) $A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup A_1A_3$；　(2) $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$；

(3) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$；　(4) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$；

用 A_1, A_2, A_3 表示下列事件：

(5) 都取到正品；　　(6) 至少有一件次品；

(7) 只有一件次品；　　(8) 取到次品不多于一件.

【解】(1) 至少取到两件正品或次品不多于一件.

(2) 取到的全是次品或没取到正品.

(3) 至少取到一件正品.

(4) 恰取到一件正品.

(5) $A_1A_2A_3$.

(6) $\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \overline{A}_3$ 或 $\overline{A_1A_2A_3}$.

(7) $\overline{A}_1A_2A_3 \cup A_1\overline{A}_2A_3 \cup A_1A_2\overline{A}_3$.

(8) $A_1A_2A_3 \cup \overline{A}_1A_2A_3 \cup A_1\overline{A}_2A_3 \cup A_1A_2\overline{A}_3$ 或 $A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup A_1A_3$.

【评注】 同一事件可有不同表达形式. 要正确理解“至少”,“最多”,“恰有”等的含义.

【例 3】 设 A, B 为两事件，则 $(A \cup B)(\overline{A} \cup B)(A \cup \overline{B})(\overline{A} \cup \overline{B}) =$ _____.

【解】根据事件运算的分配律知

$$(A \cup B)(\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup B = \varnothing \cup B = B,$$

同理

$$(A \cup \overline{B})(\overline{A} \cup \overline{B}) = \overline{B},$$

所以

$$(A \cup B)(\overline{A} \cup B)(A \cup \overline{B})(\overline{A} \cup \overline{B}) = B\overline{B} = \varnothing.$$

答案应填 $\varnothing$.

【评注】 同样也是分配律有

$$(A \cup B)(\overline{A} \cup B) = A\overline{A} \cup B\overline{A} \cup AB \cup BB = B.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 4】 A, B, C 为任意三事件，则事件 $(A-B) \cup (B-C)$ 等于事件

(A) $A-C$.　　(B) $A \cup (B-C)$.

(C) $(A \cup B)-C$.　　(D) $(A \cup B)-BC$.

【解】【方法一】 用文氏图(见图 1-2)可看出 $(A-B) \cup (B-C)$ 与(D)即 $(A \cup B)-BC$ 相等.

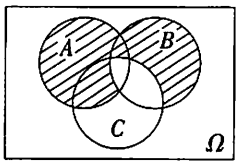


图 1-2

【方法二】 因 $A-B = A\overline{B}$，故

$$(A-B) \cup (B-C) = A\overline{B} \cup B\overline{C}.$$

而

$$\begin{aligned}(A \cup B)-BC &= (A \cup B)\overline{BC} = (A \cup B)(\overline{B} \cup \overline{C}) \\ &= A\overline{B} \cup A\overline{C} \cup B\overline{B} \cup B\overline{C} \\ &= A\overline{B} \cup (A\overline{B} \cup AB)\overline{C} \cup \varnothing \cup B\overline{C} \\ &= (A\overline{B} \cup A\overline{B}\overline{C}) \cup (AB\overline{C} \cup B\overline{C}) = A\overline{B} \cup B\overline{C}.\end{aligned}$$

所以答案应选(D).

【例 5】 设随机事件 A, B 满足条件 $AB = \overline{A}\,\overline{B}$，则 $A \cup B =$ _____.

【解】 因 $AB = \overline{A}\,\overline{B}$，将这等式两边与 B 求交，有 $(AB)B = (\overline{A}\,\overline{B})B = \overline{A}(\overline{B}B) = \overline{A}\varnothing = \varnothing$，即 $AB = \varnothing$，根据 $AB = \overline{A}\,\overline{B}$，也就有 $\overline{A}\,\overline{B} = AB = \varnothing$，因而 $\overline{A \cup B} = \varnothing$，$A \cup B = \Omega$.

答案应填 Ω. 由 $AB = \varnothing$ 和 $A \cup B = \Omega$ 得出 $A = \overline{B}$，A, B 是对立事件. 在解题过程中，用了在等式两边与同一事件相交其结果等式保持不变. 同样地，如果在等式两边并上同一事件其结果等式仍保持不变. 但反之就不能成立，例如

$$AB = AC \nRightarrow B = C.$$
$$A \cup B = A \cup C \nRightarrow B = C.$$

【例 6】　设随机事件 A,B 满足条件

$$A \cup C = B \cup C \text{ 和 } C - A = C - B,$$

则 $A\overline{B} \cup \overline{A}B =$ _____.

解　因为 $C - A = C - B$，所以 $C\overline{A} = C\overline{B}$.

由等式 $A \cup C = B \cup C$ 得 $\overline{A}\,\overline{C} = \overline{B}\overline{C}$，将此等式两边同等式 $C\overline{A} = C\overline{B}$ 相应两边分别相加得到 $\overline{A} = \overline{B}$，即 $A = B$，因此，$A\overline{B} \cup \overline{A}B = \varnothing$.

答案应填 $\varnothing$.

本题也可以根据所给条件直接推得：

$A = (A \cup C) - (C - A) = (B \cup C) - (C - B) = B$，也有 $A\overline{B} = \overline{A}B = \varnothing$.

§2　概率、条件概率、独立性和五大公式

内容精讲

1.2.1　概率公理

设试验 E 的样本空间为 Ω，称实值函数 P 为概率，如果 P 满足如下三条件：

(1) 对于任意事件 A，有 $P(A) \geqslant 0$；

(2) 对于必然事件 Ω，有 $P(\Omega) = 1$；

(3) 对于两两互斥的可数无穷个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 有

$$P(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + \cdots,$$

称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

1.2.2　条件概率

定义　设 A,B 为两事件，且 $P(A) > 0$，称

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.

1.2.3　事件独立性

定义　设 A,B 两事件满足等式

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

则称 A 与 B 相互独立.

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个事件，如果对于任意 $k(1 < k \leqslant n)$，任意 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$ 满足等式

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}),$$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为相互独立的事件.

【注】　n 个事件相互独立需要 $C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n = 2^n - n - 1$ 个等式成立.

1.2.4　概率的性质

(1) $P(\varnothing) = 0$；

(2) 对于两两互斥的有限个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，有 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) +$

$P(A_2)+\cdots+P(A_n)$;

(3)$P(\overline{A})=1-P(A)$;

(4)$A\subset B$,则 $P(A)\leqslant P(B)$;

(5)$0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

【注】 条件概率也是概率,条件概率也有概率相应的各性质.

1.2.5 相互独立的性质

(1)A 与 B 相互独立的充要条件是 A 与 $\overline{B}$ 或 $\overline{A}$ 与 B 或 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相互独立.

(2)当 $0<P(A)<1$ 时,A 与 B 独立等价于 $P(B\mid A)=P(B)$ 或 $P(B\mid A)=P(B\mid \overline{A})$ 成立.

(3)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,则 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 必两两独立.反之,若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两独立,则 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 不一定相互独立.

(4)当 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立时,它们的部分事件也是相互独立的.

将相互独立的 n 个事件中任何几个事件换成它们相应的对立事件,则这新组成的 n 个事件也相互独立.

1.2.6 五大公式

(1)加法公式 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$;

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$.

(2)减法公式 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

(3)乘法公式

当 $P(A)>0$ 时,$P(AB)=P(A)P(B\mid A)$;

当 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$ 时,

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

(4)全概率公式

设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 满足 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i=\Omega$,$B_iB_j=\varnothing(i\neq j)$ 且 $P(B_k)>0,k=1,2,\cdots,n$,则对任意事件 A 有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i),$$

称满足 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i=\Omega$ 和 $B_iB_j=\varnothing(i\neq j)$ 的 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 Ω 的一个完备事件组.

(5)贝叶斯公式

设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 满足 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i=\Omega$,$B_iB_j=\varnothing(i\neq j)$ 且 $P(A)>0$,$P(B_k)>0,k=1,2,\cdots,n$,则

$$P(B_j\mid A)=\frac{P(B_j)P(A\mid B_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)},\ j=1,2,\cdots,n.$$

【注】 (1)概率计算中常要结合对偶律应用性质 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

(2)计算相互独立事件的概率时,常将事件之间的“并”或“差”转化成“交”来计算.因为事件的独立性是用事件之交的概率来定义.而将相互独立事件中某个或某几个事件换成相应的对立事件并不影响它们之间的相互独立性,所以将“并”和“差”化成交后,常常会带来计算上的方便.例如,A 与 B 独立时,

$$P(A\cup B)=1-P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(\overline{A})P(\overline{B}),$$
$$P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B}).$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

例题分析

【例 1】　设 A,B,C 是三个随机事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\frac{1}{8}$，则 A,B,C 至少有一个发生的概率为_____.

【解】“至少有一个发生”的概率相当于 $P(A\cup B\cup C)$，于是用概率的加法公式有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC).$$

上式的右端中仅 $P(ABC)$ 是未知，但由 $0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0$，可知 $P(ABC)=0$，所以

$$P(A\cup B\cup C)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-0-\frac{1}{8}+0=\frac{5}{8}.$$

答案应填 $\frac{5}{8}$.

【例 2】　设两个相互独立的事件 A 和 B 至少发生一个的概率为 $\frac{8}{9}$，已知 A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，则 $P(A)=$ _____.

【解】因为 $P(A\bar{B})=P(\bar{A}B)$，故 $P(A)=P(A\bar{B})+P(AB)=P(\bar{A}B)+P(AB)=P(B)$.

由题设，已知 $P(A\cup B)=\frac{8}{9}$，故 $P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A\cup B)=\frac{1}{9}$.

又因为 A,B 独立，所以 $\bar{A},\bar{B}$ 也相互独立，且有 $P(\bar{A})=P(\bar{B})$，所以

$$P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})=[P(\bar{A})]^2=\frac{1}{9},P(\bar{A})=\frac{1}{3}(\text{取正号}),$$

故 $P(A)=\frac{2}{3}$.

答案应填 $\frac{2}{3}$.

【评注】　本题解题过程中，如果直接用加法公式，也可以做，步骤稍多一些，解法如下：

因为 $P(A\bar{B})=P(\bar{A}B)$，故

$$P(A\bar{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)=P(\bar{A}B),$$

所以 $P(A)=P(B)$.

设 $P(A)=P(B)=a$，则由加法公式

$$\frac{8}{9}=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

因 A 与 B 独立，所以 $P(AB)=P(A)P(B)=a^2$，将已知条件代入加法公式得

$$\frac{8}{9}=a+a-a^2,\text{即 } a^2-2a+\frac{8}{9}=0,$$

该方程有两个根 $a_1=\frac{2}{3},a_2=\frac{4}{3}$（大于 1，舍去）. 解得 $P(A)=\frac{2}{3}$.

微信公众号【贝大考研】(ID: djk66)

【例 3】 随机事件 A,B 满足 $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$ 和 $P(A\cup B)=1$,则必有

(A)$A\cup B=\Omega$. (B)$AB=\varnothing$.

(C)$P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$. (D)$P(A-B)=0$.

解 根据概率的加法公式

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

将已知条件代入得

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-P(AB),$$

即 $$P(AB)=0.$$

而 $$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1.$$

答案应选(C).

【评注】 本题很容易犯的错误是:

(1) 因为 $P(A\cup B)=1$,所以 $A\cup B=\Omega$;

(2) 因为 $P(AB)=0$,所以 $AB=\varnothing$.

显然,$P(\Omega)=1$,$P(\varnothing)=0$,但 $P(A)=1$ 不能得出 $A=\Omega$;$P(B)=0$ 不能得出 $B=\varnothing$.

例如:令 $\Omega=[0,1]$,如果 A 是 Ω 中的小区间,则定义 $P(A)$ 为该区间的长度. 如取 B 为 Ω 中任一点,其概率为 0,但 $B\neq\varnothing$;反之如果 $A=\overline{B}$,则 $P(A)=1$,$A\neq\Omega$.

【例 4】 设 $0<P(A)<1$,$0<P(B)<1$ 且 $P(B\mid A)+P(\overline{B}\mid\overline{A})=1$,则必有

(A)$P(A\mid B)=P(\overline{A}\mid B)$. (B)$P(A\mid B)\neq P(\overline{A}\mid B)$.

(C)$P(AB)=P(A)P(B)$. (D)$P(AB)\neq P(A)P(B)$.

解 由 $P(B\mid A)+P(\overline{B}\mid\overline{A})=1$,得

$$P(B\mid A)=1-P(\overline{B}\mid\overline{A})=P(B\mid\overline{A}).$$

根据条件概率定义,上式可改写成

$$\frac{P(BA)}{P(A)}=\frac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})},$$

即 $$P(A)P(B\overline{A})=P(\overline{A})P(BA)=[1-P(A)]P(BA),$$

所以 $$P(A)P(B\overline{A})+P(A)P(BA)=P(BA),$$

因此 $$P(A)P(B)=P(BA).$$

答案应选(C).

【评注】 本题是选择题,可以不要求严格推导过程. 从 $P(B\mid A)+P(\overline{B}\mid\overline{A})=1$ 得到 $P(B\mid A)=P(B\mid\overline{A})$,即 A 发生的条件下 B 发生的概率与 A 不发生的条件下 B 发生的概率相等,因而 A 发生与不发生不影响 B 发生的概率,也就是 A,B 相互独立,直接选(C).

【例 5】 已知 $P(A)=0$,$P(B)=1$,则

(A)$A=\varnothing$,$B=\Omega$. (B)$A\subset B$.

(C)A 与 B 互斥. (D)A 与 B 相互独立.

解 由于 $0\leqslant P(AB)\leqslant P(A)=0$,所以 $P(AB)=0$. 又因为 $P(A)P(B)=0$,所以 $P(AB)=P(A)P(B)$ 成立,即 A 与 B 相互独立. 答案应选(D).

【评注】 本题的解题过程只用了 $P(A)=0$ 就得出 $P(AB)=P(A)P(B)$,即零概率事

件与任何事件都相互独立. 同样,对概率为 1 的事件 B,有 $P(\overline{B})=0$,即 $\overline{B}$ 与任何事件相互独立,也就有 B 与任何事件都相互独立.

【例 6】 袋中有 20 个红球和 30 个白球,今有两人先后随机地从袋中各取一球,取后不放回. 则第二个人取得红球的概率是_____.

解 【方法一】 一般理解第二个人取得红球与第一个人取得什么球有关. 这就要用全概率公式来计算.

设事件 A_i 表示第 i 个人取得球是红球,$i=1,2$,则根据全概率公式:

$$P(A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2\mid \overline{A}_1)=\frac{20}{50}\cdot\frac{19}{49}+\frac{30}{50}\cdot\frac{20}{49}=\frac{2}{5}.$$

答案应填 $\frac{2}{5}$.

【方法二】 用古典型概率来解,只考虑第二个人取得的球,这 50 个球中每一个球都会等可能地被第二个人取到,而取到红球的可能有 20 个. 故所求概率为 $\frac{20}{50}=\frac{2}{5}$. 答案应填 $\frac{2}{5}$.

【评注】 在古典型概率和几何型概率的求解时,常常要求先去构造样本空间,然后再计算样本空间中和所求事件中的样本点数. 如果在反映所求事件的前提下,把样本空间构造得越简单,则相应的计算就越简单,例如本题的方法二比方法一要简单很多.

【例 7】 设事件 A,B,C 满足条件:$P(B)>0$,$1>P(C)>0$,且 B 与 C 相互独立,证明:

$$P(A\mid B)=P(A\mid BC)P(C)+P(A\mid B\overline{C})P(\overline{C}).$$

证明

$$\begin{aligned}P(A\mid B)&=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{P(B)}[P(ABC)+P(AB\overline{C})]\\&=\frac{1}{P(B)}[P(A\mid BC)P(BC)+P(A\mid B\overline{C})P(B\overline{C})],\end{aligned}$$

事件 B 和 C 相互独立,B 和 $\overline{C}$ 也相互独立,从而

$$\begin{aligned}P(A\mid B)&=\frac{1}{P(B)}[P(A\mid BC)P(B)P(C)+P(A\mid B\overline{C})P(B)P(\overline{C})]\\&=P(A\mid BC)P(C)+P(A\mid B\overline{C})P(\overline{C}).\end{aligned}$$

【例 8】 有两个盒子,第一盒中装有 2 个红球,1 个白球,第二盒中装一半红球,一半白球. 现从两盒中各任取一球放在一起,再从中取一球,问:

(1) 这个球是红球的概率;

(2) 若发现这个球是红球,问第一盒中取出的球是红球的概率.

解 (1) 设事件 A_i 为从第 i 个盒中取出一个红球,$i=1,2$,事件 B 为最后取红球.

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3},P(B\mid A_1A_2)=1,$$

同理

$$P(A_1\overline{A}_2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3},P(B\mid A_1\overline{A}_2)=\frac{1}{2},$$

$$P(\overline{A}_1A_2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6},P(B\mid \overline{A}_1A_2)=\frac{1}{2},$$

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6},P(B\mid \overline{A}_1\overline{A}_2)=0.$$

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

由全概率公式有

$$\begin{aligned}P(B) &= P(B \mid A_1A_2)P(A_1A_2) + P(B \mid A_1\overline{A}_2)P(A_1\overline{A}_2) + \\ &\quad P(B \mid \overline{A}_1A_2)P(\overline{A}_1A_2) + P(B \mid \overline{A}_1\overline{A}_2)P(\overline{A}_1\overline{A}_2) \\ &= \frac{7}{12}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2)P(A_1 \mid B) &= P(A_1A_2 + A_1\overline{A}_2 \mid B) = P(A_1A_2 \mid B) + P(A_1\overline{A}_2 \mid B) \\ &= \frac{P(B \mid A_1A_2)P(A_1A_2) + P(B \mid A_1\overline{A}_2)P(A_1\overline{A}_2)}{P(B)} = \frac{6}{7}.\end{aligned}$$

【评注】 全概率公式和贝叶斯公式的应用首先要对问题中所涉及的事件作假设，如 A_i, B 等；其次要确定 Ω 的完备事件组，本题中为 $A_1A_2, A_1\overline{A}_2, \overline{A}_1A_2, \overline{A}_1\overline{A}_2$；余下就是根据题设条件，计算相应概率，代入公式求出结果.

本题第二盒中红球、白球各占一半，故 $P(A_2) = P(\overline{A}_2) = \frac{1}{2}$，且 A_1, A_2 是相互独立的. 有时 Ω 的完备事件组的选取可使求解过程更简单. 在本题中可以设事件 A 为最后取的球来自第一盒，则 $\overline{A}$ 就是最后的球来自第二盒.

$$P(B) = P(A)P(B \mid A) + P(\overline{A})P(B \mid \overline{A}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12}.$$

【例 9】 假设有两箱同种零件，第一箱内装 n 件一等品；第二箱内装 m 件，其中仅有一件一等品（m, n 均大于 2）. 现从两箱中随意挑出一箱，然后从该箱中先后随机取出两个零件（取出的零件不放回），试求：

（1）先取出的零件是一等品的概率 p；

（2）在先取出的零件是一等品的条件下，第二次取出的零件仍然是一等品的条件概率 q.

解 设事件 A 为被挑出的是第一箱，则 $\overline{A}$ 表示被挑出的是第二箱. 显然，A 与 $\overline{A}$ 构成一个 Ω 的完备事件组，且 $P(A) = P(\overline{A}) = \frac{1}{2}$，再设事件 B_i 为第 i 次取出的零件是一等品（$i = 1, 2$）.

（1）应用全概率公式：

$$\begin{aligned}p = P(B_1) &= P(B_1 \mid A)P(A) + P(B_1 \mid \overline{A})P(\overline{A}) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{m+1}{2m}.\end{aligned}$$

（2）设先取出的零件是一等品的条件下，第二次取出的零件仍然是一等品，这事件为 C.

$$q = P(C) = P(C \mid A)P(A) + P(C \mid \overline{A})P(\overline{A})$$

$P(C \mid A)$ 是在先挑第一箱的条件下，已知从这箱取出第一个零件为一等品的前提下. 由于第一箱全是一等品，因此再取一个零件必为一等品，所以 $P(C \mid A) = 1$. 而如果先挑的是第二箱，再从这第二箱已知取出的第一个零件为一等品，由于第二箱中只有一个一等品，因此再取一个零件只能是非一等品，即 $P(C \mid \overline{A}) = 0$.

$$\begin{aligned}q = P(C) &= P(C \mid A)P(A) + P(C \mid \overline{A})P(\overline{A}) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

【评注】 1987 年考过这种类似的考题，当年对（2）很多考生用了一种错误的解法：

$$q = P(B_2 \mid B_1) = \frac{P(B_1B_2)}{P(B_1)}$$
$$= \frac{P(B_1B_2 \mid A)P(A) + P(B_1B_2 \mid \overline{A})P(\overline{A})}{P(B_1 \mid A)P(A) + P(B_1 \mid \overline{A})P(\overline{A})}$$
$$= \frac{1 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{2}}{1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{m} \times \frac{1}{2}} = \frac{m}{m+1}$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

显然，$\frac{m}{m+1} \neq \frac{1}{2}(m > 2)$ 两种解法结果不一样.

事实上，事件 C 发生与挑出的是哪箱有关，挑第一箱 C 必发生；挑第二箱 C 不可能发生，与 m 和 n 没关系，$q = P(C)$ 应该为 $\frac{1}{2}$.

利用公式 $q = P(B_2 \mid B_1) = \frac{P(B_1B_2)}{P(B_1)} = \frac{P(B_1B_2 \mid A)P(A) + P(B_1B_2 \mid \overline{A})P(\overline{A})}{P(B_1 \mid A)P(A) + P(B_1 \mid \overline{A})P(\overline{A})}$ 时，其中 B_1 和 B_2 必须是取自同一箱中的两个零件，上式分子式中 B_1B_2 分成第一箱或者第二箱，能确保 B_1 与 B_2 在同一箱，而分母中的 B_1 与分子中的 B_1 应是同一 B_1，也被分成第一箱和第二箱，就没法保证分子中的 B_1 与分母中的 B_1 在同一箱了.

下面的例 10 是 1989 年的考题.

【例 10】 设有来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份. 随机地取一个地区的报名表，从中先后抽出两份.

(1) 求先抽到的一份是女生表的概率 p；

(2) 已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率 q.

解 设事件 B_i = 第 i 次抽到的报名表是女生表($i = 1,2$)，事件 A_j = 报名表是第 j 区考生的($j = 1,2,3$). 显然 A_1, A_2, A_3 构成完备事件组，且

$$P(A_j) = \frac{1}{3}(j = 1,2,3),$$

$$P(B_1 \mid A_1) = \frac{3}{10}, P(B_1 \mid A_2) = \frac{7}{15}, P(B_1 \mid A_3) = \frac{5}{25}.$$

(1) 应用全概率公式，知

$$p = P(B_1) = \sum_{j=1}^{3} P(A_j)P(B_1 \mid A_j) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{10} + \frac{7}{15} + \frac{5}{25}\right) = \frac{29}{90}.$$

(2) 当 A_1 发生时，$P(B_1 \mid \overline{B}_2) = \frac{3}{9}$；当 A_2 发生时，$P(B_1 \mid \overline{B}_2) = \frac{7}{14}$；当 A_3 发生时，$P(B_1 \mid \overline{B}_2) = \frac{5}{24}$，所以

$$q = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{14} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{24} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{5}{24}\right) = \frac{25}{72}.$$

【评注】 与例 9 相似，本题很容易错误解成如下结果：

(2)* $q = P(B_1 \mid \overline{B}_2) = \frac{P(B_1\overline{B}_2)}{P(\overline{B}_2)}$，对 $P(B_1\overline{B}_2)$ 和 $P(\overline{B}_2)$ 用全概率公式：

$$P(B_1\overline{B}_2) = \sum_{j=1}^{3} P(B_1\overline{B}_2 \mid A_j)P(A_j) = \frac{1}{3}\left(\frac{3 \cdot 7}{10 \cdot 9} + \frac{7 \cdot 8}{15 \cdot 14} + \frac{5 \cdot 20}{25 \cdot 24}\right) = \frac{20}{90},$$

$$P(\bar{B}_2)=\sum_{j=1}^{3}P(\bar{B}_2\mid A_j)P(A_j)=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{10}+\frac{8}{15}+\frac{20}{25}\right)=\frac{61}{90},$$

因此，
$$q=P(B_1\mid\bar{B}_2)=\frac{P(B_1\bar{B}_2)}{P(\bar{B}_2)}=\frac{20}{61}.$$

这种解法错误与例 9 类似.

§3 古典概型与伯努利概型

内容精讲

1.3.1 古典型概率

定义 当试验结果为有限 n 个样本点，且每个样本点的发生具有相等的可能性，如果事件 A 由 n_A 个样本点组成，则事件 A 的概率

$$P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{A\text{ 所包含的样本点数}}{\text{样本点总数}}.$$

称有限等可能试验中事件 A 的概率 $P(A)$ 为古典型概率.

1.3.2 几何型概率

定义 当试验的样本空间是某区域(该区域可以是一维，二维或三维等等)，以 $L(\Omega)$ 表示其几何度量(长度、面积、体积等等)，$L(\Omega)$ 为有限且试验结果出现在 Ω 中任何区域的可能性只能与该区域几何度量成正比. 事件 A 的样本点所表示的区域为 Ω_A，则事件 A 的概率

$$P(A)=\frac{L(\Omega_A)}{L(\Omega)}=\frac{\Omega_A\text{ 的几何度量}}{\Omega\text{ 的几何度量}}.$$

称这种样本点个数无限但几何度量上的等可能试验中事件 A 的概率 $P(A)$ 为几何型概率.

1.3.3 n 重伯努利试验

定义 把一随机试验独立重复作若干次，即各次试验所联系的事件之间相互独立，且同一事件在各个试验中出现的概率相同，称为独立重复试验.

如果每次试验只有两个结果 A 和 $\bar{A}$，则称这种试验为伯努利试验. 将伯努利试验独立重复进行 n 次，称为 n 重伯努利试验.

设在每次试验中，概率 $P(A)=p(0<p<1)$，则在 n 重伯努利试验中事件 A 发生 k 次的概率，又称为二项概率公式：

$$C_n^k p^k(1-p)^{n-k},k=0,1,2,\cdots,n.$$

例题分析

【例 1】 为从 2 个次品、8 个正品的 10 个产品中将 2 个次品挑出，随机地从中逐个测试，则不超过 4 次测试就把 2 个次品挑出的概率为_____.

解 **【方法一】** 把 10 个产品随机排成一行，按先后次序逐个测试. 总共有 10!种排法. 如要不超过 4 次测试就把 2 个次品挑出，就要求在前 4 个产品中有 2 个次品和 2 个正品，共有 $C_2^2C_8^2$4!6!，所以所求的概率为

$$P=\frac{C_2^2C_8^2 4!6!}{10!}=\frac{\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}\cdot 4!}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}=\frac{2}{15}.$$

【方法二】 如果只考虑前4次测试，总的可能为10个产品中任选4个，有A_{10}^4种. 前4次测试就包含2个次品的可能为$C_2^2C_8^2 4!$，所以所求概率为

$$P=\frac{C_2^2C_8^2 4!}{A_{10}^4}=\frac{2}{15}.$$

【方法三】 如果只考虑前4次测试而不计它们先后的次序，总的可能为C_{10}^4种选法，现要前4次产品中有2个次品和2个正品即$C_2^2C_8^2$，所求概率为

$$P=\frac{C_2^2C_8^2}{C_{10}^4}=\frac{2}{15}.$$

【方法四】 如果只考虑2个次品在10次测试中的位子，总的可能为C_{10}^2种，现要求前4位中有2个次品，有C_4^2种.

$$P=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{15}.$$

【评注】 在古典型概率公式$P(A)=\frac{n_A}{n}$的计算中，n和n_A都是在同一样本空间中的样本点数. 在本题方法一中考虑的样本空间是10个产品有序的排列，总的有$n=10!$个样本点，在方法二中考虑的样本空间是前4个测试所涉及的产品的排列，总的有$n=A_{10}^4$个样本点. 方法三考虑前4个产品的构成，不计次序，总的有$n=C_{10}^4$个样本点. 方法四只考虑2个次品的可能位子，总的有C_{10}^2个样本点. 显然，方法四最为简单，这是因为方法四的样本空间最简单. 一般说，如果一个概率同时可用有序和无序的样本空间来计算时，常常用无序要简单些；同时可用两种样本空间计算时，常常用较小的样本空间要简单些，总之在计算古典型概率时，尽量选择较小的样本空间.

微信公众号:顶尖考研资料
(ID: djky66)

【例2】 随机地向半圆$\{(x,y)\mid 0<y<\sqrt{2ax-x^2}\}$(其中$a>0$，是常数)内掷一点，则原点和该点的连线与$x$轴的夹角小于$\frac{\pi}{4}$的概率为_____.

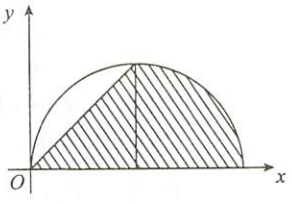


图 1-3

解 半圆即基本事件空间Ω的面积为$\frac{1}{2}\pi a^2$，所求事件即图1-3中阴影部分的面积为$\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}\pi a^2$，所求概率为

$$\frac{\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}\pi a^2}{\frac{1}{2}\pi a^2}=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}.$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例3】 在伯努利试验中，每次试验成功的概率为p，求在第n次成功之前恰失败了m次的概率.

解 事件“第n次成功之前恰失败了m次”等价于事件“在前$m+n-1$次试验中成功了$n-1$次，失败了m次，同时第$m+n$次试验成功”. 根据二项概率公式，所求的概率为

$$C_{m+n-1}^{n-1}p^{n-1}(1-p)^m\cdot p=C_{m+n-1}^{n-1}p^n(1-p)^m.$$

【例 4】 掷一枚硬币 $2n$ 次，出现正面向上次数多于反面向上次数的概率为_____.

解 在 $2n$ 次中有可能正面向上次数等于反面向上次数各 n 次，其概率为 $C_{2n}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$，即 $C_{2n}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$. 而其余各次有一半是正面向上次数多于反面向上次数，另一半是正面向上次数少于反面向上次数. 它们的概率均为 $\frac{1}{2}\left[1-C_{2n}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right]$.

【例 5】 一条自动生产线连续生产 n 件产品不出故障的概率为 $\frac{\lambda^{n}}{n!}e^{-\lambda}$，$n=0,1,2,\cdots$. 假设产品的优质品率为 $p(0<p<1)$. 如果各件产品是否为优质品相互独立.

(1) 计算生产线在两次故障间共生产 k 件($k=0,1,2,\cdots$) 优质品的概率；

(2) 若已知在某两次故障间该生产线生产了 k 件优质品，求它共生产 m 件产品的概率.

解 设事件 B_k = 两次故障间共生产 k 件优质品，事件 A_i = 两次故障间共生产 i 件产品，$i=0,1,2,\cdots$. 显然 $A_0,A_1,A_2,\cdots$ 构成一个完备事件组，且

$$P(A_i)=\frac{\lambda^{i}}{i!}e^{-\lambda},i=0,1,\cdots.$$

当 $i<k$ 时，在 i 个产品中不可能有 k 个优质品，故 $P(B_k\mid A_i)=0$；

当 $i\geqslant k$ 时，在 i 个产品中有 k 个优质品，且各产品是否优质品相互独立，故 $P(B_k\mid A_i)=C_i^k p^k q^{i-k}$，其中 $q=1-p$.

(1) 应用全概率公式，有

$$\begin{aligned}P(B_k)&=\sum_{i=0}^{+\infty}P(A_i)P(B_k\mid A_i)=\sum_{i=k}^{+\infty}P(A_i)P(B_k\mid A_i)=\sum_{i=k}^{+\infty}\frac{\lambda^{i}}{i!}e^{-\lambda}C_i^k p^k q^{i-k}\\&=\sum_{i=k}^{+\infty}\frac{\lambda^{i}}{i!}e^{-\lambda}\frac{i!}{k!(i-k)!}p^k q^{i-k}=\frac{(\lambda p)^{k}}{k!}e^{-\lambda p}\sum_{i=k}^{+\infty}\frac{(\lambda q)^{i-k}}{(i-k)!}e^{-\lambda q}\\&=\frac{(\lambda p)^{k}}{k!}e^{-\lambda p},k=0,1,2,\cdots\end{aligned}$$

(2) 当 $m<k$ 时，$P(A_m\mid B_k)=0$；

当 $m\geqslant k$ 时，

$$\begin{aligned}P(A_m\mid B_k)&=\frac{P(A_m)P(B_k\mid A_m)}{P(B_k)}=\frac{k!}{(\lambda p)^{k}e^{-\lambda p}}\cdot\frac{\lambda^{m}}{m!}e^{-\lambda}\cdot\frac{m!}{k!(m-k)!}p^k q^{m-k}\\&=\frac{(\lambda q)^{m-k}}{(m-k)!}e^{-\lambda q},m=k,k+1,\cdots\end{aligned}$$

【评注】 本题的完备事件组为可数无穷个 $A_0,A_1,A_2,\cdots$. 条件概率 $P(B_k\mid A_i)$ 计算是一个 i 重伯努利概型，其间还用到公式 $e^{x}=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{x^{i}}{i!}$.

小结

古典型概率的计算是一个难点. 首先，样本空间 Ω 往往要根据题意自己去构造. Ω 越简单，计算量就越小；其次，计算样本空间 Ω 和事件 A 的样本点数 n 和 n_A，既不能重复计算，也不能漏算. 这部分内容只要会计算一些典型题就可以了，而不必刻意去做大量古典型概率难题.

伯努利概率主要掌握如何建立模型，判断独立、重复，然后找出 p.

微信公众号【顶尖考研】 (ID: diky66)

第二章　随机变量及其概率分布

考点与要求

理解　随机变量及其分布函数，离散型随机变量及其概率分布，连续型随机变量及其概率密度.

掌握　分布函数性质，0-1 分布、二项分布 $B(n,p)$、几何分布、超几何分布、泊松分布 $P(\lambda)$ 及它们的应用、均匀分布 $U(a,b)$、指数分布 $E(\lambda)$、正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 及它们的应用，泊松定理的结论和应用条件.

会　计算与随机变量相联系的事件的概率，用泊松分布近似表示二项分布，求随机变量函数的分布.

§1　随机变量及其分布函数

微信公众号【顶尖考研
(ID: djky66)
微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

内容精讲

2.1.1　随机变量

定义　在样本空间 Ω 上的实值函数 $X=X(\omega)$，$\omega\in\Omega$，称 $X(\omega)$ 为随机变量，简记 X.

【注】　$X(\omega)$ 的定义域是 Ω. 常用 X,Y,Z 等表示随机变量.

2.1.2　分布函数

定义　对于任意实数 x，记函数 $F(x)=P\{X\leqslant x\}$，$-\infty<x<+\infty$，称 $F(x)$ 为随机变量 X 的分布函数.

分布函数 $F(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个实值函数，$F(x)$ 的值等于随机变量 X 在区间 $(-\infty,x]$ 内取值的概率，即事件“$X\leqslant x$”的概率.

有的书上将分布函数定义成 $F(x)=P\{X<x\}$，考试大纲要求是 $F(x)=P\{X\leqslant x\}$.

2.1.3　分布函数性质

(1) $0\leqslant F(x)\leqslant 1$；$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，记为 $F(-\infty)=0$；$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$，记为 $F(+\infty)=1$.

(2) $F(x)$ 是单调非减函数，即当 $x_1<x_2$ 时，$F(x_1)\leqslant F(x_2)$.

(3) $F(x)$ 是右连续的，即 $F(x+0)=F(x)$.

(4) 对任意 $x_1<x_2$，有 $P\{x_1<X\leqslant x_2\}=F(x_2)-F(x_1)$.

(5) 对任意的 x，$P\{X=x\}=F(x)-F(x-0)$.

由单调性和 $F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$ 可以推出 $0\leqslant F(x)\leqslant 1$，所以性质(1)，(2)，(3)可以简化为：$F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$；单调非减；右连续.

这恰是函数 $F(x)$ 成为某一随机变量的分布函数的充要条件.

当 $F(x)$ 在 x 处连续时，$F(x)-F(x-0)=0$，根据性质(5)，就有 $P\{X=x\}=0$.

例题分析

【例 1】 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{Ax}{1+x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

求常数 A 及 $P\{1\leqslant X\leqslant 2\}$.

解 由分布函数的性质知

$$1=F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}\frac{Ax}{1+x}=A,$$

故 $A=1$. 注意到 $F(x)$ 在 $x=1$ 处连续，所以

$$P\{1\leqslant X\leqslant 2\}=P\{1<X\leqslant 2\}=F(2)-F(1)=\frac{2}{1+2}-\frac{1}{1+1}=\frac{1}{6}.$$

【例 2】 设随机变量的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}a+\dfrac{b}{(1+x)^2}, & x>0,\\ c, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

求 a,b,c 的值.

解 由分布函数性质：$F(-\infty)=0$ 可知 $c=0$，$F(+\infty)=1$，得 $a=1$.

由 $F(x)$ 在 $x=0$ 处右连续，而 $F(0)=c=0$，故 $b=-1$，所以 $a=1,b=-1,c=0$.

微信公众号【阿米考研】 (qq:1...0) (vip.djky66)

【例 3】 设 $F(x)$ 为随机变量 X 的分布函数，则成立 $P\{x_1<X<x_2\}=F(x_2)-F(x_1)$ 的充要条件是 $F(x)$ 在

(A) x_1 处连续. (B) x_2 处连续.

(C) x_1 和 x_2 至少一处不连续. (D) x_1 和 x_2 都不连续.

解 因为 $P\{x_1<X<x_2\}=P\{x_1<X\leqslant x_2\}-P\{X=x_2\}=F(x_2)-F(x_1)-P\{X=x_2\}$，所以根据 $P\{x_1<X<x_2\}=F(x_2)-F(x_1)$ 可知 $P\{X=x_2\}=0$，即 $F(x_2)-F(x_2-0)=0$，$F(x)$ 在 x_2 处左连续，$F(x)$ 是右连续的，所以在 x_2 处 $F(x)$ 必连续.

答案应选(B).

【例 4】 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x<1,\\ 1-\mathrm{e}^{-x}, & 1\leqslant x.\end{cases}$ 则 $P\{X=1\}=$

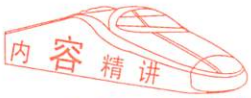
(A)0. (B) $\dfrac{1}{2}$. (C) $\dfrac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}$. (D) $1-\mathrm{e}^{-1}$.

解 根据分布函数的性质. $P\{X=x\}=F(x)-F(x-0)$. 所以

$$P\{X=1\}=F(1)-F(1-0)=1-\mathrm{e}^{-1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}$$

所以答案选(C).

§2　离散型随机变量和连续型随机变量



2.2.1　离散型随机变量

定义　如果一个随机变量的可能取值是有限多个或可数无穷多个，则称它为离散型随机变量.

2.2.2　离散型随机变量 X 的概率分布

定义　设离散型随机变量 X 的可能取值是 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$，$X$ 取各可能值的概率为

$$P\{X=x_k\}=p_k,k=1,2,\cdots.$$

称上式为离散型随机变量 X 的概率分布或分布律.

分布律也有用列表方式给出的：

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	$\cdots$
P	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	$\cdots$

或者

$$X\sim\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots\\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots\end{bmatrix}.$$

这里只给出 X 可能取值可数无穷多个的情形. 不难给出 X 有限个可能取值的情形.

2.2.3　连续型随机变量及其概率密度

定义　如果对随机变量 X 的分布函数 $F(x)$，存在一个非负可积函数 $f(x)$，使得对任意实数 x，都有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t,-\infty<x<+\infty,$$

称 X 为连续型随机变量，函数 $f(x)$ 称为 X 的概率密度.

【评注】　连续型随机变量的分布函数 $F(x)$ 必可表示成 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$，所以这时的 $F(x)$ 一定是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，反之，不能说凡是连续的 $F(x)$ 对应的 X 一定是连续型随机变量. 连续型随机变量的 $F(x)$ 必连续，但 $f(x)$ 不一定是连续的.

2.2.4　分布律性质

(1) $p_k\geqslant 0,k=1,2,\cdots$;

(2) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}p_k=1$.

【注】　性质(1)和(2)也是分布律的充要条件.

2.2.5　概率密度 $f(x)$ 的性质

(1) $f(x)\geqslant 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$;

(3) 对任意实数 $x_1<x_2$，有 $P\{x_1<X\leqslant x_2\}=\int_{x_1}^{x_2}f(t)\mathrm{d}t$;

(4) 在 $f(x)$ 的连续点处有 $F'(x)=f(x)$.

函数 $f(x)$ 成为某一连续型随机变量的概率密度充要条件是 $f(x)$ 具有性质(1)和(2).

如果 X 是连续型随机变量，则显然有

$$P\{x_1<X\leqslant x_2\}=P\{x_1\leqslant X<x_2\}=P\{x_1<X<x_2\}=P\{x_1\leqslant X\leqslant x_2\}.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

例题分析

【例 1】 设随机变量 X 的分布律为

X	x_1	x_2	x_3
P	p_1	p_2	p_3

则其分布函数 $F(x)=$ _____.

解 X 为离散型随机变量，其分布函数为

$$F(x)=\sum_{x_k\leqslant x}P\{X=x_k\}=\sum_{x_k\leqslant x}p_k$$

或者
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<x_1,\\ p_1, & x_1\leqslant x<x_2,\\ p_1+p_2, & x_2\leqslant x<x_3,\\ 1, & x_3\leqslant x.\end{cases}$$

【例 2】 已知 $f(x)$ 和 $f(x)+f_1(x)$ 均为概率密度，则 $f_1(x)$ 必满足条件

(A) $\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)\mathrm{d}x=1, f_1(x)\geqslant 0.$ (B) $\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)\mathrm{d}x=1, f_1(x)\geqslant -f(x).$

(C) $\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)\mathrm{d}x=0, f_1(x)\geqslant 0.$ (D) $\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)\mathrm{d}x=0, f_1(x)\geqslant -f(x).$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

解 $f(x)$ 和 $f(x)+f_1(x)$ 均为概率密度，所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1 \text{ 和 } f(x)\geqslant 0,$$

同时，
$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x)+f_1(x)]\mathrm{d}x=1 \text{ 和 } f(x)+f_1(x)\geqslant 0,$$

因此，
$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)\mathrm{d}x=0, f_1(x)\geqslant -f(x).$$

答案应选(D).

【例 3】 设随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=c\frac{\lambda^k}{k!},\ k=1,2,\cdots,\ \lambda>0,$$

试确定常数 c 的值.

解 显然，此分布不是从 $k=0$ 开始的泊松分布. 由分布律性质 $\sum_{k=1}^{\infty}p_k=1$ 得

$$1=\sum_{k=1}^{+\infty}c\frac{\lambda^k}{k!}=c\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=c\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}-1\right)=c(\mathrm{e}^{\lambda}-1),$$

所以 $c=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\lambda}-1}$. 这里我们用了公式 $\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{x^k}{k!}=\mathrm{e}^x$.

【例 4】 一汽车沿街道行驶，要通过三个设有红绿信号灯的路口，每个信号灯为红或绿与其他信号灯为红或绿相互独立，且红绿两种信号显示的时间相等，以 X 表示该汽车驶过这条街道途中所遇到红灯的个数，求 X 的概率分布和分布函数.

解　如果把每过一个信号灯路口看成一次伯努利试验，总共做了三次相互独立的重复试验，把每一次遇到红灯看成试验成功，成功的概率 $p=\frac{1}{2}$. X 取的值为 0,1,2,3，且

$$P\{X=0\}=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8},\ P\{X=1\}=C_3^1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8},$$

$$P\{X=2\}=C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8},\ P\{X=3\}=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}.$$

所以 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{8}, & 0\leqslant x<1,\\ \frac{1}{2}, & 1\leqslant x<2,\\ \frac{7}{8}, & 2\leqslant x<3,\\ 1, & 3\leqslant x.\end{cases}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 5】 如果 $f(x)$ 是某随机变量 X 的概率密度，则可以判断也为概率密度的是

(A) $f(2x)$.　(B) $f^2(x)$.　(C) $2xf(x^2)$.　(D) $3x^2f(x^3)$.

解　根据概率密度充要条件，

$$3x^2f(x^3)\geqslant 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}3x^2f(x^3)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x^3)\mathrm{d}x^3=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=1.$$

而 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$；

$\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x=1$ 不一定成立；

$2xf(x^2)\geqslant 0$ 不一定成立.

答案应选(D).

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

§3　常用分布

内容精讲

2.3.1　0-1 分布

定义　如果随机变量 X 有分布律

X	0	1
P	$1-p$	p

$0<p<1$，则称 X 服从参数为 p 的 0-1 分布，或称 X 具有 0-1 分布.

2.3.2 二项分布

定义 如果随机变量 X 有分布律

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k},\ k=0,1,2,\cdots,n,$$

其中 $0<p<1, q=1-p$，则称 X 服从参数为 n,p 的二项分布，记作 $X\sim B(n,p)$.

在 n 重伯努利试验中，若每次试验成功率为 $p(0<p<1)$，则在 n 次独立重复试验中成功的总次数 X 服从二项分布.

当 $n=1$ 时，不难验证二项分布就退化成 0-1 分布. 所以 0-1 分布也可以记为 $B(1,p)$.

2.3.3 几何分布

定义 如果随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=pq^{k-1},\ k=1,2,\cdots,$$

其中 $0<p<1, q=1-p$，则称 X 服从参数为 p 的几何分布，或称 X 具有几何分布.

【评注】 在独立地重复做一系列伯努利试验中，若每次试验成功率为 $p(0<p<1)$，则在第 k 次试验时才首次试验成功的概率服从几何分布.

2.3.4 超几何分布

定义 如果随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},\ k=l_1,\cdots,l_2.$$

其中 $l_1=\max(0,n-N+M), l_2=\min(M,n)$. 则称随机变量 X 服从参数为 n,N,M 的超几何分布.

如果 N 件产品中含有 M 件次品，从中任意一次取出 n 件（或从中一件接一件不放回地取 n 件），令 $X=$ 抽取的 n 件产品中的次品件数，则 X 服从参数为 n,N,M 的超几何分布.

如果 N 件产品中含有 M 件次品，从中一件接一件有放回地取 n 次（即每次取出记录后就放回，再取下一个），则 X 服从 $B\left(n,\frac{M}{N}\right)$.

微信公众号 (ID: djky66)

2.3.5 泊松分布

定义 如果随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,2,\cdots,$$

其中 $\lambda>0$ 为常数，则称随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，记为 $X\sim P(\lambda)$.

【评注】 在一段时间内电话总机接到的呼叫次数、候车的旅客数、保险索赔的次数等都服从泊松分布.

2.3.6 均匀分布

定义 如果连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则称 X 在区间 $[a,b]$ 上服从均匀分布，记作 $X\sim U[a,b]$.

如果概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则称 X 在区间 (a,b) 上服从均匀分布，记作 $X\sim U(a,b)$.

【评注】 无论 $X\sim U[a,b]$ 或 $X\sim U(a,b)$，它们的分布函数均为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x<b,\\ 1, & b\leqslant x.\end{cases}$$

2.3.7　指数分布

定义　如果连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}\quad \lambda>0.$$

则称 X 服从参数为 λ 的指数分布，记作 $X\sim E(\lambda)$.

【评注】　有的书上将指数分布定义成具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}\quad \lambda>0.$$

考试大纲要求是

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}\quad \lambda>0.$$

设 $X\sim E(\lambda)$，则 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}\quad \lambda>0.$$

指数分布有很多应用，有许多种寿命的分布都近似地服从指数分布.

2.3.8　正态分布

定义　如果随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ -\infty<x<+\infty,$$

其中 μ,σ 为常数且 $\sigma>0$，则称 X 服从参数为 μ,σ 的正态分布，记作 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

当 $\mu=0,\sigma^2=1$ 时，即 $X\sim N(0,1)$，称 X 服从标准正态分布，此时用 $\varphi(x)$ 表示 X 的概率密度，即

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ -\infty<x<+\infty.$$

【评注】　$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其分布函数为

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt.$$

当 $X\sim N(0,1)$ 时，分布函数用 $\Phi(x)$ 表示

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

2.3.9　常用性质

(1) 泊松定理：在伯努利试验中，p 代表事件 A 在试验中出现的概率，它与试验总数 n 有关，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}np=\lambda$，则

$$\lim_{n\to\infty}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

【评注】　应用泊松定理的要求：n 较大($n\geqslant 100$)，p 较小($p\leqslant 0.1$)，np 不太大. 这时有近似公式

$$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{(np)^k}{k!}e^{-np}.$$

(2) 设 $X \sim U[a,b]$,则对 $a \leqslant c < d \leqslant b$,有

$$P\{c < X \leqslant d\} = \frac{d-c}{b-a},$$

即随机变量落入区间$[c,d]$的概率等于该区间长度与$[a,b]$长度之比.

(3) 设 $X \sim E(\lambda)$,则有

①$P\{X > t\} = \int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda t}$, $t > 0$.

②$P\{X > t+s \mid X > s\} = \dfrac{P\{X > t+s\}}{P\{X > s\}} = \dfrac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P\{X > t\}$, $t, s > 0$.

此性质称为指数分布具有“无记忆性”.

(4) 设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,其分布函数为 $F(x)$,则

①$F(x) = \Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

②$P\{a < X \leqslant b\} = \Phi\left(\dfrac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma}\right)$, $a < b$.

③ 概率密度 $f(x)$ 关于 $x = \mu$ 对称,$\varphi(x)$ 是偶函数.

④$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$.

⑤ 当 $X \sim N(0,1)$ 时,$P\{|X| \leqslant a\} = 2\Phi(a) - 1$.

例题分析

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【例 1】 设某时间段内通过一路口的汽车流量服从泊松分布,已知该时段内没有汽车通过的概率为$\dfrac{1}{e}$,则这段时间内至少有两辆汽车通过的概率为_____.

解 设这段时间内汽车流量 $X \sim P(\lambda)$,即

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

由题设,知

$$P\{X = 0\} = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = \frac{1}{e},$$

由此可见 $\lambda = 1$,故所求概率为

$$\begin{aligned} P\{X \geqslant 2\} &= 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} = 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} \\ &= 1 - e^{-1} - e^{-1} = 1 - \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

答案应填 $1 - \dfrac{2}{e}$.

【例 2】 设随机变量 ξ 在(1,6)上服从均匀分布,则方程 $x^2 + \xi x + 1 = 0$ 有实根的概率是_____.

解 方程 $x^2 + \xi x + 1 = 0$ 有实根的充要条件是 $\Delta = \xi^2 - 4 \geqslant 0$,其概率为

$$P\{\xi^2 - 4 \geqslant 0\} = P\{|\xi| \geqslant 2\} = P\{\xi \leqslant -2\} + P\{\xi \geqslant 2\}.$$

由于 ξ 在区间(1,6)上服从均匀分布,概率密度为

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{5}, & 1 < t < 6, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

因此，所求概率是

$$P\{\xi^2-4\geqslant 0\}=P\{\xi\leqslant -2\}+P\{\xi\geqslant 2\}=0+\int_2^6\frac{1}{5}\mathrm{d}x=\frac{4}{5}.$$

答案应填 0.8.

【评注】　本题解法可以直接利用性质 2.3.9(2)，而不用通过 $f(t)$ 来求积分.

$$P\{\xi^2-4\geqslant 0\}=P\{\xi\leqslant -2\}+P\{\xi\geqslant 2\}=0+\frac{6-2}{6-1}=\frac{4}{5}.$$

【例 3】　设 X_1,X_2,X_3 是随机变量，且 $X_1\sim N(0,1),X_2\sim N(0,2^2),X_3\sim N(5,3^2)$，$p_i=P\{-2\leqslant X_i\leqslant 2\}(i=1,2,3)$，则

(A) $p_1>p_2>p_3$.　　(B) $p_2>p_1>p_3$.

(C) $p_3>p_1>p_2$.　　(D) $p_1>p_3>p_2$.

解　$X_1\sim N(0,1)$，所以 $p_1=P\{-2\leqslant X_1\leqslant 2\}=P\{-2<X_1\leqslant 2\}$

$$=\Phi(2)-\Phi(-2)=2\Phi(2)-1.$$

$X_2\sim N(0,2^2)$，$p_2=P\{-2\leqslant X_2\leqslant 2\}=P\{-1<\dfrac{X_2-0}{2}\leqslant 1\}$

$$=\Phi(1)-\Phi(-1)$$
$$=2\Phi(1)-1.$$

$X_3\sim N(5,3^2)$，$p_3=P\{-2\leqslant X_3\leqslant 2\}$

$$=P\{-\frac{7}{3}<\frac{X_3-5}{3}\leqslant -1\}$$
$$=\Phi(-1)-\Phi(-\frac{7}{3}).$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

从右图看出 $p_1>p_2>p_3$. 答案应选(A).

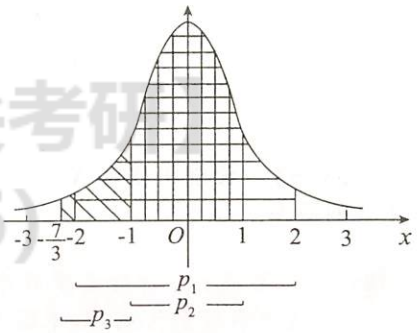


图 2-1

【评注】　如果记住 $\Phi(1)-\Phi(-1)>68\%$，则

$p_2=\Phi(1)-\Phi(-1)>0.68>0.5$

$=\Phi(0)>\Phi(-1)>p_3$

而 $p_1=2\Phi(2)-1>2\Phi(1)-1=p_2$

总之有 $p_1>p_2>p_3$.

【例 4】　在区间 $[a,b]$ 上任意投掷一个点，以 X 表示这个点的坐标. 设这个点落在 $[a,b]$ 中任意小区间的概率与这个小区间的长度成正比，求 X 的概率密度.

解题思路　密度 $f(x)=F'(x)$，而 $F(x)=P\{X\leqslant x\}$，$-\infty<x<+\infty$. 事件 $\{X\leqslant x\}$ 就是随机变量 X 落入区间 $(-\infty,x]$，现 X 点投在 $[a,b]$ 上，则 X 落入 $(-\infty,a)$ 和 $(b,+\infty)$ 的概率均为 0. 我们讨论 $F(x)$ 把 x 取值范围分成 $x<a,a\leqslant x\leqslant b$ 和 $x>b$ 来讨论.

解　当 $x<a$ 时，$\{X\leqslant x\}$ 是不可能事件，故

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=0.$$

当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，依题意

$$P\{a\leqslant X\leqslant x\}=k(x-a),\ k\text{ 为比例常数.}$$

而 $\{a\leqslant X\leqslant b\}$ 是必然事件，故

$$P\{a\leqslant X\leqslant b\}=k(b-a)=1,$$

所以 $k=\dfrac{1}{b-a}$，从而

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

$$P\{a \leqslant X \leqslant x\} = \frac{x-a}{b-a}.$$

于是

$$F(x) = P\{X \leqslant x\} = P\{X < a\} + P\{a \leqslant X \leqslant x\} = 0 + \frac{x-a}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}.$$

当 $x > b$ 时，$\{X \leqslant x\}$ 是必然事件，故 $F(x) = P\{X \leqslant x\} = 1$.

故
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

从而 X 的概率密度为

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, \quad \text{其他}. \end{cases}$$

也就是说，X 服从 $[a,b]$ 上的均匀分布.

【评注】 本题也可考虑 X 落入小区间 $(x, x+\Delta x]$ 的概率

$$P\{x < X \leqslant x+\Delta x\} = F(x+\Delta x) - F(x)$$

当 $a \leqslant x < x+\Delta x \leqslant b$ 时，$F(x+\Delta x) - F(x) = P(x < X \leqslant x+\Delta x) = k\Delta x$，

即 $\dfrac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = k$ 令 $\Delta x \to 0$ 就有 $F'(x) = f(x) = k, a \leqslant x \leqslant b$.

进一步可有 $f(x) = \begin{cases} k, & a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ 然后再用性质 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$，求出 $k = \dfrac{1}{b-a}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 5】 设随机变量 $X \sim U[2,5]$，现对 X 进行三次独立观测，试求至少有两次观测值大于 3 的概率.

解题思路 对 X 进行三次独立观测可理解为对 X 三次独立重复试验. 如果再把“观测值大于 3”这件事理解为成功，本题的概率问题成为三次独立重复试验中至少有两次成功的概率，先求出成功的概率，然后用二项概率公式求解.

解 设 $A =$ “X 的观测值大于 3”，则

$$P(A) = P\{X > 3\} = \frac{2}{3}.$$

令 Y 是三次独立观测中观测值大于 3 的次数，则 $Y \sim B\left(3, \dfrac{2}{3}\right)$，故所求概率为

$$P\{Y \geqslant 2\} = P\{Y = 2\} + P\{Y = 3\} = C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right) + C_3^3\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{20}{27}.$$

【例 6】 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} A + Be^{-\lambda x}, x > 0, \\ 0, \quad x \leqslant 0, \end{cases} \quad (\lambda > 0)$$

求：(1) 常数 A, B 的值；

(2) $P\{-1 < X < 1\}$.

解 (1) $1 = F(+\infty) = A$，所以 $A = 1$.

$F(x)$ 是右连续的，$\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = A + B = F(0) = 0$，所以 $B = -1$，故

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

(2) $P\{-1<X<1\}=P\{-1<X\leqslant 1\}=F(1)-F(-1)=1-e^{-\lambda}$.

【评注】　如果熟悉指数分布 $E(\lambda)$ 的分布函数形式，不难直接得出 $A=1, B=-1$ 的结果.

【例 7】　设随机变量 X 的概率密度 $f(x)=Ae^{-x^2+x}(-\infty<x<+\infty)$，试求常数 A.

解题思路　一般来说，常数 A 可用密度的性质：$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$ 求出.

$$\begin{aligned}1&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-x^2+x}\mathrm{d}x\\&=Ae^{\frac{1}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\frac{1}{2})^2}\mathrm{d}x\\&=Ae^{\frac{1}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t=Ae^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

因此 $A=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4}}$，这里计算较多，而且涉及公式 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t=\sqrt{\pi}$ 的记忆.

也可把 $f(x)=Ae^{-x^2+x}$ 看成正态的概率密度，从而直接定出 A.

解　$$f(x)=Ae^{-x^2+x}=Ae^{-(x^2-x+\frac{1}{4})+\frac{1}{4}}=Ae^{\frac{1}{4}}\cdot e^{-\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{2\cdot\frac{1}{2}}}.$$

对比正态分布概率密度 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，可以看出 $\mu=\frac{1}{2}, \sigma^2=\frac{1}{2}$，且

$$Ae^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

所以 $A=\frac{e^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

§4　随机变量函数的分布

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

内容精讲

2.4.1　离散型随机变量的函数分布

设 X 的分布律为 $P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,\cdots$，则 X 的函数 $Y=g(X)$ 的分布律为 $P\{Y=g(x_k)\}=p_k, k=1,2,\cdots$. 如果在 $g(x_k)$ 中有相同的数值，则将它们相应的概率和作为 Y 取该值的概率.

2.4.2　连续型随机变量的函数分布

(1) 公式法

设 X 是一个具有概率密度 $f_X(x)$ 的随机变量，又设 $y=g(x)$ 是单调，导数不为零的可导函数，$h(y)$ 为它的反函数，则 $Y=g(X)$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}|h'(y)|f_X(h(y)), & \alpha<y<\beta,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中(α,β)是函数$g(x)$在x可能取值的区间上的值域.

(2) 定义法

先求Y的分布函数

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{g(X)\leqslant y\}=\int_{g(x)\leqslant y}f_X(x)\mathrm{d}x,$$

然后$f_Y(y)=F_Y'(y)$.

【评注】 一般说,用公式法时,因要求条件较多:单调,可导,导数不为零,反函数存在等.实际求解比较麻烦.用定义法时,实际上就是求积分$\int_{g(x)\leqslant y}f_X(x)\mathrm{d}x$,只要掌握好$y$变化的范围,不同范围和不同积分限的求积就不难求得$F_Y(y)$.

例题分析

【例1】 假设随机变量X服从参数为2的指数分布,证明:随机变量$Y=1-\mathrm{e}^{-2X}$在区间$(0,1)$上服从均匀分布.

证明 随机变量X的分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2x},&x>0,\\0,&x\leqslant 0.\end{cases}$$

由于X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x},&x>0,\\0,&x\leqslant 0.\end{cases}$$

因此,$P\{X\leqslant 0\}=0$.

当$X>0$时,有$0<Y=1-\mathrm{e}^{-2X}<1$,由此可得随机变量Y的分布函数$F_Y(y)$.

当$y\leqslant 0$时,$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=0$;

当$y\geqslant 1$时,$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=1$;

当$0<y<1$时,有

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{1-\mathrm{e}^{-2X}\leqslant y\}=P\{X\leqslant -\frac{1}{2}\ln(1-y)\}$$

$$=F_X\left(-\frac{1}{2}\ln(1-y)\right)=1-(1-y)=y,$$

即Y的分布函数是

$$F_Y(y)=\begin{cases}0,&y\leqslant 0,\\y,&0<y<1,\\1,&y\geqslant 1.\end{cases}$$

所以随机变量$Y=1-\mathrm{e}^{-2X}$在区间$(0,1)$上服从均匀分布.

【评注】 本题为1995年的考题,得分率仅为0.37,类似的考题在2003年、2019年也出现过.

我们有更一般的结论:对任一连续型随机变量X,其分布函数为$F(x)$,则$Y=F(X)$必定服从分布$U(0,1)$.

【例2】 已知随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|},\ -\infty<x<+\infty,$$

求$Y=X^2$的概率密度.

微信公众号【顶尖考研】
(ID:dijky66)

解 先考察 $Y=X^2$ 的分布函数 $F_Y(y)$

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y\}.$$

由于当 $y\leqslant 0$ 时，$P\{X^2\leqslant y\}=0$；而当 $y>0$ 时，

$$F_Y(y)=P\{X^2\leqslant y\}=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^{\sqrt{y}}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$$

注意到 $F_Y'(y)=f_Y(y)$，得 Y 的概率密度如下

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\mathrm{e}^{-\sqrt{y}}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

【评注】 在对分布函数 $F_Y(y)$ 求导时，可利用变上下限积分的求导公式：对可导函数 $\alpha(y),\beta(y)$ 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}f(x)\mathrm{d}x=f(\beta(y))\beta'(y)-f(\alpha(y))\alpha'(y).$$

【例 3】 假设随机变量 X 服从指数分布，则随机变量 $Y=\min\{X,2\}$ 的分布函数

(A) 是连续函数.　　(B) 至少有两个间断点.

(C) 是阶梯函数.　　(D) 恰巧有一个间断点.

解 【方法一】 设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$.

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$

当 $0\leqslant y<2$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{\min(X,2)\leqslant y\}$

$$=P\{X\leqslant y\}=\int_{-\infty}^{y}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-\lambda y}.$$

当 $y\geqslant 2$ 时，$F_Y(y)=1$.

总之，

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda y}, & 0\leqslant y<2,\\ 1, & y\geqslant 2.\end{cases}$$

不难看出 Y 的分布函数 $F_Y(y)$ 恰好有一个间断点 $y=2$. 故答案应选(D).

【方法二】 指数分布 X 的分布函数必为连续函数，所以

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

现 $Y=\min(X,2)$，故

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{\min(X,2)\leqslant y\}=\begin{cases}F_X(y), & y<2,\\ 1, & y\geqslant 2.\end{cases}$$

故在 $y=2$ 处 $F_Y(y)$ 有唯一的一个间断点.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

第三章　多维随机变量及其分布

考点与要求

理解　多维随机变量的分布函数和基本性质，二维离散型随机变量的概率分布，二维连续型随机变量的概率密度．随机变量的独立性和不相关性及它们之间的关系．二维均匀分布和二维正态分布中参数的概率意义．

掌握　二维随机变量的边缘分布和条件分布．随机变量相互独立的条件，二维均匀分布和二维正态分布．

会　根据两个随机变量的联合分布求其函数的分布，根据多个相互独立随机变量的联合分布求其简单函数的分布．

§1　二维随机变量及其分布

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

内容精讲

3.1.1　二维随机变量

定义　设 $X=X(\omega)$，$Y=Y(\omega)$ 是定义在样本空间 Ω 上的两个随机变量，则称向量 (X,Y) 为二维随机变量，或随机向量．

【评注】　本章是讨论多维随机变量及其分布．但实际上考试大纲以二维随机变量及其分布为主．二维以上基本上不讨论．

3.1.2　二维随机变量 (X,Y) 的分布

定义　$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}$，$-\infty<x<+\infty$，$-\infty<y<+\infty$

3.1.3　二维随机变量的边缘分布

二维随机变量 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)$，分别称 $F_X(x)=P\{X\leqslant x\}$ 和 $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}$ 为 (X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布．

【评注】　显然，边缘分布 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$ 与二维随机变量 $F(x,y)$ 有如下关系：

$$F_X(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X\leqslant x,y<+\infty\}=F(x,+\infty);$$

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X<+\infty,Y\leqslant y\}=F(+\infty,y).$$

这里 $F(x,+\infty)$ 应理解为 $\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)$．

3.1.4　二维随机变量的条件分布

定义　如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，$P\{y-\varepsilon<Y\leqslant y+\varepsilon\}>0$，

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}P\{X\leqslant x\mid y-\varepsilon<Y\leqslant y+\varepsilon\}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{P\{X\leqslant x,y-\varepsilon<Y\leqslant y+\varepsilon\}}{P\{y-\varepsilon<Y\leqslant y+\varepsilon\}}$$

存在，则称此极限为在条件 $Y=y$ 下 X 的条件分布，记作 $F_{X|Y}(x\mid y)$ 或 $P\{X\leqslant x\mid Y=y\}$.

类似地可定义 $F_{Y|X}(y\mid x)$.

3.1.5　二维离散型随机变量

定义　如果随机变量 (X,Y) 可能取值为有限个或可数无穷个 (x_i,y_j)，$i,j=1,2,\cdots$，则称 (X,Y) 为二维离散型随机变量.

3.1.6　二维离散型随机变量的概率分布

定义　二维离散型随机变量 (X,Y) 的可能取值为 $(x_i,y_j)(i,j=1,2,\cdots)$ 称

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots$$

为二维离散型随机变量 (X,Y) 的概率分布或分布律.

【评注】　也可以用表格形式表示分布律：

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

3.1.7　二维离散型随机变量的边缘分布

定义

$$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\},\quad i=1,2,\cdots$$

和

$$p_{\cdot j}=P\{Y=y_j\},\quad j=1,2,\cdots$$

分别被称为 (X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布.

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

【评注】　显然，边缘分布 $p_{i\cdot}$ 和 $p_{\cdot j}$ 与二维概率分布 p_{ij} 有如下关系：

$$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{+\infty}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}\quad i=1,2,\cdots$$

$$p_{\cdot j}=P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{+\infty}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{+\infty}p_{ij}\quad j=1,2,\cdots$$

3.1.8　二维离散型随机变量的条件分布

定义　对给定的 j，如果 $P\{Y=y_j\}>0$，$j=1,2,\cdots$ 则称

$$P\{X=x_i\mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},\quad i=1,2,\cdots$$

为在 $Y=y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布.

3.1.9　二维连续型随机变量及其概率密度

定义　如果对随机变量 (X,Y) 的分布 $F(x,y)$ 存在非负函数 $f(x,y)$，使得对于任意实数 x 和 y，都有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\quad -\infty<x,y<+\infty.$$

则称 (X,Y) 为二维连续型随机变量，函数 $f(x,y)$ 称为 (X,Y) 的概率密度.

对连续型随机变量(X,Y)，设它的概率密度为$f(x,y)$，由$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$知道，$X$也是一个连续型变量，且其概率密度为$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$

3.1.10 二维连续型随机变量的边缘密度

定义 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$和$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$

被分别称为(X,Y)关于X和关于Y的边缘密度.

3.1.11 二维连续型随机变量的条件密度

定义 设$f(x,y)$在点(x,y)连续，$f_Y(y)$连续且$f_Y(y)>0$，则条件分布

$$F_{X|Y}(x\mid y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(s,y)}{f_Y(y)}\mathrm{d}s.$$

其中$\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$被称为在条件$Y=y$下的条件密度，记作$f_{X|Y}(x\mid y)$，即$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$，$f_Y(y)>0$.

类似可定义，当$f_X(x)>0$时，

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}\text{和}F_{Y|X}(y\mid x)=\int_{-\infty}^{y}\frac{f(x,s)}{f_X(x)}\mathrm{d}s.$$

3.1.12 $F(x,y)$的性质

(1) 对任意x,y，均有$0\leqslant F(x,y)\leqslant 1$；

(2) $F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=F(-\infty,-\infty)=0$，

$F(+\infty,+\infty)=1$；

(3) $F(x,y)$关于x和关于y均单调不减；

(4) $F(x,y)$关于x和关于y是右连续的；

(5) $P\{a<X\leqslant b,c<Y\leqslant d\}=F(b,d)-F(b,c)-F(a,d)+F(a,c)$.

微信公众号【顶尖考研】

3.1.13 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$的性质

(1) $p_{ij}\geqslant 0$，$i,j=1,2,\cdots$；

(2) $\sum_i\sum_j p_{ij}=1$.

3.1.14 $f(x,y)$的性质

(1) $f(x,y)\geqslant 0$；

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$；

(3) 随机变量(X,Y)落在区域D内的概率

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

【例 1】 设二维随机变量(X,Y)的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-2x})(1-\mathrm{e}^{-y}),x>0,y>0,\\0,\quad\text{其他.}\end{cases}$$

试求$F_X(x)$和$F_Y(y)$.

解　$F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$

$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$

【例 2】　设随机变量 X 在 1,2,3 三个数字中等可能地取值，随机变量 Y 在 $1\sim X$ 中等可能的取一整数值，试求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布.

解　由乘法公式，可得

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\mid X=1\}=\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3},$$

$$P\{X=2,Y=1\}=P\{X=2\}P\{Y=1\mid X=2\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6},$$

$$P\{X=2,Y=2\}=P\{X=2\}P\{Y=2\mid X=2\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6},$$

$$P\{X=3,Y=1\}=P\{X=3\}P\{Y=1\mid X=3\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9},$$

$$P\{X=3,Y=2\}=P\{X=3\}P\{Y=2\mid X=3\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9},$$

$$P\{X=3,Y=3\}=P\{X=3\}P\{Y=3\mid X=3\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9},$$

$$P\{X=1,Y=2\}=P\{X=1,Y=3\}=P\{X=2,Y=3\}=0.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

所以，(X,Y) 的概率分布为

X \ Y	1	2	3
1	$\frac{1}{3}$	0	0
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

进一步得到边缘分布

X \ Y	1	2	3	$p_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$	

即

X	1	2	3
$p_{i\cdot}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

和

Y	1	2	3
$p_{\cdot j}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$

.

【例 3】 求本节例 2 中在 $Y=2$ 条件下 X 的条件分布.

解 由本节例 2 可知 $P\{Y=2\}=p_{\cdot 2}=\frac{5}{18}$,因此

$$P\{X=1\mid Y=2\}=\frac{p_{12}}{p_{\cdot 2}}=\frac{0}{\frac{5}{18}}=0,$$

$$P\{X=2\mid Y=2\}=\frac{p_{22}}{p_{\cdot 2}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{18}}=\frac{3}{5},$$

$$P\{X=3\mid Y=2\}=\frac{p_{32}}{p_{\cdot 2}}=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{5}{18}}=\frac{2}{5},$$

从而得到在 $Y=2$ 的条件下随机变量 X 的条件分布为

X	1	2	3
$P\{X=i\mid Y=2\}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 4】 设二维连续型随机变量(X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}k\mathrm{e}^{-(2x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则系数 $k=$_____.

解 由概率密度的性质(2),可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=k\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\frac{k}{2}=1,$$

所以 $k=2$.

【例 5】 设二维连续型随机变量(X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-(2x+y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(1) 求 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$;

(2) 求 $f_{X|Y}(x\mid y)$ 和 $f_{Y|X}(y\mid x)$.

解 (1) 当 $x>0$ 时,$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}2\mathrm{e}^{-(2x+y)}\mathrm{d}y=2\mathrm{e}^{-2x}$;

当 $x \leqslant 0$ 时，$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = 0$.

类似求得 $f_Y(y)$.

所以答案应为　$f_X(x) = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$ 和 $f_Y(y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \leqslant 0. \end{cases}$

(2) 当 $f_Y(y) > 0$ 时，即 $y > 0$ 时，$f_{X|Y}(x \mid y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$

当 $y \leqslant 0$ 时，$f_Y(y) = 0$，$f_{X|Y}(x \mid y)$ 不存在.

当 $f_X(x) > 0$ 时，即 $x > 0$ 时，$f_{Y|X}(y \mid x) = \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \mathrm{e}^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \leqslant 0. \end{cases}$

当 $x \leqslant 0$ 时，$f_X(x) = 0$，$f_{Y|X}(y \mid x)$ 不存在.

【例 6】　从 1,2,3 三个数字中一次任取两个数，第一个数为 X，第二个数为 Y，记 $\xi = \max(X,Y)$，试求 (X,Y) 和 (X,ξ) 的分布律及其边缘分布.

解　显然，因两个数不可能相等，所以 $P\{X = Y\} = 0$，

$$P\{X = 1, Y = 2\} = P\{X = 1, Y = 3\} = \frac{1}{3 \times 2} = \frac{1}{6},$$

$$P\{X = 2, Y = 1\} = P\{X = 2, Y = 3\} = \frac{1}{3 \times 2} = \frac{1}{6},$$

$$P\{X = 3, Y = 1\} = P\{X = 3, Y = 2\} = \frac{1}{3 \times 2} = \frac{1}{6},$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

所以 (X,Y) 的分布律及其边缘分布为

X \ Y	1	2	3	$p_{i\cdot}$
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

由于 $\xi = \max(X,Y)$，所以 ξ 不可能等于 1，因此 $P\{\xi = 1\} = 0$，

$$P\{X = 1, \xi = 2\} = P\{X = 1, Y = 2\} = \frac{1}{6},$$

$$P\{X = 1, \xi = 3\} = P\{X = 1, Y = 3\} = \frac{1}{6}.$$

因为 $\xi \geqslant X$，所以 $P\{X = 3, \xi = 2\} = 0$，

$$P\{X = 2, \xi = 2\} = P\{X = 2, Y = 1\} = \frac{1}{6},$$

$$P\{X = 2, \xi = 3\} = P\{X = 2, Y = 3\} = \frac{1}{6},$$

$$P\{X=3,\xi=3\}=P\{X=3,Y=1\}+P\{X=3,Y=2\}=\frac{1}{3}.$$

所以(X,ξ)的分布律及其边缘分布为

X \ ξ	2	3	$p_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

【例 7】 设随机变量 Y 服从参数为 $\lambda=1$ 的指数分布，随机变量

$$X_k=\begin{cases}0,\text{若 } Y\leqslant k,\\1,\text{若 } Y>k,\end{cases}\quad k=1,2,$$

求二维随机变量(X_1,X_2)的分布律及其边缘分布.

解 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-y},y\geqslant 0,\\0,\quad y<0.\end{cases}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

所以

$$P\{X_k=0\}=P\{Y\leqslant k\}=F_Y(k)=1-\mathrm{e}^{-k}.$$

又$\{Y\leqslant 1\}\subset\{Y\leqslant 2\}$，因此，

$$P\{X_1=0,X_2=0\}=P\{Y\leqslant 1,Y\leqslant 2\}=P\{Y\leqslant 1\}=F_Y(1)=1-\mathrm{e}^{-1},$$

$$P\{X_1=0,X_2=1\}=P\{Y\leqslant 1,Y>2\}=P(\varnothing)=0,$$

$$P\{X_1=1,X_2=0\}=P\{Y>1,Y\leqslant 2\}=P\{1<Y\leqslant 2\}=F_Y(2)-F_Y(1)=\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-2},$$

$$P\{X_1=1,X_2=1\}=P\{Y>1,Y>2\}=P\{Y>2\}=\mathrm{e}^{-2}.$$

所以(X_1,X_2)分布律及其边缘分布为

X_1 \ X_2	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$1-\mathrm{e}^{-1}$	0	$1-\mathrm{e}^{-1}$
1	$\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-2}$	e^{-2}	e^{-1}
$p_{\cdot j}$	$1-\mathrm{e}^{-2}$	e^{-2}	

【例 8】 射手击中目标的概率为 $p(0<p<1)$，射击到第二次击中目标为止，设以 X 表示第一次击中目标所进行的射击次数，以 Y 表示总共进行的射击次数，试求 X 和 Y 的联合分布律及条件分布律.

解 按题意“$Y=n$”表示在第 n 次击中目标，并在前$(n-1)$次射击中恰有一次击中目标，已知各次射击是相互独立的.

$$P\{X=m,Y=n\}=\begin{cases}0, & m\geqslant n,\\ p^2q^{n-2}, & m<n,\end{cases}\quad q=1-p,\quad m=1,2,\cdots,n-1,\quad n=2,3,\cdots$$

这就是 X 和 Y 的联合分布律. 要求条件分布律,得先求边缘分布律.

$$\begin{aligned}P\{X=m\}&=\sum_{n=m+1}^{+\infty}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{n=m+1}^{+\infty}p^2q^{n-2}\\&=p^2\sum_{n=m+1}^{+\infty}q^{n-2}=p^2\cdot\frac{q^{m-1}}{1-q}\\&=pq^{m-1},\quad (m=1,2,\cdots),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\{Y=n\}&=\sum_{m=1}^{n-1}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}p^2q^{n-2}\\&=(n-1)p^2q^{n-2},(n=2,3,\cdots).\end{aligned}$$

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

利用离散型随机变量条件分布律的公式,有

$$P\{X=m\mid Y=n\}=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{Y=n\}}=\frac{p^2q^{n-2}}{(n-1)p^2q^{n-2}}=\frac{1}{n-1},$$
$$(m=1,2,\cdots,n-1;n=2,3,\cdots),$$
$$P\{Y=n\mid X=m\}=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{X=m\}}=\frac{p^2q^{n-2}}{pq^{m-1}}=pq^{n-m-1},$$
$$(n=m+1,m+2,\cdots;m=1,2,\cdots).$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【例 9】 设某班车起点站上客人数 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布,每位乘客在中途下车的概率为 $p(0<p<1)$,且中途下车与否相互独立,以 Y 表示在中途下车的人数,求:

(1) 在发车时有 n 个乘客的条件下,中途有 m 个人下车的概率;

(2) 二维随机变量 (X,Y) 的概率分布.

解题思路 根据题设条件,起点站发车人数 $X\sim P(\lambda)$. 中途下车与否是相互独立的,如果把每位乘客下车看成一次成功的试验,不下车看成一次失败的试验,则 Y 就是独立重复试验中成功的次数,因此 $Y\sim B(\cdot,p)$.

本题要求的是 $P\{Y=m\mid X=n\}$ 和 $P\{X=n,Y=m\}$.

解 (1) 在发车时有 n 个乘客,他们在中途下车与否是相互独立的,概率均为 p,所以可以将每位乘客下车与否看成是一次伯努利试验,记 $C_0^0=1$,因此在发车时有 n 个乘客的条件下,有 m 个人下车的概率为

$$P\{Y=m\mid X=n\}=C_n^mp^m(1-p)^{n-m},0\leqslant m\leqslant n,n=0,1,2,\cdots.$$

$$\begin{aligned}(2)P\{X=n,Y=m\}&=P\{X=n\}P\{Y=m\mid X=n\}\\&=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}C_n^mp^m(1-p)^{n-m},0\leqslant m\leqslant n,n=0,1,2,\cdots.\end{aligned}$$

【评注】 (1) 本题是 2001 年的真题,我们当年编制本题的目的在于考查条件概率、二项分布、泊松分布等概念.

(2) 如果直接要求写出 (X,Y) 的分布律会有困难,为此先要求出第 1 小问的条件概率 $P\{Y=m\mid X=n\}$,然后用乘法公式求出第 2 小问 $P\{X=n,Y=m\}$,使本题难度大为降低.

§2 随机变量的独立性

内容精讲

3.2.1 随机变量的独立性

定义 如果对任意 x,y 都有

$$P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=P\{X\leqslant x\}P\{Y\leqslant y\},$$

即

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y),$$

则称随机变量 X 与 Y 相互独立.

3.2.2 随机变量相互独立的充要条件

(1) 离散型随机变量 X 和 Y 相互独立的充要条件:对任意 $i,j=1,2,\cdots$ 成立

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$$

即

$$p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$$

(2) 连续型随机变量 X 和 Y 相互独立的充要条件:对任意的 x,y,成立

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y).$$

【评注】 可将两个随机变量的独立性推广到两个以上随机变量的情形.

微信公众号【技术考研】(ID: djky66)

例题分析

【例 1】 设随机变量 X 和 Y 相互独立,下表列出了二维随机变量 (X,Y) 的联合概率分布及关于 X 和关于 Y 的边缘概率分布的部分数值,将剩余数值填入表中空白处.

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}$
x_1		$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$			
$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$			

解 记 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}(i=1,2;j=1,2,3)$. 由 $p_{\cdot 1}=p_{11}+p_{21}$,可得

$$p_{11}=p_{\cdot 1}-p_{21}=\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{24}.$$

由 $p_{11}=p_{1\cdot}p_{\cdot 1}$,可得

$$p_{1\cdot}=p_{11}/p_{\cdot 1}=\frac{1}{24}\Big/\frac{1}{6}=\frac{1}{4}.$$

由 $p_{1\cdot}+p_{2\cdot}=1$,可得

$$p_{2\cdot}=1-p_{1\cdot}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

由 $p_{1\cdot}=p_{11}+p_{12}+p_{13}$,可得

$$p_{13} = p_{1\cdot} - p_{11} - p_{12} = \frac{1}{4} - \frac{1}{24} - \frac{1}{8} = \frac{1}{12}.$$

由 $p_{12} = p_{1\cdot}p_{\cdot 2}$，可得

$$p_{\cdot 2} = p_{12}/p_{1\cdot} = \frac{1}{8}\Big/\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

由 $p_{\cdot 1} + p_{\cdot 2} + p_{\cdot 3} = 1$，可得

$$p_{\cdot 3} = 1 - p_{\cdot 1} - p_{\cdot 2} = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

由 $p_{\cdot 2} = p_{12} + p_{22}$，可得

$$p_{22} = p_{\cdot 2} - p_{12} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

由 $p_{\cdot 3} = p_{13} + p_{23}$，可得

$$p_{23} = p_{\cdot 3} - p_{13} = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}.$$

综合以上结果，有

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P\{X = x_i\} = p_{i\cdot}$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$P\{Y = y_j\} = p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【评注】　本题是我们命题组1999年编制的考题，主要考查随机变量 X 与 Y 独立时的分布律结构及其边缘分布关系.

实际上，当 X 与 Y 相互独立时，成立 $p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j}$，即分布律中两行对应的概率成比例，即

$$\frac{p_{11}}{p_{21}} = \frac{p_{12}}{p_{22}} = \frac{p_{13}}{p_{23}} = \frac{p_{1\cdot}}{p_{2\cdot}}.$$

同理，两列对应的概率也成比例，如果掌握这个特点，本题就很容易求解了.

【例 2】　判断 X 与 Y 是否相互独立，(X,Y) 分布律如下表.

X \ Y	1	2	3	$p_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{3}$	0	0	
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	
$p_{\cdot j}$				

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

解　先求出边缘分布

X \ Y	1	2	3	$p_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$	

如果 X 与 Y 相互独立，则应该对任意的 i,j 都有 $p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$，而现在 $p_{13}=0$，但是 $p_{1\cdot}p_{\cdot 3}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{9}\neq 0$，故 X 与 Y 是不相互独立的.

从这个例子可以看出凡是边缘分布律均不为零，而有某个 $p_{ij}=0$，则必可断定这个联合分布律所对应的两个随机变量是不相互独立的；或者当某个 $p_{ij}=0$，而相应的 $p_{i\cdot}$ 与 $p_{\cdot j}$ 不为零，则 X,Y 必不独立.

【例 3】 设二维随机变量 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立，则

(A) $\begin{cases}a=0.2,\\ b=0.3.\end{cases}$ (B) $\begin{cases}a=0.4,\\ b=0.1.\end{cases}$

(C) $\begin{cases}a=0.3,\\ b=0.2.\end{cases}$ (D) $\begin{cases}a=0.1,\\ b=0.4.\end{cases}$

解 根据事件独立的定义，

$$P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0\}P\{X+Y=1\}.$$

而 $P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}=a.$

$P\{X=0\}=0.4+a,P\{X+Y=1\}=a+b.$

而根据分布律性质，$a+b+0.4+0.1=1$，故 $a+b=0.5$.

总之，由独立性得 $a=(0.4+a)\times 0.5$，解得 $a=0.4$.

答案应为 $a=0.4,b=0.1$. 选(B).

【评注】 根据事件独立的不同性质，本题可以有多种解法：

$$P\{X+Y=1\mid X=0\}=P\{X+Y=1\};$$

$$P\{X+Y=1\mid X=1\}=P\{X+Y=1\};$$

$$P\{X=0,X+Y\neq 1\}=P\{X=0\}P\{X+Y\neq 1\};$$

$$P\{X=1,X+Y=1\}=P\{X=1\}P\{X+Y=1\}.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djkyb6)

【例 4】　已知随机变量 X_1 和 X_2 的分布律分别为

X_1	-1	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

和

X_2	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

而且 $P\{X_1=0,X_2=0\}=0$.

(1) 写出 X_1 与 X_2 的联合分布；

(2) X_1,X_2 是否独立，为什么？

解　(1) 因为 $P\{X_1=0,X_2=0\}=0$，则

$$P\{X_1=0,X_2=1\}=P\{X_1=0\}-P\{X_1=0,X_2=0\}=\frac{1}{2}.$$

而 $P\{X_2=1\}=\frac{1}{2}$，故

$$\begin{aligned}P\{X_1=-1,X_2=1\}&=P\{X_1=1,X_2=1\}\\&=\frac{1}{2}\left(P\{X_2=1\}-P\{X_1=0,X_2=1\}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=0,\\P\{X_1=-1,X_2=0\}&=P\{X_1=-1\}-P\{X_1=-1,X_2=1\}\\&=\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4},\\P\{X_1=1,X_2=0\}&=P\{X_1=1\}-P\{X_1=1,X_2=1\}\\&=\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

总之有以下分布律

X_1 \ X_2	0	1	
-1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

(2) 边缘分布全不为零，而联合分布有零元，故 X_1,X_2 不独立.

【评注】　这类分布律求解可以直接从边缘分布入手，比较直观. 由题设条件可以写出边缘分布

X_1 \ X_2	0	1	
-1			$\frac{1}{4}$
0	0		$\frac{1}{2}$
1			$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

→

X_1 \ X_2	0	1	
-1			$\frac{1}{4}$
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1			$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

→

X_1 \ X_2	0	1	
-1		0	$\frac{1}{4}$
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1		0	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

→

X_1 \ X_2	0	1	
-1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

【例 5】 设(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y},0<x<y,\\0,\quad 其他.\end{cases}$$

试求:(1)X,Y的边缘密度函数$f_X(x)$和$f_Y(y)$,X,Y是否独立?

(2)条件分布密度$f_{X|Y}(x\mid y)$和$f_{Y|X}(y\mid x)$.

解 (1)当$x>0$时,

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_x^{+\infty}e^{-y}\mathrm{d}y=e^{-x},$$

故

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x},x>0,\\0,\quad 其他.\end{cases}$$

当$y>0$时,

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^{y}e^{-y}\mathrm{d}x=ye^{-y},$$

所以

$$f_Y(y)=\begin{cases}ye^{-y},y>0,\\0,\quad 其他.\end{cases}$$

显然,$f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$,故$X,Y$不相互独立.

(2)当$f_Y(y)>0$时,即$y>0$时,$f_{X|Y}(x\mid y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{y},y>x>0,\\0,\quad 其他.\end{cases}$

当$f_X(x)>0$时,即$x>0$时,$f_{Y|X}(y\mid x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}e^{x-y},y>x>0,\\0,\quad 其他.\end{cases}$

微信公众号(顶尖考研)

【例 6】 设随机变量X在区间$(0,1)$内服从均匀分布,在$X=x(0<x<1)$的条件下,随机变量Y在区间$(0,x)$内服从均匀分布,求:

(1)随机变量X和Y的联合概率密度;

(2)Y的概率密度;

(3)概率$P\{X+Y>1\}$.

解题思路 本题是2004年数学四的考题,一般的考题是给定$f(x,y)$,求$f_{Y|X}(y\mid x)$,而本题是先给出了$f_{Y|X}(y\mid x)$,反过来求$f(x,y)$.

如果先给$f(x,y)$,则求出$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$,在$f_X(x)>0$的条件下求出

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)},f_X(x)>0.$$

如果先给$f_{Y|X}(y\mid x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)},f_X(x)>0$,则$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y\mid x),f_X(x)>0$.但$f(x,y)$是定义在$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$上的,仅给出$f_X(x)>0$的这部分是显然不全的.还得补$f_X(x)=0$的部分.

现题给$X\sim U(0,1)$,即有$f_X(x)=\begin{cases}1,&0<x<1,\\0,&其他.\end{cases}$

在$X=x(0<x<1)$的条件下,即有$f_X(x)>0$条件下,$f_{Y|X}(y\mid x)\sim U(0,x)$,所以

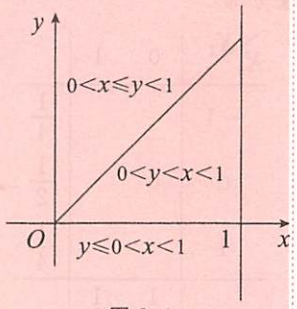


图 3-1

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}\qquad f_X(x)>0.$$

由于 $f_X(x)>0$ 等价于 $0<x<1$，上式我们可以改写成

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x<1,\\ 0, & 0<x\leqslant y<1 \text{ 或 } y\leqslant 0<x<1.\end{cases}$$

根据公式：$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y\mid x)\quad 0<x<1$；

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x;P\{X+Y>1\}=\iint\limits_{x+y>1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

不难求得(Ⅰ)(Ⅱ)(Ⅲ).

解 (1) 当 $f_X(x)>0$ 时，即 $0<x<1$ 时，$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y\mid x)$.

故 $0<x<1$ 时

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x<1,\\ 0, & 0<x\leqslant y<1 \text{ 或 } y\leqslant 0<x<1.\end{cases}$$

由于 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{1}{x}\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x=1$

又由于 $f(x,y)\geqslant 0,\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1.$

可知当 $x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 1$ 时，$f(x,y)=0$

总之 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

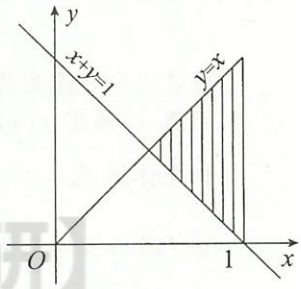


图 3-2

(2) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$,

当 $y\leqslant 0$ 或 $y\geqslant 1$ 时，$f_Y(y)=0$；

当 $0<y<1$ 时，$f_Y(y)=\int_y^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x=-\ln y.$

因此，$f_Y(y)=\begin{cases}-\ln y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

(3) $P\{X+Y>1\}=\iint\limits_{x+y>1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^x\frac{1}{x}\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^1(2-\frac{1}{x})\mathrm{d}x=1-\ln 2.$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【评注】 求解本题关键是(1)中

$$\text{当 } f_X(x)>0 \text{ 时，} f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}\qquad ①$$

通过 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=1$，得到 $f_X(x)=0$ 时，$f(x,y)\equiv 0$，

从而得到

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}\qquad ②$$

从形式上看①式到②式没有变化，但①式成立的条件是 $f_X(x)>0$，即 $0<x<1$，而②

式中，没有 $0<x<1$ 的条件；(1) 式中的“其他”有约束 $0<x<1$，而 ② 式中的其他无 $0<x<1$ 的限制.

【例 7】 设 (X,Y) 是二维随机变量，X 的边缘概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$ 在给定 $X=x(0<x<1)$ 的条件下 Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}\dfrac{3y^2}{x^3}, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

(1) 求 (X,Y) 的概率密度 $f(x,y)$；

(2) 求 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$；

(3) 求 $P\{X>2Y\}$.

解题思路 条件概率密度的定义为

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)},\quad f_X(x)>0.$$

通常我们会遇到两类问题：

问题一：给定 $f(x,y)$，求 $f_{Y|X}(y\mid x)$，(如前例 5)

首先计算 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$，

当 $f_X(x)>0$ 时，$f_{Y|X}(y\mid x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$.

问题二：给出 $f_X(x)$ 和 $f_{Y|X}(y\mid x)$，求 $f(x,y)$，(如前例 6)

首先计算 $f_X(x)>0$ 时，$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y\mid x)$.

但 $f(x,y)$ 是定义在全平面上的联合概率密度，下一步就是把条件 $f_X(x)>0$ 解除，得到全平面上的 $f(x,y)$.

本题(1) 要求的是问题二，求得 $f(x,y)$ 后，就可以用公式

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x \quad 和 \quad P\{X>2Y\}=\iint\limits_{x>2y}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

解得(2) 和(3).

解 (1) 当 $0<x<1$ 时，$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y\mid x)$.

即当 $0<x<1$ 时，$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{9y^2}{x}, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

已知 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$，且 $f(x,y)\geqslant 0$.

但现在 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{9y^2}{x}\mathrm{d}y=\int_0^1 3x^2\mathrm{d}x=1$.

所以我们可以理解：$x\leqslant 0$ 时或 $x\geqslant 1$ 时，$f(x,y)=0$.

总之，得到 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{9y^2}{x}, & 0<y<x<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

(2) Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_y^1\frac{9y^2}{x}\mathrm{d}x, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}=\begin{cases}-9y^2\ln y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$(3)P\{X>2Y\}=\iint\limits_{x>2y}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{x}{2}}\frac{9y^2}{x}\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{3}{8}x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{8}.$$

【评注】　本题是2013年的真题，很多考生直接解成

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}\frac{9y^2}{x}, & 0<y<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

这样写法是错误的.

因为 $f_{Y|X}(y\mid x)$ 只有在 $0<x<1$ 上有定义，所以 $f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y\mid x)$ 只能在 $0<x<1$ 时成立，加上条件

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_{Y|X}(y\mid x)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1f_X(x)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f_{Y|X}(y\mid x)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^1f_X(x)\mathrm{d}x=1.$$

才能把 $0<x<1$ 时 $f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}\frac{9y^2}{x}, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

改写成 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{9y^2}{x}, & 0<y<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例8】　设机变量 X 与 Y 相互独立，$X\sim B(1,\frac{1}{2})$，$Y\sim U[0,1]$，记 $Z=X+Y$，试求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$.

解题思路　$f_Z(z)=F_Z'(z)$，而 $F_Z(z)=P\{X+Y\leqslant z\}$，其中 X 为离散型随机变量，Y 为连续型随机变量. 由于 X 的分布较简单，对 X 的可能取值进行分解，最终再利用 X,Y 的独立性.

解　$X\sim B(1,\frac{1}{2})$，X 有分布

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

$Y\sim U[0,1]$，Y 有密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}\\&=P\{X=0,X+Y\leqslant z\}+P\{X=1,X+Y\leqslant z\}\\&=P\{X=0,Y\leqslant z\}+P\{X=1,Y\leqslant z-1\}\\&=P\{X=0\}P\{Y\leqslant z\}+P\{X=1\}P\{Y\leqslant z-1\}\\&=\frac{1}{2}F_Y(z)+\frac{1}{2}F_Y(z-1)\end{aligned}$$

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\frac{1}{2}f_Y(z)+\frac{1}{2}f_Y(z-1)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0\leqslant z\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

也就有 $Z\sim U[0,2]$.

【评注】 (1) 求 $F_Z(z)$ 时,也可用全概率公式:

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}\\&=P\{X=0\}P\{X+Y\leqslant z\mid X=0\}+P\{X=1\}P\{X+Y\leqslant z\mid X=1\}\\&=\frac{1}{2}P\{Y\leqslant z\mid X=0\}+\frac{1}{2}P\{Y\leqslant z-1\mid X=1\}\\&=\frac{1}{2}P\{Y\leqslant z\}+\frac{1}{2}P\{Y\leqslant z-1\}\\&=\frac{1}{2}F_Y(z)+\frac{1}{2}F_Y(z-1).\end{aligned}$$

(2) 严格地说

$$F_Z(z)=\frac{1}{2}F_Y(z)+\frac{1}{2}F_Y(z-1)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \dfrac{z}{2}, & 0\leqslant z\leqslant 2,\\ 1, & 2<z.\end{cases}$$

求 $F_Z'(z)$ 时 $z=0$ 和 $z=2$ 处是导数不存在的.所以写 $Z\sim U[0,2]$ 或 $Z\sim U(0,2)$ 本质上没区别.$U[0,2]$ 和 $U(0,2)$ 的分布均为 $F_Z(z)$.

如果就 $\frac{1}{2}f_Y(z)+\frac{1}{2}f_Y(z-1)$ 来说应有

$$\frac{1}{2}f_Y(z)+\frac{1}{2}f_Y(z-1)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0\leqslant z<1,1<z\leqslant 2,\\ 1, & z=1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

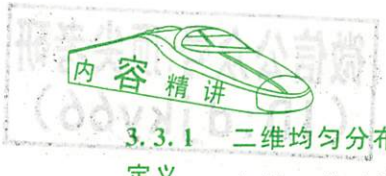
概率密度改变一个点的值是不受影响的,我们就不妨记

$$\frac{1}{2}f_Y(z)+\frac{1}{2}f_Y(z-1)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0\leqslant z\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

且 $Z\sim U[0,2]$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: dky66)

§ 3 二维均匀分布和二维正态分布



3.3.1 二维均匀分布

定义 如果二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}, & (x,y)\in G\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 A 是平面有界区域 G 的面积,则称 (X,Y) 服从区域 G 上的均匀分布.

3.3.2 二维正态分布

定义 如果二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}},$$

$$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty,$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1$ 均为常数，则称 (X,Y) 服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2$ 和 ρ 的二维正态分布，记作 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$.

3.3.3　重要性质

(1) 设 (X,Y) 在 G 上服从均匀分布，D 是 G 中的一个部分区域，记它们的面积分别为 S_D 和 S_G，则 $P\{(X,Y)\in D\}=\dfrac{S_D}{S_G}$.

如果设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，显然

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_G},(x,y)\in G\\ 0,\ \text{其他}\end{cases}$$

而 $P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\dfrac{1}{S_G}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{S_D}{S_G}$.

(2) 对正态分布不加证明地要求记住下列性质：

① $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$ 时，X 与 Y 均服从一维正态：

$$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2);$$

② $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$ 时，X 与 Y 相互独立的充分必要条件是 $\rho=0$；

③ (X,Y) 服从二维正态时，行列式 $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\neq 0$，$(aX+bY,cX+dY)$ 也服从二维正态，当然 $aX+bY$ 服从一维正态；

④ 约定：X 与 Y 均服从一维正态，且相互独立，就是指 (X,Y) 服从二维正态，且 $\rho=0$.

【评注】　如果 X 与 Y 均服从一维正态，不能保证 (X,Y) 服从二维正态，也就不能保证 $aX+bY$ 服从一维正态.

如果 X 与 Y 均服从一维正态，且相互独立，则 $aX+bY$ 必正态 $(a^2+b^2\neq 0)$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

例题分析

【例 1】　设二维随机变量 (X,Y) 在 xOy 平面上由曲线 $y=x$ 与 $y=x^2$ 所围成的区域上服从均匀分布，则概率 $P\{0<X<\dfrac{1}{2},0<Y<\dfrac{1}{2}\}=$ _____.

解　由曲线 $y=x$ 和 $y=x^2$ 所围成的区域面积为

$$A=\int_0^1(x-x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{6},$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

所以 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & 0\leqslant x^2\leqslant y\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由此得

$$P\{0<X<\frac{1}{2},0<Y<\frac{1}{2}\}=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}6\mathrm{d}y=\frac{1}{2},$$

所以应填 $\dfrac{1}{2}$.

【评注】　如果记区域 $x^2\leqslant y\leqslant x<1$ 为 G；$x^2\leqslant y\leqslant x<\dfrac{1}{2}$ 为 D. 它们的面积分别为

S_G 和 S_D.

则根据二维均匀分布的性质：

$$P\{0<X<\frac{1}{2},0<Y<\frac{1}{2}\}=P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{S_D}{S_G}$$

$$=\frac{\int_0^{\frac{1}{2}}(x-x^2)\mathrm{d}x}{\int_0^1(x-x^2)\mathrm{d}x}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{2}.$$

这里不要求求出 $f(x,y)$.

【例 2】 设随机变量(X,Y)服从二维正态分布 $N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;0)$，$f_X(x)$，$f_Y(y)$ 分别表示 X,Y 的概率密度，则在 $Y=y$ 的条件下，X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x\mid y)$ 为

(A) $f_X(x)$. (B) $f_Y(y)$. (C) $f_X(x)f_Y(y)$. (D) $\frac{f_X(x)}{f_Y(y)}$.

解 **【方法一】** $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$，则 X 与 Y 相互独立的充分必要条件是 $\rho=0$. 故本题中 X 与 Y 相互独立，且(X,Y)的概率密度

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y).$$

根据条件概率密度的定义，当在 $Y=y$ 的条件下，如果 $f_Y(y)\neq 0$ 则

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{f_X(x)f_Y(y)}{f_Y(y)}=f_X(x).$$

现 $f_Y(y)$ 显然不为 0，所以 $f_{X|Y}(y)=f_X(x)$. 答案应选(A).

【方法二】 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;0)$，所以 X 与 Y 相互独立，Y 的取值不影响 X 的取值，所以 $f_{X|Y}(x\mid y)=f_X(x)$. 答案应选(A).

【例 3】 设二维随机变量(X,Y)在圆域 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上服从均匀分布，求条件概率密度 $f_{X|Y}(x\mid y)$.

解 由假设随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi},x^2+y^2\leqslant 1,\\0,\text{其他}.\end{cases}$$

且有边缘分布密度

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2},&-1\leqslant y\leqslant 1,\\0,&\text{其他}.\end{cases}$$

于是当 $-1<y<1$ 时，有

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\begin{cases}\frac{1/\pi}{(2/\pi)\sqrt{1-y^2}}=\frac{1}{2\sqrt{1-y^2}},&-\sqrt{1-y^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{1-y^2},\\0,&\text{其他}.\end{cases}$$

【评注】 在求条件密度 $f_{X|Y}(x\mid y)$ 时，先求出边缘分布密度 $f_Y(y)$，要注意 $f_Y(y)>0$ 的范围. 在本题中，$y=\pm 1$ 时 $f_Y(y)$ 的值均为零，因而条件密度 $f_{X|Y}(x\mid y)$ 均不存在. 所以，只有在 $-1<y<1$ 时才有 $f_{X|Y}(x\mid y)$ 的值.

【例 4】　设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x^2, & 0<x<3,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

令随机变量 $Y=\begin{cases}2, & X\leqslant 1,\\ X, & 1<X<2,\\ 1, & 2\leqslant X.\end{cases}$

(1) 求 Y 的分布函数；

(2) 求概率 $P\{X\leqslant Y\}$.

解　(1) $Y=\begin{cases}2, & X\leqslant 1,\\ X, & 1<X<2,\\ 1, & 2\leqslant X,\end{cases}$ Y 显然是随机变量 X 的函数，只是这函数是分段表示的，Y 的取值：$1\leqslant Y\leqslant 2$. 所以讨论 Y 的分布函数 $F_Y(y)$ 用分段讨论.

当 $y<1$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}\leqslant P\{Y<1\}=0$；

当 $1\leqslant y<2$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{Y<1\}+P\{Y=1\}+P\{1<Y\leqslant y\}$

$$=0+P\{X\geqslant 2\}+P\{1<X\leqslant y\}$$

$$=\int_2^3\frac{1}{9}x^2\mathrm{d}x+\int_1^y\frac{1}{9}x^2\mathrm{d}x=\frac{y^3+18}{27};$$

当 $2\leqslant y$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{Y\leqslant 2\}=1$.

总之，Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ \frac{y^3+18}{27}, & 1\leqslant y<2,\\ 1, & 2\leqslant y.\end{cases}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

(2) 因为 $Y=\begin{cases}2, & X\leqslant 1,\\ X, & 1<X<2,\\ 1, & 2\leqslant X,\end{cases}$

$$P\{X\leqslant Y\}=P\{X=Y\}+P\{X<Y\}$$

$$=P\{1<X<2\}+P\{X\leqslant 1\}$$

$$=P\{X<2\}=\int_0^2\frac{1}{9}x^2\mathrm{d}x=\frac{8}{27}.$$

【例 5】　设 $(X,Y)\sim N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，则 $P\{X<Y\}=$ _____.

解　$P\{X<Y\}=\iint\limits_{x<y}\frac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}[(x-\mu)^2+(y-\mu)^2]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

用极坐标 $\begin{cases}x-\mu=r\cos\theta,\\ y-\mu=r\sin\theta,\end{cases}$ 上式化为

$$P\{X<Y\}=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}r\mathrm{d}r=\frac{1}{2}.$$

如果把 $P\{X<Y\}$ 化成 $P\{X-Y<0\}$，则 $X-Y\sim N(0,2\sigma^2)$，根据对称性

$$P\{X-Y<0\}=\frac{1}{2}.$$

如果注意到 (X,Y) 中 X 与 Y 的对称性，则也有 $P\{X<Y\}=P\{X>Y\}=\frac{1}{2}$，因 $P\{X=Y\}=0$.

§4 两个随机变量函数 $Z=g(X,Y)$ 的分布

3.4.1 X,Y 均为离散型随机变量

Z 的分布律的求法与一维离散型类似.

3.4.2 X,Y 均为连续型随机变量

$F_Z(z)$ 的求法,可用公式

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{g(X,Y)\leqslant z\}=\iint\limits_{g(x,y)\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

特别当 $Z=X+Y$ 时,

$$F_Z(z)=P\{X+Y\leqslant z\}=\iint\limits_{x+y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{z-x}f(x,y)\mathrm{d}y\left(\text{或}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{z-y}f(x,y)\mathrm{d}x\right).$$

由此可得 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x,$$

或

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y.$$

特别是当 X 和 Y 相互独立时,$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$,则

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x,$$

或

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y.$$

这两个公式称为卷积公式,记为 f_X*f_Y.

【评注】 随机变量的简单函数通常包括线性函数、初等函数、最大值、最小值、绝对值等.

3.4.3 X 为离散型随机变量、Y 为连续型随机变量

一般对离散型随机变量 X 的各种可能取值用全概率公式把它们展开,如下:

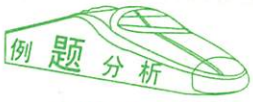
X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

Y 为连续型,$Z=g(X,Y)$ 则

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{g(X,Y)\leqslant z\}$$

$$=\sum_i P\{X=x_i\}P\{g(X,Y)\leqslant z\mid X=x_i\}$$

$$=\sum_i p_iP\{g(x_i,Y)\leqslant z\mid X=x_i\}.$$



【例 1】 设随机变量 X 和 Y 相互独立,服从同一参数为 λ 的泊松分布,试求:随机变量 $Z=X+Y$ 的分布律.

微信公众号【高途考研】(ID: djky66)

解题思路　这是两个离散型随机变量的函数的分布. X,Y 均服从 $P(\lambda)$ 分布，它们的取值均为 0，1,2,…，因此 Z 的取值必为 0,1,2,…，Z 为离散型随机变量.

求 Z 的分布律 $P\{Z=k\}=P\{X+Y=k\},k=0,1,2,\cdots$

要计算 $P\{X+Y=k\}$ 必须把 X,Y 分开，再利用 X,Y 的独立性.

解　因为 X 和 Y 相互独立且服从同一参数为 λ 的泊松分布，所以

$$P\{Z=k\}=P\{X+Y=k\}=\sum_{i=0}^{k}P\{X=i,Y=k-i\}=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}\cdot\frac{\lambda^{k-i}e^{-\lambda}}{(k-i)!}$$

$$=e^{-2\lambda}\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^k}{i!(k-i)!}=e^{-2\lambda}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$=e^{-2\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\sum_{i=0}^{k}C_k^i=e^{-2\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}(1+1)^k$$

$$=\frac{(2\lambda)^k}{k!}e^{-2\lambda},\quad k=0,1,2,\cdots$$

故 $Z=X+Y$ 服从参数为 2λ 的泊松分布.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例 2】　设随机变量 X,Y 独立同分布，且 X 的分布函数为 $F(x)$，则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为

(A) $F^2(x)$.　　(B) $F(x)F(y)$.

(C) $1-[1-F(x)]^2$.　　(D) $[1-F(x)][1-F(y)]$.

解　$Z=\max\{X,Y\}$，Z 的分布函数

$$F_Z(x)=P\{Z\leqslant x\}=P\{\max\{X,Y\}\leqslant x\}=P\{X\leqslant x,Y\leqslant x\}$$

$$=P\{X\leqslant x\}P\{Y\leqslant x\}=F(x)F(x)=F^2(x).$$

故答案应选(A).

【评注】　本题是 2008 年的真题，很多考生错误地选择(B). 事实上 $F(x)F(y)$ 是二维 (X,Y) 的分布函数.

因设 (X,Y) 的分布函数为 $F_1(x,y)$，则

$$F_1(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=P\{X\leqslant x\}P\{Y\leqslant y\}=F(x)F(y).$$

不难验证(C) $1-[1-F(x)]^2$ 是随机变量 $\min\{X,Y\}$ 的分布函数，而(D)本身不是分布函数.

【例 3】　设随机变量 X 和 Y 相互独立，X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，Y 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上服从均匀分布，求随机变量 $Z=X+Y$ 的概率分布(计算结果用标准正态分布函数 Φ 表示，其中 $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$).

解　X 和 Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<+\infty;\quad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & -\pi\leqslant y\leqslant\pi,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

由于 X 和 Y 相互独立，根据卷积公式，可得 $Z=X+Y$ 的概率密度

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy=\int_{-\pi}^{\pi}f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(z-y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dy,$$

令 $t=\dfrac{z-y-\mu}{\sigma}$，则 $\mathrm{d}y=-\sigma\mathrm{d}t$，

当 $y=-\pi$ 时，$t=\dfrac{z+\pi-\mu}{\sigma}$；

当 $y=\pi$ 时，$t=\dfrac{z-\pi-\mu}{\sigma}$，因此，

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}}^{\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\left[\Phi\left(\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}\right)\right].$$

【例 4】 设随机变量 X 与 Y 相互独立，$F_X(x)$ 与 $F_Y(y)$ 分别是它们的分布函数，令 $Z=\min(X,Y)$，求 Z 的分布函数 $F_Z(z)$.

解 **【方法一】** 由于事件 $\{\min(X,Y)\leqslant z\}$ 与 $\{\min(X,Y)>z\}$ 是互为对立的事件，且事件 $\{\min(X,Y)>z\}=\{X>z,Y>z\}$，再应用 X 与 Y 的相互独立性可知 $P\{X>z,Y>z\}=P\{X>z\}P\{Y>z\}$，因此有

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{Z\leqslant z\}=P\{\min(X,Y)\leqslant z\}\\&=1-P\{X>z\}P\{Y>z\}=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]\\&=F_X(z)+F_Y(z)-F_X(z)F_Y(z).\end{aligned}$$

【方法二】 事件 $\{\min(X,Y)\leqslant z\}$ 是事件 $\{X\leqslant z\}$ 与 $\{Y\leqslant z\}$ 的和，根据两个事件之和的加法公式，有

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{\min(X,Y)\leqslant z\}=P\{\{X\leqslant z\}\cup\{Y\leqslant z\}\}\\&=P\{X\leqslant z\}+P\{Y\leqslant z\}-P\{X\leqslant z\}P\{Y\leqslant z\}\\&=F_X(z)+F_Y(z)-F_X(z)F_Y(z).\end{aligned}$$

微信公众号【师生考研】(ID: diky66)

【例 5】 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2x,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求：(1) (X,Y) 的边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$；

(2) $Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$；

(3) $P\left\{Y\leqslant\dfrac{1}{2}\mid X\leqslant\dfrac{1}{2}\right\}$.

解题思路 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$，现给定 $f(x,y)$，通过积分不难得到 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$.

求 $Z=2X-Y$ 的分布密度 $f_Z(z)=F_Z'(z)$，可先求

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{2X-Y\leqslant z\}=\iint\limits_{2x-y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

计算积分 $\iint\limits_{2x-y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 时，要讨论 z 的取值范围.

从图 3-3 可以看出，应分 $z<0$，$0\leqslant z\leqslant 2$，$2<z$，三个范围. 在求积分时，由于 $f(x)=0$ 或 1，故只要求在 $f(x)=1$ 内相应的区域面积就可以.

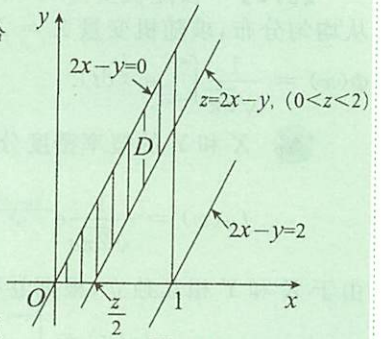


图 3-3

$P\left\{Y\leqslant\frac{1}{2}\mid X\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\dfrac{P\left\{X\leqslant\frac{1}{2},Y\leqslant\frac{1}{2}\right\}}{P\left\{X\leqslant\frac{1}{2}\right\}}$ 也只要求有关区域的面积即可.

解 (1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^{2x}\mathrm{d}y, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{y/2}^{1}\mathrm{d}x, & 0<y<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}1-\frac{y}{2}, & 0<y<2,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

(2) 当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $0\leqslant z\leqslant 2$ 时，$F_Z(z)=\iint\limits_{2x-y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1-\iint\limits_{2x-y>z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=1-\int_{\frac{z}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{2x-z}\mathrm{d}y=z-\frac{z^2}{4}$；

当 $2<z$ 时，$F_Z(z)=1$，所以

$f_Z(z)=\begin{cases}1-\frac{z}{2}, & 0\leqslant z\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(3) $P\{Y\leqslant\frac{1}{2}\mid X\leqslant\frac{1}{2}\}=\dfrac{P\{Y\leqslant\frac{1}{2},X\leqslant\frac{1}{2}\}}{P\{X\leqslant\frac{1}{2}\}}$

$=\dfrac{\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$

$=\dfrac{S_B}{S_A}=\dfrac{\frac{1}{4}-\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}}=\dfrac{3}{4}.$

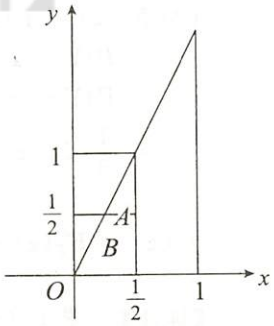


图 3-4

【评注】 (2) 中 $0\leqslant z\leqslant 2$ 时，

$$F_Z(z)=\iint\limits_{2x-y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=S_D$$

求 S_D，即区域 D 的面积，可以在图 3-3 中得到大三角形面积为 1，减去小三角形的面积

$$\frac{1}{2}(1-\frac{z}{2})\cdot 2(1-\frac{z}{2})=(1-\frac{z}{2})^2,$$

即 $S_D=1-(1-\frac{z}{2})^2=z-\frac{z^2}{4}$，而不必去求积分.

对二维均匀分布我们常用求面积来代替概率积分.

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

【例 6】 设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 的概率分布为 $P\{X=i\}=\frac{1}{3}(i=-1,0,1)$，$Y$ 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 记 $Z=X+Y$，

(1) 求 $P\{Z\leqslant\frac{1}{2}\mid X=0\}$；(2) 求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$.

解题思路 (1)$P\{Z\leqslant\frac{1}{2}\mid X=0\}=P\{X+Y\leqslant\frac{1}{2}\mid X=0\}=P\{Y\leqslant\frac{1}{2}\mid X=0\}=P\{Y\leqslant\frac{1}{2}\}$. 这里涉及条件概率、独立性、均匀分布.

(2)$f_Z(z)=F_Z'(z)$，而 $F_Z(z)=P\{X+Y\leqslant z\}$，其中 X 为离散型随机变量，Y 为连续型随机变量. 本题是 2008 年真题，也是第一次考离散型和连续型混合的随机变量函数分布，X 的分布比较简单，我们对 X 的各种可能取值进行分解：

$$\begin{aligned}\{X+Y\leqslant z\}&=\{X+Y\leqslant z,X=-1\}\cup\{X+Y\leqslant z,X=0\}\cup\{X+Y\leqslant z,X=1\}\\&=\{Y\leqslant z+1,X=-1\}\cup\{Y\leqslant z,X=0\}\cup\{Y\leqslant z-1,X=1\}\end{aligned}$$

然后再用 X,Y 的独立性，就可以进一步求解.

解 (1)$P\{Z\leqslant\frac{1}{2}\mid X=0\}=P\{X+Y\leqslant\frac{1}{2}\mid X=0\}=P\{Y\leqslant\frac{1}{2}\mid X=0\}$

$$=P\{Y\leqslant\tfrac{1}{2}\}=\frac{1}{2}.$$

(2) $F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}$

$$\begin{aligned}&=P\{Y\leqslant z+1,X=-1\}+P\{Y\leqslant z,X=0\}+P\{Y\leqslant z-1,X=1\}\\&=P\{Y\leqslant z+1\}P\{X=-1\}+P\{Y\leqslant z\}P\{X=0\}+P\{Y\leqslant z-1\}P\{X=1\}\\&=\frac{1}{3}[F_Y(z+1)+F_Y(z)+F(z-1)].\end{aligned}$$

其中 $F_Y(z)$ 为 Y 的分布函数.

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\frac{1}{3}[f_Y(z+1)+f_Y(z)+f_Y(z-1)]=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1\leqslant z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

【评注】 求 $F_Z(z)$ 时，也可用全概率公式：

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{Z\leqslant z\}=\sum_{i=-1}^{1}P\{X=i\}P\{X+Y\leqslant z\mid X=i\}\\&=\frac{1}{3}\sum_{i=-1}^{1}P\{Y\leqslant z-i\mid X=i\}\\&=\frac{1}{3}\sum_{i=-1}^{1}P\{Y\leqslant z-i\}=\frac{1}{3}\sum_{i=-1}^{1}F_Y(z-i)\end{aligned}$$

$$f_Z(z)=\frac{1}{3}\sum_{i=-1}^{1}f_Y(z-i)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1\leqslant z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

【例 7】 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$，Y 服从 $B(1,\frac{1}{2})$ 分布，记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数，则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.

解　$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{XY\leqslant z\}$

$$=P\{Y=0\}P\{XY\leqslant z\mid Y=0\}+P\{Y=1\}P\{XY\leqslant z\mid Y=1\}$$

$$=\frac{1}{2}P\{0\leqslant z\mid Y=0\}+\frac{1}{2}P\{X\leqslant z\mid Y=1\}$$

$$=\frac{1}{2}P\{0\leqslant z\}+\frac{1}{2}P\{X\leqslant z\}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\Phi(z), & z<0,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\Phi(z), & z\geqslant 0.\end{cases}$$

$F_Z(z)$ 有一个间断点在 $z=0$ 处.

答案应填(B).

【评注】　本题是 2009 年考题，对离散型和连续型混合组成的两个随机变量函数，一般常采用本题的解法：对离散型随机变量的各种可能取值用全概率公式把它们展开.

【例 8】　设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立，其中 X_1 和 X_2 均服从标准正态分布，X_3 的概率分布为 $P\{X_3=0\}=P\{X_3=1\}=\frac{1}{2}$，$Y=X_3X_1+(1-X_3)X_2$.

(1) 求二维随机变量 (X_1,Y) 的分布函数，结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示；

(2) 证明随机变量 Y 服从标准正态分布.

解　(1) 记 (X_1,Y) 的分布函数为 $F(x,y)$，则对任意实数 x 和 y 都有

$$F(x,y)=P\{X_1\leqslant x,Y\leqslant y\}=P\{X_1\leqslant x,X_3X_1+(1-X_3)X_2\leqslant y\}$$

$$=P\{X_3=0\}P\{X_1\leqslant x,X_3X_1+(1-X_3)X_2\leqslant y\mid X_3=0\}+$$
$$P\{X_3=1\}P\{X_1\leqslant x,X_3X_1+(1-X_3)X_2\leqslant y\mid X_3=1\}$$

$$=\frac{1}{2}P\{X_1\leqslant x,X_2\leqslant y\mid X_3=0\}+\frac{1}{2}P\{X_1\leqslant x,X_1\leqslant y\mid X_3=1\}$$

$$=\frac{1}{2}P\{X_1\leqslant x,X_2\leqslant y\}+\frac{1}{2}P\{X_1\leqslant x,X_1\leqslant y\}$$

$$=\frac{1}{2}P\{X_1\leqslant x\}P\{X_2\leqslant y\}+\frac{1}{2}P\{X_1\leqslant \min(x,y)\}$$

$$=\frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y)+\frac{1}{2}\Phi(\min(x,y))$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

(2) 求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$

【方法一】　$$F_Y(y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=\lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y)+\frac{1}{2}\Phi(\min(x,y))\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\Phi(y)+\frac{1}{2}\Phi(y)=\Phi(y)$$

【方法二】　$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X_3X_1+(1-X_3)X_2\leqslant y\}$$

$$=P\{X_3=0\}P\{X_3X_1+(1-X_3)X_2\leqslant y\mid X_3=0\}+$$
$$P\{X_3=1\}P\{X_3X_1+(1-X_3)X_2\leqslant y\mid X_3=1\}$$

$$=\frac{1}{2}P\{X_2\leqslant y\mid X_3=0\}+\frac{1}{2}P\{X_1\leqslant y\mid X_3=1\}$$

$$=\frac{1}{2}P\{X_2\leqslant y\}+\frac{1}{2}P\{X_1\leqslant y\}=\frac{1}{2}\Phi(y)+\frac{1}{2}\Phi(y)=\Phi(y).$$

第四章　随机变量的数字特征

考点与要求

理解　随机变量的数字特征(数学期望、方差、标准差、矩、协方差、相关系数).

了解　切比雪夫不等式.

掌握　常用分布的数字特征.

会　运用数字特征的基本性质,求随机变量函数的数学期望.

§1　随机变量的数学期望和方差

内容精讲

微信公众号【顶尖考研】(ID:dingjky66)

4.1.1　数学期望

定义　(1) 离散型随机变量的数学期望

设随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X=x_k\}=p_k,\quad k=1,2,\cdots$$

如果级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}x_kp_k$ 绝对收敛,则称此级数为随机变量 X 的数学期望或均值,记作 $E(X)$,即

$$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}x_kp_k.$$

(2) 连续型随机变量的数学期望

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$,如果积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛,则称此积分为随机变量 X 的数学期望或均值,记作 $E(X)$,即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x.$$

4.1.2　数学期望的性质

(1) 设 C 是常数,则有 $E(C)=C$.

(2) 设 X 是随机变量,C 是常数,则有

$$E(CX)=CE(X).$$

(3) 设 X 和 Y 是任意两个随机变量,则有

$$E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y).$$

(4) 设随机变量 X 和 Y 相互独立,则有

$$E(XY)=E(X)E(Y).$$

【评注】　性质(4)要求 X 和 Y 的相互独立，可以减弱为 X 和 Y 不相关就有 $E(XY)=E(X)E(Y)$. 事实上 $E(XY)=E(X)E(Y)$ 成立的充要条件是 X 和 Y 不相关.

4.1.3　随机变量 X 的函数 $Y=g(X)$ 的数学期望

(1) 设随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,\cdots$$

如果级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} g(x_k)p_k$ 绝对收敛，则随机变量 $Y=g(X)$ 的数学期望为

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{+\infty} g(x_k)p_k.$$

(2) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，如果积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则随机变量 $Y=g(X)$ 的数学期望为

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

4.1.4　随机变量 (X,Y) 的函数 $Z=g(X,Y)$ 的数学期望

(1) 设随机变量 (X,Y) 的概率分布为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}, i,j=1,2,\cdots$$

如果级数 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\sum\limits_{j=1}^{+\infty} g(x_i,y_j)p_{ij}$ 绝对收敛，则随机变量 $Z=g(X,Y)$ 的数学期望为

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} g(x_i,y_j)p_{ij}.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

(2) 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，如果积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 绝对收敛，则随机变量 $Z=g(X,Y)$ 的数学期望为

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

4.1.5　方差

定义　设 X 是随机变量，如果数学期望 $E\{[X-E(x)]^2\}$ 存在，则称之为 X 的方差，记作 $D(X)$，即

$$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}.$$

称 $\sqrt{D(X)}$ 为随机变量 X 的标准差或均方差，记作 $\sigma(X)$，

即 $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

4.1.6　方差计算公式

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

证明　$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}=E\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\}$

$$=E(X^2)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2=E(X^2)-[E(X)]^2.$$

由于对任何随机变量 X，$D(X)\geqslant 0$，故恒有

$$E(X^2)\geqslant[E(X)]^2.$$

有时在已知 X 的数学期望与方差时，还用此公式求 $E(X^2)$.

4.1.7　方差的性质

(1) 设 C 是常数，则 $D(C)=0$，反之，从 $D(X)=0$ 中不能得出 X 为常数的结论.

(2) 设 X 是随机变量，a 和 b 是常数，则有

$$D(aX+b)=a^2D(X).$$

(3) 设随机变量 X 和 Y 相互独立，则有

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y).$$

【评注】 性质(3)要求 X 和 Y 相互独立，可以减弱为 X 和 Y 不相关就有 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$. 事实上 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$ 成立的充要条件是 X 和 Y 不相关.

4.1.8 常用随机变量的数学期望和方差

(1) 0-1 分布

$E(X)=p$， $D(X)=p(1-p)$.

(2) 二项分布，$X\sim B(n,p)$

$E(X)=np$， $D(X)=np(1-p)$.

(3) 泊松分布，$X\sim P(\lambda)$

$E(X)=\lambda$， $D(X)=\lambda$.

(4) 几何分布，$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}$，$k=1,2,\cdots,0<p<1$.

$E(X)=\dfrac{1}{p}$， $D(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$.

(5) 均匀分布，$X\sim U(a,b)$

$E(X)=\dfrac{a+b}{2}$， $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

(6) 指数分布，$X\sim E(\lambda)$

$E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$， $D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$.

(7) 正态分布，$X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$E(X)=\mu$， $D(X)=\sigma^2$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

例题分析

【例 1】 5 件产品中混有 2 件次品，现每次不放回地从中随机地取出一件进行检验，直到两个次品都被查到为止. 求所需检验次数 X 的数学期望 $E(X)$.

解 X 的可能取值应为 2,3,4,5. 事件“$X=i$”为第二件次品在第 i 次检验中查出，而第一件次品则在前 $i-1$ 次检验中发现. 故

$$P\{X=i\}=\frac{C_{i-1}^1}{C_5^2},i=2,3,4,5$$

所以 X 的分布律为

X	2	3	4	5
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

于是

$$E(X)=2\times\frac{1}{10}+3\times\frac{2}{10}+4\times\frac{3}{10}+5\times\frac{4}{10}=4.$$

【评注】 如果本题只要求挑出 2 件次品，实际上就不要检验第 5 次.

【例 2】　设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$　$F(x)$ 为 X 的分布函数，$E(X)$ 为 X 的数学期望，则 $P\{F(X)>E(X)-1\}=$ _____.

解　$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 x\cdot\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$.

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \frac{x^2}{4}, & 0<x<2,\\ 1, & 2\leqslant x.\end{cases}\quad F(X)=\frac{X^2}{4}.$$

$$P\{F(X)>E(X)-1\}=P\left\{\frac{X^2}{4}>\frac{4}{3}-1\right\}=P\left\{X^2>\frac{4}{3}\right\}=P\left\{X>\frac{2}{\sqrt{3}}\right\}+P\left\{X<-\frac{2}{\sqrt{3}}\right\}$$

$$=\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2}\frac{x}{2}\mathrm{d}x+0=\frac{x^2}{4}\Big|_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

答案应填 $\frac{2}{3}$.

【评注】　如果记住本书第二章 §4 例 1 的评注：对任一连续型随机变量 X，其分布函数为 $F(x)$，则 $Y=F(X)$ 必定服从分布 $U(0,1)$. 本题可简单计算如下：

$$P\{F(X)>E(X)-1\}=P\left\{Y>\frac{4}{3}-1\right\}=P\left\{Y>\frac{1}{3}\right\}=\frac{2}{3}.$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【例 3】　将一均匀骰子独立地抛掷 3 次，求掷得的三数之和 X 的数学期望.

解　设随机变量 $X_i=$ 第 i 次抛掷所出现的点数，$i=1,2,3$，显然，出现点数之和为

$$X=X_1+X_2+X_3.$$

由于　$$P\{X_i=k\}=\frac{1}{6},\quad k=1,2,3,4,5,6,\quad i=1,2,3,$$

故　$$E(X_i)=\sum_{k=1}^{6}kP\{X_i=k\}=\frac{1}{6}(1+2+\cdots+6)=3.5,$$

从而　$$E(X)=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)=3\times 3.5=10.5.$$

【评注】　本题如果先求出随机变量 X 的分布律，

$$P\{X=j\}=p_j,\quad j=3,4,\cdots,18$$

再用公式 $E(X)=\sum_{j=3}^{18}jp_j$ 就会大大增加计算的难度.

现利用数学期望的性质(3)，将 X 分解成 $X_1+X_2+X_3$，而 X_i 的分布律是一样的. 求解 $E(X)$ 就大为简化.

【例 4】　设随机变量 X 的分布律为

X	-2	0	2
P	0.4	0.3	0.3

则 $E(X^2)=$ _____.

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

解　利用随机变量的函数的数学期望公式

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{3}x_k^2p_k=(-2)^2\times0.4+0^2\times0.3+2^2\times0.3=2.8,$$

故答案应填 2.8.

【评注】 本题也可以先求出 X^2 的分布律

X^2	0	4
P	0.3	0.7

然后求出 $E(X^2)$ 的值.

一般说,先求出 $Y=g(X)$ 的分布律,再求 $E(Y)$,要比直接用随机变量函数的数学期望公式稍复杂些.

【例 5】 商店经销某种商品,每周进货的数量 X 与顾客对该种商品的需求量 Y 是相互独立的随机变量,且都在区间[10,20]上服从均匀分布. 商店每售出一单位商品可得利润 1000 元;若需求量超过了进货量,商店可从其他商店调剂供应,这时每单位商品获利为 500 元,试计算此商店经销该种商品每周所得利润的期望值.

解 设 Z 表示此商店经销该种商品每周所得的利润,则

$$Z=g(X,Y)=\begin{cases}1000Y, & Y\leqslant X,\\ 1000X+500(Y-X), & Y>X.\end{cases}$$

由于 X 和 Y 相互独立,因此 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{100}, & 10\leqslant x,y\leqslant 20,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

从而可得每周所得利润的数学期望为

$$\begin{aligned}E(Z)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{10}^{20}\mathrm{d}x\int_{10}^{x}1000y\cdot\frac{1}{100}\mathrm{d}y+\int_{10}^{20}\mathrm{d}x\int_{x}^{20}500(x+y)\frac{1}{100}\mathrm{d}y\\&\approx14166.7(\text{元}).\end{aligned}$$

【例 6】 设某种商品每周的需求量 X 是服从区间[10,30]上均匀分布的随机变量,而经销商店进货数量为区间[10,30]中的某一整数. 商店每销售一单位商品可获利 500 元;若供大于求,则削价处理,每处理一单位商品亏损 100 元;若供不应求,则可以从外部调剂供应,此时每一单位商品仅获利 300 元. 为使商店所获利润期望值不少于 9280 元,试确定最少进货量.

解 需求量 $X\sim U[10,30]$,故 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{20}, & 10\leqslant x\leqslant 30,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

设进货量为 a,则销售所得利润与需求量有关,当 $X>a$ 时,所进的货全售出得利润 $500a$,差额从外调剂获利 $300(X-a)$. 当 $X\leqslant a$ 时,销售获利 $500X$,多余的削价处理 $100(a-X)$. 总之,经销商品所得利润 Z 为

$$Z=g(X,a)=\begin{cases}500a+300(X-a), & a<X\leqslant 30,\\ 500X-100(a-X), & 10\leqslant X<a,\end{cases}$$

微信公众号【贝斯考研】(ID:djky66)

简化成

$$Z=g(X,a)=\begin{cases}300X+200a, & a<X\leqslant 30,\\ 600X-100a, & 10\leqslant X\leqslant a.\end{cases}$$

$$\begin{aligned}E[g(X,a)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,a)f_X(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{10}^{a}(600x-100a)\cdot\frac{1}{20}\mathrm{d}x+\int_{a}^{30}(300x+200a)\cdot\frac{1}{20}\mathrm{d}x\\&=-7.5a^2+350a+5250,\end{aligned}$$

依题意有 $-7.5a^2+350a+5250\geqslant 9280$，即 $3a^2-140a+1612\leqslant 0$，解得 $\frac{62}{3}\leqslant a\leqslant 26$.

故利润期望值不少于 9280 元的最小进货量为 21 单位.

【例 7】　设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}4xe^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

则 $D(2X-1)=$_____.

解　$D(2X-1)=4D(X)=4\{E(X^2)-[E(X)]^2\}$

故只需求出 $E(X)$ 和 $E(X^2)$.

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}4x^2e^{-2x}\mathrm{d}x\\&=-2x^2e^{-2x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}4xe^{-2x}\mathrm{d}x=1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(X^2)&=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}4x^3e^{-2x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}t^3e^{-t}\mathrm{d}t=\frac{3!}{4}=\frac{3}{2},\end{aligned}$$

从而　$$D(2X-1)=4\left(\frac{3}{2}-1\right)=2.$$

答案应填 2.

【评注】　在求方差时常用公式 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$，而较少用公式 $D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$.

【例 8】　已知随机变量 $X\sim B(n,p)$，试证 $D(X)=np(1-p)$.

证明　设独立重复试验 n 次，每次试验结果成功的概率为 p，记这 n 次试验中总的成功次数为 X，则 $X\sim B(n,p)$.

设随机变量 $X_i=\begin{cases}1,\text{第 }i\text{ 次试验成功},\\ 0,\text{第 }i\text{ 次试验不成功},\end{cases}$　$i=1,2,\cdots,n$

显然，X_i 服从 0-1 分布，故 $D(X_i)=p(1-p)$.

而 X_i 与 $X_j(i\neq j)$ 是相互独立的，且 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$，所以

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=np(1-p).$$

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

【评注】 如果按定义 $E(X)=\sum\limits_{k=0}^{n}x_kp_k=\sum\limits_{k=0}^{n}kC_n^kp^k(1-p)^{n-k}$ 直接计算，计算量会大得多.

【例 9】 设随机变量 $X\sim P(\lambda)$，试证 $E(X)=\lambda$.

证明 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},k=0,1,2,\cdots$，故

$$E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}$$
$$=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{i+1}}{i!}e^{-\lambda}=\lambda\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}=\lambda.$$

【例 10】 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi(\dfrac{x-1}{2})$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $E(X)=$ _____.

解 【方法一】 $f(x)=F'(x)=0.3\varphi(x)+\dfrac{0.7}{2}\varphi(\dfrac{x-1}{2})$，其中 $\varphi(x)$ 为标准正态密度函数.

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=0.3\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\mathrm{d}x+\frac{0.7}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(\frac{x-1}{2})\mathrm{d}x$$
$$=0.3\times0+0.7\int_{-\infty}^{+\infty}(2t+1)\varphi(t)\mathrm{d}t=0.7.$$

答案应填 0.7.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

【方法二】 当 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 时，其分布函数为 $\Phi(\dfrac{x-\mu}{\sigma})$，即有分布函数为 $\Phi(\dfrac{x-\mu}{\sigma})$ 的随机变量，其数学期望为 μ，故 $F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi(\dfrac{x-1}{2})$，对应的数学期望为

$$0.3\times0+0.7\times1=0.7.$$

【例 11】 已知 N 件产品中含有 M 件次品，从中任意一次取出 n 件($n\leqslant N$)，设这 n 件产品中的次品件数为 X，试求 X 的数学期望 $E(X)$.

解 将一次取出 n 件理解成一次一件地不放回地取 n 次.

令 $X_i=\begin{cases}1,\text{第 }i\text{ 次取得次品},\\0,\text{第 }i\text{ 次取得正品},\end{cases}i=1,2,\cdots,n.$

显然 $X=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，第 i 次取得次品的概率，无论每次取后放回或不放回，均为 $\dfrac{M}{N}$，即

$$P\{X_i=1\}=\frac{M}{N},\quad P\{X_i=0\}=\frac{N-M}{N},$$

所以 $E(X_i)=\dfrac{M}{N}$，因而

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=n\frac{M}{N}.$$

顶尖考研 微信公众号 (djky66)

【评注】 (1) 本题也可以先求出 X 的分布律，(称此分布为超几何分布)

$$P\{X=k\}=\frac{C_M^kC_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},\quad k=\max(0,n-N+M),\cdots,\min(M,n).$$

然后直接计算

$$E(X)=\sum_{\max(0,n-N+M)}^{\min(M,n)} k\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},$$

计算过程较复杂.

(2) 本题中的 X_i 之间是不相互独立的,这种不相互独立并不影响使用公式

$$E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i).$$

常由于 X_i 之间不独立,显出使用该公式的方便之处,但对计算方差,本题就不能套用公式

$$D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i).$$

(3) 如果将题中一次取 n 件改成一次一件有放回地取 n 次,则就转化成 n 重伯努利试验,这时

$$X\sim B\left(n,\frac{M}{N}\right),\text{显然 } E(X)=n\frac{M}{N},$$

也就是说,放回与不放回地取出 n 个,平均所得次品数均为 $n\frac{M}{N}$.

(4) 利用公式 $E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)$ 的关键在于设好随机变量

$$X_i=\begin{cases}1,\text{第 } i \text{ 次取得次品},\\0,\text{第 } i \text{ 次取得正品},\end{cases} i=1,2,\cdots,n.$$

因为要求的是次品的件数,如果问的是正品的件数,就可以设随机变量为

$$X_i=\begin{cases}1,\text{第 } i \text{ 次取得正品},\\0,\text{第 } i \text{ 次取得次品},\end{cases} i=1,2,\cdots,n.$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例 12】　设随机变量 X 和 Y 独立同分布,已知 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,求 $Z=\min(X,Y)$ 的数学期望 $E(Z)$.

解　设 $\xi=\frac{X-\mu}{\sigma},\eta=\frac{Y-\mu}{\sigma},\xi,\eta$ 独立同为标准正态分布 $N(0,1)$. 显然

$$Z=\min(X,Y)=\min(\sigma\xi+\mu,\sigma\eta+\mu)=\sigma\min(\xi,\eta)+\mu,$$

$$\begin{aligned}E[\min(\xi,\eta)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\min(x,y)\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\int_{-\infty}^{x}ye^{-\frac{y^2}{2}}dy+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy\int_{-\infty}^{y}xe^{-\frac{x^2}{2}}dx\\&=2\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(-1)e^{-x^2}dx=-\frac{1}{\sqrt{\pi}},\end{aligned}$$

所以

$$E(Z)=\sigma E[\min(\xi,\eta)]+\mu=\mu-\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}.$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例 13】　设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=Ae^{-\frac{x^2}{2}+Bx},\ -\infty<x<+\infty,$$

其中 A,B 为常数,已知 $E(X)=D(X)$,试求 A,B 和 $E(X)$.

解 $f(x)=Ae^{-\frac{x^2}{2}+Bx}=Ae^{\frac{B^2}{2}}e^{-\frac{(x-B)^2}{2}}$，该密度是正态分布 $N(B,1)$ 的密度函数.

又已知 $E(X)=D(X)$，故 $X\sim N(1,1)$，所以 $B=1,E(X)=1$. 常数 $Ae^{\frac{B^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$，即有 $A=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}}$. 故 $A=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}}$，$B=1,E(X)=1$.

【评注】 本题可以用 $E(X)=D(X)$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$ 两条件来求解常数 A,B，但计算量会大得多.

在判断概率密度函数时，关键在于其变量部分的结构，而不在于其常数部分，因为常数部分总可以用 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$ 来确定.

【例 14】 将 n 只球相互独立地放入到 N 只盒子中去，设每只球放入各个盒子是等可能的，求有球的盒子数 X 的数学期望 $E(X)$.

解 设 $X_i=\begin{cases}1,\text{第 } i \text{ 只盒子有球},\\0,\text{第 } i \text{ 只盒子无球},\end{cases}i=1,2,\cdots,N$，显然 $X=\sum_{i=1}^{N}X_i$.

对第 i 只盒子而言，一只球放入的概率为 $\frac{1}{N}$，没放入的概率为 $\left(1-\frac{1}{N}\right)$. n 只球都没放入的概率为 $\left(1-\frac{1}{N}\right)^n$，故

$$P\{X_i=0\}=\left(1-\frac{1}{N}\right)^n.$$

而
$$P\{X_i=1\}=1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n,i=1,2,\cdots,N.$$

从而
$$E(X_i)=1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n,i=1,2,\cdots,N.$$

因此
$$E(X)=E\left(\sum_{i=1}^{N}X_i\right)=\sum_{i=1}^{N}E(X_i)=N\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right].$$

【评注】 如果直接求 $E(X)$，会因为求 X 的分布律显得很困难. 事实上，n 可能比 N 大，也可能比 N 小. 这里现在用随机变量和的期望公式，将问题求解变得较简单. 特别是现在的 X_i 之间是不独立的.

【例 15】 在伯努利试验中，已知 $P(A)=p$. 现独立、重复地进行试验直到出现 A 为止，令 X 表示所需进行的试验次数，试求 $E(X)$ 和 $D(X)$.

解 如果第 k 次试验才出现 A，则前 $k-1$ 次必都出现 $\overline{A}$，故

$$P\{X=k\}=pq^{k-1},k=1,2,\cdots$$

其中 $q=1-p$，称此分布为几何分布.

$$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}kpq^{k-1}=p\sum_{k=1}^{+\infty}(q^k)'=p\left(\sum_{k=1}^{+\infty}q^k\right)'=p\left(\sum_{k=0}^{+\infty}q^k\right)'$$
$$=p\left(\frac{1}{1-q}\right)'=p\cdot\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{1}{p},$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{+\infty}k^2pq^{k-1}=p\sum_{k=1}^{+\infty}(kq^k)'=p\sum_{k=1}^{+\infty}[(k+1)q^k-q^k]'$$
$$=p\Big[\sum_{k=1}^{+\infty}(q^{k+1})''-\sum_{k=1}^{+\infty}(q^k)'\Big]=p\Big[\Big(\sum_{i=2}^{+\infty}q^i\Big)''-\Big(\sum_{k=0}^{+\infty}q^k\Big)'\Big]$$
$$=p\Big[\Big(\sum_{i=0}^{+\infty}q^i\Big)''-\Big(\sum_{k=0}^{+\infty}q^k\Big)'\Big]=p\Big[\Big(\frac{1}{1-q}\Big)''-\Big(\frac{1}{1-q}\Big)'\Big]$$
$$=p\Big[\frac{2}{(1-q)^3}-\frac{1}{(1-q)^2}\Big]$$
$$=\frac{2-p}{p^2},$$

于是

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{q}{p^2}.$$

【例 16】　设随机变量 X 和 Y 的联合分布在以点 $(0,1),(1,0),(1,1)$ 为顶点的三角形区域上服从均匀分布，试求随机变量 $U=X+Y$ 的方差.

解【方法一】　三角形区域为 $G=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,x+y\geqslant 1\}$，随机变量 X 和 Y 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in G,\\ 0, & (x,y)\notin G.\end{cases}$$

以 $f_1(x)$ 表示 X 的概率密度，则当 $x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 1$ 时 $f_1(x)=0$；当 $0<x<1$ 时，有

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{1-x}^{1}2\mathrm{d}y=2x.$$

$$E(X)=\int_0^1 2x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3},E(X^2)=\int_0^1 2x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

所以　　$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}.$

同理可得

$$E(Y)=\frac{2}{3},D(Y)=\frac{1}{18},$$

$$E(XY)=\iint_G 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_{1-x}^1 y\mathrm{d}y=\frac{5}{12}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{5}{12}-\frac{4}{9}=-\frac{1}{36},$$

于是

$$D(U)=D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{1}{18}+\frac{1}{18}-\frac{2}{36}=\frac{1}{18}.$$

【方法二】　以 $f_U(u)$ 表示 $U=X+Y$ 的概率密度. 当 $u<1$ 或 $u>2$ 时，显然 $f_U(u)=0$. 设 $1\leqslant u\leqslant 2$，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 且 $0\leqslant u-x\leqslant 1$ 时，$f(x,u-x)=2$，否则 $f(x,u-x)=0$. 由随机变量之和的概率密度公式，有

$$f_U(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,u-x)\mathrm{d}x=\int_{u-1}^{1}2\mathrm{d}x=2(2-u),$$

因此

$$E(X+Y)=E(U)=\int_{-\infty}^{+\infty}uf_U(u)\mathrm{d}u=2\int_1^2 u(2-u)\mathrm{d}u=\frac{4}{3},$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

$$E[(X+Y)^2]=E(U^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}u^2 f_U(u)\mathrm{d}u=2\int_1^2 u^2(2-u)\mathrm{d}u=\frac{11}{6},$$

$$D(U)=D(X+Y)=E[(X+Y)^2]-[E(X+Y)]^2=\frac{11}{6}-\frac{16}{9}=\frac{1}{18}.$$

【方法三】

$$E(U)=E(X+Y)=\int_0^1\int_{1-x}^1 2(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\int_1^{1+x}2u\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3},$$

$$E(U^2)=E[(X+Y)^2]=\int_0^1\int_{1-x}^1 2(x+y)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\int_1^{1+x}2u^2\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x=\frac{11}{6},$$

故 $D(U)=\frac{11}{6}-\frac{16}{9}=\frac{1}{18}$.

【例 17】 设相互独立的两个随机变量 X 和 Y 的数学期望均存在，记 $U=\max(X,Y)$ 和 $V=\min(X,Y)$，则 $E(UV)=$

(A) $E(U)\cdot E(V)$.　　(B) $E(X)\cdot E(Y)$.

(C) $E(U)\cdot E(Y)$.　　(D) $E(X)\cdot E(V)$.

解 【方法一】 $U=\max(X,Y)=\dfrac{X+Y+|X-Y|}{2}$,

$$V=\min(X,Y)=\frac{X+Y-|X-Y|}{2},$$

所以

$$UV=\frac{(X+Y)^2-|X-Y|^2}{4}=\frac{(X+Y)^2-(X-Y)^2}{4}=XY.$$

又由于 X,Y 独立，故

$$E(UV)=E(XY)=E(X)E(Y).$$

答案选(B).

【方法二】 $U=\max(X,Y)$，$V=\min(X,Y)$，因总共就 X,Y 两个，因此 $UV=XY$(大的一个乘小的一个). $E(UV)=E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$.

【评注】 本题是 2011 年考题，很多考生 U,V 的表达式写不出. 其实，很容易想到：$U+V=X+Y$，$U-V=|X-Y|$，就可能解出 U,V 的表达式.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

§2 矩、协方差和相关系数

内容精讲

4.2.1 矩

定义 (1) 设 X 是随机变量，如果

$$E(X^k),\quad k=1,2,\cdots,$$

存在，则称之为 X 的 k 阶原点矩.

(2) 设 X 是随机变量，如果

$$E\{[X-E(X)]^k\},\quad k=1,2,\cdots,$$

存在，则称之为 X 的 k 阶中心矩.

(3) 设 X 和 Y 是两个随机变量，如果

$$E(X^kY^l),\quad k,l=1,2,\cdots,$$

存在，则称之为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合矩.

(4) 设 X 和 Y 是两个随机变量，如果

$$E\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\},\quad k,l=1,2,\cdots,$$

存在，则称之为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合中心矩.

4.2.2　协方差

定义　对于随机变量 X 和 Y，如果 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$ 存在，则称之为 X 和 Y 的协方差，记作 $\mathrm{Cov}(X,Y)$，即

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}.$$

4.2.3　相关系数

定义　对于随机变量 X 和 Y，如果 $D(X)D(Y)\neq 0$，则称 $\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$ 为 X 和 Y 的相关系数，记为 ρ_{XY}，即

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}.$$

如果 $D(X)D(Y)=0$，则 $\rho_{XY}=0$.

4.2.4　不相关

定义　如果随机变量 X 和 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=0$，则称 X 和 Y 不相关.

4.2.5　协方差的公式和性质

(1) $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$.

(2) $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\mathrm{Cov}(X,Y)$.

(3) 协方差性质：

(A) $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$；

(B) $\mathrm{Cov}(aX,bY)=ab\mathrm{Cov}(X,Y)$，其中 a,b 是常数；

(C) $\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y)$.

4.2.6　相关系数性质

(1) $|\rho_{XY}|\leqslant 1$；

(2) $|\rho_{XY}|=1$ 的充分必要条件是存在常数 a 和 b，其中 $a\neq 0$，使得

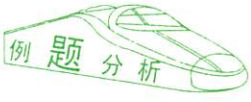
$$P\{Y=aX+b\}=1.$$

4.2.7　独立与不相关

(1) 如果随机变量 X 和 Y 相互独立，则 X 和 Y 必不相关；反之，X 和 Y 不相关时，X 和 Y 却不一定相互独立.

(2) 对二维正态随机变量 (X,Y)，X 和 Y 相互独立的充分必要条件是 $\rho=0$.

(3) 对二维正态随机变量 (X,Y)，X 和 Y 相互独立与 X 和 Y 不相关是等价的.



【例 1】　设随机变量 X 和 Y 的方差均不为零，且 $X^*=\dfrac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$ 和 $Y^*=\dfrac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}$，则 $\rho_{XY}-\rho_{X^*Y^*}=$ _____.

解　显然，$E(X^*)=E(Y^*)=0$，$D(X^*)=D(Y^*)=1$.

$$\rho_{X^*Y^*}=\frac{\mathrm{Cov}(X^*,Y^*)}{\sqrt{D(X^*)}\sqrt{D(Y^*)}}=\mathrm{Cov}(X^*,Y^*)$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

$$= E\{[X^* - E(X^*)][Y^* - E(Y^*)]\} = E(X^*Y^*)$$
$$= E\left[\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}} \cdot \frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right] = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \rho_{XY}.$$

答案应填 0.

【例 2】 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立且均服从标准正态分布，记 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，$Y_i = X_i - \overline{X}$，则 $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_n) =$ _____.

解 $E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = 0$，所以 $E(Y_i) = E(X_i) - E(\overline{X}) = 0$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Y_1, Y_n) &= E[Y_1 - E(Y_1)][Y_n - E(Y_n)] \\ &= E(Y_1 Y_n) = E[(X_1 - \overline{X})(X_n - \overline{X})] \\ &= E(X_1 X_n - X_1\overline{X} - X_n\overline{X} + \overline{X}^2) \\ &= E(X_1 X_n) - E(X_1\overline{X}) - E(X_n\overline{X}) + E(\overline{X}^2).\end{aligned}$$

由于 X_1, X_n 独立，$E(X_1X_n) = E(X_1)E(X_n)$，由对称性得出 $E(X_1\overline{X}) = E(X_n\overline{X})$，

而 $E(\overline{X}^2) = D(\overline{X}) + [E(\overline{X})]^2 = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) + 0^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{1}{n}$.

总之，$\mathrm{Cov}(Y_1, Y_n) = E(X_1)E(X_n) - 2E(X_1\overline{X}) + \frac{1}{n}$

$$= 0 - 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot E\left(X_1^2 + \sum_{i=2}^{n} X_1 X_i\right) + \frac{1}{n}$$
$$= -\frac{2}{n}(1+0) + \frac{1}{n} = -\frac{1}{n}.$$

答案应填 $-\frac{1}{n}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 3】 对随机变量 X 与 Y，证明下列关系是等价的：

(1) $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$；

(2) X 与 Y 不相关；

(3) $E(XY) = E(X)E(Y)$；

(4) $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$.

证明 由 $\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$ 可知，$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ 即 $\rho_{XY} = 0$，所以(1)，(2) 等价.

由 $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ 可知，(1) 与(3) 等价.

由 $D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$ 可知，(1) 与(4) 等价.

【例 4】 设随机变量 X 的概率分布密度为 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$，$-\infty < x < +\infty$.

(1) 求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$.

(2) 求 X 与 $|X|$ 的协方差，并问 X 与 $|X|$ 是否不相关？

(3) 问 X 与 $|X|$ 是否相互独立？为什么？

解 (1) 因为 $xf(x)$ 是奇函数，$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = 0$.

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2.$$

(2)$\mathrm{Cov}(X,|X|)=E(X|X|)-E(X)E(|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}x|x|f(x)\mathrm{d}x=0$，因为$x|x|f(x)$也是奇函数.所以，$X$与$|X|$不相关.

(3)对给定$0<a<+\infty$，显然事件$\{|X|\leqslant a\}$包含在事件$\{X\leqslant a\}$内，且$P\{X\leqslant a\}<1$，$0<P\{|X|\leqslant a\}$，故

$$P\{X\leqslant a,|X|\leqslant a\}=P\{|X|\leqslant a\}.$$

但

$$P\{X\leqslant a\}P\{|X|\leqslant a\}<P\{|X|\leqslant a\},$$

所以

$$P\{X\leqslant a,|X|\leqslant a\}\neq P\{X\leqslant a\}P\{|X|\leqslant a\}.$$

因此，X与$|X|$不独立.

【评注】　本题也是一个真题.我们想通过这题考核$E(X)$，$D(X)$的计算，协方差、相关系数的计算，独立与不相关的关系，为了减少不必要的计算，我们选择的密度函数$f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$，$-\infty<x<+\infty$是具有对称性的偶函数.所以在计算过程中一定要充分利用对称性，可以大大简化计算.事实上，本题的$f(x)$是具有对称性的密度函数中比较简单的一个.

【例5】　已知随机变量(X,Y)服从二维正态分布$N\left(1,0;9,16;-\frac{1}{2}\right)$，设$Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$.

(1)求Z的数学期望$E(Z)$和方差$D(Z)$；

(2)求X与Z的相关系数ρ_{XZ}；

(3)问X与Z是否相互独立?为什么?

解　(1)$(X,Y)\sim N\left(1,0;9,16;-\frac{1}{2}\right)$，所以$X\sim N(1,9)$，$Y\sim N(0,16)$，$\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$.

$$E(Z)=E\left(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=\frac{1}{3}+\frac{0}{2}=\frac{1}{3},$$

$$D(Z)=D\left(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=\frac{D(X)}{9}+\frac{D(Y)}{4}+2\mathrm{Cov}\left(\frac{X}{3},\frac{Y}{2}\right)$$

$$=1+4+\frac{1}{3}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=1+4-2=3.$$

(2)$\mathrm{Cov}(X,Z)=\frac{1}{3}\mathrm{Cov}(X,X)+\frac{1}{2}\mathrm{Cov}(X,Y)$

$$=\frac{1}{3}D(X)+\frac{1}{2}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=3-3=0,$$

所以$\rho_{XZ}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Z)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Z)}}=0$.

(3)因为(X,Y)是正态分布，故$(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})$即$(X,Z)$也是正态分布，又$\rho_{XZ}=0$，所以$X$与$Z$相互独立.

【例6】　设随机变量$X\sim B(1,\frac{1}{4})$，随机变量$Y\sim B(1,\frac{1}{6})$，且$\rho_{XY}=\frac{1}{\sqrt{15}}$，则$P\{X=1,Y=1\}=$_____.

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

解题思路 $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$，如果给定$(X,Y)$的分布律就不难求出$D(X),D(Y)$和$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$.

本题给定了ρ_{XY},X,Y的分布，也就给定了$\rho_{XY},D(X),D(Y),E(X),E(Y)$，就可以求出$E(XY)$的值.由于$X$和$Y$均为$0-1$分布.所以

$$\begin{aligned}E(XY)&=1\cdot 1\cdot P\{X=1,Y=1\}+1\cdot 0\cdot P\{X=1,Y=0\}+\\&\quad 0\cdot 1\cdot P\{X=0,Y=1\}+0\cdot 0\cdot P\{X=0,Y=0\}\\&=P\{X=1,Y=1\}.\end{aligned}$$

这正是我们要求的.

解 $X\sim B(1,\dfrac{1}{4})$，故$E(X)=\dfrac{1}{4},D(X)=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{16}$

$Y\sim B(1,\dfrac{1}{6})$，故$E(Y)=\dfrac{1}{6},D(Y)=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{5}{6}=\dfrac{5}{36}$

$\mathrm{Cov}(X,Y)=\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}\cdot\rho_{XY}=\sqrt{\dfrac{3}{16}}\cdot\sqrt{\dfrac{5}{36}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{15}}=\dfrac{1}{24}.$

但$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$，即$\dfrac{1}{24}=E(XY)-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{6},E(XY)=\dfrac{1}{12}.$

又由于$E(XY)=P\{X=1,Y=1\}$，所以$P\{X=1,Y=1\}=E(XY)$.答案应填$\dfrac{1}{12}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 7】 设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geqslant 1)$独立同分布，且其方差为$\sigma^2>0$，令$Y=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，则

(A)$\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\dfrac{\sigma^2}{n}$.　　(B)$\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\sigma^2$.

(C)$D(X_1+Y)=\dfrac{n+2}{n}\sigma^2$.　　(D)$D(X_1-Y)=\dfrac{n+1}{n}\sigma^2$.

解题思路 本题要计算$\mathrm{Cov}(X_1,Y)$和$D(X_1\pm Y)$，

对$\mathrm{Cov}(X_1,Y)$可以用$\mathrm{Cov}(X_1,Y)=E(X_1-E(X_1))(Y-E(Y))$，　(1)

也可以用$\mathrm{Cov}(X_1,Y)=E(X_1Y)-E(X_1)\cdot E(Y)$，　(2)

再可以用$\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,\dfrac{1}{n}X_1)+\mathrm{Cov}(X_1,\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=2}^{n}X_i)$，　(3)

应该说公式(1),(2),(3)都能把$\mathrm{Cov}(X_1,Y)$求出来，但(1),(2)两式还涉及$E(X_i)$，计算量稍大，而(3)式中的$\mathrm{Cov}(X_1,\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=2}^{n}X_i)=0$，因为$X_1,X_2,\cdots,X_n$是独立同分布，$X_1$与$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=2}^{n}X_i$也独立，应该说(3)抓住问题的关键，计算简单、速度快、容易正确.

解 $\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,\dfrac{1}{n}X_1)+\mathrm{Cov}(X_1,\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=2}^{n}X_i)=\dfrac{1}{n}\mathrm{Cov}(X_1,X_1)+0=\dfrac{\sigma^2}{n}.$

答案应选(A).

【评注】　由于(A)是正确的,(C)(D)就不必再计算,不过如果要计算(C)和(D),同样涉及计算公式的选择:$D(X_1+Y)=D(X_1)+D(Y)+2\mathrm{Cov}(X_1,Y)$　(1)

或者

$$D(X_1+Y)=E(X_1+Y)^2-[E(X_1+Y)]^2 \tag{2}$$

或者

$$D(X_1+Y)=D[(X_1+\frac{1}{n}X_1)+\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}X_i]. \tag{3}$$

不难判断,使用公式(3)比较方便.

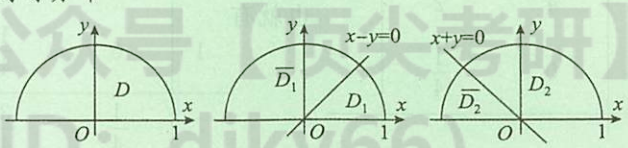
【例 8】　设二维随机变量(X,Y)在区域$D=\{(x,y)\mid 0<y<\sqrt{1-x^2}\}$上服从均匀分布,令

$$Z_1=\begin{cases}1, & X-Y>0,\\ 0, & X-Y\leqslant 0,\end{cases}\quad Z_2=\begin{cases}1, & X+Y>0,\\ 0, & X+Y\leqslant 0.\end{cases}$$

(1) 求二维随机变量(Z_1,Z_2)的概率分布;

(2) 求Z_1与Z_2的相关系数.

解题思路　(X,Y)在D上均匀分布



记 $Z_1=\begin{cases}1, & X-Y>0, \quad D_1\\ 0, & X-Y\leqslant 0, \quad \overline{D_1}\end{cases}$, $Z_2=\begin{cases}1, & X+Y>0, \quad D_2\\ 0, & X+Y\leqslant 0, \quad \overline{D_2}\end{cases}$.

解　(1)【方法一】　$P\{Z_1=1\}=P\{X-Y>0\}=P\{(X,Y)\in D_1\}=\frac{1}{4}$,故

Z_1	0	1
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

$P\{Z_2=1\}=P\{X+Y>0\}=P\{(X,Y)\in D_2\}=\frac{3}{4}$,故

Z_2	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

总之,

Z_1 \ Z_2	0	1	
0			$\frac{3}{4}$
1			$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

$P\{Z_1=1,Z_2=1\}=P\{X-Y>0,X+Y>0\}=P\{(X,Y)\in D_1\cap D_2\}=\frac{1}{4}$.

所以

Z_1 \ Z_2	0	1	
0			$\frac{3}{4}$
1		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	

，进一步有

Z_1 \ Z_2	0	1	
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	

.

【方法二】 (Z_1,Z_2) 的所有可能取值$(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$，且

$$P\{Z_1=0,Z_2=0\}=P\{X-Y\leqslant 0,X+Y\leqslant 0\}=P\{\overline{D_1}\cap\overline{D_2}\}=P\{\overline{D_2}\}=\frac{1}{4}.$$

$$P\{Z_1=0,Z_2=1\}=P\{X-Y\leqslant 0,X+Y>0\}=P\{\overline{D_1}\cap D_2\}=\frac{1}{2}.$$

$$P\{Z_1=1,Z_2=0\}=P\{X-Y>0,X+Y\leqslant 0\}=P\{D_1\cap\overline{D_2}\}=P\{\varnothing\}=0.$$

$P\{Z_1=1,Z_2=1\}$ 可以不必求了. $1-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-0=\frac{1}{4}$.

即得到随机变量(Z_1,Z_2)的概率分布：

Z_1 \ Z_2	0	1	
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	
1	0	$\frac{1}{4}$	

，也就有

Z_1 \ Z_2	0	1	
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	

.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

(2) 由于 Z_1 和 Z_2 均服从 0-1 分布，所以

$$E(Z_1)=\frac{1}{4},D(Z_1)=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{16};$$

$$E(Z_2)=\frac{3}{4},D(Z_2)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{16}.$$

$$E(Z_1Z_2)=\frac{1}{4},\mathrm{Cov}(Z_1,Z_2)=E(Z_1Z_2)-E(Z_1)\cdot E(Z_2)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{16}.$$

Z_1 与 Z_2 的相关系数 $\rho=\dfrac{\mathrm{Cov}(Z_1,Z_2)}{\sqrt{D(Z_1)}\sqrt{D(Z_2)}}=\dfrac{\frac{1}{16}}{\sqrt{\frac{3}{16}}\sqrt{\frac{3}{16}}}=\frac{1}{3}$.

【例 9】 设随机变量 X 概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<0,\\ \frac{1}{4}, & 0\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

令 $Y=X^2$，$F(x,y)$ 为二维随机变量(X,Y)的分布函数，求

(1)Y 的概率密度 $f_Y(y)$；

(2)$\mathrm{Cov}(X,Y)$；

(3)$F(-\frac{1}{2},4)$.

解题思路 (1)$f_Y(y)=F'_Y(y)$，而 $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y\}=\int\limits_{x^2\leqslant y}f_X(x)\mathrm{d}x$，由于 $f_X(x)$ 是分段函数，所以在计算 $F_Y(y)$ 时，要相应分段讨论.

(2)$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$. 计算 $E(Y)$ 时可以根据(1)求得的 $f_Y(y)$. 有 $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\mathrm{d}y$，也可以用 $E(Y)=E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X(x)\mathrm{d}x$ 来求，一般说，用 $E(X^2)$ 比较方便些. $E(XY)=E(X\cdot X^2)=E(X^3)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^3f_X(x)\mathrm{d}x$.

(3)$F(-\frac{1}{2},4)=P\{X\leqslant-\frac{1}{2},Y\leqslant4\}=P\{X\leqslant-\frac{1}{2},X^2\leqslant4\}$ 只是与 X 有关，不必先求出 $F(x,y)$.

解 (1)$F_Y(y)=P\{X^2\leqslant y\}$.

当 $y\leqslant0$ 时，$F_Y(y)=0$，$f_Y(y)=F'_Y(y)=0$；

当 $0<y<1$ 时，$F_Y(y)=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}$

$$=P\{-\sqrt{y}\leqslant X<0\}+P\{0\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{y}+\frac{1}{4}\sqrt{y}=\frac{3}{4}\sqrt{y},$$

$$f_Y(y)=F'_Y(y)=\frac{3}{8\sqrt{y}};$$

当 $1\leqslant y<4$ 时，$F_Y(y)=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}$

$$=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant0\}+P\{0\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}$$

$$=P\{-1\leqslant X<0\}+P\{0\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{y},$$

$$f_Y(y)=F'_Y(y)=\frac{1}{8\sqrt{y}};$$

当 $4\leqslant y$ 时，$F_Y(y)=1$，$f_Y(y)=0$.

总之 Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{8\sqrt{y}}, & 0<y<1,\\ \dfrac{1}{8\sqrt{y}}, & 1\leqslant y<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(2)$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(X,X^2)=E(X^3)-E(X)\cdot E(X^2)$.

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}x\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}x\cdot\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$；

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}x^2\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}x^2\cdot\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{5}{6}$；

$E(X^3)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^3f_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}x^3\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}x^3\cdot\frac{1}{4}\mathrm{d}x=\frac{7}{8}$.

总之 $\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{7}{8}-\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{2}{3}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

$$(3)F\left(-\frac{1}{2},4\right)=P\left\{X\leqslant-\frac{1}{2},Y\leqslant4\right\}=P\left\{X\leqslant-\frac{1}{2},X^2\leqslant4\right\}$$

$$=P\left\{X\leqslant-\frac{1}{2},-2\leqslant X\leqslant2\right\}=P\left\{-2\leqslant X\leqslant-\frac{1}{2}\right\}$$

$$=P\{-2\leqslant X<-1\}+P\left\{-1\leqslant X\leqslant-\frac{1}{2}\right\}=0+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

其中 $P\{-2\leqslant X<-1\}=0$ 是因为当 $X<-1$ 时 $f_X(x)=0$.

【例 10】 随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1,A_2,A_3，且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$，将试验 E 独立重复做 2 次，X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数，Y 表示 2 次试验中结果 A_2 发生的次数，则 X 与 Y 的相关系数为

(A) $\frac{1}{3}$. (B) $-\frac{1}{3}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $-\frac{1}{2}$.

解题思路

X 与 Y 的相关系数为

$$\rho=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

而 $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3}$，所以 $X\sim B\left(2,\frac{1}{3}\right),Y\sim B\left(2,\frac{1}{3}\right)$

由此不难计算 ρ.

微信公众号【顶尖考研】

解 $E(X)=E(Y)=\frac{2}{3},D(X)=D(Y)=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$.

$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$，求 $E(XY)$ 就要求 XY 的分布.

X 和 Y 的取值均为 0,1,2，所以 XY 的取值应为 0,1,2,4

$P\{XY=4\}=P\{X=2,Y=2\}=0$，因为在 2 次试验中不可能出现 2 次 A_1 和 2 次 A_2.

同理 $P\{XY=2\}=P\{X=1,Y=2\}+P\{X=2,Y=1\}=0$.

$P\{XY=1\}=P\{X=1,Y=1\}=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$.

$P\{XY=0\}=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$.

总之

XY	0	1	2	4
p	$\frac{7}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	0

$E(XY)=\frac{2}{9},\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=\frac{2}{9}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=-\frac{2}{9}$.

$$\rho=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{-\frac{2}{9}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}=-\frac{1}{2}.$$

【评注】 本题也可用对称性来求解：

设 Z 表示 2 次试验中结果 A_3 发生的次数，显然 $X+Y+Z=2$，

X,Y,Z 均服从分布 $B\left(2,\frac{1}{3}\right),D(X)=D(Y)=D(Z)=\frac{4}{9}$.

由对称性：$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(X,Z)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{Cov}(X,2-X-Z)\\ &= \mathrm{Cov}(X,2)-\mathrm{Cov}(X,X)-\mathrm{Cov}(X,Z)\\ &= 0-D(X)-\mathrm{Cov}(X,Y),\end{aligned}$$

即
$$2\mathrm{Cov}(X,Y) = -D(X)$$

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \frac{-\frac{1}{2}D(X)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(X)}} = -\frac{1}{2}.$$

§3　切比雪夫不等式

4.3　切比雪夫不等式

设随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$ 存在，则对任意的 $\varepsilon>0$，总有

$$P\{|X-E(X)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

【例 1】　设随机变量 X 的方差为 2，则根据切比雪夫不等式有估计 $P\{|X-E(X)|\geqslant 2\}\leqslant$ _____.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

解　由 $P\{|X-E(X)|\geqslant 2\}\leqslant\frac{D(X)}{2^2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

答案应填 $\frac{1}{2}$.

【例 2】　设随机变量 X 和 Y 的数学期望都是 2，方差分别为 1 和 4. 而相关系数为 0.5，则根据切比雪夫不等式 $P\{|X-Y|\geqslant 6\}\leqslant$ _____.

解　令 $Z=X-Y$，则

$$E(Z)=E(X-Y)=EX-EY=0.$$

$$\begin{aligned}D(X-Y) &= D(X)+D(Y)-2\mathrm{Cov}(X,Y)\\ &= D(X)+D(Y)-2\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}\\ &= 1+4-2\cdot 0.5\cdot 1\cdot 2=3.\end{aligned}$$

根据切比雪夫不等式

$$P\{|X-Y|\geqslant 6\}=P\{|Z-E(Z)|\geqslant 6\}\leqslant\frac{D(Z)}{6^2}$$

$$=\frac{D(X-Y)}{36}=\frac{1}{12}.$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

答案应填 $\frac{1}{12}$.

【评注】　切比雪夫不等式是对事件“$|X-E(X)|\geqslant\varepsilon$”或事件“$|X-E(X)|<\varepsilon$”的概率的一个估计，$X$ 被估计的范围只是区间 $(E(X)-\varepsilon,E(X)+\varepsilon)$ 或这区间以外的范围，而且这个估计只用到 X 的方差 $D(X)$，因此这估计比较粗略.

第五章　大数定律和中心极限定理

考点与要求

了解　切比雪夫大数定律、伯努利大数定律和辛钦大数定律，棣莫弗-拉普拉斯定理和列维-林德伯格定理.

会　用相关定理近似计算有关随机事件的概率.

内容精讲

5.1　依概率收敛

定义　设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 是一个随机变量序列，A 是一个常数，如果对任意 $\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - A| < \varepsilon\} = 1,$$

则称随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 依概率收敛于常数 A，记作 $X_n \xrightarrow{P} A$.

微信公众号【顶尖考研】
(m...djky66)

5.2　切比雪夫大数定律

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 为两两不相关的随机变量序列，存在常数 C，使 $D(X_i) \leqslant C$，$(i = 1, 2, \cdots)$，则对任意 $\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

5.3　伯努利大数定律

设随机变量 $X_n \sim B(n, p)$，$n = 1, 2, \cdots$，则对于任意 $\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{X_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

5.4　辛钦大数定律

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 独立同分布，具有数学期望 $E(X_i) = \mu$，$i = 1, 2, \cdots$，则对任意 $\varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

5.5　棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理

设随机变量 $X_n \sim B(n, p)$ $(n = 1, 2, \cdots)$，则对于任意实数 x，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant x\right\} = \Phi(x),$$

其中 $\Phi(x)$ 是标准正态的分布函数.

【评注】　定理表明当 n 充分大时，服从 $B(n, p)$ 的随机变量 X_n 经标准化后得

$$\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

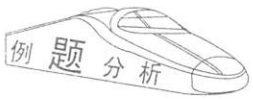
近似服从标准正态分布 $N(0,1)$，或者说 X_n 近似地服从 $N(np, np(1-p))$.

5.6　列维-林德伯格中心极限定理

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 独立同分布，具有数学期望与方差，$E(X_n) = \mu, D(X_n) = \sigma^2, n = 1,2,\cdots$，则对于任意实数 x，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leqslant x\right\} = \Phi(x).$$

【注】　定理表明当 n 充分大时 $\sum_{i=1}^{n} X_i$ 的标准化 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ 近似服从标准正态分布 $N(0,1)$，或者说 $\sum_{i=1}^{n} X_i$ 近似地服从 $N(n\mu, n\sigma^2)$.



【例 1】　将一枚骰子重复掷 n 次，则当 $n \to +\infty$ 时，n 次掷出点数的算术平均值依概率收敛于_____.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

解　设 X_i 表示第 i 次掷得的点数，显然 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 独立同分布，且 $E(X_i) = \dfrac{21}{6} = \dfrac{7}{2}$，因此，根据辛钦大数定律，算术平均值 $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 依概率收敛于数学期望 $\dfrac{7}{2}$.

答案应填 $\dfrac{7}{2}$.

【例 2】　(1) 某系统由 100 个部件组成，运行期间每个部件是否损坏是相互独立的，损坏的概率均为 0.1，如果有 85 个以上的部件完好时系统才能正常工作，求系统正常工作的概率；

(2) 如果上述系统由 n 个部件组成，需 80% 以上的部件完好时系统才能正常工作，问 n 至少多大才能使系统正常工作的概率不小于 0.95?

解　(1) 设 $X_k = \begin{cases} 1, \text{第 } k \text{ 个元件完好}, \\ 0, \text{第 } k \text{ 个元件损坏}, \end{cases} k = 1,2,\cdots,100$，$X$ 为系统正常运行时完好的元件数，显然 $X = \sum_{k=1}^{100} X_k$，$X \sim B(100, 0.9)$，$E(X) = 90$，$D(X) = 9$.

根据棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理，系统正常工作的概率为

$$P\{X > 85\} = 1 - P\{X \leqslant 85\} = 1 - P\left\{\frac{X-90}{\sqrt{9}} \leqslant \frac{85-90}{\sqrt{9}}\right\}$$

$$\approx 1 - \Phi\left(-\frac{5}{3}\right) = 0.9525.$$

(2) 此时，$X \sim B(n, 0.9)$，所以

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

$$P\{X>0.8n\}=1-P\{X\leqslant 0.8n\}$$
$$=1-P\left\{\frac{X-0.9n}{0.3\sqrt{n}}\leqslant\frac{0.8n-0.9n}{0.3\sqrt{n}}\right\}\approx 1-\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{3}\right)$$
$$=\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right).$$

$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)\geqslant 0.95,\frac{\sqrt{n}}{3}\geqslant 1.645,n\geqslant 24.35$,取 $n=25$.

【评注】 棣莫弗-拉普拉斯定理是将 n 较大的二项分布 $B(n,p)$ 近似看成正态分布 $N(np,npq)$,余下的问题就是用标准化后查标准正态分布表 $\Phi(x)$ 的问题了.

【例 3】 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 为独立同分布的随机变量序列,且均服从参数为 $\lambda(\lambda>1)$ 的指数分布,记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数,则

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\lambda}{\lambda\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$.

(B) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$.

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$.

(D) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【解】 根据列维-林德伯格定理,$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布,且

$$E(X_n)=\frac{1}{\lambda},D(X_n)=\frac{1}{\lambda^2},\text{则有}\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\cdot\frac{1}{\lambda}}{\sqrt{n}\cdot\frac{1}{\lambda}}\leqslant x\right\}=\Phi(x).$$

答案应选(C).

【评注】 棣莫弗-拉普拉斯定理的应用条件与列维-林德伯格定理的应用条件有所不同,后者要求独立同分布,存在期望 μ 与方差 σ^2,但 $\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 可以不服从二项分布,所以可以将前者看成是后者的一个特例,或者说后者是前者的推广,它们的解法都一样,看成近似服从正态分布 $N(n\mu,n\sigma^2)$,然后标准化,查表求 $\Phi(x)$. 应用两个中心极限定理时,要分清定理的条件. 本题显然不能将 $X=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 看成是二项分布.

【例 4】　一生产线生产的产品成箱包装，每箱的重量是随机的，假设每箱平均重 50 千克，标准差为 5 千克，若用最大载重量为 5 吨的汽车承运，试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱，才能保障不超载的概率大于 0.977.（$\Phi(2)=0.977$，其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数.）

解　设 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是装运的第 i 箱的重量（单位：千克），可以把 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 视为独立同分布随机变量，n 是所求箱数，则

$$T_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$$

是独立同分布随机变量之和，且 $E(X_i)=50$（千克），$\sqrt{D(X_i)}=5$（千克），$E(T_n)=50n$，$\sqrt{D(T_n)}=5\sqrt{n}$（单位：千克）.

根据列维－林德伯格中心极限定理，T_n 近似服从 $N(50n,25n)$，故

$$P\{T_n\leqslant 5000\}=P\left\{\frac{T_n-50n}{5\sqrt{n}}\leqslant\frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}\right\}$$

$$\approx\Phi\left(\frac{1000-10n}{\sqrt{n}}\right)>0.977=\Phi(2).$$

由此可见 $\dfrac{1000-10n}{\sqrt{n}}>2$，解得 $n<98.01$，即最多可装 98 箱.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

数学家的小故事

费马在读巴歇的《丢番图》时，总是把思考的结果简略地记在书页的空白处。大约是1637年的一天，他在阅读二元二次方程方面的问题时，在空白页上留下了这样的问题（现代形式）：如果n是大于2的整数，则不存在这样的整数x,y,a,使得$x^n+y^n=a^n$。

他说：我已经发现了（这个定理）的一个真正美妙的证明，但是这本书的空白太窄了，写不下。

这个定理直到1995年才被英国数学家完全证明出来。

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

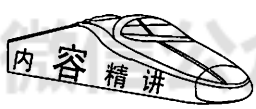
第六章　数理统计的基本概念

了解　总体、简单随机样本、统计量、样本均值、样本方差及样本矩. 经验分布函数及其性质，产生 χ^2 变量、t 变量和 F 变量的典型模式. 标准正态分布、χ^2 分布、t 分布和 F 分布的上侧 α 分位数.

掌握　正态总体的样本均值、样本方差、样本矩的抽样分布.

会　查标准正态分布、χ^2 分布、t 分布、F 分布表计算上侧 α 分位数.

§1　总体、样本、统计量和样本数字特征



微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

6.1.1　总体

定义　数理统计中所研究对象的某项数量指标 X 的全体称为总体.

【注】 X 是一个随机变量，称 X 的概率分布为总体分布，X 的数字特征为总体数字特征，总体中的每个元素称为个体.

6.1.2　样本

定义　如果 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立且都与总体 X 同分布，则称 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，简称为样本. n 为样本容量，样本的具体观测值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 称为样本值，或称总体 X 的 n 个独立观测值.

【注】　如果总体 X 的分布为 $F(x)$，则样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的分布为

$$F_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i).$$

如果总体 X 有概率密度 $f(x)$，则样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的概率密度为

$$f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i).$$

如果总体 X 有概率分布 $P\{X = a_j\} = p_j, j = 1, 2, \cdots$，则样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的概率分布为

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n\} = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i = x_i\},$$

其中 x_i 取 $a_1, a_2, \cdots$ 中的某一个数.

6.1.3　统计量

定义　样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的不含未知参数的函数 $T=T(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 称为统计量.

【注】　作为随机样本的函数，统计量本身也是一个随机变量.

如果 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的样本值，则数值 $T(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为统计量 $T(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的观测值.

下面所列的样本数字特征、顺序统计量都是最常用的统计量.

6.1.4　样本数字特征

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，则称

(1) 样本均值　$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$；

(2) 样本方差　$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，

样本标准差　$S=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$；

(3) 样本 k 阶原点距　$A_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k,k=1,2,A_1=\overline{X}$；

(4) 样本 k 阶中心距　$B_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k,k=1,2,B_2=\dfrac{n-1}{n}S^2\neq S^2$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

6.1.5　经验分布

定义　将样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的一个观测值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 按大小递增次序排列，得到 $x_{(1)}\leqslant x_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(n)}$. 称 $F_n(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x<x_{(1)},\\ \dfrac{k}{n}, & \text{当 } x_{(k)}\leqslant x<x_{(k+1)},\\ 1, & \text{当 } x_{(n)}\leqslant x,\end{cases}$ $k=1,2,\cdots,n-1$，为经验分布函数.

6.1.6　样本数字特征的性质

(1) 如果总体 X 具有数学期望 $E(X)=\mu$，则

$$E(\overline{X})=E(X)=\mu.$$

(2) 如果总体 X 具有方差 $D(X)=\sigma^2$，则

$$D(\overline{X})=\frac{1}{n}D(X)=\frac{\sigma^2}{n},\quad E(S^2)=D(X)=\sigma^2.$$

(3) 如果总体 X 的 k 阶原点矩 $E(X^k)=\mu_k,k=1,2,\cdots$ 存在，则当 $n\to+\infty$ 时

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k\xrightarrow{P.}\mu_k,\quad k=1,2,\cdots.$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例 1】　设总体 $X\sim E(\lambda)$，则来自总体 X 的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的联合概率密度 $f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=$ _____.

解　由于总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$ 所以样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的联合概率密度为

$$f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\begin{cases}\lambda^n e^{-\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}, & x_i>0,(i=1,2,\cdots,n)\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

答案应填$\begin{cases}\lambda^n e^{-\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}, & x_1,x_2,\cdots,x_n>0,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

【例 2】 设总体 X 的概率密度为$f(x)=\begin{cases}2x,0<x<1,\\ 0, \text{其他.}\end{cases}$来自总体 X 的样本为X_1,X_2,X_3,X_4，则 $X_{(4)}=\max(X_1,X_2,X_3,X_4)$ 的概率密度 $f_{X_{(4)}}(x)=$_____.

解 X 的分布函数为$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & 1\leqslant x.\end{cases}$

$X_{(4)}$ 的分布函数 $F_{X_{(4)}}(x)=[F(x)]^4$，所以

$$f_{X_{(4)}}(x)=F'_{X_{(4)}}(x)=4F^3(x)f(x)=\begin{cases}8x^7,0<x<1,\\ 0, \text{其他.}\end{cases}$$

答案应填$\begin{cases}8x^7, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

【例 3】 设总体 X 服从参数为 p 的 0-1 分布，则来自总体 X 的简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的概率分布为_____.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

解 总体 X 的概率分布为

X	0	1
P	$1-p$	p

也可以表示此概率分布为

$$p(x)=\begin{cases}p^x(1-p)^{1-x}, \text{当 } x=0 \text{ 或 } x=1,\\ 0, \text{其他.}\end{cases}$$

所以样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的概率分布为

$$p_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i)=\begin{cases}p^{x_1+x_2+\cdots+x_n}(1-p)^{n-(x_1+x_2+\cdots x_n)}, \text{当 } x_i=0 \text{ 或 } 1,\\ 0, \text{其他.}\end{cases}$$

如果记 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$，则答案应填

$$p_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases}p^{n\bar{x}}(1-p)^{n(1-\bar{x})}, \text{当 } x_i=0 \text{ 或 } 1,\\ 0, \text{其他.}\end{cases}$$

【评注】 对一般取自离散型总体 X 的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的概率分布 $p_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，设 X 的分布律为 $P\{X=a_k\}=p_k,k=1,\cdots,m$，样本值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，已知 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中取 a_k 值的有 n_k 个，显然 $\sum_{k=1}^{m}n_k=n$，则

$$p_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases}\prod\limits_{k=1}^{m}p_k^{n_k}, & x_i \text{ 取 } a_k \text{ 中的一个},k=1,\cdots,m,i=1,\cdots,n,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

【例 4】　设总体 $X \sim P(\lambda)$，则来自总体 X 的样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的样本均值 $\overline{X}$ 的分布律为_____.

解　在第三章的 §4，例 1 中得知，当 X_1, X_2 独立时，$X_1 + X_2 \sim P(2\lambda)$，进一步得知 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同为 $P(\lambda)$ 分布时 $\sum_{i=1}^{n} X_i = n\overline{X} \sim P(n\lambda)$. 于是，对于任意 $n > 2$，得 $n\overline{X}$ 的分布律

$$P\{n\overline{X} = k\} = \frac{(n\lambda)^k}{k!}e^{-n\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots,$$

而 $P\{n\overline{X} = k\} = P\left\{\overline{X} = \frac{k}{n}\right\}$，所以 $P\left\{\overline{X} = \frac{k}{n}\right\} = \frac{(n\lambda)^k}{k!}e^{-n\lambda}$.

答案应填 $P\left\{\overline{X} = \frac{k}{n}\right\} = \frac{(n\lambda)^k}{k!}e^{-n\lambda}, k = 0, 1, 2, \cdots$.

§2　常用统计抽样分布和正态总体的抽样分布

内容精讲

6.2.1　χ^2 分布

定义　设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立且均服从标准正态分布 $N(0,1)$，则称随机变量

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

服从自由度为 n 的 χ^2 分布，记作 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$.

【注】　n 个相互独立标准正态随机变量的平方和 $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ 又称为 $\chi^2(n)$ 的典型模式. 必须熟记.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

6.2.2　χ^2 分布的性质

(1) 设 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$，对给定的 $\alpha(0 < \alpha < 1)$，称满足条件

$$P\{\chi^2 > \chi_\alpha^2(n)\} = \int_{\chi_\alpha^2(n)}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \alpha$$

的点 $\chi_\alpha^2(n)$ 为 $\chi^2(n)$ 分布的上 α 分位点，如图 6-1 所示. 对不同的 α 和 n，$\chi_\alpha^2(n)$ 通常通过查表求得.

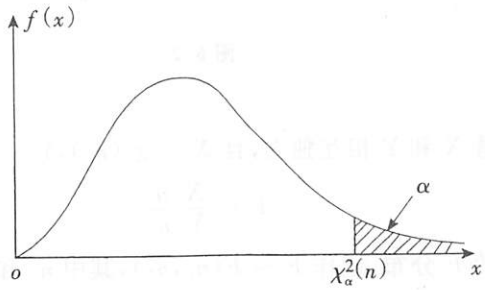


图 6-1

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

(2) 设 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$，则 $E(\chi^2) = n, D(\chi^2) = 2n$.

(3) 设 $\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1), \chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$，且 χ_1^2 和 χ_2^2 相互独立，则 $\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$.

6.2.3　t 分布

定义　设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 $X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$，则称随机变量

$$T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

服从自由度为 n 的 t 分布，记作 $T\sim t(n)$.

【注】 满足 X,Y 独立，$X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$ 三条件的 $T=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 称为 $t(n)$ 的典型模式.

6.2.4 t 分布的性质

(1) t 分布的概率密度 $f(x)$ 是偶函数，即

$$f(x)=f(-x),$$

且当 n 充分大时，$t(n)$ 分布近似于 $N(0,1)$ 分布.

(2) 设 $T\sim t(n)$，对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，称满足条件

$$P\{T>t_\alpha(n)\}=\int_{t_\alpha(n)}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\alpha$$

的点 $t_\alpha(n)$ 为 $t(n)$ 分布的上 α 分位点.

(3) 由于 $t(n)$ 分布的概率密度为偶函数，可知 t 分布的双侧 α 分位点 $t_{\alpha/2}(n)$，即

$$P\{|T|>t_{\alpha/2}(n)\}=\alpha.$$

如图 6-2 所示，显然

$$t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n).$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky06)

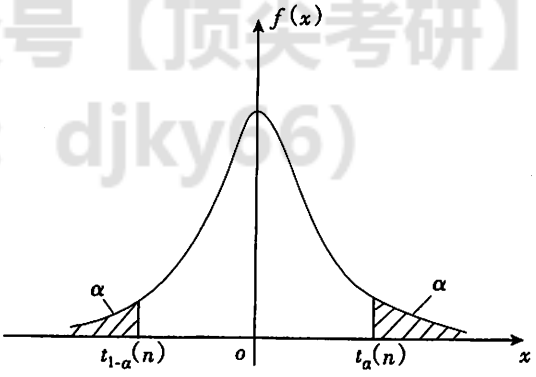


图 6-2

6.2.5 F 分布

定义 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 $X\sim\chi^2(n_1)$，$Y\sim\chi^2(n_2)$，则称随机变量

$$F=\frac{X/n_1}{Y/n_2}$$

服从自由度为 (n_1,n_2) 的 F 分布，记作 $F\sim F(n_1,n_2)$，其中 n_1 和 n_2 分别称为第一自由度和第二自由度.

【注】 满足 X,Y 独立，$X\sim\chi^2(n_1)$，$Y\sim\chi^2(n_2)$ 三条件的 $F=\dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$ 称为 $F(n_1,n_2)$ 的典型模式.

6.2.6 F 分布的性质

(1) 设 $F\sim F(n_1,n_2)$，对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，称满足条件

$$P\{F > F_\alpha(n_1,n_2)\} = \int_{F_\alpha(n_1,n_2)}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \alpha$$

的点 $F_\alpha(n_1,n_2)$ 为 $F(n_1,n_2)$ 分布的上 α 分位点.

(2) 如果 $F \sim F(n_1,n_2)$,则 $\frac{1}{F} \sim F(n_2,n_1)$,且有

$$F_{1-\alpha}(n_1,n_2) = \frac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}.$$

6.2.7　一个正态总体的抽样分布

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体的样本,样本均值为 $\overline{X}$,样本方差为 S^2,则有:

(1) $\overline{X} \sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$, $U = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$;

(2) $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立,且 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$;

(3) $T = \dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$;

(4) $\chi^2 = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$.

6.2.8　两个正态总体的抽样分布

设总体 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和总体 $Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$, $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 是分别来自总体 X 和 Y 的样本且相互独立,样本均值分别为 $\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$,样本方差分别为 S_1^2 和 S_2^2,则有

(1) $\overline{X}-\overline{Y} \sim N\left(\mu_1-\mu_2,\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$, $U = \dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$;

(2) 如果 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$,则

$$T = \frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2),$$

其中 $S_\omega^2 = \dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$;

(3) $F = \dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1,n_2-1)$.

例题分析

【例 1】　已知 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$,则 $E(\chi^2) =$ _____.

解　利用 χ^2 分布的随机变量的典型模式 $\chi^2 = X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$,其中 $X_i \sim N(0,1)$ 且 X_i 相互独立,显然 $E(X_i^2) = D(X_i)+[E(X_i)]^2 = 1$,所以

$$E(\chi^2) = \sum_{i=1}^{n}E(X_i^2) = n,$$

答案应填 n.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

【例 2】 设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自正态总体 $N(0,2^2)$ 的简单随机样本，$X=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2$. 则当 $a=$ _____，$b=$ _____时，统计量 X 服从 χ^2 分布，其自由度为_____.

解题思路 χ^2 变量的典型模式为 $\chi^2(n)=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$，其中 $X_i\sim N(0,1)$，且相互独立，所以要验证的两点：标准正态，相互独立，然后是独立标准正态之平方和.

解 X_1,X_2,X_3,X_4 相互独立，均服从 $N(0,2^2)$，所以

$$(X_1-2X_2)\sim N(0,20) \quad 和 \quad (3X_3-4X_4)\sim N(0,100)$$

且 (X_1-2X_2) 与 $(3X_3-4X_4)$ 相互独立. 标准化得

$$\frac{1}{\sqrt{20}}(X_1-2X_2)\sim N(0,1) \quad 和 \quad \frac{1}{10}(3X_3-4X_4)\sim N(0,1)$$

所以当 $a=\frac{1}{20},b=\frac{1}{100}$ 时，

$$X=\frac{1}{20}(X_1-2X_2)^2+\frac{1}{100}(3X_3-4X_4)^2\sim\chi^2(2).$$

答案可填 $a=\frac{1}{20},b=\frac{1}{100}$ 时统计量 X 服从 χ^2 分布，其自由度为 2.

【评注】 严格地说本题答案应有三个：

(1) 当 $a=\frac{1}{20},b=\frac{1}{100}$ 时，$X\sim\chi^2(2)$；

(2) 当 $a=\frac{1}{20},b=0$ 时，$X\sim\chi^2(1)$；

(3) 当 $a=0,b=\frac{1}{100}$ 时，$X\sim\chi^2(1)$.

如果将本题改成下题，答案就唯一了.

设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自正态总体 $N(0,2^2)$ 的简单随机样本，已知 $\chi^2=\frac{(x_1-2x_2)^2}{a}+\frac{(3x_3-4x_4)^2}{b}$ 服从 $\chi^2(n)$ 分布，其中 a,b 为常数，则 $n=$ _____.

解 由于 X_1,X_2,X_3,X_4 独立同分布，均服从 $N(0,2^2)$，故 $(X_1-2X_2)\sim N(0,20)$ 和 $(3X_3-4X_4)\sim N(0,100)$ 且相互独立.

由 χ^2 变量典型模式知 $n=2$.

答案应填 2.

【例 3】 设随机变量 $T\sim t(n)$，则 T^2 服从的分布及参数为_____.

解 $t(n)$ 分布的典型模式为 $T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$，其中 $X\sim N(0,1),Y\sim\chi^2(n)$，且 X,Y 独立.

现 $T^2=\frac{X^2}{\frac{Y}{n}}$，其中 $X^2\sim\chi^2(1)$. 故 $T^2\sim F(1,n)$.

微信公众号【顺尖考研】(ID: djky66)

答案应填 $F(1,n)$.

【例 4】　设总体 X 的数学期望和方差都存在，且 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$，样本方差 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，试证 $E(S^2)=\sigma^2$.

证明　$E(S^2)=E\Big[\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\Big]=\dfrac{1}{n-1}E\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\Big)$

$$=\frac{1}{n-1}\Big[\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-nE(\overline{X}^2)\Big]$$

$$=\frac{1}{n-1}\Big[\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+\mu^2)-n\Big(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\Big)\Big]$$

$$=\frac{1}{n-1}(n\sigma^2+n\mu^2-\sigma^2-n\mu^2)=\sigma^2.$$

【例 5】　设 $X\sim N(0,\sigma^2)$，从总体 X 中抽取样本 $X_1,X_2,\cdots,X_9$，试确定 σ 的值，使得 $P\{1<\overline{X}<3\}$ 为最大，其中 $\overline{X}=\dfrac{1}{9}\sum\limits_{i=1}^{9}X_i$.

解　因为 $\dfrac{\overline{X}}{\sigma/3}=\dfrac{3\overline{X}}{\sigma}\sim N(0,1)$，所以

$$p(\sigma)=P\{1<\overline{X}<3\}=P\Big\{\frac{3}{\sigma}<\frac{3\overline{X}}{\sigma}\leqslant\frac{9}{\sigma}\Big\}=\Phi\Big(\frac{9}{\sigma}\Big)-\Phi\Big(\frac{3}{\sigma}\Big),$$

$$p'(\sigma)=\varphi\Big(\frac{9}{\sigma}\Big)\Big(-\frac{9}{\sigma^2}\Big)-\varphi\Big(\frac{3}{\sigma}\Big)\Big(-\frac{3}{\sigma^2}\Big)$$

$$=-\frac{9}{\sqrt{2\pi}\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{81}{2\sigma^2}}+\frac{3}{\sqrt{2\pi}\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{9}{2\sigma^2}}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{2\pi}\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{9}{2\sigma^2}}(1-3\mathrm{e}^{-\frac{36}{\sigma^2}}).$$

令 $p'(\sigma)=0$，得 $\mathrm{e}^{-\frac{36}{\sigma^2}}=\dfrac{1}{3}$.

解得　$\sigma=\dfrac{6}{\sqrt{\ln 3}}$. 当 $\sigma<\dfrac{6}{\sqrt{\ln 3}}$ 时，$p'(\sigma)>0$；当 $\sigma>\dfrac{6}{\sqrt{\ln 3}}$ 时，$p'(\sigma)<0$，因此，当 $\sigma=\dfrac{6}{\sqrt{\ln 3}}$ 时，$p(\sigma)=P\{1<\overline{X}<3\}$ 为最大.

【例 6】　已知 X_1,X_2,X_3 相互独立且服从 $N(0,\sigma^2)$，证明：$\sqrt{\dfrac{2}{3}}\dfrac{X_1+X_2+X_3}{|X_2-X_3|}$ 服从 $t(1)$ 分布.

证明　记 $Y_1=X_2+X_3, Y_2=X_2-X_3$，则

$$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2)=E(Y_1Y_2)-E(Y_1)E(Y_2)=E(X_2+X_3)(X_2-X_3)$$

$$=E(X_2^2)-E(X_3^2)=\sigma^2-\sigma^2=0,$$

所以 Y_1,Y_2 独立，均服从 $N(0,2\sigma^2)$，且与 X_1 独立，

微信公众号：顶尖考研（ID：djky66）

$$X_1+X_2+X_3=X_1+Y_1\sim N(0,3\sigma^2),$$

所以$\frac{1}{\sigma\sqrt{3}}(X_1+X_2+X_3)\sim N(0,1)$，$\left(\frac{X_2-X_3}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\sim\chi^2(1)$，且$X_1+X_2+X_3$与$X_2-X_3$相互独立，按$t$分布定义有

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{X_1+X_2+X_3}{|X_2-X_3|}\sim t(1).$$

【例7】 设总体X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$. 从该总体中抽取简单随机样本$X_1,X_2,\cdots,X_{2n}(n\geqslant 2)$，其样本均值为$\overline{X}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$，求统计量$Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2$的数学期望$E(Y)$.

【解】【方法一】 考虑$(X_1+X_{n+1}),(X_2+X_{n+2}),\cdots,(X_n+X_{2n})$，将其视为取自总体$N(2\mu,2\sigma^2)$的简单随机样本，则其样本均值为$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}X_i=2\overline{X}$，样本方差为$\frac{1}{n-1}Y$. 由于$E\left(\frac{1}{n-1}Y\right)=2\sigma^2$，所以$E(Y)=(n-1)(2\sigma^2)=2(n-1)\sigma^2$.

【方法二】 记$\overline{X}'=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$\overline{X}''=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{n+i}$，显然有$2\overline{X}=\overline{X}'+\overline{X}''$，因此

$$\begin{aligned}E(Y)&=E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2\right]=E\left\{\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\overline{X}')+(X_{n+i}-\overline{X}'')]^2\right\}\\&=E\left\{\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\overline{X}')^2+2(X_i-\overline{X}')(X_{n+i}-\overline{X}'')+(X_{n+i}-\overline{X}'')^2]\right\}\\&=E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}')^2\right]+0+E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_{n+i}-\overline{X}'')^2\right]\\&=(n-1)\sigma^2+(n-1)\sigma^2=2(n-1)\sigma^2.\end{aligned}$$

【例8】 设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$独立同分布且具有相同的分布密度，证明：

$$P\{X_n>\max(X_1,\cdots,X_{n-1})\}=\frac{1}{n}.$$

【证明】 以$f(x),F(x)$分别表示X_i共同的概率密度和分布函数，则

$$\begin{aligned}P\{X_n>\max(X_1,\cdots,X_{n-1})\}&=P\{X_1<X_n,\cdots,X_{n-1}<X_n\}\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int\cdots\int_{x_i<x_n}\prod_{i=1}^{n-1}f(x_i)\mathrm{d}x_i\right]f(x_n)\mathrm{d}x_n\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\prod_{i=1}^{n-1}\int_{-\infty}^{x_n}f(x_i)\mathrm{d}x_i\right]f(x_n)\mathrm{d}x_n\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}F^{n-1}(x_n)f(x_n)\mathrm{d}x_n=\frac{1}{n}F^n(x_n)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

【例 9】　设总体 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma^2)$，总体 Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma^2)$. $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本，则

$$E\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2+\sum\limits_{j=1}^{n_2}(Y_j-\overline{Y})^2}{n_1+n_2-2}\right]=_____.$$

解题思路　X 的简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots X_{n_1}$ 的样本方差为 $S_X^2=\dfrac{1}{n_1-1}\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2$；

Y 的简单随机样本 $Y_1,Y_2,\cdots Y_{n_2}$ 的样本方差为 $S_Y^2=\dfrac{1}{n_2-1}\sum\limits_{j=1}^{n_2}(Y_j-\overline{Y})^2$.

显然 $E(S_X^2)=\sigma^2,E(S_Y^2)=\sigma^2$，而 $\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2=(n_1-1)S_X^2$ 和 $\sum\limits_{j=1}^{n_2}(Y_j-\overline{Y})^2=(n_2-1)S_Y^2$ 且成立 $E[\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2+\sum\limits_{j=1}^{n_2}(Y_j-\overline{Y})^2]=E[\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2]+E[\sum\limits_{j=1}^{n_2}(Y_j-\overline{Y})^2]$.

解　$$E\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2+\sum\limits_{j=1}^{n_2}(Y_j-\overline{Y})^2}{n_1+n_2-2}\right]$$

$$=\frac{1}{n_1+n_2-2}\left\{E\left[\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2\right]+E\left[\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\overline{Y})^2\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{n_1+n_2-2}\left\{E[(n_1-1)S_X^2]+E[(n_2-1)S_Y^2]\right\}$$

$$=\frac{1}{n_1+n_2-2}[(n_1-1)\sigma^2+(n_2-1)\sigma^2]=\sigma^2.$$

答案应填 σ^2.

【例 10】　设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{-|x|}(-\infty<x<+\infty)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 X 的简单随机样本，其样本方差为 S^2，则 $E(S^2)=$ _____.

解　$E(S^2)=DX=E(X^2)-[E(X)]^2$，由于 $f(x)$ 为偶函数，故 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-|x|}dx=0$. 而 $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=2\int_0^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx=2$.

答案应填 2.

【评注】　在概率统计中常涉及积分 $\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx$，或更一般地要计算积分 $\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}dx$ 我们不难推导 $\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}dx=n\int_0^{+\infty}x^{n-1}e^{-x}dx=\cdots=n!$

本题我们直接用了结果：$\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx=2$. 应该熟记.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

第七章　参数估计

了解　参数的点估计、估计量与估计值.

掌握　矩估计法(一阶矩、二阶矩)和最大似然估计法.

§1　点估计

7.1　点估计

定义　用样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 构造的统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 来估计未知参数 θ 称为点估计. 统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 称为估计量.

【注】　估计量是随机变量,它所取得的观测值 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为估计值. 有时将 θ 的估计量和估计值统称为 θ 的估计.

微信公众号【环尖考研】(id: djky66)

【例 1】　设总体 X 的数学期望存在,$E(X)=\mu$,从来自总体 X 的样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 得样本均值 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$,试证 $E(\overline{X})=\mu$.

证明　$E(\overline{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu=\mu.$

【例 2】　设总体的数学期望和方差分别为 μ 和 σ^2,X_1, X_2 是来自总体 X 的样本.

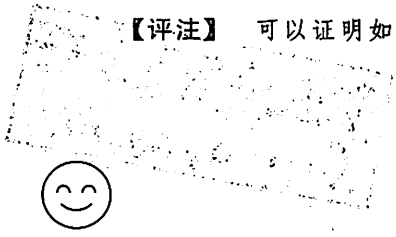
记 $\widetilde{X}=(1-a)X_1+aX_2$,(1) 试求 $E(\widetilde{X})$;(2) 确定 a,使 $D(\widetilde{X})$ 最小.

解　(1)$E(\widetilde{X})=(1-a)E(X_1)+aE(X_2)=(1-a)\mu+a\mu=\mu.$

(2)$D(\widetilde{X})=(1-a)^2D(X_1)+a^2D(X_2)=[(1-a)^2+a^2]\sigma^2$,显然当 $a=\frac{1}{2}$ 时,$D(\widetilde{X})$ 最小.

【评注】　可以证明如果样本为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 时,$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 是形如

$$\widetilde{X}=\sum_{i=1}^{n}a_iX_i(\text{其中}\sum_{i=1}^{n}a_i=1)$$



的 μ 的估计中满足 $E(\widetilde{X})=\mu$ 条件的 $D(\widetilde{X})$ 最小的估计.

【例 3】　设总体 X 的 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$，从来自总体 X 的样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 得样本均值 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 和样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，试证 $E(S^2)=\sigma^2$.

证明　【方法一】
$$\begin{aligned}E(S^2)&=\frac{1}{n-1}E\Big[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\Big]\\&=\frac{1}{n-1}E\Big[\sum_{i=1}^{n}(X_i^2-2X_i\overline{X}+\overline{X}^2)\Big]\\&=\frac{1}{n-1}E\Big[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\Big]\\&=\frac{1}{n-1}\Big[\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-nE(\overline{X}^2)\Big]\\&=\frac{1}{n-1}\{n(\sigma^2+\mu^2)-n[D(\overline{X})+(E\overline{X})^2]\}\\&=\frac{n}{n-1}\left[(\sigma^2+\mu^2)-\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)\right]=\sigma^2.\end{aligned}$$

【方法二】
$$\begin{aligned}E(S^2)&=\frac{1}{n-1}E\{\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\mu)-(\overline{X}-\mu)]^2\}\\&=\frac{1}{n-1}E\{\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\mu)^2-2(X_i-\mu)(\overline{X}-\mu)+(\overline{X}-\mu)^2]\}\\&=\frac{1}{n-1}E\Big[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-n(\overline{X}-\mu)^2\Big]\\&=\frac{1}{n-1}\Big[\sum_{i=1}^{n}E(X_i-\mu)^2-nE(\overline{X}-\mu)^2\Big]\\&=\frac{1}{n-1}[n\sigma^2-nD(\overline{X})]=\sigma^2.\end{aligned}$$

微信公众号:【顶尖考研】
(ID:djky66)

【评注】　本题是方差估计中常用公式之一，尤其要熟练掌握这些公式推导过程或记牢下列公式：
$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2,$$
$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-n(\overline{X}-\mu)^2.$$

【例 4】　设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，已知 $\hat{\sigma}^2=C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 的数学期望为 σ^2，则常数 C 等于

(A) $\frac{1}{n-1}$.　　(B) $\frac{1}{n}$.　　(C) $\frac{1}{2(n-1)}$.　　(D) $\frac{1}{2n}$.

解　【方法一】　$E(\hat{\sigma}^2)=E\Big[C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2\Big]$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

$$= C\sum_{i=1}^{n-1} E[(X_{i+1}-\mu)-(X_i-\mu)]^2$$

$$= C\sum_{i=1}^{n-1} [E(X_{i+1}-\mu)^2 - 2E(X_{i+1}-\mu)(X_i-\mu) + E(X_i-\mu)^2]$$

$$= C\sum_{i=1}^{n-1} [\sigma^2 - 0 + \sigma^2] = 2(n-1)C\sigma^2,$$

为使 $E(\hat{\sigma}^2) = 2(n-1)C\sigma^2 = \sigma^2$，应有 $C = \dfrac{1}{2(n-1)}$.

【方法二】 $E(\hat{\sigma}^2) = E[C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2]$

$$= C\sum_{i=1}^{n-1}\{D(X_{i+1}-X_i) + [E(X_{i+1}-X_i)]^2\}$$

$$= C\sum_{i=1}^{n-1}[(\sigma^2+\sigma^2)+0] = 2(n-1)C\sigma^2,$$

故 $C = \dfrac{1}{2(n-1)}$. 答案应选(C).

【例 5】 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本，已知 $X \sim P(\lambda)$，证明 $T = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n\overline{X}}$ 的数学期望是 $P\{X=0\}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djkj66)

证明 $P\{X=0\} = e^{-\lambda}$，$n\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim P(n\lambda)$，即 $P\{n\overline{X}=i\} = \dfrac{(n\lambda)^i}{i!}e^{-n\lambda}$，故

$$E(T) = E\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n\overline{X}}\right] = \sum_{i=0}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^i \cdot \frac{(n\lambda)^i}{i!}e^{-n\lambda}$$

$$= e^{-n\lambda}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{[(n-1)\lambda]^i}{i!} = e^{-n\lambda}\cdot e^{(n-1)\lambda} = e^{-\lambda},$$

所以 T 的数学期望是 $P\{X=0\}$.

【例 6】 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自二项分布总体 $B(n,p)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 记统计量 $T = \overline{X} - S^2$，则 $E(T) =$ _____.

解 总体 X 的期望和方差为 $E(X) = np$ 和 $D(X) = np(1-p)$.

而由 $\overline{X}$ 和 S^2 的性质知 $E(\overline{X}) = E(X)$ 和 $E(S^2) = D(X)$，故

$E(T) = E(\overline{X} - S^2) = E(\overline{X}) - E(S^2) = E(X) - D(X) = np - np(1-p) = np^2$

答案应填 np^2.

【例 7】 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n>2)$ 为来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值. 记 $Y_i = X_i - \overline{X}, i = 1,2,\cdots,n$. 求

(1) Y_i 的方差 $D(Y_i), i = 1,2,\cdots,n$;

(2) Y_1 与 Y_n 的协方差 $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_n)$;

(3) 当 $C(Y_1+Y_n)^2$ 的数学期望为 σ^2 时的常数 C;

(4)$P\{Y_1+Y_n\leqslant 0\}$.

解题思路　(1)$Y_i=X_i-\overline{X}$，由于$\overline{X}$中包含X_i，因而X_i与$\overline{X}$并不独立，故计算$D(Y_i)$有几种方法：$D(Y_i)=E(Y_i^2)-[E(Y_i)]^2$；$D(Y_i)=D(X_i-\overline{X})=D(X_i)+D(\overline{X})-2\mathrm{Cov}(X_i,\overline{X})$和$D(Y_i)=D(X_i-\overline{X})=D(X_i-\frac{1}{n}X_i-\frac{1}{n}\sum\limits_{j\neq i}X_j)$. 由于$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立. 我们用最后的公式计算更简便些；

(2) 注意到$E(Y_i)=E(X_i-\overline{X})=E(X_i)-E(\overline{X})=0$. 故计算$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)$用公式$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)=E(Y_1Y_n)-E(Y_1)\cdot E(Y_n)=E(Y_1Y_n)$；

(3) 由于$E[C(Y_1+Y_n)^2]=\sigma^2$，只要计算出$E[(Y_1+Y_n)^2]=D(Y_1+Y_n)+[E(Y_1+Y_n)]^2=D(Y_1+Y_n)$；

(4) 求$P\{Y_1+Y_n\leqslant 0\}$. 可以想到Y_1+Y_n服从正态，也由于$E(Y_1+Y_n)=0$，即有$(Y_1+Y_n)\sim N(0,\cdot)$，再利用正态密度的对称性，就有$P\{Y_1+Y_n\leqslant 0\}=\frac{1}{2}$.

解　(1)$D(Y_i)=D(X_i-\overline{X})=D[(1-\frac{1}{n})X_i-\frac{1}{n}\sum\limits_{j\neq i}X_j]$

$$=(1-\frac{1}{n})^2D(X_i)+\frac{1}{n^2}\sum_{j\neq i}D(X_j)$$

$$=(\frac{n-1}{n})^2\sigma^2+\frac{1}{n^2}\sum_{j\neq i}\sigma^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2;i=1,2,\cdots,n.$$

(2)$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)=E(Y_1Y_n)-E(Y_1)\cdot E(Y_n)=E(Y_1Y_n)=E(X_1-\overline{X})(X_n-\overline{X})$

$$=E(X_1X_n-X_1\overline{X}-X_n\overline{X}+\overline{X}^2)$$

$$=E(X_1X_n)-E(X_1\overline{X})-E(X_n\overline{X})+E(\overline{X}^2)$$

$$=E(X_1)E(X_n)-2E(X_1\overline{X})+D(\overline{X})+[E(\overline{X})]^2$$

$$=0-2\frac{1}{n}E(X_1^2+\sum_{j=2}^{n}X_1X_j)+D(\overline{X})+0$$

$$=-\frac{2}{n}(\sigma^2+0)+\frac{1}{n}\sigma^2=-\frac{\sigma^2}{n}.$$

(3)$E[C(Y_1+Y_n)^2]=CD(Y_1+Y_n)=C[D(Y_1)+D(Y_n)+2\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)]$

$$=C\left(\frac{n-1}{n}+\frac{n-1}{n}-\frac{2}{n}\right)\sigma^2=\frac{2(n-2)}{n}C\sigma^2=\sigma^2$$

$C=\frac{n}{2(n-2)}$.

(4)$Y_1+Y_n=X_1-\overline{X}+X_n-\overline{X}=X_1-\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i+X_n-\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$

$$=\frac{n-2}{n}X_1-\frac{2}{n}\sum_{i=2}^{n-1}X_i+\frac{n-2}{n}X_n,$$

因此Y_1+Y_n是$X_1,X_2,\cdots,X_n$的线性组合，所以Y_1+Y_n服从正态分布.

由于$E(Y_1+Y_n)=0$，所以$Y_1+Y_n\sim N(0,\cdot)$，$P\{Y_1+Y_n\leqslant 0\}=\frac{1}{2}$.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

微信公众号:顶尖考研(ID:djky66)

【评注】 在(4)中我们只给出 Y_1+Y_n 服从正态分布和 $E(Y_1+Y_n)=0$ 就有 $P\{Y_1+Y_n\leqslant 0\}=\frac{1}{2}$. 至于 Y_1+Y_n 的方差我们就不感兴趣了. 其实,在(3)中已求出 $D(Y_1+Y_n)=\frac{2(n-2)}{n}\sigma^2$.

【例 8】 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本,记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \text{ 和 } T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2.$$

试求:(1) 统计量 T 的数学期望;

(2) 当 $\mu=0,\sigma=1$ 时,统计量 T 的方差.

解题思路 (1)$E(T)=E(\overline{X}^2)-E(\frac{1}{n}S^2)$,而 $E(\overline{X}^2)=D(\overline{X})+[E(\overline{X})]^2$,$E(S^2)=D(X)$ 就可求得 $E(T)$;

(2) 当 $\mu=0,\sigma=1$ 时,总体为标准正态分布 $N(0,1)$,且 $\overline{X}$ 与 S^2 是相互独立的. 计算 T 的方差有几种算法:

① $D(T)=E(T^2)-[E(T)]^2=E[(\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2)^2]-[E(T)]^2$ 计算会很困难;

② 如果用 $\overline{X},S^2$ 的独立性 $D(T)=D(\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2)=D(\overline{X}^2)+D(\frac{1}{n}S^2)$,其中 $D(\overline{X}^2)=D[(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)^2]=D(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2+\frac{1}{n^2}\sum_{i\neq j}X_iX_j)$,所以计算 $D(\overline{X}^2)$ 和 $D(S^2)$ 也会很困难;

③ 当注意到 $\sqrt{n}\,\overline{X}\sim N(0,1)$,即 $n\overline{X}^2\sim\chi^2(1)$,还有 $(n-1)S^2\sim\chi^2(n-1)$,而 $D[\chi^2(n)]=2n$. 再计算 $D(T)=D(\overline{X}^2)+\frac{1}{n^2}D(S^2)$ 就不困难了.

微信公众号【顶尖考研】(ID: dKv66)

解 (1)$E(T)=E(\overline{X}^2)-\frac{1}{n}E(S^2)=D(\overline{X})+[E(\overline{X})]^2-\frac{\sigma^2}{n}=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2-\frac{\sigma^2}{n}=\mu^2$;

(2) 当 $\mu=0,\sigma=1$ 时,$\overline{X}\sim N(0,\frac{1}{n})$,即有 $n\overline{X}^2\sim\chi^2(1)$ 和 $(n-1)S^2\sim\chi^2(n-1)$.

注意到 $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立,且 $D(\chi^2(n))=2n$.

所以 $D(T)=D(\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2)=D(\overline{X}^2)+\frac{1}{n^2}D(S^2)$

$$=\frac{1}{n^2}D(n\overline{X}^2)+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{(n-1)^2}D[(n-1)S^2]$$

$$=\frac{1}{n^2}\cdot 2+\frac{1}{n^2(n-1)^2}\cdot 2(n-1)$$

$$=\frac{2}{n^2}(1+\frac{1}{n-1})=\frac{2}{n(n-1)}.$$

【例 9】 设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

其中参数 $\theta\in(0,1)$ 未知，以 N_i 表示来自总体 X 的简单随机样本(样本容量为 n) 中等于 i 的个数($i=1,2,3$). 试求常数 a_1,a_2,a_3，使统计量 $T=\sum\limits_{i=1}^{3}a_iN_i$ 的数学期望为 θ，并求 T 的方差.

解题思路 $E(T)=\sum\limits_{i=1}^{3}a_iE(N_i)$. 要求 $E(N_i)$，就得分析 N_i 的分布律. N_i 是样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 中取数值 i 的个数. 如果把每次 X_j 的取值看成是一次试验，则 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 可看成 n 次独立重复的试验. 第 j 次试验的结果 X_j 如果取 i 看成是试验成功，否则就看成是失败. 则 N_i 可以理解成 n 重伯努利试验中成功(取值 i) 的次数. 显然 $N_i\sim B(n,p_i)$，其中 p_i 是成功的概率，也就是一次试验中取值 i 的概率. 这时 $E(N_i)=np_i,D(N_i)=np_i(1-p_i)$.

解 记 $p_1=1-\theta,p_2=\theta-\theta^2,p_3=\theta^2$，则 $N_i\sim B(n,p_i)i=1,2,3.$

所以 $E(T)=\sum\limits_{i=1}^{3}a_iE(N_i)=\sum\limits_{i=1}^{3}a_inp_i=n[a_1(1-\theta)+a_2(\theta-\theta^2)+a_3\theta^2]$

要使 $E(T)=\theta$. 则有

$$n[a_1(1-\theta)+a_2(\theta-\theta^2)+a_3\theta^2]=n[a_1+(a_2-a_1)\theta+(a_3-a_2)\theta^2]=\theta$$

解得 $\begin{cases}a_1=0,\\ a_2=\dfrac{1}{n},\\ a_3=\dfrac{1}{n}.\end{cases}$ 这时 $T=\sum\limits_{i=1}^{3}a_iN_i=\dfrac{1}{n}(N_2+N_3)$.

现求 T 的方差，$T=\dfrac{1}{n}(N_2+N_3)$，显然 N_2 和 N_3 并不独立. 但 $N_1+N_2+N_3=n$.

故 $T=\dfrac{1}{n}(N_2+N_3)=\dfrac{1}{n}(n-N_1)=1-\dfrac{N_1}{n}$，而 $N_1\sim B(n,1-\theta)$.

所以 $D(T)=D(1-\dfrac{N_1}{n})=D(\dfrac{N_1}{n})=\dfrac{D(N_1)}{n^2}=\dfrac{n(1-\theta)\theta}{n^2}=\dfrac{\theta(1-\theta)}{n}$.

§2 估计量求法

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

内容精讲

7.2.1 矩估计法

定义　用样本矩估计相应的总体矩，用样本矩的函数估计总体矩相应的函数，然后求出要估计的参数，称这种估计法为矩估计法.

7.2.2 矩估计法步骤

设总体 X 的分布含有未知参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$，$\alpha_l=E(X^l)$ 存在，显然它是 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 的函数，记作 $\alpha_l(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$，$l=1,2,\cdots,k$. 样本的 l 阶原点矩为 $A_l=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^l$. 令

$$\alpha_l(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)=A_l,l=1,2,\cdots,k.$$

从这 k 个方程组中，可以解得 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$.

矩估计法不需要知道总体的具体分布数学形式，只要知道各阶矩存在.

如果不用原点矩，而用中心矩也可以求解：用样本中心矩等于总体中心矩来建立方程组.

求 k 个参数的估计一般就列出一阶矩到 k 阶矩的方程. 考试大纲只要求最多两个参数的估计，故一般最多两个方程.

设 $g(\alpha_1,\alpha_2)$ 是一阶矩 α_1 和二阶矩 α_2 的函数，而 $\hat{\alpha}_1$ 和 $\hat{\alpha}_2$ 分别为 α_1 和 α_2 的矩估计，则 $g(\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_2)$ 就是 $g(\alpha_1,\alpha_2)$ 的矩估计.

7.2.3 最大似然估计法

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是样本值，θ 是待估参数.

(1) 似然函数

定义 对于离散型总体 X，设其概率分布为 $P\{X=a_i\}=p(a_i;\theta),i=1,2,\cdots$，称函数

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$$

为参数 θ 的似然函数.

对于连续型总体 X，概率密度为 $f(x;\theta)$，则称函数

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$$

为参数 θ 的似然函数.

(2) 最大似然估计法

定义 对于给定的样本值 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，使似然函数 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)$ 达到最大值的参数值 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为未知参数 θ 的最大似然估计值，相应的 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 称为 θ 的最大似然估计量. 一般统称为 θ 的最大似然估计. 称这种估计法为最大似然估计法.

7.2.4 最大似然估计法步骤

如果 $L(\theta)$ 或 $\ln L(\theta)$ 关于 θ 可微，值 $\hat{\theta}$ 往往可以从方程

$$\frac{\mathrm{d}L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0 \text{ 或} \frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$$

中求解，称这两个方程为似然方程.

如果要估计的参数是两个，θ_1 和 θ_2，则得似然方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_1}=0,\\ \dfrac{\partial L(\theta)}{\partial\theta_2}=0\end{cases}\text{或}\begin{cases}\dfrac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta_1}=0,\\ \dfrac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta_2}=0.\end{cases}$$

解这两个方程组，可以得到 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$.

有时，使 $L(\theta)$ 或 $\ln L(\theta)$ 达到最大值的 $\hat{\theta}$ 不一定是 $L(\theta)$ 或 $\ln L(\theta)$ 驻点，这时不能用似然方程来求解，应采用其他方法求最大似然估计.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

例题分析

【例1】 设总体 $X\sim U[0,\theta]$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，则参数 θ 的矩阵估计量 $\hat{\theta}=$ _____.

解 要估计的参数就一个 θ，矩估计只要一个方程，即令样本均值等于总体均值就可以了.

已知 $E(X)=\dfrac{\theta}{2}$，所以 $\overline{X}=\dfrac{\theta}{2}$，解得 $\hat{\theta}=2\overline{X}$.

答案应填 $2\overline{X}$.

【例2】 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 $\mu,\sigma^2(\sigma>0)$ 均为未知参数，从总体取得样本为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$. 试求(1)μ 和 σ^2 的矩估计；(2)μ 和 σ^2 的最大似然估计.

解 (1) 待估计参数有两个：μ,σ^2. 考虑一阶、二阶矩

$$E(X)=\mu,E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\sigma^2+\mu^2.$$

$$\text{令}\begin{cases}\mu=\overline{X},\\ \sigma^2+\mu^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2,\end{cases}\text{得 }\mu\text{ 和 }\sigma^2\text{ 的矩估计 }\hat{\mu}=\overline{X},$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2.$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

【评注】 如果二阶矩不用原点矩而用二阶中心矩，也可以直接得 $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$.

(2) 由于 X 的密度为 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$-\infty<x<+\infty$，所以

$$L(\mu,\sigma^2)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2},$$

$$\ln L(\mu,\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,$$

似然方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\ln L}{\partial\mu}=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)=0,\\ \dfrac{\partial\ln L}{\partial\sigma^2}=-\dfrac{n}{2}\dfrac{1}{\sigma^2}+\dfrac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2=0.\end{cases}$$

$$\text{解得}\begin{cases}\hat{\mu}=\overline{X},\\ \hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2.\end{cases}$$

【例3】 设总体 X 的分布函数为

$$F(x;\theta)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

其中 θ 是未知参数且大于零. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 $E(X)$ 与 $E(X^2)$;

(2) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_n$;

(3) 是否存在实数 a,使得对任何 $\varepsilon > 0$,都有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}_n - a| \geqslant \varepsilon\} = 0$?

解题思路 (1) 题给 $F(x;\theta)$ 就有 $f(x;\theta) = F'(x;\theta)$. 可利用公式

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x;\theta)\mathrm{d}x, k = 1, 2.$$

(2) 由 $f(x;\theta)$ 就可构造似然函数 $L(\theta) = \prod\limits_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$,就不难求出最大似然估计量.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}_n - a| \geqslant \varepsilon\} = 0$ 等价于 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}_n - a| < \varepsilon\} = 1$,就是 $\hat{\theta}_n$ 依概率收敛于 a,$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} a$,依概率收敛必定用大数定律.

解 (1) 总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta) = F'(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\theta} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x;\theta)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x \frac{2x}{\theta} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}} \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{\pi\theta}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}} \mathrm{d}x$$

设 $Y \sim N(0, \frac{\theta}{2})$,则 Y 的概率密度

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi\theta}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{\theta}}, -\infty < y < +\infty$$

所以

$$E(X) = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{\pi\theta}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}} \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y)\mathrm{d}y = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} E(Y^2)$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} [D(Y) + [E(Y)]^2] = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \cdot \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}.$$

即 $E(X) = \dfrac{\sqrt{\pi\theta}}{2}$.

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x;\theta)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^2 \frac{2x}{\theta} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}} \mathrm{d}x = \theta \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\theta} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}} \mathrm{d}\left(\frac{x^2}{\theta}\right)$$

$$= \theta \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \theta.$$

(2) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为样本观测值,似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \begin{cases} \dfrac{2^n x_1 x_2 \cdots x_n}{\theta^n} \mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}, & x_1, x_2, \cdots, x_n > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

当 $x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$ 时,$\ln L(\theta) = n\ln 2 + \sum\limits_{i=1}^{n} \ln x_i - n\ln\theta - \dfrac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$.

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

令$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0$，解得$\theta$的最大似然估计值为$\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$.

从而θ的最大似然估计量为$\hat{\theta}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$.

(3)$\hat{\theta}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$，其中$X_1^2,X_2^2,\cdots,X_n^2,\cdots$是独立同分布的随机变量序列，且$E(X_i^2)=\theta$存在.

根据辛钦大数定律，当$n\to\infty$时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$依概率收敛于$E(X_i^2)=\theta$，所以，存在实数$a=\theta$，使得对任何$\varepsilon>0$，都有$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-E(X_i^2)\right|<\varepsilon\right\}=1$. 即存在实数$\theta$，使得对任何$\varepsilon>0$，都有$\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}_n-a|\geqslant\varepsilon\}=0$.

【例 4】　设某种元件的使用寿命X的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}, & x>\theta,\\ 0, & x\leqslant\theta,\end{cases}$$

其中θ为未知参数，又设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是X的一组样本观测值，求参数θ的最大似然估计值.

解　似然函数为

$$L(\theta)=\begin{cases}2^n\mathrm{e}^{-2\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}, & x_i>\theta(i=1,2,\cdots,n),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

当$x_i>\theta(i=1,2,\cdots,n)$时，$L(\theta)>0$，取对数得

$$\ln L(\theta)=n\ln 2-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta).$$

因为$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=2n>0$，所以$L(\theta)$单调增加.

由于θ必须满足$\theta<x_i(i=1,2,\cdots,n)$，因此当$\theta$取$x_1,x_2,\cdots,x_n$中的最小值时，$L(\theta)$取最大值，所以$\theta$的最大似然估计值为

$$\hat{\theta}=\min(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

【评注】　求最大似然估计值时，写出似然函数后就是求最大值的问题，如果似然函数可导又存在驻点，就在驻点中找；如果有导数，没驻点或不可导，就用其他方法求使$L(\theta)$最大的点.

【例 5】　设总体$X\sim U(0,\theta)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的样本，试求参数θ的最大似然估计量.

解　似然函数为

$$L(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta^n}, & 0<x_i<\theta(i=1,2,\cdots,n),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)

显然，θ越小，$\frac{1}{\theta^n}$越大，但θ必须满足$x_i<\theta(i=1,2,\cdots,n)$，因此当$\theta$取$x_1,x_2,\cdots,x_n$中最大值时，$L(\theta)$取最大值，所以$\theta$的最大似然估计量为

$$\hat{\theta}=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n).$$

【评注】 不难直接计算可得 $E(\hat{\theta})=\dfrac{n}{n+1}\theta$，所以这个估计 $\hat{\theta}$ 的数学期望不是 θ.

【例 6】 设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $\theta\left(0<\theta<\dfrac{1}{2}\right)$ 是未知参数，利用总体 X 的如下样本值

$$3,1,3,0,3,1,2,3.$$

求 θ 的矩估计值和最大似然估计值.

解 矩估计值

$E(X)=0\times\theta^2+1\times2\theta(1-\theta)+2\times\theta^2+3\times(1-2\theta)=3-4\theta$，

$\bar{x}=\dfrac{1}{8}\times(3+1+3+0+3+1+2+3)=2$.

令 $E(X)=\bar{x}$，即 $3-4\theta=2$，解得 θ 的矩估计值为 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{4}$.

最大似然估计值

对于给定的样本值，似然函数为

$$L(\theta)=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4,$$

$$\ln L(\theta)=\ln 4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta),$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{6}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=\frac{6-28\theta+24\theta^2}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)}.$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$，解得 $\theta_{1,2}=\dfrac{7\pm\sqrt{13}}{12}$. 因 $\dfrac{7+\sqrt{13}}{12}>\dfrac{1}{2}$ 不合题意，所以 θ 的最大似然估计值为

$$\hat{\theta}=\frac{7-\sqrt{13}}{12}.$$

【例 7】 设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1,\\ 1-\theta, & 1\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$ 其中 θ 是未知参数 $(0<\theta<1)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，记 N 为样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中小于 1 的个数，求 θ 的最大似然估计.

解题思路 求 θ 的最大似然估计的关键在于写出似然函数 $L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)$.

现 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中小于 1 的个数为 N 个，则大于等于 1 的个数必为 $(n-N)$ 个.

由于当 $x\leqslant0$ 时 $f(x,\theta)=0$，故 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中小于 1 的个数为 N 个，实际上就是在

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

$0<x<1$ 范围内 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 个数有 N 个. 同理 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中属于 $1\leqslant x<2$ 范围的必为 $(n-N)$ 个.

所以 $L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\theta^N(1-\theta)^{n-N}$.

解 似然函数为 $L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\theta^N(1-\theta)^{n-N}$.

$$\ln L(\theta)=N\ln\theta+(n-N)\ln(1-\theta),$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{N}{\theta}-\frac{n-N}{1-\theta}.$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$，解得 $\theta=\dfrac{N}{n}$.

显然当 $\theta=\dfrac{N}{n}$ 时，$L(\theta)$ 最大，所以 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta}=\dfrac{N}{n}$.

【例 8】 某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做 n 次测量，该物体的质量 μ 是已知的，设 n 次测量结果 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$. 该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i=|X_i-\mu|\ (i=1,2,\cdots,n)$，利用 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 估计 σ.

(1) 求 Z_1 的概率密度；

(2) 利用一阶矩求 σ 的矩估计量；

(3) 求 σ 的最大似然估计量.

解题思路 $X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 为已知，X_i 相互独立同分布，而 $Z_i=|X_i-\mu|$，可以理解 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 为来自总体 $Z=|X-\mu|$ 的简单随机样本. $Z_i,i=1,2,\cdots,n$ 的概率密度就是 Z 的概率密度 $f_Z(z)$. 记 Z 的分布函数 $F_Z(z)$，只要求出 $F_Z(z)$，则 $f_Z(z)=F_Z'(z)$.

(1) Z_1 的密度就是 $f_Z(z)$；

(2) 显然，$f_Z(z)$ 为 σ 的函数，令 $E(Z)=\overline{Z}$，其中 $\overline{Z}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Z_i$，就可求出矩估计量 $\hat{\sigma}_1$；

(3) 求似然函数 $L=\prod\limits_{i=1}^{n}f_Z(z_i)$ 对 σ 求最大，解出 σ 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}_2$.

解 (1) Z 的分布函数 $F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{|X_1-\mu|\leqslant z\}$.

当 $z\geqslant 0$ 时，$F_Z(z)=P\{-z\leqslant X_1-\mu\leqslant z\}=P\left\{-\dfrac{z}{\sigma}<\dfrac{X_1-\mu}{\sigma}\leqslant\dfrac{z}{\sigma}\right\}$

$$=\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-z}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right)-1;$$

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$.

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sigma}\varphi\left(\dfrac{z}{\sigma}\right), & z\geqslant 0,\\ 0, & z<0,\end{cases}$$

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

其中 $\varphi(x)$ 为标准正态密度函数，$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，$-\infty<x<+\infty$.

(2) $E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}zf_Z(z)dz=\int_0^{+\infty}\frac{2z}{\sigma}\varphi\left(\frac{z}{\sigma}\right)dz=2\sigma\int_0^{+\infty}\frac{z}{\sigma}\varphi\left(\frac{z}{\sigma}\right)d\left(\frac{z}{\sigma}\right)$.

$=2\sigma\int_0^{+\infty}t\varphi(t)dt=2\sigma\int_0^{+\infty}t\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}d\left(\frac{t^2}{2}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$.

令 $E(Z)=\overline{Z}$，即 $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma=\overline{Z}$，解得 $\hat{\sigma}_1=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\overline{Z}$.

(3) 记 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 为样本 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 的观测值，则似然函数为

$$L(\sigma)=\prod_{i=1}^{n}f_Z(z_i)=\begin{cases}\frac{2^n}{\sigma^n}\prod_{i=1}^{n}\varphi\left(\frac{z_i}{\sigma}\right), & \begin{matrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{matrix}\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}=\begin{cases}\frac{2^n}{\sigma^n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2}, & \begin{matrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{matrix}\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

当 $\begin{matrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{matrix}\geqslant 0$ 时，$\ln L(\sigma)=n\ln 2-n\ln\sigma-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2$.

令 $\frac{d\ln L(\sigma)}{d\sigma}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}z_i^2=0$，即 $n\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}z_i^2$，解得 $\sigma=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i^2}$.

所以最大似然估计量 $\hat{\sigma}_2=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2}$.

【评注】 本题是 2017 年数学一和数学三的真题，得分率较低.

考生主要困难在于：所求是总体 X 的参数 σ，但是所给的样本不是总体 X 的，而是 X 的函数 $Z=|X-\mu|$ 的样本. 2012 年数学一也有类似的真题：X,Y 独立，$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y\sim N(\mu,2\sigma^2)$，$Z=X-Y$，给出 Z 的样本估计 σ^2. 考生解答也不太理想.

微信公众号【顶尖考研】(ID:djky66)

数学家的小故事

1664~1665年的黑死病，使得牛顿所在的大学关闭，他回到伍尔索普隐居。在这两年里面，他发明了流数方法（微积分），发现了万有引力定律，通过实验证明了白光是由各种颜色的光合成的。

金榜时代图书·书目

考研数学系列

书名	作者	出版时间
数学复习全书·基础篇(数学一、二、三通用)	李永乐等	2020年6月
数学基础过关660题(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2020年8月
数学历年真题全精解析·基础篇(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2020年10月
数学公式的奥秘	刘喜波等	2020年10月
数学复习全书(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2020年12月
数学历年真题全精解析(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2021年1月
数学强化通关330题(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2021年1月
高等数学辅导讲义	刘喜波　曹显兵	2021年1月
高等数学辅导讲义	武忠祥	2021年1月
线性代数辅导讲义	李永乐	2021年1月
概率论与数理统计辅导讲义	王式安	2021年1月
高等数学超精讲	姜晓千	2021年6月
线性代数超精讲	姜晓千	2021年6月
数学满分冲刺特训题	薛威	2021年9月
数学决胜冲刺6套卷(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2021年10月
数学临阵磨枪(数学一/数学二/数学三)	李永乐等	2021年10月
经济类联考数学复习全书	李永乐等	2021年4月
经济类联考数学通关无忧题·基础篇	薛威	2021年4月
经济类联考数学通关无忧题·强化篇	金榜时代考研数学名师团队	2021年6月
经济类联考数学决胜冲刺6套卷	金榜时代考研数学名师团队	2021年10月
农学门类联考数学复习全书	李永乐等	2021年4月

大学数学系列

书名	作者	出版时间
大学数学线性代数辅导	李永乐	2018年12月
大学数学高等数学辅导	章纪民	2021年5月
大学数学概率论与数理统计辅导	刘喜波	2021年5月

微信公众号【顶尖考研】(ID：djky66)

线性代数期末高效复习笔记	宋浩	2021 年 5 月
高等数学期末高效复习笔记	宋浩	2021 年 5 月
概率论与数理统计期末高效复习笔记	宋浩	2021 年 5 月

考研政治系列

书名	作者	出版时间
思想政治理论大纲命题解析	米鹏	2021 年 5 月
思想政治理论精雕细刻 1000 题	米鹏	2021 年 5 月
思想政治理论大串讲	米鹏	2021 年 10 月
思想政治理论最后 20 天必背 20 题	米鹏	2021 年 10 月
考研政治复习手账	张纹	2021 年 5 月
考研政治时政与大题	张纹	2021 年 10 月
考研政治冲刺预测 5 套卷	张纹	2021 年 10 月
考研政治高分秘训 900 题	桑宏斌	2021 年 3 月

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

考研英语系列

书名	作者	出版时间
考研英语词汇源来如此	全国考研英语金榜命题研究中心	2020 年 10 月
考研英语语法和长难句实战突破 18 讲	全国考研英语金榜命题研究中心	2020 年 10 月
考研词伙	李超	2019 年 3 月
考研句伙	李超	2019 年 3 月
考研英语阅卷人写作高分万能模板	方妍	2018 年 11 月
考研英语语法长难句抓分攻略	欧阳栾天	2018 年 9 月
考研英语实用语法与疑难句精讲笔记	白子墨	2020 年 12 月
考研英语写作精讲笔记	白子墨	2021 年 6 月
词维风暴	娄晗	2019 年 9 月
考研英语长难句核心语法	高维 赵亮	2021 年 2 月
考研英语核心词汇	赵亮 高维	2021 年 5 月
考研英语阅读通关“密”籍	许密杉	2021 年 4 月
考研英语词汇通关“密”籍	许密杉	2021 年 5 月

专业硕士系列

书名	作者	出版时间
写作复习指南	房文学	2020 年 12 月

逻辑复习指南	房文学	2021 年 3 月
逻辑狂练 900 题	房文学	2021 年 3 月
逻辑真题全解	房文学	2021 年 3 月

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

医师资格考试系列

书名	作者	出版时间
贺银成国家临床执业医师资格考试辅导讲义(上、下册)	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业医师资格考试辅导讲义同步练习	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业医师资格考试全真模拟试卷及精析	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业及助理医师资格考试历年考点精析(上、下册)	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业及助理医师资格考试实践技能应试指南	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试辅导讲义(上、下册)	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试辅导讲义同步练习	贺银成	2020 年 12 月
贺银成国家临床执业助理医师资格考试全真模拟试卷及精析	贺银成	2020 年 12 月
国家临床执业及助理医师资格考试抢分速记定心丸	高鑫	2021 年 3 月
刘应科中医执业(助理)医师实践技能通关掌中宝	刘应科	2021 年 5 月
刘应科中医执业(助理)医师综合笔试通关掌中宝	刘应科	2021 年 5 月

微信公众号【顶尖考研】
(ID:djky66)

考研西医系列

书名	作者	出版时间
贺银成考研西医临床医学综合能力辅导讲义(上、下册)	贺银成	2021 年 2 月
贺银成考研西医临床医学综合能力辅导讲义同步练习	贺银成	2021 年 3 月
贺银成考研西医临床医学综合能力全真模拟试卷及精析	贺银成	2021 年 3 月
贺银成考研西医临床医学综合能力历年真题精析	贺银成	2021 年 3 月

考研中医系列

书名	作者	出版时间
刘应科考研中医综合教材	刘应科	2021 年 3 月
刘应科考研中医综合教材同步练习 3000 题	刘应科	2021 年 3 月
刘应科考研中医综合历年真题精析及复习思路	刘应科	2021 年 3 月
刘应科考研中医综合终极预测试卷	刘应科	2021 年 9 月

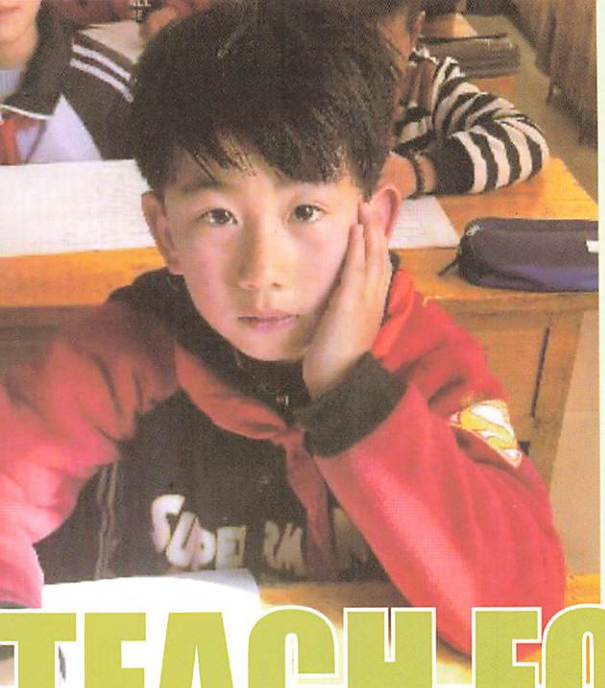
中外名著系列

书名	作者	出版时间
小王子	[法]安托万·德·圣-埃克苏佩里	2018 年 12 月
飞鸟集	[印]泰戈尔	2018 年 12 月
瓦尔登湖	[美]亨利·戴维·梭罗	2018 年 12 月
了不起的盖茨比	[美]弗·司各特·菲茨杰拉德	2018 年 12 月
简·爱	[英]夏洛蒂·勃朗特	2018 年 12 月
老人与海	[美]海明威	2018 年 12 月
月亮和六便士	[英]威廉·萨默塞特·毛姆	2018 年 12 月
呼啸山庄	[英]艾米莉·简·勃朗特	2018 年 12 月
傲慢与偏见	[英]简·奥斯丁	2018 年 12 月
双城记	[英]查尔斯·狄更斯	2019 年 3 月
朝花夕拾·呐喊	鲁迅	2018 年 4 月
呼兰河传	萧红	2018 年 4 月
骆驼祥子	老舍	2018 年 4 月
我这一辈子	老舍	2018 年 4 月
茶馆	老舍	2018 年 4 月

微信公众号【顶尖考研】(ID: djky66)

以上图书书名及出版时间仅供参考，以实际出版物为准，均属金榜时代(北京)教育科技有限公司

微信公众号: 金榜时代考研
原公众号: 金榜图书考研，名称已更换
@金榜时代官方微博
天猫
时代巨流图书专营店
微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)



乡村艺术Ke梦想社

音体美教师志愿者招募

不要被摩天大厦挡个正着

去青瓦淡墨乡间

用我们的方式热爱这个时代

TEACH FOR CHINA

招募：乡村小学音体美青年教师志愿者

项目简介

乡村艺术Ke梦想社创办于2017年，旨在改善乡村音体美教师紧缺现状，让乡村儿童感受音体美艺术之美，让更多的孩子，无论出身，都能获得同等的优质教育。梦想社创立之初，便启动了“助力乡村学校音体美课堂”行动计划，截止目前，该计划已牵手近300余名青年志愿者，落地学校已达10所。（详情敬请关注公众号“乡村艺术ke梦想社”）为善益众，求贤若渴，我们，正在远方，等着如诗般的你！

微信公众号（同步考研）
(ID: dlky66)

成为志愿者你将获得

- 服务学校包吃包住
- 每月1500元补助
- 志愿者服务期间的短期保障保险
- 方寸天地得享人生意趣，大美原乡遍寻香径落花

我们希望你

- 品行端正，有爱心，有耐心
- 身体健康，能适应艰苦乡村环境
- 受过良好教育且有音体美专业特长
- 认真负责，充满正能量，支教有清晰规划
- 吃苦耐劳，乐于助人，有良好的团队合作精神

报名方式

Step 1.

请以“**报名2021乡村艺术Ke梦想社音体美教师志愿者**”为邮件标题，发送邮件至：

CountryClass@126.com

Step 2.

邮件内容：正文简要介绍你对社会公益的理解，参加本次活动的原因及您的一技之长；

附件1：支教课程设计（包括3节课以上的教案或课件）

附件2：个人简历（Word格式）

金榜時代 考研数学系列

书名	出版时间	适用阶段
数学公式的奥秘	2020年3月	全程复习
数学复习全书·基础篇	2020年6月	夯实基础
数学基础过关660题	2020年8月	夯实基础
数学历年真题全精解析·基础篇	2020年10月	夯实基础
数学复习全书	2020年12月	全程复习
数学历年真题全精解析	2021年1月	全程复习
高等数学辅导讲义	2021年1月	强化提高
线性代数辅导讲义	2021年1月	强化提高
概率论与数理统计辅导讲义	2021年1月	强化提高
数学强化通关330题	2021年1月	强化提高
数学决胜冲刺6套卷	2021年10月	冲刺预测
数学临阵磨枪	2021年10月	冲刺预测

微信公众号【顶尖考研】
(ID：djky66)

G20210007

微信扫一扫
解锁更多精彩内容

关注作者团队微博
与名师一起互动交流

责任编辑 / 吕睿
ISBN 978-7-109-27551-5
9 787109 275515 >
定价：118.00元