

“助力乡村学校音体美课堂行动”官方合作图书
V研客及全国各大考研培训学校指定用书

金榜时代TM
GLIST 明德·弘毅·品质

金 榜 时 代 考 研 数 学 系 列

线性代数辅导讲义

学 霸 养 成 笔 记 与
高 分 提 档 严 选 题

2022

主 编 © 李永乐 (清华大学)

讲义配套练习
检验自身学习水平

题目严扣知识点
可衍生各类型试题

重点题型详细解析
通透易懂

金榜时代考研数学名师团队



线代王·李永乐

@清华李永乐考研数学辅导团队

微信公众号: 永乐讲线代

B站: 李永乐考研团队



- 原清华大学应用数学系教授 · 北京高教学会数学研究会副理事长
- 广受学生信赖的“线代王” · 曾任全国硕士研究生入学考试北京地区数学阅卷组组长
- 百万畅销书《线性代数辅导讲义》《数学复习全书》主编

李老师作为全国著名的考研数学线性代数辅导专家,对考研数学出题形式、考试重点了如指掌,解题思路极其灵活,辅导针对性极强,效果优良,成绩显著,受到广大学员的交口称赞。其主编的《线性代数辅导讲义》《数学复习全书》《数学基础过关660题》等已被历届考生公认为复习首选辅导书。

前命题组组长·王式安

@清华李永乐考研数学辅导团队

B站: 李永乐考研团队



- 原北京理工大学研究生院院长、应用数学系主任、教授
- 享受国务院特殊津贴的数学专家
- 美国哥伦比亚大学、南佛罗里达大学、纽约大学等大学的客座教授
- 1987-2001年间担任全国硕士研究生入学考试数学命题组组长
- 百万畅销书《概率论与数理统计辅导讲义》《数学复习全书》主编

王老师凭借多年参加考研数学命题工作的深厚经验,对考研数学的命题思路和命题方向了如指掌。其主编的《概率论与数理统计辅导讲义》《数学复习全书》《数学基础过关660题》等已被历届考生公认为复习首选辅导书。

考研高数“三巨头”——刘喜波（高数波叔）

@清华李永乐考研数学辅导团队

- 中国科学院数学博士 · 北方工业大学理学院统计学系系主任、教授



长期从事本科生的教育教学工作,曾荣获学校师德先进个人、十佳班导师等称号,是北京市中青年骨干教师、北京市公共数学优秀教学团队主要成员,主编教材1部、教学参考书3部、教育教学论文集1部、译著2部,参编教学参考书10余部。

武忠祥

@清华李永乐考研数学辅导团队



原西安交通大学(985、211、双一流高校)数学系教授
美国爱荷华大学(2019美国综合性大学TOP100)访问学者
百万畅销书《高等数学辅导讲义》《数学复习全书》主编
高教社《工科数学分析基础》《高等数学基础》等教材主编

考研高数“三巨头”——宋浩（考研数学阅卷人）

@宋浩老师

B站: 宋浩老师官方



- 山东大学数学院本科研究生、中国科学院博士
- 英国Queen Mary University of London访问学者
- 副教授, 考研数学阅卷人

宋老师上课风趣幽默、由浅入深,能把复杂抽象的数学讲得诙谐有趣,上传至B站的数学视频《线性代数》《微积分》《概率论与数理统计》《高等数学》帮助了全国无数的大学生,总播放量近2000万次。宋老师讲考研数学,延续其风趣幽默的特点,喜欢从多种角度找寻思路,善于总结知识点,把晦涩难懂的考研知识讲的生动而有趣。

考研高数“三巨头”——姜晓千（全能名师）

@晓千老师

微信公众号: 晓千老师



- 中国人民大学金融数学博士
- 全国各大省市考研辅导机构全程主讲
- 新浪、搜狐、腾讯、网易、中国教育在线等各大门户网站特邀访谈嘉宾

姜老师对考研数学历年真题有着极其深入的研究,授课风格高屋建瓴、激情洋溢、亲和幽默,深受考研学子喜爱。

第一章 行列式

一、填空题

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

 答题区

 纠错区

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$(2) \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

 答题区

 纠错区



(3)(2019,2) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, A_{ij} 表示 $|A|$ 中 (i,j) 元的代数余

子式, 则 $A_{11} - A_{12} =$ _____.

 答题区

 纠错区

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} =$ _____.

 答题区

 纠错区

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix} =$ _____.

 答题区

 纠错区



$$(6) \begin{vmatrix} a_1 + b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 + b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 + b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n + b \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

 答题区

 纠错区

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

(7) 设 A, B 均为 n 阶矩阵, $|A| = 2, |B| = -3$, 则 $|2A^* B^T| = \underline{\hspace{2cm}}.$

 答题区

 纠错区

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

(8) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维列向量, 记矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3)$. 如果 $|A| = 1$, 那么 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}.$

 答题区

 纠错区



二、选择题

(1) 四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于

(A) $a_1 a_2 a_3 a_4 - b_1 b_2 b_3 b_4$.

(C) $(a_1 a_2 - b_1 b_2)(a_3 a_4 - b_3 b_4)$.

(B) $a_1 a_2 a_3 a_4 + b_1 b_2 b_3 b_4$.

(D) $(a_2 a_3 - b_2 b_3)(a_1 a_4 - b_1 b_4)$.

 答题区

 纠错区

(2) $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 均为 4 维列向量, $|A| = |\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3| = 5$, $|B| = |\beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3| = -1$, 则 $|A+B| =$

(A) 4.

(B) 6.

(C) 32.

(D) 48.

 答题区

 纠错区

(3) 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta, \gamma$ 均为 4 维列向量, 若 4 阶行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma| = a$, $|\beta + \gamma, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = b$, 那么 4 阶行列式 $|2\beta, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1| =$

(A) $2a - b$.

(B) $2b - a$.

(C) $-2a - 2b$.

(D) $-2a + 2b$.

 答题区

 纠错区



(4) 设 A 为 n 阶矩阵, 则行列式 $|A| = 0$ 的必要条件是

- (A) A 的两行元素对应成比例.
 (B) A 中必有一行为其余各行的线性组合.
 (C) A 中有一列元素全为 0.
 (D) A 中任一列均为其余各列的线性组合.

 答题区

 纠错区

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

三、解答题

(1) 求 x 的值

(A) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 1 & x-5 & 0 \\ 2 & 0 & x-5 \end{vmatrix} = 0;$ (B) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & x & 3 & 1 \\ 3 & 3 & x & 6 \\ 4 & 4 & 6 & x \end{vmatrix} = 0.$

 答题区

(2) 已知 A 是 n 阶矩阵, 满足 $A^2 = E, A \neq E$, 证明 $|A + E| = 0$.

 答题区



(3) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 证明当 $m > n$, 必有行列式 $|AB| = 0$.

 答题区

(4) 已知 a, b, c 不全为零, 证明齐次方程组

$$\begin{cases} ax_2 + bx_3 + cx_4 = 0, \\ ax_1 + x_2 = 0, \\ bx_1 + x_3 = 0, \\ cx_1 + x_4 = 0 \end{cases}$$

只有零解.

 答题区



一、学霸小结

自己总结本章所学的知识、方法与技巧,形成结构,既可巩固所学知识,又可培养独立思考分析问题的能力,养成学以致用的好习惯。

1.

2.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

3.

4.



5.

6.

7.

8.



二、错题分类

综合分析哪些题做得比较好,哪些题存在失误。对错题进行归类,有针对性的进行纠错。

类型 1	概念模糊 知识不清 未能掌握
题目序号 或页码	纠错与分析
题目序号 或页码	纠错与分析

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



类型 2	缺失数学思维 方法运用不灵活
------	----------------

题目序号 或页码	纠错与分析
-------------	-------

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

题目序号 或页码	纠错与分析
-------------	-------



类型 3

审题不清 不能正确理解题意

题目序号
或页码

纠错与分析

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

微信公众号【顶尖考研】

题目序号
或页码

纠错与分析



类型 4	运算能力弱 表述不清
------	------------

题目序号 或页码	纠错与分析
-------------	-------



微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

题目序号 或页码	纠错与分析
-------------	-------



第二章 矩阵

一、填空题

(1) 已知 A 是 3 阶矩阵, 且所有元素都是 -1 , 则 $A^4 + 2A^3 =$ _____.

 答题区

 纠错区

(2) 设 A 是 n 阶矩阵, 满足 $(A - E)^3 = (A + E)^3$, 则 $(A - 2E)^{-1} =$ _____.

 答题区

 纠错区

(3) 已知 $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & a & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, B 是 3 阶非零矩阵, 且 $AB = O$, 则 $a =$ _____.

 答题区

 纠错区



(4) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, E 为 2 阶单位矩阵, 矩阵 B 满足 $BA = B + 2E$, 则 $B =$ _____.

 答题区

 纠错区

(5) 设 A 是 3 阶矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 若 $|A| = 4$, 则 $\left| A^* - \left(\frac{1}{2}A \right)^{-1} \right| =$ _____.

 答题区

 纠错区

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

二、选择题

(1) 设 A 是任一 $n (n \geq 3)$ 阶方阵, A^* 是其伴随矩阵, 又 k 为常数, 且 $k \neq 0, \pm 1$, 则必有 $(kA)^* =$

(A) kA^* .

(B) $k^{n-1}A^*$.

(C) $k^n A^*$.

(D) $k^{-1}A^*$.

 答题区

 纠错区



(2) A, B 均为 n 阶矩阵, $AB = O$, 且 $B \neq O$, 则必有

(A) $(A+B)^2 = A^2 + B^2$.

(B) $|B| \neq 0$.

(C) $|B^*| \neq 0$.

(D) $|A^*| = 0$.

 答题区

 纠错区

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

(3) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & a & a \\ a & 1 & a & a \\ a & a & 1 & a \\ a & a & a & 1 \end{bmatrix}$, 若 A 的伴随矩阵 A^* 的秩为 1, 则 $a =$

(A) 1.

(B) -1.

(C) $-\frac{1}{3}$.

(D) 3.

 答题区

 纠错区

三、解答题

(1) 设 A 是 n 阶矩阵, 若 $(A+E)^m = O$, 证明矩阵 A 可逆.

 答题区



(2) 设 B 是 $m \times n$ 矩阵, BB^T 可逆, $A = E - B^T(BB^T)^{-1}B$, 其中 E 是 n 阶单位矩阵.

证明: (I) $A^T = A$;

(II) $A^2 = A$.

 答题区

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



一、学霸小结

自己总结本章所学的知识、方法与技巧,形成结构,既可巩固所学知识,又可培养独立思考分析问题的能力,养成学以致用的好习惯。

1.

2.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

3.

4.



5.

6.

7. (ID: djky66)

7.

8.



二、错题分类

综合分析哪些题做得比较好,哪些题存在失误。对错题进行归类,有针对的进行纠错。

类型 1	概念模糊 知识不清 未能掌握
题目序号 或页码	纠错与分析
题目序号 或页码	纠错与分析



类型 2	缺失数学思维 方法运用不灵活
题目序号 或页码	纠错与分析
题目序号 或页码	纠错与分析

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



类型 3

审题不清 不能正确理解题意

题目序号
或页码

纠错与分析

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

微信公众号【顶尖考研】

题目序号
或页码

纠错与分析

(ID: djky66)



类型 4	运算能力弱 表述不清
------	------------

题目序号 或页码	纠错与分析
-------------	-------



微信公众号【顶尖考研】

题目序号 或页码	纠错与分析
-------------	-------

(ID: djky66)



第三章 n 维向量

一、填空题

(1) 向量 $\alpha_1 = (1, 4, 2)^T$, $\alpha_2 = (2, 7, 3)^T$, $\alpha_3 = (0, 1, a)^T$ 可以表示任一个 3 维向量, 则 a 的取值为_____.

 答题区

 纠错区

(2) 已知向量组 $\alpha_1 = (1, 3, 2, a)^T$, $\alpha_2 = (2, 7, a, 3)^T$, $\alpha_3 = (0, a, 5, -5)^T$ 线性相关, 则 $a =$ _____.

 答题区

 纠错区

(3) 向量组 $\alpha_1 = (1, 3, 6, 2)^T$, $\alpha_2 = (2, 1, 2, -1)^T$, $\alpha_3 = (1, -1, a, -2)^T$ 的秩为 2, 则 $a =$ _____.

 答题区

 纠错区



(4) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性无关的 3 维列向量组, 则向量组 $A\alpha_1, A\alpha_2,$

$A\alpha_3$ 的秩为_____.

 答题区

 纠错区

(5) 已知 n 阶矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, 则秩 $r(A^2 - A) =$ _____.

 答题区

 纠错区

(6) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & b \\ 2 & a & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$, 若 $r(A) = 3$, 则 a, b 满足条件_____.

 答题区

 纠错区



二、选择题

(1) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则线性无关的向量组是

- (A) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_3 - \alpha_1, \alpha_2 - \alpha_3$.
 (B) $\alpha_1 - \alpha_2, 2\alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3$.
 (C) $\alpha_1 - \alpha_2, 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.
 (D) $\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_2, 5\alpha_1 + 8\alpha_2$.

 答题区

 纠错区

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

(2) 设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ a_1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ a_2 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \\ a_3 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a_4 \end{bmatrix}$, 其中 a_1, a_2, a_3, a_4 为任意实数, 则

- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 必线性相关.
 (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 必线性无关.
 (C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 必线性相关.
 (D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 必线性无关.

 答题区

 纠错区



- (3) 若 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r$ ($s > r$), 则
- (A) 向量组中任意 $r-1$ 个向量都线性无关.
 - (B) 向量组中任意 r 个向量都线性无关.
 - (C) 向量组中任意 $r+1$ 个向量都线性相关.
 - (D) 向量组中任意 r 个向量都线性相关.

 答题区

 纠错区

- (4) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关的充分必要条件是
- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意 $s-1$ 个向量都线性无关.
 - (B) 存在向量 α_{s+1} 使向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$ 仍线性无关.
 - (C) 存在不全为 0 的一组数 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s \neq 0$.
 - (D) 任意不全为 0 的一组数 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 恒有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s \neq 0$.

 答题区

 纠错区

三、解答题

- (1) 已知 n 维向量组 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 与 (II) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 有相同的秩, 证明 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出.

 答题区



(2) 已知 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 非零且两两正交, 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

 答题区

(3) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 均是 3 维列向量, 且 α_1, α_2 线性无关, β_1, β_2 线性无关, 证明存在非零向量 γ , 使得 γ 既可由 α_1, α_2 线性表出也可由 β_1, β_2 线性表出.

当 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \beta_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 时, 求出所有的向量 γ .

 答题区



一、学霸小结

自己总结本章所学的知识、方法与技巧,形成结构,既可巩固所学知识,又可培养独立思考分析问题的能力,养成学以致用的好习惯。

1.

2.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

3.

4.



5.

设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是 n 维向量, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关的充分必要条件是

(A) α_4 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示 (B) α_4 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示

(C) α_4 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 都正交 (D) α_4 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 都正交

解: 选 (A).

6.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

7.

设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 n 维向量, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的充分必要条件是

(A) α_4 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示

8.



二、错题分类

综合分析哪些题做得比较好,哪些题存在失误。对错题进行归类,有针对的进行纠错。

类型 1	概念模糊 知识不清 未能掌握
------	----------------------

题目序号
或页码

纠错与分析



微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

题目序号
或页码

纠错与分析



类型 2	缺失数学思维 方法运用不灵活
题目序号 或页码	纠错与分析
题目序号 或页码	纠错与分析

微信公众号【顶尖考研】

(ID: djky66)



类型 3	审题不清 不能正确理解题意
------	---------------

题目序号 或页码	纠错与分析
-------------	-------

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

题目序号 或页码	纠错与分析
-------------	-------



类型 4 运算能力弱 表述不清

题目序号
或页码

纠错与分析

微信公众号【顶尖考研】

(ID: djky66)

题目序号
或页码

纠错与分析



第四章 线性方程组

一、填空题

(1) 方程 $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0$ 的通解是_____.

 答题区

 纠错区

(2) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2-a \\ 3-2a & 2-a & 1 \\ 2-a & 2-a & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ -1 \end{bmatrix}$, 若方程组 $Ax = b$ 有解且不唯一,

则 $a =$ _____.

 答题区

 纠错区

(3) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 4 元非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的 3 个解向量, 且秩 $r(A) = 3$, 若 $\alpha_1 = (1, 2, 3, 4)^T$, $2\alpha_2 - 3\alpha_3 = (0, 1, -1, 0)^T$, 则方程组 $Ax = b$ 的通解是_____.

 答题区

 纠错区



(4) 已知方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + tx_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵是 A . 若 B 是 3 阶非零矩阵且 $AB = O$, 则 $B =$ _____.

 答题区

 纠错区

(5) 已知 A 是 3 阶矩阵, 且 $r(A^*) = 1$. 若 $\xi_1 = (-3, 2, 0)^T, \xi_2 = (1, 0, 2)^T$ 是方程组 $Ax = b$ 的 2 个解, 则方程组的通解是 _____.

 答题区

 纠错区

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

二、选择题

(1) 设齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系是 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$, 则此方程组的基础解系还可以是

(A) $\eta_1 + \eta_2, \eta_2 + \eta_3, \eta_3 + \eta_4, \eta_4 + \eta_1$.

(B) $\eta_1 - \eta_2, \eta_2 - \eta_3, \eta_3 + \eta_4, \eta_4 + \eta_1$.

(C) $\eta_1, \eta_2 + \eta_3, \eta_1 + \eta_2 - \eta_3 + \eta_4$.

(D) $\eta_1 - \eta_2, \eta_2 - \eta_3, \eta_3 - \eta_4, \eta_4 + \eta_1$.

 答题区

 纠错区



(2) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 秩 $r(A) = n - 2$, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的三个线性无关的解, k_1, k_2 为任意常数, 则方程组的通解是

- (A) $k_1(\alpha_1 - \alpha_2) + k_2(\alpha_2 - \alpha_3)$.
 (B) $\alpha_1 + k_1(\alpha_2 + \alpha_3) + k_2(\alpha_1 + \alpha_3)$.
 (C) $\frac{1}{3}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + k_1(\alpha_3 - \alpha_1) + k_2(\alpha_3 - \alpha_2)$.
 (D) $\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + k_1(\alpha_2 - \alpha_3) + k_2(\alpha_3 - \alpha_2)$.

 答题区

 纠错区

(3) 设 A 是秩为 $n - 1$ 的 n 阶矩阵, α_1 与 α_2 是齐次方程组 $Ax = 0$ 的两个不同的解向量, 则 $Ax = 0$ 的通解必定是

- (A) $k(\alpha_1 + \alpha_2)$. (B) $k(\alpha_1 - \alpha_2)$. (C) $k\alpha_1$. (D) $\alpha_1 - \alpha_2$.

 答题区

 纠错区

三、解答题

(1) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, 求与矩阵 A 可交换的矩阵.

 答题区



(2) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a & a \\ 1 & a & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 若齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系有 2 个线性无关

的解向量, 试求方程组 $Ax = 0$ 的通解.

 答题区

(3) 设线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 + ax_3 - ax_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + \quad + 3x_4 = 3, \end{cases}$$
 问 a 为何值时方程组有解? 并在有解时求

其所有的解.

 答题区

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

(4) 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是 4 阶矩阵, 方程组 $Ax = b$ 的通解是 $(2, 1, 0, 1)^T + k(1, -1, 2, 0)^T$. 证明: α_4 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 但 α_4 可由 α_1, α_2, b 线性表出并写出表达式.

 答题区



一、学霸小结

自己总结本章所学的知识、方法与技巧,形成结构,既可巩固所学知识,又可培养独立思考分析问题的能力,养成学以致用的好习惯。

1.

2.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

3.

4.



5.

6.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

7.

(ID: djky66)

8.



类型 2 缺失数学思维 方法运用不灵活

题目序号
或页码

纠错与分析

微信公众号【顶尖考研】

(ID: djky66)

题目序号
或页码

纠错与分析



类型 3

审题不清 不能正确理解题意

题目序号
或页码

纠错与分析

微信公众号【顶尖考研】

题目序号
或页码

纠错与分析

(ID: djky66)



类型 4	运算能力弱 表述不清
题目序号 或页码	纠错与分析
题目序号 或页码	纠错与分析



第五章 特征值与特征向量

一、填空题

(1) 若 1 是矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ 的特征值, 则 $a =$ _____.

 答题区

 纠错区

(2) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & a \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ 只有一个线性无关的特征向量, 则 $a =$ _____.

 答题区

 纠错区

(3) A 是 4 阶矩阵, 伴随矩阵 A^* 的特征值是 1, -2, -4, 8, 则矩阵 A 的特征值是 _____.

 答题区

 纠错区



(4) 已知 $\alpha = (1, a, 1)^T$ 是 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 的特征向量, 则 $a =$ _____.

 答题区

 纠错区

二、选择题

(1) 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的三个特征值是

(A) 1, 4, 0.

(B) 2, 3, 0.

(C) 2, 4, 0.

(D) 2, 4, -1.

 答题区

 纠错区

(2) 设 A 是 3 阶不可逆矩阵, α_1, α_2 是 $Ax = 0$ 的基础解系, α_3 是 A 属于特征值 $\lambda = 1$ 的特征向量, 则下列不是 A 的特征向量的是

(A) $\alpha_1 + 3\alpha_2$.

(B) $5\alpha_3$.

(C) $\alpha_1 - \alpha_2$.

(D) $\alpha_2 - \alpha_3$.

 答题区

 纠错区



(3) 与矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ 不相似的矩阵是

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

 答题区

 纠错区

(4) 不能相似对角化的矩阵是

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

 答题区

 纠错区

三、解答题

(1) 已知 A 是 3 阶实对称矩阵, 特征值是 $1, 1, -2$, 其中属于 $\lambda = -2$ 的特征向量是 $\alpha = (1, 0, 1)^T$, 求 A^3 .

 答题区



(2) 已知 $\lambda = 2$ 是矩阵 $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & a \\ 2 & a & a+2 \end{bmatrix}$ 的二重特征值, 求 a 的值并求正交矩阵 Q 使

$$Q^{-1}AQ = \Lambda.$$

 答题区

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

(3) 设 α_1, α_2 是矩阵 A 属于不同特征值的特征向量, 证明 $\alpha_1 + \alpha_2$ 不是矩阵 A 的特征向量.

 答题区

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

(4) 设 A 是 n 阶矩阵, $A \neq O$ 但 $A^3 = O$, 证明 A 不能相似对角化.

 答题区



一、学霸小结

自己总结本章所学的知识、方法与技巧,形成结构,既可巩固所学知识,又可培养独立思考分析问题的能力,养成学以致用的好习惯。

1.

2.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

3.

4.



5.

6.

7.

8.



类型 1

概念模糊

知识不清

未能掌握

题目序号
或页码

纠错与分析

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

题目序号
或页码

纠错与分析



类型 2	缺失数学思维 方法运用不灵活
题目序号 或页码	纠错与分析 微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66) 微信公众号【顶尖考研】 (ID: djky66)
题目序号 或页码	纠错与分析



类型 3	审题不清 不能正确理解题意
------	---------------

题目序号 或页码	纠错与分析
-------------	-------



微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

题目序号 或页码	纠错与分析
-------------	-------



类型 4	运算能力弱 表述不清
题目序号 或页码	纠错与分析
题目序号 或页码	纠错与分析

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



第六章 二次型

一、填空题

(1) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 的秩 $r(f) =$ _____.

 答题区

 纠错区

(2) 二次型 $f = x_1^2 - x_2x_3$ 的规范形是 _____.

 答题区

 纠错区

(3) 二次型 $5x_1^2 + x_2^2 + tx_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 正定, 则 t _____.

 答题区

 纠错区



(4) 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 若 $A + kE$ 是正定矩阵, 则 k _____.

 答题区

 纠错区

二、选择题

(1) 与矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ 合同的矩阵是

(A) $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$.

 答题区

 纠错区



(2) 对于 n 元二次型 $x^T A x$, 下述结论中正确的是

- (A) 化 $x^T A x$ 为标准形的坐标变换是唯一的. (B) 化 $x^T A x$ 为规范形的坐标变换是唯一的.
(C) $x^T A x$ 的标准形是唯一的. (D) $x^T A x$ 的规范形是唯一的.

 答题区

 纠错区

(3) n 元二次型 $x^T A x$ 正定的充分必要条件是

- (A) 存在正交矩阵 P , $P^T A P = E$.
(B) 负惯性指数为零.
(C) A 与单位矩阵合同.
(D) 存在 n 阶矩阵 C , 使 $A = C^T C$.

 答题区

 纠错区

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

三、解答题

(1) 已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + cx_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$$

的秩为 2, 求 c , 并用正交变换把 f 化成标准形, 写出相应的正交矩阵.

 答题区



(2) 已知 A 是 n 阶正定矩阵, 证明 A 的伴随矩阵 A^* 是正定矩阵.

 答题区

(3) 设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2x_3$$

在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$, 求 a 的值及一个正交矩阵 Q .

 答题区



一、学霸小结

自己总结本章所学的知识、方法与技巧,形成结构,既可巩固所学知识,又可培养独立思考分析问题的能力,养成学以致用的好习惯。

1.

2.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

3.

4.



5.

6.

7.

8.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

二、错题分类

综合分析哪些题做得比较好,哪些题存在失误。对错题进行归类,有针对的进行纠错。

类型 1	概念模糊 知识不清 未能掌握
题目序号 或页码	纠错与分析
题目序号 或页码	纠错与分析

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



类型 2

缺失数学思维 方法运用不灵活

题目序号
或页码

纠错与分析

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

微信公众号【顶尖考研】

题目序号
或页码

纠错与分析



类型 4	运算能力弱 表述不清
题目序号 或页码	纠错与分析
题目序号 或页码	纠错与分析



附录 45 分钟水平测试

自测(一)

1. 若向量组 $\alpha_1 = (4, -1, 3, -2)^T, \alpha_2 = (8, -2, a, -4)^T, \alpha_3 = (3, -1, 4, -2)^T, \alpha_4 = (a, -2, 8, -4)^T$ 的秩为 2, 则 $a =$ _____.



答题区

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

2. 已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, E 是 4 阶单位矩阵, 则 $(E + A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5)^{-1} =$ _____.



答题区



3. 矩阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 的特征值是

(A) 1, 1, 2.

(B) -1, 1, 2.

(C) 0, 1, 3.

(D) 1, 2, 2.

 答题区

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

4. $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ c_2 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ c_3 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ c_4 \end{bmatrix}$, 任意的 $c_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 总有

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

(B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关.

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

(D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关.

 答题区



5. 已知 $\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ 可由 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ b \end{bmatrix}$ 线性表出, 求 a, b 的值, 并当 β 表示

法不唯一时写出 β 的表达式.

 答题区



微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

6. 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量, 求 a 的值, 并求 A^{10} .

 答题区



自测(二)

1. 设矩阵 A 是秩为 2 的 4 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是方程组 $Ax = b$ 的 3 个解, 其中 $\alpha_1 + \alpha_2 = (2, 1, -8, 10)^T$, $2\alpha_2 - \alpha_3 = (2, 0, -24, 29)^T$, $\alpha_2 + \alpha_3 = (1, 0, -3, 4)^T$, 则方程组 $Ax = b$ 的通解是_____.

 答题区

2. 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 矩阵 B 满足 $A^*BA - 2A^*B = 4E$, 其中 A^* 是 A 的伴随矩阵, E 是 3 阶单位矩阵, 则矩阵 $B =$ _____.

 答题区

3. 已知 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{s-1}$. 如果秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{s-1}) = r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{s-1})$, 则必有

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关.

(B) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{s-1}$ 线性相关.

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

(D) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{s-1}$ 线性无关.

 答题区



4. 设 A 是 3 阶实对称矩阵, 特征值是 $0, 1, 2$, 若 $B = A^3 - 3A^2 + 2E$, 则与 B 相似的矩阵是

- (A) $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{bmatrix}$.

 答题区

5. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & a \end{bmatrix}$ 与 $B = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 5 & \\ & & b \end{bmatrix}$ 相似, 求 a, b 的值, 并求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP = B$.

 答题区

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

6. 已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 9x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3,$$

- (1) 求正交变换化二次型为标准形;
- (2) 判断此二次型是否正定.

 答题区



答案与提示

第一章 行列式

一、填空题

- (1) 1. (2) $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$.
(3) -4 . (4) $n!$.
(5) $\frac{1}{2}n(n+1)$. (6) $b^{n-1}(\sum a_i + b)$.
(7) $-3 \cdot 2^{2n-1}$. (8) 2

【提示】

- (1) 逐行相加.
(2) 按第 1 列展开;或逐列相加.
(3) $a_{11} = 1, a_{12} = -1, a_{13} = a_{14} = 0$, 故 $|A| = A_{11} - A_{12}$.
(4) 把第一行分别加至其它各行.
(5) 把每列均加至第 1 列.
(6) 把各列均加至第 1 列, 提取公因式 $b + \sum a_j$, 然后把第 1 行的 -1 倍分别加至其余各行, 可得上三角行列式. 或第 1 行的 -1 倍分别相加到每一行, 变为爪型.
(7) 你会的, 别出错!.
(8) 参考例 1.17.

二、选择题

- (1) D. (2) C. (3) C. (4) B.

【提示】

- (1) 和 2014 年考题一样吧?
(2) $|A+B| = |\alpha + \beta, 2\gamma_1, 2\gamma_2, 2\gamma_3| = 8|\alpha + \beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3|$
 $= 8(|\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3| + |\beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3|)$.
(3) $|\beta + \gamma, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = |\beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| + |\gamma, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3|$
 $= -|\beta, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1| - |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \gamma|$.
(4) (A)(C) 均是 $|A| = 0$ 的充分条件并不必要, 只要有一行(列)是其余各行(列)的线性组合就可保证 $|A| = 0$.

三、解答题

- (1) (A) 5, 6, 0. (B) 1, 2, 6.

【提示】

- (A) 把第 2 行的 -2 倍加至第 3 行, 可得出 $x-5$ 的公因式, 即



$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 1 & x-5 & 0 \\ 2 & 0 & x-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 1 & x-5 & 0 \\ 0 & -2(x-5) & x-5 \end{vmatrix} \\
 = (x-5) \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 1 & x-5 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\
 = (x-5) \begin{vmatrix} x-1 & 5 & 2 \\ 1 & x-5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 = (x-5)(x^2 - 6x).$$

(B) 把第 1 行的 -3 倍、 -4 倍分别加至第 3 行与第 4 行, 可用拉普拉斯展开式, 即

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & x & 3 & 1 \\ 3 & 3 & x & 6 \\ 4 & 4 & 6 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & x & 3 & 1 \\ 0 & 0 & x-3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & x-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x-3 & 3 \\ 2 & x-4 \end{vmatrix} = 0.$$

(2) 由 $A^2 = E$ 得

$$(A+E)(A-E) = O.$$

因为 $A \neq E$, 故齐次方程组 $(A+E)x = 0$ 有非零解, 从而 $|A+E| = 0$.

(3) 因为 AB 是 m 阶矩阵, 行列式 $|AB| = 0$ 的充分必要条件是秩 $r(AB) < m$. 由于

$$r(AB) \leq r(B) \leq \min(m, n),$$

可见当 $m > n$ 时, 必有

$$r(AB) \leq r(B) \leq n < m.$$

(4) 由于系数行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a^2 - b^2 - c^2 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(a^2 + b^2 + c^2) \neq 0.$$

第二章 矩阵

一、填空题

$$(1) \begin{bmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{bmatrix}. \quad (2) -\frac{3A+6E}{13}. \quad (3) -3. \quad (4) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5) 2.$$

【提示】(1) 秩 $r(A) = 1$, 有 $A^2 = lA$, 其中 $l = \sum a_{ii} = -3$.

(2) 由 $(A+E)^3 = (A-E)^3$ 得 $3A^2 + E = O$, 进而有

$$(A-2E)(3A+6E) + 13E = O.$$

(3) $AB = O, B \neq O$, 说明齐次方程组 $Ax = 0$, 有非零解, 故 $|A| = 0$. 可将第 3 列加至第



2 列来求 a .

(4) $B = 2(A - E)^{-1}$, 要求二阶逆.

(5) 根据 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$, $A^* = |A|A^{-1}$ 及 $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$, 有

$$\left| A^* - \left(\frac{1}{2}A\right)^{-1} \right| = |A^* - 2A^{-1}| = |4A^{-1} - 2A^{-1}| = 8|A^{-1}|.$$

二、选择题

(1)B. (2)D. (3)C.

【提示】(1) 用定义, 或加强条件 A 可逆时 $(kA)^*$ 应满足的关系.

(2) $AB = O$ 不能保证 $BA = O$, 而 $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$; 当 $B \neq O$ 时, 行列式 $|B|$ 可以为零亦可不为零, 由 B 是否可逆而定. (其实, $|B^*| = |B|^{n-1}$, 可见 (B) 与 (C) 要对就全对, 要错就全错, 在本题必全错); 由 $AB = O, B \neq O$ 知 $Ax = 0$ 有非零解, 那么 $|A| = 0$, 从而 $|A^*| = |A|^{n-1} = 0$.

(3) 由于 $r(A)^* = \begin{cases} n, & \text{若 } r(A) = n, \\ 1, & \text{若 } r(A) = n-1, \\ 0, & \text{若 } r(A) < n-1. \end{cases}$

本题 $r(A^*) = 1$ 而 $n = 4$, 说明 $r(A) = 3$, 故 $|A| = 0$.

$$\text{因为 } |A| = \begin{vmatrix} 3a+1 & 3a+1 & 3a+1 & 3a+1 \\ a & 1 & a & a \\ a & a & 1 & a \\ a & a & a & 1 \end{vmatrix} = (3a+1)(1-a)^3,$$

显然 $a = 1$ 时, $r(A) = 1$, 那么只有 $a = -\frac{1}{3}$.

三、解答题

(1) (用定义法) 因为 $(A+E)^m = O$, 即

$$A^m + C_m^1 A^{m-1} + C_m^2 A^{m-2} + \cdots + C_m^{m-1} A + E = O,$$

那么 $A(-A^{m-1} - C_m^1 A^{m-2} - \cdots - C_m^{m-1} E) = E$.

$$\begin{aligned} (2) (I) A^T &= [E - B^T(BB^T)^{-1}B]^T = E^T - [B^T(BB^T)^{-1}B]^T \\ &= E - B^T[(BB^T)^{-1}]^T(B^T)^T = E - B^T[(BB^T)^T]^{-1}B \\ &= E - B^T(BB^T)^{-1}B = A. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (II) A^2 &= [E - B^T(BB^T)^{-1}B][E - B^T(BB^T)^{-1}B] \\ &= E - 2B^T(BB^T)^{-1}B + B^T(BB^T)^{-1}BB^T(BB^T)^{-1}B \\ &= E - 2B^T(BB^T)^{-1}B + B^T(BB^T)^{-1}B = A. \end{aligned}$$

第三章 n 维向量

一、填空题

- (1) $a \neq 1$. (2) $a = -1$. (3) $a = -2$. (4) 2. (5) 1.
(6) $a \neq 1, b = 2$ 或 $a = 1, b \neq 2$.



【提示】 (1) n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 可以表示任一个 n 维向量的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关的充分必要条件是行列式 $|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| \neq 0$.

(2) 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 由定理 3.2 知齐次方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$ 有非零解, 对系数矩阵作初等行变换, 有

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & a \\ 2 & a & 5 \\ a & 3 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 5+4a-a^2 \\ 0 & 0 & 2a^2-3a-5 \end{bmatrix}.$$

由于 $5+4a-a^2 = (5-a)(1+a)$, $2a^2-3a-5 = (2a-5)(a+1)$,

可见仅当 $a = -1$ 时, 上述两个数才同时为零, 否则至少有一个数不为零, 从而

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 秩 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) < 3 \Leftrightarrow a = -1$.

(3) 经初等变换向量组的秩不变, 由

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & a \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & a+2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

可见 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2 \Leftrightarrow a+2 = 0$.

(4) 由于 $[A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3] = A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, 注意 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 可逆.

(5) $A^2 - A = A(A - E)$, 又 A 可逆, 可知

$$r(A^2 - A) = r(A - E).$$

(6) 对矩阵 A 作初等变换, 将它化为阶梯形矩阵, 有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & b \\ 2 & a & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & b \\ 0 & 0 & a-1 & ab-2b+2 \\ 0 & 0 & 0 & 4-2b \end{bmatrix}.$$

$r(A) = 3 \Rightarrow a \neq 1, b = 2$ 或 $a = 1, b \neq 2$.

二、选择题

(1) B. (2) B. (3) C. (4) D.

【提示】 (1) 由于 (A) $(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_3 - \alpha_1) + (\alpha_2 - \alpha_3) = 0$,

而

(C) $(\alpha_1 - \alpha_2) + (2\alpha_2 + \alpha_3) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 0$,

利用观察法, 通过简单地加加减减我们知 (A) (C) 均线性相关, 可排除.

至于 (D), 令 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = 2\alpha_2 + 3\alpha_1, \beta_3 = 5\alpha_1 + 8\alpha_2$ 即 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 可以由 α_1, α_2 线性表出, 亦即多数向量可以由少数向量线性表出, 故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 必线性相关 (定理 3.7).

(2) 考察 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 中的前三个分量所构成的向量, 由

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$



知 $(1, 0, 6)^T, (1, -1, 2)^T, (2, 0, 7)^T$ 线性无关, 从而延伸组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 必线性无关.

$$\text{因为 } |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 7 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 5a_4, \text{ 所以 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \text{ 既可能线性相关也}$$

可能线性无关, 可知 (C)、(D) 均不正确.

(3) 考察 $(1, 0, 0)^T, (2, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T$ 可知 (A)(B)(D) 均错误.

(4) (A)(C) 都是必要条件, (B) 是充分条件.

三、解答题

(1) 考察方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = \beta$, 由于秩

$$r(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta)$$

即 $r(A) = r(\bar{A})$, 从而方程组有解, 即 β 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性求出.

或者, 设 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的极大线性无关组, 由于 $r(I) = r(II)$, 可知 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 在 (II) 中仍是 (II) 的极大线性无关组, 那么 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}, \beta$ 必线性相关, 从而 β 可由 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性表出, 故 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出.

(2) 设

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0, \quad ①$$

因为 α_i 与 $\alpha_j (i \neq j)$ 两两正交, 有 $\alpha_i^T \alpha_j = 0$, 用 α_1^T 左乘 ① 式, 得

$$k_1 \alpha_1^T \alpha_1 = 0.$$

注意 $\alpha_1^T \alpha_1 = \|\alpha_1\|^2 > 0$.

(3) 4 个 3 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 必线性相关, 故有不全为 0 的 k_1, k_2, l_1, l_2 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + l_1\beta_1 + l_2\beta_2 = 0.$$

注意 k_1, k_2 必不全为 0 (想清楚为什么?), 取 $\gamma = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = -l_1\beta_1 - l_2\beta_2$.

解方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + y_1\beta_1 + y_2\beta_2 = 0$, 求其通解可知

$$\gamma = k(0, 1, 1)^T, k \text{ 为任意非零常数.}$$

第四章 线性方程组

一、填空题

(1) $k_1(2, 1, 0, 0)^T + k_2(-3, 0, 1, 0)^T + k_3(4, 0, 0, 1)^T$.

(2) $a = 3$.

(3) $(1, 2, 3, 4)^T + k(1, 3, 2, 4)^T$.

(4) $\begin{bmatrix} -k_1 & -k_2 & -k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}, k_1, k_2, k_3 \text{ 不全为 } 0$.

(5) $(-3, 2, 0)^T + k(2, -1, 1)^T, k \text{ 为任意实数.}$

【提示】 (1) 由 $n - r(A) = 4 - 1 = 3$ 先明确基础解系中解向量的个数, 再确定自由变量求解.



(2) 方程组 $Ax = b$ 有解且不唯一, 即方程组 $Ax = b$ 有无穷多解, 亦即秩 $r(A) = r(\bar{A}) < 3$.

$$\bar{A} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2-a & 1 \\ 0 & a-1 & -2a^2+7a-5 & 3a-3 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-3) & 3-a \end{array} \right],$$

再按 $a=1, a=3$ 分析判断.

或者, 通过方程组 $Ax = b$ 有无穷多解的必要条件是 $|A| = 0$ 来分析判断.

(3) $n-r(A) = 4-3 = 1$, 通解形式为 $\alpha + k\eta$, 其中特解可取为 α_1 , 而 $\alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 = (\alpha_1 - \alpha_3) + 2(\alpha_2 - \alpha_3)$ 是 $Ax = 0$ 的解, 即 $Ax = 0$ 的基础解系.

(4) $AB = O$, B 的列向量是 $Ax = 0$ 的解.

由 $B \neq O$, 知 $Ax = 0$ 有非零解, 求出 $t = 2$.

再求 $Ax = 0$ 基础解系 $(-1, 1, 1)^T$.

$$(5) r(A^*) = \begin{cases} n, & \text{如 } r(A) = n \\ 1, & \text{如 } r(A) = n-1, \text{ 可知 } r(A) = 2. \\ 0, & \text{如 } r(A) < n-1 \end{cases}$$

$n-r(A) = 1$ 有解的结构 $\alpha + k\eta$.

$\xi_2 - \xi_1 = (4, -2, 2)^T$ 是 $Ax = 0$ 基础解系.

二、选择题

(1) D. (2) C. (3) B.

【提示】(1) 基础解系应当是 4 个线性无关的解, (C) 中向量个数不符, (A)(B) 均线性相关.

(2) 按解的结构, 通解形式为 $\alpha + k_1\eta_1 + k_2\eta_2$. (A) 不符合通解形式, 缺 $Ax = b$ 之特解; (B) 中 $\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3$ 不是导出组 $Ax = 0$ 的解; (D) 中 $\alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_2$ 线性相关, 不符合基础解系线性无关之要求; 注意, $\frac{1}{3}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$ 都是方程组 $Ax = b$ 的解.

(3) 因为 $\alpha_1 \neq \alpha_2$, 故 $\alpha_1 - \alpha_2 \neq 0$.

若 $\alpha_1 = -\alpha_2$, 则 (A) 不正确; 若 $\alpha_1 = 0$, 则 (C) 不正确. (D) 不是通解.

三、解答题

(1) 求与矩阵 A 可交换的矩阵, 即求满足 $AB = BA$ 的矩阵 B .

$$\begin{bmatrix} -3t+u & 2t \\ 3t & u \end{bmatrix} (t, u \text{ 为任意常数}). \quad \text{参看例 4.26.}$$

(2) A 是 3×4 矩阵, 说明 $Ax = 0$ 是 3 个方程 4 个未知数的齐次方程组, 基础解系含 2 个解向量表明 $4-r(A) = 2$, 得 $r(A) = 2$. 对 A 作初等行变换, 有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a & a \\ 1 & a & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a & a \\ 0 & 0 & -(a-1)^2 & -(a-1)^2 \end{bmatrix},$$

秩 $r(A) = 2 \Leftrightarrow a = 1$.

x_3, x_4 为自由变量, 令 $x_3 = 1, x_4 = 0$ 得 $\eta_1 = (1, -1, 1, 0)^T$.

令 $x_3 = 0, x_4 = 1$ 得 $\eta_2 = (0, -1, 0, 1)^T$.

方程组 $Ax = 0$ 的通解为 $k_1\eta_1 + k_2\eta_2, k_1, k_2$ 为任意常数.

(3) $a = 2$ 时, 方程组无解.

$a \neq 2$ 时, 方程组通解为 $\left(\frac{7a-10}{a-2}, \frac{2-2a}{a-2}, \frac{1}{a-2}, 0\right)^T + k(-3, 0, 1, 1)^T, k$ 为任意常数.

(4) 由解的结构知 $r(A) = 3$.

$$\text{又 } A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \text{ 有 } \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0,$$

即 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) < 3, r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3$.

$$\text{注意 } A \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = b.$$

第五章 特征值与特征向量

一、填空题

(1) -4. (2) -1. (3) 4, -2, -1, $\frac{1}{2}$. (4) 1 或 -2.

【提示】(1) 1 是 A 的特征值, 即 $|E - A| = 0$,

$$|E - A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -5 & 1-a & -3 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -5 & 1-a & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a + 4.$$

(2) 因为矩阵 A 只有一个线性无关的特征向量, 故 A 的特征值必是二重根.

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -a \\ -1 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 15 - a = (\lambda - 4)^2,$$

故 $a = -1$.

(3) 由 $|A| = \prod \lambda_i$ 及 $|A^*| = |A|^{n-1}$ 知

$$|A^*| = 1 \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot 8 = |A|^3 \Rightarrow |A| = 4.$$

又若 A 的特征值是 λ , 则 A^* 的特征值是 $\frac{|A|}{\lambda}$, 从而知 A 的特征值是 4, -2, -1, $\frac{1}{2}$.

(4) 用定义 $A\alpha = \lambda\alpha$ 有 $\begin{cases} 3+a = \lambda, \\ 2+2a = a\lambda. \end{cases}$

二、选择题

(1) A. (2) D. (3) C. (4) B.

【提示】(1) 易见 $|A| = 0, 0$ 必是 A 的特征值, 可排除(D).



由 $\sum \lambda_i = \sum a_{ii} = 5$, 可排除(C).

对于(A) 和(B) 可任选一个不同的特征值计算, 由于

$$|E - A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

知 $\lambda = 1$ 必是特征值, 因而应选(A).

(2) 注意定理 5.1 和解答题(3).

(3) 矩阵 A 的特征值是 1, 3, $A \sim \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 3 \end{bmatrix}$, 矩阵(A)(B)(D) 的特征值也均是 1, 3, 它

们都可相似对角化, 也就都与 A 相似.

矩阵(C) 的特征值是 4, 0, 它不与 A 相似. 因为相似的必要条件是相同的特征值.

(4)(A) 是实对称矩阵, (D) 有 3 个不同的特征值, 都可对角化. (B)(C) 特征值有重根, 用秩来判断.

三、解答题

(1) 设 $\lambda = 1$ 的特征向量是 $\beta = (x_1, x_2, x_3)^T$, 因为 A 是实对称矩阵, α 与 β 正交, 即 $\alpha^T \beta = x_1 + x_3 = 0$, 解得属于 $\lambda = 1$ 的特征向量 $\beta_1 = (0, 1, 0)^T$, $\beta_2 = (-1, 0, 1)^T$.

因为 A 是实对称矩阵, 必可相似对角化, 有

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{bmatrix}, \text{ 其中 } P = [\beta_1, \beta_2, \alpha],$$

那么

$$A^3 = (P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1}) = P\Lambda^3 P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & 0 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{9}{2} & 0 & -\frac{7}{2} \end{bmatrix}.$$

(2) A 是实对称矩阵, $\lambda = 2$ 是二重根, 故 $\lambda = 2$ 必有 2 个线性无关的特征向量, 从而秩 $r(2E - A) = 1$, 可求出 $a = 2$.

由 $\sum \lambda_i = \sum a_{ii}$ 可求出所有特征值.

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \text{ 则 } Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 8 \end{bmatrix}.$$

(3)【提示】 用反证法.

(4) 设 λ 是 A 的任一特征值, α 是属于 λ 的特征向量, 即



$$A\alpha = \lambda\alpha, \alpha \neq 0.$$

那么 $A^3\alpha = \lambda^3\alpha$. 又因 $A^3 = O$, 可知 $\lambda = 0$, 即矩阵 A 的特征值是 $\lambda = 0$ (n 个).

对于齐次线性方程组 $(0E - A)x = 0$, 由于

$$r(0E - A) = r(A) \geq 1,$$

那么 $n - r(0E - A) \leq n - 1$, 从而 $\lambda = 0$ 没有 n 个线性无关的特征向量.

第六章 二次型

一、填空题

- (1) 2. (2) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$. (3) $t > 2$. (4) $k > 0$.

【提示】(1) 二次型的秩也就是二次型矩阵的秩.

(2) 求二次型矩阵 A 的特征值, 可知正、负惯性指数, 即可知规范形.

或用配方法, 令 $\begin{cases} x_1 = y_1, \\ x_2 = y_2 + y_3, \\ x_3 = y_2 - y_3, \end{cases}$ 将二次型化成规范形.

(3) 用顺序主子式.

(4) 用特征值.

二、选择题

- (1) B. (2) D. (3) C.

【提示】(1) 求出 A 的特征值来看正、负惯性指数, 用配方法也可.

(2) 化二次型为标准形即可用正交变换法也可用配方法, 所用坐标变换不同, 标准形也可以不同, 故 (A)(C) 均不正确.

化二次型为规范形一般用配方法, 或者先正交变换法化为标准形后再用配方法化为规范形, 方法不同所用坐标变换也就可不同, 故 (B) 不正确.

规范形实际上由二次型的正、负惯性指数所确定, 而正、负惯性指数在坐标变换下是不变的 (惯性定理 6.4), 故仅 (D) 正确.

(3) (A) 是充分条件, 并不必要. 因为 P 是正交矩阵, 那么

$$P^{-1}AP = P^TAP = E,$$

表明 A 的特征值全是 1, 所以 A 正定. 但 A 正定时特征值可以不全是 1.

(B) 是必要条件, 并不充分, 因为 $x^T Ax$ 正定的充要条件是 $p = n$. 显然有 $q = 0$, 但 $q = 0$ 不能保证必有 $p = n$. 例如

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2,$$

$p = 2, q = 0$, 并不是 3 元正定二次型.

(D) 中矩阵 C 是否可逆不明确, 若 C 不可逆, 则

$$|A| = |C^T C| = |C|^2 = 0,$$

矩阵 A 不可能正定.

关于 (C) 的直接证明: 若 A 与 E 合同, 即对二次型 $x^T Ax$ 存在坐标变换 $x = Cy$, 使

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{E} \mathbf{y} = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2.$$

$\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 由 $\mathbf{C}$ 可逆及 $\mathbf{x} = \mathbf{C} \mathbf{y}$, 知 $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, 因此恒有 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{y} > 0$, 即二次型 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 正定.

反过来, 若经坐标变换 $\mathbf{x} = \mathbf{C} \mathbf{y}$ 化二次型为标准形

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2,$$

如果 $d_n \leq 0$, 那么取 $\mathbf{y}_0 = (0, 0, \cdots, 0, 1)^T$, 有 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{C} \mathbf{y}_0 \neq \mathbf{0}$, 而

$$\mathbf{x}_0^T \mathbf{A} \mathbf{x}_0 = d_n \leq 0,$$

与 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 正定相矛盾, 故必有 $d_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$. 于是再经坐标变换

$$z_1 = \sqrt{d_1} y_1, z_2 = \sqrt{d_2} y_2, \cdots, z_n = \sqrt{d_n} y_n,$$

有 $f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2$.

三、解答题

(1) $c = 2$.

$$\text{令 } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \text{ 经 } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix},$$

有 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y} = 6y_1^2 + 6y_2^2$.

(2) 由 $\mathbf{A}$ 正定知 $\mathbf{A}$ 是可逆的对称矩阵, 又 $\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}| \mathbf{A}^{-1}$, 故

$$(\mathbf{A}^*)^T = (|\mathbf{A}| \mathbf{A}^{-1})^T = |\mathbf{A}| (\mathbf{A}^{-1})^T = |\mathbf{A}| (\mathbf{A}^T)^{-1} = |\mathbf{A}| \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^*,$$

即 $\mathbf{A}^*$ 是对称矩阵.

若 λ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值, 则由 $\mathbf{A}$ 正定知 $\lambda > 0$, 且 $|\mathbf{A}| > 0$, 故 $\mathbf{A}^*$ 的特征值 $\frac{|\mathbf{A}|}{\lambda} > 0$.

$$(3) a = 2, \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

标准形是 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$ 说明 $\mathbf{A}$ 的特征值是 $\lambda_1, \lambda_2, 0$.

附录 45 分钟水平测试

自测(一)

1. 6.

如若求极大线性无关组应如何处理? 若向量组的秩是 3 情况又如何?



$$2. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

【注意】 $A^4 = O$.

$$\text{由 } E + A + A^2 + A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ 直接求逆.}$$

或者利用 $(E - A)(E + A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5) = E - A^6 = E$, 按定义法处理.

3. A.

利用 $\sum a_{ii} = \sum \lambda_i$ 可排除(B)与(D). 利用 $|A| = \prod \lambda_i$ 及 $|A| \neq 0$ 得到 $\lambda = 0$ 不是特征值, 从而排除(C), 或计算 $|2E - A|$ 是否等于 0 来判断 2 是不是 A 的特征值.

4. C.

因为 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, 知 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 线性无关, 那么其延伸组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 必线性无关.

5. $a = 1, b = 3, \beta = t\alpha_1 + (1-t)\alpha_2 + \alpha_3, t$ 为任意常数.

$$6. a = 6, A^{10} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3^{11} + 1 & 0 & 3^{10} - 1 \\ 2 \cdot 3^{11} - 6 & 4 & 2 \cdot 3^{10} - 2 \\ 3^{11} - 3 & 0 & 3^{10} + 3 \end{bmatrix}.$$

由 $|\lambda E - A| = (\lambda - 3)(\lambda + 1)^2$ 知 $\lambda = -1$ 必有两个线性无关的特征向量, 故秩 $r(-E - A) = 1$, 得 $a = 6$.

$\lambda = 3$ 的特征向量 $\alpha_1 = (1, 2, 1)^T$.

$\lambda = -1$ 的特征向量 $\alpha_2 = (0, 1, 0)^T, \alpha_3 = (1, 0, -3)^T$.

$$A^{10} = P\Lambda^{10}P^{-1}, P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3].$$

自测(二)

$$1. (2, 0, -24, 29)^T + k_1(1, 1, -5, 6)^T + k_2(2, -1, -40, 48)^T.$$

【注意】 $2\alpha_2 - \alpha_3 = \alpha_2 + (\alpha_2 - \alpha_3)$ 是方程组 $Ax = b$ 的解,

$(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_2 + \alpha_3) = \alpha_1 - \alpha_3$ 是齐次方程组 $Ax = 0$ 的解,

$2(2\alpha_2 - \alpha_3) - (\alpha_1 + \alpha_2) = 2(\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_2 - \alpha_1)$ 是 $Ax = 0$ 的解.

$$2. \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

由 $|A| = 2, AA^* = |A|E$, 用 A 左乘矩阵方程两端, 化简为



$$B(A - 2E) = 2A \Rightarrow B = 2A(A - 2E)^{-1}.$$

3. A.

$$\begin{aligned} r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) &\leq r(\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_{s-1}) \\ &= r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{s-1}) \leq s-1 < s. \end{aligned}$$

4. B.

A 的特征值 $0, 1, 2 \Rightarrow A^2$ 的特征值 $0, 1, 4 \Rightarrow A^3$ 的特征值 $0, 1, 8 \Rightarrow B$ 的特征值.

$$5. a = 4, b = 5, P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

由 $\sum a_{ii} = \sum b_{ii}$ 与 $|A| = 0$ 联立可求 a, b .

P 应按特征值是 $0, 5, 5$ 的顺序排列特征向量.

$$6. (1) f = 11y_1^2, P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{22}} \\ -\frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{22}} \\ \frac{3}{\sqrt{11}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{22}} \end{bmatrix}.$$

(2) f 不是正定二次型.

先写出二次型矩阵 A , 再求 A 的特征值与特征向量, 不要忘记 Schmidt 正交化.

因为特征值不是全大于 0 , 即正惯性指数小于 n , 所以 f 不是正定二次型.





金榜图书用户

专享福利活动

适用于：李永乐老师系列课程
微信公众号【顶尖考研】

赠送

¥100

代金券

¥200

代金券

¥500

代金券

¥1000

代金券

1.活动参与方式

关注公众号 金榜时代考研 ▶ 回复“22考研上岸”即可参与

2.活动时间

即日起——2021年11月24日

3.兑换方式

扫右侧二维码
进群咨询管理员
领取代金券



书名	出版时间	适用阶段
数学公式的奥秘	2020年3月	全程复习
数学复习全书·基础篇	2020年6月	夯实基础
数学基础过关660题	2020年8月	夯实基础
数学历年真题全精解析·基础篇	2020年10月	夯实基础
数学复习全书	2020年12月	全程复习
数学历年真题全精解析	2021年1月	全程复习
高等数学辅导讲义	2021年2月	强化提高
线性代数辅导讲义	2021年2月	强化提高
概率论与数理统计辅导讲义	2021年2月	强化提高
数学强化通关330题	2021年2月	强化提高
数学决胜冲刺6套卷	2021年10月	冲刺预测
数学临阵磨枪	2021年10月	冲刺预测



与名师一起互动交流
关注作者团队微博



解锁更多精彩内容
微信扫一扫



赠送本