

助力乡村学校音体美课堂行动”官方合作图书
/研客及全国各大考研培训学校指定用书

金榜时代TM
GLIST 明德·弘毅·品质

榜 时 代 考 研 数 学 系 列

数学复习全书

学霸养成笔记与
题源探究同步练习

（数
学
一）

2022

编著 © 李永乐 王式安 刘喜波 武忠祥 宋浩 姜晓千 铁军 李正元 蔡燧林 胡金德

赠 送 本

《题源探究同步练习》+《基础过关660题》+《强化通关330题》
配合使用，效果显著，地毯式刷题无死角！

全书配套练习
检验自身学习水平

题目严扣知识点
可衍生各类型试题

重点题型详细解析
通透易懂

金榜题名

考研当年5—11月（强化提高）

《强化通关330题》
《历年真题·强化篇》



《决胜冲刺6套卷》
《临阵磨枪》



《高数辅导讲义》
《线代辅导讲义》
《概率论辅导讲义》



《复习全书·综合提高篇》

考研当年11—12月

考研当年7—11月（专项强化）

考研当年1—7月（全面复习）

无基础 不数学

考研前一年9—12月



《复习全书·基础篇》

考研前一年9月—考研当年4月



《基础过关 660题》



历年真题
基础篇

目录

Contents

学霸养成笔记

高等数学	(1)	向 量	(21)
函数、极限、连续	(1)	线性方程组	(23)
一元函数微分学	(3)	特征值、特征向量、相似矩阵	(25)
一元函数积分学	(5)	二次型	(27)
向量代数与空间解析几何	(7)	概率论与数理统计	(29)
多元函数微分学	(9)	随机事件和概率	(29)
多元函数积分学	(11)	随机变量及其概率分布	(31)
无穷级数	(13)	多维随机变量及其分布	(33)
常微分方程	(15)	随机变量的数字特征	(35)
线性代数	(17)	大数定律和中心极限定理	(37)
行列式	(17)	数理统计的基本概念	(38)
矩 阵	(19)	参数估计	(40)
		假设检验	(42)

题源探究同步练习

练习

第一篇 高等数学	(43)	第二篇 线性代数	(65)
第一章 函数、极限、连续	(43)	第一章 行列式	(65)
第二章 一元函数微分学	(46)	第二章 矩 阵	(67)
第三章 一元函数积分学	(48)	第三章 向 量	(69)
第四章 向量代数与空间解析几何	(50)	第四章 线性方程组	(71)
第五章 多元函数微分学	(52)	第五章 特征值、特征向量、相似矩阵	(73)
第六章 多元函数积分学	(55)	第六章 二次型	(75)
第七章 无穷级数	(59)	第三篇 概率论与数理统计	(77)
第八章 常微分方程	(62)	第一章 随机事件和概率	(77)

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)

第二章	随机变量及其概率分布	(79)
第三章	多维随机变量及其分布	(81)
第四章	随机变量的数字特征	(85)
第五章	大数定律和中心极限定理	(88)

参考答案

第一篇 高等数学 (95)

第一章	函数、极限、连续	(95)
第二章	一元函数微分学	(98)
第三章	一元函数积分学	(102)
第四章	向量代数与空间解析几何	(105)
第五章	多元函数微分学	(106)
第六章	多元函数积分学	(109)
第七章	无穷级数	(112)
第八章	常微分方程	(115)

第二篇 线性代数 (118)

第一章	行列式	(118)
第二章	矩阵	(119)
第三章	向量	(121)

第六章	数理统计的基本概念	(89)
第七章	参数估计	(92)
第八章	假设检验	(94)

第四章 线性方程组 (123)

第五章	特征值、特征向量、相似矩阵	(124)
-----	---------------	-------

第六章 二次型 (126)

第三篇 概率论与数理统计 (127)

第一章	随机事件和概率	(127)
第二章	随机变量及其概率分布	(128)
第三章	多维随机变量及其分布	(130)
第四章	随机变量的数字特征	(134)
第五章	大数定律和中心极限定理	(137)
第六章	数理统计的基本概念	(138)
第七章	参数估计	(140)
第八章	假设检验	(142)

高等数学

函数、极限、连续

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始 (๑)

1. 函数

提要：概念 函数特性 函数分类

2. 函数极限

提要：定义 无穷小无穷大 函数极限的性质与定理 计算函数极限的方法

3. 数列极限

提要：定义 极限的性质 证明极限存在的方法 计算极限的方法

4. 连续与间断

提要：定义 连续相关定理 间断点的分类

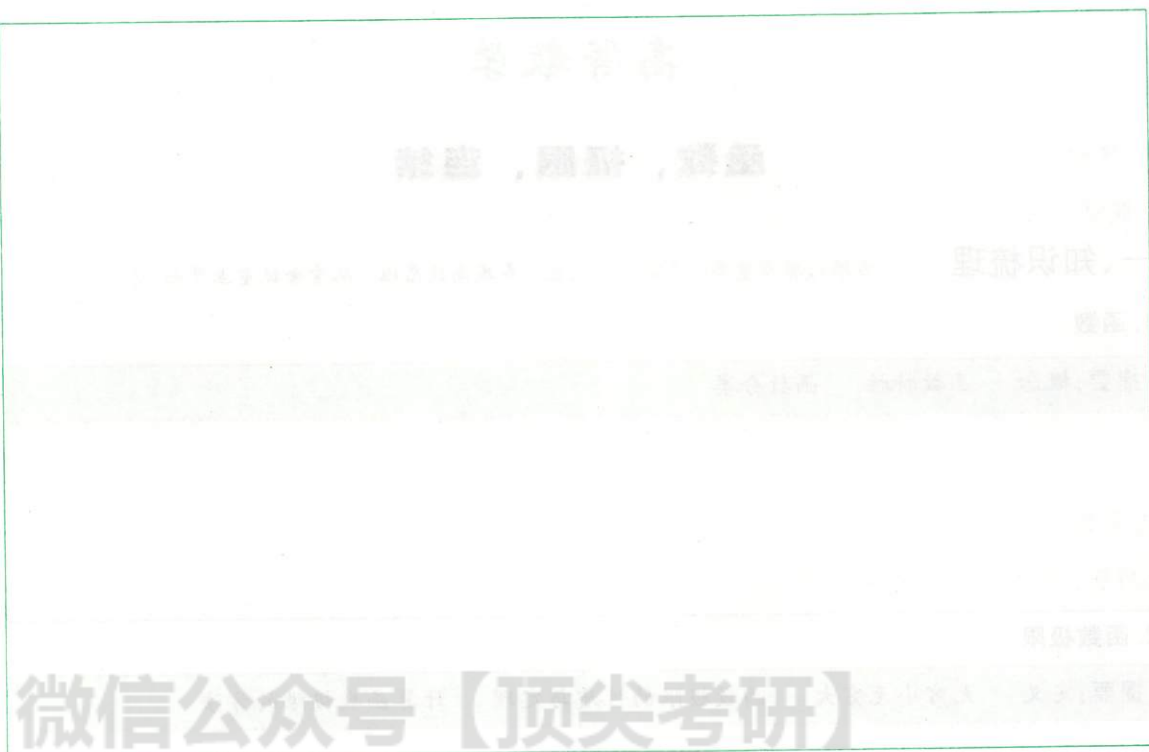
学霸养成笔记

微信公众号：顶尖考研
(ID: djky66)



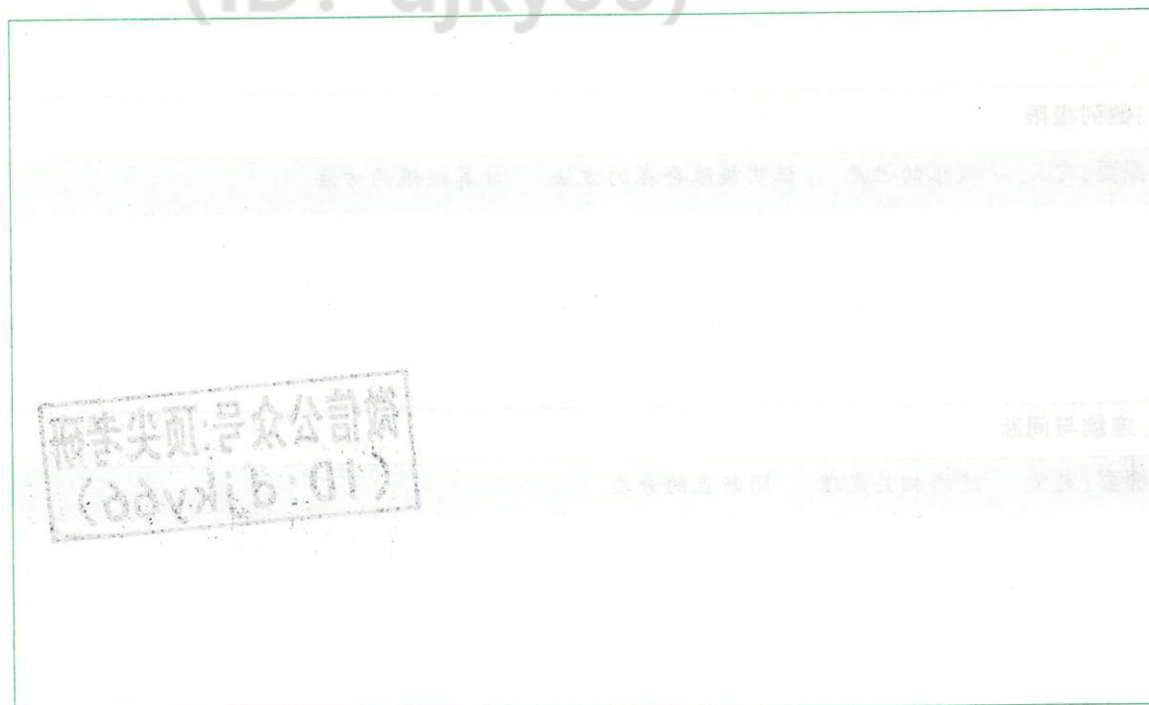
二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸 🍀



三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心 ✨



一元函数微分学

新编微分学讲义

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始 (๑)

1. 导数与微分

提要：定义 相关定理 求导法则 导数公式

2. 导数应用

提要：单调性 极值与最值 凹凸性与拐点 渐近线 曲率与曲率半径

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

3. 中值定理

提要：费马定理 罗尔定理 拉格朗日中值定理 柯西中值定理 泰勒定理

4. 证明题

提要：不等式的证明 零点的证明

微信公众号：顶尖考研
(ID: djky66)

学霸养成笔记



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸 🍀

微信公众号【顶尖考研】

三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心 ✨

顶尖考研：公众号
(ID: djky66)



一元函数积分学

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始 ☺

1. 不定积分

提要：定义 性质 计算方法

2. 定积分

提要：定义 性质 定理 计算方法

3. 无穷限的反常积分

提要：定义 性质 常用结论 敛法

4. 无界函数的反常积分

提要：定义 性质 常用结论 敛法

5. 定积分的几何应用

提要：平面图形的计算 旋转体的计算 其他应用

6. 定积分相关证明题

提要：变限积分函数 积分不等式 零点问题

学霸养成笔记

微信公众号：顶尖考研
(ID: djky66)



学霸养成笔记

微信公众号【顶尖考研】

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心 ☆

敬告尖頭：呂眾公計轉
 (D.D. 91kayob)



向量代数与空间解析几何

知识要点

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始

1. 向量代数

提要：概念 向量运算

2. 平面与直线

提要：平面方程 直线方程 位置关系 距离公式

(ID: djky66)

3. 空间曲面与曲线

提要：旋转面 柱面 常见曲面 空间曲线

微信公众号：顶尖考研
(ID: djky66)

学霸养成笔记



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸

微信公众号【顶尖考研】

三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心

顶尖考研：公众号
(ID: djky88)



多元函数微分学

张宇的51要,二

一、知识梳理

方法比努力重要! 学霸不是天生, 养成高效思维, 从学会抓重点开始 (๑)

1. 二元函数的极限与连续、偏导数与微分

提要: 极限与连续 偏导数 可微性与全微分

2. 二元函数的微分法

提要: 复合函数的微分法 隐函数的微分法

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

张宇的51要,三

3. 极值

提要: 无条件极值 条件极值 最值

4. 方向导数、梯度与几何应用

提要: 方向导数 梯度 几何应用

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

学霸养成笔记



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸 ☺

微信公众号【顶尖考研】

三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心 ☺

顶尖考研：公众号
(ID: djky66)



多元函数积分学

新教材讲义,二

一、知识梳理

方法比努力重要! 学霸不是天生, 养成高效思维, 从学会抓重点开始 ☺

1. 二重积分

提要: 定义 性质 累次积分 交换积分次序 二重积分的计算方法

2. 三重积分

提要: 定义 三重积分的计算方法

3. 线积分

提要: 第一类线积分 第二类线积分 计算方法 格林公式 线积分与路径无关 两类线积分的关系

4. 面积分

提要: 第一类面积分 第二类面积分 计算方法 高斯公式 斯托克斯公式 两类面积分之间的关系

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

学霸养成笔记



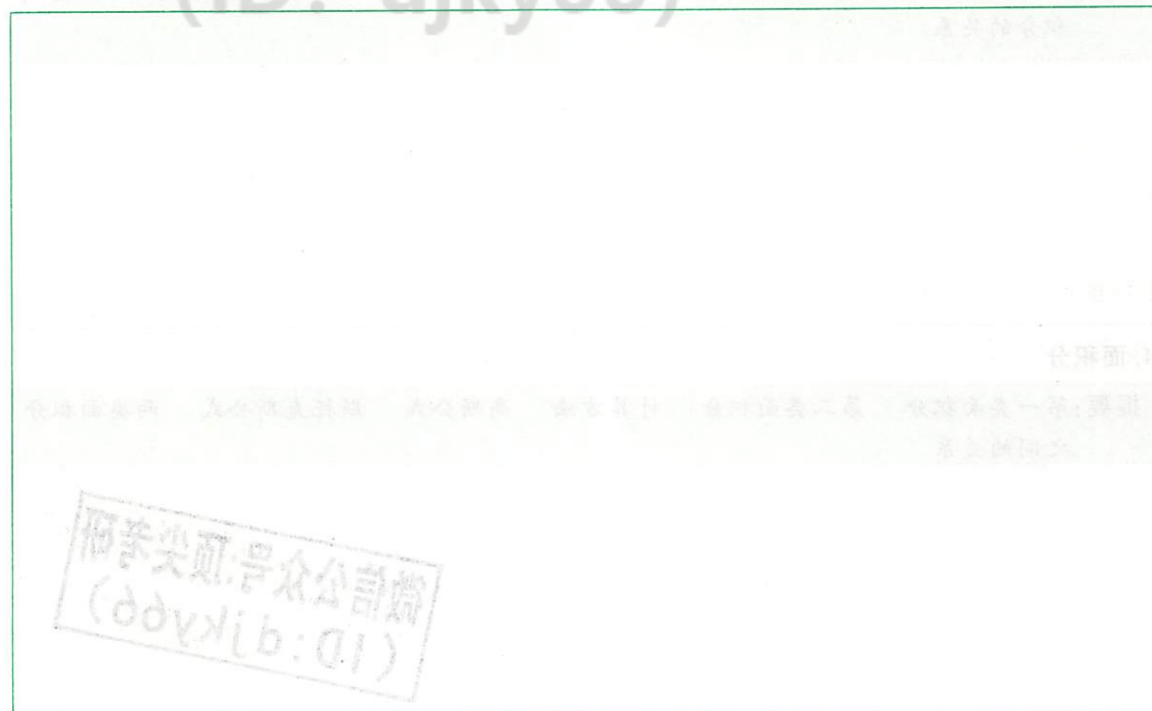
二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸



三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心



无穷级数

学霸养成记

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始

1. 数项级数

提要：级数的概念与性质 正项级数的判敛法 交错级数的判敛法 任意项级数的判敛法

2. 幂级数

提要：收敛半径、收敛区间与收敛域 幂级数的性质 幂级数的展开 求和函数 求级数的和

3. 傅里叶级数

提要：傅里叶级数及其收敛定理 傅里叶展开

微信公众号：顶尖考研
(ID: djky66)



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸 🧠

微信公众号【顶尖考研】

三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心 ✨

顶尖考研：公众号：djky88
(ID: djky88)



常微分方程

常微分方程讲义

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始 (๑)

1. 一阶微分方程

提要：可分离变量方程 齐次方程 一阶线性方程 伯努利方程 全微分方程

微信公众号【顶尖考研】

(ID: djky66)

2. 高阶微分方程

提要：可降阶的微分方程 线性方程解的结构定理 线性常系数齐次微分方程 线性常系数非齐次微分方程 欧拉方程

微信公众号：顶尖考研
(ID: djky66)

学霸养成笔记



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸 ☺

微信公众号【顶尖考研】

三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心 ✨

顶尖考研：公众号：djky88
(ID: djky88)



线性代数

行列式

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始 (๑)

1. 行列式的性质与计算公式

提要：行列式的性质 按行与按列展开 行列式公式

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

学霸养成笔记

2. 行列式的计算方法

提要：数字型行列式 分块矩阵的行列式 抽象矩阵的行列式

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸 🧠

微信公众号【顶尖考研】

三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心 ✨

顶尖考研：公众号：djky88
(ID: djky88)



矩 阵

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始 ☺

1. 矩阵的概念

提要：矩阵的运算 特殊矩阵

2. 矩阵的变换

提要：伴随矩阵 可逆矩阵 初等矩阵与初等变换 等价

(ID: djky66)

3. 矩阵的秩与分块矩阵

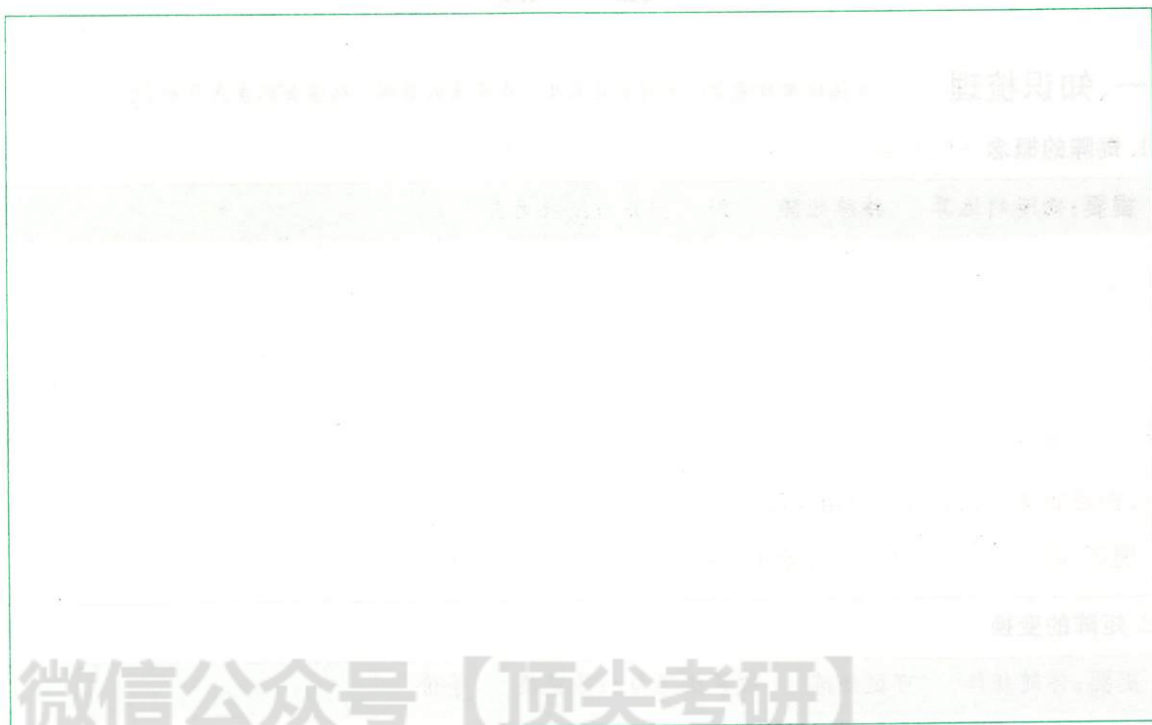
提要：矩阵的秩 分块矩阵

微信公众号：顶尖考研
(ID: djky66)



二、要记住的结论

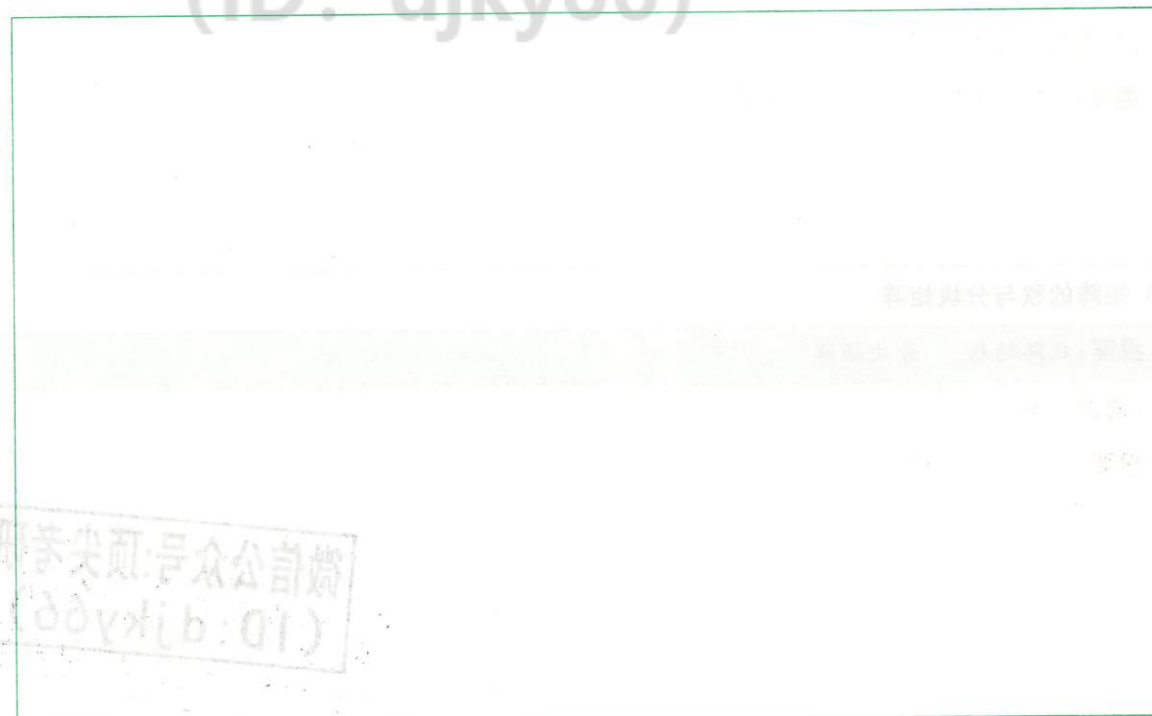
不用想，直接用，让你看起来真学霸



微信公众号【顶尖考研】

三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心



向 量

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始 (๑)

1. 向量运算与线性关系

提要：向量的运算 线性表出 线性相关与线性无关

2. 向量组的极大线性无关组与秩

提要：极大线性无关组 向量组的秩

微信公众号【顶尖考研】

(ID: djky66)

3. 正交化与正交矩阵

提要：Schmidt 正交化 正交矩阵

4. 向量空间

提要：基 过渡矩阵

微信公众号：顶尖考研
(ID: djky66)



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸 ☺

微信公众号【顶尖考研】

三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心 ☺

顶尖考研 (ID: djky66)



线性方程组

新教材升5要,三

一、知识梳理

方法比努力重要! 学霸不是天生, 养成高效思维, 从学会抓重点开始 ☺

1. 有解无解与解的性质

提要: 有解无解的判定方法 解的性质与结构定理

微信公众号【顶尖考研】

(ID: djky66)

兼融数, 融图典登, 三

2. 线性方程组解的求法

提要: 齐次线性方程组基础解系的求法 非齐次线性方程组通解的求法 克拉默法则
公共解与同解问题

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸

要记住的结论，一

要记住的结论，二

要记住的结论，三

微信公众号【顶尖考研】

三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心

要记住的结论，四

要记住的结论，五

要记住的结论，六

要记住的结论，七

要记住的结论，八

要记住的结论，九

要记住的结论，十

要记住的结论，十一

要记住的结论，十二

要记住的结论，十三

要记住的结论，十四

要记住的结论，十五

要记住的结论，十六

要记住的结论，十七

要记住的结论，十八

要记住的结论，十九

要记住的结论，二十



特征值、特征向量、相似矩阵

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始 ☺

1. 特征值与特征向量

2. 相似与相似对角化

提要：相似矩阵 矩阵的相似对角化定理

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

3. 实对称矩阵的相似对角化方法

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸

微信公众号【顶尖考研】

三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心

顶尖考研公众号 (ID: djky88)



二次型

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始 ☺

1. 化二次型为标准形、规范形

提要：标准形 规范形

2. 合同

3. 正定矩阵与正二次型

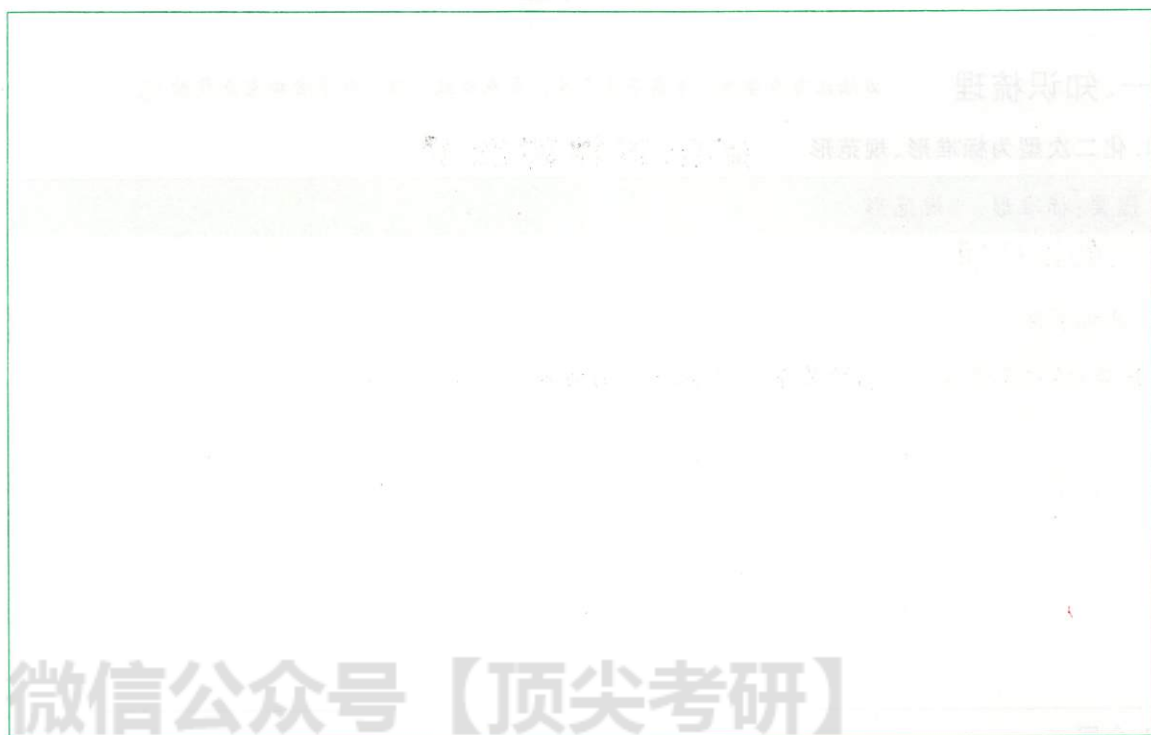
学霸养成笔记

微信公众号：顶尖考研
(ID: djky66)



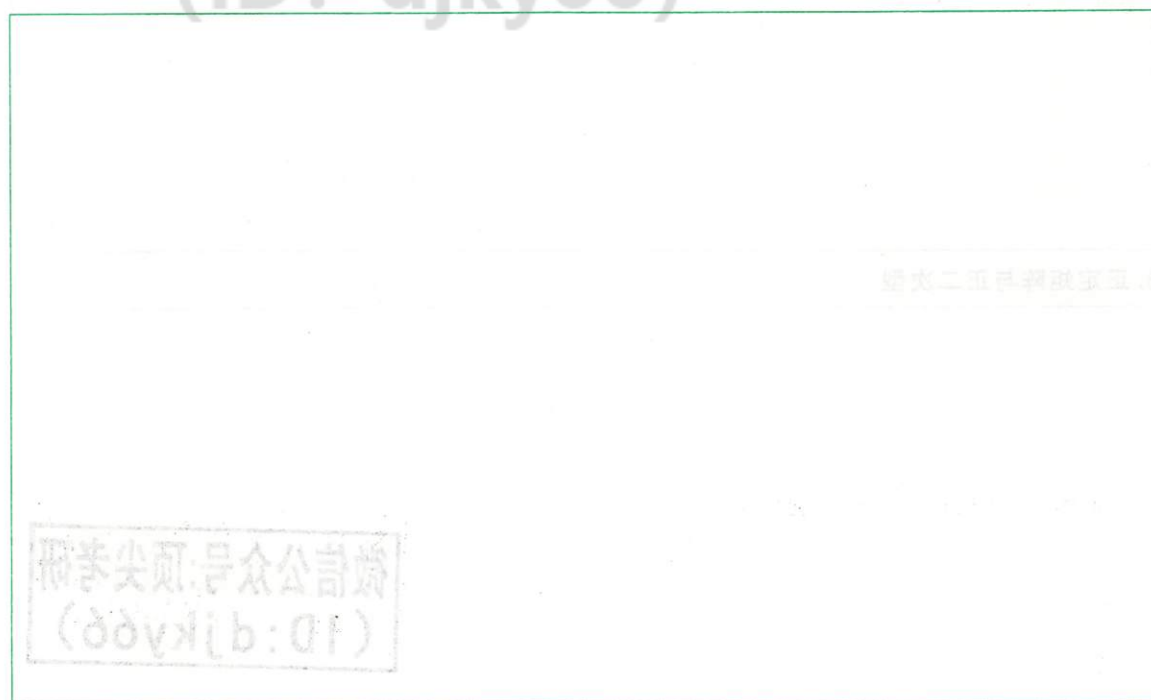
二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸 🧠



三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心 ✨



概率论与数理统计

随机事件和概率

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始 ☺

1. 随机事件

提要：随机事件及相互间的关系 随机事件的运算

学霸养成笔记

微信公众号【顶尖考研】

2. 概率

提要：性质 五大公式

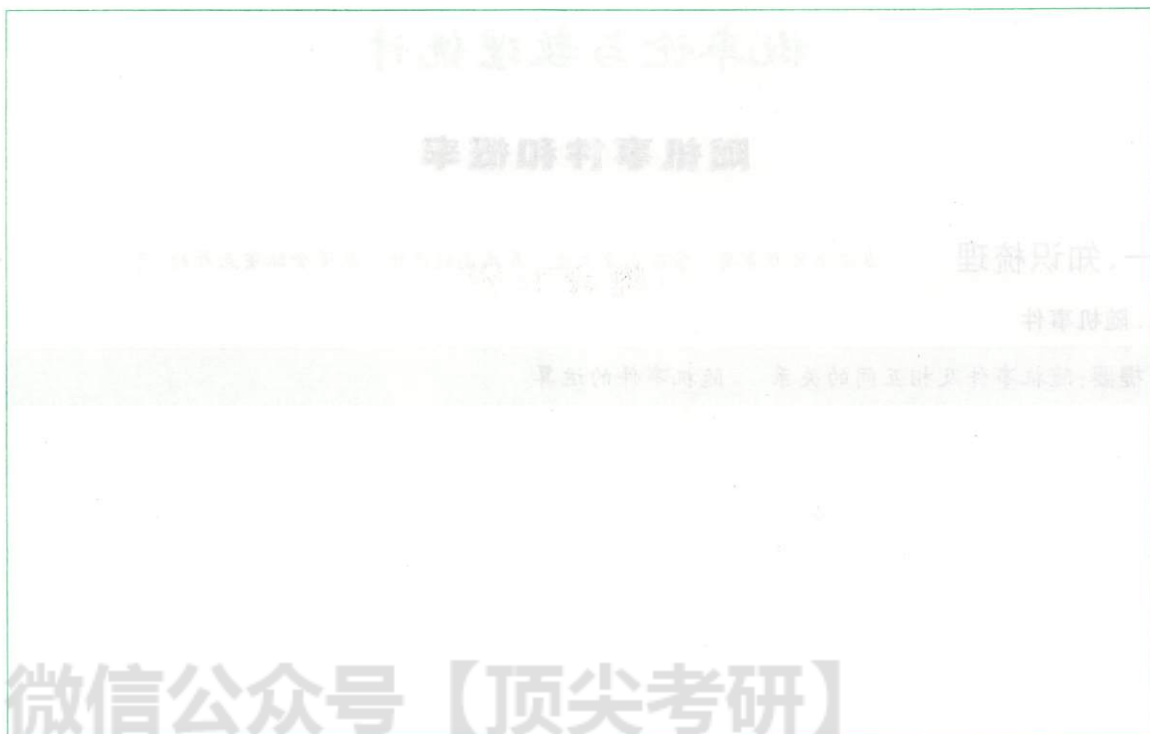
3. 古典概型、几何概型与伯努利概型

微信公众号：顶尖考研
(ID: djky66)



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸



三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心



随机变量及其概率分布

新编概率论讲义·二

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始！☺

1. 分布函数、密度函数

2. 离散型与连续型随机变量

提要：离散型随机变量以及常用分布 连续型随机变量以及常用分布

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

3. 随机变量函数的分布

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)

学霸养成笔记



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸 🧠

Blank area for notes under the section '要记住的结论'.

三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同臭错误的心 ✨

Blank area for notes under the section '经典例题、错题集'.



多维随机变量及其分布

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始！

1. 二维随机变量

提要：二维随机变量的分布 二维离散型随机变量的分布 二维连续型随机变量的分布
随机变量的独立性

2. 常用二维分布

提要：二维均匀分布 二维正态分布

3. 两个随机变量函数的分布

微信公众号：顶尖考研
(ID: djky66)



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸 ☺

微信公众号【顶尖考研】

三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心 ✨



随机变量的数字特征

张宇2019考研数学二

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始 ☺

1. 期望与方差

提要：期望 方差 常用分布的期望与方差

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

张宇2019考研数学二

2. 矩、协方差和相关系数

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)



二、要记住的结论

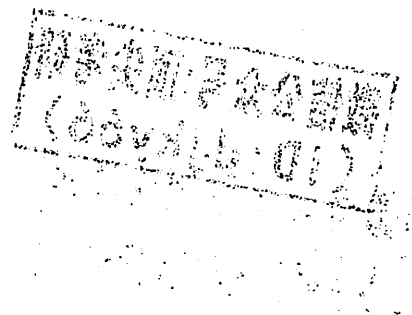
不用想，直接用，让你看起来真学霸



微信公众号【顶尖考研】

三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心



大数定律和中心极限定理

本章内容考试要求不高,记住书中内容即可!

一、要记住的结论

不用想,直接用,让你看起来真学霸 ☺

学霸养成笔记

微信公众号【顶尖考研】

(ID: djky66)

二、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼,也有不犯同类错误的心 ✨

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)



数理统计的基本概念

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始 ☺

1. 统计量与样本数字特征

2. 常用统计抽样分布

提要： χ^2 分布 t 分布 F 分布

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

3. 正态总体的抽样分布

提要：一个正态总体 两个正态总体

顶尖考研：公众号
(ID: djky66)



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸 🧐

Blank area for writing conclusions.

学霸养成笔记

三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心 ✨

Blank area for writing classic examples and error collection.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)



参数估计

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始 ☺

1. 点估计

2. 估计量的求法

提要：矩估计 最大似然估计

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

3. 区间估计

顶尖考研 公众号
(ID: djky66)



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸 🧠

学霸养成笔记

微信公众号【顶尖考研】

三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心 ✨

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)



假设检验

本章内容考试要求不高,记住书中内容即可!

一、要记住的结论

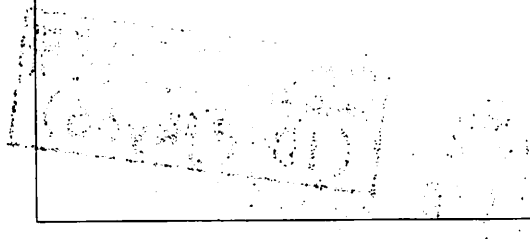
不用想,直接用,让你看起来真学霸 🧐

学霸养成笔记

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

二、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼,也有不犯同类错误的心 ✨



第一篇 高等数学

第一章 函数、极限、连续

1. 设 $y = y(x)$ 具有一阶连续导数, 且满足 $y'' + (x-1)y' + x^2y = e^x$ 及 $y(0) = 0, y'(0) = 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x) - x}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases} g(x) = \begin{cases} 2-ax, & x \leq -1, \\ x, & -1 < x < 0, \\ x-b, & x \geq 0. \end{cases}$ 若 $f(x) + g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续,

则数组 $(a, b) =$

(A) $(3, 1)$. (B) $(3, 2)$. (C) $(-3, 1)$. (D) $(-3, 2)$.

3. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{x - \sin x}$.

4. 已知常数 $a > 0, b \neq 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+ax} + \sqrt[3]{1+bx} - 2}{x^2} = -\frac{3}{2}$, 求 a 与 b 的值.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



5. 常数 $a \neq -1$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + ax^n - 1}{x^{2n} - (a+1)x^n - 1}$, 讨论 a 的取值, 确定 $f(x)$ 的间断点及其类型.

6. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{(n+k)(n+k+1)}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

7. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x} - 1}{e^{3x^2} - 1} = 2$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.



8. 设 $a_1 = \sqrt{12}, a_2 = \sqrt{12 + a_1}, \dots, a_n = \sqrt{12 + a_{n-1}}, n = 2, 3, \dots$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 并求出此极限值.

9. 设 $I_n(x) = \left(\frac{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} I_n(x)$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

题源探究
同步练习

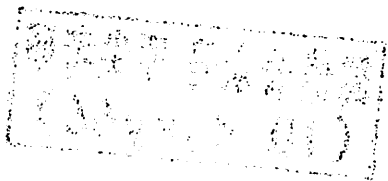
10. 设当 $0 < x \leq 1$ 时 $f(x) = x^{\sin x}$, 对于其他 x , $f(x)$ 满足 $f(x) + k = 2f(x+1)$. 求常数 k 使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



第二章 一元函数微分学

1. 设 $f''(a)$ 存在, $f'(a) \neq 0$. 则 $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{1}{f'(a)(x-a)} - \frac{1}{f(x) - f(a)} \right] = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \ln(1+x)}{x^2} = A (A \neq 0)$, 则 $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$,
 $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 设曲线 $y = y(x)$ 由方程 $x = \int_2^{y+2x} \sin^2\left(\frac{\pi}{4}t\right) dt$ 所确定, 则该曲线在 $x=0$ 对应的点处的曲率 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, $f'(a) > 0, f'(b) < 0$, 则下述命题不正确的是
 (A) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$ 使 $f(x_0) > f(a)$.
 (B) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$ 使 $f(x_0) > f(b)$.
 (C) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$ 使 $f'(x_0) = 0$.
 (D) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$ 使 $f(x_0) = \frac{1}{2}(f(a) + f(b))$.
5. 求曲线 $y = \frac{x^2 \arctan x}{x-1}$ 的所有渐近线的方程.
6. 设 $f(u)$ 连续, $f(0) = 0, f'(0) = 1, F(x) = \int_0^{x^2} tf(x^2 - t) dt$, 并设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^n}$ 存在且不为零, 求 n 及此极限值.



7. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 在区间 $(0, +\infty)$ 内存在二阶导数, 且 $f''(x) < 0, f(0) = 0$. 证明: 对任意 $x_1 > 0, x_2 > 0$, 有 $f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$.

8. 证明: 当 $0 < x < +\infty$ 时, $0 < \frac{\arctan x}{\ln(1+x)} < \frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

9. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a)f(b) > 0, f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$. 求证: 对于任意确定的常数 k , 必存在相应的 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) = kf(\xi)$.

10. 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上存在二阶导数, 且 $f(a) = f(b) = 0$. 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使

$$|f''(\xi)| \geq \frac{8}{(b-a)^2} \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



第三章 一元函数积分学

1. $\int \frac{\cos x - \sin x}{1 - 2\sin x \cos x} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. $\int_0^{2\pi} x \sin^8 x dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 设 $G(x) = \int_{x^2}^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^3}} dt$, 则 $\int_0^1 xG(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数(下式中若用到 $f'(x)$, 则设 $f'(x)$ 存在), 则以下 4 个结论中不正确的是

(A) $f'(x)$ 必以 T 为周期.(B) $\int_0^x f(t) dt$ 必以 T 为周期.(C) $\int_0^x [f(t) - f(-t)] dt$ 必以 T 为周期.(D) $\int_0^x f(t) dt - \frac{x}{T} \int_0^T f(t) dt$ 必以 T 为周期.

6. 下列反常积分收敛的是

(A) $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx.$

(B) $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx.$

(C) $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx.$

(D) $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \sqrt{\ln x}} dx.$

7. 设 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内存在一阶导数, 且 $f'(x) > 0$. 则 $\varphi(x) = \frac{\int_0^x f(t) dt}{x}$

(A) 在区间 $(-\infty, 0)$ 与 $(0, +\infty)$ 内分别都是严格单调增加的.(B) 在区间 $(-\infty, 0)$ 与 $(0, +\infty)$ 内分别都是严格单调减少的.(C) 在区间 $(-\infty, 0)$ 内是严格单调增加, 在区间 $(0, +\infty)$ 内是严格单调减少的.(D) 在区间 $(-\infty, 0)$ 内是严格单调减少, 在区间 $(0, +\infty)$ 内是严格单调增加的.

8. 经过 xOy 平面上的点 $P\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ 作参数方程 $\begin{cases} x = \cos^4 t, \\ y = \sin^4 t \end{cases}$ (t 为参数, t 从 0 到 $\frac{\pi}{2}$) 所确定的曲线

 C 的切线 l .(1) 求该切线 l 的直角坐标方程;(2) 求该切线 l 与曲线 C 以及两正向坐标轴在第一象限中所围成的图形的面积.

9. 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续且 $f(x) > 0$. 证明: 存在唯一的 $\xi \in (a, b)$ 使

$$\int_a^\xi f(x) dx = \int_\xi^b f(x) dx.$$

10. 设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上单调减少且为正值的连续函数, 证明

$$\frac{\int_0^1 x f^2(x) dx}{\int_0^1 x f(x) dx} \leq \frac{\int_0^1 f^2(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx}.$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

题源探究
同步练习

11. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续.

(1) 求证: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使 $\int_0^\xi f(t) dt = (1 - \xi)f(\xi)$.

(2) 若又设 $f(x) > 0$ 且 $f(x)$ 单调减少, 求证: 这种 ξ 是唯一的.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

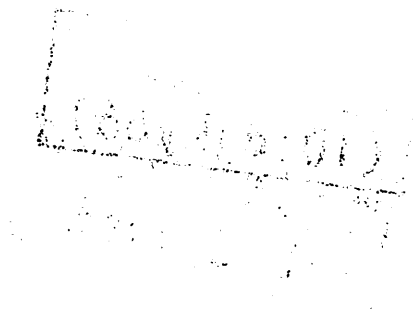


第四章 向量代数与空间解析几何

1. 过 z 轴且与平面 $2x + y - \sqrt{5}z - 7 = 0$ 夹角为 $\frac{\pi}{3}$ 的平面方程为_____.
2. 空间点 $P(1, 3, -4)$ 关于平面 $3x + y - 2z = 0$ 的对称点是
 (A) $(5, -1, 0)$. (B) $(5, 1, 0)$.
 (C) $(-5, -1, 0)$. (D) $(-5, 1, 0)$.
3. 设 $|a| = 3$, $|b| = 4$, 且 $a \perp b$, 计算 $|(a+b) \times (a-b)|$.

4. 已知直线 $L: \frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}$ 与平面 $\Pi: 3x - y + 2z - 5 = 0$ 的交点为 M_0 , 在平面 Π 上求一条过点 M_0 且和直线 L 垂直的直线方程.

5. 求过平面 $2x + y - z - 2 = 0$ 和 $3x - 2y - 2z + 1 = 0$ 的交线, 且与平面 $3x + 2y + 3z - 6 = 0$ 垂直的平面方程.



6. 求以曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ 2x^2 + 2y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$ 为准线, 母线平行于直线 $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{1}$ 的柱面方程.

7. 求下列曲线绕指定轴旋转产生旋转面方程:

(I) 曲线 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ 分别绕 x 轴和 y 轴旋转.

(II) 曲线 $\begin{cases} y = \sqrt{z} \\ x = 0 \end{cases}$ 分别绕 z 轴和 y 轴旋转.

8. 求直线 $L: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{3} = z+1$ 绕直线 $\begin{cases} x=2, \\ y=3 \end{cases}$ 旋转一周所产生旋转面方程.

9. 求曲线 $L: \begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \\ z = e^t \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所得旋转曲面的方程.

微信公众号【顶尖考研】

(ID: djky66)

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



第五章 多元函数微分学

1. 设 n 是曲面 $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$ 在点 $P(1, 1, 1)$ 处的指向外侧的法向量, 求函数 $u = \frac{\sqrt{6x^2 + 8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 n 的方向导数_____.

2. 设函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某邻域内有定义, 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - (x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1$, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处

(A) 不连续.

(B) 两个偏导数都不存在.

(C) 两个偏导数存在但不可微.

(D) 可微.

3. 证明 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|xy|}}{x^2 + y^2} \sin(x^2 + y^2), & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在 $(0, 0)$ 点连续、可导, 但不可微.

题源探究同步练习

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

4. 设 $z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$, 其中 f 具有连续二阶偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.



5. 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $F(x + y, y + z) = 1$ 所确定, 其中 F 具有连续二阶偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.
6. 设 $u = f(r), r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 其中 f 是二阶可微函数, 且 $f(1) = 1, f'(1) = 1, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 求 $f(r)$.
7. 直线 $l: \begin{cases} x + y + b = 0, \\ x + ay - z - 3 = 0 \end{cases}$ 在平面 Π 上, 而平面 Π 与曲面 $z = x^2 + y^2$ 相切于点 $(1, -2, 5)$, 求 a, b .
8. 求 $f(x, y) = xy(a - x - y)$ 的极值.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

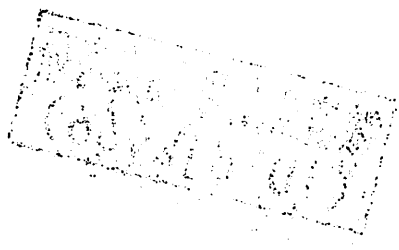


9. 设 $z = z(x, y)$ 是由 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 确定的函数, 求 $z = z(x, y)$ 的极值点和极值.

10. 求函数 $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 在条件 $x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 0$ 下的最大值和最小值.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

11. 求当 $x > 0, y > 0, z > 0$ 时, 函数 $f(x, y, z) = \ln x + 2\ln y + 3\ln z$ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 6r^2$ 上的最大值. 并证明: 对任何正实数 a, b, c , 不等式 $ab^2c^3 \leq 108 \left(\frac{a+b+c}{6} \right)^6$ 成立.



第六章 多元函数积分学

1. 设有数量场 $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) =$ _____.
2. 设 C 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 其周长 l , 则 $\oint_C (bx + ay + 1)^2 ds =$ _____.
3. 设 $0 < a < 1$, 区域 D 由 x 轴, y 轴, 直线 $x + y = a$ 及 $x + y = 1$ 所围成, 且
 $I = \iint_D \sin^2(x + y) d\sigma$, $J = \iint_D \ln^3(x + y) d\sigma$, $K = \iint_D (x + y) d\sigma$, 则
 (A) $I < K < J$. (B) $K < J < I$. (C) $I < J < K$. (D) $J < I < K$.
4. 交换下列累次积分的次序:
- (1) $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x, y) dy$;
- (2) $\int_0^{\frac{1}{4}} dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_y^{\frac{1}{2}} f(x, y) dx$;
- (3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2a \sin \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$.
5. 计算 $\iint_{\Sigma} |xyz| dS$, 其中 Σ 是 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $z = 1$ 所割下的有限部分.



6. 计算 $I = \int_L (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy$, 其中 L 为上半圆周 $y = \sqrt{ax - x^2} (a > 0)$ 上从点 $A(a, 0)$ 到点 $B(0, 0)$ 的弧段.

7. 计算 $I = \oint_L \frac{y dx - (x-1) dy}{(x-1)^2 + y^2}$, 其中:

- (1) L 为圆周 $x^2 + y^2 - 2y = 0$ 沿逆时针方向.
 (2) L 为椭圆 $4x^2 + y^2 - 8x = 0$ 沿逆时针方向.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

8. 已知线积分 $\int_C [\sin x - f(x)] \frac{y}{x} dx + f(x) dy$ 在右半平面 $x > 0$ 上与路径无关, 其中 $f(x)$ 有连续导数, $f(\pi) = 1$.

- (1) 求 $f(x)$. (2) 计算 $\int_{(1,0)}^{(\pi,\pi)} [\sin x - f(x)] \frac{y}{x} dx + f(x) dy$.

9. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有一阶连续导数, L 是上半平面 ($y > 0$) 内的有向分段光滑曲线, 其起点为 (a, b) , 终点为 (c, d) , 记 $I = \int_L \frac{1}{y} [1 + y^2 f(xy)] dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] dy$.

(1) 证明曲线积分 I 与路径 L 无关.

(2) 当 $ab = cd$ 时, 求 I 的值.

10. 计算 $I = \oint_L (y^2 - z^2) dx + (2z^2 - x^2) dy + (3x^2 - y^2) dz$, 其中 L 是平面 $x + y + z = 2$ 与柱面 $|x| + |y| = 1$ 的交线, 从 z 轴正向看去, L 为逆时针方向.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

题源探究同步练习

11. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} (x^3 + az^2) dydz + (y^3 + ax^2) dzdx + (z^3 + ay^2) dxdy$, 其中 Σ 为上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



12. 计算 $I = \iint_{\Sigma} 2(1-x^2)dydz + 8xydzdx - 4zx dx dy$, 其中 Σ 是曲线 $\begin{cases} x = e^y, \\ z = 0 \end{cases}$ ($0 \leq y \leq a$) 绕 x 轴旋转而成的旋转面, 其法线向量与 x 轴正向夹角大于 $\frac{\pi}{2}$.

13. 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中:

(1) Σ 为 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧.

(2) Σ 为上半椭球面 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$ ($z \geq 0$) 的上侧.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



第七章 无穷级数

1. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$ 在 $x=0$ 处条件收敛, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间为_____.

2. 设有以下命题

- ① 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; ② 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1000}$ 收敛;
 ③ 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散; ④ 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛.

则以上命题中正确的是

- (A) ①②. (B) ②③. (C) ③④. (D) ①④.

3. 设有命题

- ① 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛;
 ② 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数, 且 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 (n=1, 2, \dots)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
 ③ 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l \neq 0$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
 ④ 若 $a_n \leq b_n \leq c_n (n=1, 2, \dots)$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 均收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

则上述命题中正确的个数是

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

4. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x=-2$ 处条件收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2(x-a)^n$ 在 $x=\ln \frac{1}{2}$ 处

- (A) 绝对收敛. (B) 条件收敛.
 (C) 必发散. (D) 敛散性由 a 确定.

5. 求下列幂级数的收敛域:

- (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n3^n}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{n4^n}$; (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + (-2)^n} \frac{x^n}{n}$.



6. 将下列函数展开为 x 的幂级数:

$$(1) f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2};$$

$$(2) f(x) = \arctan \frac{2x}{1-x^2};$$

$$(3) f(x) = (x - \tan x) \cos x;$$

$$(4) f(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right);$$

$$(5) f(x) = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}.$$

7. 求下列级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{3}{4} \right)^n;$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}.$$

8. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{x} \arctan x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ 试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和及 $f^{(n)}(0)$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



9. 设级数 $\frac{x^4}{2 \cdot 4} + \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{x^8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \cdots (-\infty < x < +\infty)$ 的和函数为 $S(x)$, 求:

(1) $S(x)$ 所满足的一阶微分方程.

(2) $S(x)$ 的表达式.

10. 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{1}{12}(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2), 0 \leq x \leq \pi.$

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

题源探究同步练习

11. 设数列 $\{u_n\}$ 的 $u_1 = 3, u_2 = 5$, 当 $n \geq 3$ 时, $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$ 收敛.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



第八章 常微分方程

1. $xy^2 dx + x^2 y dy + \cos x dx = 0$ 的通解为 _____.
2. 微分方程 $y'' + 3y' + 2y = 3x - 2e^{-x}$ 有特解形式(其中 a, b, c, d 均为常数)
- (A) $ax + be^{-x}$. (B) $(ax + b) + ce^{-x}$.
- (C) $ax + bxe^{-x}$. (D) $(ax + b) + (cx + d)e^{-x}$.
3. 求 $yy'' = 2(y'^2 - y')$, $y(0) = 1, y'(0) = 2$ 的特解.

4. 求 $y'' + 2y' + y = xe^x$ 的通解.

5. 设 $f(x)$ 为连续函数, 且 $f(x) = e^x + \int_0^x t f(x-t) dt$, 求 $f(x)$.



6. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, $f(1) = 0, f'(1) = 0$. 并设 $x > 0$ 时

$$(3x^3 - 2f(x))ydx - (x^2 f'(x) + \sin y)dy = 0$$

为全微分方程, 求 $f(x)$ 并求上述全微分方程的通解.

7. 命 $t = \tan x$, 将方程 $\cos^4 x \frac{d^2 y}{dx^2} + 2\cos^2 x(1 - \sin x \cos x) \frac{dy}{dx} + y = e^{-\tan x}$ 变换为 y 关于 t 的微分方程, 并求原方程的通解.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

题源探究同步练习

8. 设 $z = f(r) (r > 0)$ 具有二阶连续导数, 又设 $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} - z = x^2 + y^2.$$

求 $z = f(r)$ 的表达式.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



9. 设曲线 $y = y(x)$, $x \in [0, t]$, $y(x) \geq 0$. 若 $y = y(x)$ 在 $[0, t]$ 上的曲边梯形绕 x 轴旋转所成的旋转体的形心坐标 $(\bar{x}, 0)$, $\bar{x} = \frac{4}{5}t$, 求 $y = y(x)$.

10. 设 $y = y(x)$ 当 $x \geq 0$ 时具有连续的一阶导数, 且恒有 $y(x) \geq 0$, $y(0) = 1$. 已知曲线 $y = y(x)$ 在区间 $[0, x]$ 上的曲边梯形面积的值等于 $[0, x]$ 上曲线 $y = y(x)$ 上的弧长, 求曲线方程 $y(x)$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

11. 一匀质链条挂在一个无摩擦的钉子上, 运动开始时, 链条的一边垂下 8 米, 另一边垂下 10 米, 试问整条链条滑过钉子要多少时间?



第二篇 线性代数

第一章 行列式

题源探究同步练习

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 已知 A 是 3 阶矩阵, B 是 4 阶矩阵, 若 $|A| = 3$, $|B| = -36$, 则 $|-A^T| |B^{-1}| = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, E 为 2 阶单位矩阵, 矩阵 B 满足 $BA = B + 2E$, B^* 是 B 的伴随矩阵, 则 $|B^*| = \underline{\hspace{2cm}}.$

6. 设 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = m$, 则 $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 3a_1 & 3b_1 & 3c_1 \\ a_3 - 2a_1 & b_3 - 2b_1 & c_3 - 2c_1 \end{vmatrix} =$
 (A) $-2m$. (B) $-3m$. (C) m . (D) $6m$.

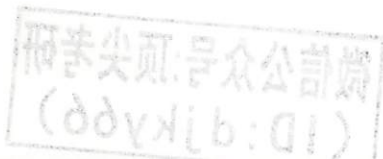
7. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 都是 4 维列向量, 且 4 阶行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1| = m$, $|\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3| = n$, 则 4 阶行列式 $|\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1 + \beta_2| =$
 (A) $m + n$. (B) $-(m + n)$. (C) $m - n$. (D) $n - m$.

8. 设 $|A_{n \times n}| = a$, $|B_{m \times m}| = b$. 则 $\begin{vmatrix} O & 3B \\ -A & O \end{vmatrix} =$
 (A) $-3ab$. (B) $(-1)^n 3^m ab$. (C) $(-1)^{n(m+1)} 3^m ab$. (D) $(-1)^{m \times n} 3^m ab$.



9. 设 A 为 n 阶方阵, 则 $|A| = 0$ 的必要条件是
- (A) A 中必有两行(列) 的元素对应成比例.
 (B) A 中任意一行(列) 向量是其余各行(列) 向量的线性组合.
 (C) A 中必有一行(列) 向量是其余各行(列) 向量的线性组合.
 (D) A 中至少有一行(列) 的元素全为 0.
10. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是 4 维列向量. 证明 $|\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1| = 0$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



第二章 矩 阵

1. 设 n 阶矩阵 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, n 维向量 $x = \left(\frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2}\right)^T$, $y = \left(\frac{1}{2}, 0, \dots, 0, -\frac{1}{2}\right)^T$, 则 $x^T Ax + x^T Ay - y^T Ax - y^T Ay =$ _____.

2. 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, 其中 $a_i \neq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 则 $A^{-1} =$ _____.

3. 设 A 是 n 阶矩阵, 满足 $A^2 + 3A - 5E = O$, 则 $(A + 5E)^{-1} =$ _____.

4. 已知 $AX = B$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 10 & -2 \\ 7 & 9 & 3 \end{bmatrix}$, 则 $X =$ _____.

5. (1) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$, 若秩 $r(A) = 3$, 则 $a =$ _____.

- (2) 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & a & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $r(AB) = 2$, 则 $a =$ _____.

6. 已知 $A = PBQ$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $B =$ _____.

7. 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, 则 $A^3 =$ _____.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

8. 设 A 是 n 阶矩阵, 下列命题中错误的是

(A) $AA^T = A^T A$.

(B) $A^* A = AA^*$.

(C) $(A^2)^n = (A^n)^2$.

(D) $(E + A)(E - A) = (E - A)(E + A)$.

9. 设 A 是 n 阶对称矩阵, B 是 n 阶反对称矩阵, 则下列矩阵为反对称阵的是

(A) $AB - BA$.

(B) $(AB)^2$.

(C) $AB + BA$.

(D) BAB .



10. 下列命题中, 正确的是

- (A) 如果 A, B 都是 n 阶可逆矩阵, 则 $A+B$ 必可逆.
 (B) 如果 A, B 都是 n 阶可逆矩阵, 则 $A^* B^T$ 必可逆.
 (C) 如果 A, B 都是 n 阶不可逆矩阵, 则 $A-B$ 必不可逆.
 (D) 如果 $AB = E$, 则 A 可逆, 且 $A^{-1} = B$.

11. 设 $A = E - 2\alpha^T \alpha$, 其中 $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$, 且 $\alpha \alpha^T = 1$, 则 A 不能满足的结论是

- (A) $A^T = A$. (B) $A^T = A^{-1}$. (C) $AA^T = E$. (D) $A^2 = A$.

12. 设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a_{12} + a_{13} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} + a_{23} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} + a_{33} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$, $P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 则

$B =$

- (A) $P_1 A P_2$. (B) $A P_2 P_1$. (C) $A P_1 P_2$. (D) $P_2 A P_1$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

顶尖考研公众号
(ID: djky66)



第三章 向量

- 若 $\beta = (1, 3, 0)^T$ 不能由 $\alpha_1 = (1, 2, 1)^T, \alpha_2 = (2, 3, a)^T, \alpha_3 = (1, a+2, -2)^T$ 线性表示, 则 $a =$ _____.
- 任意 3 维向量都可由 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (1, -2, 3)^T, \alpha_3 = (a, 1, 2)^T$ 线性表出, 则 a _____.
- 设向量组 $\alpha_1 = (2, 1, 1, 1), \alpha_2 = (2, 1, a, a), \alpha_3 = (3, 2, 1, a), \alpha_4 = (4, 3, 2, 1)$ 线性无关, 则 a 应满足条件 _____.
- 向量组 $\alpha_1 = (1, -1, 3, 0)^T, \alpha_2 = (-2, 1, a, 1)^T, \alpha_3 = (1, 1, -5, -2)^T$ 的秩为 2, 则 $a =$ _____.
- 设 $\mathbb{R}^n$ 中的一组基为 $\alpha_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, \alpha_2 = (1, 1, 0, \dots, 0)^T, \dots, \alpha_n = (1, 1, \dots, 1)^T$, 则向量 $\beta = (1, 2, 3, \dots, n)^T$ 在该基下的坐标为 _____.
- 设 $\mathbb{R}^3$ 的两组基为 $\alpha_1 = (1, 2, 1)^T, \alpha_2 = (2, -1, 2)^T, \alpha_3 = (5, 1, 6)^T, \beta_1 = (0, -1, -1)^T, \beta_2 = (8, -2, 10)^T, \beta_3 = (-4, -6, -7)^T$, 则由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵是 _____.
- 下列向量组中 a, b, c, d, e, f 均是常数, 则线性无关的向量组是
 (A) $\alpha_1 = (1, -1, 0, 2)^T, \alpha_2 = (0, 1, -1, 1)^T, \alpha_3 = (0, 0, 0, 0)^T$.
 (B) $\beta_1 = (a, b, c)^T, \beta_2 = (b, c, d)^T, \beta_3 = (c, d, a)^T, \beta_4 = (d, a, b)^T$.
 (C) $\xi_1 = (a, 1, b, 0, 0)^T, \xi_2 = (c, 0, d, 1, 0)^T, \xi_3 = (e, 0, f, 0, 1)^T$.
 (D) $\eta_1 = (1, 2, 1, 5)^T, \eta_2 = (1, 2, 3, 6)^T, \eta_3 = (1, 2, 5, 7)^T, \eta_4 = (0, 0, 0, 1)^T$.
- 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组中线性无关的是
 (A) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$.
 (B) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$.
 (C) $\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 3\alpha_3 + \alpha_1$.
 (D) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 - 3\alpha_2 + 22\alpha_3, 3\alpha_1 + 5\alpha_2 - 5\alpha_3$.
- 设向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, II: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \dots, \alpha_{s+r}$, 则必有
 (A) I 相关 $\Rightarrow$ II 相关. (B) I 无关 $\Rightarrow$ II 无关.
 (C) II 相关 $\Rightarrow$ I 相关. (D) II 相关 $\Rightarrow$ I 无关.
- 设向量组 I: $\alpha_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1})^T, \alpha_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2})^T, \dots, \alpha_s = (a_{1s}, a_{2s}, \dots, a_{ns})^T$, II: $\beta_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{n+r,1})^T, \beta_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}, \dots, a_{n+r,2})^T, \dots, \beta_r = (a_{1s}, a_{2s}, \dots, a_{ns}, \dots, a_{n+r,s})^T$, 则必有
 (A) I 相关 $\Rightarrow$ II 相关. (B) I 无关 $\Rightarrow$ II 无关.
 (C) II 无关 $\Rightarrow$ I 无关. (D) II 无关 $\Rightarrow$ I 相关.
- 已知向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 则与 I 等价的向量组是
 (A) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$. (B) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$.
 (C) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$. (D) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



12. n 维向量组 $(I): \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, 若秩 $r(I) = r$. 则
 (A) (I) 中任意 $r-1$ 个向量都线性无关. (B) (I) 中任意 $r+1$ 个向量都线性相关.
 (C) (I) 中任意 r 个向量都线性无关. (D) (I) 中向量个数 s 必大于 r .
13. 设 $\alpha_1 = (1, 2, 0), \alpha_2 = (1, a+2, -3a), \alpha_3 = (-1, -a-2, 3a), \beta = (1, 3, -3)$, 问 a 为何值时, β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出? a 为何值时, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出? 并求其表出式.

14. 设向量组 $\alpha_1 = (1, -1, 2, 4), \alpha_2 = (0, 3, 1, 2), \alpha_3 = (3, 0, 7, 14), \alpha_4 = (1, -1, 2, 0), \alpha_5 = (2, 1, 5, 6)$. 求向量组的秩、极大线性无关组, 并将其余向量由极大线性无关组线性表出.

15. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 证明向量组

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n, \\ \beta_2 &= \alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n, \\ &\vdots \\ \beta_n &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}\end{aligned}$$

也线性无关.

16. 设 A 是 n 阶方阵, 列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 证明: 列向量组 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_n$ 线性无关的充要条件是 A 为可逆矩阵.



第四章 线性方程组

1. 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ (a+2)x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3, \\ -2x_1 + ax_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

无解, 则参数 a 应满足_____.

2. 对于 n 元方程组, 则下列说法正确的是

- (A) 若 $Ax = 0$ 只有零解, 则 $Ax = b$ 有唯一解.
 (B) $Ax = 0$ 有非零解的充要条件是 $|A| = 0$.
 (C) $Ax = b$ 有唯一解的充要条件是 $r(A) = n$.
 (D) 若 $Ax = b$ 有两个不同的解, 则 $Ax = 0$ 有无穷多解.

3. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 则线性方程组 $(AB)x = 0$

- (A) 当 $n > m$ 时仅有零解. (B) 当 $n > m$ 时必有非零解.
 (C) 当 $m > n$ 时仅有零解. (D) 当 $m > n$ 时必有非零解.

4. 设 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是 $Ax = 0$ 的基础解系, 则该方程组的基础解系还可表示成

- (A) ξ_1, ξ_2, ξ_3 的一个等价向量组. (B) ξ_1, ξ_2, ξ_3 的一个等秩向量组.
 (C) $\xi_1 + \xi_2, \xi_2 + \xi_3, \xi_3 + \xi_1$. (D) $\xi_1 - \xi_2, \xi_2 - \xi_3, \xi_3 - \xi_1$.

5. 设非齐次线性方程组 $A_{3 \times 4}x = b$ 有通解

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \eta = k_1(1, 2, 0, -2)^T + k_2(4, -1, -1, -1)^T + (1, 0, -1, 1)^T,$$

则下列向量中是 $Ax = b$ 的解的是

- (A) $\alpha_1 = (1, 2, 0, -2)^T$. (B) $\alpha_2 = (6, 1, -2, -2)^T$.
 (C) $\alpha_3 = (3, 1, -2, 4)^T$. (D) $\alpha_4 = (5, 1, -1, -3)^T$.

6. 设线性方程组

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 & + x_2 & + x_3 = 1, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 & & + x_3 = \lambda, \\ x_1 & + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^2, \end{cases}$$

问 λ 为何值时, 方程组无解? λ 为何值时, 方程组有解? 有解时, 求方程组的解.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



7. 已知 3 阶矩阵 A 的第 1 行是 (a, b, c) , a, b, c 不全为零, 矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & k \end{bmatrix}$ (k 为常数), 且 $AB = O$, 求线性方程组 $Ax = 0$ 的通解.

8. 求线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 11, \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -6, \\ -x_1 - 9x_2 + \quad + 3x_4 = 15. \end{cases}$$

满足条件 $x_1 = x_2$ 的全部解.

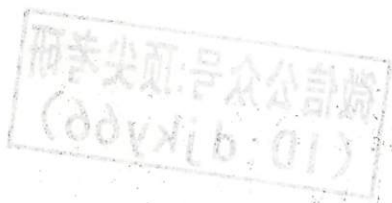
微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

9. 已知 A 是 $m \times n$ 矩阵, $Ax = b$ 有唯一解, 证明 $A^T A$ 是可逆阵, 并求 $Ax = b$ 的唯一解.

10. 设 A, B 均是 3×4 矩阵, $Ax = 0$ 有基础解系 ξ_1, ξ_2, ξ_3 , $Bx = 0$ 有基础解系 η_1, η_2 .

(1) 证明 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$ 有非零公共解.

(2) 若 $Ax = 0$ 的基础解系为 $\xi_1 = (1, -1, 2, 4)^T, \xi_2 = (0, 3, 1, 2)^T, \xi_3 = (1, -2, 2, 0)^T$. $Bx = 0$ 的基础解系为 $\eta_1 = (3, 0, 7, 14)^T, \eta_2 = (2, 1, 5, 10)^T$, 求 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$ 的非零公共解.



第五章 特征值、特征向量、相似矩阵

1. 已知 $\xi = (1, -1, -1)^T$ 是矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & a \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ 的特征向量, 则参数 $a =$ _____.
2. 设 A 是 n 阶实对称阵, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 A 的 n 个互不相同的特征值, ξ_1 是 A 的对应于 λ_1 的 1 个单位特征向量, 则矩阵 $B = A - \lambda_1 \xi_1 \xi_1^T$ 的特征值为 _____.
3. 已知 A 是三阶矩阵, $r(A) = 1$, 则 $\lambda = 0$
 (A) 必是 A 的二重特征值. (B) 至少是 A 的二重特征值.
 (C) 至多是 A 的二重特征值. (D) 一重、二重、三重特征值都可能.
4. 下列矩阵中能相似于对角阵的矩阵是
 (A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.
5. A 是三阶矩阵, P 是三阶可逆矩阵, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$, 且 $A\alpha_1 = \alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2, A\alpha_3 = 0$, 其中 α_1, α_2 线性无关, 则 P 是
 (A) $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3]$. (B) $[\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1]$.
 (C) $[\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_2, 3\alpha_3]$. (D) $[\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1]$.
6. 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 问 A 是否相似于 B , 为什么?

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



7. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, 求正交阵 Q , 使得 $Q^{-1}AQ = Q^T A Q = \Lambda$, 其中 Λ 是对角阵.

8. 设 A 是三阶矩阵, 有特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3$, 对应的特征向量分别是 $\xi_1 = (1, -2, 1)^T$, $\xi_2 = (1, 0, -1)^T$, $\xi_3 = (1, 1, 1)^T$, $\beta = (3, -1, 1)^T$, 求 $A^{100}\beta$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

9. 设 A 是三阶实对称阵, 有特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$, $\alpha_1 = (1, -1, 1)^T$ 是 A 的属于 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量, $B = A^5 - 4A^3 + E$, 其中 E 是单位阵.
- (1) 验证 α_1 也是 B 的特征向量, 并求 B 的特征值和特征向量;
 - (2) 求 B .



第六章 二次型

1. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$, 则二次型的对应矩阵是 _____.
2. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3)(a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3)$, 则二次型的对应矩阵是 _____.
3. A, B 都是 n 阶实对称阵, 则使 A, B 合同的充要条件是
 (A) A, B 有相同的秩. (B) A, B 都合同于对角阵.
 (C) A, B 的全部特征值相同. (D) A, B 有相同的正负惯性指数.
4. 下列矩阵中与 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 合同的矩阵是
 (A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.
 (C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.
5. 实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的秩为 r , 符号差为 s , 且 f 和 $-f$ 合同, 则必有
 (A) r 是偶数, $s = 1$. (B) r 是奇数, $s = 1$.
 (C) r 是偶数, $s = 0$. (D) r 是奇数, $s = 0$.
6. 下列矩阵中正定矩阵是
 (A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.
 (C) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.
7. 已知 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$, 用配方法化二次型为标准形, 并求所作的可逆线性变换.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



8. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3$,

- (1) 写出二次型的矩阵表达式;
- (2) 用正交变换化二次型为标准形, 并写出所作的正交变换.

9. 求 a 的值, 使二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

为正定二次型.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

10. 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}, \text{ 其中, } x_i \neq x_j \begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots, n \\ j = 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix},$$

讨论 $B = A^T A$ 的正定性.

顶尖考研公众号
(ID: djky66)



第三篇 概率论与数理统计

第一章 随机事件和概率

1. 随机事件 A, B 满足 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, 且 $P(A \cup B) = 1$, 则 $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 甲在 8 点到 9 点, 乙在 8 点半到 9 点半的各时刻等可能地、相互独立地去同一办公室, 已知每人只在办公室停留半小时, 则他们相遇的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
3. 袋中有 4 个红球, 1 个白球, 现从中不放回地先后抽取 4 次, 每次一个球, 则前 3 次中取到白球的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
4. 已知事件 A 与 B 同时发生时, 事件 C 必发生, 则有
 (A) $P(C) \leq P(A) + P(B) - 1$. (B) $P(C) \geq P(A) + P(B) - 1$.
 (C) $P(C) = P(AB)$. (D) $P(C) = P(A \cup B)$.
5. 已知 $0 < P(B) < 1$, 且 $P(A_1 \cup A_2 | B) = P(A_1 | B) + P(A_2 | B)$, 则有
 (A) $A_1 A_2 B = \emptyset$.
 (B) $A_1 A_2 = \emptyset$.
 (C) $P(A_1 \cup A_2 | \bar{B}) = P(A_1 | \bar{B}) + P(A_2 | \bar{B})$.
 (D) $P((A_1 \cup A_2)B) = P(A_1 B) + P(A_2 B)$.
6. 共有 10 个座位的小会议室内随机地坐上 6 名与会者, 则指定的 4 个座位被坐满的概率为
 (A) $\frac{1}{10}$. (B) $\frac{1}{12}$. (C) $\frac{1}{14}$. (D) $\frac{1}{15}$.
7. 甲袋中有 2 个白球 3 个黑球, 乙袋中全是白球. 今从甲袋中任取 2 球, 从乙袋中任取 1 球混合后, 从中任取一球为白球的概率为
 (A) $\frac{1}{5}$. (B) $\frac{2}{5}$.
 (C) $\frac{3}{5}$. (D) $\frac{4}{5}$.
8. 掷一枚硬币 5 次, 则出现正面向上次数多于反面向上次数的概率为
 (A) $\frac{5}{16}$. (B) $\frac{11}{32}$.
 (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{3}{8}$.



9. 10 件产品中含有 4 件次品, 今从中任取两件, 已知其中有一件是次品, 求另一件也是次品的概率.

10. 在盛有十只螺母的盒中含有 0 只, 1 只, 2 只, $\dots$, 10 只铜螺母是等可能的. 在盒中放入一个铜螺母, 然后从盒中随机取出一个螺母, 求这个螺母为铜螺母的概率.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



第二章 随机变量及其概率分布

1. 若随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 之外的值恒为零, 在 $[0, 1]$ 上 $f(x)$ 与 x^2 成正比, 则 X 的分布函数 $F(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 在一次试验中, 事件 A 发生的概率为 p , 则在 n 次独立试验中 A 至多发生一次的概率是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
3. 设随机变量 $X \sim U[0, 1]$, 则 $Y = X + 1$ 服从分布 $\underline{\hspace{2cm}}$.
4. 作为随机变量的分布函数可以将 $F(x)$ 设成

$$\begin{aligned} \text{(A)} F(x) &= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 4x^{4x}, & x \geq 0. \end{cases} & \text{(B)} F(x) &= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases} \\ \text{(C)} F(x) &= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1-x}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases} & \text{(D)} F(x) &= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sin x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ 1, & x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

5. 设随机变量 X_1 和 X_2 的分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$, 为使 $F(x) = aF_1(x) - bF_2(x)$ 是某一随机变量的分布函数, 则常数 a, b 必满足条件
 (A) $a + b = 1$. (B) $a > 0, b > 0$.
 (C) $a - b = 1$. (D) $a > 0, b < 0$.

6. 设随机变量 X 服从 $B(2, p)$ 分布, 随机变量 Y 服从 $B(3, p)$ 分布. 若 $P\{X \geq 1\} = \frac{5}{9}$, 则 $P\{Y \geq 1\} =$

$$\begin{aligned} \text{(A)} \frac{8}{27}. & \quad \text{(B)} \frac{4}{9}. \\ \text{(C)} \frac{19}{27}. & \quad \text{(D)} \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

7. 设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X = i\} = \frac{a}{i(i+1)}, i = 1, 2, \dots$, 则 $P\{X < 5\} =$

$$\begin{aligned} \text{(A)} \frac{2}{5}. & \quad \text{(B)} \frac{5}{12}. \\ \text{(C)} \frac{4}{5}. & \quad \text{(D)} \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

8. 设连续型随机变量 X 的概率密度函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-\frac{x}{3}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$ 则 $P\{|X| < 1\} =$

$$\begin{aligned} \text{(A)} e^{-\frac{1}{3}}. & \quad \text{(B)} 1 - e^{-\frac{1}{3}}. & \text{(C)} e^{\frac{1}{3}} - e^{-\frac{1}{3}}. & \text{(D)} e^{\frac{1}{3}} - 1. \end{aligned}$$



9. 一袋中有 5 只乒乓球, 编号为 1, 2, 3, 4, 5, 在其中同时取三只, 以 X 表示取出的三只球中的最大号码, 写出随机变量 X 的分布律.

10. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{k}{1+x^2}, -\infty < x < +\infty$,

求: (1) 常数 k ; (2) 随机变量 $Y = 1 - \sqrt[3]{X}$ 的概率密度 $f_Y(y)$.



第三章 多维随机变量及其分布

1. 设相互独立的随机变量 X 与 Y 具有同一分布律, 且 X 的分布律为

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

则随机变量 $Z = \max(X, Y)$ 的分布律为_____.

2. 设二维随机变量 (X, Y) 在 D 上服从均匀分布, D 是 xOy 平面上由曲线 $y = x$ 与 $y = x^2$ 所围的区域, 则关于 X 的边缘分布 $f_X(x) =$ _____.

3. 设随机变量 X_i 的概率分布为
- | | | | |
|-------|---------------|---------------|---------------|
| X_i | 0 | 1 | 2 |
| P | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |
- , $i = 1, 2$

且满足 $P\{X_1 X_2 = 0\} = 1$, 则 $P\{X_1 = X_2\}$ 等于

- (A) 0. (B) $\frac{1}{4}$.
(C) $\frac{1}{2}$. (D) 1.

4. 设 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 为二维随机变量 (X_1, X_2) 的边缘分布函数, 且 X_1, X_2 相互独立, 则

- (A) $2F_1(x) - F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.
(B) $F_1(x) + F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.
(C) $F_1(x) - \frac{1}{2}F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.
(D) $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

5. 设两个随机变量 X 与 Y 相互独立且同分布: $P\{X = 1\} = P\{Y = -1\} = \frac{1}{2}$, 则下列成立的是

- (A) $P\{X = Y\} = \frac{1}{2}$. (B) $P\{X = Y\} = 1$.
(C) $P\{X + Y = 0\} = \frac{1}{4}$. (D) $P\{XY = 1\} = \frac{1}{4}$.

6. 设随机变量 X 服从分布 $E(1)$, 则 $Y = \max(1, X)$ 的分布函数 $F_Y(y)$ 是

- (A) $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1, \\ e^{-y}, & y \geq 1. \end{cases}$ (B) $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 1, \\ e^{-y}, & y > 1. \end{cases}$
(C) $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1, \\ 1 - e^{-y}, & y \geq 1. \end{cases}$ (D) $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 1, \\ 1 - e^{-y}, & y > 1. \end{cases}$



7. 已知随机变量 X 的概率密度 $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$, $-\infty < x < +\infty$.

又知条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-y)^2}$, $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$, 求 $f(x, y)$.

8. 已知二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$$

求 $f_{Y|X}(y|x)$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



9. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, $X \sim B(n, p)$, $Y \sim B(m, p)$, 试求 $X+Y$ 的分布.



10. 设二维连续型随机变量的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^2} e^{-\frac{x+y}{\lambda}}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 $\lambda > 0$ 为常数, 求 (1) $P\{X \leq \lambda, Y \leq 2\lambda\}$; (2) $P\{X + Y \leq \lambda\}$.

11. 已知二维离散型随机变量 (X, Y) 的概率分布为

$\begin{array}{c} Y \\ \hline X \end{array}$	0	1	2
0	0.06	0.15	α
1	β	0.35	0.21

求常数 α 和 β 的值, 使得随机变量 X 和 Y 相互独立.

12. 假设随机变量 X_1, X_2, X_3, X_4 相互独立, 且 $P\{X_i = 0\} = 0.6, P\{X_i = 1\} = 0.4 (i = 1, 2, 3,$

4), 求行列式 $X = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$ 的概率分布.

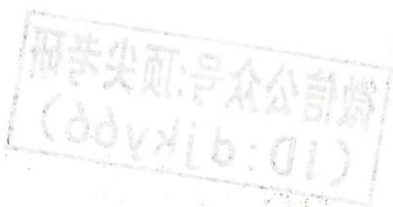
微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



13. 设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{0 < x < 1, |y| < x\}$ 内服从均匀分布, (1) 求边缘密度函数; (2) 判断 X, Y 的独立性.

14. 设 G 是由 x 轴, y 轴及直线 $2x + y - 2 = 0$ 所围成的三角形区域, 二维随机变量 (X, Y) 在 G 内服从均匀分布, 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x | y)$ 及 $f_{Y|X}(y | x)$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



第四章 随机变量的数字特征

1. 已知随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x) = Ae^{-x^2+2x-1}$, $-\infty < x < +\infty$, 其中 A 为常数, 则 $E(X^2) =$ _____.
2. 设随机变量 $X \sim E(1)$, 则 $E(X - 3e^{-2X}) =$ _____.
3. 对随机变量 X 和 Y , 若 $E(XY) = E(X)E(Y)$, 则
 (A) $D(XY) = D(X)D(Y)$. (B) $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$.
 (C) X 和 Y 相互独立. (D) X 和 Y 不相互独立.
4. 设随机变量 X 和 Y 都服从正态分布且不相干, 则 X 和 Y
 (A) 一定独立. (B) 联合分布必正态.
 (C) 未必独立. (D) 联合分布必不是正态.
5. 某种电子元件的寿命 $X \sim E(\lambda)$, 现有 n 个该种元件相互独立地工作着, 已知其中至少有一个工作寿命超过平均寿命的概率为 $3e^{-1} - 3e^{-2} + e^{-3}$, 则 n 为
 (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.
6. 在 n 次独立重复试验中, X 和 Y 分别表示成功和失败的次数, 则 $X+Y$ 和 $X-Y$ 的相关系数必为
 (A) -1 . (B) 0 . (C) $\frac{1}{2}$. (D) 1 .
7. 将 n 只球 ($1 \sim n$ 号) 随机地放进 n 只盒子 ($1 \sim n$ 号) 中去, 一只盒子装一只球, 将一只球装入与球同号码的盒子中称为一个配对, 记 X 为配对的个数, 求 $E(X)$.
8. 游客乘电梯从底层到电视塔观光, 电梯于每个整点的第 5 分钟、25 分钟和 55 分钟从底层起行, 假设一游客在早上八点的第 X 分钟到达底层候梯处, 且 X 服从 $[0, 60]$ 上的均匀分布, 求该游客等候时间的数学期望.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

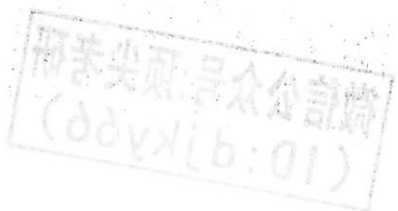


9. 某线路有两个中间站, 设两个中间站无故障的时间分别为 X_1 和 X_2 , 均服从指数分布. 已知它们平均无故障工作时间为 1 和 0.5 (千小时), 求线路无故障工作时间的期望.

10. 设随机变量 X 和 Y 独立同分布. 已知 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求 $Z = \max(X, Y)$ 的数学期望 $E(Z)$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

11. 某流水生产线上每个产品不合格的概率为 p ($0 < p < 1$), 各产品合格与否相互独立, 当出现一个不合格产品时即停机检修, 设开机后第一次停机时已生产了的产品个数为 X , 求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$.



12. 设 (X, Y) 在矩形 $G = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ 上服从均匀分布, 记

$$U = \begin{cases} 0, & \text{当 } X \leq Y, \\ 1, & \text{当 } X > Y \end{cases} \text{ 和 } V = \begin{cases} 0, & \text{当 } X \leq 2Y, \\ 1, & \text{当 } X > 2Y. \end{cases}$$

(1) 求 U 和 V 的联合分布; (2) 求 U 和 V 的相关系数 ρ .

13. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 服从同一分布, 且 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求随机变量 $U = aX + bY$ 和 $V = aX - bY$ (a, b 是常数) 的相关系数.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

题源探究同步练习

14. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从参数为 1 的指数分布, Y 的概率分布为 $P\{Y = -1\} = p$, $P\{Y = 1\} = 1 - p$ ($0 < p < 1$), 令 $Z = XY$.

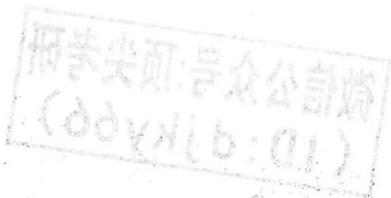
- (I) 求 Z 的概率密度;
(II) p 为何值时, X 与 Z 不相关?
(III) X 与 Z 是否相互独立?

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



第五章 大数定律和中心极限定理

1. 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 独立同分布, $E(X_i) = \mu, i = 1, 2, \dots$, 则根据切比雪夫大数定律, $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 依概率收敛于 μ , 只要_____.
2. 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 独立同分布, $E(X_i) = \mu$, 则根据辛钦大数定律 $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 依概率收敛于_____.
3. 设随机变量 $X_1, \dots, X_9$ 相互独立且同分布, $E(X_i) = 1, D(X_i) = 1, i = 1, \dots, 9$. 令 $S_9 = \sum_{i=1}^9 X_i$, 则对任意 $\epsilon > 0$, 从切比雪夫不等式直接可得
- (A) $P\{|S_9 - 9| < \epsilon\} > 1 - \frac{1}{\epsilon^2}$. (B) $P\{|S_9 - 9| < \epsilon\} \geq 1 - \frac{9}{\epsilon^2}$.
- (C) $P\{|S_9 - 9| < \epsilon\} > 1 - \frac{1}{\epsilon^2}$. (D) $P\left\{\left|\frac{1}{9}S_9 - 1\right| < \epsilon\right\} \geq 1 - \frac{1}{\epsilon^2}$.
4. 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立, 则根据辛钦大数定律, 当 n 充分大时 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 依概率收敛于其共同的数学期望, 只要 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$
- (A) 有相同的数学期望. (B) 服从同一离散型分布.
- (C) 服从同一泊松分布. (D) 服从同一连续型分布.
5. 假设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 已知 $E(X^k) = a_k (k = 1, 2, 3, 4)$. 证明当 n 充分大时, 随机变量 $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 近似服从正态分布, 并指出其分布参数.



第六章 数理统计的基本概念

1. 设总体 $X \sim U[0, \theta]$, 则来自总体 X 的样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的联合概率密度 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) =$ _____.

2. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自标准正态分布总体的样本, 则 $Y = \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{X_3^2 + X_4^2}}$ 服从的分布及参数为 _____.

3. 设随机变量 X, Y 均服从标准正态分布, 则

(A) $X + Y \sim N(0, 2)$.

(B) $X^2 + Y^2 \sim \chi^2(2)$.

(C) $\frac{X^2}{Y^2} \sim F(1, 1)$.

(D) X^2 和 Y^2 均服从 $\chi^2(1)$ 分布.

4. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, $\bar{X}$ 是样本均值, 记

$$S_1^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2, S_2^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

则可以构造服从 $t(n-1)$ 分布的随机变量

(A) $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S_1} \sqrt{n-1}$.

(B) $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S_2} \sqrt{n^2 - n}$.

(C) $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S_1} \sqrt{n^2 - n}$.

(D) $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S_1} \sqrt{n}$.

5. 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 从总体 X 中抽样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$, 样本均值为 $\bar{X}$, 则

(A) $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n-1)$.

(B) $\frac{(n-1)}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n-1)$.

(C) $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$.

(D) $\frac{(n-1)}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$.

6. 设 $X \sim N(0, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_9$ 是来自总体 X 的样本, 则可以构造服从 F 分布的统计量

(A) $F = \frac{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}{X_4^2 + X_5^2 + \dots + X_9^2}$.

(B) $F = \frac{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2}{X_4^2 + X_5^2 + X_6^2 + X_7^2}$.

(C) $F = \frac{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}{2(X_4^2 + X_5^2 + \dots + X_9^2)}$.

(D) $F = \frac{2(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)}{X_4^2 + X_5^2 + \dots + X_9^2}$.

7. 设 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 试证:

(1) $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - \mu)^2$;

(2) $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



8. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的样本, 记 $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - \mu|$, 试证:

$$(1) E(Y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma; \quad (2) D(Y) = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \frac{\sigma^2}{n}.$$

9. 设 $X \sim N(80, 4^2)$, 从总体 X 中应抽取至少多大容量的样本, 才能使样本均值 $\bar{X}$ 大于 78 的概率不小于 0.975? 已知 $\Phi(1.96) = 0.975$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

10. 从一正态总体抽取容量为 100 的样本, 假定有 2% 的样本均值与总体均值之差的绝对值在 4 以上, 求总体的标准差. 已知 $\Phi(2.33) = 0.9900$.



11. 设 $X_1, X_2, \dots, X_9$ 是来自正态总体 X 的简单随机样本

$$Y_1 = \frac{1}{6}(X_1 + \dots + X_6), Y_2 = \frac{1}{3}(X_7 + X_8 + X_9),$$

$$S^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=7}^9 (X_i - Y_2)^2, Z = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S},$$

证明: 统计量 Z 服从自由度为 2 的 t 分布.

12. 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 从总体 X 中抽取样本 $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}$, 记 $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, S_n^2 =$

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2, S_n = \sqrt{S_n^2}.$$

证明: $\sqrt{\frac{n}{n+1}} \cdot \frac{X_{n+1} - \bar{X}_n}{S_n} \sim t(n-1).$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



第七章 参数估计

1. 设总体 $X \sim B(m, p)$, 其中 $p (0 < p < 1)$ 为未知参数, 从总体 X 中抽取样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$, 则 p 的矩估计量 $\hat{p} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设总体 X 的概率密度为 $f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1} (0 < x < 1)$, 其中未知参数 $\theta > 0$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的样本, 则 θ 的矩估计量 $\hat{\theta} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的样本, 则可以构造未知参数 σ^2 的无偏估计量

$$(A) \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2.$$

$$(B) \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2.$$

$$(C) \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n X_i^2.$$

$$(D) \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2.$$

4. 设一批零件的长度服从正态分布 $N(\mu, 4)$, 其中 μ 未知, 现从中随机抽取 16 个零件, 测得样本均值 $\bar{x} = 20(\text{cm})$, 则 μ 的置信度为 0.90 的置信区间是

$$(A) \left(20 - u_{0.05} \frac{1}{2}, 20 + u_{0.05} \frac{1}{2} \right).$$

$$(B) \left(20 - u_{0.1} \frac{1}{2}, 20 + u_{0.1} \frac{1}{2} \right).$$

$$(C) \left(20 - u_{0.05} \frac{2}{\sqrt{15}}, 20 + u_{0.05} \frac{2}{\sqrt{15}} \right).$$

$$(D) \left(20 - u_{0.1} \frac{2}{\sqrt{15}}, 20 + u_{0.1} \frac{2}{\sqrt{15}} \right).$$

5. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 2)$ 为来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, $\bar{X}$ 为样本均值, 若 $C(X_1 + X_n - 2\bar{X})^2$ 是 σ^2 的无偏估计量, 则常数 C 必为

$$(A) \frac{n}{2(n-2)}.$$

$$(B) \frac{n}{2(n-1)}.$$

$$(C) \frac{1}{2(n-2)}.$$

$$(D) \frac{1}{2(n-1)}.$$

6. 设总体 $X \sim E(\lambda)$, 其中 $\lambda > 0$ 是未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 则 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda} =$

$$(A) \bar{X}.$$

$$(B) \frac{1}{\bar{X}}.$$

$$(C) n\bar{X}.$$

$$(D) \frac{1}{n\bar{X}}.$$

7. 设 $\hat{\theta}$ 是参数 θ 的无偏估计, 且有 $D(\hat{\theta}) > 0$, 试证: $\hat{\theta}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计.



8. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的样本, 已知 $X \sim P(\lambda)$, 求 λ 的矩估计量和最大似然估计.

9. 设总体 X 的概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x-\theta}{\lambda}}, & x > \theta, \\ 0, & x \leq \theta, \end{cases}$$

其中 θ 和 $\lambda (\lambda > 0)$ 均为未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的样本, 求未知参数 θ 和 λ 的矩估计量和最大似然估计量.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

题源探究同步练习

10. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的样本, X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}, & \theta_1 < x < \theta_2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 θ_1 和 θ_2 的最大似然估计量.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

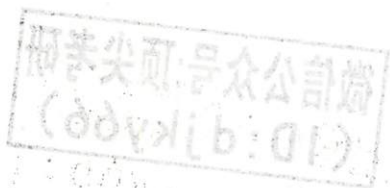


第八章 假设检验

1. 设 $X_1, X_2, \dots, X_{16}$ 是来自正态总体 $N(\mu, 2^2)$ 的样本, 样本均值为 $\bar{X}$, 则在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下检验假设 $H_0: \mu \geq 5; H_1: \mu < 5$ 的拒绝域为_____.
2. 已知 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 为检验总体 X 的均值大于 Y 的均值, 则应作检验假设
 (A) $H_0: \mu_1 > \mu_2; H_1: \mu_1 \leq \mu_2$. (B) $H_0: \mu_1 \geq \mu_2; H_1: \mu_1 < \mu_2$.
 (C) $H_0: \mu_1 < \mu_2; H_1: \mu_1 \geq \mu_2$. (D) $H_0: \mu_1 \leq \mu_2; H_1: \mu_1 > \mu_2$.
3. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$, 现检验 $H_0: \sigma^2 = 1$, 则选用统计量
 (A) $\sum_{i=1}^n X_i^2$. (B) $(n-1)S^2$. (C) $\frac{\bar{X}}{S} \sqrt{n}$. (D) $\sqrt{n}\bar{X}$.
4. 假设某种钢筋的抗拉强度 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$. 现在从一批新产品钢筋中随意抽出了 10 条, 测得抗拉强度的样本标准差 $S = 30$ 公斤, 抗拉强度平均比老产品的平均抗拉强度多 20 公斤. 问抽样结果是否说明新产品的抗拉强度比老产品有明显提高?(取显著性水平 $\alpha = 0.05$)

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

5. 标准差 σ 是衡量机床加工精度的重要特征, 在生产条件稳定的情况下一自动机床所加工零件的尺寸服从正态分布. 假定设计要求 σ 不得超过 0.5 毫米, 为控制生产过程, 定时对产品进行抽检: 每次抽检五件, 测定其尺寸的标准差 S , 试制定一种规则, 以便根据 S 的值判断机床的精度是否降低了(取显著性水平 $\alpha = 0.05$).



参考答案

第一篇 高等数学

第一章 函数、极限、连续

1.1.

【解析】 由于 $y(x)$ 具有一阶连续导数且满足 $y'' + (x-1)y' + x^2y = e^x$, 所以 $y''(x)$ 亦连续, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x) - x}{x^2}$ 为“ $\frac{0}{0}$ ”型, 用洛必达法则,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y'(x) - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y''(x)}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (x-1)y' - x^2y}{2} = \frac{1 + y'(0)}{2} = 1.$$

2.D.

【解析】 由 $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases} g(x) = \begin{cases} 2-ax, & x \leq -1, \\ x, & -1 < x < 0, \\ x-b, & x \geq 0. \end{cases}$

写出 $f(x) + g(x)$ 的表达式, 按照 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的分段情形, $f(x) + g(x)$ 应分成如下3段: $-\infty < x \leq -1$, $-1 < x < 0$, $0 \leq x < +\infty$.

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} -1 + (2-ax), & -\infty < x \leq -1, \\ -1 + x, & -1 < x < 0, \\ 1 + x - b, & 0 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

即

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 1 - ax, & -\infty < x \leq -1, \\ -1 + x, & -1 < x < 0, \\ 1 - b + x, & 0 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

按题设要求在 $\mathbf{R}$ 上连续, 所以

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} (1 - ax) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (-1 + x), 1 + a = -2, a = -3.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (-1 + x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - b + x), -1 = 1 - b, b = 2.$$

选 D.

3.【解】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(e^{\tan x - x} - 1)}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x - x} - 1}{x - \sin x}$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{等}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = 2. \end{aligned}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



4.【解】 方法一: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+ax} + \sqrt[3]{1+bx} - 2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{2}(1+ax)^{-\frac{1}{2}} + \frac{b}{3}(1+bx)^{-\frac{2}{3}}}{2x},$

当 $x \rightarrow 0$ 时分子 $\rightarrow \frac{a}{2} + \frac{b}{3}$, 若 $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} \neq 0$, 则上式右边趋于 ∞ , 从而由洛必达法则知, 左边也应趋于 ∞ . 矛盾. 故 $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} = 0$. 在此条件下, 再用一次洛必达法则,

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a^2}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) (1+ax)^{-\frac{3}{2}} + \frac{b^2}{3} \left(-\frac{2}{3}\right) (1+bx)^{-\frac{5}{3}}}{2} = -\frac{a^2}{8} - \frac{b^2}{9} \xrightarrow{\text{由题设}} -\frac{3}{2},$$

所以得 $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} = 0$ 及 $-\frac{a^2}{8} - \frac{b^2}{9} = -\frac{3}{2}$. 解得 $a = 2, b = -3$.

方法二: 用佩亚诺余项泰勒公式展开:

$$\sqrt{1+ax} = 1 + \frac{1}{2}(ax) + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) (ax)^2 + o_1(x^2),$$

$$\sqrt[3]{1+bx} = 1 + \frac{1}{3}(bx) + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1\right) (bx)^2 + o_2(x^2),$$

代入原式, 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right)x - \left(\frac{a^2}{8} + \frac{b^2}{9}\right)x^2 + o(x^2)}{x^2} \xrightarrow{\text{由题设}} -\frac{3}{2}$, 所以 $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} = 0, \frac{a^2}{8} + \frac{b^2}{9} = \frac{3}{2}$, 解得 a, b 同方法一.

5.【解】 分 $|x| < 1, |x| = 1, |x| > 1$ 三种情形讨论, 得

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } |x| < 1, \\ x, & \text{当 } |x| > 1, \\ -\frac{a}{a+1}, & \text{当 } x = 1, \\ \text{无定义}, & \text{当 } x = -1. \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} x = -1, \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$. 在 $x = -1$ 处 $f(x)$ 为跳跃间断点. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$, $f(1) = -\frac{a}{a+1}$, 当 $-\frac{a}{a+1} = 1$, 即 $a = -\frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续; 当 $a \neq -\frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $x = 1$ 为可去间断点, 其他情形其他点处 $f(x)$ 均连续.

6.【解】 方法一: $\frac{k}{(n+k)(n+k+1)} \leq \frac{k}{(n+k)^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{k}{n}}{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^2},$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{k}{n}}{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2} dx = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{另一方面, } \frac{k}{(n+k)(n+k+1)} &= \frac{k}{n(n+1) \left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(1 + \frac{k}{n+1}\right)} \\ &\geq \frac{1}{n(n+1)} \cdot \frac{k}{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^2} \\ &= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{k}{n}}{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \cdot \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2} dx = \ln 2 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

由夹逼定理知, 原式 $= \ln 2 - \frac{1}{2}$



方法二: $\frac{k}{(n+k)(n+k+1)} = \frac{k}{n+k} - \frac{k}{n+k+1},$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{k}{(n+k)(n+k+1)} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n+k} - \frac{k}{n+k+1} \right) \\ &= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+3} \right) + \cdots + \left(\frac{n}{n+n} - \frac{n}{n+n+1} \right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} - \frac{n}{n+n+1},\end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{(n+k)(n+k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} - \frac{n}{n+n+1} \right)$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2,$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+n+1} = \frac{1}{2}. \text{ 所以原式} = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

7.【解】 因为当 $x \rightarrow 0$ 时 $e^{3x^2} - 1 \sim 3x^2$, 于是 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x} - 1}{e^{3x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x} - 1}{3x^2} = 2$. 由极限与无穷小的关系, 有 $f(x)\sin 2x = [3x^2(2+x) + 1]^2 - 1 = 9x^4(2+x)^2 + 6x^2(2+x) \xrightarrow{(x \rightarrow 0)} 0$.

所以当 $x \rightarrow 0$ 时 $\sqrt{1+f(x)\sin 2x} - 1 \sim \frac{1}{2}f(x)\sin 2x$, 于是可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x} - 1}{e^{3x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}f(x)\sin 2x}{3x^2} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot 2x}{x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \stackrel{\text{由题设}}{=} 2,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 6$.

8.【解】 $a_1 = \sqrt{12}, a_2 = \sqrt{12+a_1}, \cdots, a_n = \sqrt{12+a_{n-1}}, \cdots, a_2 > a_1,$

$$\begin{aligned}a_{n+1} - a_n &= \sqrt{12+a_n} - \sqrt{12+a_{n-1}} = \frac{(12+a_n) - (12+a_{n-1})}{\sqrt{12+a_n} + \sqrt{12+a_{n-1}}} \\ &= \frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{12+a_n} + \sqrt{12+a_{n-1}}}.\end{aligned}$$

所以由数学归纳法知, 对一切 $n, a_{n+1} - a_n > 0$, 即 $\{a_n\}$ 为单调递增序列. 关键看 $\{a_n\}$ 有无上界. 若无上界, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$; 若有上界, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则由 $a_n = \sqrt{12+a_{n-1}}$ 两边取极限得

$$a = \sqrt{12+a}, a^2 - a - 12 = 0, a = -3 \text{ 或 } a = 4.$$

但由于对一切 $n, a_n > 0$, 故若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 则只能是 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = 4$, 且一切 $a_n < 4$. 反过来, 如果能证明对一切 a_n 均有 $a_n < 4$, 则 $\{a_n\}$ 有上界, 由上面推导得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = 4$.

下面证明: 对一切 $n, a_n < 4$. 有两个方法:

方法一: 用数学归纳法, $a_1 = \sqrt{12} < 4$, 设 $a_{n-1} < 4$, 则由 $a_n = \sqrt{12+a_{n-1}} < \sqrt{12+4} = 4$. 由数学归纳法知, 对一切 $n, a_n < 4$.

方法二: 由 $a_n = \sqrt{12+a_{n-1}},$

$$a_n - 4 = \sqrt{12+a_{n-1}} - 4 = \frac{12+a_{n-1}-16}{\sqrt{12+a_{n-1}}+4} = \frac{a_{n-1}-4}{\sqrt{12+a_{n-1}}+4},$$

由 $a_1 = \sqrt{12} < 4$, 于是推得对一切 $n, a_n < 4$.

由 $\{a_n\}$ 单调有界, 所以证得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$. 证毕.

9.【解】 $\lim_{x \rightarrow 0} I_n(x)$ 为“ 1^∞ ”型, 取对数先改变形式:

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



$$\ln I_n(x) = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)$$

以下有两个方法.

方法一: 主要利用等价无穷小替换: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{kx} - 1 \sim kx (k \neq 0)$, 有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \ln I_n(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{(e^x - 1) + (e^{2x} - 1) + \cdots + (e^{nx} - 1)}{n} + 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[\frac{(e^x - 1) + (e^{2x} - 1) + \cdots + (e^{nx} - 1)}{n} \right] \\ &= \frac{1}{n} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) + (e^{2x} - 1) + \cdots + (e^{nx} - 1)}{x} \\ &= \frac{1}{n} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} + \cdots + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{nx} - 1}{x} \right] \\ &= \frac{1}{n} (1 + 2 + \cdots + n) = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} I_n(x) = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \ln I_n(x)} = e^{\frac{n+1}{2}}.$$

方法二: 用洛必达法则,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \ln I_n(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}) - \ln n}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x + 2e^{2x} + \cdots + ne^{nx}}{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}}{1} \\ &= \frac{1}{n} (1 + 2 + \cdots + n) = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} I_n(x) = e^{\frac{n+1}{2}}.$$

10.【解】 因为 $0 < x \leq 1$ 时, $f(x) = x^{\sin x}$, 所以 $f(1) = 1$, 又因为题设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 于是

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sin x \cdot \ln x}.$$

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0, \text{ 从而知 } f(0) = e^0 = 1. \text{ 取 } x = 0 \text{ 代入 } f(x) +$$

$k = f(x+1)$, 得 $f(0) + k = 2f(1)$, 即 $1 + k = 2$, 所以 $k = 1$.

第二章 一元函数微分学

1. $\frac{f''(a)}{2[f'(a)]^2}$

【解析】 原式 $= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{f'(a)(x-a)(f(x) - f(a))}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f'(x) - f'(a)}{x-a}}{f'(a) \left[\frac{f(x) - f(a)}{x-a} + f'(x) \right]} \\ &= \frac{f''(a)}{f'(a)[f'(a) + f'(a)]} = \frac{f''(a)}{2[f'(a)]^2}. \end{aligned}$$



2. 1, $A - \frac{1}{2}$.

【解析】 方法一：由极限与无穷小关系，有 $xf(x) - \ln(1+x) = (A+\alpha)x^2$ ，其中 $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha = 0$ 。

解出 $f(x) = \frac{(A+\alpha)x^2 + \ln(1+x)}{x}$ ， $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ ，

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(A+\alpha)x^2 + \ln(1+x) - x}{x^2} = A + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = A + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x}$$

$$= A + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2x(1+x)} = A - \frac{1}{2}.$$

方法二：将 $\ln(1+x)$ 按佩亚诺余项泰勒公式展开至 $o(x^2)$ ，得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(f(0) + f'(0)x + o_1(x)) - (x - \frac{x^2}{2} + o_2(x^2))}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x[f(0) - 1] + x^2[f'(0) + \frac{1}{2}] + o(x^2)}{x^2} \stackrel{\text{题设}}{=} A,$$

$$\text{所以 } f(0) = 1, f'(0) = A - \frac{1}{2}.$$

3. 0.

【解析】 以 $x=0$ 代入所给方程，得 $0 = \int_2^y \sin^2\left(\frac{\pi}{4}t\right)dt$ ，所以 $y=2$ ，即 $x=0$ 时相应的 $y=2$ 。再将所给方程两边对 x 求导数，得 $1 = \sin^2\left(\frac{\pi}{4}(y+2x)\right) \cdot (y'+2)$ ，以 $x=0$ 及 $y=2$ 代入，得 $1 = \sin^2\frac{\pi}{2} \cdot (y'+2)$ ，故 $y' = -1$ ，再由

$$y' = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}(y+2x)\right)} - 2,$$

得

$$y'' = -\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}(y+2x)\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}(y+2x)\right) \cdot \frac{\pi}{4}(y'+2)}{\sin^4\left(\frac{\pi}{4}(y+2x)\right)},$$

以 $x=0, y=2, y'=-1$ 代入，得 $y''=0$ ，所以

$$k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

4. D

【解析】 方法一：举例说明(D)不正确。例如取 $f(x) = (x-a)(b-x) = -x^2 + (a+b)x - ab$ ， $f'(a) = b-a > 0$ ， $f'(b) = a-b < 0$ ，但 $f(a) = 0$ ， $f(b) = 0$ ，当 $x_0 \in (a, b)$ 时， $f(x_0) = (x_0-a)(b-x_0) > 0$ ， $f(x_0) \neq \frac{1}{2}(f(a) + f(b))$ 。

方法二：证明(A)(B)(C)都正确。由于 $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$ ，所以存在 $x_0 \in (a, b)$ 使 $f(x_0) - f(a) > 0$ ，(A)正确。

由于 $f'(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} < 0$ ，所以存在 $x_0 \in (a, b)$ 使 $f(x_0) - f(b) > 0$ 。(B)正确。

由于(A)(B)均正确，所以 $f(a)$ 与 $f(b)$ 都不是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值， $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值点必在区间 (a, b) 的内部，此点也必是 $f(x)$ 的一个极大值点，由费马定理知，在此点处 $f'(x) = 0$ ，即存在 $x_0 \in (a, b)$ 有



$f'(x_0) = 0$. (C) 正确.

5.【解】 曲线方程为 $y = \frac{x^2 \arctan x}{x-1}$.

(1) 易见 $\lim_{x \rightarrow 1} y = \infty$, 所以 $x=1$ 是一条铅直渐近线. 在 x 轴的其他处, $\lim y$ 均存在, 所以无其他铅直渐近线.

(2) 再看水平渐近线,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty,$$

没有水平渐近线.

(3) 再看斜渐近线.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} &= \frac{\pi}{2}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(y - \frac{\pi}{2} x \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 \arctan x}{x-1} - \frac{\pi}{2} x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 \arctan x - \pi x^2 + \pi x}{2(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x \arctan x - \pi x + \pi}{2 \left(1 - \frac{1}{x} \right)}, \end{aligned}$$

单独将分子中的 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x \arctan x - \pi x)$ 拿出来考虑:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x \arctan x - \pi x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \arctan x - \pi}{\frac{1}{x}} \left(\frac{0}{0} \text{ 型} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{1+x^2} - 0}{-\frac{1}{x^2}} = -2. \end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(y - \frac{\pi}{2} x \right) = -1 + \frac{\pi}{2}$. 从而知 $y = \frac{\pi}{2} x - 1 + \frac{\pi}{2}$ 是一条斜渐近线.

再讨论 $x \rightarrow -\infty$ 方向是否有斜渐近线. 与上面类似, 有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \arctan x}{x-1} = -\frac{\pi}{2}, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(y + \frac{\pi}{2} x \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x \arctan x}{x-1} + \frac{\pi}{2} x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 \arctan x + \pi x^2 - \pi x}{2(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x \arctan x + \pi x - \pi}{2 \left(1 - \frac{1}{x} \right)}. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x \arctan x + \pi x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \arctan x + \pi}{\frac{1}{x}} \left(\frac{0}{0} \text{ 型} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{1+x^2} + 0}{-\frac{1}{x^2}} = -2. \end{aligned}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(y + \frac{\pi}{2} x \right) = -1 - \frac{\pi}{2}$. 从而知 $y = -\frac{\pi}{2} x - 1 - \frac{\pi}{2}$ 也是一条斜渐近线.

如上所述, 共有 3 条渐近线.

6.【解】 $F(x) = \int_0^{x^2} t f(x^2 - t) dt \xrightarrow{u = x^2 - t} \int_0^{x^2} (x^2 - u) f(u) du = x^2 \int_0^{x^2} f(u) du - \int_0^{x^2} u f(u) du,$



$$\text{所以} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^n} \stackrel{\text{洛}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \int_0^{x^2} f(u) du}{n x^{n-2}} \stackrel{\text{洛}}{=} \frac{4}{n(n-2)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2) - f(0)}{x^2 \cdot x^{n-6}}.$$

已知 $f'(0) = 1$, 从而推知要使 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^n}$ 存在且不为零的充要条件是 $n = 6$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^6} = \frac{1}{6} f'(0) = \frac{1}{6}$.

7.【解】 因为 $f(0) = 0$, 不妨认为 $0 < x_1 < x_2$. 从而由拉格朗日中值定理, 有 $f(x_1 + x_2) - f(x_2) - f(x_1) = [f(x_1 + x_2) - f(x_2)] - [f(x_1) - f(0)] = f'(\xi_2)x_1 - f'(\xi_1)x_1 = f''(\xi)(\xi_2 - \xi_1)x_1$, 其中 $0 < \xi_1 < x_1 < x_2 < \xi_2 < x_1 + x_2, \xi_1 < \xi < \xi_2$. 由题设 $f''(x) < 0$, 所以证明了 $f(x_1 + x_2) - f(x_2) - f(x_1) < 0$, 即 $f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$.

8.【证明】 当 $0 < x < +\infty$ 时, $\ln(1+x) > 0, \arctan x > 0$. 所以显然有 $\frac{\arctan x}{\ln(1+x)} > 0$. 为证 $\frac{\arctan x}{\ln(1+x)} < \frac{\sqrt{2}+1}{2}$, 由于 $\ln(1+x) > 0$, 所以相当于证明: 当 $0 < x < +\infty$ 时有

$$f(x) = \arctan x - \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2} \ln(1+x) \right) < 0.$$

今证上式成立. 显然 $f(0) = 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1+x - \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2} \right) (1+x^2)}{(1+x^2)(1+x)} = \frac{2(1+x) - (\sqrt{2}+1)(1+x^2)}{2(1+x^2)(1+x)} \\ &= \frac{(1-\sqrt{2}) + 2x - (1+\sqrt{2})x^2}{2(1+x^2)(1+x)} = \frac{-(1+\sqrt{2})}{2(1+x^2)(1+x)} \left[x^2 - \frac{2}{\sqrt{2}+1}x + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right] \\ &= \frac{-(1+\sqrt{2})}{2(1+x^2)(1+x)} \left[x^2 - \frac{2}{\sqrt{2}+1}x + \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1} \right)^2 \right] \quad \left(\sqrt{2}-1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \right) \\ &= \frac{-(1+\sqrt{2})}{2(1+x^2)(1+x)} \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}+1} \right)^2 \leq 0, \end{aligned}$$

且仅当 $x = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ 时 $f'(x) = 0$. 所以当 $0 < x < +\infty$ 时 $f(x) < 0$. 证毕.

9.【解】 由 $f(a)f(b) > 0$ 知 $f(a)$ 与 $f(b)$ 同号, 再由 $f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$ 知 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 与 $f(a)$ 反号, 因此知在区间 $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ 与区间 $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$ 内, $f(x)$ 各至少有一个零点. 不妨设 $a < \xi_1 < \frac{a+b}{2} < \xi_2 < b$, 使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$. 命 $\varphi(x) = f(x)e^{-kx}$, 于是有 $\varphi(\xi_1) = \varphi(\xi_2) = 0$. 而 $\varphi'(x) = f'(x)e^{-kx} - kf(x)e^{-kx} = e^{-kx}(f'(x) - kf(x))$. 由已证可推知存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$ 使 $\varphi'(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi) = kf(\xi)$. 证毕.

10.【解】 设当 $x \in [a, b]$ 时 $f(x) \equiv 0$, 则任取 $\xi \in (a, b)$, 要证的当然成立. 设 $f(x) \not\equiv 0$, 必存在 $x_0 \in (a, b)$ 使 $|f(x_0)| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| > 0$. 由于 $f(a) = f(b) = 0$, 而 $f(x_0) \neq 0$, 故 $x_0 \in (a, b)$, 于是由费马定理知 $f'(x_0) = 0$. 将 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处按拉格朗日余项泰勒公式展开至 $(x-x_0)^2$ 项, 得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2.$$

将 $x = a, x = b$ 分别代入, 得

$$0 = f(a) = f(x_0) + f'(x_0)(a-x_0) + \frac{1}{2!}f''(\xi_1)(a-x_0)^2$$

(*)

$$0 = f(b) = f(x_0) + f'(x_0)(b-x_0) + \frac{1}{2!}f''(\xi_2)(b-x_0)^2.$$

其中 $\xi_1, \xi_2 \in (a, b)$. 若 $a < x_0 \leq \frac{1}{2}(a+b)$, 则取(*)的前一式, 得

$$0 = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(a-x_0)^2, \quad (**)$$

由 $x_0 - a \leq \frac{1}{2}(a+b) - a = \frac{1}{2}(b-a)$, $(a-x_0)^2 \leq \frac{1}{4}(b-a)^2$, (**)式成为 $f(x_0) = -\frac{1}{2}f''(\xi_1)(a-x_0)^2$,



于是

$$|f(x_0)| = \frac{1}{2} |f''(\xi_1)| (a-x_0)^2 \leq \frac{1}{8} |f''(\xi_1)| (b-a)^2.$$

于是有

$$|f''(\xi_1)| \geq \frac{8}{(b-a)^2} |f(x_0)| = \frac{8}{(b-a)^2} \max |f(x)|.$$

若 $\frac{1}{2}(a+b) < x_0 < b$, 则取(*)的后一项, 得

$$0 = f(x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi_2)(b-x_0)^2,$$

类似可得

$$|f''(\xi_2)| \geq \frac{8}{(b-a)^2} |f(x_0)| = \frac{8}{(b-a)^2} \max |f(x)|.$$

第三章 一元函数积分学

1. $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \sec\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \right| + C.$

【解析】 $\int \frac{\cos x - \sin x}{1 - 2\sin x \cos x} dx = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x \cos x} dx = \int \frac{\cos x - \sin x}{(\cos x - \sin x)^2} dx = \int \frac{1}{\cos x - \sin x} dx$
 $= \int \frac{dx}{\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \sec\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \right| + C.$

2. $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2.$

【解析】 用分部积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx = - \int_1^{+\infty} \arctan x d\left(\frac{1}{x}\right) = - \frac{\arctan x}{x} \Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x^2)} dx$
 $= 0 + \frac{\pi}{4} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)} = \frac{\pi}{4} + \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx$
 $= \frac{\pi}{4} + \left[\ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right] \Big|_1^{+\infty}$
 $= \frac{\pi}{4} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2.$

【注】 $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx$ 不能写成 $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx - \int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$. 因为求此反常积分时, 左边是一个整体, 它的敛散性要整体考虑. 如果拆成两个, 它们分别是发散的.

3. $\frac{35}{64} \pi^2.$

【解析】 $\int_0^{2\pi} x \sin^8 x dx \xrightarrow{\text{令 } x = 2\pi - t} \int_{2\pi}^0 (2\pi - t) \sin^8(2\pi - t) (-dt) = 2\pi \int_0^{2\pi} \sin^8 t dt - \int_0^{2\pi} t \sin^8 t dt$
 $= 2\pi \int_0^{2\pi} \sin^8 t dt - \int_0^{2\pi} x \sin^8 x dx,$

所以 $\int_0^{2\pi} x \sin^8 x dx = \pi \int_0^{2\pi} \sin^8 x dx = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x dx = 4\pi \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{35}{64} \pi^2.$

4. $\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1).$



【解析】 用分部积分, 由 $G(x) = \int_{x^2}^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^3}} dt$, 有 $G'(x) = -\frac{2x \cdot x^2}{\sqrt{1+x^6}} = -\frac{2x^3}{\sqrt{1+x^6}}$,

$$\int_0^1 xG(x)dx = \frac{x^2}{2}G(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \left(-\frac{2x^3}{\sqrt{1+x^6}} \right) dx = 0 + \int_0^1 \frac{x^5}{\sqrt{1+x^6}} dx = \frac{1}{6} \times 2 \sqrt{1+x^6} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}(\sqrt{2}-1).$$

5. B

【解析】 举例说明(B)不正确.

取 $f(x) = \sin^2 x$, 易知 $f(x)$ 有周期 π . 而 $\int_0^x \sin^2 t dt = \int_0^x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x$, 它不是周期函数.

也可以证明(A)(C)(D)都正确. 设 $f(x)$ 具有周期 T , 则对任意 x , 有 $f(x+T) = f(x)$, 两边对 x 求导, 有 $f'(x+T) = f'(x)$, 故知 $f'(x)$ 具有周期 T . 所以(A)正确.

再证(C)正确. 设 $F(x) = \int_0^x [f(t) - f(-t)] dt$, 有 $F(x+T) - F(x) = \int_x^{x+T} [f(t) - f(-t)] dt = I_1 + I_2 + I_3$,

其中 $I_1 = \int_x^{x+\frac{T}{2}} [f(t) - f(-t)] dt$, $I_2 = \int_{\frac{T}{2}}^x [f(t) - f(-t)] dt$, $I_3 = \int_{\frac{T}{2}}^{x+T} [f(t) - f(-t)] dt$. 由于 $f(t) - f(-t)$ 为

t 的奇函数, 所以 $I_2 = 0$. 以下证 $I_3 = -I_1$. 对于 I_3 , 作积分变量变换: $t = u + T$, $t = x + T$ 对应于 $u = x$; $t = \frac{T}{2}$

对应于 $u = -\frac{T}{2}$. 于是 $I_3 = \int_{-\frac{T}{2}}^x [f(u) - f(-u)] du = -I_1$. 从而知 $F(x+T) - F(x) = 0$. 故(C)正确.

最后证(D)也正确. 命 $F(x) = \int_0^x f(t) dt - \frac{x}{T} \int_0^T f(t) dt$, 有 $F(x+T) - F(x) = \int_0^{x+T} f(t) dt - \frac{x+T}{T} \int_0^T f(t) dt - \left[\int_0^x f(t) dt - \frac{x}{T} \int_0^T f(t) dt \right] = \int_0^T f(t) dt - \int_0^T f(t) dt = 0$. 所以(D)正确.

6. C

【解析】 $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \int_e^{+\infty} \frac{1}{\ln^2 x} d(\ln x) = -\left[\frac{1}{\ln x} \right]_e^{+\infty} = 1$ (收敛). 通过计算, 容易知道(A)(B)(D)都发散.

7. A.

【解析】 $\varphi'(x) = \frac{xf(x) - \int_0^x f(t) dt}{x^2} = \frac{xf(x) - f(\xi)x}{x^2} = \frac{x(f(x) - f(\xi))}{x^2}$, 其中 ξ 介于 0 与 x 之间. 设 $x >$

0, 则 $0 < \xi < x$, 由 $f'(x) > 0$, 所以 $f(0) < f(\xi) < f(x)$, 有 $\varphi'(x) > 0$. 设 $x < 0$, 则 $x < \xi < 0$, $f(x) < f(\xi) < f(0)$, 仍有 $\varphi'(x) > 0$. 所以只要 $x \neq 0$, $\varphi(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 与区间 $(0, +\infty)$ 内都连续且 $\varphi'(x) > 0$. 故选(A).

8. 【解】 曲线 C 的参数方程 $\begin{cases} x = \cos^4 t, \\ y = \sin^4 t \end{cases}$ 对应于切点的 t 的值设为 $t = t_0$, 于是切线斜率

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=t_0} = \frac{4\sin^3 t_0 \cos t_0}{-4\cos^3 t_0 \sin t_0} = -\frac{\sin^2 t_0}{\cos^2 t_0},$$

切线 l 的直角坐标方程为

$$y - \sin^4 t_0 = -\frac{\sin^2 t_0}{\cos^2 t_0} (x - \cos^4 t_0).$$

按题要求, 此切线应经过点 $\left(\frac{1}{4}, 0 \right)$, 即

$$-\sin^4 t_0 = -\frac{\sin^2 t_0}{\cos^2 t_0} \left(\frac{1}{4} - \cos^4 t_0 \right),$$

上式化简即为 $\cos^2 t_0 = \frac{1}{4}$, $\cos t_0 = \frac{1}{2}$ (因为 $0 < t_0 < \frac{\pi}{2}$), 所以 $t_0 = \frac{\pi}{3}$. 从而知切线 l 的直角坐标方程为

$$y = \frac{9}{16} - 3 \left(x - \frac{1}{16} \right) = \frac{3}{4} - 3x.$$

(2) 切线 l , 曲线 C 与两坐标轴正向在第一象限中围成的面积



$$A = \int_0^1 y(x) dx - \int_0^{\frac{1}{4}} \left(\frac{3}{4} - 3x \right) dx,$$

对于第1个积分要通过C的参数式积分

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^4 t \cdot 4\cos^3 t (-\sin t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^5 t \cos^3 t dt \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t (1 - \sin^2 t) \cos t dt \xrightarrow{u = \sin t} 4 \int_0^1 u^5 (1 - u^2) du = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

对于第2个积分

$$A_2 = \int_0^{\frac{1}{4}} \left(\frac{3}{4} - 3x \right) dx = \left[\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}x^2 \right] \Big|_0^{\frac{1}{4}} = \frac{3}{16} - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{4} \right)^2 = \frac{3}{32},$$

$$\text{最后 } A = A_2 - A_1 = \frac{1}{6} - \frac{3}{32} = \frac{7}{96}.$$

9.【解】 命 $F(x) = \int_a^x f(t) dt - \int_x^b f(t) dt$, 有 $F(a) = -\int_a^b f(t) dt$, $F(b) = \int_a^b f(t) dt$. 由于 $f(x) > 0$ (当 $x \in [a, b]$), 所以 $F(a) < 0, F(b) > 0$, 由连续函数介值定理知, 存在 $\xi \in (a, b)$ 使 $F(\xi) = 0$, 即 $\int_a^\xi f(t) dt - \int_\xi^b f(t) dt = 0$. 又因 $F'(x) = f(x) - (-f(x)) = 2f(x) > 0$ 当 $x \in [a, b]$, $F(x)$ 严格单调, 所以上述 $\xi \in (a, b)$ 是唯一的. 即证明了存在唯一的 $\xi \in (a, b)$ 使 $F(\xi) = 0$, 即 $\int_a^\xi f(t) dt = \int_\xi^b f(t) dt$.

10.【解】
$$\frac{\int_0^1 x f^2(x) dx}{\int_0^1 x f(x) dx} - \frac{\int_0^1 f^2(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx} = \frac{\int_0^1 x f^2(x) dx \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 f^2(x) dx \int_0^1 x f(x) dx}{\int_0^1 x f(x) dx \int_0^1 f(x) dx}$$

上式右边的分母显然为正, 考虑上式的分子, 令

$$F(x) = \int_0^x t f^2(t) dt \int_0^x f(t) dt - \int_0^x f^2(t) dt \int_0^x t f(t) dt,$$

$$\begin{aligned} \text{有 } F'(x) &= x f^2(x) \int_0^x f(t) dt + f(x) \int_0^x t f^2(t) dt - f^2(x) \int_0^x t f(t) dt - x f(x) \int_0^x f^2(t) dt \\ &= f^2(x) \int_0^x (x-t) f(t) dt + f(x) \int_0^x (t-x) f^2(t) dt \\ &= f(x) \left[\int_0^x (x-t) f(x) f(t) dt - \int_0^x (x-t) f^2(t) dt \right] \\ &= f(x) \int_0^x (x-t) (f(x) - f(t)) f(t) dt. \end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 单调减少, 所以 $(x-t)(f(x) - f(t)) \leq 0$. 因此当 $x \geq 0$ 时 $F'(x) \leq 0$. 于是 $F(1) \leq F(0) = 0$, 这就证明了

$$\frac{\int_0^1 x f^2(x) dx}{\int_0^1 x f(x) dx} \leq \frac{\int_0^1 f^2(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx}.$$

11.【解】 (1) 将 $\int_0^\xi f(t) dt = (1-\xi)f(\xi)$ 改写为

$$\int_0^\xi f(t) dt - (1-\xi)f(\xi) = 0 \quad (*)$$

找一个函数 $\varphi(x)$, 使

$$\varphi'(x) = \int_0^x f(t) dt - (1-x)f(x) = \int_0^x f(t) dt + xf(x) - f(x)$$

且满足 $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 0$, 那么对 $\varphi(x)$ 用罗尔定理即得 (*). 怎么找 $\varphi(x)$ 呢? 容易看出,

$$\left(x \int_0^x f(t) dt \right)' = \int_0^x f(t) dt + xf(x),$$



可见,若取

$$\varphi(x) = x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x f(t) dt,$$

则有 $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 0$, 且 $\varphi'(x) = \int_0^x f(t) dt - (1-x)f(x)$. 由罗尔定理知, 存在 $\xi \in (0, 1)$ 使 $\varphi'(\xi) = 0$, 即

$$\int_0^\xi f(t) dt = (1-\xi)f(\xi)$$

(1) 证毕.

(2) 若增设 $f(x) > 0$ 且 $f(x)$ 单调减少, 求证这种 ξ 是唯一的. 用反证法, 若存在 $\xi_1 \in (0, 1), \xi_2 \in (0, 1), \xi_1 \neq \xi_2$. 不妨设 $0 < \xi_1 < \xi_2 < 1$, 使

$$\int_0^{\xi_1} f(t) dt = (1-\xi_1)f(\xi_1), \int_0^{\xi_2} f(t) dt = (1-\xi_2)f(\xi_2) \quad (**)$$

将(**)的后一式减去前一式, 得

$$\begin{aligned} \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(t) dt &= f(\xi_2) - f(\xi_1) - \xi_2 f(\xi_2) + \xi_1 f(\xi_1) \\ &= f(\xi_2) - f(\xi_1) - \xi_2 f(\xi_2) + \xi_2 f(\xi_1) - \xi_2 f(\xi_1) + \xi_1 f(\xi_1) \\ &= (1-\xi_2)(f(\xi_2) - f(\xi_1)) - (\xi_2 - \xi_1)f(\xi_1). \end{aligned}$$

由条件左边 > 0 , 右边 < 0 . 矛盾. 即证得不可能有 $\xi_1 \neq \xi_2$.

第四章 向量代数与空间解析几何

1. $3y+x=0$ 或 $3x-y=0$

【解析】过 z 轴的平面可设为 $y+ax=0$, 由题设知

$$\left| \frac{2a+1}{\sqrt{10} \sqrt{1+a^2}} \right| = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \text{ 由此解得 } a = \frac{1}{3} \text{ 或 } a = -3.$$

2. D

【解析】过点 $P(1, 3, -4)$ 且与平面 $3x+y-2z=0$ 垂直的直线方程为

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+4}{-2}$$

与 $3x+y-2z=0$ 联立解得交点为 $(-2, 2, -2)$, 由定比分点公式知所求对称点为 $(-5, 1, 0)$.

3. 【解】 $|(a+b) \times (a-b)| = 2|b \times a| = 2|b||a| = 24$.

4. 【解】易求得直线 L 与平面 Π 的交点 $M_0(2, 3, 1)$, 过点 $M_0(2, 3, 1)$ 且和直线 L 垂直的平面为

$$5(x-2) + (y-3) + 4(z-1) = 0$$

即 $5x+y+4z-17=0$. 所求直线方程为 $\begin{cases} 3x-y+2z-5=0, \\ 5x+y+4z-17=0. \end{cases}$

5. 【解】过平面 $2x+y-z-2=0$ 和 $3x-2y-2z+1=0$ 的交线的平面束方程为

$$2x+y-z-2+\lambda(3x-2y-2z+1)=0$$

即 $(2+3\lambda)x+(1-2\lambda)y-(1+2\lambda)z-2+\lambda=0$, 其法向量为 $n=(2+3\lambda, 1-2\lambda, -1-2\lambda)$,

则 $3(2+3\lambda)+2(1-2\lambda)-3(1+2\lambda)=0$, 从而 $\lambda=5$, 所求平面方程为 $17x-9y-11z+3=0$.

6. 【解】在曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ 2x^2+2y^2+z^2=2 \end{cases}$ 上任取一点 (x_0, y_0, z_0) , 过该点且与直线 $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{1}$ 平行的直线方程为

$$\frac{x-x_0}{-1} = \frac{y-y_0}{0} = \frac{z-z_0}{1}$$

联立

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{-1} = \frac{y-y_0}{0} = \frac{z-z_0}{1} \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1 \\ 2x_0^2 + 2y_0^2 + z_0^2 = 2 \end{cases}$$

消去 x_0, y_0, z_0 得

$$(x+z)^2 + y^2 = 1.$$

7.【解】 (I) 绕 x 轴和 y 轴的旋转面方程分别为

$$x^2 - (y^2 + z^2) = 1,$$

$$(x^2 + z^2) - y^2 = 1.$$

(II) 曲线 $\begin{cases} y = \sqrt{z}, \\ x = 0 \end{cases}$ 分别绕 z 轴和 y 轴产生的旋转面的方程为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ y^4 = x^2 + z^2 \end{cases} \quad y \geq 0.$$

8.【解】 在直线 $L: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{3} = z+1$ 上任取一点 (x_0, y_0, z_0) , 则

$$\frac{x_0-3}{2} = \frac{y_0-1}{3} = z_0+1 \quad (1)$$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = (x_0-2)^2 + (y_0-3)^2 \quad (2)$$

$$z_0 = z$$

将 $z_0 = z$ 代入 (1) 式得 $x_0 = 2z+5, y_0 = 3z+4$, 将此代入 (2) 式得

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = (2z+3)^2 + (3z+1)^2.$$

9.【解】 曲线 L 上任取一点

$$x_0 = t_0, y_0 = t_0^2, z_0 = e^{t_0}$$

$$x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2 = t_0^2 + t_0^4$$

则

$$z = z_0 = e^{t_0}$$

$$t_0 = \ln z$$

故

$$x^2 + y^2 = \ln^2 z + \ln^4 z.$$

第五章 多元函数微分学

1. $\frac{11}{7}$

【解析】 曲面 $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处指向外侧的法向量为 $\mathbf{n} = (2,3,1)$,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{(1,1,1)} = \frac{6}{\sqrt{14}} \cdot \frac{2}{\sqrt{14}} + \frac{8}{\sqrt{14}} \cdot \frac{3}{\sqrt{14}} + (-\sqrt{14}) \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{11}{7}.$$

2. B

【解析】 由于 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y) - (x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left[\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \sqrt{x^2 + y^2} \right] = 1$

则 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1$, 取 $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, 显然符合题设条件. 而 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续, 但两个偏导

数 $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$ 都不存在, 故选项 (A) (C) (D) 均不正确, 故应选 (B).

3.【解】 显然 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续



$$\begin{aligned} f'_x(0,0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0, f'_y(0,0) = 0 \\ \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) - [f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)^{3/2}}} \sin((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2) \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \text{ 不存在} \end{aligned}$$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续、可导,但不可微.

4.【解】 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf'_1 + ye^{xy}f'_2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2yf'_1 + xe^{xy}f'_2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -4xyf''_{11} + 2x^2e^{xy}f''_{12} - 2y^2e^{xy}f''_{21} + xye^{2xy}f''_{22} + e^{xy}f'_2 + xye^{xy}f'_2 \\ &= -4xyf''_{11} + 2(x^2 - y^2)e^{xy}f''_{12} + xye^{2xy}f''_{22} + e^{xy}(1 + xy)f'_2. \end{aligned}$$

5.【解】 等式 $F(x+y, y+z) = 1$ 两端对 x 求导得 $F'_1 + F'_2 \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_1}{F'_2},$

同理

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{F'_1 + F'_2}{F'_2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -\frac{[F''_{11} + F''_{12}(1 + \frac{\partial z}{\partial y})]F'_2 - [F''_{21} + F''_{22}(1 + \frac{\partial z}{\partial y})]F'_1}{(F'_2)^2} \\ &= \frac{2F'_1F'_2F''_{21} - (F'_1)^2F''_{22} - (F'_2)^2F''_{11}}{(F'_2)^3}. \end{aligned}$$

6.【解】 由 $u = f(r), r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 知

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(r) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} f'(r)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2} f''(r) + f'(r) \frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2} = \frac{x^2}{r^2} f''(r) + f'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right)$$

由变量对称性知

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^2} f''(r) + f'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right)$$

则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) = 0$, 即

$$rf''(r) + f'(r) = 0$$

$$\frac{d}{dr}(rf'(r)) = 0$$

$$rf'(r) = C_1$$

$$f'(r) = \frac{C_1}{r}$$

$$f(r) = C_1 \ln r + C_2$$

由 $f(1) = 1, f'(1) = 1$ 知 $C_2 = 1, C_1 = 1$, 则 $f(r) = \ln r + 1$.

7.【解】 过直线 $l: \begin{cases} x+y+b=0, \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$ 的平面束方程为

$$x+y+b+\lambda(x+ay-z-3) = 0$$

即

$$(1+\lambda)x + (1+\lambda a)y - \lambda z + b - 3\lambda = 0$$

其法向量为



$$n_1 = \{1 + \lambda, 1 + \lambda a, -\lambda\}$$

曲面 $z = x^2 + y^2$ 在点 $(1, -2, 5)$ 处的法向量为

$$n_2 = \{2, -4, -1\}$$

则

$$n_1 \parallel n_2$$

即

$$\frac{1+\lambda}{2} = \frac{1+\lambda a}{-4} = \frac{-\lambda}{-1}$$

由此解得 $\lambda = 1, a = -5$,

代入平面束方程 $(1+\lambda)x + (1+\lambda a)y - \lambda z + b - 3\lambda = 0$ 得

$$2x - 4y - z + b - 3 = 0$$

又该平面过点 $(1, -2, 5)$, 代入上式得 $b = -2$.

8.【解】 驻点为 $(0, 0), (0, a), (a, 0), \left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right), AC - B^2 = 4xy - (a - 2x - 2y)^2$.

(1) 当 $a > 0$ 时, $(0, 0), (0, a), (a, 0)$ 均不是极值点, $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ 为极大值点, $f\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = \left(\frac{a}{3}\right)^3$.

(2) 当 $a < 0$ 时, $(0, 0), (0, a), (a, 0)$ 均不是极值点, $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ 为极小值点, $f\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = \left(\frac{a}{3}\right)^3$.

(3) 当 $a = 0$ 时, 驻点只有一个 $(0, 0)$ 点, 此时 $AC - B^2 = 0$, 极值充分条件不能判定, 此时

$$f(x, y) = -xy(x + y).$$

若取 $y = x$, 则 $f(x, x) = -2x^3$, 显然 $(0, 0)$ 点任何邻域内 $f(x, y)$ 可正可负, 而 $f(0, 0) = 0$, 则此时 $(0, 0)$ 不是极值点.

9.【解】
$$\begin{cases} 2x - 6y - 2yz'_x - 2xz'_x = 0 \\ -6x + 20y - 2z - 2yz'_y - 2xz'_y = 0 \end{cases}$$

令 $z'_x = 0, z'_y = 0$ 得驻点 $(9, 3), (-9, -3)$

容易验证在 $(9, 3)$ 点, $AC - B^2 > 0$, 且 $A > 0$, 则取极小值, $z(9, 3) = 3$,

在点 $(-9, -3)$ 处, $AC - B^2 > 0$, 且 $A < 0$, 则取极大值, $z(-9, -3) = -3$.

10.【解】 令 $F(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x + y + z) + \mu(x^2 + y^2 - 1)$,

由 $x^2 + y^2 = 1$ 知 $F = 1 + z^2 + \lambda(x + y + z) + \mu(x^2 + y^2 - 1)$, 则

$$\begin{cases} F'_x = \lambda + 2\mu x = 0 & \text{①} \\ F'_y = \lambda + 2\mu y = 0 & \text{②} \\ F'_z = 2z + \lambda = 0 & \text{③} \\ F'_\lambda = x + y + z = 0 & \text{④} \\ F'_\mu = x^2 + y^2 - 1 = 0 & \text{⑤} \end{cases}$$

由 ① 式和 ② 式得 $\mu x = \mu y$

(1) 若 $\mu = 0$, 则由 ① 式得 $\lambda = 0$, 由 ② 式得 $z = 0$, 将 $z = 0$ 代入 ④ 式和 ⑤ 式得驻点

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

(2) 若 $\mu \neq 0$, 则 $x = y$, 将此代入 ④ 式和 ⑤ 式得

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$$

$$u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = u\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0} = 1$$

$$u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right) = u\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2} = \sqrt{3}$$

则函数 $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 在条件 $x^2 + y^2 = 1$ 及 $x + y + z = 0$ 下的最大值为 $\sqrt{3}$, 最小值为 1.



11.【分析】 本题第一部分是求条件极值,利用拉格朗日乘数法解答.

本题第二部分是利用第一部分得到的结果来证明不等式.

【解】 为求在条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 6r^2$ 下函数 $f(x, y, z) = \ln x + 2\ln y + 3\ln z$ 的最大值,不妨设

$$L(x, y, z, \lambda) = \ln x + 2\ln y + 3\ln z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 6r^2) \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$$

$$\text{由方程组} \begin{cases} L'_x = \frac{1}{x} + 2\lambda x = 0, \\ L'_y = \frac{2}{y} + 2\lambda y = 0, \\ L'_z = \frac{3}{z} + 2\lambda z = 0, \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 6r^2 = 0, \end{cases} \quad \text{得驻点} \begin{cases} x = r \\ y = \sqrt{2}r \\ z = \sqrt{3}r \end{cases}.$$

因为驻点 (x, y, z) 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 6r^2$ 的第一卦限部分上,则点 $(r, \sqrt{2}r, \sqrt{3}r)$ 是唯一的驻点.

另一方面,当点趋于球面(第一卦限部分)与坐标平面的交线时,函数 $f(x, y, z)$ 便趋于 $-\infty$,所以函数 $f(x, y, z)$ 在指定的区域内部取得最大值,从而此唯一的驻点便是最大值点,即

$$f_{\max} = f(r, \sqrt{2}r, \sqrt{3}r) = \ln r + 2\ln(\sqrt{2}r) + 3\ln(\sqrt{3}r) = \ln(6\sqrt{3}r^6),$$

$$\text{即有} \quad f(x, y, z) = \ln x + 2\ln y + 3\ln z = \ln(xy^2z^3) \leq \ln(6\sqrt{3}r^6),$$

$$\text{从而} \quad xy^2z^3 \leq 6\sqrt{3}r^6 \leq 6\sqrt{3}\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{6}\right)^3,$$

$$\text{即} \quad x^2y^4z^6 \leq 108\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{6}\right)^6.$$

$$\text{令 } x^2 = a, y^2 = b, z^2 = c, \text{代入上式,得 } ab^2c^3 \leq 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6.$$

【评注】 (1) 本题的目标函数亦可取为 $f(x, y, z) = xy^2z^3$,同样有效.

(2) 由本题的目标函数与约束条件在形式上的对称性,还可以将上面的条件极大值问题改为如下的条件极小值问题:求目标函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在条件 $xy^2z^3 = 6r^6$ 约束下的最小值.只是具体求解起来不如上述方法简单.

第六章 多元函数积分学

1. $\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$

【解析】 令 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则 $u = \ln r$

$$\text{grad } u = \left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{grad } u) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r^2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4} \right) + \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2y^2}{r^4} \right) + \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2z^2}{r^4} \right) \\ &= \frac{3}{r^2} - \frac{2}{r^2} = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned}$$

2. $(a^2b^2 + 1)l$

【解析】 $\oint_C (bx + ay + 1)^2 ds = \oint_C (b^2x^2 + a^2y^2 + 1 + 2abxy + 2bx + 2ay) ds$

由于曲线 C 关于 x 轴和 y 轴都对称,而 $2abxy, 2bx, 2ay$ 至少关于 x, y 的某一变量为奇函数,则

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)



$$\oint_C (2abxy + 2bx + 2ay) ds = 0$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \oint_C (bx + ay + 1)^2 ds &= \oint_C (b^2 x^2 + a^2 y^2 + 1) ds = a^2 b^2 \oint_C \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) ds + l \\ &= a^2 b^2 \oint_C ds + l = (a^2 b^2 + 1)l. \end{aligned}$$

3. D

【解析】 注意在 D 内 $0 < x + y \leq 1$, 则 $\ln^3(x + y) \leq 0$,

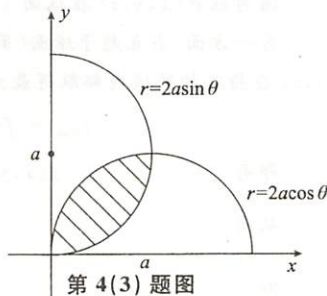
由于当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\sin x < x$, 则 $0 < \sin^2(x + y) < \sin(x + y) < (x + y)$, 故 $J < I < K$.

$$4. \text{【解】} (1) \int_0^2 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{2-\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^4 f(x, y) dx + \int_0^2 dy \int_{2+\sqrt{4-y^2}}^4 f(x, y) dx.$$

$$(2) \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^x f(x, y) dy.$$

(3) 曲线 $r = 2a \sin \theta$ 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 = 2ay$, 曲线 $r = 2a \cos \theta$ 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 = 2ax$, 则其积分域如右图所示, 则

$$\text{原式} = \int_0^{\sqrt{2}a} dr \int_{\arcsin \frac{r}{2a}}^{\arccos \frac{r}{2a}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta.$$



第 4(3) 题图

5. 【解】 记 Σ 在第一卦限部分的曲面为 Σ_1 , 由奇偶性, 对称性知

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} |xyz| dS &= 4 \iint_{\Sigma_1} xyz dS = 4 \iint_D xy(x^2 + y^2) \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy \\ &= \frac{125\sqrt{5} - 1}{420}. \end{aligned}$$

6. 【解】 补线段 $\overline{BA}$

$$\text{原式} = \oint_{L+\overline{BA}} - \int_{\overline{BA}} = \iint_D m dx dy - 0 = \frac{m}{8} \pi a^2.$$

7. 【解】 (1) 0; (2) -2π .

8. 【解】 (1) 由线积分与路径无关知 $[\sin x - f(x)] \frac{1}{x} = f'(x)$, 即

$$f'(x) + \frac{1}{x} f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$f(x) = e^{-\int \frac{dx}{x}} \left[\int \frac{\sin x}{x} e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right] = \frac{1}{x} [-\cos x + C]$$

$$\text{由 } f(\pi) = 1 \text{ 知 } C = \pi - 1, f(x) = \frac{1}{x} (\pi - 1 - \cos x).$$

(2) 由于线积分与路径无关, 改换路径为折线从 $(1, 0)$ 到 $(\pi, 0)$ 再到 (π, π)

$$\int_{(1,0)}^{(\pi,\pi)} [\sin x - f(x)] \frac{y}{x} dx + f(x) dy = \int_0^\pi f(\pi) dy = \pi f(\pi) = \pi.$$

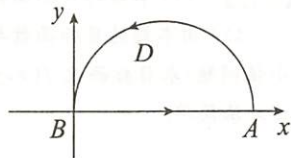
9. 【解】 (1) 由于 $\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{y} [1 + y^2 f(xy)] \right\} = -\frac{1}{y^2} + f(xy) + xy f'(xy)$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] \right\} = f(xy) + xy f'(xy) - \frac{1}{y^2}$$

则线积分 I 与路径 L 无关.

(2) 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $F(x)$.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x}{y} + F(xy) \right] = \frac{1}{y} + y F'(xy) = \frac{1}{y} [1 + y^2 f(xy)]$$



第 6 题图

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{x}{y} + F(xy) \right] &= -\frac{x}{y^2} + xF'(xy) = \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] \\ \text{则} \int_{(a,b)}^{(c,d)} \frac{1}{y} [1 + y^2 f(xy)] dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] dy \\ &= \int_{(a,b)}^{(c,d)} d \left[\frac{x}{y} + F(xy) \right] = \left[\frac{x}{y} + F(xy) \right] \Big|_{(a,b)}^{(c,d)} = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

10. 【解】 记 Σ 为平面 $x + y + z = 2$ 上 L 所围的部分的上侧, 由斯托克斯公式得

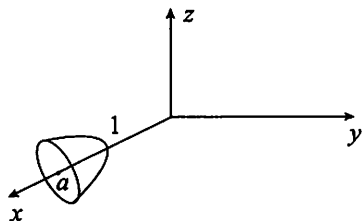
$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} (-2y - 4z) dydz + (-2z - 6x) dzdx + (-2x - 2y) dxdy \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (4x + 2y + 3z) ds = -2 \iint_D (x - y + 6) dxdy = -12 \iint_D dxdy = -24. \end{aligned}$$

11. 【解】 记 Σ_1 为 xOy 面上圆域 $x^2 + y^2 \leq a^2$ 的下侧, 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} = \iiint_{\Omega} (3x^2 + 3y^2 + 3z^2) dv + a \iint_D y^2 d\sigma \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a r^2 \sin\theta dr + a \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho^3 \sin^2\theta d\rho = \frac{29}{20} \pi a^5. \end{aligned}$$

12. 【解】 曲面 Σ 如右图, 补平面 $S: x = e^a (y^2 + z^2 \leq a^2)$

$$\begin{aligned} I &= \oiint_{\Sigma+S} - \iint_S \\ &= \iiint_{\Omega} (-4x + 8x - 4x) dv - \iint_{y^2+z^2 \leq a^2} 2(1 - e^{2a}) dydz \\ &= 2\pi a^2 (e^{2a} - 1). \end{aligned}$$



第 12 题图

$$\begin{aligned} 13. 【解】 (1) I &= \iiint_{\Sigma} \frac{x dydz + y dzdx + z dxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \iiint_{\Sigma} \frac{x dydz + y dzdx + z dxdy}{a^3} \\ &= \frac{1}{a^3} \left[\oiint_{\Sigma+S} x dydz + y dzdx + z dxdy - \oiint_S x dydz + y dzdx + z dxdy \right] \\ &= \frac{1}{a^3} \left[\iiint_{\Omega} 3dv - 0 \right] = \frac{3}{a^3} \cdot \frac{2}{3} \pi a^3 = 2\pi. \end{aligned}$$

其中 S 为 xOy 面上圆域 $x^2 + y^2 \leq a^2$ 的下侧.

(2) 补两面, 其中 Σ_1 为上半球面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 的下侧, Σ_2 为 xOy 面上介于 $x^2 + y^2 = 1$ 与 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 之间的平面域的下侧, 则

$$\begin{aligned} I &= \oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} \frac{x dydz + y dzdx + z dxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \iint_{\Sigma_1} \frac{x dydz + y dzdx + z dxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \iint_{\Sigma_2} \frac{x dydz + y dzdx + z dxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \text{其中} \quad \oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} \frac{x dydz + y dzdx + z dxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \iiint_{\Omega} \left[\frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} + \frac{(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} + \right. \\ &\quad \left. \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \right] dv \\ &= \iiint_{\Omega} 0 dv = 0 \end{aligned}$$



$$\iint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$\text{从而 } I = - \iint_{\Sigma_1} \frac{xdydz + ydzdx + zxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi. \quad (\text{利用(1)的结论})$$

第七章 无穷级数

1. $(-1, 1)$

【解析】由 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$ 在 $x=0$ 条件收敛知, 设幂级数收敛半径为 1, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$ 收敛半径相同, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间为 $(-1, 1)$.

2. B

【解析】 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1000}$ 是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 去掉前 1000 项, 其敛散性不变. 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 > 0$ 知, 当 n 充分大, u_n 同号, 不妨设 $u_n > 0$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ 知, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 ② 和 ③ 正确.

3. A

【解析】① 不正确, 如 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

② 不正确, 如 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

③ 不正确, 如 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right)$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.

④ 是正确的, 由于 $0 \leq c_n - b_n \leq c_n - a_n$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n - b_n)$ 收敛, 而 $b_n = c_n - (c_n - b_n)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

4. A

【解析】由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x=-2$ 条件收敛知, -2 为其收敛区间端点, 而设幂级数收敛半径为 1, 则 $a = -1$ 或 $a = -3$. 若 $a = -3$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n}$ 在 $x=-2$ 发散, 则 $a \neq -3$.

当 $a = -1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n}$ 在 $x=-2$ 条件收敛, 则 $a = -1$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2(x-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2(x+1)^n$ 的收敛半径为 1, 收敛区间为 $(-2, 0)$, 显然 $\ln \frac{1}{2} \in (-2, 0)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2(x-a)^n$ 在 $x = \ln \frac{1}{2}$ 绝对收敛.

5. 【解】(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n3^n}} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{3}$

由该幂级数的收敛半径 $R = 3$, 收敛区间为 $(0, 6)$.

当 $x = 0$ 时, 原级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

收敛.

当 $x = 6$ 时, 原级数为



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

发散, 则原幂级数收敛域为 $[0, 6)$.

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n4^n}} = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{4}$$

由原幂级数只有偶次项, 则其收敛半径 $\sqrt{4} = 2$, 其收敛区间为 $(0, 4)$.

当 $x = 0$ 时, 原级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{2n}}{n4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

发散.

当 $x = 4$ 时, 原级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{n4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

发散, 则原幂级数收敛域为 $(0, 4)$.

(3) 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \sqrt[n]{\frac{1}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{3}$$

则原幂级数的收敛半径 $R = 3$, 收敛区间为 $(-3, 3)$.

当 $x = -3$ 时, 原级数为

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + (-2)^n} \frac{(-3)^n}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{[3^n + (-2)^n]n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \{ [3^n + (-2)^n] - (-2)^n \}}{[3^n + (-2)^n]n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{[3^n + (-2)^n]n} \end{aligned}$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛, 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{[3^n + (-2)^n]n}$,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{[3^n + (-2)^n]n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{\left[1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{2}{3} < 1 \end{aligned}$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{[3^n + (-2)^n]n}$ 绝对收敛.

当 $x = 3$ 时, 原级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[3^n + (-2)^n]n} \frac{3^n}{n}$$

与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 同敛散, 则其发散, 原幂级数收敛域为 $(-3, 3)$.

$$6. \text{【解】} (1) f(x) = \frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = \frac{-1}{2} \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} + \frac{1}{1-x}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n, x \in (-1, 1)$$

$$(2) f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} \cdot \frac{2(1-x^2) + 4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2}$$

$$= 2(1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots), (|x| < 1)$$



$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

上式两端积分得

$$\int_0^x f'(t) dt = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\text{即 } f(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} (|x| < 1).$$

$$(3) f(x) = (x - \tan x) \cos x = x \cos x - \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n)!} - \frac{1}{(2n+1)!} \right) (-1)^n x^{2n+1}, x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\begin{aligned} (4) f(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1}{x} \right) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots \right) = \frac{1}{2!} + \frac{2x}{3!} + \frac{3x^2}{4!} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n+1)!} (x \neq 0). \end{aligned}$$

$$(5) (\ln(x + \sqrt{1+x^2}))' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)}{2!}x^4 + \cdots$$

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)}{5 \cdot (2!)}x^5 + \cdots$$

$$\sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^4 + \cdots$$

$$\text{则 } f(x) = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} = -1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{x^{2n+2}}{2n+1}, x \in [-1, 1].$$

7.【解】 (1) 令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, 则

$$\begin{aligned} S(x) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \\ \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} &= S\left(\frac{1}{2} \right) = 4. \end{aligned}$$

(2) 令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$, 则

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}} &= S\left(\frac{1}{2} \right) = 12. \end{aligned}$$

(3) 令 $S(x) = \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{3}{4} \right)^n x^{2n-1} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \arctan \frac{\sqrt{3}}{2} x$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{3}{4} \right)^n = S(1) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \arctan \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(4) 令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, 则

$$S(x) = \left[\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right]' = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{x} \right)' = \frac{x \cos x - \sin x}{2x^2}$$



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} = \frac{1}{2}(\cos 1 - \sin 1).$$

8.【解】 $\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2}{1-4n^2} x^{2n}, x \in [-1, 1].$$

由该式得 $f^{(2n-1)}(0) = 0, f^{(2n)}(0) = \frac{(-1)^n \cdot 2(2n)!}{1-4n^2}$

在上式中令 $x=1$ 得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

9.【解】 (1) $S(x) = \frac{x^4}{2 \cdot 4} + \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{x^8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots$

$$S'(x) = \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2 \cdot 4} + \frac{x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6}$$

则 $S'(x) - xS(x) = \frac{x^3}{2}$.

$$(2) S(x) = e^{\int x dx} \left[\int \frac{x^3}{2} e^{-\int x dx} dx + C \right]$$

$$= e^{\frac{x^2}{2}} \left[\int \frac{x^3}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + C \right]$$

$$= e^{\frac{x^2}{2}} \left[-\frac{x^2}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} - e^{-\frac{x^2}{2}} + C \right]$$

由原题知 $S(0) = 0$, 则 $C = 1$, 故 $S(x) = -\frac{x^2}{2} - 1 + e^{\frac{x^2}{2}}$.

10.【解】 将 $x^2 - 2\pi x$ 在 $0 \leq x \leq \pi$ 上展开为余弦级数得

$$x^2 - 2\pi x = -\frac{2\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{1}{12}(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2) (0 \leq x \leq \pi)$.

11.【证明】 $u_n > 0, |u_n|$ 递增, 则 $u_n = u_{n-2} + u_{n-1} < 2u_{n-1}$, 即 $u_{n-1} > \frac{u_n}{2}$, 从而有

$$u_n = u_{n-2} + u_{n-1} > \frac{u_{n-1}}{2} + u_{n-1} = \frac{3}{2}u_{n-1},$$

$$u_n > \frac{3}{2}u_{n-1} > \left(\frac{3}{2}\right)^2 u_{n-2} > \dots > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} u_1 = 3\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1},$$

则 $\frac{1}{u_n} < \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$ 收敛.

第八章 常微分方程

1. $x^2 y^2 + 2\sin x = C$

【解析】 由于 $\frac{\partial(xy^2 + \cos x)}{\partial y} = \frac{\partial(x^2 y)}{\partial x} = 2xy$, 故为全微分方程. $u(x, y) = \int_0^x \cos u du + \int_0^y x^2 v dv =$



$\sin x + \frac{x^2 y^2}{2}$, 故通解为 $x^2 y^2 + 2\sin x = C$.

2. D

【解析】 原方程可分解为 $y'' + 3y' + 2y = 3x$ 与 $y'' + 3y' + 2y = -2e^{-x}$. 特征方程为 $r^2 + 3r + 2 = 0$, 特征根 $r_1 = -1, r_2 = -2$. 自由项 $3x$ 相应的非齐次方程对应的特解 $y_1^* = ax + b$; 自由项 $-2e^{-x}$ 上的指数系数 (-1) 是单重特征根, 相应的特解 $y_2^* = Axe^{-x}$. 按叠加原理, 特解 $y^* = y_1^* + y_2^*$ 所以应选 (D).

3.【解】 此方程不显含 x . 令 $p = y'$, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dy} \cdot p$, 原方程可化为 $yp \frac{dp}{dy} = 2(p^2 - p)$. 当 $p \neq 0$ 时, 方程可改写为 $y \frac{dp}{dy} = 2(p - 1)$ 或 $\frac{dp}{p-1} = \frac{2dy}{y}$, 解为 $p - 1 = C_1 y^2$. 再利用 $p = y'$ 及初始条件, 有 $C_1 = 1$. 从而上述方程为变量可分离的方程 $y' = 1 + y^2 \Rightarrow$ 其通解为 $y = \tan(x + C_2)$, 又由 $y(0) = 1$, 得 $C_2 = \frac{\pi}{4}$, 故原方程满足初始条件的特解为 $y = \tan(x + \frac{\pi}{4})$. $p = 0$ 时得 $y = C$, 不满足初始条件.

4.【解】 特征方程 $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, 特征根 $\lambda_{1,2} = -1$, 故对应的齐次方程的通解为 $Y = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$, 设原非齐次方程的一个特解 $y^* = (Ax + B)e^x$, 代入原方程比较系数可得 $4A + 4B = 0, 4A = 1$. 解得 $A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{4}$.

故得原方程的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + \frac{1}{4}(x - 1)e^x$.

5.【解】 令 $x - t = u$, 有 $\int_0^x t f(x - t) dt = \int_x^0 (x - u) f(u) (-du) = x \int_0^x f(u) du - \int_0^x u f(u) du$, 原方程化为

$f(x) = e^x + x \int_0^x f(u) du - \int_0^x u f(u) du$, 令 $x = 0$, 得 $f(0) = 1$.

将上述方程两边对 x 求导得 $f'(x) = e^x + \int_0^x f(u) du + xf(x) - xf(x)$, 即 $f'(x) = e^x + \int_0^x f(u) du$, 易见有 $f'(0) = 1$.

再对上述方程两端求导可得 $f''(x) - f(x) = e^x$. 解该二阶常系数微分方程得 $f(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + \frac{1}{2} x e^x$, 又

$f(0) = 1, f'(0) = 1$, 得 $C_1 = \frac{1}{4}, C_2 = \frac{3}{4}$, 故得解 $f(x) = \frac{1}{4} e^{-x} + \frac{3}{4} e^x + \frac{1}{2} x e^x$.

6.【解】 (1) $(3x^3 - 2f(x))ydx - (x^2 f'(x) + \sin y)dy = 0$ 为全微分方程的充要条件是

$\frac{\partial}{\partial y}(3x^3 - 2f(x))y = -\frac{\partial}{\partial x}(x^2 f'(x) + \sin y)$, 即 $3x^3 - 2f(x) = -2xf'(x) - x^2 f''(x)$, 即

$x^2 f''(x) + 2xf'(x) - 2f(x) = -3x^3$. 此为欧拉方程.

由于 $x > 0$, 令 $x = e^t$, 原方程化为 $\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = -3e^{3t}$, 其中 $y = f(x) = f(e^t)$. 解之得通解 $y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t - \frac{3}{10} e^{3t}$, 还原为 $f(x), f(x) = \frac{C_1}{x^2} + C_2 x - \frac{3}{10} x^3$. 又由初始条件 $f(1) = 0, f'(1) = 0$ 可得 $C_1 = -\frac{1}{5}, C_2 = \frac{1}{2}$, 于是得 $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{5x^2} - \frac{3}{10} x^3$.

(2) 以 $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{5x^2} - \frac{3}{10} x^3$ 代入 $(3x^3 - 2f(x))ydx - (x^2 f'(x) + \sin y)dy = 0$,

得 $(-x + \frac{2}{5x^2} + \frac{18}{5} x^3)ydx + (-\frac{x^2}{2} - \frac{2}{5x} + \frac{9}{10} x^4)dy - \sin y dy = 0$. 由 (1) 中推导, 它是个全微分方程. 由观察

法可看出上式就是 $d((-\frac{x^2}{2} - \frac{2}{5x} + \frac{9}{10} x^4)y + \cos y) = 0$, 得通解 $(-\frac{x^2}{2} - \frac{2}{5x} + \frac{9}{10} x^4)y + \cos y = C$.

7.【解】 由 $t = \tan x$ 得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = (1 + t^2) \frac{dy}{dt}, \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \left[2t \cdot \frac{dy}{dt} + (1 + t^2) \frac{d^2 y}{dt^2} \right] \cdot (1 + t^2) \Rightarrow$$



$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2t(1+t^2) \frac{dy}{dt} + (1+t^2)^2 \frac{d^2 y}{dt^2}$, 代入原方程可得

$$\left[2t(1+t^2) \frac{dy}{dt} + (1+t^2)^2 \frac{d^2 y}{dt^2} \right] \frac{1}{(1+t^2)^2} + \frac{2}{(1+t^2)} \left(1 - \frac{t}{1+t^2} \right) (1+t^2) \frac{dy}{dt} + y = e^{-t},$$

整理得 $\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + y = e^{-t}$, 特征方程为 $r^2 + 2r + 1 = 0$, 齐次方程的通解 $Y = (C_1 + C_2 t)e^{-t}$, 设特解 $y^* = At^2 e^{-t}$,

代入方程求得 $y^* = \frac{1}{2} t^2 e^{-t}$,

于是该方程的通解为 $y = (C_1 + C_2 t)e^{-t} + \frac{1}{2} t^2 e^{-t}$, 即 $y = (C_1 + C_2 \tan x + \frac{1}{2} \tan^2 x) e^{-\tan x}$.

8. 【解】 $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$, 令 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x f'}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y f'}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{x^2 f''}{x^2 + y^2} + \frac{y^2 f'}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$, 同样有 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{y^2 f''}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 f'}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$, 代入题设方程有 $f'' - f = r^2$, 解之得

$$f(r) = C_1 e^r + C_2 e^{-r} - 2 - r^2.$$

9. 【解】 由题知该旋转体的形心位于 x 轴上, 由形心公式, $\bar{x} = \frac{\pi \int_0^t x y^2(x) dx}{\pi \int_0^t y^2(x) dx}$, 于是得方程 $\pi \int_0^t x y^2(x) dx =$

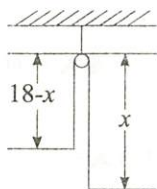
$\frac{4}{5} t \pi \int_0^t y^2(x) dx$. 两边对 t 求导两次并化简得 $2ty'(t) - 3y(t) = 0$. 解得 $y(t) = Ct^{\frac{3}{2}}$ 或写成 $y(x) = Cx^{\frac{3}{2}}$, $C \neq 0$ 为任意常数.

10. 【解】 曲边梯形的面积 $S_D = \int_0^x y(t) dt$, $t \in [0, x]$, 曲线 $y = y(x)$ 的弧长 $L = \int_0^x \sqrt{y'^2(t) + 1} dt$. 由题意条件 $S_D = L$, 有 $\int_0^x y(t) dt = \int_0^x \sqrt{y'^2(t) + 1} dt$, 将该式两边对 x 求导并平方得 $y^2 = y'^2 + 1$. 解之, 并由 $y(0) = 1$ 得 $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

11. 【解】 如图, 链全长为 18 米, 设在 t 时一端下垂 x 米, 则另一端下垂 $(18-x)$ 米, 使物体运动的外力为 $[x - (18-x)]\rho g$ (牛顿) (其中 ρ 为线密度), 由牛顿第二定律

$$\begin{cases} 18\rho \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = (x - (18-x))\rho g, & (\text{即 } \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{g}{9}x = -g) \\ x(0) = 10, x'(0) = 0. \end{cases}$$

解之得 $x = \frac{1}{2} e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t} + \frac{1}{2} e^{-\frac{\sqrt{g}}{3}t} + 9$, 再由 $x(t) = 18$ 求出 $t = \frac{3}{\sqrt{g}} \ln(9 + \sqrt{80})$ (秒).



第 11 题图

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



第二篇 线性代数

第一章 行列式

1. 160

【解析】

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= -80 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 160.$$

2. $a^5 + b^5$

【解析】按第5行展开,再用公式(1.5).

$$\text{原式} = b(-1)^{5+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & a & b & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + a(-1)^{5+5} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & a & b & 0 \\ a & b & 0 & 0 \end{vmatrix} = a^5 + b^5.$$

3. 3 或 -2

【解析】

$$\text{由范德蒙行列式} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = (x-3)(-2-3)(-2-x) = 0$$

故 $x = 3$ 或 $x = -2$.

4. $-\frac{9}{4}$

【解析】

由 $|kA| = k^n |A|$, $|A^T| = |A|$, $|A^{-1}| = |A|^{-1}$, 有

$$|-|A^T|B^{-1}| = (-|A|)^4 |B^{-1}| = (-3)^4 \cdot \left(-\frac{1}{36}\right) = -\frac{9}{4}.$$

5. 2

【解析】

由矩阵方程 $BA = B + 2E$ 得 $B(A - E) = 2E$, 两边取行列式有

$$|B(A - E)| = |2E| \quad \text{即} \quad |B| |A - E| = 2^2 |E| = 4$$

又因 $|A - E| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, 故 $|B| = 2$. 利用 $|A^*| = |A|^{n-1}$ 可知 $|B^*| = |B|^{2-1} = 2$.

6. B



$$\begin{aligned} \text{【解析】} \quad & \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 3a_1 & 3b_1 & 3c_1 \\ a_3 - 2a_1 & b_3 - 2b_1 & c_3 - 2c_1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 - 2a_1 & b_3 - 2b_1 & c_3 - 2c_1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ & = -3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -3m. \end{aligned}$$

请说出每一步所用的行列式的性质.

7. D

【解析】 利用行列式的性质,有

$$\begin{aligned} |\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1 + \beta_2| &= |\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1| + |\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_2| \\ &= -|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1| - |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2| \\ &= -m + |\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3| = n - m. \end{aligned}$$

8. C

【解析】 利用拉普拉斯(1.6)和 $|kA| = k^n |A|$, 有

$$\begin{vmatrix} O & 3B \\ -A & O \end{vmatrix} = (-1)^{nm} \begin{vmatrix} 3B & O \\ O & -A \end{vmatrix} = (-1)^{nm} |-A| \cdot |3B| = (-1)^{nm} (-1)^n \cdot 3^m |A| |B| = (-1)^{n(m+1)} 3^m ab.$$

9. C

【解析】 本题考查的是 $|A| = 0$ 的必要条件,而选项(A)(B)(D)均是 $|A| = 0$ 的充分条件,并不必要.

$|A| = 0 \Leftrightarrow A$ 的行(列)向量组线性相关

$\Leftrightarrow$ 有一行(列)向量可由其余的行(列)向量线性表出.

注意 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 0$, 说明(A)(D)均不正确, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, 说明(B)不正确.

10. 【证明】 $|\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1, \alpha_1 + \alpha_1| = |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_1 + \alpha_1, \alpha_3 + \alpha_1, \alpha_1 + \alpha_1| = 0.$

第二章 矩 阵

1. a_{n1}

【解析】 $x^T Ax + x^T Ay - y^T Ax - y^T Ay = x^T A(x+y) - y^T A(x+y) = (x^T - y^T)A(x+y)$

$$= (x - y)^T A(x + y) = (0, 0, \dots, 0, 1) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = a_{n1}.$$

2. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{bmatrix}$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



【解析】 由于 $\begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}$, 及 $\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}$

那么将 A 分块如下: $A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{记}} \begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}$, 立即有 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{bmatrix}$.

3. $\frac{1}{5}(2E-A)$

【解析】 因为 $A^2 + 3A - 5E = (A + 5E)(A - 2E) + 5E = O$

所以 $(A + 5E) \cdot \frac{1}{5}(2E - A) = E$ 故 $(A + 5E)^{-1} = \frac{1}{5}(2E - A)$.

4. $\begin{bmatrix} 4 & -7 & 11 \\ -1 & 6 & -6 \end{bmatrix}$

【解析】 由于 A 不是可逆矩阵, 故可设 $X = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}$

则 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 10 & -2 \\ 7 & 9 & 3 \end{bmatrix}$ 即 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + 2y_2 = 5 \\ 2y_1 + 4y_2 = 10 \\ 3y_1 + 5y_2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 + 2z_2 = -1 \\ 2z_1 + 4z_2 = -2 \\ 3z_1 + 5z_2 = 3 \end{cases}$

解出 $x_1 = 4, x_2 = -1; y_1 = -7, y_2 = 6; z_1 = 11, z_2 = -6$ 故 $X = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 11 \\ -1 & 6 & -6 \end{bmatrix}$.

5. $\neq 3, = 5$

【解析】 (1) $\begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 0 & -1-2a & a+2 & 1 \\ 0 & 10-a & -5 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 0 & -1-2a & a+2 & 1 \\ 0 & 9-3a & a-3 & 0 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a-3 & -1 & 2 \\ 0 & a+5 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & a-3 & 0 \end{bmatrix}$ 因为秩 $r(A) = 3$, 所以 $a \neq 3$.

(2) 因 B 可逆, 故 $r(AB) = r(A) = 2, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & a & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & a-4 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & a-5 & 0 \end{bmatrix}$.

$r(A) = 2 \Leftrightarrow a = 5$.

6. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

【解析】 由 $A = PBQ$ 有 $B = P^{-1}AQ^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.



$$7. \begin{bmatrix} 9 & 9 & 0 & 0 \\ 18 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 27 & 108 \\ 0 & 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}$$

【解析】 因 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^3 = 3^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 18 & 18 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^3 = \left(3E + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^3 = 3^3 E + 3 \cdot (3E)^2 \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 27 & 108 \\ 0 & 27 \end{bmatrix}, \text{ 由 } \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} A^n & O \\ O & B^n \end{bmatrix} \text{ 故 } A^3 = \begin{bmatrix} 9 & 9 & 0 & 0 \\ 18 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 27 & 108 \\ 0 & 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}.$$

8. A

【解析】 说明命题不成立, 只要举出一个特例不成立即可. 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 则 $AA^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 故 $AA^T \neq A^T A$. 故选(A). 举特例越简单越好, 只要能说明问题就好.

注意因 $EA = AE$, 故 $(E+A)(E-A) = E - A^2 = (E-A)(E+A)$. 又 $AA^{-1} = A^{-1}A = E, AA^* = A^*A = |A|E$.

9. C

【解析】 用定义, $A^T = A, B^T = -B$, 那么

$$(AB + BA)^T = (AB)^T + (BA)^T = B^T A^T + A^T B^T = -(AB + BA).$$

注意 $AB - BA$ 与 BAB 是对称矩阵, $(AB)^2$ 既不是对称阵, 也不是反对称阵.

10. B

【解析】 $|A^* B^T| = |A^*| \cdot |B^T| = |A|^{n-1} \cdot |B| \neq 0$

注意(A)中反例 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, (C)中反例 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, (D)中反例 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

注意(D)没有方阵的条件.

11. D

【解析】 注意 $A^2 = (E - 2\alpha^T \alpha)(E - 2\alpha^T \alpha) = E - 4\alpha^T \alpha + 4\alpha^T \alpha \alpha^T \alpha = E$,

且 $A^T = (E - 2\alpha^T \alpha)^T = E^T - 2\alpha^T (\alpha^T)^T = A$.

因为 $A^2 = E$ 且 $A^T = A$ 所以(A)(B)(C)均正确.

12. B

【解析】 观察矩阵 A, B 元素之间的关系, 即 A 只作列变换即可得 B . 故(A)(D)可排除. 把矩阵 A 的第3列加到第2列, 再把1, 2两列互换就可得到矩阵 B , 故应选(B)(或者把 A 的1, 2两列互换, 再把第3列加到第1列). 所以

$$\text{即 } B = A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = AP_2 P_1 \text{ (或 } B = A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{, 但选项中没有.)}$$

第三章 向 量

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

1. -1

【解析】 向量 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示 $\Leftrightarrow$ 方程组 $x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 = \beta$ 无解 $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta)$.



$\alpha_2, \alpha_3, \beta$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & \vdots & 3 \\ 1 & a & -2 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -a & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & (a-3)(a+1) & \vdots & a-3 \end{bmatrix}$$

所以当 $a = -1$ 时, $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2 \neq r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) = 3 \Rightarrow \beta$ 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

2. $a \neq 3$

【解析】 因为任意的 3 维向量 β 都可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 必线性无关, 否则 $r(A) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) < 3$. 总可找出适当的 β 使 $r(\bar{A}) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) = 3$, 即方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$ 可以无解, 与题设矛盾.

$$\text{由 } |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2(a-3) \neq 0, \text{ 知 } a \neq 3.$$

3. $a \neq 1$ 且 $a \neq \frac{1}{2}$.

4. $a = -2$

【解析】 经初等变换向量组的秩不变

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & a & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2a+4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可见 $a = -2$.

易见 α_1, α_2 线性无关, 由秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$ 可知 α_3 必可由 α_1, α_2 线性表示方程组有解亦可求出 a .

5. $(-1, -1, \dots, -1, n)^T$

【解析】 $\beta = -\alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_{n-1} + n\alpha_n$.

$$6. \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

【解析】 由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵设为 C , 则 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]C = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]$,

$$\text{故 } C = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^{-1}[\beta_1, \beta_2, \beta_3] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

7. C

【解析】 方法一 利用排除法, 把显然是线性相关的向量组排除.

(A) 因 α_3 是零向量, 故有 $0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 1 \cdot \alpha_3 = 0$, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

(B) $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 是 4 个 3 维向量, 向量个数超过维数, 则 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 必线性相关.

(D) $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 是 4 个 4 维向量, 由其组成的矩阵的行列式为

$$|\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

故 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 线性相关. (或方程组 $[\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4]x = 0$ 有解 $(1, -2, 1, 0)^T$, 即有 $\eta_1 - 2\eta_2 + \eta_3 + 0\eta_4 = 0$, $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 线性相关.) 由排除法知, 应选 (C).

方法二 选项 (C) 中向量 ξ_1, ξ_2, ξ_3 去除第 1, 3 个分量, 得缩短的向量为 $\xi'_1 = (1, 0, 0)^T, \xi'_2 = (0, 1, 0)^T,$



$\xi'_3 = (0, 0, 1)^T$ 是线性无关的基本向量, 添加分量成 ξ_1, ξ_2, ξ_3 后仍线性无关, 故应选(C).

8. C.

9. A.

10. B.

11. D.

12. B

【解析】 用极大线性无关组的定义判别. 因 $r(I) = r \Leftrightarrow (I)$ 的极大线性无关组中向量个数是 $r \Leftrightarrow (I)$ 中有 r 个向量线性无关, 任意 $r+1$ 个必线性相关, 所以(B) 正确.

由于不要求任何 r 个向量都是极大线性无关组, (C) 不正确. (I) 中可以有零向量, 故(A) 不正确, (I) 可以是线性无关的, 即 $s = r$, (D) 不正确.

13. 【解】 $a = 0$ 时, β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出. $a \neq 0$ 时, $\beta = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\alpha_1 + \left(k + \frac{1}{a}\right)\alpha_2 + k\alpha_3$. k 是任意常数.

14. 【解】 极大线性无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ (或 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$ 或 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 或 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5$), $r[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5] = 3$.

$$\alpha_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_4, \alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4.$$

15. 【解】 提示: 利用关系式 $[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n] = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]C$.

若 C 可逆, 则 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$.

16. 【解】 提示: A 可逆 $\Leftrightarrow r[A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)] = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = n = r[A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_n]$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

第四章 线性方程组

1. $a = -1$.

2. D

【解析】 注意(B) A 可能不是方阵. (A) $Ax = b$ 可能的无解. (C) 可能 $r(A|b) = n+1$.

3. D

【解析】 当 $n < m$ 时, $A_{m \times n}, B_{n \times m}, AB$ 是 m 阶方阵, 且 $r(AB) \leq r(A) \leq n < m, ABx = 0$ 必有非零解.

4. C

5. B

【解析】 $\alpha_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 是否是方程组的解, 可以考查是否属于通解, 即是否存在 k_1, k_2 , 使得 $\alpha_i = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \eta$. 即 $\alpha_i - \eta = k_1\xi_1 + k_2\xi_2$, $\alpha_i - \eta$ 能否由 ξ_1, ξ_2 线性表出.

6. 【解】 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = -3$ 时, 方程组无解; $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq -3$ 时, 方程组有唯一解, 其解为

$$\left(\frac{2-\lambda^2}{\lambda(\lambda+3)}, \frac{2\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)}, \frac{\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)} \right)^T.$$

7. 【解】 $AB = O, B$ 的列都是 $Ax = 0$ 的解, $k \neq 9$ 时, $r(B) = 2$, 必有 $r(A) = 1$, 通解为 $k_1(1, 2, 3)^T + k_2(3, 6, k)^T$; $k = 9$ 时, $r(B) = 1$, 当 $r(A) = 2$ 时, 通解为 $k(1, 2, 3)^T$; 当 $r(A) = 1$ 时, 通解为 $k_1(b, -a, 0)^T + k_2(c, 0, -a)^T$.

8. 【解】 将方程组的增广矩阵作初等行变换化成阶梯形矩阵:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 2 & 3 & 11 \\ -3 & 1 & -4 & -2 & -6 \\ -1 & -9 & 0 & 3 & 15 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & -14 & 2 & 7 & 27 \\ 0 & -14 & 2 & 6 & 26 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & -14 & 2 & 7 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right],$$

求得通解为 $k(-9, 1, 7, 0)^T + (-12, 0, 10, 1)^T$, 其中 k 为任意常数.



由通解知 $x_1 = -9k - 12, x_2 = k$, 令 $x_1 = x_2$, 即 $-9k - 12 = k$, 得 $k = -\frac{6}{5}$. 故满足方程组且满足 $x_1 = x_2$ 的解为

$$-\frac{6}{5}(-9, 1, 7, 0)^T + (-12, 0, 10, 1)^T = \left(-\frac{6}{5}, -\frac{6}{5}, \frac{8}{5}, 1\right)^T.$$

或直接求解联立方程 $\begin{cases} Ax = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$.

9. 【解】 提示: $A_{m \times n}x = b$ 有唯一解 $\Leftrightarrow r(A) = r[A | b] = n \Leftrightarrow r(A^T A)_{n \times n} = r(A) = n \Leftrightarrow A^T A$ 可逆. $Ax = b$ 两端左乘 A^T 及 $(A^T A)^{-1}$, 得唯一解 $x = (A^T A)^{-1} A^T b$.

10. 【解】 (1) 由题条件知 $r(A) = 1, r(B) = 2, r\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leq r(A) + r(B) < 4, \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}x = 0$ 有非零解, 即 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$ 有非零公共解. 或 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2$ 五个四维向量必线性相关, 存在不全为零的数 $k_1, k_2, k_3, \lambda_1, \lambda_2$ 使 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3 + \lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2 = 0$, 则 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3 = -\lambda_1\eta_1 - \lambda_2\eta_2 \neq 0$.

故 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$ 有非零公共解 $\alpha = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3$ (或 $-\lambda_1\eta_1 - \lambda_2\eta_2$)

$$(2) [\xi_1, \xi_2, \xi_3 | \eta_1, \eta_2] = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 7 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & 14 & 10 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

因 η_1, η_2 均可由 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性表出, 故 $\mu_1\eta_1 + \mu_2\eta_2$ 即是 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$ 的公共解.

第五章 特征值、特征向量、相似矩阵

1. 3

【解析】 设 A 的特征向量 ξ 所对应的特征值为 λ , 则有 $A\xi = \lambda\xi$, 即

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & a \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{cases} 2 - 2 + 1 = \lambda, \\ 5 - 3 - a = -\lambda, \text{ 解得 } a = 3. \\ 1 - 2 + 0 = -\lambda. \end{cases}$$

2. $0, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$

【解析】 A 是实对称阵, 其余的特征向量为 $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$, 因不同特征值对应的特征向量相互正交, 且有

$$(A - \lambda_1 \xi_1 \xi_1^T) \xi_i = A \xi_i - \lambda_1 \xi_1 \xi_1^T \xi_i = \begin{cases} 0, & i = 1, \\ A \xi_i = \lambda_i \xi_i, & i \neq 1, \end{cases} \text{ 故知 } A - \lambda_1 \xi_1 \xi_1^T \text{ 有特征值 } 0, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n.$$

3. B

【解析】 因 $r(A) = 1, A$ 是三阶矩阵 (至少二重), 也可能三重, 如 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 一重是不可能的.

4. C

【解析】 四个三阶矩阵的特征值均是 $1, 1, 2, \lambda = 1$ 是二重特征值, 存在多重特征值时, 若对应线性无关特征向量个数等于特征值重数, 则该矩阵能相似于对角阵. (C) 中 $\lambda = 1$ 时, 对应有两个线性无关特征向量, 故 (C) 能相似于对角阵.

5. C



【解析】 要注意:(1)特征值和对应的特征向量排列次序应一致,(B)不是;(2)不同特征值对应的特征向量之和不再是特征向量,(A)(D)不是;(3) α_1, α_2 是 $\lambda=1$ 的特征向量, $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$ (k_1, k_2 不同时为零)仍是 $\lambda=1$ 的特征向量.

6.【解】 A, B 均是实对称阵,它们均可相似于对角阵,而 $|\lambda E - A| = 0$ 及 $|\lambda E - B| = 0$,解得相同的特征值4, 1, -2,故 A, B 相似于同一个对角阵,由相似关系的传递性,得 $A \sim B$.

或由观察:将 A 的1,2行互换得 C ,再得 C 的1,2列互换得 B ,即 $E_{12}AE_{12} = E_{12}^{-1}AE_{12} = B$,故 $A \sim B$.

$$7.【解】 \lambda_1 = 5, \lambda_2 = \lambda_3 = -1, Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

8.【解】 由 $\beta = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3$,解得 $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$.

$$\beta = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3, A^{100}\beta = A^{100}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) = \xi_1 + (-2)^{100}\xi_2 + 3^{100}\xi_3 = \begin{bmatrix} 1 + 2^{100} + 3^{100} \\ -2 + 3^{100} \\ 1 - 2^{100} + 3^{100} \end{bmatrix}.$$

本题也可先由 λ, ξ 求出 A ,再计算 $A^{100}\beta$,但计算较繁.

9.【解】 (1)由题设条件知: $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1 = \alpha_1$,故 $A^k\alpha_1 = \lambda_1^k\alpha_1 = \alpha_1$,从而有

$$B\alpha_1 = (A^5 - 4A^3 + E)\alpha_1 = \alpha_1 - 4\alpha_1 + \alpha_1 = -2\alpha_1,$$

知 α_1 是 B 的对应于特征值 $\lambda = -2$ 的特征向量.

又 A 有特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$. $B = f(A)$,其中 $f(x) = x^5 - 4x^3 + 1$,故 B 有特征值 $\mu_i = f(\lambda_i), i = 1, 2, 3$,其中 $\mu_1 = -2, \mu_2 = f(2) = 1, \mu_3 = f(-2) = 1$,因 $\mu_2 = \mu_3 = 1$,故 B 的对应于 $\mu_2 = \mu_3 = 1$ 的特征向量应与 $\mu_1 = -2$ 对应的特征向量 α_1 正交.设特征向量为 $\alpha = (x_1, x_2, x_3)^T$,则 $\alpha_1^T\alpha = x_1 - x_2 + x_3 = 0$,可解得 $\mu_2 = \mu_3 = 1$ 对应的特征向量为

$$\alpha_2 = (1, 1, 0)^T, \alpha_3 = (1, -1, -2)^T.$$

(2)方法一 取 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$,则 $B = PAP^{-1}$

$$\text{其中 } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$B = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

方法二 将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 单位化(α_2, α_3 已正交)

$$\alpha_1^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T, \alpha_2^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T, \alpha_3^0 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, -2)^T,$$

$$\text{得正交阵 } Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

$$B = Q\Lambda Q^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)



第六章 二次型

$$1. A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2. A = \begin{bmatrix} a_1 a_2 & \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{2} & \frac{a_1 c_2 + a_2 c_1}{2} \\ \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{2} & b_1 b_2 & \frac{b_1 c_2 + b_2 c_1}{2} \\ \frac{a_1 c_2 + a_2 c_1}{2} & \frac{b_1 c_2 + b_2 c_1}{2} & c_1 c_2 \end{bmatrix}. \text{注意必须是对称阵.}$$

3. D

【解析】提示:(A),(B)是必要条件,但不是充分条件;(C)是充分条件,但不是必要条件.(D)正确请读者证明.

4. C

【解析】提示:关键是正、负惯性指数一致,且只需讨论 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 的正、负惯性指数即可. $f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x = (x_1 + 2x_2)^2 - 3x_2^2 - x_3^2$, 知 $p = 1 \cdot 8 = 2$, 故选(C).

5. C

【解】设 f 的正惯性指数为 p , 负惯性指数为 q , 则 $-f$ 的正惯性指数为 q , 负惯性指数为 p , 有 $f \sim -f$, 故 $p = q$, 从而知 $r = p + q = 2p, s = p - q = 0$, 故选(C).

6. D

【解】(B)中 $a_{22} = 0$, (C)中 $a_{33} = -2$. (A)中 a_{33} 的余子式 $M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 < 0$ (二阶顺序主子式), 不满足 A 正定的必要条件, 应排除. 或直接用顺序主子式全部大于零. 判别(D)是正定的.

7. 【解】 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4(x_2 + \frac{1}{2}x_3)^2 - 5x_3^2 = y_1^2 + 4y_2^2 - 5y_3^2$.

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + \frac{5}{2}y_3, \\ x_2 = y_2 - \frac{1}{2}y_3, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$$

$$8. A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, f = -y_1^2 - y_2^2 + 8y_3^2.$$

$$9. -\frac{4}{5} < a < 0.$$

10. 若 $s > n$, 不正定; 若 $s = n$ 或 $s < n$, 正定.



第三篇 概率论与数理统计

第一章 随机事件和概率

1.1

【解析】 $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(\overline{\bar{A} \cup \bar{B}}) = 1 - P(AB)$,

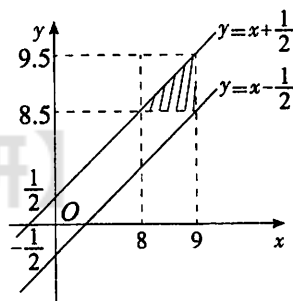
而 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. 由 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = 1$, 得 $P(AB) = 0$

所以 $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1$.

2. $\frac{1}{2}$

【解析】 设甲和乙两个到达的时刻分别为 X 和 Y , 则 $8 \leq X \leq 9$, $8.5 \leq Y \leq 9.5$. 若要甲和乙相遇则必须 $|X - Y| \leq \frac{1}{2}$. 这是一个几何型概率. 如右图所示, $P\{|X - Y| \leq \frac{1}{2}\}$ 为右图阴影部分所占的概率. 也就是阴影部分在正方形 $8 \leq x \leq 9$, $8.5 \leq y \leq 9.5$ 中所占的面积比

$$P\{|X - Y| \leq \frac{1}{2}\} = \frac{1}{2}.$$



第2题图

3. $\frac{3}{5}$

【解析】 此题可理解成: 将五个球排成一行, 逐个取出, 前3次中取到白球, 就是5个球中唯一白球放在前3位中. 白球有5个位号可放, 出现在前3位的概率 $\frac{3}{5}$.

4. B

【解析】 由已知事件 A 与 B 同时发生时, 事件 C 必发生知 $AB \subset C$, 所以 $P(AB) \leq P(C)$, 又 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, 得 $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$, 而 $P(A \cup B) \leq 1$, 代入得 $P(C) \geq P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq P(A) + P(B) - 1$, 故选 (B).

5. D

$$\begin{aligned} \text{【解析】 } P(A_1 \cup A_2 | B) &= \frac{P((A_1 \cup A_2)B)}{P(B)} = \frac{P(A_1B \cup A_2B)}{P(B)} = \frac{P(A_1B) + P(A_2B) - P(A_1A_2B)}{P(B)} \\ &= P(A_1 | B) + P(A_2 | B) - \frac{P(A_1A_2B)}{P(B)}. \end{aligned}$$

由 $P(A_1 \cup A_2 | B) = P(A_1 | B) + P(A_2 | B)$, 得到 $P(A_1A_2B) = 0$,

而 $P((A_1 \cup A_2)B) = P(A_1B \cup A_2B) = P(A_1B) + P(A_2B) - P(A_1A_2B) = P(A_1B) + P(A_2B)$, 即 (D) 成立, 故答案应为 (D).

6. C

【解析】 所求概率为古典概型, $P(A) = \frac{m}{n}$.



n 为 10 个座位中任选 6 个座位 —— C_{10}^6 .

m 为除了 4 个指定的座位外, 还得从余下的 6 个座位中任选 2 个 —— C_6^2 .

故 $P(A) = \frac{C_6^2}{C_{10}^6} = \frac{1}{14}$. 答案选(C).

7. C

【解析】 设事件 $A = \{\text{从混合的球中任取一个球为白球}\}$; $B_i = \{\text{从甲袋中取出球中有 } i \text{ 个白球}\}, i = 0, 1,$

2. B_0, B_1, B_2 是完备事件组.

$$\text{用全概率公式: } P(A) = \sum_{i=0}^2 P(B_i)P(A|B_i) = \frac{C_2^2}{C_5^2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{C_2^0}{C_5^2} \cdot \frac{3}{3} = \frac{3}{5}.$$

故选(C).

8. C

【解析】 方法一: 设掷一枚硬币 5 次中正面向上出现 k 次的概率为 $P_5(k)$. $k = 0, 1, 2, \dots, 5$. 显然, 根据

$$\text{伯努利试验 } P_5(k) = C_5^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{5-k} = C_5^k \left(\frac{1}{2}\right)^5.$$

5 次中出现正面向上次数多于反面向上的次数, 也就有 $k = 3, 4, 5$.

$$\text{故所有概率为 } P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = (C_5^3 + C_5^4 + C_5^5) \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2}.$$

方法二: 总共掷硬币 5 次, 不是正面向上次数多于反面向上的次数, 就是反面向上次数多于正面向上的次数, 由对称性知, 这两件事概率相等, 且它们之和为 1, 所以每个概率都为 $\frac{1}{2}$. 故选(C).

9. 【解】 设事件 $A_1 = \{\text{至少一件为次品}\}$. $A_2 = \{\text{两件都是次品}\}$

已知其中有一次品, 另一件也是次品的概率应为 $P\{A_2 | A_1\} = \frac{P\{A_1 A_2\}}{P(A_1)}$

$$P(A_1) = 1 - P(\bar{A}_1) = 1 - \frac{C_8^2}{C_{10}^2}, \text{ 而 } P(A_1 A_2) = P(A_2) = \frac{C_2^2}{C_{10}^2}$$

$$\text{所以 } P\{A_2 | A_1\} = \frac{C_2^2 / C_{10}^2}{1 - C_8^2 / C_{10}^2} = \frac{C_2^2}{C_{10}^2 - C_8^2} = \frac{1}{5}.$$

10. 【解】 设事件 $A_i = \{\text{盒中原有 } i \text{ 只铜螺母}\}, i = 0, 1, \dots, 10;$

$B = \{\text{取出一个螺母为铜螺母}\}.$

显然 $A_0, A_1, \dots, A_{10}$ 是完备事件组, 且 $P(A_i) = \frac{1}{11}, i = 0, 1, \dots, 10.$

$$P(B) = \sum_{i=0}^{10} P(A_i)P(B|A_i) = \sum_{i=0}^{10} \frac{1}{11} \cdot \frac{i+1}{10+1} = \frac{1}{11} \cdot \frac{66}{11} = \frac{6}{11}.$$

第二章 随机变量及其概率分布

$$1. \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^3, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x. \end{cases}$$

【解析】 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 之外为零. 在 $[0, 1]$ 上与 x^2 成正比, 则 $f(x)$ 必有形式

$$f(x) = \begin{cases} kx^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \text{ 其中 } k \text{ 为正的常数, 再由 } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \text{ 解得 } k = 3.$$



$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad \text{而 } F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^3, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x. \end{cases}$$

$$2. (1-p)^n + C_n^1 p(1-p)^{n-1}$$

【解析】 如果用 X 表示在 n 次独立试验中 A 发生的次数, 则 $X \sim B(n, p)$.

在 n 次独立试验中 A 至多发生一次的概率为

$$P\{X=0\} + P\{X=1\} = (1-p)^n + C_n^1 p(1-p)^{n-1}.$$

$$3. U[1, 2]$$

【解析】 $X \sim U[0, 1], Y = X + 1$. 设 X, Y 的密度函数, 分布函数分别为 $f_X(x), F_X(x), f_Y(y), F_Y(y)$.

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X + 1 \leq y\} = P\{X \leq y - 1\} = F_X(y - 1)$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = F'_X(y - 1) = f_X(y - 1) = \begin{cases} 1, & 1 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

所以 $Y = X + 1 \sim U[1, 2]$.

4. D

【解析】 $F(x)$ 可作为分布函数的充要条件是:

(1) $F(x_1) \leq F(x_2), x_1 < x_2$; (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$; (3) $F(x)$ 右连续.

(A) 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ 不存在, 不能选;

(B) 因为在 $x = 1$ 处 $F(x)$ 不右连续, 不能选;

(C) 因为在 $0 \leq x < 1$ 上不满足条件(1), 不能选. 只能选(D).

(D) 可以直接验证满足条件(1), (2), (3).

5. C

【解析】 由分布函数 $F(x)$ 的性质 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$. 可知

$$1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = a \lim_{x \rightarrow +\infty} F_1(x) - b \lim_{x \rightarrow +\infty} F_2(x) = a - b. \quad \text{选(C).}$$

6. C

【解析】 $X \sim B(2, p), Y \sim B(3, p). P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X = 0\} = 1 - (1-p)^2 = \frac{5}{9},$

解得 $p = \frac{1}{3}. P\{Y \geq 1\} = 1 - P\{Y = 0\} = 1 - (1-p)^3 = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}. \quad \text{选(C).}$

7. C

【解析】 $P\{X = i\} = \frac{a}{i(i+1)}, i = 1, 2, \dots.$

$$1 = \sum_{i=1}^{+\infty} P\{X = i\} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a}{i(i+1)} = a \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = a.$$

$$P\{X < 5\} = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}. \quad \text{选(C).}$$

8. B

【解析】 $f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-\frac{x^3}{3}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$

$$P\{|X| < 1\} = P\{-1 < X < 1\} = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_0^1 x^2 e^{-\frac{x^3}{3}} dx = 1 - e^{-\frac{1}{3}}. \quad \text{选(B).}$$

9. 【解】 X 的可能取值为 3, 4, 5. X 取 3 时, 另两个数只能 1 和 2. 所以 $P\{X = 3\} = \frac{1}{C_3^3}$. 当 X 为 4 时, 另两个球的

号码可以在 1, 2, 3 中任取两个. 故 $P\{X = 4\} = \frac{C_2^2}{C_3^3}$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



同理 $P\{X=5\} = \frac{C_3^2}{C_5^2}$, 于是得 X 的分布律为

X	3	4	5
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

10. 【解】 X 的概率密度 $f(x) = \frac{k}{1+x^2}, -\infty < x < +\infty$,

$$(1) \text{ 求常数 } k. 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{1+x^2} dx = k \cdot \pi \Rightarrow k = \frac{1}{\pi}.$$

$$(2) X \sim f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, -\infty < x < +\infty, Y = 1 - \sqrt[3]{X}$$

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{1 - \sqrt[3]{X} \leq y\} = P\{X \geq (1-y)^3\} = 1 - P\{X < (1-y)^3\} = 1 - F_X((1-y)^3)$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = -f((1-y)^3) \cdot 3(1-y)^2(-1) = 3(1-y)^2 f((1-y)^3)$$

$$= \frac{3(1-y)^2}{\pi[1+(1-y)^6]}, -\infty < y < +\infty.$$

第三章 多维随机变量及其分布

1.

Z	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

【解析】 X, Y 相互独立, 且具有同一分布.

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

现 $Z = \max(X, Y)$. 显然, Z 的可能取值必为 0, 1.

$$P\{Z=0\} = P\{\max(X, Y) = 0\} = P\{X=Y=0\} = P\{X=0, Y=0\}$$

$$= P\{X=0\}P\{Y=0\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$P\{Z=1\} = 1 - P\{Z=0\} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

即

Z	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

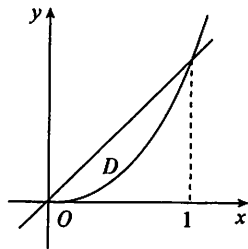
2. $f_X(x) = \begin{cases} 6(x-x^2), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

【解析】 (X, Y) 在 D 上均匀分布, $f(x, y) = \begin{cases} C, & (x, y) \in D, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

其中 $C = \frac{1}{S_D}$, D 的面积 $S_D = \int_0^1 (x-x^2) dx = \frac{1}{6}$.

所以 $f(x, y) = \begin{cases} 6, & 0 \leq x^2 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$

当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{x^2}^x 6 dy = 6(x-x^2)$



第2题图



$$f_X(x) = \begin{cases} 6(x-x^2), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

3. A

【解析】

X_1	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

且 $P\{X_1 X_2 = 0\} = 1$, 所以 $P\{X_1 X_2 \neq 0\} = 1 - P\{X_1 X_2 = 0\} = 0$

即有

$X_1 \backslash X_2$	0	1	2	
0				$\frac{1}{2}$
1		0	0	$\frac{1}{4}$
2		0	0	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	

进一步可得

$X_1 \backslash X_2$	0	1	2	
0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	

于是 $P\{X_1 = X_2\} = P\{X_1 = X_2 = 0\} + P\{X_1 = X_2 = 1\} + P\{X_1 = X_2 = 2\} = 0$. 故选(A).

4. D

【解析】 分布函数 $F(x)$ 的充要条件为 ① $F(x)$ 单调不减; ② $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$; ③ 右连续.

(A) $2F_1(x) - F_2(x)$ 不满足条件 ①;

(B) $F_1(x) + F_2(x)$ 不满足条件 ② $\lim_{x \rightarrow +\infty} [F_1(x) + F_2(x)] = 2$;

(C) $F_1(x) - \frac{1}{2}F_2(x)$ 不满足条件 ② $\lim_{x \rightarrow +\infty} [F_1(x) - \frac{1}{2}F_2(x)] = \frac{1}{2}$;

(D) $F_1(x)F_2(x)$ 满足条件 ①②③, 可以验证, 也可直接推导如下.

设 $X = \max(X_1, X_2)$, 且 X_1, X_2 相互独立则

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P\{X \leq x\} = P\{\max(X_1, X_2) \leq x\} = P\{X_1 \leq x, X_2 \leq x\} \\ &= P\{X_1 \leq x\}P\{X_2 \leq x\} = F_1(x)F_2(x). \end{aligned}$$

5. A

【解析】 X, Y 独立同分布, 且 $P\{X = 1\} = P\{Y = -1\} = \frac{1}{2}$, 可以得到

$$P\{X = -1\} = P\{Y = 1\} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} P\{X = Y\} &= P\{X = Y = -1\} + P\{X = Y = 1\} = P\{X = -1, Y = -1\} + P\{X = 1, Y = 1\} \\ &= P\{X = -1\}P\{Y = -1\} + P\{X = 1\}P\{Y = 1\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \quad \text{故选(A).} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{而 } P\{X + Y = 0\} &= P\{X = -1, Y = 1\} + P\{X = 1, Y = -1\} \\ &= P\{X = -1\}P\{Y = 1\} + P\{X = 1\}P\{Y = -1\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{XY = 1\} &= P\{X = 1, Y = 1\} + P\{X = -1, Y = -1\} \\ &= P\{X = 1\}P\{Y = 1\} + P\{X = -1\}P\{Y = -1\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

6. C

【解析】 $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{\max(1, X) \leq y\} = P\{1 \leq y, X \leq y\}.$

当 $y < 1$ 时, $F_Y(y) = 0$; 当 $y \geq 1$ 时 $F_Y(y) = P\{X \leq y\} = \int_0^y e^{-x} dx = 1 - e^{-y}.$



$$\text{故 } F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1, \\ 1 - e^{-y}, & y \geq 1, \end{cases} \quad \text{选(C).}$$

7.【解】 $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, f_X(x) > 0.$

$$\text{现 } f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} > 0, -\infty < x < +\infty,$$

所以, 当 $-\infty < x < +\infty$ 时,

$$f(x,y) = f_X(x)f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-y)^2} = \frac{1}{\pi} e^{-2x^2+2xy-y^2}, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty.$$

8.【解】 $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, f_X(x) > 0.$

$$\text{先求出 } f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int_0^x \frac{1}{x} dy, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

即 $X \sim U(0,1), f_X(x) > 0$ 等价于 $0 < x < 1.$

$$\text{当 } 0 < x < 1 \text{ 时, } f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\text{即, 当 } 0 < x < 1 \text{ 时, } f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

9.【解】 $X \sim B(n,p), Y \sim B(m,p), X$ 与 Y 独立. 可将 X 看成 n 次独立重复试验中成功次数.

$$\text{令 } X_i = \begin{cases} 1, & \text{在 } X \text{ 的 } n \text{ 次试验中第 } i \text{ 次试验成功,} \\ 0, & \text{在 } X \text{ 的 } n \text{ 次试验中第 } i \text{ 次试验失败,} \end{cases} i = 1, \dots, n, \text{ 显然 } X = X_1 + \dots + X_n,$$

$$\text{同样, 令 } Y_j = \begin{cases} 1, & \text{在 } Y \text{ 的 } m \text{ 次试验中第 } j \text{ 次试验成功,} \\ 0, & \text{在 } Y \text{ 的 } m \text{ 次试验中第 } j \text{ 次试验失败,} \end{cases} j = 1, \dots, m, \text{ 显然 } Y = Y_1 + \dots + Y_m.$$

由于 X, Y 独立, 所以 $X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ 是相互独立的.

$X+Y = X_1 + \dots + X_n + Y_1 + \dots + Y_m$ 可看成每次成功率均为 p 的 $n+m$ 次独立重复试验中成功的次数, 所以 $X+Y \sim B(n+m, p).$

10.【解】 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^2} e^{-\frac{x+y}{\lambda}}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 由于 $\frac{1}{\lambda^2} e^{-\frac{x+y}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} \cdot \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{y}{\lambda}}$

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y), f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{y}{\lambda}}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

$$(1) P\{X \leq \lambda, Y \leq 2\lambda\} = P\{X \leq \lambda\}P\{Y \leq 2\lambda\} = F_X(\lambda)F_Y(2\lambda) = (1 - e^{-1})(1 - e^{-2}).$$

$$(2) P\{X+Y \leq \lambda\} = \iint_{x+y \leq \lambda} f(x,y) dx dy = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^\lambda dx \int_0^{\lambda-x} e^{-\frac{x+y}{\lambda}} dy = 1 - \frac{2}{e}.$$

11.【解】 方法一: X, Y 独立, 分布律为

		Y		
		0	1	2
X	0	0.06	0.15	α
	1	β	0.35	0.21

$$\text{即有 } \frac{0.06}{\beta} = \frac{0.15}{0.35} = \frac{\alpha}{0.21}$$

$$\text{解得 } \alpha = 0.09, \beta = 0.14.$$

方法二: 利用 $P_{ij} = P_{i \cdot} \cdot P_{\cdot j}, 0.15 = (0.21 + \alpha) \cdot 0.5$, 解得 $\alpha = 0.09$, 从而 $\beta = 0.14$.

12.【解】 X_1, X_2, X_3, X_4 独立同分布,



$$\begin{array}{c|cc} X_i & 0 & 1 \\ \hline P & 0.6 & 0.4 \end{array}, \quad X = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix} = X_1 X_4 - X_2 X_3.$$

$X_1 X_4$ 的取值为 0 或 1. $P\{X_1 X_4 = 1\} = P\{X_1 = 1, X_4 = 1\} = P\{X_1 = 1\}P\{X_4 = 1\} = 0.4 \cdot 0.4 = 0.16$

故 $\begin{array}{c|cc} X_1 X_4 & 0 & 1 \\ \hline P & 0.84 & 0.16 \end{array}$ 同理 $X_2 X_3$ 与 $X_1 X_4$ 有相同的分布, 且相互独立.

$X = X_1 X_4 - X_2 X_3$ 的可能取值为 $-1, 0, 1$.

$$P\{X = -1\} = P\{X_1 X_4 - X_2 X_3 = -1\} = P\{X_1 X_4 = 0, X_2 X_3 = 1\} = P\{X_1 X_4 = 0\}P\{X_2 X_3 = 1\} \\ = 0.84 \cdot 0.16 = 0.1344.$$

$$P\{X = 1\} = P\{X_1 X_4 - X_2 X_3 = 1\} = P\{X_1 X_4 = 1, X_2 X_3 = 0\} = P\{X_1 X_4 = 1\}P\{X_2 X_3 = 0\} \\ = 0.16 \cdot 0.84 = 0.1344.$$

$$P\{X = 0\} = 1 - P\{X = -1\} - P\{X = 1\} = 0.7312.$$

总之 $\begin{array}{c|ccc} X & -1 & 0 & 1 \\ \hline P & 0.1344 & 0.7312 & 0.1344 \end{array}.$

13.【解】 (1) D 的面积为 1, 所以 $f(x, y) = \begin{cases} 1, & |y| < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_{-x}^x 1 dy = 2x, 0 < x < 1$$

$$\text{所以 } f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_{|y|}^1 1 dx = 1 - |y|, |y| < 1.$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 - |y|, & |y| < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(2) 由 $f_X(x) \cdot f_Y(y) \neq f(x, y)$ 知 X, Y 不独立.

14.【解】 G 的面积为 1, 所以 $f(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in G, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$\text{当 } 0 < x < 1, f_X(x) = \int_0^{2-2x} 1 dy = 2 - 2x.$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 2 - 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

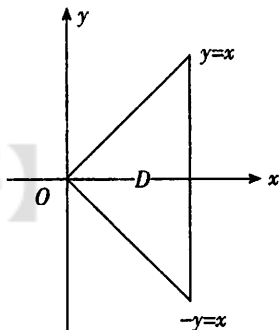
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_0^{\frac{2-y}{2}} 1 dx = \frac{2-y}{2}, 0 < y < 2$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 - \frac{y}{2}, & 0 < y < 2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

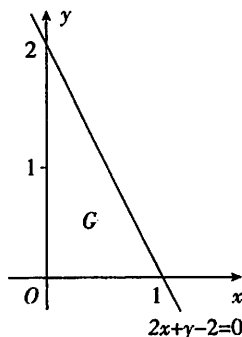
当 $f_X(x) > 0$, 也就是 $0 < x < 1$ 时,

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2-2x}, & 0 < y < 2-2x, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

当 $f_Y(y) > 0$, 即 $0 < y < 2$ 时,



第 13 题图



第 14 题图

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{2}{2-y}, & 0 < x < 1 - \frac{y}{2}, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

第四章 随机变量的数字特征

1. $\frac{3}{2}$

【解析】 $f(x) = Ae^{-x^2+2x-1}$, $-\infty < x < +\infty$, 即 $f(x) = Ae^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$, 这是正态分布 $N(1, \frac{1}{2})$ 的概率密度,

$$\text{所以 } E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

2. 0

【解析】 $X \sim E(1)$, $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$

$$E(X - 3e^{-2X}) = E(X) - 3E(e^{-2X}) = 1 - 3 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x} \cdot f(x) dx = 1 - 3 \int_0^{+\infty} e^{-2x} \cdot e^{-x} dx = 0.$$

3. B

【解析】 $D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2\text{Cov}(X,Y)$
 $= D(X) + D(Y) + 2[E(XY) - E(X) \cdot E(Y)] = D(X) + D(Y)$, 选(B).

4. C

【解析】 X 与 Y 都服从正态分布, 且不相干, (X,Y) 不一定服从正态分布. 因此得不出 X,Y 相互独立.

5. C

【解析】 $X \sim E(\lambda)$, 每个元件平均工作寿命应为 $EX = \frac{1}{\lambda}$. 每个元件工作寿命不超过平均寿命的概率应为

$$P\{X \leq EX\} = P\{X \leq \frac{1}{\lambda}\} = F(\frac{1}{\lambda}) = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-1}.$$

相互独立的 n 个元件工作寿命都不超过平均寿命的概率则为 $(1 - e^{-1})^n$, 而至少有一个元件工作超过平均寿命的概率为 $1 - (1 - e^{-1})^n = 3e^{-1} - 3e^{-2} + e^{-3}$, 可见 $n = 3$. 选(C).

6. B

【解析】 $X+Y = n$, $\text{Cov}(X+Y, X-Y) = \text{Cov}(n, X-Y) = 0$, $X+Y$ 与 $X-Y$ 的相关系数必为 0. 选(B).

7. 【解】 设随机变量 $X_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 号球进第 } i \text{ 号盒} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 号球没进第 } i \text{ 号盒} \end{cases}, i = 1, 2, \dots, n.$

X 为配对数, 所以 $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

$$\text{显然 } P\{X_i = 1\} = \frac{1}{n}, i = 1, 2, \dots, n, \text{ 也就有分布律 } \begin{array}{c|cc} X_i & 0 & 1 \\ \hline P & 1 - \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{array}. E(X_i) = \frac{1}{n}.$$

$$\text{所以 } E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = 1.$$

8. 【解】 $X \sim U[0, 60]$, 设游客等候时间为 Y , 则

$$Y = \begin{cases} 5 - X, & 0 \leq X \leq 5, \\ 25 - X, & 5 < X \leq 25, \\ 55 - X, & 25 < X \leq 55, \\ 65 - X, & 55 < X \leq 60, \end{cases}$$



$$\begin{aligned} E(Y) &= E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx = \int_0^{60} g(x) \frac{1}{60} dx \\ &= \int_0^5 (5-x) \frac{1}{60} dx + \int_5^{25} (25-x) \frac{1}{60} dx + \int_{25}^{55} (55-x) \frac{1}{60} dx + \int_{55}^{60} (65-x) \frac{1}{60} dx \\ &= \frac{35}{3}. \end{aligned}$$

9.【解】 方法一: $X_1 \sim E(\lambda_1), X_2 \sim E(\lambda_2)$, 平均无故障工作时间即为平均寿命.

$$E(X_1) = 1 = \frac{1}{\lambda_1}, E(X_2) = 0.5 = \frac{1}{\lambda_2}, \text{故 } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2,$$

$$f_1(x_1) = \begin{cases} e^{-x_1}, & x_1 > 0, \\ 0, & x_1 \leq 0, \end{cases} \quad f_2(x_2) = \begin{cases} 2e^{-2x_2}, & x_2 > 0, \\ 0, & x_2 \leq 0, \end{cases}$$

两个中间站是串联, 无故障时间 $Y = \min(X_1, X_2)$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \min(x_1, x_2) f_1(x_1) f_2(x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_0^{+\infty} dx_1 \int_{x_1}^{+\infty} x_1 e^{-x_1} \cdot 2e^{-2x_2} dx_2 + \int_0^{+\infty} dx_2 \int_{x_2}^{+\infty} x_2 e^{-x_1} \cdot 2e^{-2x_2} dx_1 \\ &= \int_0^{+\infty} x_1 e^{-3x_1} dx_1 + \int_0^{+\infty} 2x_2 e^{-3x_2} dx_2 = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3} \text{ (千小时)}. \end{aligned}$$

方法二: 两中间站是串联, 无故障时间 $Y = \min(X_1, X_2)$.

$Y \sim E(\lambda_1 + \lambda_2)$,

$$EY = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} \text{ (千小时)}.$$

10.【解】 方法一: X, Y 独立同分布, 均服从 $N(\mu, \sigma^2)$, $Z = \max(X, Y)$,

记 $X_1 = \frac{X-\mu}{\sigma}, Y_1 = \frac{Y-\mu}{\sigma}$ 相互独立均服从 $N(0, 1)$, $Z = \max(\mu + \sigma X_1, \mu + \sigma Y_1) = \mu + \sigma \max(X_1, Y_1)$.

$Z_1 = \max(X_1, Y_1)$ 的分布为 $[\Phi(z)]^2, E(Z) = \mu + \sigma E(Z_1)$.

$$\begin{aligned} E(Z_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot 2\Phi(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\Phi(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} d\left(\frac{x^2}{2}\right) = - \int_{-\infty}^{+\infty} 2\Phi(x) d(\varphi(x)) \\ &= -2\Phi(x)\varphi(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} 2\varphi(x)d(\Phi(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\varphi^2(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2 \cdot \frac{1}{2}}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

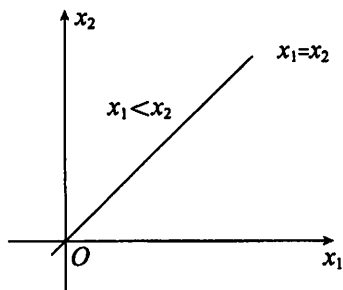
$$E(Z) = \mu + \sigma \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

方法二: $Z = \max(X, Y) = \frac{1}{2}(X+Y+|X-Y|), E(X) = E(Y) = \mu$.

$$\begin{aligned} Z_1 = X - Y &\sim N(0, 2\sigma^2), E|X-Y| = \int_{-\infty}^{+\infty} |z| \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{2\sigma}} e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} dz \\ &= 2 \int_0^{+\infty} z \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} dz = \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} d\left(\frac{z^2}{4\sigma^2}\right) = \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

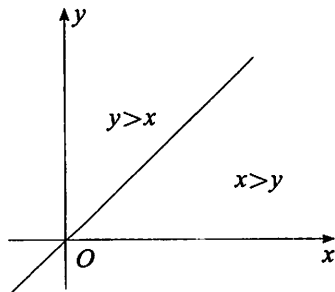
$$\begin{aligned} E(Z) &= E\left[\frac{1}{2}(X+Y+|X-Y|)\right] = \frac{1}{2}[E(X) + E(Y) + E|X-Y|] \\ &= \frac{1}{2}\left[\mu + \mu + \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}\right] = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

方法三: $Z = \max(X, Y)$



第 9 题图

题源探究同步练习



第 10 题图



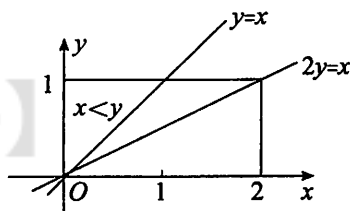
$$\begin{aligned} E(Z) &= E(\max(X, Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \max(x, y) f_X(x) f_Y(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} y \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2 + (y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy + \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^y x \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2 + (y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}. \quad (\text{上图}) \end{aligned}$$

11.【解】 每生产一个产品可以看成是一次独立的试验. 生产不合格品的概率为 p , 生产合格的概率应为 $q = 1 - p$. $X = k$ 时, 也就是开机后第一次停机已生产了 k 个产品. —— 前 $(k-1)$ 个为合格品, 第 k 个为不合格品故而停机. 故 $P\{X = k\} = q^{k-1}p, k = 1, 2, \dots$.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1}p = p \left(\sum_{k=1}^{+\infty} q^k \right)' = p \left(\frac{q}{1-q} \right)' = p \left(\frac{1}{1-q} - 1 \right)' = p \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}. \\ E(X^2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 q^{k-1}p = p \left(\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 q^k \right)' = p \left[\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)q^k - \sum_{k=0}^{+\infty} q^k \right]' = p \left[\left(\sum_{k=0}^{+\infty} q^{k+1} \right)' - \frac{1}{1-q} \right]' \\ &= p \left[\left(\frac{q}{1-q} \right)' - \frac{1}{1-q} \right]' = p \left[\frac{q}{(1-q)^2} \right]' = p \frac{q+1}{(1-q)^3} = \frac{2-p}{p^2}. \\ D(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}. \end{aligned}$$

12.【解】 (1) 方法一: 先求出 U, V 的分布, 它们都服从 0-1 分布, (X, Y) 在 G 上均匀分布. 相应的概率可用右图所占面积比来计算.

$$\begin{aligned} P\{U = 0\} &= P\{X \leq Y\} = \frac{1}{4}, \text{ 故 } \begin{array}{c|cc} U & 0 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}; \\ P\{V = 0\} &= P\{X \leq 2Y\} = \frac{1}{2}, \text{ 故 } \begin{array}{c|cc} V & 0 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}. \end{aligned}$$



第 12 题图

$$P\{U = 0, V = 0\} = P\{X \leq Y, X \leq 2Y\} = P\{X \leq Y\} = \frac{1}{4}. \text{ 故}$$

$U \backslash V$	0	1	
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

 $\Rightarrow$

$U \backslash V$	0	1	
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

方法二: 直接计算 (U, V) 分布, 还是利用上图,

$$\begin{aligned} P\{U = 0, V = 0\} &= P\{X \leq Y, X \leq 2Y\} = P\{X \leq Y\} = \frac{1}{4}, \\ P\{U = 0, V = 1\} &= P\{X \leq Y, X > 2Y\} = P(\emptyset) = 0 \\ P\{U = 1, V = 1\} &= P\{X > Y, X > 2Y\} = P\{X > 2Y\} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

故

$U \backslash V$	0	1	
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

 $\Rightarrow$

$U \backslash V$	0	1	
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

$$(2) \rho = \frac{\text{Cov}(U, V)}{\sqrt{D(U)} \sqrt{D(V)}}, \text{ 由于 } U, V \text{ 均为 } 0-1 \text{ 分布, 故 } E(U) = \frac{3}{4},$$

$$E(V) = \frac{1}{2}, D(U) = p \cdot q = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}, D(V) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Cov}(U, V) = E(UV) - E(U) \cdot E(V) = 1 \cdot P\{U=1, V=1\} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}.$$

$$\rho = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{4 \cdot 2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$13. \text{【解】 } X, Y \text{ 相互独立均服从 } N(\mu, \sigma^2), \rho_{UV} = \frac{\text{Cov}(U, V)}{\sqrt{D(U)} \sqrt{D(V)}}.$$

$$D(U) = D(aX + bY) = a^2 D(X) + b^2 D(Y) = (a^2 + b^2) \sigma^2;$$

$$D(V) = D(aX - bY) = a^2 D(X) + b^2 D(Y) = (a^2 + b^2) \sigma^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(U, V) &= \text{Cov}(aX + bY, aX - bY) = a^2 \text{Cov}(X, X) + ab \text{Cov}(Y, X) - ab \text{Cov}(X, Y) - b^2 \text{Cov}(Y, Y) \\ &= a^2 \text{Cov}(X, X) - b^2 \text{Cov}(Y, Y) = (a^2 - b^2) \sigma^2. \end{aligned}$$

所以

$$\rho_{UV} = \frac{\text{Cov}(U, V)}{\sqrt{D(U)} \sqrt{D(V)}} = \frac{(a^2 - b^2) \sigma^2}{(a^2 + b^2) \sigma^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

14. 略

第五章 大数定律和中心极限定理

1. 方差存在

【解析】切比雪夫大数定律要求 $X_1, \dots, X_n, \dots$ 两两不相关, 方差有界.

现题给 $X_1, \dots, X_n, \dots$ 独立同分布, 它们必两两不相关. 同分布, 只要方差存在就有所有 X_i 的方差相同, 必有界. 因此填空为只要方差存在.

2. μ

【解析】辛钦大数定律的结论是 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu\right| \leq \epsilon\right\} = 1$, 即 $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 依概率收敛于 μ .

3. B

【解析】切比雪夫不等式为 $P\{|X - E(X)| < \epsilon\} \geq 1 - \frac{D(X)}{\epsilon^2}$.

$$E(S_9) = E\left(\sum_{i=1}^9 X_i\right) = \sum_{i=1}^9 E(X_i) = \sum_{i=1}^9 1 = 9.$$

$$D(S_9) = D\left(\sum_{i=1}^9 X_i\right) = \sum_{i=1}^9 D(X_i) = 9.$$

所以应有 $P\{|S_9 - 9| < \epsilon\} \geq 1 - \frac{9}{\epsilon^2}$, 选(B).

4. C

【解析】辛钦大数定律要求 X_i 独立同分布, 期望存在, 只有(C)满足要求.

(A) 不能保证同分布, (B) 和 (D) 均不能保证期望存在. 选(C).

5. 【解】 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 所以 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 必相互独立且同分布, 且 $X_1^2, X_2^2, \dots, X_n^2$ 也是独立同分布, 而 $D(X_i^2) = E(X_i^4) - [E(X_i^2)]^2 = E(X^4) - [E(X^2)]^2 = a_4 - a_2^2$ 存在.

于是由林德伯格-列维中心极限定理知, 当 n 充分大时, 随机变量 $\sum_{i=1}^n X_i^2$ 近似服从正态分布

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



$$N(na_2, n(a_1 - a_2^2)).$$

而 $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 就近似服从正态分布 $N\left(a_2, \frac{a_1 - a_2^2}{n}\right)$.

第六章 数理统计的基本概念

$$1. \begin{cases} \frac{1}{\theta^n}, & 0 \leq x_i \leq \theta, i = 1, 2, \dots, n, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

【解析】 $X \sim U[0, \theta]$, 密度 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 \leq x \leq \theta, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$

故 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的密度 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n}, & 0 \leq x_i \leq \theta, i = 1, 2, \dots, n, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

2. t(2)

【解析】 $X_1 + X_2 \sim N(0, 2)$, $\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0, 1)$ 与 $X_3^2 + X_4^2 \sim \chi^2(2)$ 相互独立,

故 $Y = \frac{\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{X_3^2 + X_4^2}{2}}} = \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{X_3^2 + X_4^2}} \sim t(2)$.

3. D

【解析】 如果有条件 X, Y 相互独立, 则(A)(B)(C)都正确. 现没给 X, Y 独立或 (X, Y) 正态条件. 正确答案只有(D). 选(D).

4. B

【解析】 在正态总体条件下, $\bar{X}$ 与 S_2^2 相互独立, $\bar{X}$ 与 S_1^2 不独立, 故(A), (C), (D)不正确, 故选(B). 也可以直接证明: $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ 且独立于 $\frac{S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 所以

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sqrt{\frac{S_2^2}{\sigma^2} / (n-1)} = \frac{\bar{X} - \mu}{S_2} \sqrt{n^2 - n} \sim t(n-1), \text{ 故选(B).}$$

5. C

【解析】 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 即 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$, 选(C).

6. D

【解析】 $X_i \sim N(0, \sigma^2)$, $\frac{X_i}{\sigma} \sim N(0, 1)$, $\frac{1}{\sigma^2}(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) \sim \chi^2(3)$ 与 $\frac{1}{\sigma^2}(X_4^2 + X_5^2 + \dots + X_9^2) \sim \chi^2(6)$ 独立, 所以 $F = \frac{\frac{1}{\sigma^2}(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{\sigma^2}(X_4^2 + X_5^2 + \dots + X_9^2) \cdot \frac{1}{6}} = \frac{2(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)}{X_4^2 + X_5^2 + \dots + X_9^2} \sim F(3, 6)$. 选(D).

7. 【解】 (1) $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n [(X_i - \bar{X}) + (\bar{X} - \mu)]^2$

$$= \sum_{i=1}^n [(X_i - \bar{X})^2 + 2(X_i - \bar{X})(\bar{X} - \mu) + (\bar{X} - \mu)^2]$$



$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + 2(\bar{X} - \mu) \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) + n(\bar{X} - \mu)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + 2(\bar{X} - \mu)(n\bar{X} - n\bar{X}) + n(\bar{X} - \mu)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - \mu)^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 &= \sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2) = \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\bar{X} \sum_{i=1}^n X_i + n\bar{X}^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\bar{X} \cdot n\bar{X} + n\bar{X}^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2.
 \end{aligned}$$

8.【解】 (1) $E(Y) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - \mu|\right) = \frac{\sigma}{n} \sum_{i=1}^n E\left(\left|\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right|\right) = \frac{\sigma}{n} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} |t| \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

$$= \frac{\sigma}{n} \sum_{i=1}^n 2 \int_0^{+\infty} t \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\sigma}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma.$$

(2) $D(Y) = D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - \mu|\right) = \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{i=1}^n D\left(\left|\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right|\right)$

$$= \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{i=1}^n \left[E\left(\left|\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right|^2\right) - \left(E\left|\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right|\right)^2 \right]$$

$$= \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{i=1}^n \left[E\left(\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right) - \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^2 \right] = \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{i=1}^n \left[D\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right) - \frac{2}{\pi} \right]$$

$$= \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{i=1}^n \left[1 - \frac{2}{\pi} \right] = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \cdot \frac{\sigma^2}{n}.$$

9.【解】 $X \sim N(80, 4^2)$, $\bar{X} \sim N\left(80, \frac{4^2}{n}\right)$, 要求 $P\{\bar{X} > 78\} \geq 0.975$.

即 $1 - P\{\bar{X} \leq 78\} = 1 - P\left\{\frac{\bar{X} - 80}{\frac{4}{\sqrt{n}}} \leq \frac{78 - 80}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\right\} = 1 - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{2}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) \geq 0.975,$

$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) \geq 0.975$, 得 $\frac{\sqrt{n}}{2} \geq 1.96$. 解得 $n \geq 15.3664$, 取 $n = 16$.

10.【解】 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 取得样本 $X_1, X_2, \dots, X_{100}$. 样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{100}\right)$.

所以 $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/10} \sim N(0, 1)$, 现要求 $P\{|\bar{X} - \mu| > 4\} = 0.02$. 即

$$\begin{aligned}
 0.98 &= P\{|\bar{X} - \mu| \leq 4\} = P\left\{\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/10}\right| \leq \frac{4}{\sigma/10}\right\} \\
 &= P\left\{-\frac{40}{\sigma} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/10} \leq \frac{40}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{40}{\sigma}\right) \\
 &= 2\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) - 1, \Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) = 0.9900. \text{ 得 } \frac{40}{\sigma} = 2.33, \sigma = 17.17.
 \end{aligned}$$

11.【解】 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $Y_1 = \frac{1}{6}(X_1 + \dots + X_6) \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{6}\right)$, $Y_2 = \frac{1}{3}(X_7 + X_8 + X_9) \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{3}\right)$, Y_1

与 Y_2 相互独立, $S^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=7}^9 (X_i - Y_2)^2$ 相当于样本 X_7, X_8, X_9 的样本方差. S^2 与 Y_2 相互独立, S^2 也与 Y_1 相互独立, 从而也与 $Y_1 - Y_2$ 相互独立.

$Y_1 - Y_2 \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{6} + \frac{\sigma^2}{3}\right)$, 即 $Y_1 - Y_2 \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{2}\right)$.



$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), \text{ 即 } \frac{2S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(2), \text{ 故 } \frac{Y_1 - Y_2}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}} \sqrt{\frac{2S^2}{\sigma^2}} / 2 = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S} = Z \sim t(2).$$

12. 【解】 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 和 $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ 分别为样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的均值和方差.

$\bar{X}_n$ 与 S_n^2 相互独立, $\bar{X}_n \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, $\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, X_{n+1} 与 $\bar{X}_n$ 以及 S_n^2 均独立,

且 $X_{n+1} - \bar{X}_n \sim N(0, \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n})$, 即 $X_{n+1} - \bar{X}_n \sim N(0, \frac{(n+1)\sigma^2}{n})$, 故 $\frac{X_{n+1} - \bar{X}_n}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}\sigma} \sim N(0, 1)$,

$$\frac{X_{n+1} - \bar{X}_n}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}\sigma} \sqrt{\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}} / (n-1) = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \frac{X_{n+1} - \bar{X}_n}{S_n} \sim t(n-1).$$

第七章 参数估计

1. $\frac{\bar{X}}{m}$

【解析】 $X \sim B(m, p)$, 唯一未知参数 p 的矩估计用 $E(X) = \bar{X}$. 而 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $E(X) = mp$.

故 $mp = \bar{X}$, $\hat{p} = \frac{\bar{X}}{m}$.

2. $\frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$

【解析】 $f(x; \theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 其中只有一个参数 θ , 矩估计就用 $E(X) = \bar{X}$.

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x; \theta) dx = \int_0^1 x \theta x^{\theta-1} dx = \int_0^1 \theta x^{\theta} dx = \frac{\theta}{\theta+1}.$$

所以 $\frac{\theta}{\theta+1} = \bar{X}$, 解得 $\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$.

3. D

【解析】 $X_i \sim N(0, \sigma^2)$, $\bar{X} \sim N(0, \frac{\sigma^2}{n})$, 就有 $E(X_i^2) = D(X_i) + [E(X_i)]^2 = \sigma^2$,

$$E(\bar{X}^2) = D(\bar{X}) + [E(\bar{X})]^2 = \frac{\sigma^2}{n},$$

$$E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \sigma^2, \text{ 选(D).}$$

4. A

【解析】 $X \sim N(\mu, 4)$, 其中 $\sigma^2 = 4$ 已知, μ 未知, 置信区间应选 $(\bar{X} - u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, 现题给

$n = 16, \sigma = 2, \alpha = 0.1$, 故置信区间为 $(20 - u_{0.05} \cdot \frac{1}{2}, 20 + u_{0.05} \cdot \frac{1}{2})$. 选(A).

5. A

【解析】 方法一: $E[C(X_1 + X_n - 2\bar{X})^2] = C\{D(X_1 + X_n - 2\bar{X}) + [E(X_1 + X_n - 2\bar{X})]^2\}$
 $= C[D(X_1) + D(X_n) + 4D(\bar{X}) - 2\text{Cov}(X_1 + X_n, 2\bar{X})] + C[E(X_1) + E(X_n) - 2E(\bar{X})]^2$



$$= C \left[\sigma^2 + \sigma^2 + 4 \frac{\sigma^2}{n} - 8 \text{Cov}(X_1, \bar{X}) \right] = C \left[2\sigma^2 + 4 \frac{\sigma^2}{n} - 8 \text{Cov} \left(X_1, \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i \right) - 8 \text{Cov} \left(X_1, \frac{X_1}{n} \right) \right]$$

$$= C \left[2\sigma^2 - 4 \frac{\sigma^2}{n} \right] = C \cdot 2 \left[\frac{n-2}{n} \right] \sigma^2 = \sigma^2, \text{ 故 } C = \frac{n}{2(n-2)}. \text{ 选 (A).}$$

方法二: $E[C(X_1 + X_n - 2\bar{X})^2] = C\{D(X_1 + X_n - 2\bar{X}) + [E(X_1 + X_n - 2\bar{X})]^2\}$

$$= C \left\{ D \left[\left(X_1 - \frac{2}{n} X_1 \right) + \left(X_n - \frac{2}{n} X_n \right) - \frac{2}{n} \sum_{i=2}^{n-1} X_i \right] \right\} = C \left\{ \left(1 - \frac{2}{n} \right)^2 \sigma^2 + \left(1 - \frac{2}{n} \right)^2 \sigma^2 + \frac{4}{n^2} \cdot (n-2) \sigma^2 \right\}$$

$$= C \cdot \frac{(n-2)}{n} \left(\frac{n-2}{n} + \frac{n-2}{n} + \frac{4}{n} \right) \sigma^2 = C \cdot \frac{2(n-2)}{n} \sigma^2 = \sigma^2, \text{ 故 } C = \frac{n}{2(n-2)}, \text{ 选 (A).}$$

6. B

【解析】 最大似然估计法的关键在于写出似然函数 $L(\lambda)$.

总体 $X \sim E(\lambda)$ 的概率密度为:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad \lambda > 0,$$

$$\text{则 } L(\lambda) = L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \lambda) = \lambda^n e^{-\lambda} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\text{取对数, 得 } \ln L(\lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i.$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\lambda)}{d \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0 \text{ 解得 } \frac{1}{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

故 λ 的最大似然估计量为 $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$.

7. 【解】 用反证法: 已知 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计, 即 $E(\hat{\theta}) = \theta$, 且 $D(\hat{\theta}) > 0$, 如果 $\hat{\theta}^2$ 也是 θ^2 的无偏估计, 则 $E(\hat{\theta}^2) = \theta^2$. 但 $D(\hat{\theta}^2) = E(\hat{\theta}^2) - [E(\hat{\theta})]^2 = \theta^2 - \theta^2 = 0$, 这与 $D(\hat{\theta}) > 0$ 矛盾. 故 $E(\hat{\theta}^2) \neq \theta^2$.

8. 【解】 先求 λ 的矩估计 $\hat{\lambda}_1$, $X \sim P(\lambda)$.

$$E(X) = \bar{X}, \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, E(X) = \lambda. \text{ 所以 } \hat{\lambda}_1 = \bar{X}.$$

再求 λ 的最大似然估计 $\hat{\lambda}_2$,

$$L = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n (x_i!)} e^{-n\lambda}.$$

$$\ln L = n \bar{x} \ln \lambda - \ln \prod_{i=1}^n (x_i!) - n\lambda, \frac{d \ln L}{d \lambda} = n \bar{x} \cdot \frac{1}{\lambda} - n = 0, \text{ 解得 } \hat{\lambda}_2 = \bar{X}.$$

9. 【解】 总体密度 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x-\theta}{\lambda}}, & x > \theta, \\ 0, & x \leq \theta, \end{cases} (\lambda > 0)$, 有二个未知参数 θ 和 λ .

$$\text{矩估计 } \begin{cases} E(X) = \bar{X}, \\ E(X^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2, \end{cases} \quad \begin{cases} E(X) = \int_{\theta}^{+\infty} \frac{x}{\lambda} e^{-\frac{x-\theta}{\lambda}} dx = \frac{-e^{-\frac{x-\theta}{\lambda}}}{\lambda} (\lambda x + \lambda^2) e^{-\frac{x-\theta}{\lambda}} \Big|_{\theta}^{+\infty} = \lambda + \theta, \\ E(X^2) = \lambda^2 + (\lambda + \theta)^2, \end{cases}$$

$$\text{所以 } \begin{cases} \lambda + \theta = \bar{x}, \\ \lambda^2 + (\lambda + \theta)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2, \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} \hat{\lambda}_1 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}, \\ \hat{\theta}_1 = \bar{X} - \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}. \end{cases}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

最大似然估计



$$L = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^n} e^{-\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)}, & x_1, \dots, x_n > \theta, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad \ln L = -n \ln \lambda - \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{n}{\lambda} \theta.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = -\frac{n}{\lambda} + \frac{\bar{nx}}{\lambda^2} - \frac{n\theta}{\lambda^2}, \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{n}{\lambda}, \end{cases}$$

(1)

(2)

由(2)知 $\ln L$ 关于 θ 单调增加, 但 $\theta < x_1, \dots, x_n$, 故 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta}_2 = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$.

由(1)式, 令 $\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = 0$ 得 $-\frac{n}{\lambda} + \frac{\bar{nx}}{\lambda^2} - \frac{n\hat{\theta}_2}{\lambda^2} = 0$, 解得 $\hat{\lambda}_2 = \bar{X} - \hat{\theta}_2$. 总之 $\begin{cases} \hat{\lambda}_2 = \bar{X} - \min_{1 \leq i \leq n} X_i, \\ \hat{\theta}_2 = \min_{1 \leq i \leq n} X_i. \end{cases}$

10. 【解】 X 的密度 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}, & \theta_1 < x < \theta_2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 似然函数 $L = \begin{cases} (\theta_2 - \theta_1)^{-n}, & \theta_1 < \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} < \theta_2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$

要使 L 最大, $\theta_2 - \theta_1$ 尽量小, 也就是要 θ_2 尽量小, θ_1 尽量大. 但 $\theta_1 < x_1, x_2, \dots, x_n < \theta_2$, θ_2 最小为 $\max_{1 \leq i \leq n} X_i$, θ_1 最大

为 $\min_{1 \leq j \leq n} X_j$, 故最大似然估计量为 $\begin{cases} \hat{\theta}_1 = \min_{1 \leq j \leq n} X_j, \\ \hat{\theta}_2 = \max_{1 \leq i \leq n} X_i. \end{cases}$

微信公众号: 顶尖考研 (ID: djky66)

第八章 假设检验

微信公众号: 顶尖考研 (ID: djky66)

1. $\bar{X} \leq 4.18$

【解析】 $X \sim N(\mu, 2^2)$, $H_0: \mu \geq 5$; $H_1: \mu < 5$. 选用统计量

$$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - 5}{2/\sqrt{16}} = 2(\bar{X} - 5).$$

$U = 2(\bar{X} - 5) \sim N(0, 1)$. 拒绝域 $U \leq -u_{\alpha} = -u_{0.05} = -1.65$.

$2(\bar{X} - 5) \leq -1.65, \bar{X} \leq 5 - 0.82 = 4.18$. 拒绝域为 $\bar{X} \leq 4.18$.

2. D

【解析】 要检验 X 的均值大于 Y 的均值, 即 $\mu_1 > \mu_2$. 不能选(A). 因为(A)和(C)中 H_0 没有等号. 这类 H_0 中没有等号的假设在任何场合下都不能作. 而(B)中的 H_0 为 $\mu_1 \geq \mu_2$, 不同于 $\mu_1 > \mu_2$. 故只有(D)假设正确, 作出(D)假设后拒绝 H_0 就有 $\mu_1 > \mu_2$. 选(D).

3. A

【解析】 $X \sim N(0, \sigma^2)$, $\mu = 0$ 已知, 检验 $H_0: \sigma^2 = 1$, 则选用统计量(A). 选(A). 统计量(B)是 μ 未知时用, (C)是 σ 未知, 检验 μ 时用, (D)是 $\sigma = 1$ 已知, 检验 μ 时用.

4. 【解】 设钢筋的抗拉强度 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 σ^2 未知, 要检验 $H_0: \mu \leq \mu_0$; $H_1: \mu > \mu_0$, 选统计量

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1), \text{拒绝域 } T \geq t_{\alpha}(n-1). \text{ 现 } \bar{X} - \mu_0 = 20, S = 30, n = 10, \text{ 故 } T = \frac{20}{30/\sqrt{10}} = 2.108.$$

$t_{\alpha}(n-1) = t_{0.05}(9) = 1.8331$, 显然 $T > t_{\alpha}(n-1)$ 拒绝原假设 H_0 . 故 $\mu > \mu_0$, 即抗拉强度有明显提高.

5. 【解】 在 $\alpha = 0.05$ 条件下, 检验假设 $H_0: \sigma^2 \leq (0.5)^2$; $H_1: \sigma^2 > (0.5)^2$. 选统计量

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{4S^2}{(0.5)^2} = 16S^2 \sim \chi^2(4), \text{拒绝域 } \chi^2 \geq \chi_{\alpha}^2(n-1) = \chi_{0.05}^2(4) = 9.488,$$

$16S^2 \geq 9.488$, 即 $S \geq 0.7701$. 规则: 当 $S \geq 0.7701$ 时, 精度降低了.





金榜图书用户

专享福利活动

适用于：李永乐老师系列课程

赠送

¥100

代金券

¥200

代金券

¥500

代金券

¥1000

代金券

1. 活动参与方式

关注公众号 金榜时代考研 ▶ 回复 “22考研上岸” 即可参与

2. 活动时间

即日起——2021年11月24日

3. 兑换方式

扫右侧二维码
进群咨询管理员
领取代金券



书名	出版时间	适用阶段
数学公式的奥秘	2020年3月	全程复习
数学复习全书·基础篇	2020年6月	夯实基础
数学基础过关660题	2020年8月	夯实基础
数学历年真题全精解析·基础篇	2020年10月	夯实基础
数学复习全书	2020年12月	全程复习
数学历年真题全精解析	2021年1月	全程复习
高等数学辅导讲义	2021年1月	强化提高
线性代数辅导讲义	2021年1月	强化提高
概率论与数理统计辅导讲义	2021年1月	强化提高
数学强化通关330题	2021年1月	强化提高
数学决胜冲刺6套卷	2021年10月	冲刺预测
数学临阵磨枪	2021年10月	冲刺预测

微信扫一扫
解锁更多精彩内容



关注作者团队微博
与名师一起互动交流

