

“助力乡村学校音体美课堂行动”官方合作图书
V研客及全国各大考研培训学校指定用书

金榜时代TM
GLIST 明德·弘毅·品质

金榜时代 考研数学系列

数学复习全书

学霸养成笔记与 题源探究同步练习

(数学三)

2022

编著◎李永乐 王式安 刘喜波 武忠祥 宋浩 姜晓千 铁军 李正元 蔡燧林 胡金德

赠送本

《题源探究同步练习》+《基础过关660题》+《强化通关330题》
配合使用，效果显著，地毯式刷题无死角！

全书配套练习
检验自身学习水平

题目严扣知识点
可衍生各类型试题

重点题型详细解析
通透易懂

金榜题名

考研当年5—11月（强化提高）

《强化通关330题》
《历年真题·强化篇》



《决胜冲刺6套卷》
《临阵磨枪》

考研当年11—12月

考研当年7—11月（专项强化）



《高数辅导讲义》
《线代辅导讲义》
《概率论辅导讲义》

考研当年1—7月（全面复习）



《复习全书·综合提高篇》

无基础 不数学

考研前一年9月—12月



《复习全书·基础篇》

考研前一年9月—考研当年4月



《基础过关660题》

考研前一年9月—12月



《数学历年真题全精解析·基础篇》

目录

Contents

学霸养成笔记

微 积 分	(1)	线性方程组	(22)
函数、极限、连续	(1)	特征值、特征向量、相似矩阵	(24)
一元函数微分学	(4)	二次型	(26)
一元函数积分学	(6)	概率论与数理统计	(28)
多元函数微积分学	(9)	随机事件和概率	(28)
无穷级数	(11)	随机变量及其概率分布	(30)
常微分方程与差分方程	(13)	多维随机变量及其分布	(32)
线 性 代 数	(16)	随机变量的数字特征	(34)
行列式	(16)	大数定律和中心极限定理	(36)
矩 阵	(18)	数理统计的基本概念	(37)
向 量	(20)	参数估计	(39)

题源探究同步练习



练习

第一篇 微积分	(41)	第二篇 线性代数	(59)
第一章 函数、极限、连续	(41)	第一章 行列式	(59)
第二章 一元函数微分学	(44)	第二章 矩 阵	(61)
第三章 一元函数积分学	(47)	第三章 向 量	(63)
第四章 多元函数微积分学	(50)	第四章 线性方程组	(65)
第五章 无穷级数	(53)	第五章 特征值、特征向量、相似矩阵	(67)
第六章 常微分方程与差分方程	(56)		

第六章 二次型	(69)
第三篇 概率论与数理统计	(71)
第一章 随机事件和概率	(71)
第二章 随机变量及其概率分布	(73)
第三章 多维随机变量及其分布	(75)

第四章 随机变量的数字特征	(79)
第五章 大数定律和中心极限定理	(82)
第六章 数理统计的基本概念	(83)
第七章 参数估计	(86)

参考答案

第一篇 微积分	(89)
第一章 函数、极限、连续	(89)
第二章 一元函数微分学	(92)
第三章 一元函数积分学	(96)
第四章 多元函数微积分学	(99)
第五章 无穷级数	(103)
第六章 常微分方程与差分方程	(106)
第二篇 线性代数	(110)
第一章 行列式	(110)
第二章 矩 阵	(111)
第三章 向 量	(113)
第四章 线性方程组	(115)

第五章 特征值、特征向量、相似矩阵	(116)
第六章 二次型	(117)
第三篇 概率论与数理统计	(119)
第一章 随机事件和概率	(119)
第二章 随机变量及其概率分布	(120)
第三章 多维随机变量及其分布	(122)
第四章 随机变量的数字特征	(126)
第五章 大数定律和中心极限定理	(129)
第六章 数理统计的基本概念	(130)
第七章 参数估计	(132)

微积分

函数、极限、连续

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始！☺

1. 函数

提要：定义域 单调性 有界性 周期性 奇偶性 分段函数 复合函数 反函数

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

2. 函数极限与数列极限

提要：定义 基本性质 运算法则 单调有界准则 夹逼准则 无穷小

微信公众号：顶尖考研
(ID: djky66)



3. 连续与间断

提要: 定义 连续相关定理 间断点的分类

二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸 

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

顶尖考研: 公众号
(ID: djky66)



三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心 ✨

学霸养成笔记

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)



一元函数微分学

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始 ☺

1. 导数与微分

提要：定义 相关定理 求导法则 导数公式

2. 导数应用

提要：几何意义 经济意义 单调性 洛必达法则 极值与最值 凹凸性与拐点 渐近线

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

3. 中值定理

提要：费马引理 罗尔定理 拉格朗日中值定理 柯西中值定理 泰勒定理

4. 证明题

提要：不等式的证明 零点的证明 介值问题



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸

微信公众号【顶尖考研】

学霸养成笔记

三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)



一元函数积分学

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始 ☺

1. 不定积分

提要：定义 性质 计算方法 第一换元法 第二换元法 分部积分法

2. 定积分

提要：定义 性质 定理 计算方法

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

3. 无穷限的反常积分

提要：定义 性质 常用结论 判敛法

顶尖考研：公众号
(ID: djky66)



4. 无界函数的反常积分

提要: 定义 性质 常用结论 判敛法

5. 定积分的几何应用

提要: 平面图形的计算 旋转体的计算 经济应用

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

6. 定积分相关证明题

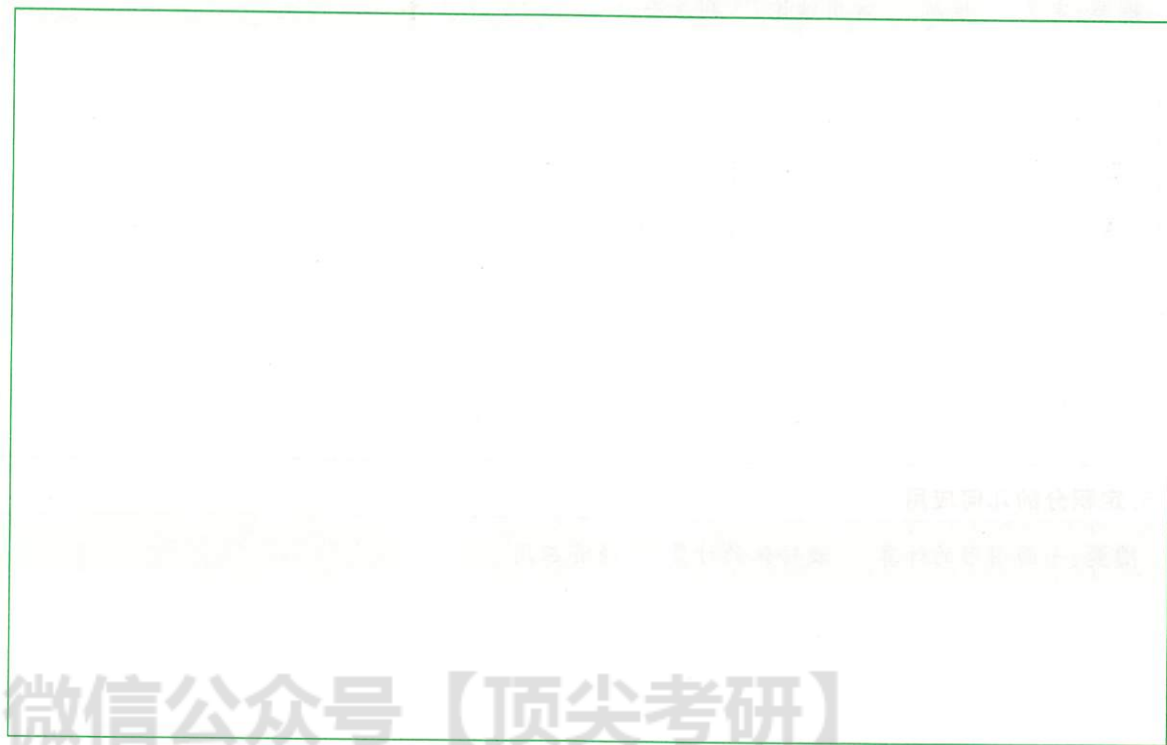
提要: 变限积分函数 积分不等式 零点问题

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



二、要记住的结论

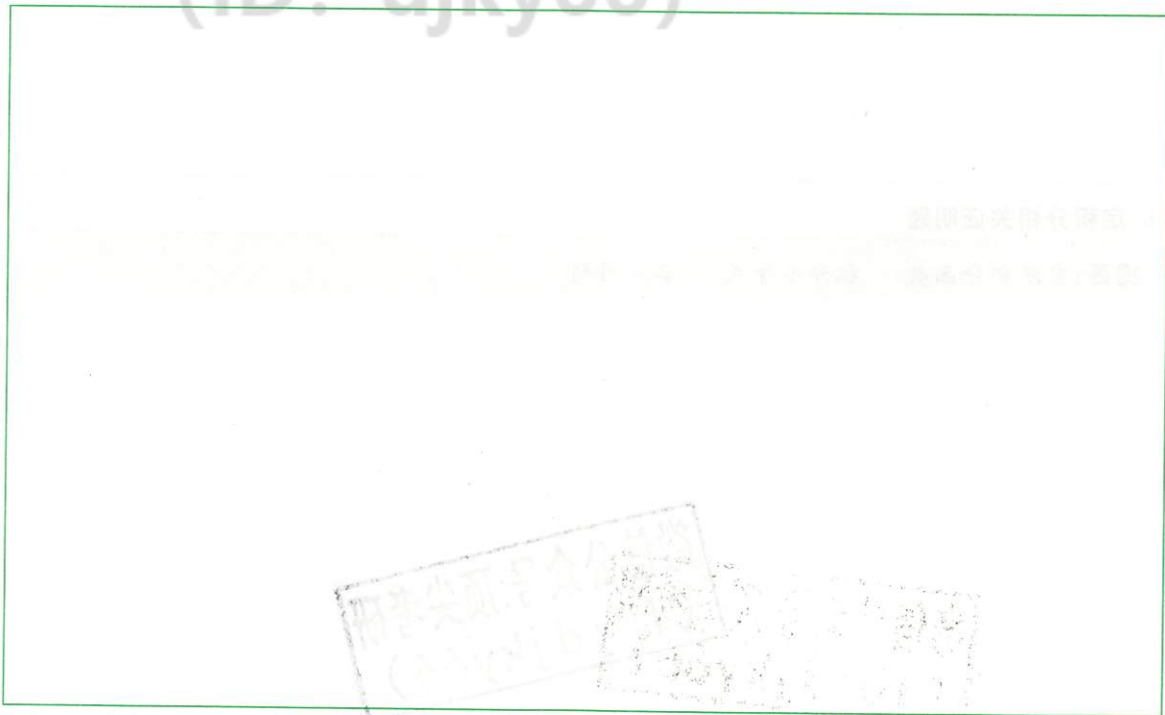
不用想，直接用，让你看起来真学霸 🧠



微信公众号【顶尖考研】

三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心 ✨



多元函数微积分学

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始

1. 二元函数的极限与连续、偏导数与微分

提要：极限与连续 偏导数 可微性与全微分

2. 二元函数的微分法

提要：复合函数的微分法 隐函数的微分法

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

3. 极值

提要：无条件极值 条件极值 最值

4. 二重积分

提要：定义 性质 累次积分 交换积分次序 二重积分的计算方法

微信公众号：顶尖考研
(ID: djky66)



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸 🧠

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心 ✨

顶尖考研·公众号
(ID: djky66)



无穷级数

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始 (๑)

1. 数项级数

提要：级数的概念与性质 正项级数的判敛法 交错级数的判敛法 任意项级数的判敛法

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

2. 幂级数

提要：收敛半径、收敛区间与收敛域 幂级数的性质 幂级数的展开 求和函数 求级数的和

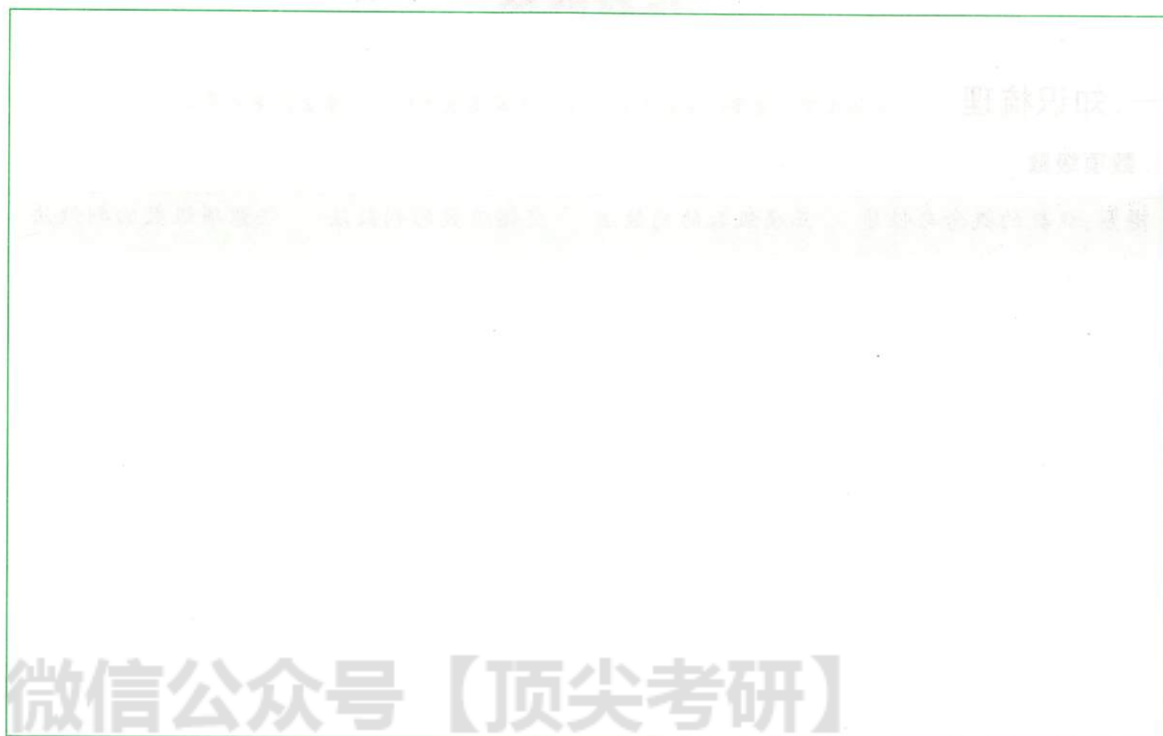
微信公众号：顶尖考研
(ID: djky66)

学霸养成笔记



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸 🍷



三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心 ✨



常微分方程与差分方程

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始 ☺

1. 一阶微分方程

提要：可分离变量方程 齐次方程 一阶线性方程

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

2. 高阶微分方程

提要：二阶线性微分方程 解的性质 解的结构 通解

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)



3. 差分方程

提要: 差分方程通解 求解

二、要记住的结论

不用想, 直接用, 让你看起来真学霸

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

顶尖考研公众号
(ID: djky66)



三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心 ✨

学霸养成笔记

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)



线性代数

行列式

一、知识梳理

方法比努力重要! 学霸不是天生, 养成高效思维, 从学会抓重点开始

1. 行列式的性质与计算公式

提要: 行列式的性质 按行与按列展开 行列式公式

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

2. 某些特殊行列式的计算方法与技巧

提要: 数字型行列式 分块矩阵的行列式 抽象矩阵的行列式

顶尖考研公众号
(ID: djky66)



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸 

学霸养成笔记

微信公众号【顶尖考研】

三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心 

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)



矩 阵

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始 ☺

1. 矩阵的概念

提要：矩阵的运算 特殊矩阵

学霸养成笔记

2. 矩阵的变换

提要：伴随矩阵 可逆矩阵 初等矩阵与初等变换 等价

3. 矩阵的秩与分块矩阵

提要：矩阵的秩 分块矩阵



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸



微信公众号【顶尖考研】

学霸养成笔记

三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心



微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)



向 量

张宇2019考研数学系列

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始 (๑)

1. 向量运算与线性关系

提要：向量的运算 线性表出 线性相关与线性无关

2. 向量组的极大线性无关组与秩

提要：极大线性无关组 向量组的秩

3. 正交化与正交矩阵

提要：Schmidt 正交化 正交矩阵



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸 

学霸养成笔记

微信公众号【顶尖考研】

三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心 

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)



线性方程组

备战2025考研

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始 ☺

1. 线性方程组求解

提要：齐次线性方程组基础解系的求法 非齐次线性方程组通解的求法 克拉默法则
公共解与同解问题

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

2. 有解无解与解的性质

提要：有解无解的判定方法 解的性质与结构定理

顶尖考研公众号
(ID: djky66)



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸 

学霸养成笔记

微信公众号【顶尖考研】

三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心 

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)



特征值、特征向量、相似矩阵

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始 ☺

1. 特征值与特征向量

2. 相似与相似对角化

提要：相似矩阵 矩阵的相似对角化定理

微信公众平台【顶尖考研】
(ID: djky66)

3. 实对称矩阵的相似对角化方法

微信公众平台【顶尖考研】
(ID: djky66)



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸 🧠

学霸养成笔记

微信公众号【顶尖考研】

三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心 ✨

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)



二次型

第10章 二次型

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始 ☺

1. 化二次型为标准形、规范形

提要：标准形 规范形

学霸养成笔记

微信公众号【顶尖考研】

2. 合同

(ID: djky66)

某品牌，全网热销，三

3. 正定矩阵与正二次型

顶尖考研：公众号
(ID: djky66)



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸 🧐

学霸养成笔记

三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心 🌟

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)



概率论与数理统计

随机事件与概率

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始 (๑)

1. 随机事件

提要：随机事件及相互间的关系 随机事件的运算

2. 概率

提要：概率性质 条件概率 全概率公式 贝叶斯公式 事件独立

3. 古典概型、几何概型与伯努利概型



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸 

学霸养成笔记

微信公众号【顶尖考研】

三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心 

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)



随机变量及其概率分布

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始 ☺

1. 分布函数、密度函数

2. 离散型与连续型随机变量

提要：离散型随机变量以及常用分布 连续型随机变量以及常用分布

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

3. 随机变量函数的分布



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸 🧠

Blank area for notes under the section '要记住的结论'.

学霸养成笔记

三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心 ✨

Blank area for notes under the section '经典例题、错题集'.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)



多维随机变量及其分布

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始 ☺

1. 二维随机变量

提要：二维随机变量的分布 二维离散型随机变量的分布 二维连续型随机变量的分布
随机变量的独立性

2. 常用二维分布

提要：二维均匀分布 二维正态分布

3. 两个随机变量函数的分布

学霸养成笔记



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸 🧠

Large empty box for notes.

微信公众号【顶尖考研】

学霸养成笔记

三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心 ✨

Large empty box for notes.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)



随机变量的数字特征

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始 ☺

1. 数字特征

提要：数学期望 方差 协方差 相关系数

学霸养成笔记

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

2. 常见分布的数字特征

顶尖考研公众号
(ID: djky66)



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸

学霸养成笔记

微信公众号【顶尖考研】

三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)



大数定律和中心极限定理

本章内容考试要求不高,记住书中内容即可!

一、要记住的结论

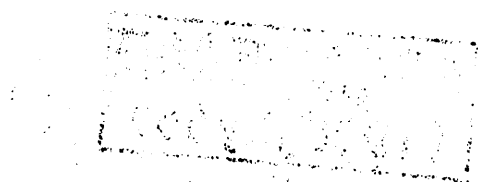
不用想,直接用,让你看起来真学霸🧐

学霸养成笔记

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

二、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼,也有不犯同类错误的心✧



数理统计的基本概念

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始 ☺

1. 统计量与样本数字特征

2. 常用统计抽样分布

提要： χ^2 分布 t 分布 F 分布

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

3. 正态总体的抽样分布

提要：一个正态总体 两个正态总体

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸 🧐

微信公众号【顶尖考研】

三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心 ✨

顶尖考研公众号
(ID: djky66)



参数估计

一、知识梳理

方法比努力重要！学霸不是天生，养成高效思维，从学会抓重点开始 ☺

1. 矩估计法

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

2. 最大似然估计法

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)



二、要记住的结论

不用想，直接用，让你看起来真学霸 🧐



三、经典例题、错题集

学霸有发现美的眼，也有不犯同类错误的心 ✨



第一篇 微积分

第一章 函数、极限、连续

1. 设 $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1, \\ x^2, & 1 < |x| \leq 4, \end{cases}$ 且 $g(x) = f(x^2) + f(x+3)$, 则 $g(x)$ 的定义域为_____.

2. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ -x^3, & x > 0 \end{cases}$ 的反函数是 $g(x)$, 则 $g(4) =$ _____.

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin x}, & x < 0, \\ 6, & x = 0, \\ \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{x}{4}}, & x > 0. \end{cases}$

则 $a =$ _____时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续; $a =$ _____时, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

4. 设函数 $f(x) = \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x$, 则 $f(x)$ 有

- (A) 1 个可去间断点, 1 个跳跃间断点.
(B) 1 个可去间断点, 1 个无穷间断点.
(C) 2 个跳跃间断点.
(D) 2 个无穷间断点.

5. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^n - 3x^{-n}}{x^n + x^{-n}} \sin \frac{1}{x}$, 则 $f(x)$

- (A) 两个第一类间断点.
(B) 三个第一类间断点.
(C) 两个第一类间断点和一个第二类间断点.
(D) 一个第一类间断点和一个第二类间断点.

6. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列无穷小量中阶数最高的是

- (A) $\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$.
(B) $3x^3 - 4x^4 + 5x^5$.
(C) $e^{x^2} - \cos x$.
(D) $\int_0^{1-\cos x} \frac{\sin t^2}{t} dt$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



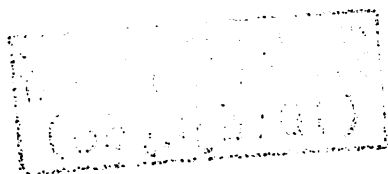
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1+2\sin^2 x}}{\tan^2 x}.$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{a}{x} - \left(\frac{1}{x^2} - a^2 \right) \ln(1+ax) \right] (a \neq 0).$

题源探究同步练习

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

9. 设 $f(1) = 0, f'(1) = a$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2f(e^{x^2})} - \sqrt{1+f(1+\sin^2 x)}}{\ln \cos x}.$



10. 设 $[u]$ 表示不超过 u 的最大整数, $f(x) = \begin{cases} \frac{[2x]}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ 判别 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 是否存在. 并问 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

是否存在?

11. 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 的某邻域内可导, 且 $f(a) \neq 0, a \neq 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{1}{(x-a)f(a)} - \frac{1}{\int_a^x f(t) dt} + \frac{1}{2x-a} \right]$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

题源探究同步练习

12. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0, f''(0) \neq 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^\alpha - \sin x} = \beta (\beta \neq 0)$. 求 α, β .

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



第二章 一元函数微分学

1. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导, 且 $f(0)=0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-\cos x)}{\tan^2 x} =$ _____.

2. 函数 $y = |\pi^2 - x^2| \sin^2 x$ 的不可导点个数为

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

3. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有连续的四阶导数, 且当 $x \neq 0$ 时, $f(x) \neq 0$, 同时

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\tan x - \sin x}{f(x)}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases} \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续, 则必有}$$

- (A) $f'(0) = 1$. (B) $f''(0) = 2$.
(C) $f'''(0) = 3$. (D) $f^{(4)}(0) = 4$.

4. 若 $x \rightarrow 0$ 时, $F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f'(t) dt$ 的导数与 x^2 为等价无穷小, 则 $f'(0)$ 等于

- (A) 0. (B) 1. (C) -1. (D) $\frac{1}{2}$.

5. 曲线 $y = \frac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}$

- (A) 没有渐近线. (B) 仅有水平渐近线.
(C) 仅有铅直渐近线. (D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线.

6. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x}, & x < 0, \\ a + bx, & x \geq 0. \end{cases}$

(1) 求 a 的值使 $f(x)$ 处处连续; (2) 再求 b 的值使 $f(x)$ 处处可导.

7. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) \cdot f(b) > 0, f(a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$.

试证: 对任意实数 k , 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = kf(\xi)$.

8. 设 $y = y(x)$ 由方程 $2x - \int_1^{x+y} e^{-t^2} dt = xy$ 确定, 求 $y'(0)$.

9. 设 $(1, -1)$ 是曲线 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ 的拐点, 且 y 在 $x = 0$ 处取极大值. 求 a, b, c .

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

10. 设 $x \geq 0$, 证明:

$$(1) \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}, \text{ 其中 } \frac{1}{4} \leq \theta(x) \leq \frac{1}{2};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{4}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = \frac{1}{2}.$$



11. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导, 且 $f(a) = f(b) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$, 试证: 存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使 $f''(\xi) = 0$.

12. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = f(1) = 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, 试证:

(1) 存在 $\eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使 $f(\eta) = \eta$.

(2) 对 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, 必存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $f'(\xi) - \lambda[f(\xi) - \xi] = 1$.

题源探究同步练习

13. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有二阶导数, 且 $f(a) = f(b)$, 证明至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使

$$f''(\xi) = \frac{2f'(\xi)}{b-\xi}.$$

14. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = 1$, 试证: 存在两点 $\xi, \eta \in (a, b)$, 使

$$(e^{2a} + e^{a+b} + e^{2b})[f(\xi) + f'(\xi)] = 3e^{3\tau\xi}.$$



第三章 一元函数积分学

1. $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx =$ _____.

2. 设函数 $f(x)$ 的一个原函数为 x , 则 $\int x^2 f(1-x^3) dx =$ _____.

3. $f(x)$ 连续且 $\int_0^{x^3-1} f(t) dt = x-1$, 则 $f(7) =$ _____.

4. 已知 $f(2) = 2, f'(2) = 0, \int_0^2 f(x) dx = 4$, 则 $\int_0^1 x^2 f''(2x) dx =$ _____.

5. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases} F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则

(A) $F(x)$ 在 $x = 0$ 点不连续.

(B) $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 但在 $x = 0$ 点不可导.

(C) $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且满足 $F'(x) = f(x)$.

(D) $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 但不一定满足 $F'(x) = f(x)$.

6. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(x) \leq g(x)$, 且对任何 $c \in (0, 1)$, 有

(A) $\int_{\frac{1}{2}}^c f(t) dt \geq \int_{\frac{1}{2}}^c g(t) dt$.

(B) $\int_{\frac{1}{2}}^c f(t) dt \leq \int_{\frac{1}{2}}^c g(t) dt$.

(C) $\int_c^1 f(t) dt \geq \int_c^1 g(t) dt$.

(D) $\int_c^1 f(t) dt \leq \int_c^1 g(t) dt$.

7. 求 $\int e^x \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} dx$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

8. 设 $f(x)$ 为非负连续函数, 当 $x \geq 0$ 时, 有 $\int_0^x f(x-t) dt = e^{2x} - 1$, 求 $f(x)$.



9. 设 $f(x)$ 连续, $f(2) = 1$, 且满足 $\int_0^x t f(3x-t) dt = \arctan(1+e^x)$, 求 $\int_2^3 f(x) dx$.

10. 设 $f(x) = \int_1^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt$, 求 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$.

11. 设 $f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$, 求

(1) $f(x)$ 的极值; (2) 积分 $\int_{-2}^3 x^2 f'(x) dx$.

12. 设 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt (x > 0)$, $g(x)$ 连续, 且 $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^1 g(xt) dt$, 求 $g(x)$.



13. 已知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$, 求 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$.

14. 设 $f(x) = a |\cos x| + b |\sin x|$ 在 $x = -\frac{\pi}{3}$ 处取得极小值, 且 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f^2(x) dx = 2$, 求常数 a, b 的值.

15. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续且单调增加, 试证: 对任意的 $b > a > 0$, 恒有

$$\int_a^b x f(x) dx \geq \frac{1}{2} \left[b \int_0^b f(x) dx - a \int_0^a f(x) dx \right].$$

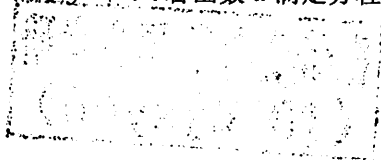
微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



第四章 多元函数微积分学

题源探究同步练习

1. 交换二重积分的次序 $I = \int_0^{\sqrt{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 已知 $f\left(\frac{1}{y}, \frac{1}{x}\right) = \frac{xy - x^2}{x - 2y}$, 则 $f(x, y) =$
 (A) $\frac{x-y}{xy-2x^2}$. (B) $\frac{x-y}{xy-2y^2}$. (C) $\frac{y-x}{xy-2x^2}$. (D) $\frac{y-x}{xy-2y^2}$.
3. 设函数 $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x + 2$, 则 $f(x, y)$
 (A) 在 $(-1, 2)$ 处取得极小值. (B) 在 $(2, -1)$ 处取得极小值.
 (C) 在 $(1, -2)$ 处取得极大值. (D) 在 $(-1, -2)$ 处取得极大值.
4. 设函数 $z = xy + xf(u)$ (其中 $f(u)$ 为可微函数), $u = \frac{y}{x}$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$
 (A) 1. (B) $1 - \frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial u}$. (C) $1 - \frac{y}{x^2} \frac{d^2 f}{du^2}$. (D) $1 - \frac{y}{x^2} \frac{df}{du}$.
5. 在下列二元函数中, 在 $(0, 0)$ 处取得极小值
 (A) $z = |x| + |y|$. (B) $z = |x| y$.
 (C) $z = |xy|$. (D) $z = xy$.
6. 设函数 $z = \frac{1}{x} f(xy) + y\varphi(x+y)$, 其中函数 f, φ 具有连续的二阶导数, 求二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.
7. 设函数 $u = f(r)$, 而 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 若函数 u 满足方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, 试求函数 u .



8. 设函数 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x + y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x$, 试求出函数 $f(x, y)$ 的表达式.

9. 计算二重积分 $I = \iint_D |3x + 4y| dx dy$, 其中积分区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

10. 设函数 $z = f(x, y)$ 具有二阶连续的偏导数, 且满足 $f''_{xx} = f''_{yy}$. 又由 $f(x, 2x) = x$, $f'_x(x, 2x) = x^2$, 试求二阶偏导数 $f''_{xx}(x, 2x)$, $f''_{xy}(x, 2x)$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



11. 设函数 $u = u(x, y)$ 由方程 $u = f(x, y, z, t), g(y, z, t) = 0, h(z, t) = 0$ 所确定, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$.

12. 计算二重积分 $I = \iint_D \sqrt{|y-x^2|} d\sigma$, 其中积分区域为 $D = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

13. 交换二重积分 $I = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x, y) dy$ 的积分次序, 其中 $f(x, y)$ 为连续函数.



第五章 无穷级数

1. 若收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和 $S_n = \frac{2n}{n+1}$, 则该级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的表示式为_____.

2. 若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a^n x^n$ 的收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$, 则 a 应满足_____.

3. 在 $(-1, 1)$ 内, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n+1}$ 的和函数为

(A) $-\frac{x^2}{(1+x)^2}$. (B) $-\frac{x^2}{1+x^2}$. (C) $\frac{x^2}{(1+x)^2}$. (D) $\frac{x^2}{1+x^2}$.

4. 设 $u_n = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, 则下列结论成立的有

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都收敛. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都发散.
(C) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 发散. (D) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛.

5. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$

(A) 绝对收敛. (B) 条件收敛.
(C) 发散. (D) 可能收敛, 也可能发散.

6. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^n$ 在 $x=1$ 处收敛, 则此级数在 $x=-2.5$ 处

(A) 绝对收敛. (B) 条件收敛.
(C) 发散. (D) 敛散性不能确定.

7. 已知 $\{a_n\}$ 是单调增加且有界的正数列, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 收敛.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



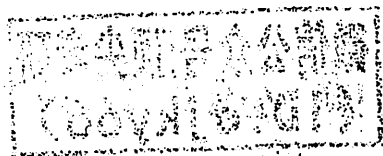
8. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}$ 的和.

9. 将函数 $f(x) = \frac{x-1}{4-x}$ 在点 $x_0 = 1$ 处展开成幂级数, 并求 $f^{(n)}(1)$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

10. 设偶函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 在点 $x = 0$ 的一个邻域内连续, 且 $f(0) = 1$.

试证: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right]$ 绝对收敛.



11. 已知 $a_0 = 3, a_1 = 5$, 对任意的 $n > 1$, 有 $na_n = \frac{2}{3}a_{n-1} - (n-1)a_{n-2}$. 证明: 当 $|x| < 1$ 时, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛, 并求其和函数 $S(x)$.

12. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{x} \arctan x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ 将函数 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数, 并求级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} \text{ 的和.}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



第六章 常微分方程与差分方程

1. 微分方程 $ydx + (x^2 - 4x)dy = 0$ 的通解是_____.
2. 方程 $y \ln y dx + (x - \ln y)dy = 0$ 的通解是_____.
3. 已知某二阶非齐次线性微分方程的三个解分别为 $y_1 = e^x, y_2 = xe^x, y_3 = x^2 e^x$, 则它的通解为_____.
4. 设二阶常系数齐次线性微分方程 $y'' + by' + y = 0$ 的每一个解 $y(x)$ 都在区间 $(0, +\infty)$ 上有界, 则实数 b 的取值范围是
 (A) $[0, +\infty)$. (B) $(-\infty, 0)$. (C) $(-\infty, 4)$. (D) $(-\infty, +\infty)$.
5. 当 $y_0 = ()$ 时, 差分方程 $3y_{x+1} - 9y_x - 2 = 0$ 的解为 $y_x = -\frac{1}{3}$.
 (A) $-\frac{2}{3}$. (B) $-\frac{1}{3}$. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $\frac{2}{3}$.
6. 差分方程 $\Delta y_x - y_x = 2$ 的通解为
 (A) $C \cdot 2^x - 1$. (B) $C \cdot 2^x + 1$. (C) $C \cdot 2^x + 2$. (D) $C \cdot 2^x - 2$.
7. 设 $f(x)$ 是可导的函数, 对于任意的实数 s, t , 有 $f(s+t) = f(s) + f(t) + 2st$, 且 $f'(0) = 1$. 求函数 $f(x)$ 的表达式.
8. 求解微分方程 $y'' + y' = 2x^2 + 1$.



9. 求解微分方程 $y'' - y = e^x + 4\cos x$.

10. 求解微分方程 $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{|y|}$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的特解.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

11. 已知函数 $y = e^{2x} + (x+1)e^x$ 是线性微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的一个解, 试确定常数 a, b, c 的值及该微分方程的通解.

题源探究同步练习

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



12. 求一曲线, 使曲线的切线、坐标轴和过切点与横轴平行的直线所围成的梯形面积等于 a^2 , 且曲线过点 (a, a) , $a > 0$ 为常数.

13. 设函数 $f(x)$ 在 R 上连续, 且 $|f(x)| \leq M$.

(1) 试证明: 微分方程 $y' + y = f(x)$ 在区间 R 上存在一个有界的解, 并求此解.

(2) 若 $f(x)$ 是以 ω 为周期的函数, 则(1)中的解也是一个以 ω 为周期的函数.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

14. 设 $f(x)$ 为偶函数, 且满足 $f'(x) + 2f(x) - 3 \int_0^x f(t-x) dt = -3x + 2$, 求 $f(x)$.



第二篇 线性代数

第一章 行列式

题源探究同步练习

$$1. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$2. \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & a & b & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$3. \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \text{ 则 } x = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$4. \text{ 已知 } A \text{ 是 } 3 \text{ 阶矩阵, } B \text{ 是 } 4 \text{ 阶矩阵, 若 } |A| = 3, |B| = -36, \text{ 则 } |-|A^T|B^{-1}| = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$5. \text{ 设矩阵 } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, E \text{ 为 } 2 \text{ 阶单位矩阵, 矩阵 } B \text{ 满足 } BA = B + 2E, B^* \text{ 是 } B \text{ 的伴随矩阵, 则 } |B^*| = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$6. \text{ 设 } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = m, \text{ 则 } \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 3a_1 & 3b_1 & 3c_1 \\ a_3 - 2a_1 & b_3 - 2b_1 & c_3 - 2c_1 \end{vmatrix} =$$

(A) $-2m$.(B) $-3m$.(C) m .(D) $6m$.

$$7. \text{ 若 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2 \text{ 都是 } 4 \text{ 维列向量, 且 } 4 \text{ 阶行列式 } |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1| = m, |\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3| = n, \text{ 则 } 4 \text{ 阶行列式 } |\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1 + \beta_2| =$$

(A) $m + n$.(B) $-(m + n)$.(C) $m - n$.(D) $n - m$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



8. 设 $|A_{n \times n}| = a$, $|B_{m \times m}| = b$, 则 $\begin{vmatrix} O & 3B \\ -A & O \end{vmatrix} =$
 (A) $-3ab$. (B) $(-1)^n 3^m ab$. (C) $(-1)^{n(m+1)} 3^m ab$. (D) $(-1)^{m \times n} 3^m ab$.
9. 设 A 为 n 阶方阵, 则 $|A| = 0$ 的必要条件是
 (A) A 中必有两行(列)的元素对应成比例.
 (B) A 中任意一行(列)向量是其余各行(列)向量的线性组合.
 (C) A 中必有一行(列)向量是其余各行(列)向量的线性组合.
 (D) A 中至少有一行(列)的元素全为 0.
10. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是 4 维列向量. 证明 $|\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1| = 0$.



第二章 矩 阵

1. 设 n 阶矩阵 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, n 维向量 $x = (\frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2})^T$, $y = (\frac{1}{2}, 0, \dots, 0, -\frac{1}{2})^T$, 则 $x^T Ax + x^T Ay - y^T Ax - y^T Ay =$ _____.

2. 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, 其中 $a_i \neq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 则 $A^{-1} =$ _____.

3. 设 A 是 n 阶矩阵, 满足 $A^2 + 3A - 5E = O$, 则 $(A + 5E)^{-1} =$ _____.

4. 已知 $AX = B$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 10 & -2 \\ 7 & 9 & 3 \end{bmatrix}$, 则 $X =$ _____.

5. (1) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$, 若秩 $r(A) = 3$, 则 $a =$ _____.

- (2) 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & a & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $r(AB) = 2$, 则 $a =$ _____.

6. 已知 $A = PBQ$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $B =$ _____.

7. 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, 则 $A^3 =$ _____.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

8. 设 A 是 n 阶矩阵, 下列命题中错误的是

(A) $AA^T = A^T A$.

(B) $A^* A = AA^*$.

(C) $(A^2)^n = (A^n)^2$.

(D) $(E + A)(E - A) = (E - A)(E + A)$.

9. 设 A 是 n 阶对称矩阵, B 是 n 阶反对称矩阵, 则下列矩阵为反对称阵的是

(A) $AB - BA$.

(B) $(AB)^2$.

(C) $AB + BA$.

(D) BAB .



10. 下列命题中,正确的是

- (A) 如果 A, B 都是 n 阶可逆矩阵,则 $A+B$ 必可逆.
 (B) 如果 A, B 都是 n 阶可逆矩阵,则 $A^* B^T$ 必可逆.
 (C) 如果 A, B 都是 n 阶不可逆矩阵,则 $A-B$ 必不可逆.
 (D) 如果 $AB = E$,则 A 可逆,且 $A^{-1} = B$.

11. 设 $A = E - 2\alpha^T \alpha$,其中 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$,且 $\alpha \alpha^T = 1$. 则 A 不能满足的结论是

- (A) $A^T = A$. (B) $A^T = A^{-1}$. (C) $AA^T = E$. (D) $A^2 = A$.

12. 设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a_{12} + a_{13} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} + a_{23} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} + a_{33} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$, $P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $B =$

- (A) $P_1 A P_2$. (B) $A P_2 P_1$. (C) $A P_1 P_2$. (D) $P_2 A P_1$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



第三章 向 量

1. 若 $\beta = (1, 3, 0)^T$ 不能由 $\alpha_1 = (1, 2, 1)^T, \alpha_2 = (2, 3, a)^T, \alpha_3 = (1, a+2, -2)^T$ 线性表示, 则 $a =$ _____.
2. 任意 3 维向量都可由 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (1, -2, 3)^T, \alpha_3 = (a, 1, 2)^T$ 线性表出, 则 a _____.
3. 设向量组 $\alpha_1 = (2, 1, 1, 1), \alpha_2 = (2, 1, a, a), \alpha_3 = (3, 2, 1, a), \alpha_4 = (4, 3, 2, 1)$ 线性无关, 则 a 应满足条件 _____.
4. 向量组 $\alpha_1 = (1, -1, 3, 0)^T, \alpha_2 = (-2, 1, a, 1)^T, \alpha_3 = (1, 1, -5, -2)^T$ 的秩为 2, 则 $a =$ _____.
5. 下列向量组中 a, b, c, d, e, f 均是常数, 则线性无关的向量组是
 (A) $\alpha_1 = (1, -1, 0, 2)^T, \alpha_2 = (0, 1, -1, 1)^T, \alpha_3 = (0, 0, 0, 0)^T$.
 (B) $\beta_1 = (a, b, c)^T, \beta_2 = (b, c, d)^T, \beta_3 = (c, d, a)^T, \beta_4 = (d, a, b)^T$.
 (C) $\xi_1 = (a, 1, b, 0, 0)^T, \xi_2 = (c, 0, d, 1, 0)^T, \xi_3 = (e, 0, f, 0, 1)^T$.
 (D) $\eta_1 = (1, 2, 1, 5)^T, \eta_2 = (1, 2, 3, 6)^T, \eta_3 = (1, 2, 5, 7)^T, \eta_4 = (0, 0, 0, 1)^T$.
6. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组中线性无关的是
 (A) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$.
 (B) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$.
 (C) $\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 3\alpha_3 + \alpha_1$.
 (D) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 - 3\alpha_2 + 22\alpha_3, 3\alpha_1 + 5\alpha_2 - 5\alpha_3$.
7. 设向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, II: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \dots, \alpha_{s+r}$, 则必有
 (A) I 相关 $\Rightarrow$ II 相关. (B) I 无关 $\Rightarrow$ II 无关.
 (C) II 相关 $\Rightarrow$ I 相关. (D) II 相关 $\Rightarrow$ I 无关.
8. 设向量组 I: $\alpha_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}), \alpha_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}), \dots, \alpha_s = (a_{1s}, a_{2s}, \dots, a_{ns})$,
 II: $\beta_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{n+r,1}), \beta_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}, \dots, a_{n+r,2}), \dots, \beta_s = (a_{1s}, a_{2s}, \dots, a_{ns}, \dots, a_{n+r,s})$, 则必有
 (A) I 相关 $\Rightarrow$ II 相关. (B) I 无关 $\Rightarrow$ II 无关.
 (C) II 无关 $\Rightarrow$ I 无关. (D) II 无关 $\Rightarrow$ I 相关.
9. 已知向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 则与 I 等价的向量组是
 (A) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$.
 (B) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$.
 (C) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$.
 (D) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$.



10. n 维向量组 $(I): \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, 若秩 $r(I) = r$, 则
 (A) (I) 中任意 $r-1$ 个向量都线性无关. (B) (I) 中任意 $r+1$ 个向量都线性相关.
 (C) (I) 中任意 r 个向量都线性无关. (D) (I) 中向量个数 s 必大于 r .
11. 设 $\alpha_1 = (1, 2, 0), \alpha_2 = (1, a+2, -3a), \alpha_3 = (-1, -a-2, 3a), \beta = (1, 3, -3)$, 问 a 为何值时, β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出; a 为何值时, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 并求其表出式.
12. 设向量组 $\alpha_1 = (1, -1, 2, 4), \alpha_2 = (0, 3, 1, 2), \alpha_3 = (3, 0, 7, 14), \alpha_4 = (1, -1, 2, 0), \alpha_5 = (2, 1, 5, 6)$. 求向量组的秩、极大线性无关组, 并将其余向量由极大线性无关组线性表出.

微信公众号【顶尖考研】

13. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 证明向量组

$$\beta_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n,$$

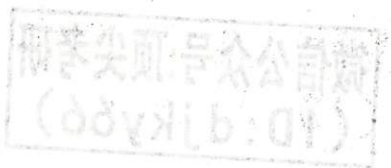
$$\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n,$$

$$\vdots$$

$$\beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}$$

也线性无关.

14. 设 A 是 n 阶方阵, 列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 证明: 列向量组 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_n$ 线性无关的充要条件是 A 为可逆矩阵.



第四章 线性方程组

1. 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ (a+2)x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3, \\ -2x_1 + ax_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

无解, 则参数 a 应满足_____.

2. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 则线性方程组 $(AB)x = 0$

- (A) 当 $n > m$ 时仅有零解. (B) 当 $n > m$ 时必有非零解.
(C) 当 $m > n$ 时仅有零解. (D) 当 $m > n$ 时必有非零解.

3. 设 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是 $Ax = 0$ 的基础解系, 则该方程组的基础解系还可表示成

- (A) ξ_1, ξ_2, ξ_3 的一个等价向量组. (B) ξ_1, ξ_2, ξ_3 的一个等秩向量组.
(C) $\xi_1 + \xi_2, \xi_2 + \xi_3, \xi_3 + \xi_1$. (D) $\xi_1 - \xi_2, \xi_2 - \xi_3, \xi_3 - \xi_1$.

4. 设非齐次线性方程组 $A_{3 \times 4}x = b$ 有通解 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \eta = k_1(1, 2, 0, -2)^T + k_2(4, -1, -1, -1)^T + (1, 0, -1, 1)^T$, 则下列向量中是 $Ax = b$ 的解的是

- (A) $\alpha_1 = (1, 2, 0, -2)^T$. (B) $\alpha_2 = (6, 1, -2, -2)^T$.
(C) $\alpha_3 = (3, 1, -2, 4)^T$. (D) $\alpha_4 = (5, 1, -1, -3)^T$.

5. 对于 n 元方程组, 则下列说法正确的是

- (A) 若 $Ax = 0$ 只有零解, 则 $Ax = b$ 有唯一解.
(B) $Ax = 0$ 有非零解的充要条件是 $|A| = 0$.
(C) $Ax = b$ 有唯一解的充要条件是 $r(A) = n$.
(D) 若 $Ax = b$ 有两个不同的解, 则 $Ax = 0$ 有无穷多解.

6. 设线性方程组

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 & + x_2 & + x_3 = 1, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 & & + x_3 = \lambda, \\ x_1 & + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^2, \end{cases}$$

问 λ 为何值时, 方程组无解, λ 为何值时, 方程组有解, 有解时, 求方程组的解.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



7. 已知 3 阶矩阵 A 的第 1 行是 (a, b, c) , a, b, c 不全为零, 矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & k \end{bmatrix}$ (k 为常数), 且 $AB = O$, 求线性方程组 $Ax = 0$ 的通解.

8. 求线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 11, \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -6, \\ -x_1 - 9x_2 + 3x_4 = 15. \end{cases}$$

满足条件 $x_1 = x_2$ 的全部解.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

9. 已知 A 是 $m \times n$ 矩阵, $Ax = b$ 有唯一解, 证明 $A^T A$ 是可逆阵, 并求 $Ax = b$ 的唯一解.

10. 设 A, B 均是 3×4 矩阵, $Ax = 0$ 有基础解系 ξ_1, ξ_2, ξ_3 , $Bx = 0$ 有基础解系 η_1, η_2 .

(1) 证明 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$ 有非零公共解.

(2) 若 $Ax = 0$ 的基础解系为 $\xi_1 = (1, -1, 2, 4)^T$, $\xi_2 = (0, 3, 1, 2)^T$, $\xi_3 = (1, -2, 2, 0)^T$.

$Bx = 0$ 的基础解系为 $\eta_1 = (3, 0, 7, 14)^T$, $\eta_2 = (2, 1, 5, 10)^T$, 求 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$ 的非零公共解.



第五章 特征值、特征向量、相似矩阵

1. 已知 $\xi = (1, -1, -1)^T$ 是矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & a \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ 的特征向量, 则参数 $a =$ _____.
2. 设 A 是 n 阶实对称阵, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 A 的 n 个互不相同的特征值, ξ_1 是 A 的对应于 λ_1 的 1 个单位特征向量, 则矩阵 $B = A - \lambda_1 \xi_1 \xi_1^T$ 的特征值为 _____.
3. 下列矩阵中能相似于对角阵的矩阵是
- (A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.
4. A 是三阶矩阵, P 是三阶可逆矩阵, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$, 且 $A\alpha_1 = \alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_2, A\alpha_3 = 0$, 其中 α_1, α_2 线性无关, 则 P 是
- (A) $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3]$. (B) $[\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1]$.
 (C) $[\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_2, 3\alpha_3]$. (D) $[\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1]$.
5. 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & a & -2 \\ a & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 求 A 的特征值和特征向量, 并分析 a 为何值时, A 能相似于对角阵;
 a 为何值时, A 不能相似于对角阵.
6. 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 问 A 是否相似于 B , 为什么?



7. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, 求正交阵 Q , 使得 $Q^{-1}AQ = Q^T A Q = \Lambda$, 其中 Λ 是对角阵.

8. 设三阶实对称矩阵 A 有特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$. A 的对应于 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ 的特征向量分别是 $\xi_1 = (-1, -1, 1)^T, \xi_2 = (1, -2, -1)^T$,

(1) 求 A 的属于 $\lambda_3 = 3$ 的特征向量.

(2) 求 A .

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

9. 设 A 是三阶实对称阵, 有特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2, \alpha_1 = (1, -1, 1)^T$ 是 A 的属于 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量, $B = A^5 - 4A^3 + E$, 其中 E 是单位阵.

(1) 验证 α_1 也是 B 的特征向量, 并求 B 的特征值和特征向量.

(2) 求 B .

第六章 二次型

1. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$, 则二次型的对应矩阵是 _____.

2. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3)(a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3)$, 则二次型的对应矩阵是 _____.

3. A, B 都是 n 阶实对称阵, 则使 A, B 合同的充要条件是

(A) A, B 有相同的秩.

(B) A, B 都合同于对角阵.

(C) A, B 的全部特征值相同.

(D) A, B 有相同的正负惯性指数.

4. 下列矩阵中与 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 合同的矩阵是

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

5. 实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的秩为 r , 符号差为 s , 且 f 和 $-f$ 合同, 则必有

(A) r 是偶数, $s = 1$.

(B) r 是奇数, $s = 1$.

(C) r 是偶数, $s = 0$.

(D) r 是奇数, $s = 0$.

6. 下列矩阵中正定矩阵是

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

7. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3$,

(1) 写出二次型的矩阵表达式;

(2) 用正交变换化二次型为标准形, 并写出所作的正交变换.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



8. 已知 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$, 用配方法化二次型为标准形, 并求所作的可逆线性变换.

9. 求 a 的值, 使二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

为正定二次型.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

10. 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_s \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_s^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_s^{n-1} \end{bmatrix}, \text{ 其中, } x_i \neq x_j \begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots, n \\ j = 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix},$$

讨论 $B = A^T A$ 的正定性.



第三篇 概率论与数理统计

第一章 随机事件和概率

1. 随机事件 A, B 满足 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, 且 $P(A \cup B) = 1$, 则 $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 甲在 8 点到 9 点, 乙在 8 点半到 9 点半的各时刻等可能地、相互独立地去同一办公室, 已知每人只在办公室停留半小时, 则他们相遇的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
3. 袋中有 4 个红球, 1 个白球, 现从中不放回地先后抽取 4 次, 每次一个球, 则前 3 次中取到白球的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
4. 已知事件 A 与 B 同时发生时, 事件 C 必发生, 则有
 (A) $P(C) \leq P(A) + P(B) - 1$.
 (B) $P(C) \geq P(A) + P(B) - 1$.
 (C) $P(C) = P(AB)$.
 (D) $P(C) = P(A \cup B)$.
5. 已知 $0 < P(B) < 1$, 且 $P(A_1 \cup A_2 | B) = P(A_1 | B) + P(A_2 | B)$, 则有
 (A) $A_1 A_2 B = \emptyset$.
 (B) $A_1 A_2 = \emptyset$.
 (C) $P(A_1 \cup A_2 | \bar{B}) = P(A_1 | \bar{B}) + P(A_2 | \bar{B})$.
 (D) $P((A_1 \cup A_2)B) = P(A_1 B) + P(A_2 B)$.
6. 共有 10 个座位的小会议室内随机地坐上 6 名与会者, 则指定的 4 个座位被坐满的概率为
 (A) $\frac{1}{10}$. (B) $\frac{1}{12}$. (C) $\frac{1}{14}$. (D) $\frac{1}{15}$.
7. 甲袋中有 2 个白球 3 个黑球, 乙袋中全是白球. 今从甲袋中任取 2 球. 从乙袋中任取 1 球混合后, 从中任取一球为白球的概率为
 (A) $\frac{1}{5}$. (B) $\frac{2}{5}$. (C) $\frac{3}{5}$. (D) $\frac{4}{5}$.
8. 掷一枚硬币 5 次, 则出现正面向上次数多于反面向上次数的概率为
 (A) $\frac{5}{16}$. (B) $\frac{11}{32}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{3}{8}$.



9. 10 件产品中含有 4 件次品, 今从中任取两件, 已知其中有一件是次品, 求另一件也是次品的概率.

10. 在盛有十只螺母的盒中含有 0 只, 1 只, 2 只, $\dots$, 10 只铜螺母是等可能的. 在盒中放入一个铜螺母, 然后从盒中随机取出一个螺母, 求这个螺母为铜螺母的概率.

(ID: djky66)



第二章 随机变量及其概率分布

1. 若随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 之外恒为零, 在 $[0, 1]$ 上 $f(x)$ 与 x^2 成正比, 则 X 的分布函数 $F(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 在一次试验中, 事件 A 发生的概率为 p , 则在 n 次独立试验中 A 至多发生一次的概率是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
3. 设随机变量 $X \sim U[0, 1]$, 则 $Y = X + 1$ 服从分布 $\underline{\hspace{2cm}}$.
4. 作为随机变量的分布函数可以将 $F(x)$ 设成

$$\begin{aligned} \text{(A)} F(x) &= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 4x^{4x}, & x \geq 0. \end{cases} & \text{(B)} F(x) &= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{3}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases} \\ \text{(C)} F(x) &= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1-x}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases} & \text{(D)} F(x) &= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sin x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ 1, & x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

5. 设随机变量 X_1 和 X_2 的分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$, 为使 $F(x) = aF_1(x) - bF_2(x)$ 是某一随机变量的分布函数, 则常数 a, b 必满足条件

$$\begin{aligned} \text{(A)} a + b &= 1. & \text{(B)} a > 0, b > 0. \\ \text{(C)} a - b &= 1. & \text{(D)} a > 0, b < 0. \end{aligned}$$

6. 设随机变量 X 服从 $B(2, p)$ 分布, 随机变量 Y 服从 $B(3, p)$ 分布. 若 $P\{X \geq 1\} = \frac{5}{9}$, 则 $P\{Y \geq 1\} =$

$$\begin{aligned} \text{(A)} \frac{8}{27}. & & \text{(B)} \frac{4}{9}. & & \text{(C)} \frac{19}{27}. & & \text{(D)} \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

7. 设离散型随机变量 X 的分布律为 $P\{X = i\} = \frac{a}{i(i+1)}, i = 1, 2, \dots$, 则 $P\{X < 5\} =$

$$\begin{aligned} \text{(A)} \frac{2}{5}. & & \text{(B)} \frac{5}{12}. \\ \text{(C)} \frac{4}{5}. & & \text{(D)} \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

8. 设连续型随机变量 X 的概率密度函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-\frac{x^3}{3}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$ 则 $P\{|X| < 1\} =$

$$\begin{aligned} \text{(A)} e^{-\frac{1}{3}}. & & \text{(B)} 1 - e^{-\frac{1}{3}}. \\ \text{(C)} e^{\frac{1}{3}} - e^{-\frac{1}{3}}. & & \text{(D)} e^{\frac{1}{3}} - 1. \end{aligned}$$



9. 一袋中有 5 只乒乓球, 编号为 1, 2, 3, 4, 5, 在其中同时取三只, 以 X 表示取出的三只球中的最大号码, 写出随机变量 X 的分布律.

10. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{k}{1+x^2}, -\infty < x < +\infty$,

求: (1) 常数 k ; (2) 随机变量 $Y = 1 - \sqrt[3]{X}$ 的概率密度 $f_Y(y)$.



第三章 多维随机变量及其分布

1. 设相互独立的随机变量 X 与 Y 具有同一分布律, 且 X 的分布律为

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

则随机变量 $Z = \max(X, Y)$ 的分布律为_____.

2. 设二维随机变量 (X, Y) 在 D 上均匀分布, D 是 xOy 平面上由曲线 $y = x$ 与 $y = x^2$ 所围的区域, 则关于 X 的边缘分布 $f_X(x) =$ _____.

3. 设随机变量 X_i 的概率分布为

X_i	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$i = 1, 2$

且满足 $P\{X_1 X_2 = 0\} = 1$, 则 $P\{X_1 = X_2\}$ 等于

- (A) 0. (B) $\frac{1}{4}$.
(C) $\frac{1}{2}$. (D) 1.

4. 设 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 为二维随机变量 (X_1, X_2) 的边缘分布函数, 且 X_1, X_2 相互独立, 则

- (A) $2F_1(x) - F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.
(B) $F_1(x) + F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.
(C) $F_1(x) - \frac{1}{2}F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.
(D) $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

5. 设两个随机变量 X 与 Y 相互独立且同分布: $P\{X = 1\} = P\{Y = -1\} = \frac{1}{2}$, 则下列成立的是

- (A) $P\{X = Y\} = \frac{1}{2}$. (B) $P\{X = Y\} = 1$.
(C) $P\{X + Y = 0\} = \frac{1}{4}$. (D) $P\{XY = 1\} = \frac{1}{4}$.

6. 设随机变量 X 服从分布 $E(1)$, 则 $Y = \max(1, X)$ 的分布函数 $F_Y(y)$ 是

- (A) $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1, \\ e^{-y}, & y \geq 1. \end{cases}$ (B) $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 1, \\ e^{-y}, & y > 1. \end{cases}$
(C) $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1, \\ 1 - e^{-y}, & y \geq 1. \end{cases}$ (D) $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 1, \\ 1 - e^{-y}, & y > 1. \end{cases}$



7. 已知随机变量 X 的概率密度 $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$, $-\infty < x < +\infty$. 条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-y)^2}$, $-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$, 求 $f(x, y)$.

8. 已知二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

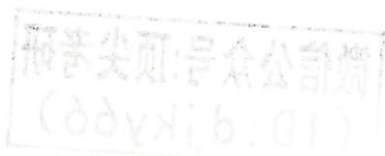
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$$

求 $f_{Y|X}(y|x)$.

题源探究同步练习

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

9. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, $X \sim B(n, p)$, $Y \sim B(m, p)$, 试求 $X+Y$ 的分布.



10. 设二维连续型随机变量的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^2} e^{-\frac{x+y}{\lambda}}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 $\lambda > 0$ 为常数, 求 (1) $P\{X \leq \lambda, Y \leq 2\lambda\}$; (2) $P\{X + Y \leq \lambda\}$.

11. 已知二维离散型随机变量 (X, Y) 的概率分布为

$\begin{array}{c} Y \\ \backslash X \end{array}$	0	1	2
0	0.06	0.15	α
1	β	0.35	0.21

求常数 α 和 β 的值, 使得随机变量 X 和 Y 相互独立.

12. 假设随机变量 X_1, X_2, X_3, X_4 相互独立, 且 $P\{X_i = 0\} = 0.6, P\{X_i = 1\} = 0.4 (i = 1, 2, 3,$

4), 求行列式 $X = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$ 的概率分布.



13. 设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{0 < x < 1, |y| < x\}$ 内服从均匀分布,
(1) 求边缘密度函数; (2) 判断 X, Y 的独立性.

14. 设 G 是由 x 轴, y 轴及直线 $2x + y - 2 = 0$ 所围成的三角形区域, 二维随机变量 (X, Y) 在 G 内服从均匀分布, 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x | y)$ 及 $f_{Y|X}(y | x)$.



第四章 随机变量的数字特征

1. 已知随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x) = Ae^{-x^2+2x-1}$, $-\infty < x < +\infty$, 其中 A 为常数, 则 $E(X^2) =$ _____.
2. 设随机变量 $X \sim E(1)$, 则 $E(X - 3e^{-2X}) =$ _____.
3. 对随机变量 X 和 Y , 若 $E(XY) = E(X)E(Y)$, 则
 (A) $D(XY) = D(X)D(Y)$. (B) $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$.
 (C) X 和 Y 相互独立. (D) X 和 Y 不相互独立.
4. 设随机变量 X 和 Y 都服从正态分布且不相关, 则 X 和 Y
 (A) 一定独立. (B) 联合分布必正态.
 (C) 未必独立. (D) 联合分布必不是正态.
5. 某种电子元件的寿命 $X \sim E(\lambda)$, 现有 n 个该种元件相互独立地工作着, 已知其中至少有一个工作寿命超过平均寿命的概率为 $3e^{-1} - 3e^{-2} + e^{-3}$, 则 n 为
 (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.
6. 在 n 次独立重复试验中, X 和 Y 分别表示成功和失败的次数, 则 $X+Y$ 和 $X-Y$ 的相关系数必为
 (A) -1 . (B) 0 . (C) $\frac{1}{2}$. (D) 1 .
7. 设随机变量 $X_1, \dots, X_9$ 相互独立且同分布, $E(X_i) = 1, D(X_i) = 1, i = 1, \dots, 9$. 令 $S_9 = \sum_{i=1}^9 X_i$, 则对任意 $\epsilon > 0$, 从切比雪夫不等式直接可得
 (A) $P\{|S_9 - 1| < \epsilon\} > 1 - \frac{1}{\epsilon^2}$. (B) $P\{|S_9 - 9| < \epsilon\} \geq 1 - \frac{9}{\epsilon^2}$.
 (C) $P\{|S_9 - 9| < \epsilon\} > 1 - \frac{1}{\epsilon^2}$. (D) $P\left\{\left|\frac{1}{9}S_9 - 1\right| < \epsilon\right\} \geq 1 - \frac{1}{\epsilon^2}$.
8. 将 n 只球 ($1 \sim n$ 号) 随机地放进 n 只盒子 ($1 \sim n$ 号) 中去, 一只盒子装一只球, 将一只球装入与球同号码的盒子中称为一个配对, 记 X 为配对的个数, 求 $E(X)$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



9. 游客乘电梯从底层到电视塔观光, 电梯于每个整点的第 5 分钟、25 分钟和 55 分钟从底层起行, 假设一游客在早上八点的第 X 分钟到达底层候梯处, 且 X 服从 $[0, 60]$ 上的均匀分布, 求该游客等候时间的数学期望.
10. 某线路有两个中间站, 设两个中间站无故障的时间分别为 X_1 和 X_2 , 均服从指数分布. 已知它们平均无故障工作时间为 1 和 0.5 (千小时). 求线路无故障工作时间的期望.
11. 设随机变量 X 和 Y 独立同分布. 已知 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求 $Z = \max(X, Y)$ 的数学期望 $E(Z)$.
12. 某流水生产线上每个产品不合格的概率为 p ($0 < p < 1$), 各产品合格与否相互独立, 当出现一个不合格产品时即停机检修, 设开机后第一次停机时已生产了的产品个数为 X , 求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$.



13. 设 (X, Y) 在矩形 $G = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ 上服从均匀分布, 记

$$U = \begin{cases} 0, & X \leq Y, \\ 1, & X > Y \end{cases} \text{ 和 } V = \begin{cases} 0, & X \leq 2Y, \\ 1, & X > 2Y. \end{cases}$$

(1) 求 U 和 V 的联合分布; (2) 求 U 和 V 的相关系数 ρ .

14. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 服从同一分布, 且 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求随机变量 $U = aX + bY$ 和 $V = aX - bY$ (a, b 是常数) 的相关系数.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

15. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从参数为 1 的指数分布, Y 的概率分布为 $P\{Y = -1\} = p$, $P\{Y = 1\} = 1 - p$, ($0 < p < 1$), 令 $Z = XY$.
- (1) 求 Z 的概率密度;
- (2) p 为何值时, X 与 Z 不相关;
- (3) X 与 Z 是否相互独立?



第五章 大数定律和中心极限定理

1. 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 独立同分布, $E(X_i) = \mu, i = 1, 2, \dots$, 则根据切比雪夫大数定律, $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 依概率收敛于 μ , 只要_____.
2. 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 独立同分布, $E(X_i) = \mu$, 则根据辛钦大数定律 $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 依概率收敛于_____.
3. 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立, 则根据辛钦大数定律, 当 n 充分大时 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 依概率收敛于其共同的数学期望, 只要 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$
 (A) 有相同的数学期望. (B) 服从同一离散型分布.
 (C) 服从同一泊松分布. (D) 服从同一连续型分布.
4. 假设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 已知 $EX^k = a_k (k = 1, 2, 3, 4)$. 证明当 n 充分大时, 随机变量 $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 近似服从正态分布, 并指出其分布参数.

(ID: djky66)



第六章 数理统计的基本概念

1. 设总体 $X \sim U[0, \theta]$, 则来自总体 X 的样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的联合概率密度 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) =$ _____.

2. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自标准正态分布总体的样本, 则 $Y = \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{X_3^2 + X_4^2}}$ 服从的分布及参数为 _____.

3. 设随机变量 X, Y 均服从标准正态分布, 则

(A) $X + Y \sim N(0, 2)$.

(B) $X^2 + Y^2 \sim \chi^2(2)$.

(C) $\frac{X^2}{Y^2} \sim F(1, 1)$.

(D) X^2 和 Y^2 均服从 $\chi^2(1)$ 分布.

4. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, $\bar{X}$ 是样本均值, 记

$$S_1^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2, S_2^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

则可以构造服从 $t(n-1)$ 分布的随机变量

(A) $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S_1} \sqrt{n-1}$.

(B) $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S_2} \sqrt{n^2 - n}$.

(C) $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S_1} \sqrt{n^2 - n}$.

(D) $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S_1} \sqrt{n}$.

5. 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 从总体 X 中抽样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$, 样本均值为 $\bar{X}$, 则

(A) $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n-1)$.

(B) $\frac{(n-1)}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n-1)$.

(C) $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$.

(D) $\frac{(n-1)}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$.

6. 设 $X \sim N(0, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_9$ 是来自总体 X 的样本, 则可以构造服从 F 分布的统计量

(A) $F = \frac{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}{X_4^2 + X_5^2 + \dots + X_9^2}$.

(B) $F = \frac{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2}{X_4^2 + X_5^2 + X_6^2 + X_7^2}$.

(C) $F = \frac{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}{2(X_4^2 + X_5^2 + \dots + X_9^2)}$.

(D) $F = \frac{2(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)}{X_4^2 + X_5^2 + \dots + X_9^2}$.

7. 设 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 试证:

(1) $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - \mu)^2$;

(2) $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2$.



8. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的样本, 记 $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - \mu|$, 试证:

$$(1) E(Y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma; \quad (2) D(Y) = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \frac{\sigma^2}{n}.$$

9. 设 $X \sim N(80, 4^2)$, 从总体 X 中应抽取至少多大容量的样本, 才能使样本均值 $\bar{X}$ 大于 78 的概率不小于 0.975. 已知 $\Phi(1.96) = 0.975$.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

10. 从一正态总体抽取容量为 100 的样本, 假定有 2% 的样本均值与总体均值之差的绝对值在 4 以上, 求总体的标准差. 已知 $\Phi(2.33) = 0.9900$.



11. 设 $X_1, X_2, \dots, X_9$ 是来自正态总体 X 的简单随机样本

$$Y_1 = \frac{1}{6}(X_1 + \dots + X_6), Y_2 = \frac{1}{3}(X_7 + X_8 + X_9),$$

$$S^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=7}^9 (X_i - Y_2)^2, Z = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S},$$

证明: 统计量 Z 服从自由度为 2 的 t 分布.

12. 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 从总体 X 中抽取样本 $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}$, 记 $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2, S_n = \sqrt{S_n^2}$.

证明: $\sqrt{\frac{n}{n+1}} \cdot \frac{X_{n+1} - \bar{X}_n}{S_n} \sim t(n-1)$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



第七章 参数估计

1. 设总体 $X \sim B(m, p)$, 其中 $p(0 < p < 1)$ 为未知参数, 从总体 X 中抽取样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$, 则 p 的矩估计量 $\hat{p} =$ _____.

2. 设总体 X 的概率密度为 $f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1} (0 < x < 1)$, 其中未知参数 $\theta > 0$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的样本, 则 θ 的矩估计量 $\hat{\theta} =$ _____.

3. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的样本, 则可以构造数学期望为未知参数 σ^2 的统计量

$$(A) \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2.$$

$$(B) \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2.$$

$$(C) \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n X_i^2.$$

$$(D) \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2.$$

4. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma^2)$, 总体 Y 服从正态分布 $N(\mu_2, \sigma^2)$. $X_1, X_2, \dots, X_m$ 和 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本, 记 $I_X = \sum_{i=1}^m X_i^2 - m\bar{X}^2$ 和 $I_Y = \sum_{j=1}^n Y_j^2 - n\bar{Y}^2$, 则可以构造数学期望为 σ^2 的统计量为

$$(A) \frac{1}{m} I_X + \frac{1}{n} I_Y.$$

$$(B) \frac{1}{m-1} I_X + \frac{1}{n-1} I_Y.$$

$$(C) \frac{I_X + I_Y}{m+n}.$$

$$(D) \frac{I_X + I_Y}{m+n-2}.$$

5. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 2)$ 为来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, $\bar{X}$ 为样本均值, 则数学期望 $E(X_1 + X_n - 2\bar{X})^2$ 为

$$(A) \frac{2(n-2)}{n} \sigma^2.$$

$$(B) \frac{2(n-1)}{n} \sigma^2.$$

$$(C) 2(n-2) \sigma^2.$$

$$(D) 2(n-1) \sigma^2.$$

6. 设总体 $X \sim E(\lambda)$, 其中 $\lambda > 0$ 是未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 则 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda} =$

$$(A) \bar{X}.$$

$$(B) \frac{1}{\bar{X}}.$$

$$(C) n\bar{X}.$$

$$(D) \frac{1}{n\bar{X}}.$$

7. 设统计量 $\hat{\theta}$ 的数学期望为 θ , 且有 $D(\hat{\theta}) > 0$, 试证: $\hat{\theta}^2$ 的数学期望决不为 θ^2 .



8. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的样本, 已知 $X \sim P(\lambda)$, 求 λ 的矩估计量和最大似然估计.

9. 设总体 X 的概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x-\theta}{\lambda}}, & x > \theta, \\ 0, & x \leq \theta, \end{cases}$$

其中 θ 和 $\lambda (\lambda > 0)$ 均为未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的样本, 求未知参数 θ 和 λ 的矩估计量和最大似然估计量.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

10. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的样本, X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}, & \theta_1 < x < \theta_2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求 θ_1 和 θ_2 的最大似然估计量.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



11. 设总体 $X \sim U(a, b)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的样本, 求未知参数 a 和 b 的矩估计量.

12. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{1-\theta}, & \theta \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

其中 θ 为未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自该总体的简单随机样本, 求 θ 的矩估计量和最大似然估计量.



参考答案

第一篇 微积分

第一章 函数、极限、连续

1. $[-2, 1]$.

【解析】 $f(x)$ 的定义域为 $[-4, 4]$,

由 $f(x^2)$ 知 $0 \leq x^2 \leq 4$, 即 $-2 \leq x \leq 2$, 由 $f(x+3)$ 知 $-4 \leq x+3 \leq 4$, 即 $-7 \leq x \leq 1$,
求其交集, 得 $g(x)$ 的定义域为 $[-2, 1]$.

【评注】 分段函数的定义域为各分段之并.

2. -2 .

【解析】 当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = x^2$, 故 $f(x) \geq 0$, 得 $x = -\sqrt{y}$;

当 $x > 0$ 时, $f(x) = -x^3$, 故 $f(x) < 0$, 得 $x = -\sqrt[3]{y}$.

综上所述 $g(x) = \begin{cases} -\sqrt{x}, & x \geq 0, \\ -\sqrt[3]{x}, & x < 0, \end{cases}$

故有 $g(4) = -\sqrt{4} = -2$.

【评注】 分段求出反函数, 然后再综合起来.

3. $-1, -2$

【解析】 分段函数在分段点 $x = 0$ 连续, 要求既是左连续又是右连续, 即 $f(0^-) = f(0) = f(0^+)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^3}{x - \arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3ax^2}{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3ax^2}{\sqrt{1-x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3ax^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -6a. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{x}{4}} = 4 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x^2} \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ae^{ax} + 2x - a}{2x} = 2a^2 + 4. \end{aligned}$$

令 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, 有 $-6a = 2a^2 + 4$, 得 $a = -1$ 或 $a = -2$.

当 $a = -1$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 6 = f(0)$, 即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

当 $a = -2$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 12 \neq f(0)$, 因而 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

4. A.

【解析】 $f(x)$ 的间断点为 $x = 0, x = 1$. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \ln|x| = 0,$$



可见 $x=0$ 为可去间断点.

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x-1} \sin x = \sin 1 \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} = \sin 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{1-x} \sin x = \sin 1 \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{1-x} = -\sin 1.$$

可见 $x=1$ 为跳跃间断点, 故应选(A).

5. C.

【解析】 注意到当 $|x| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$, 当 $|x| > 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \infty$, 易求得

$$f(x) = \begin{cases} -3\sin \frac{1}{x}, & 0 < |x| < 1, \\ -\frac{1}{2}\sin \frac{1}{x}, & |x| = 1, \\ 2\sin \frac{1}{x}, & |x| > 1. \end{cases}$$

可见, $x=-1$ 和 $x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点, 而 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点, 故选(C).

【评注】 函数 $f(x)$ 的间断点 x_0 分为两类: $f(x)$ 在 x_0 的左、右极限存在的间断点称为第一类间断点, 其中左、右极限相等的间断点称为可去间断点. $f(x)$ 在 x_0 的左、右极限至少有一个不存在的间断点称为第二类间断点.

6. D.

【解析】 当 $x \rightarrow 0$ 时

$$\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} = \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}} \sim x^2,$$

$$3x^3 - 4x^4 + 5x^5 = x^3(3 - 4x + 5x^2) \sim 3x^3,$$

$$e^{x^2} - \cos x = e^{x^2} - 1 + 1 - \cos x \sim (1 + \frac{1}{2}x^2)x^2,$$

$$\int_0^{1-\cos x} \frac{\sin t^2}{t} dt \text{ 由 } \int_0^u \frac{\sin t^2}{t} dt \text{ 与 } u = 1 - \cos x \text{ 复合而成, 当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } \frac{\sin x^2}{x} \sim x, \int_0^x \frac{\sin t^2}{t} dt \text{ 与 } x^2 \text{ 同阶,}$$

$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$. 所以, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^{1-\cos x} \frac{\sin t^2}{t} dt$ 是 x 的 $2 \times 2 = 4$ 阶无穷小. 故选(D).

7. 【解】 由泰勒公式

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \quad \sqrt[3]{1+2\sin^2 x} = 1 + \frac{2}{3}\sin^2 x + o(x^2),$$

$$\begin{aligned} \text{所以, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1+2\sin^2 x}}{\tan^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \frac{1}{2}x^2) - (1 + \frac{2}{3}\sin^2 x) + o(x^2)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}\sin^2 x}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

8. 【解】 由泰勒公式 $\ln(1+ax) = ax - \frac{a^2 x^2}{2} + o(x^2)$ 得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{a}{x} - \left(\frac{1}{x^2} - a^2 \right) \ln(1+ax) \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{a}{x} - \left(\frac{1}{x^2} - a^2 \right) \left(ax - \frac{a^2 x^2}{2} + o(x^2) \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{a}{x} - \frac{a}{x} + a^3 x + \frac{a^2}{2} - \frac{a^4 x^2}{2} \right] = \frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$

9. 【解】 由 $f(1)=0, f'(1)=a$ 可知, $f'(1) = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{f(u)}{u-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t)}{t} = a$.

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln \cos x = \ln[1 + (\cos x - 1)] \sim \cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$.

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (-2) \frac{2f(e^{x^2}) - f(1 + \sin^2 x)}{x^2 [\sqrt{1+2f(e^{x^2})} + \sqrt{1+f(1 + \sin^2 x)}]} \right\}$$



$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{2f(e^{x^2}) - f(1 + \sin^2 x)}{x^2} \right] \\
 &= -\lim_{x \rightarrow 0} \left[2 \frac{f(e^{x^2})}{e^{x^2} - 1} \cdot \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} - \frac{f(1 + \sin^2 x)}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} \right] \\
 &= -[2f'(1) - f'(1)] \\
 &= -f'(1) = -a.
 \end{aligned}$$

10.【解】 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[2x]}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{0}{x} = 0$,

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.

由于 $2x - 1 < [2x] \leq 2x$ 成立,

故当 $x \neq 0$ 时, 有 $\frac{2x-1}{x} < \frac{[2x]}{x} \leq \frac{2x}{x} (x > 0)$ 或 $\frac{2x}{x} \leq \frac{[2x]}{x} < \frac{2x-1}{x} (x < 0)$,

即 $2 - \frac{1}{x} < \frac{[2x]}{x} \leq 2 (x > 0)$ 或 $2 \leq \frac{[2x]}{x} < 2 - \frac{1}{x} (x < 0)$.

由夹逼原理, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[2x]}{x} = 2$.

11.【解】 “ $\infty - \infty$ ”型是分式,一般先通分.

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \frac{1}{a} + \frac{1}{f(a)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\int_a^x f(t) dt - (x-a)f(a)}{(x-a) \int_a^x f(t) dt} \\
 &= \frac{1}{a} + \frac{1}{f(a)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{\int_a^x f(t) dt + (x-a)f(x)} \\
 &= \frac{1}{a} + \frac{1}{f(a)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{\frac{\int_a^x f(t) dt}{x-a} + f(x)} \\
 &= \frac{1}{a} + \frac{1}{f(a)} \cdot \frac{f'(a)}{f(a) + f(a)} \\
 &= \frac{1}{a} + \frac{f'(a)}{2f^2(a)}
 \end{aligned}$$

【评注】 极限 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{\int_a^x f(t) dt + (x-a)f(x)} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{f(x) + f(x) + (x-a)f'(x)} = \frac{f'(a)}{2f(a)}$.

这种解法是错误的. 因为这里利用了 $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = f'(a)$. 而已知条件不能保证 $f'(x)$ 在点 a 连续.

关于“ $\infty - \infty$ ”型未定式的极限,一般的处理方法为:分式先通分;根式先有理化;整式先提出无穷大因子的最高次幂,分别将其化为“ $\frac{0}{0}$ ”型,或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型,或“ $\infty \cdot 0$ ”型再计算.

12.【解】 由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^x f(t) dt = 0$, 及 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^\alpha - \sin x} \neq 0$ 可知 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^\alpha - \sin x) = 0$, 即 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0$, 所以 $\alpha > 0$.
又 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 可得 $f(0) = 0, f'(0) = 0$.

(1) 若 $0 < \alpha < 1$, 则有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^\alpha - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{\alpha x^{\alpha-1} - \cos x} = 0$, 与题设矛盾.

(2) 若 $\alpha > 1$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\alpha x^{\alpha-1} - \cos x) = -1,$$



从而有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^\alpha - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{\alpha x^{\alpha-1} - \cos x} = 0,$$

与题设矛盾.

(3) 当 $\alpha = 1$ 时,

$$\beta = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = f''(0) \neq 0.$$

满足题设条件,故 $\alpha = 1, \beta = f''(0)$.

【评注】 含待定常数的极限问题,一般可在待定常数的取值范围内求出极限,再与题设条件对比,符合题设条件的参数值即为所求的参数值或取值范围.

第二章 一元函数微分学

1. $\frac{f'(0)}{2}$.

【解析】 用导数的定义

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cos x)}{\tan^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cos x) - f(0)}{1 - \cos x} \cdot \frac{1 - \cos x}{\tan^2 x} \\ &= f'(0) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{f'(0)}{2}. \end{aligned}$$

2. A

【解析】 函数可能的不可导点为 $x = \pm \pi$,

$$\text{因为 } y'_-(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{(\pi^2 - x^2)\sin^2 x}{x - \pi} = -2\pi\sin^2 0 = 0,$$

$$y'_+(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{-(\pi^2 - x^2)\sin^2 x}{x - \pi} = 2\pi\sin^2 0 = 0, \text{ 所以 } y \text{ 在 } \pi \text{ 处可导,}$$

$$\text{又 } y'_-(-\pi) = \lim_{x \rightarrow -\pi^-} \frac{-(\pi^2 - x^2)\sin^2 x}{x + \pi} = 0,$$

$$y'_+(-\pi) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} \frac{(\pi^2 - x^2)\sin^2 x}{x + \pi} = 0, \text{ 所以 } y \text{ 在 } -\pi \text{ 处可导, 故 } y \text{ 无不可导点.}$$

【评注】 本题可利用结论: 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 存在, 则 $g(x)|x - x_0|$ 在 x_0 处可导的充分必要条件为 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

3. C

【解析】 根据泰勒公式

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5), \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5), \text{ 则}$$

$$\tan x - \sin x = \frac{x^3}{2} + \frac{49}{120}x^5 + o(x^5),$$

$$\text{而 } f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \cdots,$$

$$\text{由题知 } \lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{f(x)} = 1, \text{ 即}$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 与 $\tan x - \sin x$ 为等价无穷小量,



所以 $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0, \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{1}{2}$.

故 $f'''(0) = 3$, 而 $f^{(4)}(0)$ 任意.

4. D

【解析】 由于 $F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f'(t) dt = x^2 \int_0^x f'(t) dt - \int_0^x t^2 f'(t) dt$,

所以 $F'(x) = 2x \int_0^x f'(t) dt + x^2 f'(x) - x^2 f'(x) = 2x \int_0^x f'(t) dt$.

由题意知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{x^2} = 1$, 即

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \int_0^x f'(t) dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \int_0^x f'(t) dt}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 2f'(0).$$

故 $f'(0) = \frac{1}{2}$.

5. D

【解析】 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}} = \infty$, 所以 $x = 0$ 为垂直渐近线;

又 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}} = 1$, 所以 $y = 1$ 为水平渐近线.

6. 【解】 (1) 当 $x \neq 0$ 时, $f(x)$ 显然连续.

当 $x = 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a = f(0)$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x(1 + \sqrt{1-x})} = \frac{1}{2},$$

故当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 处处连续.

(2) 当 $x \neq 0$ 时, $f(x)$ 显然可导, 可导必连续, 知 $a = \frac{1}{2}$.

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = b, f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} - \frac{1}{2}}{x} = \frac{1}{8}.$$

所以当 $b = \frac{1}{8}$ 时, $f(x)$ 处处可导.

7. 【证明】 令 $F(x) = e^{-kx} f(x) (a \leq x \leq b)$, 则

$$F(a)F(b) > 0, F(a)F\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0,$$

从而由介值定理知存在 $\xi_1, \xi_2: a < \xi_1 < \frac{a+b}{2} < \xi_2 < b$, 使得 $F(\xi_1) = F(\xi_2) = 0$,

由此知存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即

$$e^{-k\xi} [f'(\xi) - kf(\xi)] = 0, \text{ 亦是 } f'(\xi) = kf(\xi).$$

8. 【解】 方程两边对自变量 x 求导, 得

$$2 - e^{-(x+y)^2} (1 + y') = xy' + y$$

令 $x = 0$, 由原方程得 $0 - \int_1^{y(0)} e^{-t^2} dt = 0$.

又 $e^{-t^2} \neq 0$, 所以有 $y(0) = 1$, 代入 ① 式, 得

$$2 - e^{-[0+y(0)]^2} [1 + y'(0)] = 0 + y(0),$$



即 $2 - \frac{1+y'(0)}{e} = 1$, 解得 $y'(0) = e - 1$.

9.【解】 已知 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$, 则

$$y' = 3x^2 + 2ax + b,$$

$$y'' = 6x + 2a.$$

由 $(1, -1)$ 是曲线的拐点及 $x = 0$ 为极大值点可知 $y(1) = -1, y''(1) = 0, y'(0) = 0$.

$$\text{即 } \begin{cases} a+b+c=-2 \\ 6+2a=0 \\ b=0 \end{cases}, \text{ 得 } b=0, a=-3, c=1. \text{ 所以 } y = x^3 - 3x^2 + 1.$$

10.【证明】 (1) 令 $f(u) = \sqrt{u}$, 则 $f(u)$ 在 $[x, x+1]$ 上连续且可导,

由拉格朗日中值定理知, 存在 $0 < \theta(x) < 1$, 使得

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f'(x+\theta(x)) \cdot (x+1-x), \text{ 有}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}, \text{ 解得 } \theta(x) = \frac{1+2\sqrt{x(x+1)}-2x}{4},$$

$$\text{而 } 0 \leq \sqrt{x(x+1)} - x = \frac{x}{\sqrt{x(x+1)} + x} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1} \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{所以 } \frac{1}{4} \leq \theta(x) \leq \frac{1}{2}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+2\sqrt{x(x+1)}-2x}{4} = \frac{1}{4};$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) &= \frac{1}{4} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x(x+1)} - x}{2} = \frac{1}{4} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{2(\sqrt{x(x+1)} + x)} \\ &= \frac{1}{4} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

11.【分析】 由罗尔定理可知: 要证存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $f''(\xi) = 0$,

只要证: $\exists [\xi_1, \xi_2] \subset [a, b]$, 使 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$,

只要证: $\exists \eta \in (a, b)$, 使 $f(a) = f(\eta) = f(b)$.

由条件 $f(a) = f(b) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{F(b) - F(a)}{b-a}$ 可知, 对 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 由拉格朗日定理便可找到这样的 η .

【证明】 作辅助函数 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导. 由拉格朗日定理可知,

存在 $\eta \in (a, b)$, 使得 $F'(\eta) = \frac{F(b) - F(a)}{b-a}$, 即

$$F'(\eta) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(a) = f(b).$$

于是, 在区间 $[a, \eta]$ 和 $[\eta, b]$ 上分别应用罗尔定理, 可知存在 $\xi_1 \in (a, \eta), \xi_2 \in (\eta, b)$, 使得 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$. 再对 $f'(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上应用罗尔定理, 可知存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$, 使 $f''(\xi) = 0$.

12.【分析】 (1) 这是讨论函数在某点取定值的问题, 可转化为函数的零点问题. $f(\eta) - \eta = 0$, 即 $f(x) - x = 0$, 即 $F(x) = f(x) - x$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 内有零点. 由于待证的结论中不含导数, 所以可由介值定理证明.

(2) 欲证结论中含有一阶导数, 应构造辅助函数用罗尔定理证明.

由 $f'(\xi) - \lambda[f(\xi) - \xi] = 1$, 得到

$$f'(x) - \lambda f(x) = 1 - \lambda x,$$



再由一阶非齐次线性方程的通解公式得

$$f(x) = e^{\int \lambda dx} \left[\int (1 - \lambda x) e^{\lambda x} dx + C \right] = e^{\lambda x} (x e^{-\lambda x} + C) = C e^{\lambda x} + x$$

即 $[f(x) - x] e^{-\lambda x} = C$. 于是, 我们便可得到要找的辅助函数 $F(x) = [f(x) - x] e^{-\lambda x}$.

【证明】 (1) 令 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 又

$$F(1) = -1 < 0, F\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0,$$

由介值定理可知, 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 中至少存在一点 η , 使 $F(\eta) = 0$, 即 $f(\eta) = \eta$.

(2) 令 $\varphi(x) = [f(x) - x] e^{-\lambda x}$, 则 $\varphi(x)$ 在 $[0, \eta]$ 上连续, 在 $(0, \eta)$ 内可导, 且 $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\eta) = [f(\eta) - \eta] e^{-\lambda \eta} = 0$. 由罗尔定理, 存在 $\xi \in (0, \eta) \subset (0, 1)$, 使 $\varphi'(\xi) = 0$, 即

$$e^{-\lambda \xi} [f'(\xi) - \lambda(f(\xi) - \xi) - 1] = 0.$$

从而有 $f'(\xi) - \lambda[f(\xi) - \xi] = 1$.

【评注】 因为(2)中涉及到(1)中的 η , 所以在(2)中构造辅助函数时, 应考虑到(1)中的辅助函数 $F(x)$, 这样有利于顺利地构造出(2)中的辅助函数. 一般来说, 要证某连续可导函数 $f(x)$ 在某区间内存在一点 ξ , 使

$$f'(\xi) + a(\xi)f(\xi) + b(\xi) = 0,$$

常考虑由微分方程 $f'(x) + a(x)f(x) + b(x) = 0$ 的通解

$$f(x) = e^{-\int a(x) dx} \left[-\int b(x) e^{\int a(x) dx} dx + C \right].$$

构造辅助函数, $F(x) = f(x) e^{\int a(x) dx} + \int b(x) e^{\int a(x) dx} dx$ 在适当区间上用罗尔定理来证明.

13. 【证明】 由题意知 $\exists \eta \in (a, b)$, 使得 $f'(\eta) = 0$.

作函数 $F(x) = e^{(b-x)^2 f'(x)}$, 显然 $F(b) = F(\eta)$, $F(x)$ 在 $[\eta, b]$ 上用罗尔定理, 可知 $\exists \xi \in (\eta, b)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即

$$e^{(b-\xi)^2 f'(\xi)} \cdot (b-\xi) [(b-\xi)f''(\xi) - 2f'(\xi)] = 0, \text{ 从而 } f''(\xi) = \frac{2f'(\xi)}{b-\xi}.$$

14. 【分析】

$$(e^{2a} + e^{a+b} + e^{2b}) [f(\xi) + f'(\xi)] = 3e^{3\eta-\xi}$$

$$\Leftrightarrow (e^{2a} + e^{a+b} + e^{2b}) [f(\xi) + f'(\xi)] e^{\xi} = 3e^{3\eta}$$

$$\Leftrightarrow (e^{2a} + e^{a+b} + e^{2b}) [e^{\xi} f(x)]' \Big|_{x=\xi} = e^{3\eta} \Big|_{x=\eta},$$

先对 $g(x) = e^{3x}$ 用拉格朗日中值定理, 再对 $F(x) = e^{\xi} f(x)$ 用拉格朗日中值定理, 然后乘以常数 $(e^{2a} + e^{a+b} + e^{2b})$ 可得待证的等式.

【证明】 令 $g(x) = e^{3x}$, 则 $g(x) = e^{3x}$ 在 $[a, b]$ 上满足拉格朗日中值定理条件.

由拉格朗日中值定理, 存在 $\eta \in (a, b)$, 使

$$g'(\eta) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a},$$

$$\text{即 } 3e^{3\eta} = \frac{e^{3b} - e^{3a}}{b - a}. \quad ①$$

令 $F(x) = e^{\xi} f(x)$, 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{e^{\xi} f(b) - e^{\xi} f(a)}{b - a} = e^{\xi} [f(\xi) + f'(\xi)].$$

由 $f(b) = f(a) = 1$ 可得

$$\frac{e^{\xi} - e^{\xi}}{b - a} = e^{\xi} [f(\xi) + f'(\xi)].$$

两边同乘以 $(e^{2a} + e^{a+b} + e^{2b})$ 得

$$\frac{e^{3b} - e^{3a}}{b - a} = (e^{2a} + e^{a+b} + e^{2b}) e^{\xi} [f(\xi) + f'(\xi)],$$

代入 ① 式, 可得 $(e^{2a} + e^{a+b} + e^{2b}) [f(\xi) + f'(\xi)] = 3e^{3\eta-\xi}$.



第三章 一元函数积分学

1. $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2.$

【解析】 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx = \int_1^{+\infty} \arctan x d\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} \arctan x \Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$
 $= \frac{\pi}{4} + \left[\ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right] \Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2.$

2. $-\frac{1}{3}(1-x^3) + C.$

【解析】 $\int x^2 f(1-x^3) dx = -\frac{1}{3} \int f(1-x^3) d(1-x^3) = -\frac{1}{3}(1-x^3) + C.$

3. $\frac{1}{12}.$

【解析】 因为 $f(x)$ 连续, 所以 $\frac{d}{dx} \left(\int_0^{x^3-1} f(t) dt \right) = 1$, 即 $f(x^3-1) \cdot 3x^2 = 1$,

令 $x=2$, 则 $f(7) \cdot 12 = 1, f(7) = \frac{1}{12}.$

4. 0.

【解析】 用分部积分法

$\int_0^1 x^2 f''(2x) dx = \frac{1}{2} f'(2x) x^2 \Big|_0^1 - \int_0^1 x f'(2x) dx$
 $= -\frac{1}{2} f(2x) x \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x) dx = -1 + \frac{1}{4} \int_0^1 f(2x) d(2x)$
 $= -1 + \frac{1}{4} \int_0^2 f(x) dx = 0.$

5. B

【解析】 $F(x) = \int_0^x f(t) dt = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

所以 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $F(x)$ 在 $x=0$ 点处不可导.

6. D

【解析】 因为 $c \in (0, 1), f(x), g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续且 $f(x) \leq g(x)$,

所以 $\int_c^1 f(t) dt \leq \int_c^1 g(t) dt.$

7. 【解】 方法一: 原式 $= \int e^x \frac{(1+\sin x)(1-\cos x)}{1-\cos^2 x} dx$
 $= \int e^x \frac{1+\sin x-\cos x-\sin x \cos x}{\sin^2 x} dx$
 $= \int \frac{e^x}{\sin^2 x} dx + \int \frac{e^x}{\sin x} dx - \int e^x \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx - \int e^x \cot x dx$
 $= -e^x \cot x + \int e^x \cot x dx + \int \frac{e^x}{\sin x} dx + \frac{e^x}{\sin x} - \int \frac{e^x}{\sin x} dx - \int e^x \cot x dx$
 $= \frac{e^x}{\sin x} - e^x \cot x + C.$



$$\begin{aligned}\text{方法二: 原式} &= \int \left(e^x \frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} + e^x \tan \frac{x}{2} \right) dx = \int \left[e^x \left(\tan \frac{x}{2} \right)' + (e^x)' \tan \frac{x}{2} \right] dx \\ &= \int d \left(e^x \tan \frac{x}{2} \right) = e^x \tan \frac{x}{2} + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{方法三: 原式} &= \int e^x (1 + \sin x) \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx = \int e^x d \tan \frac{x}{2} + \int e^x \tan \frac{x}{2} dx \\ &= e^x \tan \frac{x}{2} + C.\end{aligned}$$

【评注】 分部积分法用于求不同类型函数乘积的积分, 分部积分公式为:

$$\int u dv = uv - \int v du; \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

正确选择 u 和 v 是使用分部积分法的关键, 基本经验是, 将常见函数分为三组:

$$(1) \begin{cases} \text{反三角函数} \\ \text{对数函数} \end{cases}, (2) \begin{cases} \text{有理函数} \\ \text{幂函数} \end{cases}, (3) \begin{cases} \text{指数函数} \\ \text{三角函数} \end{cases}.$$

当你面对的积分中含有上述六种函数的两个, 选同组的“上者”为 u , 不同组的“左者”为 u . 对于含抽象函数导数的积分, 应选导数符号之外的函数为 u , 即将抽象函数选为 v .

$$8. \text{【解】} \quad \text{由} \int_0^x f(x) f(x-t) dt \stackrel{x-t=u}{=} \int_0^x f(x) f(u) du, \text{原方程化为} f(x) \int_0^x f(u) du = e^{2x} - 1,$$

$$\text{令} F(x) = \int_0^x f(t) dt, \text{则有} F(x) F'(x) = e^{2x} - 1, F(0) = 0.$$

$$\text{两边积分, 得} \quad \frac{1}{2} F^2(x) = \frac{1}{2} e^{2x} - x + C.$$

$$\text{由} F(0) = 0 \text{ 得} C = -\frac{1}{2}, \text{代入上式得}$$

$$F^2(x) = e^{2x} - 2x - 1, F(x) = \sqrt{e^{2x} - 2x - 1} \quad (\text{因为 } f(x) \geq 0).$$

$$\text{所以} \quad \int f(x) dx = F(x) + C = \sqrt{e^{2x} - 2x - 1} + C,$$

$$\text{故} \quad f(x) = \left[\int f(x) dx \right]' = \frac{e^{2x} - 1}{\sqrt{e^{2x} - 2x - 1}}.$$

$$\begin{aligned}9. \text{【解】} \quad & \int_0^x t f(3x-t) dt \stackrel{3x-t=u}{=} \int_{2x}^{3x} (3x-u) f(u) du \\ &= 3x \int_{2x}^{3x} f(u) du - \int_{2x}^{3x} u f(u) du = \arctan(1 + e^x).\end{aligned}$$

两边对 x 求导得

$$3 \int_{2x}^{3x} f(u) du + 3xf(3x) \cdot 3 - 3xf(2x) \cdot 2 - 9xf(3x) + 4xf(2x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2 + 1}.$$

$$\text{即} \quad 3 \int_{2x}^{3x} f(u) du - 2xf(2x) = \frac{e^x}{1 + (1+e^x)^2}.$$

$$\text{令 } x = 1, \text{ 得} \int_2^3 f(x) dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{e}{1 + (1+e)^2} + \frac{2}{3}.$$

$$10. \text{【解】} \quad \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx \text{ 是一个瑕积分, 用分部积分法.}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx &= \int_0^1 f(x) d(2\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} f(x) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 \sqrt{x} f'(x) dx \\ &= -2 \int_0^1 \sqrt{x} \left(e^{-x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx = - \int_0^1 e^{-x} dx \\ &= e^{-1} - 1.\end{aligned}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



11.【解】 (1) 因为 $f'(x) = 2xe^{-x^4}$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$.

又因为 $f''(x) = 2(e^{-x^4} - 4e^{-x^4}x^4)$, 且 $f''(0) = 2 > 0$,

所以, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 极小值为 $f(0) = 0$.

$$(2) \int_{-2}^3 x^2 f'(x) dx = \int_{-2}^3 x^2 e^{-x^4} \cdot 2x dx = -\frac{1}{2} \int_{-2}^3 e^{-x^4} d(-x^4) = -\frac{1}{2} e^{-x^4} \Big|_{-2}^3 = \frac{1}{2} (e^{-16} - e^{-81}).$$

12.【解】 $\int_0^1 g(xt) dt \xrightarrow{xt=u} \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt$, 又

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{1+t} dt \xrightarrow{t=\frac{1}{u}} \int_1^x \frac{\ln \frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u^2}} \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = \int_1^x \frac{\ln u}{u(1+u)} du = \int_1^x \frac{\ln t}{t(1+t)} dt,$$

所以, $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$. 于是, 原方程化为 $\int_0^x g(u) du = x \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$,

$$g(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt + \ln x = \frac{1}{2} \ln^2 x + \ln x.$$

13.【分析】 将待求的广义积分转化为已知的广义积分.

【解】 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \sin^2 x d\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{\sin^2 x}{x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{2x} d(2x)$
 $= 0 + \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$

14.【解】 由 $f(x)$ 为偶函数可知, $f^2(x)$ 为偶函数. 于是有

$$2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x)]^2 dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \cos x + b \sin x)^2 dx,$$

即 $1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \cos x + b \sin x)^2 dx = (a^2 + b^2) \frac{\pi}{4} + ab.$

当 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 时, $f(x) = a \cos x - b \sin x$,

$$f'(x) = -a \sin x - b \cos x,$$

$$f''(x) = -a \cos x + b \sin x.$$

由 $x = -\frac{\pi}{3}$ 是极小值点可知, $f'\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0$, $f''\left(-\frac{\pi}{3}\right) \geq 0$. 由此得

$$-a \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) - b \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0, \text{ 即 } b = \sqrt{3}a, \quad (2)$$

$$-a \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + b \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \geq 0, \text{ 即 } a + \sqrt{3}b \leq 0 \quad (3)$$

由 $\begin{cases} (a^2 + b^2) \frac{\pi}{4} + ab = 1 \\ b = \sqrt{3}a \end{cases}$, 得 $a^2 = \frac{1}{\sqrt{3} + \pi}$.

由 ②③ 两式可知, $a < 0, b < 0$. 因此 $a = -\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3} + \pi}}, b = -\sqrt{\frac{3}{\sqrt{3} + \pi}}$.

15.【分析】 待证结论的右边 $b \int_0^b f(x) dx - a \int_0^a f(x) dx$ 可看作是函数 $F(x) = x \int_0^x f(t) dt$ 在 a, b 两点函数的差, 所以可考虑用积分基本公式进行放缩.

【证明】 作辅助函数 $F(x) = x \int_0^x f(t) dt$, 则 $F'(x) = \int_0^x f(t) dt + xf(x)$. 于是

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \int_a^b F'(x) dx = \int_a^b \left[\int_0^x f(t) dt + xf(x) \right] dx \\ &\leq \int_a^b [xf(x) + xf(x)] dx = 2 \int_a^b xf(x) dx, \end{aligned}$$



即
$$\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{1}{2}[F(b) - F(a)] = \frac{1}{2}\left[b\int_0^b f(x)dx - a\int_0^a f(x)dx\right].$$

【评注】 涉及某两点函数值之差的问题,一般可考虑先用微分中值定理或牛顿-莱布尼兹公式处理.

第四章 多元函数微积分学

1.
$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^x f(x,y)dy + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$$

【解析】 画出积分区域 D 的图形,有

$$I = \iint_{D_1} f(x,y)dx dy + \iint_{D_2} f(x,y)dx dy = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^x f(x,y)dy + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$$

2. D.

【解析】 因为

$$f\left(\frac{1}{y}, \frac{1}{x}\right) = \frac{xy - x^2}{x - 2y} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{1}{xy} - \frac{2}{x^2}},$$

令 $\frac{1}{y} = u, \frac{1}{x} = v$, 则 $f(u,v) = \frac{v-u}{uv-2v^2}$, 所以, $f(x,y) = \frac{y-x}{xy-2y^2}$. 故选(D).

3. B.

【解析】 令
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y - 3 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y = 0, \end{cases}$$
 得驻点 $(2, -1)$.

又因为 $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 (> 0)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$, 且

$$\Delta = B^2 - AC = 1^2 - 2 \times 2 = -3 < 0,$$

所以, 函数 $f(x,y)$ 在 $(2, -1)$ 处取得极小值, 故选(B).

4. C.

【解析】 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + f(u) + x \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = y + f(u) - \frac{y}{x} \frac{df}{du},$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= 1 + \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{x} \frac{df}{du} - \frac{y}{x} \frac{d^2 f}{du^2} \cdot \frac{1}{x} \\ &= 1 + \frac{1}{x} \frac{df}{du} - \frac{1}{x} \frac{df}{du} - \frac{y}{x^2} \frac{d^2 f}{du^2} \\ &= 1 - \frac{y}{x^2} \frac{d^2 f}{du^2}. \end{aligned}$$

5. A.

【解析】 对于(A)项, 当 x, y 不同时为零时,

$$z = |x| + |y| > 0 + 0 = 0,$$

所以, $z = |x| + |y|$ 在 $(0,0)$ 处取得极小值.

对于(B)项, 当 $y > 0$ 时, $|x|y \geq 0$; 当 $y < 0$ 时, $|x|y \leq 0$, 因而 $z = |x|y$ 在 $(0,0)$ 处不取得极小值.

对于(C)项, 当 $x \neq 0, y = 0$ 或 $x = 0, y \neq 0$ 时, $|xy| = 0$, 因而 $z = |xy|$ 在 $(0,0)$ 处不取得极小值.



参考答案

对于(D)项,当 x, y 同号时, $xy > 0$;当 x, y 异号时, $xy < 0$,因而 $z = xy$ 在 $(0, 0)$ 处不取得极小值.

6. 【解】 方法一:常规求偏导数的方法.

因为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} \cdot f(xy) + \frac{1}{x} \cdot f'(xy) \cdot y + y \cdot \varphi'(x+y) \cdot 1,$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{x^2} f'(xy) \cdot x + \frac{1}{x} f''(xy) \cdot x + \varphi'(x+y) + y \varphi''(x+y) \\ &= y f''(xy) + \varphi'(x+y) + y \varphi''(x+y) \end{aligned}$$

方法二:利用二阶混合偏导数相等的情形.

因为函数 f, φ 具有连续的二阶导数,则二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 是连续的,即 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.因此,两个二阶混合偏导数可以交换次序.

因为

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} f'(xy) \cdot x + \varphi(x+y) + y \cdot \varphi'(x+y),$$

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = y f''(xy) + \varphi'(x+y) + y \varphi''(x+y).$$

【评注】 本题的两种计算方法,虽然都是逐项求偏导数,但顺序不同,其计算的工作量却大不相同.

7. 【分析】 利用已知方程,通过求复合函数的二阶偏导数,得到一个关于函数 u 的微分方程.解此微分方程,就可得到函数 u 的表达式.

【解】 因为 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{r} f'(r)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{r} f'(r)$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{r} f'(r)$, 所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2} f''(r) + \frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2} f'(r) = \frac{x^2}{r^2} f''(r) + \frac{y^2 + z^2}{r^3} f'(r).$$

同理,由对称性,得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^2} f''(r) + \frac{x^2 + z^2}{r^3} f'(r),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{z^2}{r^2} f''(r) + \frac{x^2 + y^2}{r^3} f'(r).$$

由条件知,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) = 0,$$

这是一个二阶的微分方程.

方法一:利用分离变量解微分方程.

将方程 $f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) = 0$ 分离变量,得 $\frac{f''(r)}{f'(r)} = -\frac{2}{r}$.两边同时积分,得 $f'(r) = \frac{C_1}{r^2}$.解此微分方程,即得

$$u = f(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2, \text{ 其中 } C_1, C_2 \text{ 为任意常数.}$$

方法二:利用凑微分法解方程.

由已知 $f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) = 0$,得 $r f''(r) + 2 f'(r) = 0$,即 $r^2 f''(r) + 2 r f'(r) = 0$.

于是 $[r^2 f'(r)]' = 0$,即得 $f'(r) = \frac{C_1}{r^2}$.解此微分方程,得 $u = f(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2$,其中 C_1, C_2 为任意常数.

【评注】 本题得到的是一个二阶的微分方程,但不是线性的常系数的二阶微分方程.因此,不能用常系数的线性微分方程的特征值的方法去求解.



8. 【分析】 由微分方程, 通过求积分, 即可得到相应的函数 $f(x, y)$ 的表达式.

【解】 因为 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y$, 则 $\frac{\partial f}{\partial x} = xy + C_1(y)$, 从而 $f = \frac{1}{2}x^2y + xC_1(y) + C_2(y)$.

由 $\frac{\partial f}{\partial x} = xy + C_1(y)$, 得 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x + C_1'(y) = x + y$, 即 $C_1'(y) = y$, 从而 $C_1(y) = \frac{1}{2}y^2 + C_1$. 于是,

$$f = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + C_1x + C_2(y).$$

再由 $f = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + C_1x + C_2(y)$, 得 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x + C_2''(y) = x$, 即 $C_2''(y) = 0$.

从而 $C_2(y) = C_1y + C_2$. 于是,

$$f = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + C_1y + C_2, \text{ 其中 } C_1, C_2 \text{ 为任意常数.}$$

同理, 亦可得到 $f = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + C_3x + C_4$, 其中 C_3, C_4 为任意常数.

于是, $f = a + bx + cy + \frac{1}{2}xy(x + y)$, 其中 a, b, c 均为任意常数.

【评注】 对 x 或 y 求积分时, 另一个变量 y 或 x 就应视为常数.

9. 【分析】 本题主要考查绝对值函数的二重积分, 关键在于如何去掉绝对值的符号.

【解】 方法一: 设 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 |3r\cos\theta + 4r\sin\theta| r dr = \int_0^{2\pi} |3\cos\theta + 4\sin\theta| d\theta \int_0^1 r^2 dr \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} |3\cos\theta + 4\sin\theta| d\theta \quad (\text{分子、分母同乘以因子 } 5 = \sqrt{3^2 + 4^2}) \\ &= \frac{5}{3} \int_0^{2\pi} \left| \frac{3}{5}\cos\theta + \frac{4}{5}\sin\theta \right| d\theta \\ &= \frac{5}{3} \int_0^{2\pi} |\sin(\theta + \theta_0)| d\theta \quad (\text{其中 } \sin\theta_0 = \frac{3}{5}, \cos\theta_0 = \frac{4}{5}) \\ &\stackrel{\theta + \theta_0 = t}{=} \frac{5}{3} \int_{\theta_0}^{\theta_0 + 2\pi} |\sin t| dt \quad (\text{因为 } |\sin t| \text{ 是以 } \pi \text{ 为周期的函数, 所以亦是以 } 2\pi \text{ 为周期的函数}) \\ &= \frac{5}{3} \int_0^{2\pi} |\sin t| dt = \frac{5}{3} \left(\int_0^{\pi} \sin t dt - \int_{\pi}^{2\pi} \sin t dt \right) = \frac{20}{3}. \end{aligned}$$

方法二: 设坐标交换 $u = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, v = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y$,

则变换后的雅可比行列式为 $\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| = 1$, 即 $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = 1$.

于是, 上述变换就将区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 换成区域 $D = \{(u, v) | u^2 + v^2 \leq 1\}$. 所以,

$$\begin{aligned} I &= \iint_D |5u| dudv = \int_{-1}^1 du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} |5u| dv \\ &= \int_{-1}^1 |5u| 2\sqrt{1-u^2} du = 20 \int_0^1 u \sqrt{1-u^2} du = \frac{20}{3}. \end{aligned}$$

【评注】 本题还可以作坐标变换 $u = 3x + 4y, v = -4x + 3y$. 用这种方法, 还可以证明

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(ax+by) dx dy = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} f(u \sqrt{a^2+b^2}) du.$$

10. 【分析】 此题的解法有一定的技巧性.

【解】 因为 $f'_x \cdot 1 + f'_y \cdot 2 = 1$, 所以 $2f'_y = 1 - x^2$.

又因为 $2(f''_{xx} \cdot 1 + f''_{xy} \cdot 2) = -2x$, 由条件 $f'_x(x, 2x) = x^2$, 则 $f''_{xx} \cdot 1 + f''_{xy} \cdot 2 = 2x$.

$$\text{从而 } \begin{cases} f''_{xy} + 2f''_{xx} = -x \\ f''_{xx} + 2f''_{xy} = 2x \end{cases}.$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



解此方程组,得 $f''_{xx}(x, 2x) = -\frac{4}{3}x$, $f''_{xy}(x, 2x) = \frac{5}{3}x$.

11. 【分析】 先由方程 $g(y, z, t) = 0, h(z, t) = 0$ 解出 y 的函数,再将其代入到 $u = f(x, y, z, t)$ 中,从而得到函数 $u = u(x, y)$.

【解】 因为 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$, 且 $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dy} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{dt}{dy}$.

方法一: 由方程 $g(y, z, t) = 0, h(z, t) = 0$ 求 $\frac{dz}{dy}, \frac{dt}{dy}$. 因为

$$\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{dz}{dy} + \frac{\partial g}{\partial t} \frac{dt}{dy} = 0, \frac{\partial h}{\partial z} \frac{dz}{dy} + \frac{\partial h}{\partial t} \frac{dt}{dy} = 0,$$

$$\text{所以, } \frac{dz}{dy} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial t}}{\frac{\partial(g, h)}{\partial(z, t)}}, \frac{dt}{dy} = \frac{\frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial z}}{\frac{\partial(g, h)}{\partial(z, t)}}. \quad \frac{\partial(g, h)}{\partial(z, t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial t} \\ \frac{\partial h}{\partial z} & \frac{\partial h}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\partial g}{\partial z} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial t} \cdot \frac{\partial h}{\partial z}$$

将上述结果代入到 ① 式中,得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{-\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial z}}{\frac{\partial(g, h)}{\partial(z, t)}} = \frac{\frac{\partial(f, g, h)}{\partial(y, z, t)}}{\frac{\partial(g, h)}{\partial(z, t)}}.$$

方法二: 设方程组 $\begin{cases} f(x, y, z, t) - u = 0 \\ g(y, z, t) = 0 \\ h(z, t) = 0 \end{cases}$, 确定 u, z, t 是变量 x, y 的函数. 现在变量 z, t 不再是中间变量,而是

视为因变量对待.

由隐函数的求导方法,得

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} - 1 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} + 0 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} + 0 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

将 $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial t}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}$ 视为未知数,解出

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{-\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial z}}{\frac{\partial(g, h)}{\partial(z, t)}} = \frac{\frac{\partial(f, g, h)}{\partial(y, z, t)}}{\frac{\partial(g, h)}{\partial(z, t)}}.$$

【评注】 本题在求导数时,要分析函数的关系,明确谁是因变量,谁是中间变量,谁是自变量.

12. 【分析】 对于绝对值函数的二重积分,关键问题是根据条件画出相应的图形.

【解】 因为被积函数 $f(x, y) = \sqrt{|y - x^2|}$ 关于变量 x 是偶函数,且积分区域 D 关于 y 坐标轴对称. 因此,

$$I = \iint_D \sqrt{|y - x^2|} d\sigma = 2 \iint_{D_1} \sqrt{|y - x^2|} d\sigma,$$

其中积分区域

$$D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\} \cup \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2\}.$$

由于

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} \sqrt{|y - x^2|} d\sigma &= \int_0^1 dx \int_0^{x^2} \sqrt{x^2 - y} dy + \int_0^1 dx \int_{x^2}^2 \sqrt{y - x^2} dy \\ &= \int_0^1 \frac{2}{3} x^3 dx + \frac{2}{3} \int_0^1 (2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx \quad (\text{作变量变换 } x = \sqrt{2} \sin \theta) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 \theta d\theta = \frac{1}{6} + \frac{8}{3} \times \frac{1}{4} \left(1 + \frac{3}{8}\pi\right) = \frac{5}{6} + \frac{\pi}{4},$$

$$\text{所以, } I = \iint_D \sqrt{|y-x^2|} d\sigma = \frac{5}{3} + \frac{\pi}{2}.$$

【评注】 本题的关键在于用到了积分区域的对称性.

13. 【解】 由已知二重积分的第一部分 $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y) dy$, 得积分区域

$$D_1 = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}.$$

由已知二重积分的第二部分 $\int_1^3 dx \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y) dy$, 得积分区域

$$D_2 = \{(x,y) \mid 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \frac{1}{2}(3-x)\}.$$

按着新的积分次序(先 x 后 y), 得到相应的积分区域

$$D = \{(x,y) \mid \sqrt{y} \leq x \leq 3-2y, 0 \leq y \leq 1\}.$$

于是,

$$I = \iint_D f(x,y) dx dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y) dx.$$

【评注】 根据原有的二重积分的上、下限, 画出相应的积分区域的图形, 是解答本类型题的关键所在.

第五章 无穷级数

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}.$$

【解析】 因为 $u_n = S_n - S_{n-1} = \frac{2n}{n+1} - \frac{2(n-1)}{n} = \frac{2}{n(n+1)}$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$.

$$2. |a| < 1.$$

【解析】 收敛区域为 $(-\infty, +\infty)$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a^{(n+1)^2}}{a^{n^2}} \right| = 0$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a^{2n+1}| = 0$, 故 $|a| < 1$.

$$3. A.$$

【解析】 设 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n+1} = S(x)$, 则

$$S(x) = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1} = x^2 t(x), \text{ 其中 } t(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1}.$$

$$\text{由于 } \int_0^x t(u) du = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (-1)^n n u^{n-1} du = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n = -\frac{x}{1+x} \quad (|x| < 1),$$

$$t(x) = \left(-\frac{x}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2}.$$

$$\text{所以 } S(x) = x^2 t(x) = -\frac{x^2}{(1+x)^2} \quad (|x| < 1).$$

$$4. C.$$

【解析】 因为当 $n \rightarrow \infty$ 时, $u_n^2 = \ln^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{n}$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 发散,

而由莱布尼兹判别法 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 收敛, 故选 (C).

$$5. A.$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



【解析】 由于 $\left| \frac{u_n}{n} \right| \leq \frac{1}{2} \left(u_n^2 + \frac{1}{n^2} \right)$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 均收敛, 因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n^2 + \frac{1}{n^2} \right)$ 收敛, 所以原级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ 绝对收敛, 选择(A).

6. A.

【解析】 当 $x = -\frac{5}{2}$ 时, 原级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(-\frac{3}{2} \right)^n$, 因为 $x = 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^n$ 收敛, 且

$\left| a_n \left(-\frac{3}{2} \right)^n \right| \leq |a_n| 2^n$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(-\frac{3}{2} \right)^n$ 绝对收敛, 选择(A).

7. 【证明】 由于 $\{a_n\}$ 是单调增加且有界的正数列, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$.

因为

$$1 - \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{1}{a_1} (a_{n+1} - a_n),$$

则

$$S_n \leq \frac{1}{a_1} \sum_{i=1}^n (a_{i+1} - a_i) = \frac{1}{a_1} (a_{n+1} - a_1).$$

根据级数收敛的定义即可证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}} \right)$ 是收敛的.

8. 【解】 方法一: 作辅助函数 $f(x)$, 由逐项微分、逐项积分的定理, 求出其和函数, 就可得所求级数的和数.

令 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)} x^{2n+1}$, 易知此幂级数的收敛半径为 $R = 1$, 且 $f(0) = 0$.

因为 $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} (|x| < 1)$,

再令 $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}$, 且 $g(0) = 0$, 则

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} (x^{2n-1})' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \frac{1}{1+x^2} (|x| < 1),$$

故得

$$g(x) = \int_0^x g'(t) dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan x (|x| < 1).$$

即 $f'(x) = x \arctan x$. 于是,

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x t \arctan t dt = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctan x (|x| < 1).$$

可知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{2} \arctan 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \arctan 1 = \frac{\pi-2}{4}$.

方法二: 先对原级数进行分解, 利用已知函数的幂级数展开式及逐项积分的定理, 可得级数的和函数. 再由阿贝尔定理即得相应的结论.

对原级数进行分解, 得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}. \end{aligned} \quad ①$$

由逐项积分的定理, 有

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} t^{2n-2} \right] dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} (|x| < 1).$$

再由阿贝尔定理, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan x = \frac{\pi}{4}. \quad ②$$



综上所述,由①与②式,即有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - 1 \right) = \frac{\pi-2}{4}.$$

9.【分析】 在点 $x_0 = 1$ 处展开成幂级数,即展开成 $x-1$ 的幂级数形式.

将函数 $f(x)$ 视为 $f(x) = (x-1) \cdot \frac{1}{4-x}$, 因此,只需将 $\frac{1}{4-x}$ 展开成 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-1)^n$ 即可.

【解】 因为 $\frac{1}{4-x} = \frac{1}{3-(x-1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{x-1}{3}\right)},$

且 $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+\cdots+x^n+\cdots (|x|<1),$

所以, $\frac{1}{4-x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{x-1}{3}\right)} = \frac{1}{3} \left[1 + \left(\frac{x-1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{x-1}{3}\right)^n + \cdots \right] \left(\left| \frac{x-1}{3} \right| < 1 \right).$

于是, $f(x) = \frac{x-1}{4-x} = \frac{1}{3} \left[(x-1) + \frac{(x-1)^2}{3} + \cdots + \frac{(x-1)^{n+1}}{3^n} + \cdots \right] (|x-1|<3).$

由于函数 $f(x)$ 的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 中的系数 $a_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!}$, 所以, $f^{(n)}(1) = a_n n! = \frac{n!}{3^n}.$

10.【证明】 因为 $f(x)$ 为偶函数,所以 $f'(x) = -f'(-x)$, 且 $f'(0) = 0$.

根据二阶泰勒公式展开式,有 $f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2} f''(\xi) \cdot x^2$, 即

$$f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = \frac{1}{2} f''(\xi) \frac{1}{n^2}.$$

由于 $f''(x)$ 在点 $x=0$ 的邻域内连续,知存在正数 $M>0$,使得在点 $x=0$ 的一个邻域内 $|f''(x)| \leq M$, 从而当 n 充分大时,有 $\left| f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right| \leq \frac{1}{2} M \frac{1}{n^2}.$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right]$ 绝对收敛.

11.【解】 由条件知 $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{2}{3} - n \right) a_n$. 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, 所以当 $|x|<1$ 时,幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛. 设

$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 则

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = 5 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} - n \right) a_n x^n \\ &= 5 + \frac{2}{3} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 \right) - x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 5 + \frac{2}{3} S(x) - \frac{2}{3} \cdot 3 - x S'(x), \end{aligned}$$

即当 $|x|<1$ 时, $(x+1)S'(x) - \frac{2}{3}S(x) = 3$.

解此微分方程,得 $S(x) = c(x+1)^{\frac{2}{3}} - \frac{9}{2}$. 由 $S(0) = a_0 = 3$ 得 $c = \frac{15}{2}$.

所以,幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数为 $S(x) = \frac{15}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} - \frac{9}{2}$.

12.【解】 因为 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$, $|x|<1$, 所以

$$\arctan x = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, |x| \leq 1.$$

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)



$$\begin{aligned} \text{即 } f(x) &= \frac{1+x^2}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{2n+1} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{2n-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{1-4n^2} x^{2n}, |x| \leq 1. \end{aligned}$$

$$\text{令 } x=1, \text{ 得 } \frac{1+1^2}{1} \arctan 1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{1-4n^2}, \text{ 从而 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

第六章 常微分方程与差分方程

1. $(4-x)y^4 = Cx.$

【解析】 由于 $ydx + (x^2 - 4x)dy = 0$, 则

$$\frac{dx}{4x-x^2} = \frac{dy}{y}, \text{ 即 } \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4-x} \right) dx = \frac{1}{y} dy$$

两边积分得 $\frac{1}{4} (\ln x - \ln(4-x)) = \ln y + \ln C_1$, 整理得

$$\left(\frac{x}{4-x} \right)^{\frac{1}{4}} = C_1 y, \text{ 亦是 } (4-x)y^4 = Cx.$$

2. $2x \ln y = \ln^2 y + C.$

【解析】 方程变为如下形式

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{y \ln y} = \frac{1}{y},$$

这是一个一阶线性微分方程, 利用通解公式得到

$$\begin{aligned} x &= e^{-\int \frac{1}{y \ln y} dy} \left[\int \frac{1}{y} e^{\int \frac{1}{y \ln y} dy} dy + C_1 \right] = \frac{1}{\ln y} \left(\int \frac{1}{y} \ln y dy + C_1 \right) \\ &= \frac{\ln y}{2} + \frac{C_1}{\ln y} \end{aligned}$$

故所求通解为 $2x \ln y = \ln^2 y + 2C_1$, 也可写为 $2x \ln y = \ln^2 y + C.$

3. $y = C_1(x-1)e^x + C_2(x^2-1)e^x + e^x.$

【解析】 二阶非齐次线性微分方程的特解为 $y_1 = e^x, y_2 = xe^x, y_3 = x^2e^x$,

因此 $xe^x - e^x, x^2e^x - e^x$ 为原微分方程对应的齐次方程的两个线性无关的解,

二阶非齐次线性微分方程的通解可以表示为 $y = C_1(xe^x - e^x) + C_2(x^2e^x - e^x) + e^x$,

整理得到 $y = C_1(x-1)e^x + C_2(x^2-1)e^x + e^x.$

4. A.

【解析】 因为特征方程为 $\lambda^2 + b\lambda + 1 = 0$, 其判别式为 $\Delta = b^2 - 4$.

当 $b \neq \pm 2$ 时, 微分方程的通解为 $y(x) = C_1 e^{\frac{-b+\sqrt{b^2-4}}{2}x} + C_2 e^{\frac{-b-\sqrt{b^2-4}}{2}x}$. 所以,

当 $b^2 - 4 > 0$ 时, 要使解 $y(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界, 只需要 $b \pm \sqrt{b^2-4} \geq 0$, 即 $b > 2$;

当 $b^2 - 4 < 0$ 时, 要使解 $y(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界, 只需要 $b + \sqrt{b^2-4}$ 与 $b - \sqrt{b^2-4}$ 的实部大于等于 0,

即 $0 \leq b < 2$;

当 $b = 2$ 时, 解 $y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{-x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上有界;

当 $b = -2$ 时, 解 $y(x) = (c_1 + c_2 x) e^x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上无界.

综上所述, 当且仅当 $b \geq 0$ 时, 微分方程 $y'' + by' + y = 0$ 的每一个解 $y(x)$ 都在区间 $(0, +\infty)$ 上有界, 故选 (A).



5. B.

【解析】 原差分方程的一般形式为 $y_{x+1} - 3y_x = \frac{2}{3}$, 所以通解为

$$y_x = y_0 \cdot 3^x + \frac{2}{3} \cdot \frac{1-3^x}{1-3} = \left(y_0 + \frac{1}{3}\right) 3^x - \frac{1}{3}$$

因此, 当 $y_0 = -\frac{1}{3}$ 时, $y_x = -\frac{1}{3}$, 故选(B).

6. D.

【解析】 因为 $\Delta y_x = y_{x+1} - y_x$, 所以差分方程为 $y_{x+1} - 2y_x = 2$, 其通解为

$$y_x = C2^x + \frac{2}{1-2} = C2^x - 2, \text{ 其中 } C \text{ 为任意常数.}$$

7. 【解】 因为对任意的实数 s, t , 有 $f(s+t) = f(s) + f(t) + 2st$.

令 $s = 0, t = 0$, 则 $f(0) = 0, f'(0) = 1$.

将原式变形, 得 $\frac{f(s+t) - f(s)}{t} = \frac{f(t)}{t} + 2s$.

令 $t \rightarrow 0$, 得 $f'(s) = f'(0) + 2s = 1 + 2s$.

解此微分方程, 得 $f(s) = s + s^2 + C$, 其中 C 为任意常数.

再由条件 $f(0) = 0$, 得 $C = 0$. 于是, $f(x) = x + x^2$.

8. 【分析】 本题主要考查二阶非齐次线性微分方程的通解的结构.

【解】 方法一: 利用线性微分方程的通解的结构求解.

先求齐次微分方程 $y'' + y' = 0$ 的通解 $\bar{y}$.

因为特征方程为 $\lambda^2 + \lambda = 0$, 得 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$. 所以, 齐次微分方程的通解为 $\bar{y} = C_1 + C_2 e^{-x}$.

再求非齐次微分方程 $y'' + y' = 2x^2 + 1$ 的一个特解 y^* .

因为 $y'' + y' = (2x^2 + 1)e^{0x}$, 其中 $r = 0$ 是特征方程为 $\lambda^2 + \lambda = 0$ 的单根, 则设特解的形式为

$$y^* = xQ_2(x) = x(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx.$$

将 y^* 代入到原微分方程中去, 得

$$3ax^2 + (2b + 6a)x + (2b + c) = 2x^2 + 1.$$

比较等式两端同类项的系数, 有 $\begin{cases} 3a = 2, \\ 6a + 2b = 0, \\ 2b + c = 1. \end{cases}$ 得 $\begin{cases} a = \frac{2}{3}, \\ b = -2, \\ c = 5. \end{cases}$ 即 $y^* = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 5x$.

所以, 原微分方程的通解为

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 5x, \text{ 其中 } C_1, C_2 \text{ 为任意常数.}$$

方法二: 利用高阶可降阶的方法求解.

在微分方程 $y'' + y' = 2x^2 + 1$ 的两端同时积分, 得 $y' + y = \frac{2}{3}x^3 + x + C$,

这是一阶线性微分方程, 其通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int p(x)dx} \left[\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right] \\ &= e^{-x} \left[\int \left(\frac{2}{3}x^3 + x + C \right) e^x dx + C_2 \right] \\ &= C + C_2 e^{-x} + \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 5x - 5 \end{aligned}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



$$= C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{2}{3} x^3 - 2x^2 + 5x, \text{ 其中 } C_1, C_2 \text{ 为任意常数.}$$

【评注】形如 $y'' + ay' + by = e^{rx} P_n(x)$ 的二阶常系数非齐次线性微分方程, 其特解的选取为 $y^* = x^k e^{rx} Q_n(x)$, 其中数 r 对应于特征方程 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ 不是特征根、是特征单根、是特征重根, 取 $k = 0, 1, 2$.

9. 【分析】 本题主要考查二阶非齐次线性微分方程的通解的结构以及解的叠加原理.

【解】 设该微分方程的特解为

$$y^* = y_1^*(x) + y_2^*(x) = A x e^x + (B \cos x + C \sin x),$$

代入到微分方程中, 得 $A = \frac{1}{2}, B = -2, C = 0$, 从而微分方程的通解为:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{x}{2} e^x - 2 \cos x, \text{ 其中 } C_1, C_2 \text{ 为任意常数.}$$

【评注】若 $y_i^*(x)$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' + ay' + by = f_i(x)$ 的特解 ($i = 1, 2$), $y^* = y_1^*(x) + y_2^*(x)$ 则是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' + ay' + by = f_1(x) + f_2(x)$ 的特解.

10. 【分析】 本题主要考查分段函数的微分方程的求解方法.

【解】 很显然, $y = 0$ 是其一个特解.

当 $y > 0$ 时, 原微分方程为 $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}$. 将变量分离, 得 $y^{-\frac{1}{2}} dy = 2dx$. 两边积分得 $y^{\frac{1}{2}} = x - C_1 \geq 0$.

考虑到 $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} > 0$, 且 $y(0) = 0$, 及 $y = 0$ 是解, 则特解为

$$y = \begin{cases} (x - C_1)^2, & 0 \leq C_1 \leq x, \\ 0, & x < C_1. \end{cases}$$

当 $y < 0$ 时, 原微分方程为 $\frac{dy}{dx} = 2(-y)^{\frac{1}{2}}$.

将变量分离, 得 $(-y)^{-\frac{1}{2}} dy = 2dx$. 两边积分得 $(-y)^{\frac{1}{2}} = -x + C_2 \geq 0$. 同理考虑到 $\frac{dy}{dx} = 2(-y)^{\frac{1}{2}} > 0$, 且 $y(0) = 0$, 及 $y = 0$ 是解, 则特解为

$$y = \begin{cases} -(x - C_2)^2, & x \leq C_2 \leq 0, \\ 0, & x > C_2. \end{cases}$$

因此, 满足条件 $y(0) = 0$ 的特解为

$$y = \begin{cases} -(x - C_2)^2, & x \leq C_2 \leq 0, \\ 0, & C_2 < x < C_1, \\ (x - C_1)^2, & 0 \leq C_1 \leq x. \end{cases}$$

其中 $C_1 \geq 0, C_2 \leq 0$ 为任意常数, 原初值问题有无穷多的解.

【评注】 本题的关键在于函数分段, 并分别求其满足条件的特解.

11. 【分析】 本题主要考查二阶非齐次线性微分方程的通解的结构.

【解】 先将函数 y 代入到微分方程中, 比较等式两端同类项前的系数, 得 $a = -3, b = 2, c = -1$.

先求齐次微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的通解, 得 $\bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$.

由于非齐次微分方程 $y'' - 3y' + 2y = -e^x$ 有一个特解 $y^* = e^{2x} + (x+1)e^x$, 于是, 原微分方程的通解为

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + e^{2x} + (1+x)e^x = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + x e^x,$$

其中 $C_1 = C_1' + 1, C_2 = C_2' + 1$ 为任意常数.

12. 【解】 设所求曲线为 $y = f(x)$. 由题设, 作出所围梯形.

过曲线 $y = f(x)$ 上的点 (x, y) 的切线方程为 $Y - y = f'(x)(X - x)$.

令 $Y = 0$, 得切线在 x 轴上的截距为 $X = x - \frac{y}{f'(x)}$, 即为梯形的下底的长度.



又梯形的上底的长为 x , 高为 y . 因此, 梯形面积为

$$S = \frac{1}{2}(X+x) \cdot y = \frac{1}{2}\left(2x - \frac{y}{y'}\right)y = a^2.$$

由此得微分方程 $2(xy - a^2)y' = y^2$, 即 $y^2 \frac{dx}{dy} - 2yx = -2a^2$.

这是关于 y 的一阶非齐次线性微分方程, 可求得通解为 $x = Cy^2 + \frac{2a^2}{3y}$, 其中 C 为任意常数.

又因为曲线过点 (a, a) , 即满足初始条件 $y(a) = a$. 代入通解中, 得 $C = \frac{1}{3a}$. 于是, 所求曲线方程为

$$x = \frac{y^2}{3a} + \frac{2a^2}{3y}.$$

【评注】 这是一个微分方程的几何应用问题. 解决这类问题要注意两点:

(1) 由实际问题及题设条件, 建立微分方程(即列出含有自变量 x 、未知函数 y 及未知函数的导数 y' 的问题), 并指出相应的初始条件.

(2) 判断微分方程的类型, 给出相应的解(包括微分方程的通解及满足初始条件的特解).

13. 【分析】 本题的第一部分应先求其通解, 再验证它的有界性; 第二部分则是判断(1)中的解具有周期性.

【解】 微分方程 $y' + y = f(x)$ 的通解为 $y(x) = e^{-x} \left[C + \int_0^x e^t f(t) dt \right]$, 其中 C 为任意常数.

(1) 因为函数 $f(x)$ 在 R 上连续, 取 $C = \int_{-\infty}^0 e^t f(t) dt$ (由假设, 此广义积分是收敛的), 则

$$y(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^x e^t f(t) dt.$$

由于在区间 R 上, $|f(x)| \leq M$, 从而 $|y(x)| \leq M$, 即为所给微分方程的一个有界解.

(2) 设 $f(x+\omega) = f(x)$, 则对(1)中的解 $y(x)$, 当 $x \in R$ 时, 有

$$\begin{aligned} y(x+\omega) &= e^{-(x+\omega)} \int_{-\infty}^{x+\omega} e^t f(t) dt = e^{-(x+\omega)} \int_{-\infty}^x e^t f(t) dt + e^{-(x+\omega)} \int_x^{x+\omega} e^t f(t) dt \\ &= e^{-x} e^{-\omega} \int_{-\infty}^x e^u f(u) du + e^{-x} \int_x^{x+\omega} e^u f(u) du = e^{-x} \int_{-\infty}^x e^u f(u) du = y(x), \end{aligned}$$

所以, 所给微分方程的通解 $y(x)$ 也是一个以 ω 为周期的函数.

【评注】 第(1)问中, 常数 C 的取值有一定的技巧, 目的是将通解 $y(x)$ 中括号的两项合并.

14. 【解】 因为 $\int_0^x f(t-x) dt = \int_0^x f(u) du$, (令 $u = t-x$)

$$\text{所以 } f'(x) + 2f(x) - 3 \int_0^x f(u) du = -3x + 2,$$

$$\text{两边对 } x \text{ 求导得 } f''(x) + 2f'(x) - 3f(x) = -3,$$

对应的齐次方程的特征根为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3$.

因此齐次方程的通解为 $f_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$.

设非齐次方程的特解为 A , 代入 $f''(x) + 2f'(x) - 3f(x) = -3$, 得到 $A = 1$.

所以原微分方程的通解为 $f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + 1$,

又因为 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(-x) = f(x)$, 得到 $C_1 = 0, C_2 = 0$, 故 $f(x) = 1$.



第二篇 线性代数

第一章 行列式

1. 160

【解析】

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \\
 = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -4 \end{vmatrix} \\
 = -80 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 160.$$

2. $a^5 + b^5$

【解析】按第5行展开,再用公式(1.5).

$$\text{原式} = b(-1)^{5+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & a & b & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + a(-1)^{5+5} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & a & b & 0 \\ a & b & 0 & 0 \end{vmatrix} = a^5 + b^5.$$

3. 3 或 -2

【解析】由范德蒙行列式(1.7) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = (x-3)(-2-3)(-2-x) = 0$

故 $x = 3$ 或 $x = -2$.

4. $-\frac{9}{4}$

【解析】由 $|kA| = k^n |A|$, $|A^T| = |A|$, $|A^{-1}| = |A|^{-1}$, 有

$$|-|A^T|B^{-1}| = (-|A|)^4 |B^{-1}| = (-3)^4 \cdot \left(-\frac{1}{36}\right) = -\frac{9}{4}.$$

5. 2

【解析】由矩阵方程 $BA = B + 2E$ 得 $B(A-E) = 2E$, 两边取行列式有

$$|B(A-E)| = |2E| \text{ 即 } |B||A-E| = 2^2 |E| = 4$$

又因 $|A-E| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, 故 $|B| = 2$. 利用 $|A^*| = |A|^{n-1}$ 可知 $|B^*| = |B|^{2-1} = 2$.

6. B



【解析】

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 3a_1 & 3b_1 & 3c_1 \\ a_3 - 2a_1 & b_3 - 2b_1 & c_3 - 2c_1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 - 2a_1 & b_3 - 2b_1 & c_3 - 2c_1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ = -3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -3m.$$

请说出每一步所用的行列式的性质.

7. D

【解析】 利用行列式的性质,有

$$|\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1 + \beta_2| = |\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1| + |\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \beta_2| = -|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1| - |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2| \\ = -m + |\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3| = n - m.$$

8. C

【解析】 利用拉普拉斯(1.6)和 $|kA| = k^n |A|$, 有

$$\begin{vmatrix} O & 3B \\ -A & O \end{vmatrix} = (-1)^{(nm)} \begin{vmatrix} 3B & O \\ O & -A \end{vmatrix} = (-1)^{nm} |-A| \cdot |3B| = (-1)^{nm} (-1)^n \cdot 3^m |A| |B| = (-1)^{n(m+1)} 3^m ab.$$

9. C

【解析】 本题考查的是 $|A| = 0$ 的必要条件,而选项(A)(B)(D)均是 $|A| = 0$ 的充分条件,并不必要.

$|A| = 0 \Leftrightarrow A$ 的行(列)向量组线性相关

$\Leftrightarrow$ 有一行(列)向量可由其余的行(列)向量线性表出.

注意 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 0$, 说明(A)(D)均不正确. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, 说明(B)不正确.

10. 【证明】 $|\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1| = |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_1, \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_4 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3| = 0.$

第二章 矩阵

1. a_{n1}

【解析】 $x^T A x + x^T A y - y^T A x - y^T A y = x^T A(x+y) - y^T A(x+y) = (x^T - y^T) A(x+y)$

$$= (x - y)^T A(x+y) = (0, 0, \dots, 0, 1) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = a_{n1}.$$

2. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{bmatrix}$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



【解析】 由于 $\begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}$, 及 $\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}$

那么将 A 分块如下: $A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{记}} \begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}$, 立即有 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{bmatrix}$.

3. $\frac{1}{5}(2E - A)$

【解析】 因 $A^2 + 3A - 5E = (A + 5E)(A - 2E) + 5E = O$

所以 $(A + 5E) \cdot \frac{1}{5}(2E - A) = E$ 故 $(A + 5E)^{-1} = \frac{1}{5}(2E - A)$.

4. $\begin{bmatrix} 4 & -7 & 11 \\ -1 & 6 & -6 \end{bmatrix}$

【解析】 由于 A 不是可逆矩阵, 故可设 $X = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}$, 则

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 10 & -2 \\ 7 & 9 & 3 \end{bmatrix} \text{ 即 } \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 = 7 \end{cases} \begin{cases} y_1 + 2y_2 = 5 \\ 2y_1 + 4y_2 = 10 \\ 3y_1 + 5y_2 = 9 \end{cases} \begin{cases} z_1 + 2z_2 = -1 \\ 2z_1 + 4z_2 = -2 \\ 3z_1 + 5z_2 = 3 \end{cases}$$

解出 $x_1 = 4, x_2 = -1; y_1 = -7, y_2 = 6; z_1 = 11, z_2 = -6$ 故 $X = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 11 \\ -1 & 6 & -6 \end{bmatrix}$.

5. (1) $a \neq 3; (2) a = 5$

【解析】 (1) $\begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 0 & -1-2a & a+2 & 1 \\ 0 & 10-a & -5 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 0 & -1-2a & a+2 & 1 \\ 0 & 9-3a & a-3 & 0 \end{bmatrix}$
 $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a-3 & -1 & 2 \\ 0 & a+5 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & a-3 & 0 \end{bmatrix}$ 因为秩 $r(A) = 3$, 所以 $a \neq 3$.

(2) 因 B 可逆, 故 $r(AB) = r(A) = 2, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & a & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & a-4 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & a-5 & 0 \end{bmatrix}$.

$r(A) = 2 \Leftrightarrow a = 5$.

6. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

【解析】 由 $A = PBQ$ 有 $B = P^{-1}AQ^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.



$$7. \begin{bmatrix} 9 & 9 & 0 & 0 \\ 18 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 27 & 108 \\ 0 & 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}$$

【解析】 因 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^3 = 3^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 18 & 18 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^3 = \left(3E + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^3 = 3^3 E + 3 \cdot (3E)^2 \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 27 & 108 \\ 0 & 27 \end{bmatrix}, \text{ 由 } \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} A^n & O \\ O & B^n \end{bmatrix} \text{ 故 } A^3 = \begin{bmatrix} 9 & 9 & 0 & 0 \\ 18 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 27 & 108 \\ 0 & 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}.$$

8. A

【解析】 说明命题不成立,只要举出一个特例不成立即可. 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

$$AA^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 故 } AA^T \neq A^T A. \text{ 故选(A). 举特例越简单越好,只要能说明问题就好.}$$

注意因 $EA = AE$, 故 $(E+A)(E-A) = E - A^2 = (E-A)(E+A)$. 又 $AA^{-1} = A^{-1}A = E, AA^* = A^*A = |A|E$.

9. C

【解析】 用定义, $A^T = A, B^T = -B$, 那么

$$(AB + BA)^T = (AB)^T + (BA)^T = B^T A^T + A^T B^T = -(AB + BA).$$

注意 $AB - BA$ 与 BAB 是对称矩阵, $(AB)^2$ 既不是对称阵, 也不是反对称阵.

10. B

【解析】 $|A^* B^T| = |A^*| \cdot |B^T| = |A|^{n-1} \cdot |B| \neq 0$.

注意(A)中反例 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, (C)中反例 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, (D)中反例 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

注意(D)没有方阵的条件.

11. D

【解析】 注意 $A^2 = (E - 2\alpha^T \alpha)(E - 2\alpha^T \alpha) = E - 4\alpha^T \alpha + 4\alpha^T \alpha \alpha^T \alpha = E$,

$$\text{且 } A^T = (E - 2\alpha^T \alpha)^T = E^T - 2\alpha^T (\alpha^T)^T = A.$$

因为 $A^2 = E$ 且 $A^T = A$ 所以(A)(B)(C)均正确.

12. B

【解析】 观察矩阵 A, B 元素之间的关系, 即 A 只作列变换即可得 B . 故(A)(D)可排除. 把矩阵 A 的第3列加到第2列, 再把1, 2两列互换就可得到矩阵 B , 故应选(B) (或者把 A 的1, 2两列互换, 再把第3列加到第1列).

$$\text{即 } B = A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = AP_2 P_1 \text{ (或 } B = A \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 但选项中没有.)}$$

第三章 向量

1. -1

【解析】 向量 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示 $\Leftrightarrow$ 方程组 $x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 = \beta$ 无解 $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq r(\alpha_1, \alpha_2, \beta)$.



α_3, β)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 3 \\ 1 & a & -2 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & -1 \\ 0 & 0 & (a-3)(a+1) & a-3 \end{array} \right]$$

所以当 $a = -1$ 时, $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2 \neq r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) = 3 \Rightarrow \beta$ 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

2. $a \neq 3$

【解析】 因为任意的 3 维向量 β 都可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 必线性无关, 否则 $r(A) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

< 3 . 总可找出适当的 β 使 $r(\bar{A}) = r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) = 3$ 即方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$ 可以无解, 与题设矛盾.

$$\text{由 } |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2(a-3) \neq 0, \text{ 知 } a \neq 3.$$

3. $a \neq 1$ 且 $a \neq \frac{1}{2}$.

4. $a = -2$

【解析】 经初等变换向量组的秩不变

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & a & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2a+4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

可见 $a = -2$.

易见 α_1, α_2 线性无关, 由秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$ 可知 α_3 必可由 α_1, α_2 线性表示方程组有解亦可求出 a .

5. C

【解析】 方法一 利用排除法, 把显然是线性相关的向量组排除.

(A) 因 α_3 是零向量, 故有 $0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 1 \cdot \alpha_3 = 0$, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

(B) $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 是 4 个 3 维向量, 向量个数超过维数, 则 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 必线性相关.

(D) $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 是 4 个 4 维向量, 由其组成的矩阵的行列式为

$$|\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

故 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 线性相关. (或方程组 $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)x = 0$ 有解 $(1, -2, 1, 0)^T$, 即有 $\eta_1 - 2\eta_2 + \eta_3 + 0\eta_4 = 0$, $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 线性相关.)

由排除法知, 应选 (C).

方法二

选项 (C) 中向量 ξ_1, ξ_2, ξ_3 去除第 1, 3 个分量, 得缩短的向量为 $\xi'_1 = (1, 0, 0)^T, \xi'_2 = (0, 1, 0)^T, \xi'_3 = (0, 0, 1)^T$ 是线性无关的基本向量, 添加分量成 ξ_1, ξ_2, ξ_3 后仍线性无关, 故应选 (C).

6. C. 7. A. 8. B. 9. D.

10. B

【解析】 用极大线性无关组的定义判别. 因 $r(I) = r(\Leftrightarrow(I))$ 的极大线性无关组中向量个数是 $r(\Leftrightarrow(I))$ 中有 r 个向量线性无关, 任意 $r+1$ 个必线性相关, 所以 (B) 正确.

由于不要求任何 r 个向量都是极大线性无关组, (C) 不正确. (I) 中可以有零向量, 故 (A) 不正确, (I) 可以是线性无关的, 即 $s = r$, (D) 不正确.

11. 【解】 $a = 0$ 时, β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出. $a \neq 0$ 时, $\beta = (1 - \frac{1}{a})\alpha_1 + (k + \frac{1}{a})\alpha_2 + k\alpha_3$, k 是任意常数.

12. 【解】 极大线性无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ (或 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$ 或 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 或 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5$), $r[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5] = 3$.



$$\alpha_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_4, \alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4.$$

$$13. 【解】 \text{提示: 利用关系式 } [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n] = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]C.$$

若 C 可逆, 则 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$.

$$14. 【解】 \text{提示: } A \text{ 可逆} \Leftrightarrow r[A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)] = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = n = r[A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_n].$$

第四章 线性方程组

1. $a = -1$.

2. D

【解析】 $A_{m \times n}, B_{n \times m}, AB$ 是 m 阶方阵, 且 $r(AB) \leq r(A) \leq n < m, ABx = 0$ 必有非零解.

3. C

4. B

【解析】 $\alpha_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 是否是方程组的解, 可以考察是否属于通解, 即是否存在 k_1, k_2 , 使得 $\alpha_i = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \eta$.

5. D.

6. 【解】 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = -3$ 时, 方程组无解; $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq -3$ 时, 方程组有唯一解, 其解为

$$\left(\frac{2-\lambda^2}{\lambda(\lambda+3)}, \frac{2\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)}, \frac{\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)} \right)^T.$$

7. 【解】 $k \neq 9$ 时, $r(B) = 2$, 必有 $r(A) = 1$, 通解为 $k_1(1, 2, 3)^T + k_2(3, 6, k)^T$; $k = 9$ 时, $r(B) = 1$, 当 $r(A) = 2$ 时, 通解为 $k(1, 2, 3)^T$; 当 $r(A) = 1$ 时, 通解为 $k_1(b, -a, 0)^T + k_2(c, 0, -a)^T$.

8. 【解】 将方程组的增广矩阵作初等行变换化成阶梯形矩阵:

$$[A | b] = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & 3 & 11 \\ -3 & 1 & -4 & -2 & -6 \\ -1 & -9 & 0 & 3 & 15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & -14 & 2 & 7 & 27 \\ 0 & -14 & 2 & 6 & 26 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & -14 & 2 & 7 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

求得通解为 $k(-9, 1, 7, 0)^T + (-12, 0, 10, 1)^T$, 其中 k 为任意常数.

由通解知 $x_1 = -9k - 12, x_2 = k$, 令 $x_1 = x_2$, 即 $-9k - 12 = k$, 得 $k = -\frac{6}{5}$. 故满足方程组且满足 $x_1 = x_2$ 的解

为

$$-\frac{6}{5}(-9, 1, 7, 0)^T + (-12, 0, 10, 1)^T = \left(-\frac{6}{5}, -\frac{6}{5}, \frac{8}{5}, 1\right)^T.$$

或直接求解联立方程 $\begin{cases} Ax = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$.

9. 【解】 提示: $A_{m \times n}x = b$ 有唯一解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A | b) = n \Leftrightarrow r(A^T A)_{n \times n} = r(A) = n \Leftrightarrow A^T A$ 可逆. $Ax = b$ 两端左乘 A^T 及 $(A^T A)^{-1}$, 得唯一解 $x = (A^T A)^{-1} A^T b$.

10. 【解】 (1) 由题条件知 $r(A) = 1, r(B) = 2, r\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}\right) \leq r(A) + r(B) < 4, \left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}\right)x = 0$ 有非零解, 即 $Ax = 0$ 和

$Bx = 0$ 有非零公共解. 或 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2$ 五个四维向量必线性相关, 存在不全为零的数 $k_1, k_2, k_3, \lambda_1, \lambda_2$ 使 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3 + \lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2 = 0$, 则 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3 = -\lambda_1\eta_1 - \lambda_2\eta_2 \neq 0$.

故 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$ 有非零公共解 $\alpha = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3$ (或 $-\lambda_1\eta_1 - \lambda_2\eta_2$)

$$(2) [\xi_1, \xi_2, \xi_3 | \eta_1, \eta_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 7 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & 14 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



因 η_1, η_2 均可由 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性表出, 故 $\mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2$ 即是 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$ 的公共解.

第五章 特征值、特征向量、相似矩阵

1. $a = 3$

【解析】 设 A 的特征向量 ξ 所对应的特征值为 λ , 则有 $A\xi = \lambda\xi$, 即

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & a \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{cases} 2 - 2 + 1 = \lambda, \\ 5 - 3 - a = \lambda, \\ 1 - 2 + 0 = -\lambda. \end{cases} \text{ 解得 } a = 3.$$

2. $0, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$

【解析】 A 是实对称阵, 其余的特征向量为 $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$, 因不同特征值对应的特征向量相互正交, 且有

$$(A - \lambda_1 \xi_1 \xi_1^T) \xi_i = A\xi_i - \lambda_1 \xi_1 \xi_1^T \xi_i = \begin{cases} 0, & i = 1, \\ A\xi_i = \lambda_i \xi_i, & i \neq 1, \end{cases}$$

故知 $A - \lambda_1 \xi_1 \xi_1^T$ 有特征值 $0, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$.

3. C

【解析】 四个三阶矩阵的特征值均是 $1, 1, 2, \lambda = 1$ 是二重特征值. 存在多重特征值时, 若对应线性无关特征向量个数等于特征值重数, 则该矩阵能相似于对角阵. (C) 对应 $\lambda = 1$ 时, 有二个线性无关的特征向量, 故应选 (C).

4. C

【解析】 要注意: (1) 特征值和对应的特征向量排列次序应一致; (2) α_1, α_2 是 $\lambda = 1$ 的特征向量, $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2$ (k_1, k_2 不同时为零) 仍是 $\lambda = 1$ 的特征向量; (3) 不同特征值对应的特征向量之和不再是特征向量.

5. 【解】 $\lambda_1 = 1 - a, \lambda_2 = a, \lambda_3 = 1 + a$. 当 $a \neq \frac{1}{2}$ 且 $a \neq 0$ 时, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3, A \sim \Lambda$; 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$,

$r(\frac{1}{2}E - A) = 2, A \not\sim \Lambda$; 当 $a = 0$ 时, $\lambda_1 = \lambda_3 = 1, r(E - A) = 2, A \not\sim \Lambda$.

6. 【证明】 提示: A, B 均是实对称阵, 它们均可相似于对角阵, 而 $|\lambda E - A| = 0$ 及 $|\lambda E - B| = 0$, 解得相同的特征值 $4, 1, -2$, 故 A, B 相似于同一个对角阵, 由相似关系的传递性, 得 $A \sim B$.

$$7. 【解】 \lambda_1 = 5, \lambda_2 = \lambda_3 = -1. Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

8. 【解】 (1) $\xi_3 = k(1, 0, 1)^T, k \neq 0$,

$$(2) P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 13 & -2 & 5 \\ -2 & 10 & 2 \\ 5 & 2 & 13 \end{bmatrix} \text{ 或}$$



$$Q = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, A = Q\Lambda Q^T = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 13 & -2 & 5 \\ -2 & 10 & 2 \\ 5 & 2 & 13 \end{bmatrix}.$$

9.【解】 (1) 由题设条件知: $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1 = \alpha_1$, 故 $A^k\alpha_1 = \lambda_1^k\alpha_1 = \alpha_1$, 从而有

$$B\alpha_1 = (A^5 - 4A^3 + E)\alpha_1 = \alpha_1 - 4\alpha_1 + \alpha_1 = -2\alpha_1,$$

知 α_1 是 B 的对应于特征值 $\lambda = -2$ 的特征向量.

又 A 有特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$. $B = f(A)$, 其中 $f(x) = x^5 - 4x^3 + 1$, 故 B 有特征值 $\mu_i = f(\lambda_i)$, $i = 1, 2, 3$, 其中 $\mu_1 = -2, \mu_2 = f(2) = 1, \mu_3 = f(-2) = 1$, 因 $\mu_2 = \mu_3 = 1$, 故 B 的对应于 $\mu_2 = \mu_3 = 1$ 的特征向量应与 $\mu_1 = -2$ 对应的特征向量 α_1 正交. 设特征向量为 $\alpha = (x_1, x_2, x_3)^T$, 则 $\alpha_1^T \alpha = x_1 - x_2 + x_3 = 0$, 可解得 $\mu_2 = \mu_3 = 1$ 对应的特征向量为

$$\alpha_2 = (1, 1, 0)^T, \quad \alpha_3 = (1, -1, -2)^T.$$

(2) 方法一 取 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, 则 $B = PAP^{-1}$

$$\text{其中 } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$B = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

方法二 将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 单位化 (α_2, α_3 已正交)

$$\alpha_1^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T, \alpha_2^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T, \alpha_3^0 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, -2)^T,$$

$$\text{得正交阵 } Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

$$B = Q\Lambda Q^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

第六章 二次型

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$1. \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$



$$2. \begin{bmatrix} a_1 a_2 & \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{2} & \frac{a_1 c_2 + a_2 c_1}{2} \\ \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{2} & b_1 b_2 & \frac{b_1 c_2 + b_2 c_1}{2} \\ \frac{a_1 c_2 + a_2 c_1}{2} & \frac{b_1 c_2 + b_2 c_1}{2} & c_1 c_2 \end{bmatrix}.$$

3. D

【解析】提示:(A),(B)是必要条件,但不是充分条件;(C)是充分条件,但不是必要条件.

4. C

【解析】提示:关键是正、负惯性指数一致,且只需讨论 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 的正、负惯性指数即可.

5. C

【解析】提示:设 f 的正惯性指数为 p , 负惯性指数为 q , $-f$ 的正惯性指数为 q , 负惯性指数为 p , 有 $f \simeq -f$, 故 $p = q$, 从而 $r = p + q = 2p, s = p - q = 0$, 故选(C).

6. D

【解析】(B)中 $a_{22} = 0$, (C)中 $a_{33} = -2$. (A)中 a_{33} 的余子式 $M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 < 0$ (二阶顺序主子式), 不满足 A 正定的必要条件, 应排除. 或直接用顺序主子式全部大于零, 判别(D)是正定的.

7. 【解】(1) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, (2) $Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$, $f = -y_1^2 - y_2^2 + 8y_3^2$.

8. 【解】 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4(x_2 + \frac{1}{2}x_3)^2 - 5x_3^2 = y_1^2 + 4y_2^2 - 5y_3^2$.

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + \frac{5}{2}y_3, \\ x_2 = y_2 - \frac{1}{2}y_3, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$$

9. 【解】 $-\frac{4}{5} < a < 0$.

10. 【解】若 $s > n$, 不正定; 若 $s = n$ 或 $s < n$, 正定.



第三篇 概率论与数理统计

第一章 随机事件和概率

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

1. ¹

【解析】 $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(AB)$, 而 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

由 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = 1$, 得 $P(AB) = 0$

所以 $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1$.

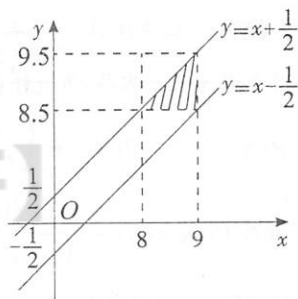
2. $\frac{1}{2}$

【解析】 设甲和乙两个到达的时刻分别为 X 和 Y , 则 $8 \leq X \leq 9, 8.5 \leq Y \leq 9.5$

若要甲和乙相遇则必须 $|X - Y| \leq \frac{1}{2}$. 这是一个几何型概率. 如右图所示.

$P\{|X - Y| \leq \frac{1}{2}\}$ 为右图阴影部分所占的概率. 也就是阴影部分在正方形 $8 \leq x \leq 9, 8.5 \leq y \leq 9.5$ 中所占的面积比

$$P\{|X - Y| \leq \frac{1}{2}\} = \frac{1}{2}.$$



第2题图

3. $\frac{3}{5}$

【解析】 此题可理解成: 将五个球排成一行, 逐个取出, 前3次中取到白球, 就是5个球中唯一白球放在前3位中. 白球有5个位号可放. 出现在前3位的概率 $\frac{3}{5}$.

4. B

【解析】 由已知事件 A 与 B 同时发生时, 事件 C 必发生知 $AB \subset C$, 所以 $P(AB) \leq P(C)$,

又 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, 得 $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$, 而 $P(A \cup B) \leq 1$, 代入得

$P(C) \geq P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq P(A) + P(B) - 1$. 故选(B).

5. D

【解析】 $P(A_1 \cup A_2 | B) = \frac{P((A_1 \cup A_2)B)}{P(B)} = \frac{P(A_1B \cup A_2B)}{P(B)} = \frac{P(A_1B) + P(A_2B) - P(A_1A_2B)}{P(B)}$

$$= P(A_1 | B) + P(A_2 | B) - \frac{P(A_1A_2B)}{P(B)}.$$

由 $P(A_1 \cup A_2 | B) = P(A_1 | B) + P(A_2 | B)$, 得到 $P(A_1A_2B) = 0$,

而 $P((A_1 \cup A_2)B) = P(A_1B \cup A_2B) = P(A_1B) + P(A_2B) - P(A_1A_2B) = P(A_1B) + P(A_2B)$, 即(D)成立.

6. C

【解析】 所求概率为古典概型. $P(A) = \frac{m}{n}$. n 为10个座位中任选6个座位—— C_{10}^6 . m 为除了4个指定的座位外, 还须从余下的6个座位中任选2个—— C_6^2 .



故 $P(A) = C_6^2 / C_{10}^2 = \frac{1}{14}$.

7. C

【解析】 设事件 $A = \{\text{从混合的球中任取一个球为白球}\}$; $B_i = \{\text{从甲袋中取出球中有 } i \text{ 个白球}\}, i = 0, 1, 2$. B_0, B_1, B_2 是完备事件组.

用全概率公式: $P(A) = \sum_{i=0}^2 P(B_i)P(A|B_i) = \frac{C_3^2}{C_5^2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{C_2^2}{C_5^2} \cdot \frac{3}{3} = \frac{3}{5}$.

8. C

【解析】 方法一: 设掷一枚硬币 5 次中正面向上出现 k 次的概率为 $P_5(k), k = 0, 1, 2, \dots, 5$. 显然, 根据伯努利试验 $P_5(k) = C_5^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{5-k} = C_5^k \left(\frac{1}{2}\right)^5$.

5 次中出现正面向上次数多于反面向上的次数, 也就有 $k = 3, 4, 5$.

故所有概率为 $P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = (C_5^3 + C_5^4 + C_5^5) \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2}$.

方法二: 总共掷硬币 5 次. 不是正面向上次数多于反面向上的次数, 就是反面向上次数多于正面向上的次数, 由对称性知, 这两件事概率相等, 且它们之和为 1, 所以每个概率都为 $\frac{1}{2}$. 故选(C).

9. 【解】 设事件 $A_1 = \{\text{至少一件为次品}\}$, $A_2 = \{\text{两件都是次品}\}$

已知其中有一件次品, 另一件也是次品的概率应为 $P\{A_2 | A_1\} = \frac{P\{A_1 A_2\}}{P(A_1)}$

$P(A_1) = 1 - P(\bar{A}_1) = 1 - \frac{C_6^2}{C_{10}^2}$, 而 $P(A_1 A_2) = P(A_2) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2}$

所以 $P\{A_2 | A_1\} = \frac{C_4^2 / C_{10}^2}{1 - C_6^2 / C_{10}^2} = \frac{C_4^2}{C_{10}^2 - C_6^2} = \frac{1}{5}$.

10. 【解】 设事件 $A_i = \{\text{盒中原有 } i \text{ 只铜螺母}\}, i = 0, 1, \dots, 10$;

$B = \{\text{取出一个螺母为铜螺母}\}$.

显然 $A_0, A_1, \dots, A_{10}$ 是完备事件组, 且 $P(A_i) = \frac{1}{11}, i = 0, 1, \dots, 10$.

$P(B) = \sum_{i=0}^{10} P(A_i)P(B|A_i) = \sum_{i=0}^{10} \frac{1}{11} \cdot \frac{i+1}{10+1} = \frac{1}{11} \cdot \frac{66}{11} = \frac{6}{11}$.

第二章 随机变量及其概率分布

1. $\begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^3, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x \end{cases}$

【解析】 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 之外为零. 在 $[0, 1]$ 上与 x^2 成正比, 则 $f(x)$ 必有形式

$f(x) = \begin{cases} kx^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 其中 k 为正的常数, 再由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ 解得 $k = 3$.

$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 而 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^3, & 0 \leq x < 1. \\ 1, & 1 \leq x \end{cases}$

2. $(1-p)^n + C_n^1 p(1-p)^{n-1}$



【解析】 如果用 X 表示在 n 次独立试验中 A 发生的次数, 则 $X \sim B(n, p)$.

在 n 次独立试验中 A 至多发生一次的概率为

$$P\{X=0\} + P\{X=1\} = (1-p)^n + C_n^1 p(1-p)^{n-1}.$$

3. $U[1, 2]$

【解析】 $X \sim U[0, 1], Y = X + 1$. 设 X, Y 的密度函数, 分布函数分别为 $f_X(x), F_X(x), f_Y(y), F_Y(y)$.

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X + 1 \leq y\} = P\{X \leq y - 1\} = F_X(y - 1)$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = F'_X(y - 1) = f_X(y - 1) = \begin{cases} 1, & 1 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

所以 $Y = X + 1 \sim U[1, 2]$.

4. D

【解析】 $F(x)$ 可作为分布函数的充要条件是:

(1) $F(x_1) \leq F(x_2), x_1 < x_2$; (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$; (3) $F(x)$ 右连续.

(A) 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ 不存在, 不能选;

(B) 因为在 $x = 1$ 处 $F(x)$ 不右连续, 不能选;

(C) 因为在 $0 \leq x < 1$ 上不满足条件(1), 不能选. 只能选(D).

(D) 可以直接验证满足条件(1), (2), (3).

5. C

【解析】 由分布函数 $F(x)$ 的性质 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$, 可知

$$1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = a \lim_{x \rightarrow +\infty} F_1(x) - b \lim_{x \rightarrow +\infty} F_2(x) = a - b. \quad \text{选(C).}$$

6. C

【解析】 $X \sim B(2, p), Y \sim B(3, p), P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X = 0\} = 1 - (1-p)^2 = \frac{5}{9}$,

解得 $p = \frac{1}{3}, P\{Y \geq 1\} = 1 - P\{Y = 0\} = 1 - (1-p)^3 = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$. 选(C).

7. C

【解析】 $P\{X = i\} = \frac{a}{i(i+1)}, i = 1, 2, \dots$.

$$1 = \sum_{i=1}^{+\infty} P\{X = i\} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a}{i(i+1)} = a \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = a.$$

$$P\{X < 5\} = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}. \quad \text{选(C).}$$

8. B

【解析】 $f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-\frac{x^3}{3}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$

$$P\{|X| < 1\} = P\{-1 < X < 1\} = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_0^1 x^2 e^{-\frac{x^3}{3}} dx = 1 - e^{-\frac{1}{3}}. \quad \text{选(B).}$$

9. 【解】 X 的可能取值为 3, 4, 5. X 取 3 时, 另两个数只能 1 和 2. 所以 $P\{X = 3\} = \frac{1}{C_5^3}$. 当 X 为 4 时, 另两个球的

号码可以在 1, 2, 3 中任取两个. 故 $P\{X = 4\} = \frac{C_3^2}{C_5^3}$.

同理 $P\{X = 5\} = \frac{C_4^2}{C_5^3}$, 于是得 X 的分布律为

X	3	4	5
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



10.【解】 X 的概率密度 $f(x) = \frac{k}{1+x^2}, -\infty < x < +\infty$,

(1) 求常数 k . $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{1+x^2} dx = k \cdot \pi \Rightarrow k = \frac{1}{\pi}$.

(2) $X \sim f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, -\infty < x < +\infty, Y = 1 - \sqrt[3]{X}$.

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{1 - \sqrt[3]{X} \leq y\} \\ &= P\{X \geq (1-y)^3\} = 1 - P\{X < (1-y)^3\} \\ &= 1 - F_X((1-y)^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F'_Y(y) = -f((1-y)^3) \cdot 3(1-y)^2(-1) = 3(1-y)^2 f((1-y)^3) \\ &= \frac{3(1-y)^2}{\pi[1+(1-y)^6]}, -\infty < y < +\infty. \end{aligned}$$

第三章 多维随机变量及其分布

$$1. \begin{array}{c|cc} Z & 0 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}$$

【解析】 X, Y 相互独立, 且具有同一分布.

$$\begin{array}{c|cc} X & 0 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

现 $Z = \max(X, Y)$. 显然, Z 的可能取值必为 0, 1.

$$\begin{aligned} P\{Z=0\} &= P\{\max(X, Y) = 0\} = P\{X=Y=0\} = P\{X=0, Y=0\} \\ &= P\{X=0\}P\{Y=0\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$P\{Z=1\} = 1 - P\{Z=0\} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \text{ 即}$$

$$\begin{array}{c|cc} Z & 0 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}$$

2. $\begin{cases} 6(x-x^2), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

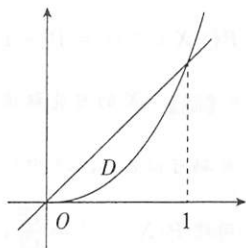
【解析】 (X, Y) 在 D 上均匀分布, $f(x, y) = \begin{cases} C, & (x, y) \in D \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

其中 $C = \frac{1}{S_D}$, D 的面积 $S_D = \int_0^1 (x-x^2) dx = \frac{1}{6}$.

所以 $f(x, y) = \begin{cases} 6, & 0 \leq x^2 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{x^2}^x 6 dy = 6(x-x^2)$

$$f_X(x) = \begin{cases} 6(x-x^2), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



第2题图



3. A

【解析】

X_i	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

且 $P\{X_1 X_2 = 0\} = 1$, 所以 $P\{X_1 X_2 \neq 0\} = 1 - P\{X_1 X_2 = 0\} = 0$

即有

$X_1 \backslash X_2$	0	1	2
0			$\frac{1}{2}$
1		0	$\frac{1}{4}$
2		0	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

进一步可得

$X_1 \backslash X_2$	0	1	2
0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	0	0
2	$\frac{1}{4}$	0	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

于是 $P\{X_1 = X_2\} = P\{X_1 = X_2 = 0\} + P\{X_1 = X_2 = 1\} + P\{X_1 = X_2 = 2\} = 0$. 故选(A).

4. D

【解析】 分布函数 $F(x)$ 的充要条件为 ① $F(x)$ 单调不减; ② $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$; ③ 右连续.

(A) $2F_1(x) - F_2(x)$ 不满足条件 ①;

(B) $F_1(x) + F_2(x)$ 不满足条件 ② $\lim_{x \rightarrow +\infty} [F_1(x) + F_2(x)] = 2$;

(C) $F_1(x) - \frac{1}{2}F_2(x)$ 不满足条件 ② $\lim_{x \rightarrow +\infty} [F_1(x) - \frac{1}{2}F_2(x)] = \frac{1}{2}$;

(D) $F_1(x)F_2(x)$ 满足条件 ①②③, 可以验证, 也可直接推导如下.

设 $X = \max(X_1, X_2)$, 且 X_1, X_2 相互独立则

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P\{X \leq x\} = P\{\max(X_1, X_2) \leq x\} = P\{X_1 \leq x, X_2 \leq x\} \\ &= P\{X_1 \leq x\}P\{X_2 \leq x\} = F_1(x)F_2(x). \end{aligned}$$

5. A

【解析】 X, Y 独立同分布, 且 $P\{X = 1\} = P\{Y = -1\} = \frac{1}{2}$, 可以得到

$$P\{X = -1\} = P\{Y = 1\} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} P\{X = Y\} &= P\{X = Y = -1\} + P\{X = Y = 1\} = P\{X = -1, Y = -1\} + P\{X = 1, Y = 1\} \\ &= P\{X = -1\}P\{Y = -1\} + P\{X = 1\}P\{Y = 1\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad \text{故选(A).}$$

$$\begin{aligned} \text{而 } P\{X + Y = 0\} &= P\{X = -1, Y = 1\} + P\{X = 1, Y = -1\} \\ &= P\{X = -1\}P\{Y = 1\} + P\{X = 1\}P\{Y = -1\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{XY = 1\} &= P\{X = 1, Y = 1\} + P\{X = -1, Y = -1\} \\ &= P\{X = 1\}P\{Y = 1\} + P\{X = -1\}P\{Y = -1\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

6. C

【解析】 $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{\max(1, X) \leq y\} = P\{1 \leq y, X \leq y\}$.

当 $y < 1$ 时, $F_Y(y) = 0$; 当 $y \geq 1$ 时 $F_Y(y) = P\{X \leq y\} = \int_0^y e^{-x} dx = 1 - e^{-y}$.

$$\text{故 } F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ 1 - e^{-y}, & y \geq 1 \end{cases} \quad \text{选(C).}$$

题源探究同步练习

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



7.【解】 $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, f_X(x) > 0.$

现 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} > 0, -\infty < x < +\infty,$

所以, 当 $-\infty < x < +\infty$ 时,

$f(x,y) = f_X(x)f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-y)^2} = \frac{1}{\pi} e^{-2x^2+2xy-y^2}, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty.$

8.【解】 $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, f_X(x) > 0.$

先求出 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int_0^x \frac{1}{x} dy, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

即 $X \sim U(0,1), f_X(x) > 0$ 等价于 $0 < x < 1.$

当 $0 < x < 1$ 时, $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

即, 当 $0 < x < 1$ 时, $f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

9.【解】 $X \sim B(n,p), Y \sim B(m,p), X$ 与 Y 独立. 可将 X 看成 n 次独立重复试验中成功次数.

令 $X_i = \begin{cases} 1, & \text{在 } X \text{ 的 } n \text{ 次试验中第 } i \text{ 次试验成功} \\ 0, & \text{在 } X \text{ 的 } n \text{ 次试验中第 } i \text{ 次试验失败} \end{cases}, i = 1, \dots, n, \text{ 显然 } X = X_1 + \dots + X_n,$

同样, 令 $Y_j = \begin{cases} 1, & \text{在 } Y \text{ 的 } m \text{ 次试验中第 } j \text{ 次试验成功} \\ 0, & \text{在 } Y \text{ 的 } m \text{ 次试验中第 } j \text{ 次试验失败} \end{cases}, j = 1, \dots, m, \text{ 显然 } Y = Y_1 + \dots + Y_m.$

由于 X, Y 独立, 所以 $X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ 是相互独立的.

$X+Y = X_1 + \dots + X_n + Y_1 + \dots + Y_m$ 可看成每次成功率均为 p 的 $n+m$ 次独立重复试验中成功的次数, 所以 $X+Y \sim B(n+m, p).$

10.【解】 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^2} e^{-\frac{x+y}{\lambda}}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$. 由于 $\frac{1}{\lambda^2} e^{-\frac{x+y}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} \cdot \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{y}{\lambda}}$

$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y), f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{y}{\lambda}}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$

(1) $P\{X \leq \lambda, Y \leq 2\lambda\} = P\{X \leq \lambda\}P\{Y \leq 2\lambda\} = F_X(\lambda)F_Y(2\lambda) = (1-e^{-1})(1-e^{-2}).$

(2) $P\{X+Y \leq \lambda\} = \iint_{x+y \leq \lambda} f(x,y)dx dy = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^\lambda dx \int_0^{\lambda-x} e^{-\frac{x+y}{\lambda}} dy = 1 - \frac{2}{e}.$

11.【解】 方法一: X, Y 独立, 分布律为

	Y		
	0	1	2
X	0	0.06	0.15
	1	β	0.21

即有 $\frac{0.06}{\beta} = \frac{0.15}{0.35} = \frac{\alpha}{0.21}$

解得 $\alpha = 0.09, \beta = 0.14.$

方法二: 利用 $P_{ij} = P_{i \cdot} \cdot P_{\cdot j}, 0.15 = (0.21 + \alpha) \cdot 0.5$, 解得 $\alpha = 0.09$, 从而 $\beta = 0.14.$

12.【解】 X_1, X_2, X_3, X_4 独立同分布,

X_i	0	1
P	0.6	0.4

$X = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix} = X_1 X_4 - X_2 X_3.$



$X_1 X_3$ 的取值为 0 或 1. $P\{X_1 X_3 = 1\} = P\{X_1 = 1, X_3 = 1\} = P\{X_1 = 1\}P\{X_3 = 1\} = 0.4 \cdot 0.4 = 0.16$

故	$X_1 X_3$	0	1
	P	0.84	0.16

同理 $X_2 X_3$ 与 $X_1 X_3$ 有相同的分布, 且相互独立.

$X = X_1 X_3 - X_2 X_3$ 的可能取值为 $-1, 0, 1$.

$$P\{X = -1\} = P\{X_1 X_3 - X_2 X_3 = -1\} = P\{X_1 X_3 = 0, X_2 X_3 = 1\} = P\{X_1 X_3 = 0\}P\{X_2 X_3 = 1\} \\ = 0.84 \cdot 0.16 = 0.1344.$$

$$P\{X = 1\} = P\{X_1 X_3 - X_2 X_3 = 1\} = P\{X_1 X_3 = 1, X_2 X_3 = 0\} = P\{X_1 X_3 = 1\}P\{X_2 X_3 = 0\} \\ = 0.16 \cdot 0.84 = 0.1344.$$

$$P\{X = 0\} = 1 - P\{X = -1\} - P\{X = 1\} = 0.7312.$$

总之	X	-1	0	1
	P	0.1344	0.7312	0.1344

13.【解】(1) D 的面积为 1, 所以 $f(x, y) = \begin{cases} 1, & |y| < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{-x}^x 1 dy = 2x, 0 < x < 1$$

$$\text{所以 } f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_{|y|}^1 1 dx = 1 - |y|, |y| < 1.$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 - |y|, & |y| < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 由 $f_X(x) \cdot f_Y(y) \neq f(x, y)$ 知 X, Y 不独立.

14.【解】 G 的面积为 1, 所以 $f(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in G \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$\text{当 } 0 < x < 1, f_X(x) = \int_0^{2-2x} 1 dy = 2 - 2x.$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 2 - 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_0^{\frac{2-y}{2}} 1 dx = \frac{2-y}{2}, 0 < y < 2$$

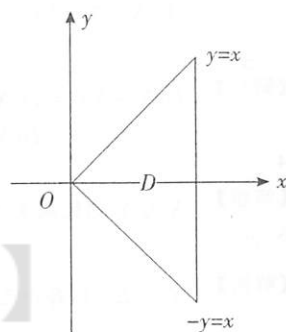
$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 - \frac{y}{2}, & 0 < y < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

当 $f_X(x) > 0$, 也就是 $0 < x < 1$ 时,

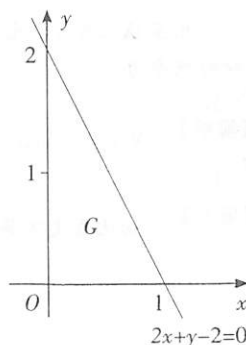
$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2-2x}, & 0 < y < 2-2x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

当 $f_Y(y) > 0$, 即 $0 < y < 2$ 时,

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{2}{2-y}, & 0 < x < 1 - \frac{y}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



第 13 题图



第 14 题图



第四章 随机变量的数字特征

1. $\frac{3}{2}$

【解析】 $f(x) = Ae^{-x^2+2x-1}$, $-\infty < x < +\infty$, 即 $f(x) = Ae^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$, 这是正态分布 $N(1, \frac{1}{2})$ 的概率密度, 所以

$$E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

2. 0

【解析】 $X \sim E(1)$, $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$

$$E(X - 3e^{-2X}) = E(X) - 3E(e^{-2X}) = 1 - 3 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x} \cdot f(x) dx = 1 - 3 \int_0^{+\infty} e^{-2x} \cdot e^{-x} dx = 0.$$

3. B

【解析】 $D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$
 $= D(X) + D(Y) + 2[E(XY) - E(X)E(Y)] = D(X) + D(Y)$, 选(B).

4. C

【解析】 X 与 Y 都服从正态分布, 且不相干, (X, Y) 不一定服从正态分布, 因此得不出 X, Y 相互独立.

5. C

【解析】 $X \sim E(\lambda)$, 每个元件平均工作寿命应为 $E(X) = \frac{1}{\lambda}$. 每个元件工作寿命不超过平均寿命的概率应为

$$P\{X \leq E(X)\} = P\{X \leq \frac{1}{\lambda}\} = F(\frac{1}{\lambda}) = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-1}.$$

相互独立的 n 个元件工作寿命都不超过平均寿命的概率则为 $(1 - e^{-1})^n$, 而至少有一个元件工作超过平均寿命的概率为 $1 - (1 - e^{-1})^n = 3e^{-1} - 3e^{-2} + e^{-3}$, 可见 $n = 3$. 选(C).

6. B

【解析】 $X+Y = n$, $\text{Cov}(X+Y, X-Y) = \text{Cov}(n, X-Y) = 0$, $X+Y$ 与 $X-Y$ 的相关系数必为 0. 选(B).

7. B

【解析】 切比雪夫不等式为 $P\{|X - E(X)| < \epsilon\} \geq 1 - \frac{D(X)}{\epsilon^2}$.

$$E(S_9) = E(\sum_{i=1}^9 X_i) = \sum_{i=1}^9 E(X_i) = \sum_{i=1}^9 1 = 9.$$

$$D(S_9) = D(\sum_{i=1}^9 X_i) = \sum_{i=1}^9 D(X_i) = 9.$$

所以应有 $P\{|S_9 - 9| < \epsilon\} \geq 1 - \frac{9}{\epsilon^2}$, 选(B).

8. 【解】 设随机变量 $X_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 号球进第 } i \text{ 号盒} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 号球没进第 } i \text{ 号盒} \end{cases}, i = 1, 2, \dots, n.$

X 为配对数, 所以 $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

显然 $P\{X_i = 1\} = \frac{1}{n}, i = 1, 2, \dots, n$, 也就有分布律

X_i	0	1
P	$1 - \frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$

$E(X_i) = \frac{1}{n}.$

所以 $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = 1.$



9.【解】 $X \sim U[0, 60]$, 设游客等候时间为 Y , 则

$$Y = \begin{cases} 5 - X, & 0 \leq X \leq 5 \\ 25 - X, & 5 < X \leq 25 \\ 55 - X, & 25 < X \leq 55 \\ 65 - X, & 55 < X \leq 60 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx = \int_0^{60} g(x) \frac{1}{60} dx \\ &= \int_0^5 (5-x) \frac{1}{60} dx + \int_5^{25} (25-x) \frac{1}{60} dx + \int_{25}^{55} (55-x) \frac{1}{60} dx + \int_{55}^{60} (65-x) \frac{1}{60} dx = \frac{35}{3}. \end{aligned}$$

10.【解】 方法一: $X_1 \sim E(\lambda_1), X_2 \sim E(\lambda_2)$, 平均无故障工作时间即为平均寿命.

$$E(X_1) = 1 = \frac{1}{\lambda_1}, E(X_2) = 0.5 = \frac{1}{\lambda_2}, \text{故 } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2,$$

$$f_1(x_1) = \begin{cases} e^{-x_1}, & x_1 > 0 \\ 0, & x_1 \leq 0 \end{cases}, \quad f_2(x_2) = \begin{cases} 2e^{-2x_2}, & x_2 > 0 \\ 0, & x_2 \leq 0 \end{cases}$$

两个中间站是串联. 无故障时间 $Y = \min(X_1, X_2)$,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \min(x_1, x_2) f_1(x_1) f_2(x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_0^{+\infty} dx_1 \int_{x_1}^{+\infty} x_1 e^{-x_1} \cdot 2e^{-2x_2} dx_2 + \int_0^{+\infty} dx_2 \int_{x_2}^{+\infty} x_2 e^{-x_1} \cdot 2e^{-2x_2} dx_1 \\ &= \int_0^{+\infty} x_1 e^{-3x_1} dx_1 + \int_0^{+\infty} 2x_2 e^{-3x_2} dx_2 = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3} \text{ (千小时)}. \end{aligned}$$

方法二: 两中间站是串联, 无故障时间 $Y = \min(X_1, X_2)$.

$Y \sim E(\lambda_1 + \lambda_2)$,

$$E(Y) = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} \text{ (千小时)}.$$

11.【解】 方法一: X, Y 独立同分布, 均服从 $N(\mu, \sigma^2)$, $Z = \max(X, Y)$,

记 $X_1 = \frac{X-\mu}{\sigma}, Y_1 = \frac{Y-\mu}{\sigma}$ 相互独立均服从 $N(0, 1)$, $Z = \max(\mu + \sigma X_1, \mu + \sigma Y_1) = \mu + \sigma \max(X_1, Y_1)$.

$Z_1 = \max(X_1, Y_1)$ 的分布为 $[\Phi(x)]^2$, $E(Z) = \mu + \sigma E(Z_1)$.

$$\begin{aligned} E(Z_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot 2\Phi(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\Phi(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} d\frac{x^2}{2} = - \int_{-\infty}^{+\infty} 2\Phi(x) d\varphi(x) \\ &= -2\Phi(x)\varphi(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} 2\varphi(x) d\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\varphi^2(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2 \cdot \frac{1}{2}}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

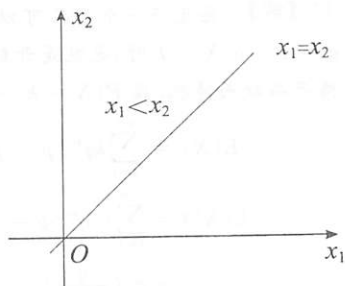
$$E(Z) = \mu + \sigma \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

方法二: $Z = \max(X, Y) = \frac{1}{2}(X+Y+|X-Y|)$, $E(X) = E(Y) = \mu$.

$$Z_1 = X - Y \sim N(0, 2\sigma^2), E|X - Y| = \int_{-\infty}^{+\infty} |z| \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{2\sigma^2}} e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} dz$$

$$= 2 \int_0^{+\infty} z \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} dz = \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} d\left(\frac{z^2}{4\sigma^2}\right) = \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}.$$

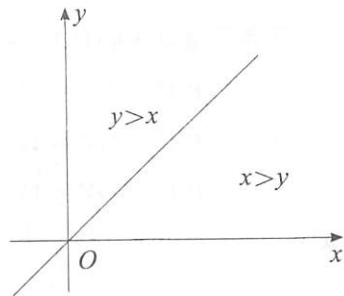
$$E(Z) = E\left[\frac{1}{2}(X+Y+|X-Y|)\right] = \frac{1}{2}[E(X)+E(Y)+E|X-Y|]$$



第 10 题图

题源探究同步练习

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



第 11 题图



$$= \frac{1}{2} \left(\mu + \mu + \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}} \right) = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}.$$

方法三: $Z = \max(X, Y)$

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(\max(X, Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \max(x, y) f_X(x) f_Y(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} y \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2 + (y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy + \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^x x \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2 + (y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy \\ &= \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}. \text{ (上图)} \end{aligned}$$

12.【解】 每生产一个产品可以看成是一次独立的试验. 生产不合格品的概率为 p , 生产合格的概率应为 $q = 1 - p$. $X = k$ 时, 也就是开机后第一次停机已生产了 k 个产品. —— 前 $(k-1)$ 个为合格品, 第 k 个为不合格品故而停机. 故 $P\{X = k\} = q^{k-1}p, k = 1, 2, \dots$.

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1}p = p \left(\sum_{k=1}^{+\infty} q^k \right)' = p \left(\frac{q}{1-q} \right)' = p \left(\frac{1}{1-q} - 1 \right)' = p \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

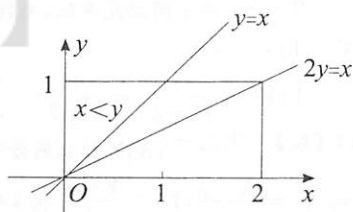
$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 q^{k-1} p = p \left(\sum_{k=0}^{+\infty} kq^k \right)' = p \left[\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)q^k - \sum_{k=0}^{+\infty} q^k \right]' = p \left[\left(\sum_{k=0}^{+\infty} q^{k+1} \right)' - \frac{1}{1-q} \right]' \\ &= p \left[\left(\frac{q}{1-q} \right)' - \frac{1}{1-q} \right]' = p \left[\frac{q}{(1-q)^2} \right]' = p \frac{q+1}{(1-q)^3} = \frac{2-p}{p^2}. \end{aligned}$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

13.【解】 (1) 方法一: 先求出 U, V 的分布, 它们都服从 $0-1$ 分布, (X, Y) 在 G 上均匀分布. 相应的概率可用右图所占面积比来计算.

$$P\{U = 0\} = P\{X \leq Y\} = \frac{1}{4}. \text{ 故 } \begin{array}{c|cc} U & 0 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array};$$

$$P\{V = 0\} = P\{X \leq 2Y\} = \frac{1}{2}, \text{ 故 } \begin{array}{c|cc} V & 0 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}.$$



第 13 题图

$$P\{U = 0, V = 0\} = P\{X \leq Y, X \leq 2Y\} = P\{X \leq Y\} = \frac{1}{4}. \text{ 故}$$

$V \backslash U$	0	1	
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\Rightarrow$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

$V \backslash U$	0	1	
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

方法二: 直接计算 (U, V) 分布, 还是利用上图,

$$P\{U = 0, V = 0\} = P\{X \leq Y, X \leq 2Y\} = P\{X \leq Y\} = \frac{1}{4},$$

$$P\{U = 0, V = 1\} = P\{X \leq Y, X > 2Y\} = P(\emptyset) = 0$$

$$P\{U = 1, V = 1\} = P\{X > Y, X > 2Y\} = P\{X > 2Y\} = \frac{1}{2}.$$

故

	$\backslash V$	0	1		$\backslash V$	0	1
U	$\backslash$			U	$\backslash$		
0		$\frac{1}{4}$	0	0		$\frac{1}{4}$	0
1			$\frac{1}{2}$	1		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

(2) $\rho = \frac{\text{Cov}(U, V)}{\sqrt{D(U)} \sqrt{D(V)}}$, 由于 U, V 均为 $0-1$ 分布, 故 $E(U) = \frac{3}{4}$,

$$E(V) = \frac{1}{2}, D(U) = p \cdot q = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}, D(V) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Cov}(U, V) = E(UV) - E(U) \cdot E(V) = 1 \cdot P\{U=1, V=1\} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}.$$

$$\rho = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

14. 【解】 X, Y 相互独立均服从 $N(\mu, \sigma^2)$, $\rho_{UV} = \frac{\text{Cov}(U, V)}{\sqrt{D(U)} \sqrt{D(V)}}$.

$$D(U) = D(aX + bY) = a^2 D(X) + b^2 D(Y) = (a^2 + b^2) \sigma^2;$$

$$D(V) = D(aX - bY) = a^2 D(X) + b^2 D(Y) = (a^2 + b^2) \sigma^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(U, V) &= \text{Cov}(aX + bY, aX - bY) = a^2 \text{Cov}(X, X) + ab \text{Cov}(Y, X) - ab \text{Cov}(X, Y) - b^2 \text{Cov}(Y, Y) \\ &= a^2 \text{Cov}(X, X) - b^2 \text{Cov}(Y, Y) = (a^2 - b^2) \sigma^2. \end{aligned}$$

所以 $\rho_{UV} = \frac{\text{Cov}(U, V)}{\sqrt{D(U)} \sqrt{D(V)}} = \frac{(a^2 - b^2) \sigma^2}{(a^2 + b^2) \sigma^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$

15. 略.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

题源探究同步练习

第五章 大数定律和中心极限定理

1. 方差存在

【解析】 切比雪夫大数定律要求 $X_1, \dots, X_n, \dots$ 两两不相关, 方差有界.

现题给 $X_1, \dots, X_n, \dots$ 独立同分布, 它们必两两不相关. 同分布, 只要方差存在就有所有 X_i 的方差相同, 必有界. 因此填空为只要方差存在.

2. μ

【解析】 辛钦大数定律的结论是 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu\right| \leq \varepsilon\right\} = 1$, 即 $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 依概率收敛于 μ .

3. C

【解析】 辛钦大数定律要求 X_i 独立同分布, 期望存在, 只有 (C) 满足要求.

(A) 不能保证同分布, (B) 和 (D) 均不能保证期望存在. 选 (C).

4. 【证明】 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 所以 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 必相互独立且同分布, 且 $X_1^2, X_2^2, \dots, X_n^2$ 也是独立同分布. 而 $D(X_i^2) = E(X_i^4) - [E(X_i^2)]^2 = E(X^4) - [E(X^2)]^2 = a_4 - a_2^2$ 存在.

于是由林德伯格—列维中心极限定理知, 当 n 充分大时, 随机变量 $\sum_{i=1}^n X_i^2$ 近似服从正态分布

$$N(na_2, n(a_4 - a_2^2)).$$

而 $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 就近似服从正态分布 $N\left(a_2, \frac{a_4 - a_2^2}{n}\right)$.



第六章 数理统计的基本概念

$$1. \begin{cases} \frac{1}{\theta^n}, & 0 \leq x_i \leq \theta, i = 1, 2, \dots, n \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

【解析】 $X \sim U[0, \theta]$, 密度 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 \leq x \leq \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

故 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的密度 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n}, & 0 \leq x_i \leq \theta, i = 1, 2, \dots, n \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

2. $t(2)$

【解析】 $X_1 + X_2 \sim N(0, 2)$, $\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0, 1)$ 与 $X_3^2 + X_4^2 \sim \chi^2(2)$ 相互独立,

故 $Y = \frac{\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{X_3^2 + X_4^2}{2}}} = \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{X_3^2 + X_4^2}} \sim t(2)$.

3. D

【解析】 如果有条件 X, Y 相互独立, 则 (A)(B)(C) 都正确. 现设给 X, Y 独立或 (X, Y) 正态条件. 正确答案只有 (D).

4. B

【解析】 在正态总体条件下, $\bar{X}$ 与 S_2^2 相互独立, $\bar{X}$ 与 S_1^2 不独立, 故 (A)(C)(D) 不正确, 故选 (B).

也可以直接证明: $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ 且独立于 $\frac{S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 所以

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sqrt{\frac{S_2^2}{\sigma^2} / (n-1)} = \frac{\bar{X} - \mu}{S_2} \sqrt{n^2 - n} \sim t(n-1), \text{ 故选 (B).}$$

5. C

【解析】 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 即 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$, 选 (C).

6. D

【解析】 $X_i \sim N(0, \sigma^2)$, $\frac{X_i}{\sigma} \sim N(0, 1)$, $\frac{1}{\sigma^2}(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) \sim \chi^2(3)$ 与 $\frac{1}{\sigma^2}(X_4^2 + X_5^2 + \dots + X_9^2) \sim \chi^2(6)$ 独立,

所以 $F = \frac{\frac{1}{\sigma^2}(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{\sigma^2}(X_4^2 + X_5^2 + \dots + X_9^2) \cdot \frac{1}{6}} = \frac{2(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)}{X_4^2 + X_5^2 + \dots + X_9^2} \sim F(3, 6)$. 选 (D).

7. 【证明】 (1) $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n [(X_i - \bar{X}) + (\bar{X} - \mu)]^2$

$$= \sum_{i=1}^n [(X_i - \bar{X})^2 + 2(X_i - \bar{X})(\bar{X} - \mu) + (\bar{X} - \mu)^2]$$

$$= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + 2(\bar{X} - \mu) \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) + n(\bar{X} - \mu)^2$$

$$= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + 2(\bar{X} - \mu)(n\bar{X} - n\bar{X}) + n(\bar{X} - \mu)^2$$



$$= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - \mu)^2.$$

$$\begin{aligned} (2) \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 &= \sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2) = \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\bar{X} \sum_{i=1}^n X_i + n\bar{X}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\bar{X} \cdot n\bar{X} + n\bar{X}^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2. \end{aligned}$$

8. 【证明】 (1) $E(Y) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - \mu|\right) = \frac{\sigma}{n} \sum_{i=1}^n E\left(\left|\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right|\right) = \frac{\sigma}{n} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} |t| \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

$$= \frac{\sigma}{n} \sum_{i=1}^n 2 \int_0^{+\infty} t \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\sigma}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma.$$

$$\begin{aligned} (2) D(Y) &= D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - \mu|\right) = \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{i=1}^n D\left(\left|\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right|\right) \\ &= \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{i=1}^n \left[E\left(\left|\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right|^2\right) - \left(E\left|\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right|\right)^2 \right] \\ &= \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{i=1}^n \left[E\left(\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right) - \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^2 \right] = \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{i=1}^n \left[D\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right) - \frac{2}{\pi} \right] \\ &= \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{i=1}^n \left[1 - \frac{2}{\pi} \right] = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \cdot \frac{\sigma^2}{n}. \end{aligned}$$

9. 【解】 $X \sim N(80, 4^2)$, $\bar{X} \sim N\left(80, \frac{4^2}{n}\right)$, 要求 $P(\bar{X} > 78) \geq 0.975$.

即 $1 - P(\bar{X} \leq 78) = 1 - P\left\{\frac{\bar{X} - 80}{\frac{4}{\sqrt{n}}} \leq \frac{78 - 80}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\right\} = 1 - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{2}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) \geq 0.975$,

$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) \geq 0.975$, 得 $\frac{\sqrt{n}}{2} \geq 1.96$. 解得 $n \geq 15.3664$, 取 $n = 16$.

10. 【解】 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 取得样本 $X_1, X_2, \dots, X_{100}$. 样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{100}\right)$.

所以 $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/10} \sim N(0, 1)$, 现要求 $P(|\bar{X} - \mu| > 4) = 0.02$. 即

$$\begin{aligned} 0.98 &= P(|\bar{X} - \mu| \leq 4) = P\left\{\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/10}\right| \leq \frac{4}{\sigma/10}\right\} \\ &= P\left\{-\frac{40}{\sigma} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/10} \leq \frac{40}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{40}{\sigma}\right) \\ &= 2\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) - 1, \end{aligned}$$

$\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) = 0.9900$, 得 $\frac{40}{\sigma} = 2.33$, $\sigma = 17.17$.

11. 【证明】 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $Y_1 = \frac{1}{6}(X_1 + \dots + X_6) \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{6}\right)$, $Y_2 = \frac{1}{3}(X_7 + X_8 + X_9) \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{3}\right)$,

Y_1 与 Y_2 相互独立, $S^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=7}^9 (X_i - Y_2)^2$ 相当于样本 X_7, X_8, X_9 的样本方差. S^2 与 Y_2 相互独立, S^2 也与 Y_1 相互独立, 从而也与 $Y_1 - Y_2$ 相互独立.

$Y_1 - Y_2 \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{6} + \frac{\sigma^2}{3}\right)$, 即 $Y_1 - Y_2 \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{2}\right)$.

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 即 $\frac{2S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(2)$, 故 $\frac{Y_1 - Y_2}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}} \bigg/ \sqrt{\frac{2S^2}{\sigma^2}/2} = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S} = Z \sim t(2)$.



12. 【证明】 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 和 $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ 分别为样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的均值和方差. $\bar{X}_n$ 与 S_n^2 相互独立, $\bar{X}_n \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, $\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, X_{n+1} 与 $\bar{X}_n$ 以及 S_n^2 均独立, 且 $X_{n+1} - \bar{X}_n \sim N(0, \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n})$, 即 $X_{n+1} - \bar{X}_n \sim N(0, \frac{(n+1)\sigma^2}{n})$, 故 $\frac{X_{n+1} - \bar{X}_n}{\sqrt{\frac{n+1}{n}\sigma^2}} \sim N(0, 1)$,

$$\frac{X_{n+1} - \bar{X}_n}{\sqrt{\frac{n+1}{n}\sigma^2}} \bigg/ \sqrt{\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} / (n-1)} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \frac{X_{n+1} - \bar{X}_n}{S_n} \sim t(n-1).$$

第七章 参数估计

1. $\frac{\bar{X}}{m}$

【解析】 $X \sim B(m, p)$, 唯一未知参数 p 的矩估计用 $E(X) = \bar{X}$.

而 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $E(X) = mp$. 故 $mp = \bar{X}$, $\hat{p} = \frac{\bar{X}}{m}$.

2. $\frac{\bar{X}}{1+\bar{X}}$

【解析】 $f(x; \theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 其中只有一个参数 θ , 矩估计就用 $E(X) = \bar{X}$.

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x; \theta) dx = \int_0^1 x \theta x^{\theta-1} dx = \int_0^1 \theta x^{\theta} dx = \frac{\theta}{\theta+1}.$$

所以 $\frac{\theta}{\theta+1} = \bar{X}$, 解得 $\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$.

3. D

【解析】 $X_i \sim N(0, \sigma^2)$, $\bar{X} \sim N(0, \frac{\sigma^2}{n})$, 就有 $E(X_i^2) = D(X_i) + [E(X_i)]^2 = \sigma^2$,

$$E(\bar{X}^2) = D(\bar{X}) + [E(\bar{X})]^2 = \frac{\sigma^2}{n},$$

$$E(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \sigma^2. \text{ 选(D).}$$

4. D

【解析】 设 S_X^2 和 S_Y^2 分别为样本 $X_1, \dots, X_m$ 和样本 $Y_1, \dots, Y_n$ 的方差, 显然 $E(S_X^2) = E(S_Y^2) = \sigma^2$,

由公式 $\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^m X_i^2 - m\bar{X}^2$ 知:

$$I_X = \sum_{i=1}^m X_i^2 - m\bar{X}^2 = \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2 = (m-1)S_X^2.$$

$I_Y = (n-1)S_Y^2$, 也就有 $E(I_X) = (m-1)E(S_X^2) = (m-1)\sigma^2$, $E(I_Y) = (n-1)\sigma^2$.

所以 $E(\frac{I_X + I_Y}{m+n-2}) = \frac{(m-1)\sigma^2 + (n-1)\sigma^2}{m+n-2} = \sigma^2$. 选(D).

5. A

【解析】 方法一: $E(X_1 + X_n - 2\bar{X})^2 = D(X_1 + X_n - 2\bar{X}) + [E(X_1 + X_n - 2\bar{X})]^2$
 $= D(X_1) + D(X_n) + 4D(\bar{X}) - 2\text{Cov}(X_1 + X_n, 2\bar{X})$
 $+ [E(X_1) + E(X_n) - 2E(\bar{X})]^2$



$$\begin{aligned}
 &= \sigma^2 + \sigma^2 + 4 \frac{\sigma^2}{n} - 8 \text{Cov}(X_1, \bar{X}) \\
 &= 2\sigma^2 + 4 \frac{\sigma^2}{n} - 8 \text{Cov}\left(X_1, \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_i\right) - 8 \text{Cov}\left(X_1, \frac{X_1}{n}\right) \\
 &= 2\sigma^2 - 4 \frac{\sigma^2}{n} = \frac{2(n-2)}{n} \sigma^2
 \end{aligned}$$

方法二: $E(X_1 + X_n - 2\bar{X})^2 = D(X_1 + X_n - 2\bar{X}) + [E(X_1 + X_n - 2\bar{X})]^2$

$$\begin{aligned}
 &= D\left[\left(X_1 - \frac{2}{n}X_1\right) + \left(X_n - \frac{2}{n}X_n\right) - \frac{2}{n} \sum_{i=2}^{n-1} X_i\right] \\
 &= \left(1 - \frac{2}{n}\right)^2 \sigma^2 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^2 \sigma^2 + \frac{4}{n^2} (n-2) \sigma^2 \\
 &= \frac{2(n-2)}{n} \sigma^2
 \end{aligned}$$

6. B

【解析】 最大似然估计法的关键在于写出似然函数 $L(\lambda)$.

总体 $X \sim E(\lambda)$ 的概率密度为:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad \lambda > 0,$$

$$\text{则 } L(\lambda) = L(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \lambda) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}$$

$$\text{取对数, 得 } \ln L(\lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\lambda)}{d \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

$$\text{解得 } \frac{1}{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

故 λ 的最大似然估计量为 $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$.

7. 【证明】 用反证法: 已知 $\hat{\theta}$ 的数字期望为 θ , 即 $E(\hat{\theta}) = \theta$, 且 $D(\hat{\theta}) > 0$.

如果 $\hat{\theta}^2$ 的数字期望也为 θ^2 , 则 $E(\hat{\theta}^2) = \theta^2$.

但 $D(\hat{\theta}^2) = E(\hat{\theta}^2) - [E(\hat{\theta})]^2 = \theta^2 - \theta^2 = 0$, 这与 $D(\hat{\theta}) > 0$ 矛盾.

故 $E(\hat{\theta}^2) \neq \theta^2$.

8. 【解】 先求 λ 的矩估计 $\hat{\lambda}_1$, $X \sim P(\lambda)$.

$$E(X) = \bar{X}, \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, E(X) = \lambda. \text{ 所以 } \hat{\lambda}_1 = \bar{X}.$$

再求 λ 的最大似然估计 $\hat{\lambda}_2$,

$$L = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{n\bar{x}}}{\prod_{i=1}^n (x_i!)} e^{-n\lambda}.$$

$$\ln L = n\bar{x} \ln \lambda - \ln \prod_{i=1}^n (x_i!) - n\lambda, \frac{d \ln L}{d \lambda} = n\bar{x} \cdot \frac{1}{\lambda} - n = 0, \text{ 解得 } \hat{\lambda}_2 = \bar{X}.$$

9. 【解】 总体密度 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x-\theta}{\lambda}}, & x > \theta \\ 0, & x \leq \theta \end{cases} (\lambda > 0)$, 有二个未知参数 θ 和 λ .

$$\text{矩估计 } \begin{cases} E(X) = \bar{X} \\ E(X^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{cases} \quad \begin{cases} E(X) = \int_{\theta}^{+\infty} \frac{x}{\lambda} e^{-\frac{x-\theta}{\lambda}} dx = \frac{-e^{-\frac{x-\theta}{\lambda}}}{\lambda} (\lambda x + \lambda^2) e^{-\frac{x-\theta}{\lambda}} \Big|_{\theta}^{+\infty} = \lambda + \theta \\ E(X^2) = \lambda^2 + (\lambda + \theta)^2 \end{cases}$$



$$\text{所以} \begin{cases} \lambda + \theta = \bar{x} \\ \lambda^2 + (\lambda + \theta)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{cases}, \quad \text{解得} \begin{cases} \hat{\lambda}_1 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \\ \hat{\theta}_1 = \bar{X} - \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \end{cases}$$

最大似然估计

$$L = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^n} e^{-\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)}, & x_1, \dots, x_n > \theta, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad \ln L = -n \ln \lambda - \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{n}{\lambda} \theta$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = -\frac{n}{\lambda} + \frac{\bar{x}}{\lambda^2} - \frac{n\theta}{\lambda^2} \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{n}{\lambda} \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

由(2)知 $\ln L$ 关于 θ 单调增加, 但 $\theta < x_1, \dots, x_n$, 故 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta}_2 = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$.

由(1)式, 令 $\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = 0$ 得 $-\frac{n}{\lambda} + \frac{\bar{x}}{\lambda^2} - \frac{n\hat{\theta}_2}{\lambda^2} = 0$, 解得 $\hat{\lambda}_2 = \bar{X} - \hat{\theta}_2$. 总之 $\begin{cases} \hat{\lambda}_2 = \bar{X} - \min_{1 \leq i \leq n} X_i \\ \hat{\theta}_2 = \min_{1 \leq i \leq n} X_i \end{cases}$.

10.【解】 X 的密度 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}, & \theta_1 < x < \theta_2, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$,

似然函数 $L = \begin{cases} (\theta_2 - \theta_1)^{-n}, & \theta_1 < x_1, x_2, \dots, x_n < \theta_2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

要使 L 最大, $\theta_2 - \theta_1$ 尽量小, 也就是要 θ_2 尽量小, θ_1 尽量大. 但 $\theta_1 < x_1, x_2, \dots, x_n < \theta_2$, θ_2 最小为 $\max_{1 \leq i \leq n} x_i$, θ_1 最大

为 $\min_{1 \leq i \leq n} x_i$, 故最大似然估计量为 $\begin{cases} \hat{\theta}_1 = \min_{1 \leq i \leq n} X_i \\ \hat{\theta}_2 = \max_{1 \leq i \leq n} X_i \end{cases}$.

11.【解】 $X \sim U(a, b)$. 求两个未知参数 a 和 b 的矩估计量.

$$\begin{cases} E(X) = \bar{X} \\ E(X^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{cases} \quad \begin{cases} E(X) = \frac{a+b}{2} \\ E(X^2) = D(X) + E(X)^2 = \frac{(b-a)^2}{12} + \frac{(a+b)^2}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = \bar{x} \\ \frac{(b-a)^2}{12} + \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} \hat{a} = \bar{X} - \sqrt{\frac{3}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \\ \hat{b} = \bar{X} + \sqrt{\frac{3}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \end{cases}$$

12.【解】 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x; \theta) dx = \int_{\theta}^1 \frac{x}{1-\theta} dx = \frac{1}{1-\theta} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{\theta}^1 = \frac{1+\theta}{2}$

令 $E(X) = \bar{X}$, 即 $\frac{1+\theta}{2} = \bar{X}$, $\theta = 2\bar{X} - 1$.

θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1 = 2\bar{X} - 1$, 其中 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

似然函数 $L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \begin{cases} \left(\frac{1}{1-\theta}\right)^n, & \theta \leq x_1, \dots, x_n \leq 1. \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

要使 $L(\theta)$ 最大, 只有使 $1-\theta$ 尽量小, 或者 θ 尽量接近 1.

但 $\theta \leq x_1, \dots, x_n$, 故取 $\theta = \min(x_1, \dots, x_n)$, 或 $\theta = \min_{1 \leq i \leq n} x_i$.

θ 的最大似然估量 $\hat{\theta}_2 = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$.





金榜时代

金榜图书用户

专享福利活动

微信公众号【顶尖考研】适用于：李永乐老师系列课程

赠送

¥100

代金券

¥200

代金券

¥500

代金券

¥1000

代金券

1. 活动参与方式

关注公众号 金榜时代考研 ▶ 回复 “22考研上岸” 即可参与

2. 活动时间

即日起——2021年11月24日

3. 兑换方式

扫右侧二维码
进群咨询管理员
领取代金券



书名	出版时间	适用阶段
数学公式的奥秘	2020年3月	全程复习
数学复习全书·基础篇	2020年6月	夯实基础
数学基础过关660题	2020年8月	夯实基础
数学历年真题全精解析·基础篇	2020年10月	夯实基础
数学复习全书	2020年12月	全程复习
数学历年真题全精解析	2021年1月	全程复习
高等数学辅导讲义	2021年1月	强化提高
线性代数辅导讲义	2021年1月	强化提高
概率论与数理统计辅导讲义	2021年1月	强化提高
数学强化通关330题	2021年1月	强化提高
数学决胜冲刺6套卷	2021年10月	冲刺预测
数学临阵磨枪	2021年10月	冲刺预测



微信扫一扫
解锁更多精彩内容



关注作者团队微博
与名师一起互动交流

