

助力乡村学校音体美课堂行动”官方合作图书
研客及全国各大考研培训学校指定用书

金榜时代TM
GLIST 明德·弘毅·品质

榜 时 代 考 研 数 学 系 列

高等数学辅导讲义

学 霸 养 成 笔 记 与 题
高 分 提 档 严 选 题

2022

主 编 © 武忠祥 (西安交通大学)

讲义配套练习

检验自身学习水平

题目严扣知识点

可衍生各类型试题

重点题型详细解析

通透易懂

金榜时代考研数学名师团队



线代王·李永乐

@清华李永乐考研数学辅导团队

微信公众号: 永乐讲线代

B站: 李永乐考研团队



- 原清华大学应用数学系教授
- 北京高教学会数学研究会副理事长
- 广受学生信赖的“线代王”
- 曾任全国硕士研究生入学考试北京地区数学阅卷组组长
- 百万畅销书《线性代数辅导讲义》《数学复习全书》主编

李永乐老师作为全国著名的考研数学线性代数辅导专家，对考研数学出题形式、考试重点了如指掌，解题思路极其灵活，辅导针对性极强，效果优良，成绩显著，受到广大学员的交口称赞。其主编的《线性代数辅导讲义》《数学复习全书》《数学基础过关660题》等已被历届考生公认为复习首选辅导书。

前命题组组长·王式安

@清华李永乐考研数学辅导团队

B站: 李永乐考研团队



- 原北京理工大学研究生院院长、应用数学系主任、教授
- 享受国务院特殊津贴的数学专家
- 美国哥伦比亚大学、南佛罗里达大学、纽约大学等大学的客座教授
- 1987-2001年间担任全国硕士研究生入学考试数学命题组组长
- 百万畅销书《概率论与数理统计辅导讲义》《数学复习全书》主编

王式安老师凭借多年参加考研数学命题工作的深厚经验，对考研数学的命题思路和命题方向了如指掌。其主编的《概率论与数理统计辅导讲义》《数学复习全书》《数学基础过关660题》等已被历届考生公认为复习首选辅导书。

高数王者·武忠祥

@清华李永乐考研数学辅导团队



- 原西安交通大学（985、211、双一流高校）数学系教授
- 美国爱荷华大学（2019美国综合性大学TOP100）访问学者
- 百万畅销书《高等数学辅导讲义》《数学复习全书》主编
- 高教社《工科数学分析基础》《高等数学基础》等教材主编

考研高数“三巨头”——刘喜波（高数波叔）

@清华李永乐考研数学辅导团队



- 中国科学院数学博士
- 北方工业大学理学院统计学系系主任、教授

长期从事本科生的教育教学工作，曾荣获学校师德先进个人、十佳班导师等称号，是北京市中青年骨干教师、北京市公共数学优秀教学团队主要成员，主编教材1部、教学参考书3部、教育教学论文集1部、译著2部，参编教学参考书10余部。

考研高数“三巨头”——宋浩（考研数学阅卷人）

@宋浩老师

B站: 宋浩老师官方



- 山东大学数学学院本科研究生、中国科学院博士
- 英国 Queen Mary University of London 访问学者
- 副教授，考研数学阅卷人

宋老师上课风趣幽默、由浅入深，能把复杂抽象的数学讲得诙谐有趣，上传至B站的数学视频《线性代数》《微积分》《概率论与数理统计》《高等数学》帮助了全国无数的大学生，总播放量近2000万次。宋老师讲考研数学，延续其风趣幽默的特点，喜欢从多种角度找寻思路，善于总结知识点，把晦涩难懂的考研知识讲的生动而有趣。

考研高数“三巨头”——姜晓千（全能名师）

@晓千老师

微信公众号: 晓千老师



- 中国人民大学金融数学博士
- 全国各大省市考研辅导机构全程主讲
- 新浪、搜狐、腾讯、网易、中国教育在线等各大门户网站特邀访谈嘉宾

姜老师对考研数学历年真题有着极其深入的研究，授课风格高屋建瓴、激情洋溢、亲和幽默，深受考研学子喜爱。

第一章 函数 极限 连续

学霸养成之刷题计划

	开始时间	结束时间	难度超过当前水平的题目占比	完成打√
第一刷				☐
第二刷				☐
第三刷				☐

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

1. 函数 $f(x) = x \tan x e^{\sin x}$ 是

- (A) 单调函数. (B) 周期函数.
(C) 偶函数. (D) 无界函数.

2. 下列四个函数中

- (1) $x \sin \frac{1}{x}$. (2) $\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$. (3) $\frac{\sin x}{x}$. (4) $x \sin x$.

在区间 $(0, +\infty)$ 上有界的共有

- (A) 1 个. (B) 2 个. (C) 3 个. (D) 4 个.

3. 设函数 $f(x)$ 连续, 则下列函数中, 必为偶函数的是

- (A) $\int_0^x f(t^2) dt$. (B) $\int_0^x f^2(t) dt$.
(C) $\int_0^x t[f(t) - f(-t)] dt$. (D) $\int_0^x t[f(t) + f(-t)] dt$.

4. 设有数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$, 以下结论正确的是

- (A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$.
(B) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \infty$, 则必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$.
(C) 若 $x_n y_n$ 有界, 则必有 x_n 与 y_n 都有界.
(D) 若 $x_n y_n$ 无界, 则必有 x_n 无界或 y_n 无界.

5. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \infty$, 则下列结论错误的是

- (A) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$ 至少有一个成立.
(B) $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 中至少有一个为无界变量.



(C) 若 $\{x_n\}$ 是无穷小量, 则 $\{y_n\}$ 必为无界变量.

(D) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \neq \infty$, 则 $\{y_n\}$ 必为无穷大量.

6. 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 对任意的正整数 n 满足 $a_n \leq b_n \leq a_{n+1}$, 则

(A) 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

(B) 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均发散, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$.

(C) 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 具有相同的敛散性.

(D) 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 具有不同的敛散性.

7. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$, 则下列命题中正确的个数为

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$.

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}} = e$.

(3) 若 $f'(x_0) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \varphi(x)) - f(x_0)}{\varphi(x)} = A$.

(4) 若 $\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(\varphi(x)) = A$.

(A) 0 个.

(B) 2 个.

(C) 3 个.

(D) 4 个.

8. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\sin \frac{1}{x}} - 1}{(1 + \frac{1}{x})^\alpha - (1 + \frac{1}{x})} = A \neq 0$ 的充要条件是

(A) $\alpha > 1$.

(B) $\alpha \neq 1$.

(C) $\alpha > 0$.

(D) 与 α 无关.

9. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) + xf(x)}{x^2} = 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+f(x)}{x} =$

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

10. 设 $f(x)$ 连续, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 2$, 且当 $x \rightarrow 0$ 时 $\int_0^{\sin^2 x} f(t) dt$ 是 x 的 n 阶无穷小, 则 n 等于

(A) 3.

(B) 4.

(C) 5.

(D) 6.

11. 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = \arctan x - \sin ax$ 与 $g(x) = bx \ln \sqrt{a+x^2}$ 是等价无穷小, 则

(A) $a = b = 1$.

(B) $a = 2, b = \frac{1}{3}$.

(C) $a = 1, b = \frac{1}{2}$.

(D) $a = 1, b = -\frac{1}{3}$.

12. 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小, 则

(A) $k = 1, c = 4$.

(B) $k = 1, c = -4$.

(C) $k = 3, c = 4$.

(D) $k = 3, c = -4$.



13. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 下列无穷小量中最高阶的无穷小量是

(A) $\sqrt{1+x^4} - e^{\frac{x^2}{2}}$.

(B) $\tan x - \sin x$.

(C) $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$.

(D) $\int_0^{1-\cos x} \sin^{\frac{3}{2}} t dt$.

14. 函数 $f(x) = \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e) \tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的第一类间断点是 $x =$

(A) 0.

(B) 1.

(C) $-\frac{\pi}{2}$.

(D) $\frac{\pi}{2}$.

15. 函数 $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

16. 函数 $f(x) = \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

17. 已知函数 $f(x) = \frac{(x^2 + a^2)(x-1)}{e^{\frac{1}{x}} + b}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有一个可去间断点和一个跳跃间断点, 则

(A) $a = 1, b = -1$.

(B) $a = 0, b = 1$.

(C) $a \neq 0, b = -e$.

(D) $a = 0, b = -e$.

18. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2e^{(n+1)x} + 1}{e^{nx} + x^n + 1}$, 则 $f(x)$

(A) 仅有一个可去间断点.

(B) 仅有一个跳跃间断点.

(C) 有两个可去间断点.

(D) 有两个跳跃间断点.

19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{(\arcsin x)^3} =$ _____.

20. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^\alpha}{\sqrt{1+x} \arctan x - \sqrt{\cos x}} = \frac{8}{3}$, 则 $\alpha =$ _____.

21. 已知曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线过点 $(1, 2)$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos x + \int_0^x f(t) dt \right)^{\frac{1}{x^2}} =$ _____.

22. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right] =$ _____.

23. 设 n 为正整数, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^n}{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)} \right]^x =$ _____.



24. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

25. 设 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\hspace{2cm}}.$

26. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{\sqrt{n(1+2+\cdots+n)}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

27. 确定常数 a, b , 使 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x) = e^x - \frac{1+ax}{1+bx}$ 为 x 的三阶无穷小.

28. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小, 求 n 与 a 的值.

29. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \sin 2x^2)^{\frac{1}{x^2}} - e^2}{x^n} = a (a \neq 0)$, 求 a 和 n 的值.

30. 确定常数 a, b, c 的值, 使 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt} = c (c \neq 0).$

31. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x^2)} - \frac{1}{\sin^2 x} \right).$

32. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - (\sin x)^x}{x^2 \ln(1+x)}.$

33. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2) - \ln(1+\sin^2 x)}{x \sin^3 x}.$

34. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}.$

35. 求下列极限

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x - 1}};$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{1}{x}};$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \tan \frac{1}{n} \right)^{n^2};$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n} \right).$

36. 求下列极限

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}};$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{\frac{1}{x}} - 1)^{\frac{1}{\ln x}}.$

37. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x^2} + \frac{f(x)}{x} \right) = 2$, 试求 $f(0)$, $f'(0)$ 及

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x) + e^x}.$



38. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^6 + n}} + \frac{2^2}{\sqrt{n^6 + 2n}} + \cdots + \frac{n^2}{\sqrt{n^6 + n^2}} \right)$.

39. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 - (n-1)^2}} \right)$.

40. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n+1}{1^2 + n^2} + \frac{n+\frac{1}{2}}{2^2 + n^2} + \cdots + \frac{n+\frac{1}{n}}{n^2 + n^2} \right]$.

41. 求函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x|x+1|}{\ln|x|}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 的间断点并指出类型.

42. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 试确定常数 a 和 b .

43. 设 $f(x)$ 是区间 $[0, +\infty)$ 上单调减少且非负连续函数, $a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx$ ($n = 1, 2, \cdots$), 证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

44. 设 $x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{3 + 2x_n}, n = 1, 2, \cdots$, 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛并求它的极限.

45. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1} (n = 1, 2, \cdots)$, 试证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$.

46. 设函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小值;

(2) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求此极限.

47. 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = \ln(1 + x_n) (n = 1, 2, \cdots)$,

证明: (1) $\{x_n\}$ 收敛并求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$;

(2) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n}}$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}} \right)$.

48. 设 $f(x)$ 在 $[0, 2a] (a > 0)$ 上连续, 且 $f(0) = f(2a)$, 求证存在 $\xi \in [0, a]$, 使 $f(\xi) = f(\xi + a)$.

49. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $x_i \in [a, b], t_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$, 且 $\sum_{i=1}^n t_i = 1$, 试证至少存在一点 $\xi \in [a, b]$ 使 $f(\xi) = t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \cdots + t_n f(x_n)$.



学霸养成之总结

学霸人人羡慕,成为学霸付出的努力是基本的条件,你要比别人会学,合理利用时间,懂得做题,懂得总结。

一刷总结

二刷总结

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

三刷总结

学霸养成之纠错与反思

➡ 错题序号	➡ 错题原因分析与正确方法
	① 知识点没掌握 ② 没见过此类题型 ③ 计算错误 ④ 粗心(看错题、漏条件) ⑤ 推导不严谨
	微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66) 微信公众号【顶尖考研】 (ID: djky66)



→ 错题序号	→ 错题原因分析与正确方法

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

第二章 一元函数微分学

学霸养成之刷题计划

	开始时间	结束时间	难度超过当前 水平的题目占比	完成打 ✓
第一刷				☐
第二刷				☐
第三刷				☐

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

1. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充分条件是

- (A) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{2x}$ 存在. (B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\ln(1+x^2)) - f(0)}{x^2}$ 存在.
(C) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{\sqrt[3]{x}}$ 存在. (D) $\lim_{x \rightarrow \infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)$ 存在.

2. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 则在点 $x=0$ 处函数 $f(x)$

- (A) 不连续. (B) 连续但不可导.
(C) 可导但导数不连续. (D) 可导且导数连续.

3. 设函数 $y = f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2x}{1 - \cos x} = 1$, 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处

- (A) 不可导. (B) 可导且 $f'(0) = 0$.
(C) 可导且 $f'(0) = -2$. (D) 可微且 $dy|_{x=0} = 2dx$.

4. 若 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右导数都存在, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处

- (A) 可导. (B) 连续. (C) 不可导. (D) 不一定连续.

5. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + e^x]^{\frac{1}{x}} = 2$, 则 $f'(0)$

- (A) 不存在. (B) 等于 $\ln 2$. (C) 等于 2. (D) 等于 $\ln 2 - 1$.

6. 设 $f(x)$ 有连续一阶导数, $f(0) = 0$, 若当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^{f(x)} f(t) dt$ 与 $4x^2$ 为等价无穷小, 则 $f'(0)$ 等于

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) $\frac{1}{2}$.



7. 函数 $f(x) = |x - x^2|(e^x - 1) + \sin|x - 2|$ 不可导点的个数为

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

8. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^n} + e^{nx}$ 不可导点的个数为

- (A) 0 个. (B) 1 个. (C) 2 个. (D) 3 个.

9. 已知 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{f(x)} = 1$, 则下列结论

- ① $f'(0)$ 存在, 且 $f'(0) = 0$. ② $f''(0)$ 存在, 且 $f''(0) = 2$.
③ $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极小值. ④ $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内连续.

中正确的个数为

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

10. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其导函数的图形

如图 1 所示, 则 $f(x)$ 有

- (A) 一个极小值点和两个极大值点.
(B) 两个极小值点和一个极大值点.
(C) 两个极小值点和两个极大值点.
(D) 三个极小值点和一个极大值点.

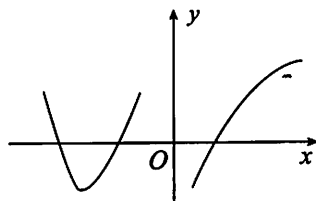


图 1

11. 设函数 $f(x) = |x^2(x+1)|$ 的驻点个数为 m , 极值点的个数为 n , 则

- (A) $m = 1, n = 1$. (B) $m = 1, n = 2$.
(C) $m = 2, n = 3$. (D) $m = 3, n = 2$.

12. 函数 $f(x) = \int_{-\pi}^x (t - x \sin t)^2 dt$ 的极值点为

- (A) $x = 2$ 为极小值点. (B) $x = 2$ 为极大值点.
(C) $x = 1$ 为极小值点. (D) $x = 1$ 为极大值点.

13. 设函数 $f(x)$ 有二阶导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - a}{\ln(1+x)} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x) - 1}{e^{x^2} - 1} = 2021$, 则

- (A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.
(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.
(C) $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.
(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

14. 设函数 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f(0) = 0, f'(0) > 0, f''(0) < 0$, 则

- (A) $x = 0$ 是 $|f(x)|$ 的极值点, 但 $(0, f(0))$ 不是曲线 $y = |f(x)|$ 的拐点.
(B) $x = 0$ 不是 $|f(x)|$ 的极值点, 但 $(0, f(0))$ 是曲线 $y = |f(x)|$ 的拐点.
(C) $x = 0$ 是 $|f(x)|$ 的极值点, 且 $(0, f(0))$ 是曲线 $y = |f(x)|$ 的拐点.
(D) $x = 0$ 不是 $|f(x)|$ 的极值点, 且 $(0, f(0))$ 不是曲线 $y = |f(x)|$ 的拐点.



15. 设 $f(x)$ 满足 $f'(0) = 0, f'(x) + [f(x)]^3 = x^2$, 则

- (A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.
 (B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.
 (C) $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.
 (D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

16. 曲线 $y = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ 的渐近线条数为

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

17. 曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 渐近线的条数为

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

18. 设曲线 $y = f(x)$ 与 $y = x^2 - x$ 在点 $(1, 0)$ 处有公共切线, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{n}{n+2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

19. 已知 $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$, 则 $f'(1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

20. 曲线 $\begin{cases} x = \int_0^{1-t} e^{-u^2} du \\ y = t^2 \ln(2-t^2) \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

21. 对数螺线 $r = e^\theta$ 在点 $(r, \theta) = \left(e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

22. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \ln \sqrt{x}, & x \geq 1 \\ 2x-1, & x < 1 \end{cases}$, $y = f(f(x))$, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=e} = \underline{\hspace{2cm}}$.

23. 设 $y = f(x)$ 的反函数是 $x = \varphi(y)$, 且 $f(x) = \int_1^{2x} e^{t^2} dt + 1$, 则 $\varphi''(1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

24. 函数 $y = x \ln(1-2x)$ 在 $x = 0$ 处的 $n (n \geq 2)$ 阶导数 $y^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

25. 设 $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$, 则 $f^{(n)}(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

26. 函数 $f(x) = \ln|(x-1)(x-2)\cdots(x-n)|$ 的驻点个数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

27. 已知方程 $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + a = 0$ 有两个重根, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

28. 已知方程 $3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + a = 0$ 有四个不相同的实根, 则 a 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

29. 设 $f(x)$ 为连续函数, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \ln(1+x)}{x^2} = 2$, $F(x) = \int_0^x t f(x-t) dt$, 当 $x \rightarrow 0$ 时 $F(x) -$

$\frac{1}{2}x^2$ 与 bx^k 为等价无穷小, 其中常数 $b \neq 0, k$ 为某正整数. 求 k 与 b 的值及 $f(0), f'(0)$.



30. 已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数, 且 $f'(0) = 1$, 函数 $y = y(x)$ 由方程 $y - xe^{y-1} = 1$ 所确定.

设 $z = f(\ln y - \sin x)$, 求 $\left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=0}$, $\left. \frac{d^2 z}{dx^2} \right|_{x=0}$.

31. 设 $f(t)$ 二阶可导, 且 $f''(t) \neq 0$, $\begin{cases} y = tf'(t) - f(t) \\ x = f'(t) \end{cases}$. 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 及 $\frac{d^2 x}{dy^2}$.

32. 设 $y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x = t^3 + 2t + 1 \\ t - \int_1^{y+t} e^{-u^2} du = 0 \end{cases}$ 确定, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0}$, $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0}$.

33. 设函数 $\varphi(x) = \int_0^{\sin x} f(tx^2) dt$, 其中 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(0) = 2$.

(1) 求 $\varphi'(x)$;

(2) 讨论 $\varphi'(x)$ 的连续性.

34. 设 $f(x)$ 连续, $\varphi(x) = \int_0^1 f(xt) dt$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ (A 为常数). 求 $\varphi'(x)$, 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

35. 设函数由方程 $2y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 = 1$ 所确定, 试求 $y = y(x)$ 的驻点, 并判别它是否为极值点.

36. 已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 4t - t^2 \end{cases} (t \geq 0)$.

(1) 讨论 L 的凹凸性;

(2) 过点 $(-1, 0)$ 引 L 的切线, 求切点 (x_0, y_0) , 并写出切线的方程;

(3) 求此切线与 L (对应于 $x \leq x_0$ 的部分) 及 x 轴所围成的平面图形的面积.

37. 试确定方程 $x^3 - x = \sin x$ 的实根个数.

38. 试确定方程 $\int_0^x e^{-t^2} dt = x^3 - x$ 的实根个数.

39. 试确定方程 $e^x = ax^2$ ($a > 0$) 的实根个数.

40. 试确定方程 $\ln x = kx$ 的实根个数.

41. 试证: 当 $x \geq 0$ 时, $x \leq e^x \ln(1+x)$.

42. 设 $x > 0$, 证明: $2\sin x + e^x - e^{-x} > 4x$.

43. 设 $x > 0$, 常数 $a > e$. 证明 $(a+x)^a < a^{a+x}$.

44. 设 $e < a < b$, 证明: $a^2 < ab \frac{\ln a}{\ln b} < b^2$.

45. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, $f(0) = f(1) = -1$, $\int_0^1 f(x) dx > \frac{1}{2}$,



试证至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使 $f'(\xi) + g'(\xi)[f(\xi) - \xi] = 1$.

46. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $\int_0^1 f(x) dx = 3 \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx$, 试证存在 $\xi, \eta \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = g'(\eta)[f(\eta) - f(\xi)]$.

47. 设 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上二阶可导, 且 $|f(x)| \leq 1$, 又 $[f(0)]^2 + [f'(0)]^2 = 4$. 证明在 $(-2, 2)$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f''(\xi) + f(\xi) = 0$.

48. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 且 $f'(x) > 0$. 若极限

$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在, 证明:

(1) 在 (a, b) 内 $f(x) > 0$;

(2) 在 (a, b) 内存在点 ξ , 使 $\frac{b^2 - a^2}{\int_a^b f(x) dx} = \frac{2\xi}{f(\xi)}$;

(3) 在 (a, b) 内存在与 (2) 中 ξ 相异的点 η , 使 $f'(\eta)(b^2 - a^2) = \frac{2\xi}{\xi - a} \int_a^b f(x) dx$.

49. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $g(a) = g(b) = 1, f'(x) \neq 0$. 试证存在 $\xi, \eta \in (a, b)$, 使得 $\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = e^{\xi-\eta}[g(\xi) + g'(\xi)]$.

50. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 在开区间 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = \frac{1}{3}$.

证明: 存在 $\xi \in (0, \frac{1}{2}), \eta \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使得 $f'(\xi) + f'(\eta) = \xi^2 + \eta^2$.

51. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = f(1)$. 试证存在 ξ 和 η . 满足 $0 < \xi < \eta < 1$, 使 $f'(\xi) + f'(\eta) = 0$.

52. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 0$, 若 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值为 $M > 0$, 证明存在两个不同的点 $x_1, x_2 \in (0, 1)$, 使得

$$\frac{1}{f'(x_1)} - \frac{1}{f'(x_2)} = \frac{n}{M}$$

其中 n 是大于 1 的整数.

53. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, $f(0) = f(1) = 0, \max_{0 \leq x \leq 1} f(x) = 2$. 试证存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $f''(\xi) \leq -16$.

54. 设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上二阶可导, 且 $|f(x)| \leq 1, |f''(x)| \leq 1$, 证明:

$$|f'(x)| \leq 2 \quad (0 \leq x \leq 2)$$



学霸养成之总结

学霸人人羡慕,成为学霸付出的努力是基本的条件,你要比别人会学,合理利用时间,懂得做题,懂得总结。

一刷总结

二刷总结

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

三刷总结



学霸养成之纠错与反思

→ 错题序号	→ 错题原因分析与正确方法
	① 知识点没掌握 ② 没见过此类题型 ③ 计算错误 ④ 粗心(看错题、漏条件) ⑤ 推导不严谨
	微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)



➡ 错题序号	➡ 错题原因分析与正确方法

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



第三章 一元函数积分学

学霸养成之刷题计划

	开始时间	结束时间	难度超过当前水平的题目占比	完成打√
第一刷				☐
第二刷				☐
第三刷				☐

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

1. 若 $f(x)$ 的导函数是 $\sin x$, 则 $f(x)$ 有一个原函数为

- (A) $1 + \sin x$. (B) $1 - \sin x$. (C) $1 + \cos x$. (D) $1 - \cos x$.

2. 设 $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \geq 0 \\ \sin x, & x < 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 则在 $(-\infty + \infty)$ 上

- (A) $f(x)$ 与 $g(x)$ 都存在原函数.
 (B) $f(x)$ 与 $g(x)$ 都不存在原函数.
 (C) $f(x)$ 存在原函数, $g(x)$ 不存在原函数.
 (D) $f(x)$ 不存在原函数, $g(x)$ 存在原函数.

3. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. 设 $F(x) = \int_1^x f(t) dt (0 \leq x \leq 2)$, 则 $F(x)$ 为

- (A) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. (B) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$.
 (C) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & 0 \leq x < 1 \\ x-1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. (D) $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}, & 0 \leq x < 1 \\ x-1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$.

4. 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ x^2 + a, & x > 0 \end{cases}$, 则 $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ 在 $x = 0$ 处

- (A) 极限存在但不连续. (B) 连续但不可导.
 (C) 可导. (D) 是否可导与 a 的取值有关.



5. 设在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) > 0, f'(x) < 0, f''(x) > 0$. 令 $S_1 = \int_a^b f(x) dx$,

$$S_2 = f(b)(b-a), S_3 = \frac{1}{2}[f(a) + f(b)](b-a), \text{ 则}$$

- (A) $S_1 < S_2 < S_3$. (B) $S_2 < S_1 < S_3$.
(C) $S_3 < S_1 < S_2$. (D) $S_2 < S_3 < S_1$.

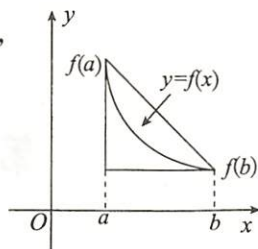


图 1

6. 设 $f(x)$ 连续, 则 $\frac{d}{dx} \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt =$

- (A) $xf(x^2)$. (B) $-xf(x^2)$.
(C) $2xf(x^2)$. (D) $-2xf(x^2)$.

7. 设 $f(x)$ 连续, 且存在常数 a , 满足 $5x^3 + 40 = \int_a^x f(t) dt$. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $axf(x)$ 与 $c(\tan x - x)^k$ 是等价无穷小, 则

- (A) $k = 3, c = 4$. (B) $k = 2, c = -4$.
(C) $k = 1, c = -30$. (D) $k = 1, c = -90$.

8. 设 $a_n = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{n}{n+1}} x^{n-1} \sqrt{1+x^n} dx$, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$ 等于

- (A) $(1+e)^{\frac{3}{2}} + 1$. (B) $(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}} - 1$.
(C) $(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}} + 1$. (D) $(1+e)^{\frac{3}{2}} - 1$.

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right)^2}$ 等于

- (A) $\int_1^2 \ln^2 x dx$. (B) $2 \int_1^2 \ln x dx$.
(C) $2 \int_1^2 \ln(1+x) dx$. (D) $\int_1^2 \ln^2(1+x) dx$.

10. 设 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x) dx, I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin x) dx$, 则

- (A) $I_1 < 1 < I_2$. (B) $1 < I_1 < I_2$.
(C) $I_2 < 1 < I_1$. (D) $I_1 < I_2 < 1$.

11. 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx, J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cot x dx, K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx$, 则 I, J, K 的大小关系为

- (A) $I < J < K$. (B) $I < K < J$.
(C) $J < I < K$. (D) $K < J < I$.

12. 设 $I_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2} \sin x dx (k = 1, 2, 3)$, 则有

- (A) $I_1 < I_2 < I_3$. (B) $I_3 < I_2 < I_1$.
(C) $I_2 < I_3 < I_1$. (D) $I_2 < I_1 < I_3$.



13. 曲线 $y = \sin^{\frac{3}{2}} x (0 \leq x \leq \pi)$ 与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为

- (A) $\frac{4}{3}$. (B) $\frac{4}{3}\pi$. (C) $\frac{4}{3}\pi^2$. (D) $\frac{2}{3}\pi$.

14. $\int \frac{x+5}{x^2-6x+13} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

15. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

16. $\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

17. 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $\int_0^{x^3-1} f(t) dt = x-1$, 则 $f(7) = \underline{\hspace{2cm}}.$

18. 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(t) dt$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

19. $\int_0^1 \frac{x dx}{(2-x^2) \sqrt{1-x^2}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

20. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

21. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos^2 x + \int_0^x e^{-t^2} dt] \sin^2 x dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

22. $\int_0^{\pi} x \sqrt{\cos^2 x - \cos^4 x} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

23. 设 $a > 0$, 则 $\int_0^{2a} x \sqrt{2ax - x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

24. 设 $f(x) = x - \int_0^{\pi} f(x) \cos x dx$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

25. 设 $f(x)$ 为连续函数, 且 $\int_0^x f(t) dt = 3x^3 - x \int_{-1}^1 f(t) dt$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

26. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} [\sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2-2^2} + \cdots + \sqrt{n^2-(n-1)^2}] = \underline{\hspace{2cm}}.$

27. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{n}} + \sqrt{1 + \cos \frac{2\pi}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \cos \frac{n\pi}{n}} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

28. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{-x} \sin nx dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

29. 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $\int_0^x f(t-x) dt = (1+x^2)^x - 1$, 则 $\int_{-1}^1 f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$



30. 若 $\int_0^x f(t) dt = xe^{-x}$, 则 $\int_1^{+\infty} \frac{f(\ln x)}{x} dx =$ _____.

31. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}} =$ _____.

32. 函数 $y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ 在区间 $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ 上的平均值为 _____.

33. 由曲线 $y = x + \frac{1}{x}$, $x = 2$ 及 $y = 2$ 所围图形的面积 $S =$ _____.

34. 设曲线的极坐标方程为 $r = e^{a\theta}$ ($a > 0$), 则该曲线上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积为 _____.

35. (数学三不要求) 曲线 $y = \int_0^x \tan t dt$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$) 的弧长 $s =$ _____.

36. (数学三不要求) 一根长为 1 的细棒位于 x 轴的区间 $[0, 1]$ 上, 若其线密度 $\rho = -x^2 + 2x + 1$, 则该细棒的质心坐标 $\bar{x} =$ _____.

37. 计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$, 其中 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$.

38. 计算积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}$.

39. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \left[\int_0^{u^2} \arctan(1+t) dt \right] du}{x(1-\cos x)}$.

40. 设 $f(x)$ 为非负连续函数, 且 $f(x) \int_0^x f(x-t) dt = \sin^4 x$, 求 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的平均值.

41. 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 的某邻域内可导, 且 $f(a) \neq 0$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{1}{(x-a)f(a)} - \frac{1}{\int_a^x f(t) dt} \right]$.

42. 函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0) = 0$, 且其反函数为 $g(x)$, 若 $\int_x^{x+f(x)} g(t-x) dt = x^2 \ln(1+x)$, 求 $f(x)$.

43. 设函数 $S(x) = \int_0^x |\cos t| dt$,

(1) 当 n 为正整数, 且 $n\pi \leq x < (n+1)\pi$ 时, 证明 $2n \leq S(x) < 2(n+1)$;

(2) 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{x}$.



44. (1) 比较 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| dt$ ($n = 1, 2, \dots$) 的大小, 说明理由;

(2) 记 $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ ($n = 1, 2, \dots$), 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

45. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且满足

$$f(1) = k \int_0^{\frac{1}{k}} x e^{1-x} f(x) dx \quad (k > 1)$$

证明至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = (1 - \xi^{-1})f(\xi)$.

46. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续, 在 $(0, 3)$ 内存在二阶导数, 且

$$2f(0) = \int_0^2 f(x) dx = f(2) + f(3)$$

(1) 证明存在 $\eta \in (0, 2)$, 使得 $f(\eta) = f(0)$;

(2) 证明存在 $\xi \in (0, 3)$, 使得 $f''(\xi) = 0$.

47. 设 $f(x)$ 在 $[0, a]$ ($a > 0$) 上连续, 且 $\int_0^a f(x) dx = 0$.

试证存在 $\xi \in (0, a)$, 使得 $f(a - \xi) = -f(\xi)$.

48. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 证明存在 $\xi \in (0, 1)$, 使 $\int_0^\xi f(t) dt = (1 - \xi)f(\xi)$;

若又设 $f(x) > 0$ 且单调减少, 则这种 ξ 是唯一的.

49. 设 $y = f(x)$ 是区间 $[0, 1]$ 上的任一非负连续函数.

(1) 试证存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使得在区间 $[0, x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积, 等于在区间 $[x_0, 1]$ 上以 $y = f(x)$ 为曲边的曲边梯形面积;

(2) 又设 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f'(x) > -\frac{2f(x)}{x}$, 证明(1)中的 x_0 是唯一的.

50. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续一阶导数, 且 $f(0) = 0$, 试证至少存在一点 $\xi \in [0, 1]$, 使

$$f'(\xi) = 2 \int_0^1 f(x) dx.$$

51. 设函数 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上连续, 在 $x = 0$ 处可导, 且 $f'(0) \neq 0$.

(1) 证明: 对任意 $x \in (0, l)$, 至少存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$\int_0^x f(t) dt + \int_0^{-x} f(t) dt = x[f(\theta x) - f(-\theta x)]$$

(2) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \theta$.

52. 设 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上具有二阶连续导数, 且 $f''(x) \geq 0$, 证明:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx \geq 0$$

53. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上可导, 且 $|f'(x)| < M$, 证明:

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n}$$



54. 设 $f(x)$ 满足 $f(1) = 1, f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)} (x \geq 1)$, 试证 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在且不超过 $1 + \frac{\pi}{4}$.

55. (数学三不要求) 一容器的内侧是由图中曲线绕 y 轴旋转一周而成的曲面, 该曲线由 $x^2 + y^2 = 2y (y \geq \frac{1}{2})$ 与 $x^2 + y^2 = 1 (y \leq \frac{1}{2})$ 连接而成.

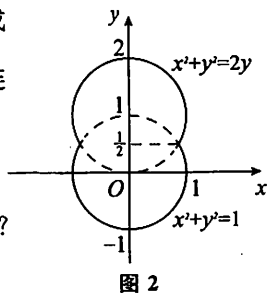


图 2

(1) 求容器的容积;

(2) 若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出, 至少需要做多少功?

(长度单位: m, 重力加速度为 gm/s^2 , 水的密度为 $10^3 kg/m^3$).

56. (数学三不要求) 设曲线 L 的方程为 $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x (1 \leq x \leq e)$.

(1) 求 L 的弧长;

(2) 设 D 是由曲线 L , 直线 $x = 1, x = e$ 及 x 轴所围平面图形. 求 D 的形心的横坐标.

57. 求曲线 $y = 3 - |x^2 - 1|$ 与 x 轴围成的封闭图形绕直线 $y = 3$ 旋转所得的旋转体体积.

58. 设有抛物线 $\Gamma: y = a - bx^2 (a > 0, b > 0)$, 试确定常数 a, b 的值, 使得

(1) Γ 与直线 $y = x + 1$ 相切;

(2) Γ 与 x 轴所围图形绕 y 轴旋转所得旋转体体积最大.

59. 设曲线 $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = x$ 及 $y = 2$ 所围区域为 D ,

(1) 求区域 D 分别绕 x 轴和 y 轴旋转所得旋转体的体积;

(2) 求区域 D 分别绕 $x = 2$ 和 $y = 2$ 旋转所得旋转体的体积.

60. 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = x$ 所围区域 D 绕直线 $y = x$ 旋转一周所得旋转体的体积.

61. 设平面域 D 由曲线 $r = (1 + \cos \theta)$ 所围成, 试求

(1) 区域 D 的面积;

(2) 区域 D 绕极轴旋转一周所得旋转体的体积.



学霸养成之总结

学霸人人羡慕,成为学霸付出的努力是基本的条件,你要比别人会学,合理利用时间,懂得做题,懂得总结。

一刷总结

二刷总结

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

三刷总结



第四章 常微分方程

学霸养成之刷题计划				
	开始时间	结束时间	难度超过当前水平的题目占比	完成打 $\checkmark$
第一刷				☐
第二刷				☐
第三刷				☐

- 已知函数 $y = y(x)$ 在任意点处的增量 $\Delta y = \frac{y\Delta x}{1+x^2} + \alpha$, 且当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, α 是 Δx 的高阶无穷小, $y(0) = \pi$, 则 $y(1)$ 等于
 (A) 2π . (B) π . (C) $e^{\frac{\pi}{4}}$. (D) $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$.
- 方程 $y'' + 2y' + y = 3xe^{-x}$ 的特解形式为
 (A) Axe^{-x} . (B) $(Ax + B)e^{-x}$.
 (C) $(Ax + B)xe^{-x}$. (D) $(Ax + B)x^2e^{-x}$.
- 具有特解 $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = 2xe^{-x}$, $y_3 = 3e^x$ 的三阶常系数齐次线性微分方程是
 (A) $y''' - y'' - y' + y = 0$. (B) $y''' + y'' - y' - y = 0$.
 (C) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$. (D) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$.
- 微分方程 $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(1 + \cos 2x)$ 的特解可设为 $y^* =$
 (A) $Ae^{2x} + e^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$. (B) $Axe^{2x} + e^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$.
 (C) $Ae^{2x} + xe^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$. (D) $Axe^{2x} + xe^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$.
- 函数 $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + xe^x$ 满足的一个微分方程是
 (A) $y'' - y' - 2y = 3xe^x$. (B) $y'' - y' - 2y = 3e^x$.
 (C) $y'' + y' - 2y = 3xe^x$. (D) $y'' + y' - 2y = 3e^x$.
- 在下列微分方程中, 以 $y = C_1e^x + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x$ (C_1, C_2, C_3 为任意常数) 为通解的是
 (A) $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$. (B) $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$.
 (C) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$. (D) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$.
- 微分方程 $y'' - \lambda^2 y = e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}$ ($\lambda > 0$) 的特解形式为
 (A) $a(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})$. (B) $ax(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})$. (C) $x(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$. (D) $x^2(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$.
- 方程 $x \ln x dy + (y - \ln x) dx = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=e} = 1$ 的特解为 _____.



9. 微分方程 $(y+x^3)dx-2xdy=0$ 满足 $y|_{x=1}=\frac{6}{5}$ 的特解为_____.

10. 方程 $(1+e^{-\frac{x}{y}})ydx+(y-x)dy=0$ 的通解为_____.

11. 已知方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$, 则方程 $y''+ay'+by=e^x$ 满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=\frac{3}{2}$ 的特解为_____.

12. 方程 $y''+y=x+\cos x$ 的通解为_____.

13. 设函数 $y(x)$ 满足 $y''+(x-1)y'+x^2y=e^x$, 且 $y'(0)=1$. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x)-x}{x^2}=a$, 则 $a=$ _____.

14. 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''-4y'+3y=2e^{2x}$ 的通解为_____.

15. 三阶常系数线性齐次微分方程 $y'''-2y''+y'-2y=0$ 的通解为_____.

16. (仅数学三要求) 差分方程 $2y_{t+1}+10y_t-5t=0$ 的通解为_____.

17. (仅数学三要求) 差分方程 $y_{t+1}-2y_t=4(3+t)2^t$ 的通解为_____.

18. 设函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $y''-3y'+2y=2e^x$, 且其图形在点 $(0,1)$ 处的切线与曲线 $y=x^2-x+1$ 在该点的切线重合, 求函数 $y=y(x)$.

19. 已知 $y_1=3, y_2=3+x^2, y_3=3+e^x$ 是某二阶线性非齐次方程的三个特解, 求该微分方程及通解.

20. 求微分方程 $y''+(x+e^{2y})y'^3=0$ 的通解.

21. 设函数 $f(x)$ 具有连续的一阶导数, 且满足

$$f(x)=\int_0^x(x^2-t^2)f'(t)dt+x^2$$

求 $f(x)$ 的表达式.

22. 设 $f(x)$ 连续, 且满足 $\int_0^x f(t)dt=x+\int_0^x tf(x-t)dt$, 求 $f(x)$.

23. 设 $f(x)$ 为连续函数, 且满足

$$f(x)=e^x+e^x\int_0^x[f(t)]^2dt$$

试求 $f(x)$.

24. 函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0)=1$, 且满足等式

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt=0$$

(1) 求导数 $f'(x)$;

(2) 证明: 当 $x \geq 0$ 时, 不等式 $e^{-x} \leq f(x) \leq 1$ 成立.

25. 设 $f(x)$ 连续, 且 $f(t)=\iint_{x^2+y^2 \leq t^2}(x^2+y^2)f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy+t^4(t \geq 0)$, 求 $f(x)$.



26. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, $f'(0) = 2$, 对任意的 $x, y, f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$, 求 $f(x)$.
27. 设 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上有连续二阶导数, $f(1) = 0, f'(1) = 1$, 且 $z = (x^2 + y^2)f(x^2 + y^2)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, 求 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最大值.
28. 设函数 $u(x, y)$ 的全微分 $du = [e^x + f''(x)]y dx + f(x)dy$, 其中 f 具有二阶连续的导数, 且 $f(0) = 4, f'(0) = 3$, 求 $f(x)$ 及 $u(x, y)$.
29. 求过原点的曲线 $y = y(x)$, 使曲线上任一点 P 的法线段 PQ (Q 是过 P 点作曲线法线与 x 轴的交点) 的中点位于抛物线 $2y^2 = x$ 上.
30. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内大于零, 且满足微分方程 $xf'(x) = f(x) + \frac{3}{2}ax^2$. 曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x = 1, y = 0$ 所围成区域 D 的面积为 2, 求:
(1) $f(x)$;
(2) 使 D 绕 x 轴旋转一周而成旋转体体积为最小的 a .
31. 设曲线 L 位于 xOy 平面的第一象限内, L 上任一点 M 处的切线与 y 轴总相交, 交点记为 A . 已知 $|\overline{MA}| = |\overline{OA}|$, 且 L 过点 $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, 求 L 的方程.
32. (数学三不要求) 在上半平面一条向上凹的曲线, 其上任一点 $P(x, y)$ 处的曲率等于此曲线在该点的法线段 PQ 长度的倒数 (Q 是法线与 x 轴的交点), 且曲线在点 $(1, 1)$ 处的切线与 x 轴平行.
33. 设 L 是一条平面曲线, 其上任一点 $P(x, y) (x > 0)$ 到坐标原点的距离, 恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距, 且 L 经过点 $(\frac{1}{2}, 0)$.
(1) 试求曲线 L 的方程;
(2) 设 L 位于第一象限部分的一条切线, 使该切线与 L 以及两坐标轴所围图形的面积最小.
34. 设 $y = y(x)$ 是区间 $(-\pi, \pi)$ 内过点 $(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{\sqrt{2}})$ 的光滑曲线. 当 $-\pi < x < 0$ 时, 曲线上任一点处的法线都过原点; 当 $0 \leq x < \pi$ 时, 函数 $y(x)$ 满足 $y'' + y + x = 0$. 求函数 $y(x)$ 的表达式.
35. 已知曲线 $L: \begin{cases} x = f(t), \\ y = \cos t, \end{cases} (0 \leq t < \frac{\pi}{2})$, 其中函数 $f(t)$ 具有连续导数, 且 $f(0) = 0, f'(t) > 0 (0 < t < \frac{\pi}{2})$. 若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1, 求函数 $f(t)$ 的表达式, 并求以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积.
36. 在 xOy 坐标平面上, 连续曲线 L 过点 $M(1, 0)$, 其上任一点 $P(x, y) (x \neq 0)$ 处的切线斜率与直线 OP 的斜率之差等于 ax (常数 $a > 0$).
(1) 求 L 的方程;
(2) 当 L 与直线 $y = ax$ 所围成平面图形的面积为 $\frac{8}{3}$ 时, 确定 a 的值.



学霸养成之总结

学霸人人羡慕,成为学霸付出的努力是基本的条件,你要比别人会学,合理利用时间,懂得做题,懂得总结。

一刷总结

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

二刷总结

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

三刷总结



第五章 多元函数微分学

学霸养成之刷题计划

	开始时间	结束时间	难度超过当前水平的题目占比	完成打 ☒
第一刷				☐
第二刷				☐
第三刷				☐

- 已知 $f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^4}}$, 则
 (A) $f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)$ 都存在. (B) $f'_x(0, 0)$ 不存在, $f'_y(0, 0)$ 存在.
 (C) $f'_x(0, 0)$ 存在, $f'_y(0, 0)$ 不存在. (D) $f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)$ 都不存在.
- 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处有 $f'_x(x_0, y_0) = a, f'_y(x_0, y_0) = b$, 则下列结论正确的是
 (A) $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ 存在, 但 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处不一定连续.
 (B) $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.
 (C) $dz|_{(x_0, y_0)} = adx + bdy$.
 (D) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y_0)$ 及 $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x_0, y)$ 都存在且相等.
- 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处
 (A) 两个偏导数不存在. (B) 两个偏导数存在但不可微.
 (C) 偏导数连续. (D) 可微但偏导数不连续.
- 设 $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处
 (A) 两个偏导数不存在. (B) 两个偏导数存在但不可微.
 (C) 偏导数连续. (D) 可微但偏导数不连续.
- 设函数 $f(x, y)$ 可微, 且对任意 x, y 都有 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} > 0, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} < 0$, 则使不等式 $f(x_1, y_1) < f(x_2, y_2)$ 成立的一个充分条件是



- (A) $x_1 > x_2, y_1 < y_2$. (B) $x_1 > x_2, y_1 > y_2$.
 (C) $x_1 < x_2, y_1 < y_2$. (D) $x_1 < x_2, y_1 > y_2$.
6. 设可微函数 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial x} > 1, \frac{\partial f}{\partial y} < -1, f(0, 0) = 0$, 则下列结论正确的是
 (A) $f(1, 1) > 1$. (B) $f(-1, 1) > -2$. (C) $f(-1, -1) < 0$. (D) $f(1, -1) > 2$.
7. 设函数 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial x} < 0, \frac{\partial f}{\partial y} > 1$, 则下列结论正确的是
 (A) $f(0, 0) < f(1, 0)$. (B) $f(x, 2) < f(x, 1)$.
 (C) $f(-1, 1) > f(0, 0) + 1$. (D) $f(1, -1) > f(0, 0) + 1$.
8. 设函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某邻域内有定义, 且 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - (x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1$, 则
 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处
 (A) 连续. (B) 两个偏导数都不存在.
 (C) 两个偏导数存在但不可微. (D) 可微.
9. 已知 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点连续, 且 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) + 2x - y + x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$, 则下列结论不
 正确的是
 (A) $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点可微. (B) $f'_x(0, 0) = -2$.
 (C) $f'_y(0, 0) = 1$. (D) $f'_x(0, 0)$ 和 $f'_y(0, 0)$ 都不一定存在.
10. 设满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$, 且 $f(x, 0) = 1, f'_y(x, 0) = x$, 则 $f(x, y)$ 等于
 (A) $1 - xy + y^2$. (B) $1 + xy + y^2$. (C) $1 - x^2y + y^2$. (D) $1 + x^2y + y^2$.
11. 已知函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 某邻域内连续, 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - (x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \alpha > 0$, 则
 (A) 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的驻点但不是极值点.
 (B) 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极大值点但不是驻点.
 (C) 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值点但不是驻点.
 (D) 根据所给条件无法判断点 $(0, 0)$ 是否为 $f(x, y)$ 的极值点.
12. 设函数 $z = f(x, y)$ 的全微分为 $dz = xdx + ydy$, 则点 $(0, 0)$
 (A) 不是 $f(x, y)$ 的连续点. (B) 不是 $f(x, y)$ 的极值点.
 (C) 是 $f(x, y)$ 的极大值点. (D) 是 $f(x, y)$ 的极小值点.
13. 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f(x) > 0, f'(0) = 0$, 则函数 $z = f(x) \ln f(y)$ 在点
 $(0, 0)$ 处取得极小值的一个充分条件是
 (A) $f(0) > 1, f''(0) > 0$. (B) $f(0) > 1, f''(0) < 0$.
 (C) $f(0) < 1, f''(0) > 0$. (D) $f(0) < 1, f''(0) < 0$.
14. 设函数 $f(x), g(x)$ 均有二阶连续导数, 满足 $f(0) > 0, g(0) < 0$, 且 $f'(0) = g'(0) = 0$,
 则函数 $z = f(x)g(y)$ 在点 $(0, 0)$ 处取得极小值的一个充分条件是



(A) $f''(0) < 0, g''(0) > 0$.

(B) $f''(0) < 0, g''(0) < 0$.

(C) $f''(0) > 0, g''(0) > 0$.

(D) $f''(0) > 0, g''(0) < 0$.

15. 设 $F(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $F(x_0, y_0) = 0, F'_x(x_0, y_0) = 0, F'_y(x_0, y_0) > 0$. 若一元函数 $y = y(x)$ 是由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的在点 (x_0, y_0) 附近的隐函数, 则 x_0 是函数 $y = y(x)$ 的极小值点的一个充分条件是

(A) $F''_{xx}(x_0, y_0) > 0$.

(B) $F''_{xx}(x_0, y_0) < 0$.

(C) $F''_{yy}(x_0, y_0) > 0$.

(D) $F''_{yy}(x_0, y_0) < 0$.

16. 设函数 $u(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 在 D 的内部具有 2 阶连续偏导数, 且满足

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq 0$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 则

(A) $u(x, y)$ 的最大值和最小值都在 D 的边界上取得.

(B) $u(x, y)$ 的最大值和最小值都在 D 的内部取得.

(C) $u(x, y)$ 的最大值在 D 的内部取得, 最小值都在 D 的边界上取得.

(D) $u(x, y)$ 的最小值在 D 的内部取得, 最大值都在 D 的边界上取得.

17. 设 $z = \frac{x \cos(y-1) - (y-1) \cos x}{1 + \sin x + \sin(y-1)}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(0,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

18. 设 $z = \arctan(xy^2)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \Big|_{(0,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

19. 设 $z = (x + e^y)^x$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,0)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

20. 设函数 $z = \left(1 + \frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$, 则 $dz \Big|_{(1,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

21. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $(z + y)^x = xy$ 确定, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,2)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

22. 设 $u = x^2 e^y z^3$, 其中 $z = z(x, y)$ 由方程 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ 所确定, 则 $du \Big|_{x=-1, y=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.

23. 设 $z = f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y$, 且 $f(x, 0) = x, f(0, y) = y^2$, 则 $f(x, y) = \underline{\hspace{2cm}}$.

24. 设 $u(x, y)$ 有连续二阶偏导数, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, 且 $u(x, 2x) = x, u_1(x, 2x) = x^2$, 则 $u_{11}(x, 2x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

25. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $F(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}) = 0$ 确定, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

26. 已知 $df(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)} = 2dx + dy$, 则 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2t, y_0) - f(x_0, y_0 - t)}{t} = \underline{\hspace{2cm}}$.

27. 已知函数 $z = f(x, y)$ 连续且满足 $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - x + 2y + 2}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = 0$, 则



$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t, 0) - f(1, 2t)}{t} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

28. 设 $z = \int_0^1 |xy - t| f(t) dt, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, 其中 $f(x)$ 为连续函数, 则 $z_{xx} + z_{yy} = \underline{\hspace{2cm}}.$

29. 设 $u = f(x, y, z), z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, 其中 f 有二阶连续偏导数.

30. 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $(1, 1)$ 处可微. 且 $f(1, 1) = 1, \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(1,1)} = 2, \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(1,1)} = 3, \varphi(x) = f[x, f(x, x)]$, 求 $\frac{d}{dx} \varphi^3(x) \Big|_{x=1}.$

31. 设 $u = f(x, y, z)$ 有连续的一阶偏导数, 又函数 $y = y(x)$ 及 $z = z(x)$ 分别由 $e^{xy} - xy = 2$ 和 $e^x = \int_0^{x-z} \frac{\sin t}{t} dt$ 确定. 求 $\frac{du}{dx}.$

32. 设变换 $\begin{cases} u = x - 2y, \\ v = x + ay. \end{cases} (a \neq -2)$, 可把方程 $6 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 简化为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$, 求常数 a .

33. 设函数 $f(u)$ 有连续一阶导数, $f(0) = 2$, 且 $z = xf(\frac{y}{x}) + yf(\frac{y}{x})$ 满足 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x}$ ($x \neq 0$), 求 z 的表达式.

34. 设函数 $f(x, y)$ 有连续二阶偏导数, 满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, 且在极坐标系下可表示成 $f(x, y) = g(r)$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 求 $f(x, y)$.

35. 设 $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 具有二阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + z = x^2 + y^2$, 试求函数 z 的表达式.

36. 求函数 $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x + y)^2$ 的极值.

37. 求二元函数 $f(x, y) = x^2(2 + y^2) + y \ln y$ 的极值.

38. 设函数 $z = f(xy, yg(x))$, 其中 f 函数具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导且在 $x = 1$ 处取得极值 $g(1) = 1$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1)}.$

39. 已知函数 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, $f(1, 1) = 2$ 是 $f(u, v)$ 的极值, $z = f(x + y, f(x, y))$. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1)}.$

40. 求由方程 $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$ 所确定的函数 $z = f(x, y)$ 极值点.



41. 设 $f(x, y)$ 有二阶连续偏导数, $g(x, y) = f(e^{xy}, x^2 + y^2)$, 且 $f(x, y) = 1 - x - y + o(\sqrt{(x-1)^2 + y^2})$, 证明 $g(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 取得极值, 判断此极值是极大值还是极小值, 并求出此极值.
42. 求函数 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2y^2$ 在区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ 上的最大值和最小值.
43. 设函数 $z = z(x, y)$ 的微分 $dz = (2x + 12y)dx + (12x + 4y)dy$, 且 $z(0, 0) = 0$, 求函数 $z = z(x, y)$ 在 $4x^2 + y^2 \leq 25$ 上的最大值.
44. 求函数 $u = xy + 2yz$ 在约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ 下的最大值和最小值.
45. 求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在约束条件 $z = x^2 + y^2$ 和 $x + y + z = 4$ 下的最大值与最小值.
46. 在椭圆 $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$ 的第一象限部分上求一点, 使该点的切线与两坐标轴所围成三角形面积最小, 并求面积的最小值.
47. (仅数学一要求) 已知曲线 $C: \begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0 \\ x + y + 3z = 5 \end{cases}$. 求 C 上距离 xOy 面最远的点和最近的点.
48. (仅数学一要求) 求椭球面 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$ 被平面 $x + y + z = 0$ 截得的椭圆长半轴与短半轴之长.
49. 已知 $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, x, y > 0$. 求证: $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.
50. (仅数学三要求) 某企业为生产甲、乙两种型号的产品投入的固定成本为 10000(万元). 设该企业生产甲、乙两种产品的产量分别为 x (件) 和 y (件), 且这两种产品的边际成本分别为 $20 + \frac{x}{2}$ (万元/件) 与 $6 + y$ (万元/件).
- (1) 求生产甲、乙两种产品的总成本函数 $C(x, y)$ (万元);
 - (2) 当总产量为 50 件时, 甲、乙两种产品的产量各为多少时可使总成本最小? 求最小成本;
 - (3) 求总产量为 50 件且总成本最小时甲产品的边际成本, 并解释其经济意义.
51. (仅数学三要求) 某厂生产两种产品, 当产量分别为 x 和 y (吨) 时, 总效益函数为 $R(x, y) = 27x + 42y - x^2 - 2xy - 4y^2$. 总成本函数为 $C(x, y) = 36 + 12x + 8y$ (万元), 生产甲种产品每吨需支付排污费 1 万元, 生产乙种产品每吨需支付排污费 2 万元.
- (1) 在不限排污支出的情况下, 两种产品的产量各为多少时总利润最大? 最大利润是多少?
 - (2) 若限制排污总支出为 6 万元, 两种产品产量各为多少时总利润最大? 最大利润为多少?
52. 设 $f(x, y)$ 在圆域 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上有连续一阶偏导数, 且 $|f(x, y)| \leq 1$. 求证在单位圆内至少有一点 (x_0, y_0) 可使

$$\left[\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right]^2 < 16$$



学霸养成之总结

学霸人人羡慕,成为学霸付出的努力是基本的条件,你要比别人会学,合理利用时间,懂得做题,懂得总结。

◆ 一刷总结

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

◆ 二刷总结

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

◆ 三刷总结



[illegible]

第六章 二重积分

学霸养成之刷题计划				
	开始时间	结束时间	难度超过当前水平的题目占比	完成打√
第一刷				☐
第二刷				☐
第三刷				☐

1. (1) 设函数 $f(x, y)$ 连续, 则 $\int_1^2 dx \int_x^2 f(x, y) dy + \int_1^2 dy \int_y^{4-y} f(x, y) dx =$

(A) $\int_1^2 dx \int_1^{4-x} f(x, y) dy.$

(B) $\int_1^2 dx \int_x^{4-x} f(x, y) dy.$

(C) $\int_1^2 dy \int_1^{4-y} f(x, y) dx.$

(D) $\int_1^2 dy \int_y^2 f(x, y) dx.$

(2) 设函数 $f(x, y)$ 连续, 则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy$ 等于

(A) $\int_0^1 dy \int_{\pi+\arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx.$

(B) $\int_0^1 dy \int_{\pi-\arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx.$

(C) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y} f(x, y) dx.$

(D) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y} f(x, y) dx.$

2. (1) 累次积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$ 等于

(A) $\int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) dx.$

(B) $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) dx.$

(C) $\int_0^1 dx \int_x^2 f(x, y) dy.$

(D) $\int_0^1 dx \int_x^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$

(2) 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$ 等于

(A) $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) dx.$

(B) $\int_0^1 dy \int_y^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$



$$(C) \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$(D) \int_0^{\sqrt{2}} dr \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta + \int_{\sqrt{2}}^2 dr \int_{\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta.$$

3. 设 $f(x, y)$ 为连续函数, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ 等于

$$(A) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$(B) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$(C) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$(D) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

4. 设 $f(x, y)$ 是连续函数, 则 $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx =$

$$(A) \int_0^1 dx \int_0^{x-1} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$(B) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x, y) dy.$$

$$(C) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

$$(D) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

5. 设区域 D 由曲线 $y = \sin x, x = \pm \frac{\pi}{2}, y = 1$ 围成, 则 $\iint_D (xy^5 - 1) dx dy =$

$$(A) \pi.$$

$$(B) 2.$$

$$(C) -2.$$

$$(D) -\pi.$$

6. 设 $f(x, y)$ 连续, 且 $f(x, y) = xy + \iint_D f(x, y) dx dy$, 其中 D 由 $y = 0, y = x^2, x = 1$ 所围成, 则 $f(x, y)$ 等于

$$(A) xy.$$

$$(B) 2xy.$$

$$(C) xy + \frac{1}{8}.$$

$$(D) xy + 1.$$

7. 设 $0 < a < 1$, 区域 D 由 x 轴, y 轴, 直线 $x + y = a$ 及 $x + y = 1$ 所围成,

$$I = \iint_D \sin^2(x + y) d\sigma, J = \iint_D \ln^3(x + y) d\sigma, K = \iint_D (x + y) d\sigma, \text{ 则}$$

$$(A) I < K < J.$$

$$(B) K < J < I.$$

$$(C) I < J < K.$$

$$(D) J < I < K.$$

8. 设 $I = \iint_{|x|+|y| \leq 1} (x^2 + y^3) d\sigma, J = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^4 - y^4) d\sigma, K = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^3 - y^2) d\sigma$, 则

$$(A) I < J < K.$$

$$(B) I < K < J.$$

$$(C) J < I < K.$$

$$(D) K < J < I.$$



9. 设 $I_1 = \iint_D \frac{x+y}{4} d\sigma$, $I_2 = \iint_D \sqrt{\frac{x+y}{4}} d\sigma$, $I_3 = \iint_D \sqrt[3]{\frac{x+y}{4}} d\sigma$. 其中 $D: (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2$. 则

- (A) $I_1 < I_2 < I_3$. (B) $I_2 < I_3 < I_1$.
(C) $I_1 < I_3 < I_2$. (D) $I_3 < I_2 < I_1$.

10. 如图 1 正方形 $\{(x, y) | |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ 被其对角线划分为四个

区域 $D_k (k = 1, 2, 3, 4)$, $I_k = \iint_{D_k} y \cos x dx dy$, 则 $\max_{1 \leq k \leq 4} \{I_k\} =$

- (A) I_1 . (B) I_2 .
(C) I_3 . (D) I_4 .

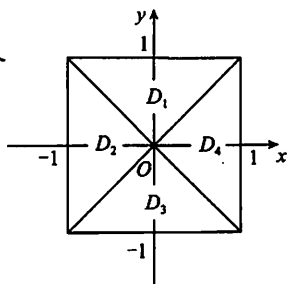


图 1

11. 设 D_k 是圆域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 在第 k 象限的部分, 记 I_k

$= \iint_{D_k} (y-x) dx dy (k = 1, 2, 3, 4)$, 则

- (A) $I_1 > 0$. (B) $I_2 > 0$.
(C) $I_3 > 0$. (D) $I_4 > 0$.

12. 已知 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^t dx \int_t^x e^{-y^2} dy}{t^\alpha} = \beta \neq 0$, 则

- (A) $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{2}$. (B) $\alpha = 2, \beta = \frac{1}{2}$.
(C) $\alpha = 2, \beta = -\frac{1}{2}$. (D) $\alpha = 3, \beta = -\frac{1}{2}$.

13. 交换积分次序 $\int_0^4 dx \int_{\sqrt{4-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x, y) dy =$ _____.

14. 交换积分次序 $\int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy =$ _____.

15. 积分 $\int_0^1 dx \int_x^1 \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}} dy =$ _____.

16. 积分 $\int_0^1 dy \int_{\frac{y}{2}}^y \cos x^2 dx + \int_1^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^1 \cos x^2 dx =$ _____.

17. $\int_0^1 dy \int_y^1 \sqrt{x^2 - y^2} dx =$ _____.

18. $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} [(x+1)^2 + 2y^2] dx dy =$ _____.

19. 设 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 则 $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} =$ _____.



20. 积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} [(r\cos\theta - 1)^3 + r\sin\theta] r dr = \underline{\hspace{2cm}}.$

21. 极限 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin^2 t} \int_0^t dx \int_x^t e^{-(x-y)^2} dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

22. 设 $f(t) = \int_0^t dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy$, 则函数 $f(t)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

23. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\int_1^{\frac{1}{n}} e^{-y^2} dy + \int_1^{\frac{2}{n}} e^{-y^2} dy + \cdots + \int_1^{\frac{n-1}{n}} e^{-y^2} dy \right].$

24. 求极限 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^6} \int_0^t dx \int_x^t \sin(xy)^2 dy.$

25. 计算 $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{x}{2}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} e^{\frac{x}{2}} dx.$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

26. 计算二重积分 $\iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$

27. 计算二重积分 $\iint_D \max\{xy, 1\} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}.$

28. 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}, x \geq 0, y \geq 0\}$, $[1 + x^2 + y^2]$ 表示不超过 $1 + x^2 + y^2$ 的最大整数, 计算二重积分 $\iint_D xy[1 + x^2 + y^2] dx dy.$

29. 计算二重积分 $\iint_D (x - y) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 2, y \geq x\}.$

30. 计算二重积分 $I = \iint_D r^2 \sin\theta \sqrt{1 - r^2 \cos 2\theta} dr d\theta$, 其中

$$D = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \sec\theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$

31. 计算二重积分 $\iint_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}} d\sigma$, 其中 D 是由曲线 $y = -a + \sqrt{a^2 - x^2} (a > 0)$ 和直线 $y = -x$ 围成的区域.

32. 计算二重积分 $\iint_D (x + y)^3 dx dy$, 其中 D 由曲线 $x = \sqrt{1 + y^2}$ 与直线 $x + \sqrt{2}y = 0$ 及 $x - \sqrt{2}y = 0$ 围成.

33. 计算 $\iint_D (x + y^2) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x + 2y\}.$



34. 求 $\iint_D (\sqrt{x^2 + y^2} + y) d\sigma$, 其中 D 是由圆 $x^2 + y^2 = 4$ 和 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 所围成的平面区域(如图 2).

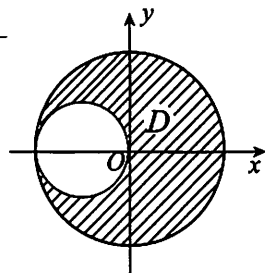


图 2

35. 计算二重积分 $\iint_D e^x xy dx dy$, 其中 D 是以曲线 $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 及 y 轴为边界的无界区域.

36. 计算积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} [\sin\theta + \cos\theta \sqrt{1 + r^2 \sin^2\theta}] r^2 dr$.

37. 计算积分 $\int_{-1}^1 dx \int_{|x|}^{1+\sqrt{1-x^2}} (x^3 + 1) \sqrt{x^2 + y^2} dy$.

38. 设 $f(t) = \int_0^t dx \int_x^t y^2 e^{-y^2} dy$, 试证对一切的 $t \in (-\infty, +\infty)$, 有 $0 \leq f(t) < \frac{1}{2}$.

39. 设 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$.

(1) 计算 $b = \iint_D |xy - 1| d\sigma$;

(2) 设 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 且 $\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$, $\iint_D xy f(x, y) d\sigma = 1$.

证明: 存在 $(\xi, \eta) \in D$ 使 $|f(\xi, \eta)| \geq \frac{1}{b}$.

40. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且同时单调增, 证明:

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \geq \left(\int_0^1 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 g(x)dx\right)$$



学霸养成之总结

学霸人人羡慕,成为学霸付出的努力是基本的条件,你要比别人会学,合理利用时间,懂得做题,懂得总结。

◆ 一刷总结

◆ 二刷总结

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

◆ 三刷总结



第七章 无穷级数

学霸养成之刷题计划				
	开始时间	结束时间	难度超过当前水平的题目占比	完成打 $\checkmark$
第一刷				☐
第二刷				☐
第三刷				☐

1. 下列命题正确的是

- (A) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $a_n \geq \frac{1}{n} (n > N)$.
- (B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.
- (C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 至少有一个发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ 发散.
- (D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 都收敛.

2. 设有命题

- (1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} a_n$ 收敛.
- (2) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 (n = 1, 2, \dots)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.
- (3) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l \neq 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散.
- (4) 若 $a_n \leq b_n \leq c_n (n = 1, 2, \dots)$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 都收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

则上述命题中正确的个数为

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $a_n = \sqrt{n} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x) dx (n = 1, 2, \dots)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

- (A) 条件收敛. (B) 绝对收敛.



(C) 发散.

(D) 敛散性与 $f(x)$ 的增减性有关.4. 设常数 $p > 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(e^n + p)}$

(A) 绝对收敛.

(B) 条件收敛.

(C) 发散.

(D) 敛散性与 p 取值有关.

5. 下列命题正确的是

(A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散可推得 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.(B) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛可推得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.(C) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 至少有一个收敛.(D) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 至少有一个发散.6. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则下列结论不正确的是(A) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$ 必收敛.(B) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1})$ 必收敛.(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} - a_{2n+1})$ 必收敛.(D) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 - a_{n+1}^2)$ 必收敛.7. 设 $a_n > 0 (n = 1, 2, 3, \dots)$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 常数 $\lambda \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(n \tan \frac{\lambda}{n} \right) a_{2n}$$

(A) 发散.

(B) 条件收敛.

(C) 绝对收敛.

(D) 收敛性与 λ 有关.8. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则必收敛的级数为

$$(A) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}.$$

$$(B) \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2.$$

$$(C) \sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n}).$$

$$(D) \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1}).$$

9. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数

$$(A) \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ 收敛}.$$

$$(B) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ 收敛}.$$

$$(C) \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} \text{ 收敛}.$$

$$(D) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2} \text{ 收敛}.$$



10. 设有两个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则

- (A) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛. (B) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散.
 (C) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛. (D) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散.

11. 设 $a_n > 0, n = 1, 2, \dots$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛, 则下列结论正确的是

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 发散. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 发散.
 (C) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ 收敛. (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n})$ 收敛.

12. 设 $\{u_n\}$ 是数列, 则下列命题正确的是

- (A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛.
 (B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.
 (C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛.
 (D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

13. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n} \sin \frac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛, 则

- (A) $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$. (B) $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$.
 (C) $1 < \alpha \leq \frac{3}{2}$. (D) $\frac{3}{2} < \alpha < 2$.

14. 设 $\{a_n\}$ 为正项数列, 下列选项正确的是

- (A) 若 $a_n > a_{n+1}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛.
 (B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛, 则 $a_n > a_{n+1}$.
 (C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则存在常数 $p > 1$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n$ 存在.
 (D) 若存在常数 $p > 1$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n$ 存在, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

15. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n$ 在 $x = 1$ 处收敛, 则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

- (A) 绝对收敛. (B) 条件收敛. (C) 发散. (D) 敛散性不定.



16. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x = -2$ 处条件收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2(x-a)^n$ 在 $x = \ln \frac{1}{2}$ 处

(A) 绝对收敛.

(B) 条件收敛.

(C) 必发散.

(D) 敛散性由 a 确定.

17. 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ($n = 1, 2, \dots$) 无界, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$

的收敛域为

(A) $(-1, 1]$.

(B) $[-1, 1)$.

(C) $[0, 2)$.

(D) $(0, 2]$.

18. 设 $a_n > 0$, $p > 1$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p(e^{\frac{1}{n}} - 1)a_n = 1$. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 p 的取值范围为_____.

19. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 3, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为_____.

20. 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+2)^n$ 在 $x = 0$ 处收敛, 在 $x = -4$ 处发散, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$ 的收敛域为_____.

21. 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \ln n = 1$, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n} (x+1)^n$ 的收敛区间为_____.

22. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 条件收敛, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n} (x+1)^n$ 的收敛区间为_____.

23. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = 2$ 时条件收敛, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}$ 的收敛域为_____.

24. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n[(-3)^n + 2^n]}$ 的收敛域为_____.

25. 判定下列级数敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n n^a}$ ($a > 0$).

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4} dx}$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3[\sqrt{2} + (-1)^n]^n}{3^n}$.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$.

26. 已知 $y = y(x)$ 满足 $y' = x + y$, 且 $y(0) = 1$, 试讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[y\left(\frac{1}{n}\right) - 1 - \frac{1}{n} \right]$ 的敛散性.

27. 将 $f(x) = \frac{x}{x^2 + 7x + 6}$ 在 $x = 4$ 处展开为幂级数.



28. 将 $\ln \frac{1}{2+2x+x^2}$ 在 $x=-1$ 处展开为幂级数.

29. 将 $\arctan \frac{4+x^2}{4-x^2}$ 展开为 x 的幂级数.

30. 求幂级数 $x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} x^{2n+1}$ 的收敛域及和函数.

31. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$ 的收敛域与和函数.

32. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{n(2n-1)}$ 的收敛域及和函数 $S(x)$.

33. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}$ 的和.

34. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{x} \arctan x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$. 试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}$

的和.

35. 设银行存款的年利率为 $r = 0.05$, 并依年复利计算. 某基金会希望通过存款 A 万元实现第一年提取 19 万元, 第二年提取 28 万元, $\dots$, 第 n 年提取 $(10+9n)$ 万元, 并能按此规律一直提取下去, 问 A 至少应为多少万元?

36. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内收敛, 其和函数 $y(x)$ 满足

$$y'' - 2xy' - 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$$

(1) 证明 $a_{n+2} = \frac{2}{n+1} a_n, n = 1, 2, \dots$.

(2) 求 $y(x)$ 的表达式.

37. 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件: $a_0 = 3, a_1 = 1, a_{n-2} - n(n-1)a_n = 0 (n \geq 2)$, $S(x)$ 是幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ 的和函数.}$$

(1) 证明: $S''(x) - S(x) = 0$;

(2) 求 $S(x)$ 的表达式.

38. 已知 $a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{2}$, 且当 $n \geq 2$, 有 $na_n = [\frac{1}{2} + (n-1)]a_{n-1}$. 证明当 $|x| < 1$ 时, 幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ 收敛, 并求其和函数.}$$



39. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足 $a_0 = 2, na_n = a_{n-1} + n - 1, n = 1, 2, 3, \dots$, 求此幂级数的和函数 $S(x)$.

40. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 某邻域内有连续一阶导数, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$. 试证: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$ 条件收敛.

————— 以下题目数学三不要求 —————

41. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $\int_0^{+\infty} f^2(x) dx$ 收敛, 令 $a_n = \int_0^1 f(nx) dx$, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{n^a}$ ($a > 0$) 收敛.

42. 设 $a_n > 0, b_n > 0, (n = 1, 2, \dots)$, 且满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, n = 1, 2, \dots$.

试证: (1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

43. 设数列 $\{u_n\}$, 其中 $u_1 = 3, u_2 = 5$, 当 $n \geq 3$ 时 $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$ 收敛.

44. 设 $x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx (-\pi \leq x \leq \pi)$, 则 $a_2 =$ _____.

45. 设 $f(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|, b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx (n = 1, 2, \dots)$. 令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$, 则

$$S\left(-\frac{9}{4}\right) =$$

(A) $\frac{3}{4}$.

(B) $\frac{1}{4}$.

(C) $-\frac{1}{4}$.

(D) $-\frac{3}{4}$.

46. 将 $f(x) = x - 1 (0 \leq x \leq 2)$ 展开成周期为 4 的余弦级数.

47. 将函数 $f(x) = 1 - x^2 (0 \leq x \leq \pi)$ 展开成余弦级数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

48. 将函数 $f(x) = 2 + |x| (-1 \leq x \leq 1)$ 展开成以 2 为周期的傅里叶级数, 并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的和.



学霸养成之总结

学霸人人羡慕,成为学霸付出的努力是基本的条件,你要比别人会学,合理利用时间,懂得做题,懂得总结。

◆ 一刷总结

◆ 二刷总结

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

◆ 三刷总结



第八章 向量代数与空间解析几何 及多元微分学在几何上的应用

学霸养成之刷题计划

	开始时间	结束时间	难度超过当前 水平的题目占比	完成打 ☒
第一刷				☐
第二刷				☐
第三刷				☐

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

- 设有直线 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+8}{1}$ 与 $L_2: \begin{cases} x-y=6 \\ 2y+z=3 \end{cases}$, 则 L_1 与 L_2 的夹角为
 (A) $\frac{\pi}{6}$. (B) $\frac{\pi}{4}$. (C) $\frac{\pi}{3}$. (D) $\frac{\pi}{2}$.
- 设有直线 $L: \begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$ 及平面 $\Pi: 4x-2y+z-2=0$, 则直线 L
 (A) 平行于 Π . (B) 在 Π 上. (C) 垂直于 Π . (D) 与 Π 斜交.
- 已知曲面 $z = 4 - x^2 - y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x + 2y + z - 1 = 0$, 则点 P 的坐标是
 (A) $(1, -1, 2)$. (B) $(-1, 1, 2)$. (C) $(1, 1, 2)$. (D) $(-1, -1, 2)$.
- 在曲线 $x = t, y = -t^2, z = t^3$ 的所有切线中, 与平面 $x + 2y + z = 4$ 平行的切线
 (A) 只有 1 条. (B) 只有 2 条.
 (C) 至少有 3 条. (D) 不存在.
- 设函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 附近有定义, 且 $f'_x(0, 0) = 3, f'_y(0, 0) = 1$, 则
 (A) $dz|_{(0,0)} = 3dx + dy$.
 (B) 曲面 $z = f(x, y)$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的法向量为 $\{3, 1, 1\}$.
 (C) 曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的切向量为 $\{1, 0, 3\}$.
 (D) 曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 的切向量为 $\{3, 0, 1\}$.



6. 函数 $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$ 在点 $(0, 1)$ 处的梯度等于
 (A) i . (B) $-i$. (C) j . (D) $-j$.
7. 曲面 $x^2 + \cos(xy) + yz + x = 0$ 在点 $(0, 1, -1)$ 处的切平面方程为
 (A) $x - y + z = -2$. (B) $x + y + z = 0$.
 (C) $x - 2y + z = -3$. (D) $x - y - z = 0$.
8. 设 $(a \times b) \cdot c = 2$, 则 $[(a + b) \times (b + c)] \cdot (c + a) =$ _____.
9. 点 $(2, 1, 0)$ 到平面 $3x + 4y + 5z = 0$ 的距离 $d =$ _____.
10. 与两直线 $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$ 及 $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$ 都平行, 且过原点的平面方程为
 _____.
11. 过点 $M(1, 2, -1)$ 且与直线 $\begin{cases} x = -t + 2 \\ y = 3t - 4 \\ z = t - 1 \end{cases}$ 垂直的平面方程是 _____.
12. 已知两条直线的方程是 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}$, $L_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$, 则过 L_1 且平行于 L_2 的平面方程是 _____.
13. 设一平面经过原点及点 $(6, -3, 2)$, 且与平面 $4x - y + 2z = 8$ 垂直, 则此平面方程为 _____.
14. 由曲线 $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 12 \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转面在点 $(0, \sqrt{3}, \sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量为 _____.
15. 直线 $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$ 绕 y 轴旋转的旋转曲面方程为 _____.
16. 函数 $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ 在点 $M(1, 2, -2)$ 处的梯度 $\text{grad} u|_M =$ _____.
17. 函数 $f(x, y, z) = x^2y + z^2$ 在点 $(1, 2, 0)$ 处沿向量 $n = (1, 2, 2)$ 的方向导数为 _____.
18. 设函数 $u(x, y, z) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{18}$, 单位向量 $n = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, 则 $\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{(1, 2, 3)} =$ _____.
19. 设可微函数 $f(x, y, z)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的梯度 $g = (1, 2, 3)$, 则函数 $f(x, y, z)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处沿 $l = \{1, 1, 1\}$ 方向的方向导数为 _____.
20. 设 $u = 3x^2y - 2yz + z^3$, $v = 4xy - z^3$. 则 u 在点 $P(1, -1, 1)$ 处沿 $\text{grad} v$ 方向的方向导数为 _____.



21. 设函数 $u = u(x, y, z)$ 由方程 $x + y + z + u + xy^2z^3e^u = 1$ 所确定, 求函数 $u(x, y, z)$ 在点 $(0, 0, 0)$ 处沿椭球面 $x^2 + 2y^2 + 3(z-1)^2 = 3$ 在该点的外法线方向的方向导数.
22. 函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在椭球面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 上哪一点沿哪一个方向的方向导数最大? 并求其最大值.
23. 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases} (a > 0)$ 在点 $M_0(0, 0, a)$ 处的切线及法平面.
24. 求直线 $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$ 在平面 $\Pi: x - y + 2z - 1 = 0$ 上的投影直线 L_0 的方程, 并求 L_0 绕 y 轴旋转一周所围成的曲面方程.
25. 求椭球面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 上某点处的切平面 Π , 使平面 Π 过已知直线 $L: \frac{x-6}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{2z-1}{-2}$.
26. 求过直线 $\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ x - y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$ 且与曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{2}z^2 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$ 在点 $(1, -1, 2)$ 处的切线平行的平面.
27. 设有一小山, 取它的底面所在的平面为 xOy 坐标面, 其底部所占的区域为 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - xy \leq 75\}$, 小山的高度函数为 $h(x, y) = 75 - x^2 - y^2 + xy$.
- (1) 设 $M(x_0, y_0)$ 为区域 D 上一点, 问 $h(x, y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大? 若记此方向导数的最大值为 $g(x_0, y_0)$, 试写出 $g(x_0, y_0)$ 的表达式.
- (2) 现欲利用此小山开展攀岩活动, 为此需要在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点. 也就是说, 要在 D 的边界线 $x^2 + y^2 - xy = 75$ 上找出使 (1) 中的 $g(x, y)$ 达到最大值的点. 试确定攀登起点的位置.
28. 设一礼堂的顶部是一个半椭球面, 其方程为 $z = 4\sqrt{1 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36}}$, 求下雨时过房顶上点 $P(1, 3, \sqrt{11})$ 处的雨水流下的路线方程 (不计摩擦).



学霸养成之总结

学霸人人羡慕,成为学霸付出的努力是基本的条件,你要比别人会学,合理利用时间,懂得做题,懂得总结。

⊕ 一刷总结



⊕ 二刷总结

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

⊕ 三刷总结



第九章 多元积分学及其应用

学霸养成之刷题计划

	开始时间	结束时间	难度超过当前水平的题目占比	完成打√
第一刷				☐
第二刷				☐
第三刷				☐

1. 已知 $\frac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$ 为某函数的全微分, 则 a 等于

- (A) -1. (B) 0. (C) 1. (D) 2.

2. 设有空间区域 $\Omega_1: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0$ 及 $\Omega_2: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, 则

- (A) $\iiint_{\Omega_1} x dv = 4 \iiint_{\Omega_2} x dv$. (B) $\iiint_{\Omega_1} y dv = 4 \iiint_{\Omega_2} y dv$.
 (C) $\iiint_{\Omega_1} z dv = 4 \iiint_{\Omega_2} z dv$. (D) $\iiint_{\Omega_1} xyz dv = 4 \iiint_{\Omega_2} xyz dv$.

3. 设 $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0)$, S_1 为 S 在第一卦限中的部分, 则有

- (A) $\iint_S x dS = 4 \iint_{S_1} x dS$. (B) $\iint_S y dS = 4 \iint_{S_1} y dS$.
 (C) $\iint_S z dS = 4 \iint_{S_1} z dS$. (D) $\iint_S xyz dS = 4 \iint_{S_1} xyz dS$.

4. 设 $L_1: x^2 + y^2 = 1, L_2: x^2 + y^2 = 2, L_3: x^2 + 2y^2 = 2, L_4: 2x^2 + y^2 = 2$ 为四条逆时针方向的平面曲线, 记 $I_i = \oint_{L_i} (y + \frac{y^3}{6}) dx + (2x - \frac{x^3}{3}) dy (i = 1, 2, 3, 4)$, 则 $\max\{I_1, I_2, I_3, I_4\} =$

- (A) I_1 . (B) I_2 . (C) I_3 . (D) I_4 .

5. 设数量场 $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) =$ _____.

6. 已知向量 $A = \{xy^2, yz^2, zx^2\}$, 则 $\operatorname{grad}(\operatorname{div} A)|_{(1,-1,2)} =$ _____.



7. 给定向量 $A = \{x^2y, y^2z, z^2x\}$, 则 $\text{rot}\{\text{grad}(\text{div}A)\} = \underline{\hspace{2cm}}$.
8. 设 Ω 为区域 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$, 则 $\iiint_{\Omega} (x+y+z)^2 dv = \underline{\hspace{2cm}}$.
9. 积分 $I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_0^{1-r} e^{-(1-z)^2} dz = \underline{\hspace{2cm}}$.
10. 设 C 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 其周长为 L , 则 $\oint_C (bx + ay + 1)^2 ds = \underline{\hspace{2cm}}$.
11. 设曲线 $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases} (a > 0)$, 则 $\oint_{\Gamma} [(x+2)^2 + (y-3)^2] ds = \underline{\hspace{2cm}}$.
12. 已知曲线 L 的方程为 $y = 1 - |x| (x \in [-1, 1])$, 起点是 $(-1, 0)$, 终点为 $(1, 0)$, 则曲线积分 $\int_L xy dx + x^2 dy = \underline{\hspace{2cm}}$.
13. 设 L 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z = x + y$ 的交线, 从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向, 则曲线积分 $\oint_L xz dx + x dy + \frac{y^2}{2} dz = \underline{\hspace{2cm}}$.
14. 设 L 是单位圆周 $x^2 + y^2 = 1$, n 为 L 的外法线向量, $u(x, y) = \frac{1}{12}(x^4 + y^4)$, 则 $\oint_L \frac{\partial u}{\partial n} ds = \underline{\hspace{2cm}}$.
15. 设 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 则 $\iint_{\Sigma} (z + |x|)^2 dS = \underline{\hspace{2cm}}$.
16. 设 Σ 为上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a > 0, z \geq 0)$, 则积分 $\iint_{\Sigma} (\sqrt{2}x + z + 1)^2 dS = \underline{\hspace{2cm}}$.
17. 设 Ω 是由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 围成的空间区域, Σ 是 Ω 的整个边界的外侧, 则 $\oiint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy = \underline{\hspace{2cm}}$.
18. 圆柱面 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 介于平面 $z = 0$ 与上半圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 之间部分的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
19. 设 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$, 则 Ω 的形心的竖坐标 $z = \underline{\hspace{2cm}}$.
20. 计算积分 $\iiint_{\Omega} x(1+z) dv$, 其中 Ω 由 $x = y^2 + z^2, x^2 = y^2 + z^2$ 所围成.



21. 计算积分 $\iiint_{\Omega} |z - x^2 - y^2| dv$, 其中 $\Omega: 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1$.

22. 计算积分 $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (1-y)e^{-(1-y-z)^2} dz$.

23. 已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 到点 $(2,0)$, 再沿圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 到 $(0,2)$ 的曲线段. 计算曲线积分 $I = \int_L 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy$.

24. 计算线积分 $I = \int_L (e^{-x^2} \sin x + 3y - \cos y) dx + (x \sin y - y^4) dy$, 其中 L 为从点 $A(-\pi, 0)$ 沿曲线 $y = \sin x$ 到点 $B(\pi, 0)$ 的弧段.

25. 计算线积分 $\int_C \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2}$, 其中 C 为上半椭圆 $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ ($a > 0$) 从 $(-a, 0)$ 到 $(a, 0)$ 的弧段.

26. 计算线积分 $I = \int_L \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2}$, 其中 L 为由点 $A(-1, 0)$ 经点 $B(1, 0)$ 到点 $C(-1, 2)$ 的路径, $\widehat{AB}$ 为下半圆周, $\overline{BC}$ 为直线.

27. 设函数 $Q(x, y)$ 在平面 xOy 上具有一阶连续偏导数, 曲线积分 $\int_L 2xy dx + Q(x, y) dy$ 与路径无关, 并且对任意 t 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy dx + Q(x, y) dy = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy dx + Q(x, y) dy$$

求 $Q(x, y)$.

28. 已知 $\int_{(0,0)}^{(t,t^2)} f(x, y) dx + x \cos y dy = t^2$, $f(x, y)$ 有一阶连续偏导数, 求 $f(x, y)$.

29. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有一阶连续导数, L 是上半平面 ($y > 0$) 内的有向分段光滑曲线, 其起点为 (a, b) , 终点为 (c, d) . 记

$$I = \int_L \frac{1}{y} [1 + y^2 f(xy)] dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] dy$$

(1) 证明曲线积分 I 与路径 L 无关;

(2) 当 $ab = cd$ 时, 求 I 的值.

30. 设函数 $\varphi(x)$ 具有连续导数, 在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上, 曲线积分

$$\oint_L \frac{\varphi(y) dx + 2xy dy}{2x^2 + y^4}$$

的值恒为同一常数.

(1) 证明: 对右半平面 $x > 0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C , 有 $\oint_C \frac{\varphi(y) dx + 2xy dy}{2x^2 + y^4} = 0$;



(2) 求函数 $\varphi(y)$ 的表达式.

31. 设 $f(x), g(x)$ 具有二阶连续导数, 且

$$\oint_C [y^2 f(x) + 2ye^x + 2yg(x)]dx + 2[yg(x) + f(x)]dy = 0$$

其中 C 为平面上任意简单闭曲线.

(1) 求 $f(x)$ 和 $g(x)$, 其中 $f(0) = g(0) = 0$;

(2) 计算沿任一条曲线从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 点的积分.

32. 设 C 为分段光滑简单闭曲线, $\mathbf{n}$ 为 C 的外法线向量, D 为 C 所围成的闭区域, 函数 $u(x, y)$ 在 D 上有二阶连续偏导数, 证明:

$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds = \iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy$$

33. 设 $f(x, y)$ 在圆域 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上二阶连续可微, 且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{-(x^2+y^2)}$, 计算积分

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy.$$

34. 计算曲线积分 $I = \oint_{\Gamma} y dx + z dy + x dz$, 其中 Γ 为 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与 $x + y + z = 0$ 的交线, 沿 z 轴正向看去为逆时针方向 ($a > 0$).

35. 计算曲线积分 $I = \oint_{\Gamma} xy dx + z^2 dy + xz dz$, 其中 Γ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与柱面 $x^2 + y^2 = 2ax$ ($a > 0$) 的交线, 沿 z 轴正向看去为逆时针方向.

36. 证明 $\iint_{\Sigma} (x + y + z + \sqrt{3}a)^3 dS \geq 108\pi a^5$ ($a > 0$), 其中 Σ 为曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax + 2ay + 2az - 2a^2$.

37. 设 P 为椭球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1$ 上的动点, 若 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直, 求点 P 的轨迹 C , 并计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} \frac{(x + \sqrt{3}) |y - 2z|}{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}} dS$, 其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

38. 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} xz dy dz + 2zy dz dx + 3xy dx dy$, 其中 Σ 为曲面 $z = 1 - x^2 - \frac{y^2}{4}$ ($0 \leq z \leq 1$) 的上侧.

39. 计算曲面积分 $I = \oint_{\Sigma} \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$ 的外侧.



40. 设对任意的分片光滑有向封闭曲面 S , 都有

$$\oiint_S [yf'(x) + yz] dydz - \frac{1}{2}y^2 f(x) dzdx - [zysin x + y^2] dxdy = 0$$

其中函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有连续的二阶导数, 且 $f(0) = 0, f'(0) = 1$.

(1) 求 $f(x)$;

(2) 计算积分 $\iint_{\Sigma} [yf'(x) + yz] dydz - \frac{1}{2}y^2 f(x) dzdx - (zysin x + y^2) dxdy$, 其中 Σ 为曲面 $z = x^2 + y^2$ 介于 $z = 0$ 和 $z = 1$ 之间部分的内侧.

41. 设 Σ 为上半单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1 (z \geq 0)$ 的上侧, 连续函数 $f(x, y)$ 满足

$$f(x, y) = 2xy^2 + x^2 + \iint_{\Sigma} y^3 dydz + x^3 dzdx + zf(x, y) dxdy, \text{ 求 } f(x, y).$$

42. 设直线 L 过点 $A(1, 0, 0), B(0, 1, 1)$ 两点, 将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ , Σ 与平面 $z = 0, z = 2$ 所围成的立体为 Ω .

(1) 求曲面 Σ 的方程;

(2) 求 Ω 的形心坐标.

43. 确定常数 λ , 使在右半平面 $x > 0$ 上的向量 $A(x, y) = 2xy(x^4 + y^2)^{\lambda} i - x^2(x^4 + y^2)^{\lambda} j$ 为某二元函数 $u(x, y)$ 的梯度, 并求 $u(x, y)$.

44. 质点 P 沿着以 AB 为直径的半圆周, 从点 $A(1, 2)$ 运动到点 $B(3, 4)$ 的过程中受到变力 F 作用(见右图), F 的大小等于点 P 与原点 O 之间的距离, 其方向垂直于直线段 OP , 且与 y 轴正向的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$. 求变力 F 对质点 P 所作的功.

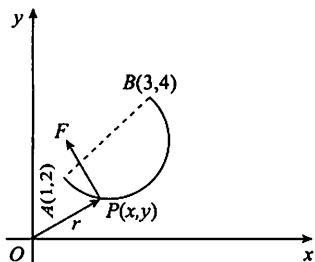


图 1

45. 设密度为 1 的空间体 Ω 由不等式 $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$ 所确定.

(1) 求 Ω 对 z 轴的转动惯量;

(2) 求 Ω 对直线 $x = y = z$ 的转动惯量.



学霸养成之总结

学霸人人羡慕,成为学霸付出的努力是基本的条件,你要比别人会学,合理利用时间,懂得做题,懂得总结。

一刷总结

二刷总结

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

三刷总结



学霸养成之纠错与反思

→ 错题序号	→ 错题原因分析与正确方法
	① 知识点没掌握 ② 没见过此类题型 ③ 计算错误 ④ 粗心(看错题、漏条件) ⑤ 推导不严谨 微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66)
	微信公众号【顶尖考研】 (ID: djky66)



练习题答案与解析

第一章 函数、极限、连续

1.【解】 (D).

由于 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} x \tan x \cdot e^{\sin x} = +\infty$, 则 $f(x)$ 无界.

2.【解】 (B).

由于 $x \sin \frac{1}{x}$, $\frac{\sin x}{x}$ 都在 $(0, +\infty)$ 上连续且 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$;

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$. 故 $x \sin \frac{1}{x}$, $\frac{\sin x}{x}$ 都在 $(0, +\infty)$ 上有界.

3.【解】 (D).

由于 $t[f(t) + f(-t)]$ 是奇函数, 则 $\int_0^x t[f(t) + f(-t)]dt$ 是偶函数.

4.【解】 (D).

反证: 否则, 若 x_n 和 y_n 都有界, 则 $x_n y_n$ 有界, 与题设矛盾.

(A) 的反例: $x_n: 1, 0, 3, 0, \dots; y_n: 0, 2, 0, 4, \dots$.

(B) 的反例: $x_n: 1, 1, 3, 1, \dots; y_n: 1, 2, 1, 4, \dots$.

(C) 的反例: $x_n: 1, 0, 3, 0, \dots; y_n: 0, 2, 0, 4, \dots$.

5.【解】 (A).

反例见上题.

6.【解】 (C).

若 $\{a_n\}$ 收敛, 由 $a_n \leq b_n \leq a_{n+1}$ 及夹逼原理知 $\{b_n\}$ 收敛; 反之若 $\{b_n\}$ 收敛, 则 $\{b_n\}$ 上有界, 由 $a_n \leq b_n \leq a_{n+1}$ 知 $\{a_n\}$ 单调增且上有界, 故 $\{a_n\}$ 收敛.

7.【解】 (A).

若附加条件 $\varphi(x) \neq 0$, 则应选(D).

8.【解】 (B).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\sin \frac{1}{x}} - 1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^a - \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{a-1} - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{(\alpha - 1) \frac{1}{x}} (\alpha \neq 1)$$

9.【解】 (C).

$$\begin{aligned} \text{(方法一)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) + xf(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[2x - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)\right] + xf(x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+f(x)}{x} - 2 = 1, \end{aligned}$$



$$\text{则} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+f(x)}{x} = 3.$$

$$\begin{aligned} \text{(方法二)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) + xf(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) - 2x + [2x + xf(x)]}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) - 2x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+f(x)}{x} = 1, \end{aligned}$$

$$\text{又} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) - 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}(2x)^2}{x^2} = -2, \text{ 则} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+f(x)}{x} = 3.$$

10. 【解】 (D).

(方法一) 直接法

$$\text{由} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 2 \text{ 知} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2} = 2 \text{ 即 } f(x) \sim x^2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} f(t) dt}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} t^2 dt}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} \sin^6 x}{x^n} = a \neq 0 \text{ 则 } n = 6.$$

(方法二) 特例法

由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 2$ 知, 取 $f(x) = x^2$ 显然符合题设条件, 此时

$$\int_0^{\sin^2 x} f(t) dt = \int_0^{\sin^2 x} t^2 dt = \frac{1}{3} \sin^6 x \sim \frac{1}{3} x^6$$

则(A)(B)(C) 均不正确, 故应选(D).

11. 【解】 (D).

若 $a = 2$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin 2x}{\frac{\ln 2}{2} bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 2x}{\frac{\ln 2}{2} bx} = -\frac{2}{b \ln 2}$$

显然(B) 不正确, 则 $a = 1$, 且

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{\frac{b}{2} x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arctan x - x) - (\sin x - x)}{\frac{b}{2} x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(-\frac{1}{3}x^3\right) - \left(-\frac{1}{6}x^3\right)}{\frac{b}{2} x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3}{\frac{b}{2} x^3} = -\frac{1}{3b} = 1, \end{aligned}$$

故应选(D).

12. 【解】 (C).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x - \sin 3x}{cx^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3\sin x - 3x) - (\sin 3x - 3x)}{cx^k} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[3\left(-\frac{1}{6}x^3\right)\right] - \left[-\frac{(3x)^3}{6}\right]}{cx^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3}{cx^k} = 1 \end{aligned}$$

从而得 $k = 3, c = 4$.

13. 【解】 (D).

$$(A) \sqrt{1+x^4} - e^{\frac{x^2}{2}} = \left[1 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)\right] - \left[1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right] = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \quad (2 \text{ 阶})$$



$$\text{或} \quad \sqrt{1+x^4} - e^{\frac{x^2}{2}} = (\sqrt{1+x^4} - 1) - (e^{\frac{x^2}{2}} - 1) \sim \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} \sim -\frac{x^2}{2}$$

$$(B) \tan x - \sin x = \tan x(1 - \cos x) \sim x \cdot \frac{1}{2}x^2 \quad (3 \text{ 阶})$$

$$(C) \int_0^{\sin x} \sin t^2 dt \sim \int_0^{\sin x} t^2 dt = \frac{1}{3} (\sin x)^3 \sim \frac{1}{3}x^3 \quad (3 \text{ 阶})$$

$$(D) \int_0^{1-\cos x} \sin^{\frac{3}{2}} t dt \sim \int_0^{1-\cos x} t^{\frac{3}{2}} dt = \frac{2}{5} (1 - \cos x)^{\frac{5}{2}} \sim \frac{2}{5} \left(\frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{5}{2}} \quad (5 \text{ 阶})$$

14. 【解】 (A).

验证知 $x = 1, x = \pm \frac{\pi}{2}$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点, 而 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$.

15. 【解】 (B).

$f(x)$ 在 $x = 0, \pm 1$ 处可能间断, 验证可知 $x = -1$ 为无穷间断点.

16. 【解】 (C).

$f(x) = \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$ 在 $x = -1, 0, 1$ 处没定义,

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{x \ln|x|} - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x \ln|x|}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln|x|} - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln|x|}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x \ln|x|} - 1}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln|x|}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

故 $x = 0$ 和 $x = 1$ 为可去间断点.

17. 【解】 (C).

由函数 $f(x) = \frac{(x^2 + a^2)(x-1)}{e^{\frac{1}{x}} + b}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有一个可去间断点和一个跳跃间断点可知, $b < 0$,

否则 $f(x)$ 只有一个间断点 $x = 0$.

显然 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的一个间断点, 而另一个间断点只能是 $x = 1$, 而 $b = -e$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{a^2}{e}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + a^2)(x-1)}{e^{\frac{1}{x}} - e} = (1+a^2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{e^{\frac{1}{x}} - e} = (1+a^2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}} = -\frac{1+a^2}{e}$$

则 $x = 1$ 为可去间断点, 而 $a \neq 0$ 时, $x = 0$ 为跳跃间断点.

18. 【解】 (D).

先求 $f(x)$, 再讨论间断点类型. 注意利用结论

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{nx} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ +\infty, & x > 0, \end{cases} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0, & |x| < 1, \\ \infty, & |x| > 1, \\ 1, & x = 1, \\ \text{不存在}, & x = -1 \end{cases}$$

由以上结论得

$$\text{当 } x < -1 \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2e^{(n+1)x} + 1}{e^{nx} + x^n + 1} = 0;$$

$$\text{当 } -1 < x < 0 \text{ 时, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2e^{(n+1)x} + 1}{e^{nx} + x^n + 1} = 1;$$



当 $x > 0$ 时, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2e^{(n+1)x} + 1}{e^{nx} + x^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2e^x + \frac{1}{e^{nx}}}{1 + \left(\frac{x}{e^x}\right)^n + \frac{1}{e^{nx}}} = 2e^x$ (这里 $0 < \frac{x}{e^x} < 1$).

则

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 1, & -1 < x < 0, \\ 2e^x, & x > 0 \end{cases}$$

显然 $x = -1, x = 0$ 都是跳跃间断点, 故应选(D).

19.【解】 $-\frac{1}{6}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{(\arcsin x)^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

20.【解】 2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha x^\alpha}{\sqrt{1+x} \arctan x - \sqrt{\cos x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha x^\alpha (\sqrt{1+x} \arctan x + \sqrt{\cos x})}{x \arctan x + 1 - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\alpha x^\alpha}{x^2 + \frac{1}{2}x^2} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

则 $\alpha = 2$.

21.【解】 $e^{\frac{1}{2}}$.

由题设知 $f(0) = 0, f'(0) = 2$. 本题所求极限是“ 1^∞ ”型, 而

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \int_0^x f(t) dt}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^2} \\ &= -\frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = -\frac{1}{2} + \frac{f'(0)}{2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\cos x + \int_0^x f(t) dt \right]^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{2}}.$$

22.【解】 $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\ln(1+x) \ln(x + \sqrt{1+x^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x^2} \quad (\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \sim x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1 - x}{2x} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

23.【解】 $e^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^n}{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)} \right]^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{-x} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^{-x} \cdots \left(1 - \frac{n}{x} \right)^{-x} \\ &= e \cdot e^2 \cdots e^n = e^{\frac{n(n+1)}{2}}. \end{aligned}$$

24.【解】 $e^{-\frac{1}{6}}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = -\frac{1}{6}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}.$$

25. 【解】 $e^{\frac{1}{2}}.$

$$\ln x_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$$

当 $x > 0$ 时, $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$, 则

$$\frac{k}{n^2+n} \leq \frac{k}{n^2+k} = \frac{\frac{k}{n^2}}{1+\frac{k}{n^2}} < \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) < \frac{k}{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n} = \frac{1}{2}$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln x_n = \frac{1}{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e^{\frac{1}{2}}.$

26. 【解】 $\frac{2\sqrt{2}}{3}.$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{\sqrt{n(1+2+\cdots+n)}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{\sqrt{\frac{n^2(n+1)}{2}}} \\ &= \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \cdot \frac{1}{n} \left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}} \right) \\ &= \sqrt{2} \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

27. 【解】 $f(x) = e^x - \frac{1+ax}{1+bx} = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3) - \frac{1+ax}{1+bx}$

$$= \frac{(1+b-a)x + (b+\frac{1}{2})x^2 + (\frac{1}{6}+\frac{b}{2})x^3 + o(x^3)}{1+bx}$$

则 $1+b-a=0, b+\frac{1}{2}=0$, 即 $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}.$

28. 【解】 (方法一)

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{ax^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x + 2\sin 2x \cdot \cos x \cdot \cos 3x + 3\sin 3x \cdot \cos x \cdot \cos 2x}{nax^{n-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x + 2\sin 2x \cdot \cos x \cdot \cos 3x + 3\sin 3x \cdot \cos x \cdot \cos 2x}{2ax} \quad (n=2) \\ &= \frac{1+4+9}{2a} = \frac{7}{a}, \quad \text{则 } a=7. \end{aligned}$$

(方法二) $1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{ax^n}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)\right) \left(1 - \frac{(3x)^2}{2} + o(x^2)\right)}{ax^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(3x)^2}{2}}{ax^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{14x^2}{2ax^n}, \text{ 则 } n=2, a=7. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \text{(方法三)} \quad 1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{ax^n} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) + \cos x(1 - \cos 2x) + \cos x \cdot \cos 2x(1 - \cos 3x)}{ax^n} \\
 &= \frac{1}{a} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x(1 - \cos 2x)}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \cos 2x(1 - \cos 3x)}{x^2} \right] (n=2) \\
 &= \frac{1}{a} \left[\frac{1}{2} + \frac{2^2}{2} + \frac{3^2}{2} \right] = \frac{7}{a}
 \end{aligned}$$

则 $a = 7$.

29. 【解】 (方法一)

$$\begin{aligned}
 \text{左端} &= e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{\ln(1+\sin(2x^2))-2x^2}{x^2}} - 1}{x^n} = e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin(2x^2)) - 2x^2}{x^{n+2}} \quad (e^x - 1 \sim x) \\
 &= e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4x \cos(2x^2)}{1 + \sin(2x^2)} - 4x}{(n+2)x^{n+1}} = \frac{4e^2}{n+2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x^2) - 1 - \sin(2x^2)}{x^n} \\
 &= a \neq 0
 \end{aligned}$$

$n = 2, a = -2e^2$.

$$\begin{aligned}
 \text{(方法二)} \quad \text{左端} &= e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin(2x^2)) - 2x^2}{x^{n+2}} \\
 &= e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2) - \frac{\sin^2(2x^2)}{2} + o(\sin^2(2x^2)) - 2x^2}{x^{n+2}} \quad (\text{泰勒公式}) \\
 &= a \neq 0
 \end{aligned}$$

$$\text{所以 } n = 2, a = e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{\sin^2(2x^2)}{2}}{x^4} = -2e^2.$$

$$\begin{aligned}
 \text{(方法三)} \quad \text{左端} &= e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin(2x^2)) - 2x^2}{x^{n+2}} \\
 &= e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\ln(1 + \sin(2x^2)) - \sin(2x^2)] - (2x^2 - \sin(2x^2))}{x^{n+2}} \\
 &= e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[-\frac{1}{2}(\sin(2x^2))^2\right] - \left[\frac{1}{6}(2x^2)^3\right]}{x^{n+2}} \\
 &\quad (x - \ln(1+x) \sim \frac{1}{2}x^2, x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3)
 \end{aligned}$$

$$\text{所以 } n = 2, a = e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^4}{x^4} = -2e^2.$$

30. 【解】 由于 $x \rightarrow 0$ 时, $ax - \sin x \rightarrow 0$, 且极限 c 不为零, 所以当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt \rightarrow 0$$

故必有 $b = 0$.

由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos x}{x^2} = c (c \neq 0)$$

故必有 $a = 1$, 从而 $c = \frac{1}{2}$.



$$\begin{aligned}
 31. \text{【解】 (方法一)} \quad \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \ln(1+x^2)}{\ln(1+x^2) \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \ln(1+x^2)}{x^4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x - \frac{2x}{1+x^2}}{4x^3} \quad (\text{洛必达法则}) \\
 &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2) \sin 2x - 2x}{x^3} \\
 &= \frac{1}{4} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin 2x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2x}{x^3} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left[2 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6}(2x)^3}{x^3} \right] \quad (x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3) \\
 &= \frac{1}{4} \left(2 - \frac{4}{3} \right) = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(方法二)} \quad \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \ln(1+x^2)}{x^4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right]^2 - \left[x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \right]}{x^4} \quad (\text{泰勒公式}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[x^2 - \frac{2}{3!}x^4 + o(x^4) \right] - \left[x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \right]}{x^4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(方法三)} \quad \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \ln(1+x^2)}{x^4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin^2 x - x^2) - (\ln(1+x^2) - x^2)}{x^4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x + x)(\sin x - x) - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^4}{x^4}}{x^4} \quad (x - \ln(1+x) \sim \frac{1}{2}x^2) \\
 &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \quad (x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 32. \text{【解】} \quad \text{原式} &= - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x \left[\left(\frac{\sin x}{x} \right)^x - 1 \right]}{x^3} \\
 &= - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \ln \frac{\sin x}{x}} - 1}{x^3} \quad (\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1) \\
 &= - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x^2} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \frac{\sin x - x}{x})}{x^2} \\
 &= - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x}{x^3} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{6}x^3}{x^3} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 33. \text{【解】 (方法一)} \quad \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2) - \ln(1+\sin^2 x)}{x^4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{x^2 - \sin^2 x}{1 + \sin^2 x} \right)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4 (1 + \sin^2 x)}
 \end{aligned}$$



$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

(方法二) 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2) - \ln(1+\sin^2 x)}{x^4}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+\xi}(x^2 - \sin^2 x)}{x^4} \quad (\xi \text{ 在 } x^2 \text{ 与 } \sin^2 x \text{ 之间}) \text{ (拉格朗日中值定理)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \sin x)(x - \sin x)}{x^4} = \frac{1}{3}$$

34. 【解】 (方法一)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \cdot \frac{1}{x}} \quad (\text{等价无穷小代换})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) - x] \quad (\text{洛必达法则})$$

$$\stackrel{\frac{1}{x} = t}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t - 1 - t}{t^2} \quad (\text{变量代换})$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t - 1}{2t} \quad (\text{洛必达法则})$$

$$= \frac{1}{2}$$

(方法二) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \cdot \frac{1}{x}} \quad (\text{等价无穷小代换})$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) - x] \quad (\text{洛必达法则})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2!x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) - x \right] \quad (\text{泰勒公式})$$

$$= \frac{1}{2}$$

35. 【解】 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x - 1}} = e^{-\frac{1}{2}};$$

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}) - n}{nx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 2e^{2x} + \cdots + ne^{nx}}{n}$

$$= \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

所以, 原式 = $e^{\frac{n+1}{2}}$;

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{n} \right)^3}{\left(\frac{1}{n} \right)^3} = \frac{1}{3}$, 所以, 原式 = $e^{\frac{1}{3}}$;

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n}\right) - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n}\right) - \tan \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{n}}$



$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sec^2 \xi \cdot \frac{2}{n}}{\frac{1}{n}} \quad \left(\frac{\pi}{4} < \xi < \frac{\pi}{4} + \frac{2}{n} \right)$$

$$= 4,$$

则原式 = e^4 .

36.【解】 (1) 因 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 0,$$

所以, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$.

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{\frac{\ln x}{x}}}{e^{\frac{\ln x}{x}} - 1} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 而当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$, 故

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{\frac{\ln x}{x}} - 1)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\ln x}{x}}}{\ln x} \cdot \frac{1 - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln x}{\ln x} = -1$$

所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{\frac{1}{x}} - 1)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{-1}$.

37.【解】 (方法一) 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x^2} + \frac{f(x)}{x} \right) = 2$ 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x^2} + \frac{f(x)}{x} \right) \cdot x = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} + f(x) \right) = 0$$

即 $1 + f(0) = 0$, 从而 $f(0) = -1$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x^2} + \frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - x) + x[f(x) - f(0)]}{x^2} = 2$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x[f(x) - f(0)]}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2.$$

得 $f'(0) = 2$, 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x) + e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(x) + 1}{x} + \frac{e^x - 1}{x}} = \frac{1}{f'(0) + 1} = \frac{1}{3}$$

(方法二) 在 $x = 0$ 处, $f(x)$ 和 $\sin x$ 的泰勒展开式为

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x), \sin x = x + o(x^2)$$

$$\begin{aligned} 2 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x^2} + \frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x f(x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x^2) + x[f(0) + f'(0)x + o(x)]}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x[1 + f(0)] + f'(0)x^2 + o(x^2)}{x^2} \end{aligned}$$

则 $1 + f(0) = 0, f'(0) = 2$. 即 $f(0) = -1, f'(0) = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x) + e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{[f(0) + f'(0)x + o(x)] + [1 + x + o(x)]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3x + o(x)} = \frac{1}{3}$$

【注】解本题时一开始就用洛必达法则:

$$2 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x^2} + \frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + f(x) + x f'(x)}{2x}$$



似乎也可得到 $f(0) = -1$, 但这样做是错误的. 其原因是对洛必达法则的条件理解不透. 即我们并不知道

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + f(x) + xf'(x)}{2x}$$

是否存在.

$$\begin{aligned} 38. \text{【解】} \quad & \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{\sqrt{n^6+n}} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{n^6+n}} + \frac{2^2}{\sqrt{n^6+2n}} + \cdots + \frac{n^2}{\sqrt{n^6+n^2}} \right) \\ & \leq \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{\sqrt{n^6+n^2}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{\sqrt{n^6+n}} &= \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3}}{\sqrt{\frac{n^6+n}{n^6}}} = \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n^5}}} \\ &= \frac{1}{6} \frac{1 \times 2}{\sqrt{1}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{\sqrt{n^6+n^2}} = \frac{1}{3}$$

由夹逼定理可得, 原极限 $= \frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} 39. \text{【解】} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{1-0}} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}} \right) \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} \\ 40. \text{【解】} \quad & \frac{1}{n} \left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2} \right] < \left[\frac{n+1}{1^2+n^2} + \frac{n+1}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{n+1}{n^2+n^2} \right] \\ &< \frac{n+1}{n^2} \left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2} \right] \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2} \right] &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2} \right] &= 0 \\ \frac{n+1}{n^2} &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2} \left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2} \right] = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n+1}{1^2+n^2} + \frac{n+1}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{n+1}{n^2+n^2} \right] = \frac{\pi}{4}.$$



$$41. \text{【解】} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x|x+1|}{\ln|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln|x|} = 0,$$

$x=0$ 为可去间断点.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x|x+1|}{\ln|x|} = \infty$$

$x=1$ 为无穷间断点.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x|x+1|}{\ln|x|} = -\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x+1|}{\ln(-x)} = -\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x+1|}{\ln[1-(x+1)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x+1|}{x+1} \rightarrow \begin{cases} -1, & x \rightarrow -1^-, \\ 1, & x \rightarrow -1^+. \end{cases} \end{aligned}$$

$x=-1$ 为跳跃间断点.

$$42. \text{【解】} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1} = \begin{cases} ax^2 + bx, & |x| < 1, \\ \frac{1}{x}, & |x| > 1, \\ \frac{1+a+b}{2}, & x = 1, \\ \frac{a-1-b}{2}, & x = -1. \end{cases}$$

由 $f(x)$ 的连续性知, $a+b = \frac{1+a+b}{2}$, $-1 = \frac{a-1-b}{2}$. 则 $a=0, b=1$.

$$43. \text{【证】} \text{由题设可得 } f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k) (k=1, 2, \dots),$$

$$\begin{aligned} \text{因此 } a_n &= \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx = \sum_{k=1}^n f(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left[f(k) - \int_k^{k+1} f(x) dx \right] + f(n) \geq 0, \end{aligned}$$

即数列 $\{a_n\}$ 有下界,

又 $a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x) dx \leq 0$, 即数列 $\{a_n\}$ 单调减, 故由单调有界数列必有极限的准则知

数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

$$44. \text{【证】} x_1 = \sqrt{2} \leq 3, \text{ 若 } x_n \leq 3, \text{ 则 } x_{n+1} = \sqrt{3+2x_n} \leq 3;$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \sqrt{\frac{3}{x_n^2} + \frac{2}{x_n}} \geq \sqrt{\frac{3}{9} + \frac{2}{3}} = 1, \text{ 则 } \{x_n\} \text{ 单调增且上有界, 故极限存在.}$$

$$45. \text{【证】} |x_{n+1} - \sqrt{2}| = \frac{1}{(x_n + 1)(\sqrt{2} + 1)} |x_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2} |x_n - \sqrt{2}| \leq \dots \leq \frac{1}{2^n} |x_1 - \sqrt{2}|.$$

$$0 \leq |x_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^{n-1}} |x_1 - \sqrt{2}|$$

由夹逼原理, $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \sqrt{2}| = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$.

$$46. \text{【解】} (1) f'(x) = \frac{x-1}{x^2}, \text{ 令 } f'(x) = 0, \text{ 解得 } f(x) \text{ 的唯一驻点 } x=1.$$

$$\text{又 } f''(1) = \left. \frac{2-x}{x^3} \right|_{x=1} = 1 > 0, \text{ 故 } f(1) = 1 \text{ 是唯一极小值, 即最小值.}$$

$$(2) \text{ 由 (1) 的结果知 } \ln x + \frac{1}{x} \geq 1, \text{ 从而有}$$



$$\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1 \leq \ln x_n + \frac{1}{x_n}$$

于是 $x_n \leq x_{n+1}$, 即数列 $\{x_n\}$ 单调增加.

又由 $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$, 知 $\ln x_n < 1$, 得 $x_n < e$. 从而数列 $\{x_n\}$ 单调增加且有上界, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

记 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 可知 $a \geq x_1 > 0$. 在不等式 $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$ 两边取极限, 得 $\ln a + \frac{1}{a} \leq 1$.

又 $\ln a + \frac{1}{a} \geq 1$, 则 $\ln a + \frac{1}{a} = 1$, 可得 $a = 1$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

47.【证】 (1) $x_{n+1} = \ln(1+x_n) < x_n$, 则 x_n 单调减, 又 $x_n > 0$, 即下有界, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

记 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $a = \ln(1+a)$, $a = 0$.

(2) 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln(1+x_n)}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n}}$, 我们考虑极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$\text{而} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\ln(1+x) - x}{x}\right)^{\frac{1}{x}},$$

$$\text{且} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}}\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{x_n} - \frac{1}{\ln(1+x_n)}\right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

48.【证】 令 $F(x) = f(x) - f(x+a)$, $x \in [0, a]$

$$F(0) = f(0) - f(a), F(a) = f(a) - f(2a) = f(a) - f(0),$$

若 $f(0) - f(a) = 0$, 结论显然成立.

若 $f(0) - f(a) \neq 0$, 则 $F(0)$ 与 $F(a)$ 异号, 由连续函数零点定理知结论成立.

49.【证】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值为 M , 最小值为 m , 则

$$m \leq t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \cdots + t_n f(x_n) \leq M$$

由介值定理得至少存在一点 $\xi \in [a, b]$ 使 $f(\xi) = t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \cdots + t_n f(x_n)$.

第二章 一元函数微分学

1.【解】 (D).

由于 $\lim_{x \rightarrow 0} x f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t}}$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = f(0) = 0$,

从而 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) - f(0)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} x f\left(\frac{1}{x}\right)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 可导.

2.【解】 (C).

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = 0,$$



当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ 不存在, 故选 (C).

3.【解】 (D).

(方法一) 由题设知 $f(0) = 0$, 且 $1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2x}{\frac{1}{2}x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2x}{x^2}$

则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2, f'(0) = 2$, 故应选 (D).

(方法二) 排除法

由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2x}{1 - \cos x} = 1$, 可令 $f(x) - 2x = \frac{1}{2}x^2$, 即 $f(x) = 2x + \frac{1}{2}x^2$ 满足题设条件,

但 $f(x) = 2x + \frac{1}{2}x^2$ 在点 $x = 0$ 处可导且 $f'(0) = 2$, 显然可排除 (A)(B)(C), 故应选 (D).

4.【解】 (B).

由 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右导数都存在可知, $f(x)$ 在点 x_0 处左连续且右连续, 故 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

5.【解】 (D).

由于 $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + e^x]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[f(x) + e^x]}{x} = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[f(x) + e^x]}{x} = \ln 2$,

从而 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln[f(x) + e^x] = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$,

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln[f(x) + e^x] = \ln[1 + f(x) + e^x - 1] \sim f(x) + e^x - 1$,

则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[f(x) + e^x]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + e^x - 1}{x} = f'(0) + 1 = \ln 2$,

故 $f'(0) = -1 + \ln 2$.

6.【解】 (C).

(方法一) 直接法

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{f(x)} f(t) dt}{4x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f[f(x)]f'(x)}{8x} = \frac{f'(0)}{8} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'[f(x)]f'(x)}{1} \\ &= \frac{f'^3(0)}{8} = 1 \end{aligned}$$

则 $f'(0) = 2$.

(方法二) 排除法

取 $f(x) = 2x$, 显然符合题设条件, 但 $f'(0) = 2$, 则 (A)(B)(D) 均不正确,

故应选 (C).

7.【解】 (C).

$f(x) = |x| |1 - x| (e^x - 1) + \sin |x - 2|$, 则 $f(x)$ 在 $x = 1, x = 2$ 处不可导.

8.【解】 (C).

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^n + e^{nx}} = \max(1, |x|, e^x) = \begin{cases} -x, & x < -1, \\ 1, & -1 \leq x \leq 0, \\ e^x, & x > 0. \end{cases}$$

$f(x)$ 在 $x = -1$ 和 $x = 0$ 不可导, 选 (C).

9.【解】 (B).

① 正确.



由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{f(x)} = 1 \neq 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 又 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $f(0) = 0$, 又

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{f(x) - f(0)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{f(x) - f(0)}{x}} = 1 \neq 0$$

且 $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 0$.

② 不正确.

令 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x^3 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 显然 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 1$. 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{f(x)} = 1$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

而 $f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2 + 3x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x})$ 不存在.

③ 正确.

由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{f(x)} = 1 > 0$ 可知, 存在 $x = 0$ 的去心邻域, 使 $f(x) > 0$, 又 $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极小值.

④ 不正确.

令 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ 为有理数}, \\ x^2 + x^3, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$ 该函数满足题设条件, 但仅在 $x = 0$ 处连续.

10. 【解】 (C).

由所给图形导函数 $f'(x)$ 有 3 个零点, 设其依次为 x_1, x_2, x_3 , 其中 $x_1 < 0, x_2 < 0, x_3 > 0$, 还有一个间断点 $x_4 = 0$. 利用每个 x_n 两侧 $f'(x)$ 的符号, 可判断出 $f(x)$ 在 $x = x_1, x = x_4$ 处取极大值, 在 $x = x_2, x = x_3$ 处取极小值, 所以应选 (C).

11. 【解】 (C).

$$f(x) = |x^2(x+1)| = \begin{cases} -x^2(1+x), & x \leq -1, \\ x^2(1+x), & x > -1 \end{cases}$$

由 $f'(x) = 0$ 得, $x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = 0$, 这两个点都是极值点.

$f'(-1)$ 不存在. $x = -1$ 是极值点.

12. 【解】 (A).

$$f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt - 2x \int_{-\pi}^{\pi} t \sin t dt + x^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt - 4\pi x + \pi x^2,$$

$f'(x) = -4\pi + 2\pi x = 0$, 得 $x = 2, f''(x) = 2\pi > 0$. 则在 $x = 2$ 处取极小值.

13. 【解】 (B).

由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - a}{\ln(1+x)} = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x) = 0$, 得 $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - a] = 0$,

又由 $f(x)$ 二阶可导知 $f(x)$ 连续, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = a$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - a}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$$

则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 0$.



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x) - 1}{e^{x^2} - 1} = 2021, \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow 0} (e^{x^2} - 1) = 0, \text{ 则}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f''(x) - 1] = \lim_{x \rightarrow 0} f''(x) - 1 = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = 1$$

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{1} = 1 > 0$$

故 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的极小值点, 选(B).

14. 【解】 (C).

由 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f(0) = 0, f'(0) > 0, f''(0) < 0$ 可知, 在 $x = 0$ 的某邻域内曲线 $y = f(x)$ 是凸的, 且在其左邻域内曲线 $y = f(x)$ 在 x 轴下方, 在其右邻域内曲线 $y = f(x)$ 在 x 轴上方. 先画 $y = f(x)$ 的图形, 再画 $y = |f(x)|$ 的图形, 由图可知选(C).

15. 【解】 (C).

由 $f'(x) + [f(x)]^3 = x^2$ 知,

$$f''(x) + 3[f(x)]^2 f'(x) = 2x$$

$$f'''(x) + 3[f(x)]^2 f''(x) + 6f(x)[f'(x)]^2 = 2$$

令 $x = 0$, 得 $f''(0) = 0, f'''(0) = 2 \neq 0$, 则 $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

16. 【解】 (D).

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \infty, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \infty, \text{ 则 } x = \pm 1 \text{ 为垂直渐近线};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x\sqrt{x^2 - 1}} = 1,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} - x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{1}{2x^2} = 0, \end{aligned}$$

则 $y = x$ 为一条斜渐近线,

由于该函数为偶函数, 则 $y = -x$ 为一条斜渐近线.

17. 【解】 (C).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = 1, \text{ 则 } y = 1 \text{ 为一条水平渐近线.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \infty, \text{ 则 } x = 1 \text{ 为一条垂直渐近线.}$$

18. 【解】 -2.

由公切线可知, $f(1) = 0, f'(1) = (2x - 1)|_{x=1} = 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{n}{n+2}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(1 + \frac{-2}{n+2}\right) - 0}{\frac{-2}{n+2} \cdot \frac{n+2}{-2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \cdot \frac{-2}{n+2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(1 + \frac{-2}{n+2}\right) - f(1)}{\frac{-2}{n+2}} \\ &= -2f'(1) = -2. \end{aligned}$$

$$19. \text{ 【解】 } \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}.$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2) \cdots (x-n)}{(x+1)(x+2) \cdots (x+n)} \\ &= \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(n+1)!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}. \end{aligned}$$



20. 【解】 $y = 2x$.

曲线在 $(0,0)$ 处对应的参数 $t = 1$.

$$dx = -e^{-(1-t)^2} dt,$$

$$dy = \left[2t \ln(2-t^2) - \frac{2t^3}{2-t^2} \right] dt,$$

$t = 1$ 时, $dx = -dt, dy = -2dt$, 故在 $(0,0)$ 处 $\frac{dy}{dx} = 2$, 所求切线方程为 $y = 2x$.

21. 【解】 $x + y = e^{\frac{\pi}{2}}$.

$$\begin{cases} x = r \cos \theta = e^{\theta} \cos \theta, \\ y = r \sin \theta = e^{\theta} \sin \theta \end{cases}$$

点 $(e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2})$ 的直角坐标为 $0, e^{\frac{\pi}{2}}$, 曲线在 $(e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2})$ 处的切线的斜率为

$$y' \Big|_{(e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2})} = \frac{e^{\theta} \sin \theta + e^{\theta} \cos \theta}{e^{\theta} \cos \theta - e^{\theta} \sin \theta} \Big|_{(e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2})} = -1$$

因此, 所求切线方程为 $y - e^{\frac{\pi}{2}} = -(x - 0)$, 即 $x + y = e^{\frac{\pi}{2}}$.

22. 【解】 $\frac{1}{e}$.

$$f(e) = \frac{1}{2}, \text{ 则 } \frac{dy}{dx} \Big|_{x=e} = f' \left(\frac{1}{2} \right) f'(e) = 2 \cdot \frac{1}{2e} = \frac{1}{e}.$$

23. 【解】 $-\frac{1}{e^2}$.

由 $f(x) = \int_1^{2x} e^{t^2} dt + 1$ 知, $x = \frac{1}{2}$ 时 $y = 1$,

$$f'(x) = 2e^{4x^2}, f''(x) = 16xe^{4x^2},$$

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \varphi''(y) = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{f'(x)} \right] \cdot \frac{dx}{dy} = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} \cdot \frac{1}{f'(x)},$$

$$\varphi''(1) = -\frac{f''(\frac{1}{2})}{[f'(\frac{1}{2})]^3} = -\frac{8e}{8e^3} = -\frac{1}{e^2}.$$

24. 【解】 $-\frac{2^{n-1}n!}{n-1}$.

$$x \ln(1-2x) = x \left(-2x - \frac{(-2x)^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(-2x)^n}{n} + o(x^n) \right)$$

$$\text{故 } y^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n-2}(-2)^{n-1}}{n-1} \cdot n! = -\frac{2^{n-1}n!}{n-1}.$$

25. 【解】 $\frac{(-1)^n n!}{3} \left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}} \right]$.

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x^2 + x - 2} = 1 + \frac{1}{(x+2)(x-1)} = 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right),$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{3} \left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}} \right].$$

26. 【解】 $n-1$.

$$f'(x) = \frac{[(x-1)(x-2)\cdots(x-n)]'}{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}, \text{ 令 } g(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-n),$$

$g(1) = g(2) = \cdots = g(n) = 0$, 由罗尔定理得 $g'(x)$ 至少有 $n-1$ 个零点,

又 $g(x)$ 是 n 次多项式, 则 $g'(x)$ 是 $n-1$ 次多项式, $g'(x)$ 最多有 $n-1$ 个零点, 故 $f(x)$ 的驻点个数为



$n-1$.

27.【解】 $a=4$.

令 $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + a$, 则

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 6x - 4 = 2(x-1)(x+2)(2x+1)$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = -2, x = -\frac{1}{2}, x = 1$. $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上单调减, 在 $(-2, -\frac{1}{2})$ 上单调增, 在 $(-\frac{1}{2}, 1)$ 上单调减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调增, $f(-2) = f(1) = a - 4$, 则 $a = 4$ 时原方程有两个重根.

28.【解】 $-13 < a < -8$.

令 $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + a$, 则

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 12x + 24 = 12(x-1)(x-2)(x+1)$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = -1, x = 1, x = 2$. $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调减, 在 $(-1, 1)$ 上单调增, 在 $(1, 2)$ 上单调减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调增, $f(-1) = a - 19, f(1) = 13 + a, f(2) = 8 + a$, 由题设知

$$f(-1) < 0, f(1) > 0, f(2) < 0, \text{ 则 } -13 < a < -8$$

29.【解】 $F(x) = \int_0^x tf(x-t)dt$ (令 $x-t=u$)

$$= \int_0^x (x-u)f(u)du = x \int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - \frac{1}{2}x^2}{bx^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du - \frac{1}{2}x^2}{bx^k}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u)du + xf(x) - xf(x) - x}{bkx^{k-1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{bk(k-1)x^{k-2}}$$

$$\text{由 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - (x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{x^2} = 2,$$

$$\text{知 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{3}{2}, \text{ 则 } k = 3, b = \frac{1}{4}, f(0) = 1, f'(0) = \frac{3}{2}.$$

30.【解】 在 $y - xe^{y-1} = 1$ 中, 令 $x = 0$ 得 $y = 1$. 在 $y - xe^{y-1} = 1$ 两边对 x 求导得

$$y' - e^{y-1} - xy'e^{y-1} = 0, \text{ 即 } (2-y)y' - e^{y-1} = 0$$

由 $x = 0, y = 1$, 得 $y'|_{x=0} = 1$. 方程两边继续对 x 求导得

$$(2-y)y'' - y'^2 - e^{y-1}y' = 0$$

$$\text{由 } x = 0, y = 1, \text{ 得 } y'' \Big|_{x=0} = 2.$$

$$\text{因为 } \frac{dz}{dx} = f'(\ln y - \sin x) \left(\frac{y'}{y} - \cos x \right), \text{ 故 } \frac{dz}{dx} \Big|_{x=0} = 0.$$

$$\text{又 } \frac{d^2z}{dx^2} = f''(\ln y - \sin x) \left(\frac{y'}{y} - \cos x \right)^2 + f'(\ln y - \sin x) \left(\frac{y''}{y} - \frac{(y')^2}{y^2} + \sin x \right),$$

$$\text{所以 } \frac{d^2z}{dx^2} \Big|_{x=0} = f'(0)(2-1) = 1.$$

$$31.【解】 \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{f'(t) + tf''(t) - f'(t)}{f''(t)} = t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(t) = \frac{d}{dt}(t) \frac{dt}{dx} = 1 \cdot \frac{1}{x'(t)} = \frac{1}{f''(t)},$$



$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{t},$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right) \frac{dt}{dy} = \left(-\frac{1}{t^2}\right) \cdot \frac{1}{y'(t)} = -\frac{1}{t^3 f'(t)}.$$

$$32. \text{【解】} \quad x'(0) = (3t^2 + 2) \Big|_{t=0} = 2, x''(0) = (6t) \Big|_{t=0} = 0,$$

等式 $t - \int_1^{y+t} e^{-u^2} du = 0$ 两端对 t 求导可得

$$y'(0) = e - 1, y''(0) = 2e^2$$

$$\text{则 } \frac{dy}{dx} \Big|_{t=0} = \frac{e-1}{2}, \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=0} = \frac{e^2}{2}.$$

33. 【解】 令 $tx^2 = u$, 则

$$\varphi(x) = \int_0^{x^2 \sin x} \frac{1}{x^2} f(u) du = \frac{1}{x^2} \int_0^{x^2 \sin x} f(u) du, (x \neq 0)$$

由已知得 $\varphi(0) = 0$.

(1) 当 $x \neq 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= -\frac{2}{x^3} \int_0^{x^2 \sin x} f(u) du + \frac{1}{x^2} f(x^2 \sin x) \cdot (2x \sin x + x^2 \cos x) \\ &= -\frac{2}{x^3} \int_0^{x^2 \sin x} f(u) du + f(x^2 \sin x) \left(\frac{2}{x} \sin x + \cos x \right); \end{aligned}$$

在 $x=0$ 点处, 由导数定义有

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \int_0^{x^2 \sin x} f(u) du \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x \sin x + x^2 \cos x) f(x^2 \sin x)}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x^2 \sin x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x + x \cos x}{3x} \\ &= f(0) = 2. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \varphi'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x^3} \int_0^{x^2 \sin x} f(u) du + f(x^2 \sin x) \left(\frac{2}{x} \sin x + \cos x \right), & x \neq 0, \\ 2, & x = 0. \end{cases}$$

(2) 因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{2}{x^3} \int_0^{x^2 \sin x} f(u) du + f(x^2 \sin x) \left(\frac{2}{x} \sin x + \cos x \right) \right] \\ &= -2f(0) + 3f(0) = 2 = \varphi'(0), \end{aligned}$$

故 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 点处连续. 又当 $x \neq 0$ 时, $\varphi'(x)$ 连续, 所以 $\varphi'(x)$ 处处连续.

34. 【解】 令 $u = xt$, 得 $\varphi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du$ ($x \neq 0$), 因而

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x^2} \left(xf(x) - \int_0^x f(u) du \right), (x \neq 0)$$

又由题设知 $f(0) = 0, \varphi(0) = 0$,

$$\varphi'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} \int_0^x f(u) du}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{A}{2}$$



$$\text{所以, } \varphi'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \left(xf(x) - \int_0^x f(u) du \right), & x \neq 0, \\ \frac{A}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{由于 } \lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(xf(x) - \int_0^x f(u) du \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2} \\ &= A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} = \varphi'(0). \end{aligned}$$

所以 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

35. 【解】 对方程两边求导可得

$$3y^2 y' - 2yy' + xy' + y - x = 0$$

令 $y' = 0$, 由(1)得 $y = x$, 将此代入原方程有 $2x^3 - x^2 - 1 = 0$.

从而可得惟一驻点 $x = 1$, 对(1)式两边再求导, 得

$$(3y^2 - 2y + x)y'' + 2(3y - 1)y' + 2y' - 1 = 0$$

因此 $y''|_{(1,1)} = \frac{1}{2} > 0$, 故 $x = 1$ 是 $y = y(x)$ 的极小值点.

36. 【解】 (1) 由于 $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{t} - 1$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{t^3}$, 当 $t > 0$ 时, $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, 故 L 上凸.

(2) 因为当 $t = 0$ 时, L 在对点处的切线方程为 $x = 1$, 不合题意, 故设切点 (x_0, y_0) 对应的参数为 $t_0 > 0$, 则 L 在 (x_0, y_0) 处的切线方程为

$$y - (4t_0 - t_0^2) = \left(\frac{2}{t_0} - 1 \right) (x - t_0^2 - 1)$$

令 $x = -1, y = 0$, 得 $t_0^2 + t_0 - 2 = 0$, 解得 $t_0 = 1$ 或 $t_0 = -2$ (舍去).

由 $t_0 = 1$ 知, 切点为 $(2, 3)$, 切线方程为 $y = x + 1$.

(3) 由 $t = 0, t = 4$ 知 L 与 x 轴交点分别为 $(1, 0)$ 和 $(17, 0)$. 所求平面图形的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 (x+1) dx - \int_1^2 y dx = \frac{9}{2} - \int_0^1 (4t - t^2) d(t^2 + 1) \\ &= \frac{9}{2} - 2 \int_0^1 (4t^2 - t^3) dt = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

37. 【分析】 令 $f(x) = x^3 - x - \sin x$, 则 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数, 从而, 原方程在区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上实根个数相同, 因此, 只需讨论 $(0, +\infty)$ 上实根个数.

【解】 $f(0) = 0, f'(x) = 3x^2 - 1 - \cos x$

$$f'(0) = -2 < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$$

$$f''(x) = 6x + \sin x > 0, x \in (0, +\infty)$$

则存在唯一的 $x_0 \in (0, +\infty)$, 使 $f'(x_0) = 0$, 且

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调减, $f(x) < 0$;

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调增, 又 $f(x_0) < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$,

则原方程在区间 $(0, x_0)$ 上无实根, 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上有唯一实根. 故原方程共有三个实根.

38. 【解】 令 $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt - x^3 + x$, 则 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数, 从而, 原方程在区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上实根个数相同, 因此, 只需讨论 $(0, +\infty)$ 上实根个数.

又

$$f(0) = 0, f'(x) = e^{-x^2} - 3x^2 + 1$$

$$f'(0) = 2 > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\infty$$



$$f''(x) = -2xe^{-x^2} - 6x < 0, x \in (0, +\infty)$$

则存在唯一的 $x_0 \in (0, +\infty)$, 使 $f'(x_0) = 0$, 且

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调增;

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调减.

$$f(x_0) > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

则原方程在区间 $(0, x_0)$ 上无实根, 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上有唯一实根. 故原方程共有三个实根.

39. 【解】 原方程变形得 $x^2 e^{-x} = \frac{1}{a}$, 令 $f(x) = x^2 e^{-x} - \frac{1}{a}$.

令 $f'(x) = e^{-x}(2x - x^2) = xe^{-x}(2 - x) = 0$, 得 $x = 0, x = 2$.

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调减.

当 $x \in (0, 2)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调增.

当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调减.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^{-x} - \frac{1}{a}) = +\infty$$

$$f(0) = -\frac{1}{a} < 0, f(2) = \frac{4}{e^2} - \frac{1}{a}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{x^2}{e^x} - \frac{1}{a}) = -\frac{1}{a} < 0$$

则 1) 当 $0 < a < \frac{e^2}{4}$ 时, 一个实根;

2) 当 $a = \frac{e^2}{4}$ 时, 两个实根;

3) 当 $a > \frac{e^2}{4}$ 时, 三个实根.

40. 【解】 考虑曲线 $y = \frac{\ln x}{x}$ 与 $y = k$ 的交点个数, $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 画出 $y = \frac{\ln x}{x}$ 的图形,

当 $k \leq 0$ 或 $k = \frac{1}{e}$ 时有唯一根; 当 $0 < k < \frac{1}{e}$ 时有两个实根; 当 $k > \frac{1}{e}$ 时无实根.

41. 【证】 令 $f(x) = \ln(1+x) - xe^{-x}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - e^{-x} + xe^{-x} = \frac{1}{1+x} - \frac{1-x}{e^x} = \frac{e^x - 1 + x^2}{(1+x)e^x} > 0, (x > 0)$$

$$f(0) = 0, \text{ 则 } f(x) > 0, (x > 0).$$

42. 【证】 令 $f(x) = 2\sin x + e^x - e^{-x} - 4x$. 则

$$f'(x) = 2\cos x + e^x + e^{-x} - 4.$$

$$f''(x) = -2\sin x + e^x - e^{-x}.$$

$$f'''(x) = -2\cos x + e^x + e^{-x} > 0.$$

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0.$$

43. 【证】 由函数 $y = \ln x$ 的单调性. 只需证 $a\ln(a+x) < (a+x)\ln a$.

设 $f(x) = (a+x)\ln a - a\ln(a+x)$, 则 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内连续、可导, 且

$$f'(x) = \ln a - \frac{a}{a+x} > 0$$

所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内单调增. 又 $f(0) = 0$, 从而得 $f(x) > 0, x > 0$, 即

$$a\ln(a+x) < (a+x)\ln a, x > 0$$

所以

$$(a+x)^a < a^{a+x}, x > 0$$



44.【证】 只要证 $a^2 < ab \frac{\ln a}{\ln b}$ 和 $ab \frac{\ln a}{\ln b} < b^2$. 即 $\frac{a}{\ln a} < \frac{b}{\ln b}$ 和 $a \ln a < b \ln b$.

分别证明 $f(x) = \frac{x}{\ln x}, g(x) = x \ln x$ 单调增即可.

45.【证】 令 $F(x) = e^{g(x)}(f(x) - x)$, 则

$$F(0) = -e^{g(0)} < 0, F(1) = -2e^{g(1)} < 0$$

$$\text{又 } \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{2} = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 x dx = \int_0^1 [f(x) - x] dx > 0,$$

则至少存在一点 $c \in (0, 1)$, 使 $f(c) - c > 0$, 因此 $F(c) > 0$, 由连续函数的零点定理知存在两点 $a \in (0, c), b \in (c, 1)$ 使 $F(a) = F(b) = 0$,

由罗尔定理知至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $F'(\xi) = 0$,

$$\text{即 } e^{g(\xi)}[f'(\xi) - 1] + e^{g(\xi)}g'(\xi)[f(\xi) - \xi] = 0,$$

$$\text{故 } f'(\xi) + g'(\xi)[f(\xi) - \xi] = 1.$$

46.【证】 由 $\int_0^1 f(x) dx = 3 \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx$ 得, $\int_0^{\frac{2}{3}} f(x) dx + \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx = 3 \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx$

则 $\int_0^{\frac{2}{3}} f(x) dx = 2 \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx$, 由积分中值定理得

$$\frac{2}{3}f(c) = \frac{2}{3}f(\eta), c \in (0, \frac{2}{3}), \eta \in (\frac{2}{3}, 1)$$

从而 $f(c) = f(\eta)$, 令 $F(x) = e^{g(x)}[f(x) - f(\eta)]$,

显然 $F(x)$ 在区间 $[c, \eta]$ 上满足罗尔定理的条件, 则存在 $\xi \in (c, \eta)$, 使 $F'(\xi) = 0$,

$$\text{即 } f'(\xi) = g'(\xi)[f(\eta) - f(\xi)].$$

47.【证】 令 $F(x) = f^2(x) + f'^2(x)$. 由拉格朗日定理知:

$$\frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = f'(a), a \in (-2, 0)$$

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f'(b), b \in (0, 2)$$

$$|f'(a)| \leq \frac{1}{2}(|f(0)| + |f(-2)|) \leq 1$$

$$|f'(b)| \leq \frac{1}{2}(|f(0)| + |f(2)|) \leq 1$$

$$F(a) = f^2(a) + f'^2(a) \leq 2.$$

$$F(b) = f^2(b) + f'^2(b) \leq 2, \text{ 而 } F(0) = f^2(0) + f'^2(0) = 4.$$

$F(x) = f^2(x) + f'^2(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则存在 $\xi \in (a, b)$, $F(x)$ 在 ξ 点取到它在 $[a, b]$ 上的最大值, 从而 $F'(\xi) = 0$, 即

$$2f'(\xi)[f(\xi) + f''(\xi)] = 0$$

$f''(\xi) + f(\xi) = 0$ 但 $f'(\xi) \neq 0$, 否则 $F(\xi) = f^2(\xi) \leq 1 < F(0)$, 与 $F(\xi)$ 是最大值矛盾.

48.【证】 (1) 因为 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在, 故 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(2x-a) = 0$, 由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 从而 $f(a) = 0$.

又 $f'(x) > 0$ 知 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调增加, 故

$$f(x) > f(a) = 0, x \in (a, b)$$

$$(2) \text{ 设 } F(x) = x^2, g(x) = \int_a^x f(t) dt (a \leq x \leq b),$$

则 $g'(x) = f(x) > 0$, 故 $F(x), g(x)$ 满足柯西中值定理的条件, 于是在 (a, b) 内存在点 ξ , 使



$$\frac{F(b) - F(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{b^2 - a^2}{\int_a^b f(t) dt - \int_a^a f(t) dt} = \frac{(x^2)'}{\left(\int_a^x f(t) dt\right)'} \Big|_{x=\xi}$$

即

$$\frac{b^2 - a^2}{\int_a^b f(x) dx} = \frac{2\xi}{f(\xi)}$$

(3) 因 $f(\xi) = f(\xi) - 0 = f(\xi) - f(a)$, 在 $[a, \xi]$ 上应用拉格朗日中值定理, 知在 (a, ξ) 内存在一点 η , 使 $f(\xi) = f'(\eta)(\xi - a)$, 从而由 (2) 的结论得

$$\frac{b^2 - a^2}{\int_a^b f(x) dx} = \frac{2\xi}{f'(\eta)(\xi - a)}$$

$$\text{即有 } f'(\eta)(b^2 - a^2) = \frac{2\xi}{(\xi - a)} \int_a^b f(x) dx.$$

49. 【证】 只要证 $\frac{e^\eta}{f'(\eta)} = \frac{e^\xi[g(\xi) + g'(\xi)]}{f'(\xi)}$, 由柯西定理知

$$\frac{e^b - e^a}{f(b) - f(a)} = \frac{e^\eta}{f'(\eta)}, \frac{e^b g(b) - e^a g(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{e^\xi[g(\xi) + g'(\xi)]}{f'(\xi)}$$

又 $g(a) = g(b) = 1$, 则原题得证.

50. 【证】 设函数 $F(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3$, 由题意知 $F(0) = 0, F(1) = 0$.

在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上分别应用拉格朗日中值定理, 有

$$F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) = F'(\xi)\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{2}(f'(\xi) - \xi^2), \xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right) = F'(\eta)\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(f'(\eta) - \eta^2), \eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

二式相加, 得

$$F(1) - F(0) = \frac{1}{2}(f'(\xi) - \xi^2) + \frac{1}{2}(f'(\eta) - \eta^2) = 0$$

即 $f'(\xi) + f'(\eta) = \xi^2 + \eta^2$.

51. 【证】 由拉格朗日中值定理知,

$$\frac{f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)}{\frac{1}{2} - 0} = f'(\xi), \xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = f'(\eta), \eta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$f'(\xi) + f'(\eta) = \frac{f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)}{\frac{1}{2}} + \frac{f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}} = 0$$

52. 【证】 由拉格朗日中值定理知,

$$\frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = f'(x_1), x_1 \in (0, c)$$

$$\frac{f(1) - f(c)}{1 - c} = f'(x_2), x_2 \in (c, 1)$$

$$\frac{1}{f'(x_1)} - \frac{1}{f'(x_2)} = \frac{c}{f(c)} + \frac{1-c}{f(c)} = \frac{1}{f(c)}$$



只要 $f(c) = \frac{M}{n}$, 由于 $0 < \frac{M}{n} < M$, 由连续函数介值定理知, 存在 $c \in (0, 1)$, 使 $f(c) = \frac{M}{n}$.

53. 【证】 设 $f(c) = \max_{0 \leq x \leq 1} f(x) = 2$, 则 $0 < c < 1$, 且 $f'(c) = 0$,

由泰勒公式知 $f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2$

在上式中分别令 $x = 0$ 和 $x = 1$ 得

$$f''(\xi_1) = -\frac{4}{c^2}, \xi_1 \in (0, c)$$

$$f''(\xi_2) = \frac{-4}{(1-c)^2}, \xi_2 \in (c, 1)$$

若 $c \leq \frac{1}{2}$, 则 $f''(\xi_1) = -\frac{4}{c^2} \leq \frac{-4}{(\frac{1}{2})^2} = -16$,

若 $c > \frac{1}{2}$, 则 $f''(\xi_2) = \frac{-4}{(1-c)^2} \leq \frac{-4}{(\frac{1}{2})^2} = -16$.

$$54. \text{【证】} \quad f(0) = f(x) + f'(x)(0-x) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(0-x)^2 \quad (1)$$

$$f(2) = f(x) + f'(x)(2-x) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(2-x)^2 \quad (2)$$

(2) 式减(1) 式得

$$f(2) - f(0) = 2f'(x) + \frac{1}{2}[f''(\xi_2)(2-x)^2 - f''(\xi_1)x^2]$$

$$|f'(x)| \leq \frac{|f(0)| + |f(2)|}{2} + \frac{1}{4}[|f''(\xi_2)|(2-x)^2 + |f''(\xi_1)|x^2]$$

$$\leq 1 + \frac{1}{4}[(2-x)^2 + x^2] \leq 1 + \frac{1}{4} \cdot 4 = 2.$$

第三章 一元函数积分学

1. 【解】 (B).

$f'(x) = \sin x$, 则 $f(x) = -\cos x + C$, $\int f(x) dx = -\sin x + Cx + C'$.

故选(B).

2. 【解】 (D).

因为 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则 $g(x)$ 有原函数.

而 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处为第一类间断点, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不存在原函数.

几个重要结论:

(1) $f(x)$ 在区间 I 上连续 $\rightarrow f(x)$ 在 I 上有原函数.

(2) $f(x)$ 在区间 I 上不连续 $\rightarrow f(x)$ 在 I 上不存在原函数.

(3) $f(x)$ 在区间 I 上有第一类间断点 $\rightarrow f(x)$ 在 I 上不存在原函数.

3. 【解】 (D).

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt = \begin{cases} \int_1^x t^2 dt = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}, & 0 \leq x < 1, \\ \int_1^x 1 dt = x - 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$



4.【解】 (D).

$$F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt = \begin{cases} \int_{-1}^x e^t dt, & x \leq 0 \\ \int_{-1}^0 e^t dt + \int_0^x (t^2 + a) dt, & x > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} e^x - e^{-1}, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-1} + \frac{1}{3}x^3 + ax, & x > 0. \end{cases}$$

$F(x)$ 在 $x=0$ 处连续, $F'_-(0) = 1, F'_+(0) = a$, 故应选(D).

简单的方法是: 若 $a=1$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导;

若 $a \neq 1$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处为跳跃间断点, $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导, 故应选(D).

5.【解】 (B).

由定积分的几何意义知 $S_2 < S_1 < S_3$, 故应选(B).

6.【解】 (A).

令 $x^2 - t^2 = u$, 则 $-2tdt = du$, 当 $t=0$ 时 $u = x^2$, 当 $t=x$ 时 $u=0$.

$$\text{则 } \frac{d}{dx} \int_0^x tf(x^2 - t^2) dt = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} f(u) du = xf(x^2).$$

简单的方法是: 排除法, 取 $f(x) \equiv 1$, 则 $\frac{d}{dx} \int_0^x tf(x^2 - t^2) dt = \frac{d}{dx} \int_0^x t dt = x$.

显然(B)(C)(D) 都不正确, 故应选(A).

7.【解】 (D).

等式 $5x^3 + 40 = \int_a^x f(t) dt$ 两端求导得, $15x^2 = f(x)$,

$$\text{则 } 5x^3 + 40 = \int_a^x 15t^2 dt = 5x^3 - 5a^3, a = -2,$$

$axf(x) = -30x^3$, 从而 $k=1$,

$$c(\tan x - x)^k = c(\tan x - x) \sim \frac{c}{3}x^3, \text{ 故 } c = -90.$$

8.【解】 (B).

$$a_n = \frac{3}{2n} \int_0^{\frac{n}{n+1}} (1+x^n)^{\frac{1}{2}} d(1+x^n) = \frac{1}{n} (1+x^n)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{n} \left\{ \left[1 + \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right]^{\frac{3}{2}} - 1 \right\}$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left[1 + \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right]^{\frac{3}{2}} - 1 \right\} = (1+e^{-1})^{\frac{3}{2}} - 1.$$

9.【解】 (B).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right)^2}$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{n}{n}\right) \right] = 2 \int_0^1 \ln(1+x) dx = 2 \int_1^2 \ln x dx.$$

10.【解】 (A).

由于当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $\sin x < x$, 且 $\cos x$ 单调减知

$$\sin(\sin x) < \sin x, \cos(\sin x) > \cos x$$

$$\text{则 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sin x) dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin x) dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1. \text{ 故选(A).}$$

11.【解】 (B).



当 $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ 时, $0 < \sin x < \cos x < 1 < \cot x$, 所以 $\ln \sin x < \ln \cos x < \ln \cot x$,

故应选(B).

12.【解】 (D).

先画 $y = \sin x$ 的图形, 再画 $y = e^{x^2} \sin x$ 的图形, 由定积分的几何意义知 $I_2 < I_1 < I_3$.

13.【解】 (B).

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^3 x dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = 2\pi \cdot \frac{2}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$$\begin{aligned} 14.【解】 \int \frac{x+5}{x^2-6x+13} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2-6x+13)}{x^2-6x+13} + 8 \int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2+2^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2-6x+13) + 4 \arctan \frac{x-3}{2} + C \end{aligned}$$

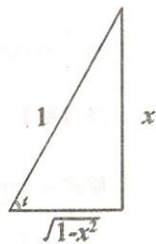
$$15.【解】 (\text{方法一}) \quad \text{原式} = -\int \arcsin x d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\arcsin x}{x} + \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{其中} \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}} = -\int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}} = -\ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}\right) + C$$

$$(\text{方法二}) \quad \text{令 } x = \sin t, \text{ 原式} = \int \frac{t}{\sin^2 t} d\sin t = -\int t d\left(\frac{1}{\sin t}\right) = -\frac{t}{\sin t} + \int \frac{dt}{\sin t}$$

$$= -\frac{t}{\sin t} - \ln |\csc t + \cot t| + C$$

$$= -\frac{\arcsin x}{x} - \ln \left| \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right| + C$$



$$16.【解】 \quad \text{原式} = -\int (x^2 e^x) d\frac{1}{x+2} = -\frac{x^2 e^x}{x+2} + \int x e^x dx = -\frac{x^2 e^x}{x+2} + x e^x - e^x + C.$$

$$17.【解】 \quad \left(\int_0^{x^3-1} f(t) dt\right)' = (x^3-1)', f(x^3-1) \cdot 3x^2 = 1, f(x^3-1) = \frac{1}{3x^2}.$$

$$\text{令 } x^3 - 1 = 7 \text{ 得 } x = 2, \text{ 所以 } f(7) = \frac{1}{3 \times 2^2} = \frac{1}{12}.$$

$$18.【解】 \quad \text{设 } \int_0^1 f(t) dt = I, \text{ 于是 } f(x) = x + 2I. \text{ 两边在 } [0, 1] \text{ 上积分,}$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x dx + 2I \int_0^1 dx$$

$$\text{即 } I = \frac{1}{2} + 2I, \text{ 所以 } I = -\frac{1}{2}, \text{ 故 } f(x) = x - 1.$$

$$19.【解】 \quad \text{令 } x = \sin t, \text{ 则原式} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t \cos t dt}{(2 - \sin^2 t) \cos t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-d\cos t}{1 + \cos^2 t} = \frac{\pi}{4}.$$

$$20.【解】 \quad \text{原积分} \stackrel{\text{令 } \sqrt{x} = t}{=} 2 \int_0^{\pi} t^2 \cos t dt = -4 \int_0^{\pi} t \sin t dt = -4\pi.$$

$$21.【解】 \quad e^{-t^2} \text{ 是偶函数, 则 } \int_0^x e^{-t^2} dt \text{ 是奇函数.}$$

$$\text{原式} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^2 x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^2 x dx = \frac{\pi}{8}.$$

$$22.【解】 \quad \text{原式} = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 x - \cos^4 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} |\cos x| \sin x dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$23.【解】 (\text{方法一}) \quad \text{原式} = \int_0^{2a} x \sqrt{a^2 - (x-a)^2} dx$$



$$\frac{x-a=a\sin t}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin t)a^3 \cos^2 t dt = 2a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{2}a^3}.$$

(方法二) 原式 $= \int_0^{2a} x \sqrt{a^2 - (x-a)^2} dx$

$$= \int_0^{2a} [(x-a) + a] \sqrt{a^2 - (x-a)^2} dx$$

$$= a \int_0^{2a} \sqrt{2ax - x^2} dx = \frac{\pi}{2}a^3.$$

24. 【解】 等式 $f(x) = x - \int_0^\pi f(x) \cos x dx$ 两端同乘 $\cos x$ 并从 0 到 π 积分得,

$$\int_0^\pi f(x) \cos x dx = \int_0^\pi x \cos x dx - \int_0^\pi \cos x dx \cdot \int_0^\pi f(x) \cos x dx$$

得 $\int_0^\pi f(x) \cos x dx = \int_0^\pi x \cos x dx = -2$, 则 $f(x) = x + 2$.

25. 【解】 由 $\int_0^x f(t) dt = 3x^3 - x \int_{-1}^1 f(t) dt$ 知, $f(x) = 9x^2 - \int_{-1}^1 f(t) dt$

显然, $f(x)$ 是偶函数, 在 $\int_0^x f(t) dt = 3x^3 - x \int_{-1}^1 f(t) dt$ 中令 $x = 1$ 得

$$\int_0^1 f(t) dt = 3 - \int_{-1}^1 f(t) dt$$

则 $\int_{-1}^1 f(t) dt = 2$, $f(x) = 9x^2 - 2$.

26. 【解】 $\frac{\pi}{4}$.

原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{2}{n}\right)^2} + \dots + \sqrt{1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^2} \right)$

$$= \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

27. 【解】 $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

原式 $= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos x} dx = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\pi \sin \frac{x}{2} dx = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$

28. 【解】 0.

$$\int_0^1 e^{-x} \sin nx dx = \int_0^1 e^{-x} d\left(-\frac{1}{n} \cos nx\right) = -\frac{1}{n} e^{-x} \cos nx \Big|_0^1 - \frac{1}{n} \int_0^1 e^{-x} \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{n} \left(1 - e^{-1} \cos n - \int_0^1 e^{-x} \cos nx dx\right),$$

而 $\left|1 - e^{-1} \cos n - \int_0^1 e^{-x} \cos nx dx\right| \leq 1 + e^{-1} + \int_0^1 e^{-x} dx = 2$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{-x} \sin nx dx = 0$.

29. 【解】 令 $t-x=u$, 则

$$\int_{-x}^x f(t-x) dt = \int_{-x}^0 f(u) du, \quad \int_{-x}^0 f(u) du = (1+x^2)^x - 1$$

分别令 $x=1, x=-1$ 得

$$\int_{-1}^0 f(u) du = 1, \quad \int_1^0 f(u) du = -\frac{1}{2}$$

则 $\int_{-1}^1 f(x) dx = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}.$

30. 【解】 由 $\int_0^x f(t) dt = xe^{-x}$ 知, $\int f(x) dx = xe^{-x} + C$,



$$\text{则} \int_1^{+\infty} \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_1^{+\infty} f(\ln x) d(\ln x) = \frac{\ln x}{x} \Big|_1^{+\infty} = 0.$$

31. 【解】 令 $\sqrt{x-2} = t$, 则 $x = t^2 + 2, dx = 2tdt$,

$$\text{原式} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 9} = \frac{2}{3} \left(\arctan \frac{t}{3} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{3}.$$

32. 【解】 所求平均值为

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx &\stackrel{\text{令 } x = \sin t}{=} \frac{2}{\sqrt{3}-1} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}-1} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos 2t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}-1} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \sin 2t \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \right) = \frac{\sqrt{3}+1}{12} \pi. \end{aligned}$$

33. 【解】 $S = \int_1^2 dx \int_2^{x+\frac{1}{x}} dy = \int_1^2 (x + \frac{1}{x} - 2) dx = \ln 2 - \frac{1}{2}.$

34. 【解】 所求面积 $A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{2a\theta} d\theta = \frac{1}{4a} (e^{4\pi a} - 1).$

35. 【解】 $y' = \tan x,$

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + (\tan x)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \ln |\sec x + \tan x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

36. 【解】 $\frac{11}{20}.$

质心的横坐标为

$$\bar{x} = \frac{\int_0^1 x \rho(x) dx}{\int_0^1 \rho(x) dx} = \frac{\int_0^1 x(-x^2 + 2x + 1) dx}{\int_0^1 (-x^2 + 2x + 1) dx} = \frac{\frac{11}{12}}{\frac{5}{3}} = \frac{11}{20}$$

37. 【解】 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^1 f(x) d\sqrt{x} = 2\sqrt{x}f(x) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} dx$

$$= -4 \int_0^1 \ln(1+x) d\sqrt{x} = -4 \ln(1+x) \sqrt{x} \Big|_0^1 + 4 \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$$

$$= -4 \ln 2 + 8 - 2\pi$$

38. 【解】 注意到被积函数内有绝对值号且 $x = 1$ 是其无穷间断点, 故

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-x}} \\ \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - (x-\frac{1}{2})^2}} = \arcsin(2x-1) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \\ \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-x}} &= \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}}} = \ln \left[\left(x-\frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} \right] \Big|_1^{\frac{3}{2}} \\ &= \ln(2 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

因此 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}} = \frac{\pi}{2} + \ln(2 + \sqrt{3}).$



$$39. \text{【解】} \quad \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \left[\int_0^{u^2} \arctan(1+t) dt \right] du}{\frac{1}{2} x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \arctan(1+t) dt}{\frac{3}{2} x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \arctan(1+x^2)}{3x} = \frac{\pi}{6}.$$

$$40. \text{【解】} \quad \text{令 } x-t=u, \text{ 则 } \int_0^x f(x-t) dt = \int_0^x f(u) du,$$

$$f(x) \int_0^x f(u) du = \sin^4 x, \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) \int_0^x f(u) du] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$$

$$\frac{1}{2} \left(\int_0^x f(u) du \right)^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3\pi}{2}}$$

$$\text{则 } f(x) \text{ 在 } [0, \frac{\pi}{2}] \text{ 上的平均值为 } \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx}{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}.$$

$$41. \text{【解】} \quad \text{原式} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\int_a^x f(t) dt - (x-a)f(a)}{(x-a)f(a) - \int_a^x f(t) dt} = \frac{1}{f(a)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{\int_a^x f(t) dt + (x-a)f(x)}$$

$$= \frac{1}{f(a)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x-a}}{\frac{\int_a^x f(t) dt}{x-a} + f(x)} = \frac{1}{f(a)} \frac{f'(a)}{2f(a)} = \frac{f'(a)}{2f^2(a)}.$$

$$42. \text{【解】} \quad \text{令 } t-x=u, \text{ 则 } \int_x^{x+f(x)} g(t-x) dt = \int_0^{f(x)} g(u) du, \text{ 即}$$

$$\int_0^{f(x)} g(u) du = x^2 \ln(1+x)$$

等式两端对 x 求导得

$$g[f(x)]f'(x) = 2x \ln(1+x) + \frac{x^2}{1+x}, \quad xf'(x) = 2x \ln(1+x) + \frac{x^2}{1+x},$$

$$f'(x) = 2 \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}, \text{ 得 } f(x) = (2x+1) \ln(1+x) - x + C,$$

由 $f(0) = 0$ 得 $C = 0$. 故 $f(x) = (2x+1) \ln(1+x) - x$.

43. 【解】 (1) 因为 $|\cos x| \geq 0$ 且 $n\pi \leq x < (n+1)\pi$, 所以

$$\int_0^{n\pi} |\cos x| dx \leq S(x) < \int_0^{(n+1)\pi} |\cos x| dx$$

又因为 $|\cos x|$ 是以 π 为周期的函数, 在每个周期上积分值相等, 所以

$$\int_0^{n\pi} |\cos x| dx = n \int_0^{\pi} |\cos x| dx = 2n, \quad \int_0^{(n+1)\pi} |\cos x| dx = 2(n+1)$$

因此当 $n\pi \leq x < (n+1)\pi$ 时, 有 $2n \leq S(x) < 2(n+1)$.

(2) 由(1)知, 当 $n\pi \leq x < (n+1)\pi$ 时, 有

$$\frac{2n}{(n+1)\pi} < \frac{S(x)}{x} < \frac{2(n+1)}{n\pi}$$

令 $n \rightarrow \infty$, 由夹逼准则得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{x} = \frac{2}{\pi}$.

44. 【解】 (1) 当 $0 \leq t \leq 1$ 时, 因为 $\ln(1+t) \leq t$, 所以 $|\ln t| [\ln(1+t)]^n \leq t^n |\ln t|$, 因此

$$\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt \leq \int_0^1 t^n |\ln t| dt$$



(2) 由(1)知 $0 \leq u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt \leq \int_0^1 t^n |\ln t| dt$. 因为

$$\int_0^1 t^n |\ln t| dt = -\int_0^1 t^n \ln t dt = \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{(n+1)^2}$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 t^n |\ln t| dt = 0$. 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

45. 【证】 由 $f(1) = k \int_0^{\frac{1}{k}} x e^{1-x} f(x) dx$ 及积分中值定理, 知至少存在一点 $\xi_1 \in [0, \frac{1}{k}] \subset [0, 1)$, 使得

$$f(1) = k \int_0^{\frac{1}{k}} x e^{1-x} f(x) dx = \xi_1 e^{1-\xi_1} f(\xi_1)$$

在 $[\xi_1, 1]$ 上, 令 $\varphi(x) = x e^{1-x} f(x)$. 那么 $\varphi(x)$ 在 $[\xi_1, 1]$ 上连续, 在 $(\xi_1, 1)$ 内可导, 且

$$\varphi(\xi_1) = f(1) = \varphi(1)$$

由罗尔定理知, 至少存在一点 $\xi \in (\xi_1, 1) \subset (0, 1)$, 使得

$$\varphi'(\xi) = e^{1-\xi} [f(\xi) - \xi f'(\xi) + \xi f'(\xi)] = 0$$

即 $f'(\xi) = (1 - \xi^{-1}) f(\xi)$.

46. 【证】 (1) 由积分中值定理可知, 存在 $\eta \in (0, 2)$, 使 $\int_0^2 f(x) dx = 2f(\eta)$.

由题设知 $\int_0^2 f(x) dx = 2f(0)$, 故 $f(\eta) = f(0)$.

(2) $\frac{f(2)+f(3)}{2}$ 介于 $f(x)$ 在 $[2, 3]$ 上的最小值与最大值之间, 根据连续函数的介值定理, 存在 $\theta \in [2,$

$3]$, 使 $f(\theta) = \frac{f(2)+f(3)}{2}$.

由题设知 $\frac{f(2)+f(3)}{2} = f(0)$, 故 $f(\theta) = f(0)$.

由于 $f(0) = f(\eta) = f(\theta)$, 且 $0 < \eta < \theta \leq 3$, 根据罗尔定理, 存在 $\xi_1 \in (0, \eta)$, $\xi_2 \in (\eta, \theta)$, 使 $f'(\xi_1) = 0$, $f'(\xi_2) = 0$, 从而存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0, 3)$, 使得 $f''(\xi) = 0$.

47. 【证】 (方法一) 令 $F(x) = \int_0^x [f(a-t) + f(t)] dt$.

则 $F(a) = \int_0^a [f(a-t) + f(t)] dt = \int_0^a f(a-t) dt \xrightarrow{a-t=u} \int_0^a f(u) du = 0, F(0) = 0$

由罗尔定理知存在 $\xi \in (0, a)$, 使 $F'(\xi) = 0$, 原题得证.

(方法二) 令 $F(x) = \int_{a-x}^x f(t) dt$, 则

$$F(0) = \int_a^0 f(t) dt = 0, F(a) = \int_0^a f(t) dt = 0$$

由罗尔定理知存在 $\xi \in (0, a)$, 使 $F'(\xi) = 0$, 原题得证.

48. 【证】 令 $F(x) = (x-1) \int_0^x f(t) dt$. 则 $F(0) = F(1) = 0$,

由罗尔定理知 $\exists \xi \in (0, 1)$, 使 $F'(\xi) = 0$, 即 $\int_0^\xi f(t) dt = (1-\xi)f(\xi)$.

由 $f(x) > 0$ 且单调减少知 $F'(x) = \int_0^x f(t) dt - (1-x)f(x)$ 递增, 则使 $F'(\xi) = 0$ 的 ξ 唯一.

49. 【证】 (方法一) (1) 设 $F(x) = x \int_x^1 f(t) dt$, 则 $F(0) = F(1) = 0$, 且

$$F'(x) = \int_x^1 f(t) dt - xf(x)$$

对 $F(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上应用罗尔定理知, 存在一点 $x_0 \in (0, 1)$, 使 $F'(x_0) = 0$,



因而 $\int_{x_0}^1 f(t)dt - x_0 f(x_0) = 0$, 即矩形面积 $x_0 f(x_0)$ 等于曲边梯形面积 $\int_{x_0}^1 f(t)dt$.

(2) 设 $\varphi(x) = \int_x^1 f(t)dt - xf(x)$, 则当 $x \in (0, 1)$ 时, 有 $\varphi'(x) = -f(x) - f(x) - xf'(x) < 0$, 所以 $\varphi(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内单调减少, 故此时(1)中的 x_0 是唯一的.

(方法二) (1) 设在区间 $(a, 1)$ ($a \geq \frac{1}{2}$) 内取 x_1 . 若在区间 $[x_1, 1]$ 上 $f(x) \equiv 0$, 则 $(x_1, 1)$ 内任一点都可作为 x_0 , 否则可设 $f(x_2) > 0$ 为连续函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1, 1]$ 上的最大值, $x_2 \in [x_1, 1]$. 在区间 $[0, x_2]$ 上, 作辅助函数 $\varphi(x) = \int_x^1 f(t)dt - xf(x)$, 则 $\varphi(x)$ 连续, 且 $\varphi(0) > 0$. 又

$$\varphi(x_2) = \int_{x_2}^1 f(t)dt - x_2 f(x_2) \leq (1 - 2x_2)f(x_2) < 0$$

因而由区间上连续函数的介值定理, 存在一点 $x_0 \in (0, x_2) \subset (0, 1)$ 使 $\varphi(x_0) = 0$, 即

$$\int_{x_0}^1 f(t)dt = x_0 f(x_0)$$

(2) 证法同上.

50. **【证】(方法一)** 由拉格朗日中值定理得

$$f(x) - f(0) = f'(c)x, c \in (0, x)$$

又 $f'(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 则必有其最大值 M 和最小值 m . 则

$$m \leq f'(c) \leq M, mx \leq f(x) \leq Mx$$

$$m \int_0^1 x dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq M \int_0^1 x dx, \frac{m}{2} \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{M}{2}, m \leq 2 \int_0^1 f(x) dx \leq M$$

由连续函数介值定理知, 至少存在一点 $\xi \in [0, 1]$, 使 $f'(\xi) = 2 \int_0^1 f(x) dx$.

(方法二) 令 $F(x) = f(x) - 2x \int_0^1 f(x) dx$, 则 $F(0) = 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 F(x) dx &= \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 2x dx \cdot \int_0^1 f(x) dx \\ &= \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx = 0 \end{aligned}$$

由积分中值定理得, 存在 $c \in (0, 1)$, 使得 $\int_0^1 F(x) dx = F(c) = 0$

由罗尔定理得, 存在 $\xi \in (0, c)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi) = 2 \int_0^1 f(x) dx$.

(方法三) 由 $f(0) = 0$ 得 $f(x) = \int_0^x f'(t) dt$, 两端积分得

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 dx \int_0^x f'(t) dt \\ &= \int_0^1 dt \int_t^1 f'(t) dx && \text{(交换积分次序)} \\ &= \int_0^1 (1-t) f'(t) dt \\ &= f'(\xi) \int_0^1 (1-t) dt && \text{(积分中值定理)} \\ &= \frac{1}{2} f'(\xi) \end{aligned}$$

即 $f'(\xi) = 2 \int_0^1 f(x) dx$, 其中 $\xi \in [0, 1]$.



51.【证】(1) 令 $F(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^{-x} f(t)dt$,

$F(x) - F(0) = xF'(\theta x) = x[f(\theta x) - f(-\theta x)]$ (拉格朗日定理)

(2) 由上式可知 $\frac{x[f(\theta x) - f(-\theta x)]}{2x^2\theta} = \frac{\int_0^x f(t)dt + \int_0^{-x} f(t)dt}{2x^2}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x[f(\theta x) - f(-\theta x)]}{2x^2\theta} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta x) - f(-\theta x)}{2\theta} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \theta = f'(0) \lim_{x \rightarrow 0^+} \theta$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t)dt + \int_0^{-x} f(t)dt}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(-x)}{4x} = \frac{1}{2} f'(0)$

则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \theta = \frac{1}{2}$.

52.【证】连续用两次分部积分公式及一次牛顿-莱布尼茨公式,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx &= f(x) \sin x \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(x) \sin x dx = - \int_0^{2\pi} f'(x) \sin x dx \\ &= f'(x) \cos x \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f''(x) \cos x dx \\ &= f'(2\pi) - f'(0) - \int_0^{2\pi} f''(x) \cos x dx \\ &= \int_0^{2\pi} f''(x) (1 - \cos x) dx \geq 0. \end{aligned}$$

53.【证】 $\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| = \left| \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right|$
 $= \left| \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx - \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dx \right|$
 $\leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| dx$
 $= \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} |f'(\xi)| \left| x - \frac{k}{n} \right| dx \text{ (拉格朗日中值定理)}$
 $\leq M \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(\frac{k}{n} - x \right) dx = M \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n^2} = \frac{M}{2n}.$

54.【证】显然 $f'(x) > 0$ ($x \geq 1$), 则 $f(x)$ 递增.

$$f(x) - f(1) = \int_1^x f'(t) dt = \int_1^x \frac{1}{t^2 + f^2(t)} dt \leq \int_1^x \frac{1}{t^2 + 1} dt < \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4}.$$

$f(x) < 1 + \frac{\pi}{4}$. 即 $f(x)$ 上有界. 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在且不超过 $1 + \frac{\pi}{4}$.

55.【解】(1) 由对称性, 所求的容积为

$$V = 2\pi \int_{-1}^{\frac{1}{2}} x^2 dy = 2\pi \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (1 - y^2) dy = \frac{9\pi}{4}$$

即该容器的容积为 $\frac{9\pi}{4}$ 立方米.

(2) 所求的功为

$$\begin{aligned} W &= 10^3 \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \pi(1 - y^2)(2 - y) g dy + 10^3 \int_{\frac{1}{2}}^2 \pi[1 - (1 - y^2)](2 - y) g dy \\ &= 10^3 \pi g \left[\int_{-1}^{\frac{1}{2}} (2 - y - 2y^2 + y^3) dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 (4y - 4y^2 + y^3) dy \right] \end{aligned}$$



$$= \frac{27 \times 10^3}{8} \pi g$$

即所求的功为 $\frac{27 \times 10^3}{8} \pi g$ 焦耳.

$$56. \text{【解】} (1) s = \int_1^e \sqrt{1+y^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{e^2+1}{4}.$$

$$(2) \int_1^e x \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x\right) dx = \frac{1}{16}(e^2+1)(e^2-3)$$

$$\int_1^e \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x\right) dx = \frac{1}{12}e^3 - \frac{7}{12}$$

$$x = \frac{\frac{1}{16}(e^2+1)(e^2-3)}{\frac{1}{12}e^3 - \frac{7}{12}} = \frac{3(e^2+1)(e^2-3)}{4(e^3-7)}.$$

57.【解】(方法一) 作出图形. $\widehat{AB}$ 的方程为 $y = x^2 + 2 (0 \leq x \leq 1)$, $\widehat{BC}$ 的方程为 $y = 4 - x^2 (1 \leq x \leq 2)$.

设旋转体在区间 $[0, 1]$ 上体积为 V_1 , 在区间 $[1, 2]$ 上的体积为 V_2 , 则它们的体积元素分别为

$$dV_1 = \pi \{3^2 - [3 - (x^2 + 2)]^2\} dx = \pi [8 + 2x^2 - x^4] dx,$$

$$dV_2 = \pi \{3^2 - [3 - (4 - x^2)]^2\} dx = \pi [8 + 2x^2 - x^4] dx.$$

由对称性得

$$\begin{aligned} V &= 2(V_1 + V_2) = 2\pi \int_0^1 (8 + 2x^2 - x^4) dx + 2\pi \int_1^2 (8 + 2x^2 - x^4) dx \\ &= 2\pi \int_0^2 (8 + 2x^2 - x^4) dx = \frac{448}{15} \pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(方法二)} \quad V &= 2\pi \iint_D (3-y) d\sigma = 2\pi \int_{-2}^2 dx \int_0^{3-1-x^2-1} (3-y) dy \\ &= -\pi \int_{-2}^2 [(x^2-1)^2 - 9] dx = \frac{448}{15} \pi. \end{aligned}$$

58.【解】(1)(方法一) 由 Γ 与 $y = x+1$ 相切知

$$\begin{cases} a - bx^2 = x + 1 \\ -2bx = 1 \end{cases}$$

$$\text{解得 } 4b = \frac{1}{1-a} (0 < a < 1)$$

(方法二) 由于 Γ 与 $y = x+1$ 相切, 则方程 $a - bx^2 = x+1$ 有唯一解, 则

$$\Delta = 0, 4b = \frac{1}{1-a}$$

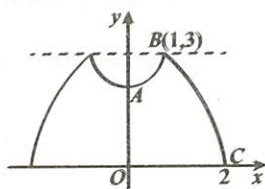
$$(2) V_y = 2\pi \int_0^{\sqrt{\frac{a}{b}}} x(a - bx^2) dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a^2}{b} = 2\pi a^2 (1-a). (0 < a < 1)$$

当 $a = \frac{2}{3}$ 时 V_y 最大, 此时 $b = \frac{3}{4}$.

$$59. \text{【解】} (1) V_x = 2\pi \iint_D y d\sigma = 2\pi \int_1^2 dy \int_{\frac{1}{y}}^y x dx = \frac{8\pi}{3}, V_y = 2\pi \iint_D x d\sigma = 2\pi \int_1^2 dy \int_{\frac{1}{y}}^y x dx = \frac{11}{6} \pi.$$

(2) 区域 D 绕 $x = 2$ 旋转所得旋转体的体积为

$$V = 2\pi \iint_D (2-x) d\sigma = 2\pi \int_1^2 dy \int_{\frac{1}{y}}^y (2-x) dx = \pi \left(\frac{25}{6} - 4\ln 2\right)$$



区域 D 绕 $y = 2$ 旋转所得旋转体的体积为

$$V = 2\pi \iint_D (2-y) d\sigma = 2\pi \int_1^2 dy \int_{\frac{1}{y}}^y (2-y) dx = 4\pi \left(\frac{5}{6} - \ln 2 \right)$$

60.【解】 $r(x, y) = \frac{|y-x|}{\sqrt{2}} = \frac{x-y}{\sqrt{2}},$

$$V = 2\pi \iint_D \frac{x-y}{\sqrt{2}} d\sigma = 2\pi \int_0^1 dx \int_{x^2}^x \frac{x-y}{\sqrt{2}} dy = \frac{\sqrt{2}}{60} \pi.$$

61.【解】 (1) $S = \iint_D 1 d\sigma = 2 \int_0^\pi d\theta \int_0^{1+\cos\theta} r dr = \int_0^\pi (1+\cos\theta)^2 d\theta = \frac{3\pi}{2}.$

(2) 由于 D 在极轴上方和下方两部分绕极轴旋转产生的旋转体重合, 则

$$V_x = 2\pi \iint_{D_{y \geq 0}} y d\sigma = 2\pi \int_0^\pi \int_0^{1+\cos\theta} r^2 \sin\theta dr = \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi (1+\cos\theta)^3 \sin\theta d\theta = \frac{8\pi}{3}$$

第四章 常微分方程

1.【解】 (D).

由 $\Delta y = \frac{y \Delta x}{1+x^2} + \alpha$ 知 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1+x^2}$, 分离变量, 解此微分方程, 得

$$\ln y = \arctan x + C$$

由 $y(0) = \pi$ 知 $C = \ln \pi$, 故 $\ln y = \arctan x + \ln \pi$.

于是, 当 $x = 1$ 时 $\ln y = \arctan 1 + \ln \pi = \frac{\pi}{4} + \ln \pi$, 即 $y = \pi e^{\frac{\pi}{4}}$, 故选 (D).

2.【解】 (D).

特征方程为 $r^2 + 2r + 1 = 0$, 则 $r_1 = r_2 = -1$, 其特解形式为 $(Ax + B)x^2 e^{-x}$.

3.【解】 (B).

由题设知 $r = -1, -1, 1$ 为所求齐次线性微分方程对应特征方程的 3 个根, 则其特征方程为

$$(r+1)^2(r-1) = r^3 + r^2 - r - 1 = 0$$

故应选 (B).

4.【解】 (C).

微分方程的特解可分为两个方程 $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}$, $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} \cos 2x$ 的特解之和, 特征方程 $r^2 - 4r + 8 = 0$ 有一对共轭的复根, $r_1 = 2 + 2i, r_2 = 2 - 2i$.

5.【解】 (D).

由 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + x e^x$ 为方程的解知, $r_1 = 1, r_2 = -2$ 为两个特征根,

特征方程为 $(r-1)(r+2) = r^2 + r - 2 = 0$, 正确选项只可能是 (C) 或 (D),

将 $y = x e^x$ 代入 (D) 中的方程知其满足该方程.

6.【解】 (D).

由 $y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$ 为方程的解知, $r_1 = 1, r_{2,3} = \pm 2i$ 为三个特征根, 特征方程为 $(r -$

$1)(r^2 + 4) = r^3 - r^2 + 4r - 4 = 0$, 故应选 (D).

7.【解】 (C).

特征方程为 $r^2 - \lambda^2 = 0$, 则 $r_{1,2} = \pm \lambda$, 则特解形式为 $y^* = x(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$.

故应选 (C).



8.【解】 原方程可化为

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x \ln x} = \frac{1}{x}$$

解此线性方程得 $y = \frac{1}{2}(\ln x + \frac{1}{\ln x})$.

9.【解】 原方程即 $y' = \frac{y}{2x} + \frac{x^2}{2}$, 解此一阶线性方程, 得 $y = \sqrt{x}(\frac{1}{5}x^2\sqrt{x} + C)$.

由 $y|_{x=1} = \frac{6}{5}$ 知 $C = 1$, 故所求方程特解为 $y = \frac{1}{5}x^3 + \sqrt{x}$.

10.【解】 由原方程得 $(1 + e^{-\frac{x}{y}})\frac{dx}{dy} + (1 - \frac{x}{y}) = 0$,

令 $\frac{x}{y} = u$, 则 $x = yu$, $\frac{dx}{dy} = u + y\frac{du}{dy}$, 代入上式得

$$y\frac{du}{dy} = -\frac{u + e^u}{1 + e^u}$$

$$-\frac{1 + e^u}{u + e^u} du = \frac{dy}{y}$$

$$-\ln|u + e^u| = \ln C|y|$$

$$\frac{1}{u + e^u} = Cy \text{ 即 } (u + e^u)y = \frac{1}{C}, ye^{\frac{x}{y}} + x = \frac{1}{C} = C'.$$

11.【解】 $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x} + xe^x)$.

由方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ 可知, 该方程的特征方程有特征根 $r_{1,2} = \pm 1$, 则其特征方程为 $r^2 - 1 = 0$, 从而 $a = 0, b = -1$.

设方程 $y'' - y = e^x$ 的特解为 $y^* = ax e^x$, 代入该方程得 $a = \frac{1}{2}$.

则方程 $y'' - y = e^x$ 的通解 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x$.

由 $y(0) = 0, y'(0) = \frac{3}{2}$ 得 $C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = -\frac{1}{2}$. 则所求特解为 $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x} + x e^x)$.

12.【解】 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x + \frac{1}{2} x \sin x$.

齐次方程的特征方程为 $r^2 + 1 = 0$, 特征根为 $r_{1,2} = \pm i$. 齐次通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

设非齐次方程的特解为 $y^* = ax + x[b \cos x + c \sin x]$, 代入原方程得 $a = 1, b = 0, c = \frac{1}{2}$.

则原方程的通解为 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x + \frac{1}{2} x \sin x$.

13.【解】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y'(x) - 1}{2x} = \frac{f''(0)}{2}$,

在 $y'' + (x-1)y' + x^2 y = e^x$ 中令 $x = 0$ 得 $y''(0) = 2$. 则 $a = 1$.

14.【解】 特征方程为 $r^2 - 4r + 3 = 0$, 则 $r_1 = 1, r_2 = 3$, 则非齐次特解形式为 ae^{2x} .

代入原方程得 $a = -2$, 则原方程的通解为 $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x - 2e^{2x}$.

15.【解】 已知微分方程的特征方程为 $r^3 - 2r^2 + r - 2 = 0$, 即 $(r-2)(r^2+1) = 0$, 解得 $r = 2, \pm i$, 故所求方程通解为 $y = C_1 e^{2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$.

16.【解】 $y_t = C(-5)^t + \frac{5}{12}(t - \frac{1}{6})$.



17.【解】 $y_t = C2^t + (5t + t^2)2^t$.

18.【解】 对应齐次方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

设原方程的特解为 $y^* = A x e^x$, 得 $A = -2$.

故原方程通解是 $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - 2x e^x$.

又已知有公共切线, 得 $y \Big|_{x=0} = 1, y' \Big|_{x=0} = -1$, 即 $C_1 + C_2 = 1, C_1 + 2C_2 = 1$. 解得 $C_1 = 1, C_2 = 0$.

所以 $y = (1 - 2x)e^x$.

19.【解】 $y_2 - y_1 = x^2, y_3 - y_1 = e^x$ 为齐次方程的两个线性无关的特解, 则所求方程通解为

$$y = C_1 x^2 + C_2 e^x + 3 \quad (1)$$

$$(1) \text{ 式求导得 } y' = 2C_1 x + C_2 e^x \quad (2)$$

$$\text{再求导得 } y'' = 2C_1 + C_2 e^x \quad (3)$$

$$(3) - (2) \text{ 得 } y'' - y' = 2C_1(1 - x) \quad (4)$$

$$(1) - (2) \text{ 得 } y - y' = C_1(x^2 - 2x) + 3 \quad (5)$$

联立(5)式和(4)式消去 C_1 得

$$(2x - x^2)y'' + (x^2 - 2)y' + 2(1 - x)y = 6(1 - x)$$

20.【解】 将 y 与 x 对调, $y' = \frac{1}{x'}, y'' = -\frac{x''}{(x')^2} \cdot \frac{1}{x'} = -\frac{x''}{(x')^3}$.

代入原方程得 $x'' - x = e^{2y}$, 则其通解为 $x = C_1 e^y + C_2 e^{-y} + \frac{1}{3} e^{2y}$.

21.【解】 $f(x) = x^2 \int_0^x f'(t) dt - \int_0^x t^2 f'(t) dt + x^2$,

$$f'(x) = 2x \int_0^x f'(t) dt + x^2 f'(x) - x^2 f'(x) + 2x$$

$$= 2x[f(x) - f(0)] + 2x,$$

由题设知 $f(0) = 0$, 故有 $f'(x) - 2xf(x) = 2x$.

$$\text{从而得 } f(x) = e^{\int 2x dx} \left[\int 2x e^{-\int 2x dx} dx + C \right] = e^{x^2} \left[\int 2x e^{-x^2} dx + C \right]$$

$$= e^{x^2} (-e^{-x^2} + C) = -1 + C e^{x^2},$$

将 $f(0) = 0$ 代入上式, 得 $C = 1$, 所以 $f(x) = e^{x^2} - 1$.

22.【解】 令 $x - t = u$, 则 $\int_0^x t f(x - t) dt = \int_0^x (x - u) f(u) du = x \int_0^x f(u) du - \int_0^x u f(u) du$

$$\int_0^x f(t) dt = x + x \int_0^x f(u) du - \int_0^x u f(u) du$$

等式两端对 x 求导得

$$f(x) = 1 + \int_0^x f(u) du, f'(x) = f(x)$$

又 $f(0) = 1$, 则 $f(x) = e^x$.

23.【解】 对原方程两边求导: $f'(x) = e^x + e^x \int_0^x [f(t)]^2 dt + e^x [f(x)]^2$.

再把原方程代入得 $f'(x) = f(x) + e^x [f(x)]^2$, 即 $\frac{f'(x)}{f^2(x)} - \frac{1}{f(x)} = e^x$.

令 $u = \frac{1}{f(x)}$, 则 $u'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$, 所以有 $u' + u = -e^x$.

由求解公式得 $u(x) = e^{-\int dx} \left[\int e^{\int dx} (-e^x) dx + C \right] = e^{-x} \left[-\int e^{2x} dx + C \right] = C e^{-x} - \frac{1}{2} e^x$,



$$\text{则 } f(x) = \frac{1}{Ce^{-x} - \frac{1}{2}e^x}.$$

又由原方程知 $f(0) = 1$, 代入上式得 $1 = f(0) = \frac{1}{C - \frac{1}{2}}$, $C = \frac{3}{2}$, 所以 $f(x) = \frac{2}{3e^{-x} - e^x}$.

24.【解】 (1) 由题设知 $(x+1)f'(x) + (x+1)f(x) - \int_0^x f(t)dt = 0$, 上式两边对 x 求导, 得

$$(x+1)f''(x) = -(x+2)f'(x)$$

设 $u = f'(x)$, 则有 $\frac{du}{dx} = -\frac{x+2}{x+1}u$, 解之得 $f'(x) = u = \frac{Ce^{-x}}{x+1}$.

由 $f(0) = 1$ 及 $f'(0) + f(0) = 0$, 知 $f'(0) = -1$, 从而 $C = -1$, 因此 $f'(x) = -\frac{e^{-x}}{x+1}$.

(2)【证】 (方法一) 当 $x \geq 0$ 时, $f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 单调减少, 又 $f(0) = 1$, 所以

$$f(x) \leq f(0) = 1$$

设 $\varphi(x) = f(x) - e^{-x}$, 则 $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) = f'(x) + e^{-x} = \frac{x}{x+1}e^{-x}$.

当 $x \geq 0$ 时, $\varphi'(x) \geq 0$, 即 $\varphi(x)$ 单调增加, 因而 $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$, 即有 $f(x) \geq e^{-x}$.

综上所述, 当 $x \geq 0$ 时, 成立不等式 $e^{-x} \leq f(x) \leq 1$.

(方法二) 由于 $\int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0) = f(x) - 1$, 所以 $f(x) = 1 - \int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}dt$.

注意到当 $x \geq 0$ 时, $0 \leq \int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}dt \leq \int_0^x e^{-t}dt = 1 - e^{-x}$, 因而 $e^{-x} \leq f(x) \leq 1$.

$$25.【解】 f(t) = \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} (x^2+y^2)f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy + t^4 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t r^3 f(r)dr + t^4$$

$$= 2\pi \int_0^t r^3 f(r)dr + t^4,$$

$$f'(t) = 2\pi t^3 f(t) + 4t^3,$$

$$f(t) = e^{\int 2\pi t^3 dt} \left(\int 4t^3 e^{-\int 2\pi t^3 dt} dt + C \right) = e^{\frac{\pi}{2}t^4} \left(\int e^{-\frac{\pi}{2}t^4} dt^4 + C \right) = Ce^{\frac{\pi}{2}t^4} - \frac{2}{\pi}$$

$$\text{又 } f(0) = 0, \text{ 则 } f(x) = \frac{2}{\pi}(e^{\frac{\pi}{2}x^4} - 1).$$

$$\begin{aligned} 26.【解】 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^x f(\Delta x) + e^{\Delta x} f(x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} + f(x) \\ &= e^x f'(0) + f(x) \quad (f(0) = 0) \\ &= 2e^x + f(x), \end{aligned}$$

$$\text{则 } f(x) = 2xe^x.$$

27.【解】 令 $x^2 + y^2 = t$, 则 $z = tf(t) = z(t)$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'(t) \cdot 2x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2z'(t) + 4x^2 z''(t)$$

$$\text{类似有 } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2z'(t) + 4y^2 z''(t),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4(x^2 + y^2)z''(t) + 4z'(t) = 0,$$



$$tz''(t) + z'(t) = 0, z(1) = 0, z'(1) = 1.$$

解得 $z(t) = \ln t, f(t) = \frac{\ln t}{t}$, 由函数知 $t = e$ 时取得最大值 $f(e) = \frac{1}{e}$.

28.【解】 由题设知 $e^x + f''(x) = f'(x)$, 解得 $f(x) = C_1 + C_2 e^x - x e^x$,

由 $f(0) = 4, f'(0) = 3$, 得 $C_1 = 0, C_2 = 4, f(x) = 4e^x - x e^x$.

$$du = [e^x + f''(x)]y dx + f(x) dy = f'(x)y dx + f(x) dy = y df(x) + f(x) dy$$

$$u(x, y) = yf(x) + C = y(4 - x)e^x + C.$$

29.【解】 曲线 $y = y(x)$ 上任一点 $P(x, y)$ 处的法线方程为 $Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$,

令 $Y = 0$, 得 $X = yy' + x$, 线段 PQ 的中点为 $(\frac{yy'}{2} + x, \frac{y}{2})$, 由于中点位于抛物线 $2y^2 = x$ 上, 则 $\frac{yy'}{2} +$

$$x = 2 \left(\frac{y}{2} \right)^2.$$

$$\frac{(y^2)'}{4} + x = \frac{y^2}{2}, (y^2)' - 2y^2 = -4x$$

由此解得 $y^2 = -e^{2x} + 2x + 1$.

30.【解】 (1) 解线性方程 $xf'(x) = f(x) + \frac{3}{2}ax^2$ 得, $f(x) = Cx + \frac{3}{2}ax^2$

由 $2 = \int_0^1 (Cx + \frac{3}{2}ax^2) dx$ 知, $C = 4 - a, f(x) = (4 - a)x + \frac{3}{2}ax^2$.

$$(2) V(a) = \pi \int_0^1 [(4 - a)x + \frac{3}{2}ax^2]^2 dx = \pi \left(\frac{16}{3} + \frac{a}{3} + \frac{1}{30}a^2 \right),$$

$a = -5$ 时, V 最小.

31.【解】 设点 M 的坐标为 (x, y) , 则切线 MA 的方程为 $Y - y = y'(X - x)$.

令 $X = 0$, 则 $Y = y - xy'$, 故点 A 的坐标为 $(0, y - xy')$.

$$\text{由 } |\overline{MA}| = |\overline{OA}|, \text{ 有 } |y - xy'| = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - y + xy')^2}.$$

化简后得 $2yy' - \frac{1}{x}y^2 = -x$, 令 $z = y^2$, 得 $\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = -x$.

$$\text{解得 } z = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left[-\int x e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right] = x(-x + C), \text{ 即 } y^2 = -x^2 + Cx.$$

由于所求曲线在第一象限内, 故 $y = \sqrt{Cx - x^2}$.

再以条件 $y(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}$ 代入得 $C = 3$. 于是曲线方程为 $y = \sqrt{3x - x^2} (0 < x < 3)$.

32.【解】 曲线 $y = y(x)$ 在 (x, y) 处的法线方程是 $Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x) (y' \neq 0)$.

它与 x 轴的交点是 $(x + yy', 0)$, 从而该点到 x 轴的法线段 PQ 的长度是

$$\sqrt{(yy')^2 + y^2} = y(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} (y' = 0 \text{ 也满足此式})$$

根据题意得微分方程 $\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{1}{y(1 + y'^2)^{1/2}}$, 即 $yy'' = 1 + y'^2$,

且当 $x = 1$ 时, $y = 1, y' = 0$. 令 $y' = p$, 则 $y'' = p \frac{dp}{dy}$, 代入方程, 得

$$yp \frac{dp}{dy} = 1 + p^2 \text{ 或 } \frac{p}{1 + p^2} dp = \frac{dy}{y}$$

积分并注意到 $y = 1$ 时, $p = 0$, 便得 $y = \sqrt{1 + p^2}$.

代入 $\frac{dy}{dx} = p$, 得 $y' = \pm \sqrt{y^2 - 1}, \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} = \pm dx$.



积分上式,并注意到 $x=1$ 时 $y=1$, 得 $\ln(y+\sqrt{y^2-1})=\pm(x-1)$.

因此,所求曲线方程为 $y+\sqrt{y^2-1}=e^{\pm(x-1)}$, 即 $y=\frac{1}{2}(e^{x-1}+e^{-(x-1)})=\operatorname{ch}(x-1)$.

33.【解】 (1) 设曲线 L 过点 $P(x,y)$ 的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$.

令 $X=0$, 则得该切线在 y 轴上的截距为 $y-xy'$. 由题设知 $\sqrt{x^2+y^2}=y-xy'$,

令 $u=\frac{y}{x}$, 则此方程可化为 $\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=-\frac{dx}{x}$, 解之得 $y+\sqrt{x^2+y^2}=C$.

由 L 经过点 $(\frac{1}{2}, 0)$, 知 $C=\frac{1}{2}$. 于是 L 方程为 $y+\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}$, 即 $y=\frac{1}{4}-x^2$.

(2) 设第一象限内曲线 $y=\frac{1}{4}-x^2$ 在点 $P(x,y)$ 处的切线方程为

$$Y-\left(\frac{1}{4}-x^2\right)=-2x(X-x), \text{ 即 } Y=-2xX+x^2+\frac{1}{4} \left(0 < x \leq \frac{1}{2}\right)$$

它与 x 轴及 y 轴的交点分别为 $\left(\frac{x^2+\frac{1}{4}}{2x}, 0\right)$ 与 $\left(0, x^2+\frac{1}{4}\right)$. 所求面积为

$$S(x)=\frac{1}{2} \cdot \frac{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2}{2x}-\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-x^2\right) dx$$

对 x 求导, 得 $S'(x)=\frac{1}{4} \cdot \frac{4x^2\left(x^2+\frac{1}{4}\right)-\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2}{x^2}=\frac{1}{4x^2}\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\left(3x^2-\frac{1}{4}\right)$.

令 $S'(x)=0$, 解得 $x=\frac{\sqrt{3}}{6}$. 当 $0 < x < \frac{\sqrt{3}}{6}$ 时, $S'(x) < 0$; 当 $x > \frac{\sqrt{3}}{6}$ 时, $S'(x) > 0$, 因而 $x=\frac{\sqrt{3}}{6}$ 是 $S(x)$

在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 内的惟一极小值点, 即最小值点. 于是所求切线为

$$y=-2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} x+\frac{3}{36}+\frac{1}{4}, \text{ 即 } y=-\frac{\sqrt{3}}{3} x+\frac{1}{3}$$

34.【解】 当 $-\pi < x < 0$ 时, 设 (x,y) 为曲线上任一点, 由导数几何意义, 法线斜率为 $k=\frac{-1}{\frac{dy}{dx}}$. 由题

意, 法线斜率为 $\frac{y}{x}$, 所以有 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$. 分离变量, 解得 $x^2+y^2=C$.

由初始条件 $y\left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$, 得 $C=\pi^2$, 所以

$$y=\sqrt{\pi^2-x^2}, \quad -\pi < x < 0 \quad (1)$$

当 $0 \leq x < \pi$ 时, $y''+y+x=0$ 的通解为

$$y=C_1 \cos x+C_2 \sin x-x \quad (2)$$

$$y'=-C_1 \sin x+C_2 \cos x-1 \quad (3)$$

因为曲线 $y=y(x)$ 光滑, 所以 $y(x)$ 连续且可导, 由 (1) 式知

$$y(0)=\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x)=\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{\pi^2-x^2}=\pi, y'(0)=y'_-(0)=\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{\pi^2-x^2}-\pi}{x}=0$$

代入 (2), (3) 式, 得 $C_1=\pi, C_2=1$, 故 $y=\pi \cos x+\sin x-x, 0 \leq x < \pi$.

因此 $y(x)=\begin{cases} \sqrt{\pi^2-x^2}, & -\pi < x < 0 \\ \pi \cos x+\sin x-x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$.



35. 【解】 曲线 L 的切线斜率 $k = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-\sin t}{f'(t)}$, 切线方程为

$$y - \cos t = -\frac{\sin t}{f'(t)}(x - f(t))$$

令 $y = 0$, 得切线与 x 轴交点的横坐标为 $x_0 = f'(t) \frac{\cos t}{\sin t} + f(t)$.

由题意得 $\left[f'(t) \frac{\cos t}{\sin t}\right]^2 + \cos^2 t = 1$. 因为 $f'(t) > 0$, 解得 $f'(t) = \frac{\sin^2 t}{\cos t} = \frac{1}{\cos t} - \cos t$.

由于 $f(0) = 0$, 所以 $f(t) = \ln(\sec t + \tan t) - \sin t$.

因为 $f(0) = 0, \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(t) = +\infty$, 所以以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域是无界区域, 其面积为

$$S = \int_0^{+\infty} y dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot f'(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{1}{4} \pi$$

36. 【解】 (1) 依题意得 $y' - \frac{1}{x}y = ax$, 求得其通解为

$$y = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left(\int ax e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right) = ax^2 + Cx$$

将 $x = 1, y = 0$ 代入上式得 $C = -a$. 从而 L 的方程为 $y = ax^2 - ax$.

(2) L 与直线 $y = ax$ 的交点坐标为 $(0, 0)$ 和 $(2, 2a)$, 那么 L 与直线 $y = ax$ 围成平面图形的面积

$$S(a) = \int_0^2 (ax - ax^2 + ax) dx = \int_0^2 (2ax - ax^2) dx = \frac{4}{3}a$$

于是由题设知 $\frac{4}{3}a = \frac{8}{3}$, 从而 $a = 2$.

微信公众账号【顶尖考研】 第五章 多元函数微分学 (ID: djky66)

1. 【解】 (B).

$f(x, 0) = e^{|x|}$, 该函数在 $x = 0$ 处不可导, 则 $f'_x(0, 0)$ 不存在;

$f(0, y) = e^{y^2}$, 该函数在 $y = 0$ 处不可导, 则 $f'_y(0, 0)$ 存在.

2. 【解】 (D).

由 $f'_x(x_0, y_0) = a, f'_y(x_0, y_0) = b$ 知, 一元函数 $f(x, y_0), f(x_0, y)$ 分别在 $x = x_0, y = y_0$ 处连续, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0), \lim_{y \rightarrow y_0} f(x_0, y) = f(x_0, y_0).$$

3. 【解】 (B).

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0, f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0-0}{\Delta y} = 0$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{[f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0)] - [f'_x(0, 0)\Delta x + f'_y(0, 0)\Delta y]}{\rho} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta x \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \text{ 不存在,}$$

则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处不可微, 故应选(B).

4. 【解】 (D).

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin \frac{1}{(\Delta x)^2} - 0}{\Delta x} = 0, f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(\Delta y)^2 \sin \frac{1}{(\Delta y)^2} - 0}{\Delta y} = 0,$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{[f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0)] - [f'_x(0, 0)\Delta x + f'_y(0, 0)\Delta y]}{\rho} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2) \sin \frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0, \text{ 则 } f(x, y) \text{ 在点}$$



$(0,0)$ 处可微. 当 $(x,y) \neq (0,0)$ 时,

$$f'_x(x,y) = 2x \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 2x \sin \frac{1}{x^2+y^2} = 0, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x}{x^2+y^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2} \text{ 不存在,}$$

则 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f'_x(x,y)$ 不存在, 即偏导数 $f'_x(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续, 故应选 (D).

5. 【解】 (D).

由 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} > 0, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} < 0$ 可知, $f(x,y)$ 关于变量 x 是增函数, 而关于变量 y 是减函数, 当 $x_1 < x_2, y_1 > y_2$ 时, $f(x_2, y_2) > f(x_1, y_2) > f(x_1, y_1)$.

6. 【解】 (D).

$$\begin{aligned} f(1, -1) &= f(1, -1) - f(0, 0) = f(1, -1) - f(0, -1) + f(0, -1) - f(0, 0) \\ &= f'_x(\xi, -1) + f'_y(0, \eta) \cdot (-1) > 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

7. 【解】 (C).

$$\begin{aligned} f(-1, 1) - f(0, 0) &= f(-1, 1) - f(-1, 0) + f(-1, 0) - f(0, 0) \\ &= f'_y(-1, \xi) + f'_x(\eta, 0) \cdot (-1) > 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

8. 【解】 (B).

(方法一) 直接法

$$\begin{aligned} \text{由于 } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - (x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2+y^2} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1 \end{aligned}$$

则 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$, 若 $f(0,0) = 0$, $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续, 否则不连续.

故 (A) 不正确.

$$1) \text{ 若 } f(0,0) = 0, \text{ 则 } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1. \text{ 在式中令 } y=0, x \rightarrow 0, \text{ 则}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{|x|} = 1, \text{ 从而 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{-x} = -1.$$

则 $f'_x(0,0)$ 不存在, 由对称性知 $f'_y(0,0)$ 不存在.

$$2) \text{ 若 } f(0,0) \neq 0, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \infty, \text{ 从而 } f'_x(0,0) \text{ 不存在, 由对称性知 } f'_y(0,0) \text{ 不存在.}$$

故应选 (B).

$$\text{(方法二) 排除法: 令 } f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 1, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}, \text{ 显然 } f(x,y) \text{ 满足题设条件, 但在 } (0,0)$$

点不连续, 且 $f(x,0) = \begin{cases} |x|, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 不可导, 则 $f'_x(0,0)$ 不存在. 同理 $f'_y(0,0)$ 不存在. 从而

(A)(C)(D) 都不正确, 故应选 (B).

9. 【解】 (D).

$$\text{由 } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) + 2x - y + x^2 + y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \text{ 知, } f(0,0) = 0, \text{ 且}$$



$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) + 2x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0, \text{ 则 } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - (-2x + y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

即 $f(x,y) - f(0,0) = -2x + y + o(\rho)$, 由微分的定义知, $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微, 且 $f'_x(0,0) = -2, f'_y(0,0) = 1$, 故应选(D).

10. 【解】 (B).

验证法: (A)(C)(D) 都不满足 $f'_y(x,0) = x$, 故应选(B).

若是填空题上面的方法就不好用了.

$$\text{由 } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \text{ 知 } \frac{\partial z}{\partial y} = \int 2dy = 2y + \varphi(x), \text{ 由 } f'_y(x,0) = x \text{ 知 } \varphi(x) = x, \text{ 则}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y + x, z = \int (2y + x)dy = y^2 + xy + \psi(x)$$

$$\text{由 } f(x,0) = 1 \text{ 知 } \psi(x) = 1, \text{ 则 } z = y^2 + xy + 1.$$

11. 【解】 (C).

$$\text{由 } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y) - (x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \alpha > 0 \text{ 可知, } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \alpha > 0, \text{ 且 } f(0,0) = 0, \text{ 由极限的保号性知,}$$

$$\text{在点 } (0,0) \text{ 某去心邻域内 } \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} > 0, \text{ 即 } f(x,y) > 0.$$

$$\text{即点 } (0,0) \text{ 是 } f(x,y) \text{ 的极小值点, 又由 } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \alpha > 0 \text{ 知,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{|x|} = \alpha > 0, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{-x} = -\alpha < 0,$$

从而 $f'_x(0,0)$ 不存在, 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的驻点.

12. 【解】 (D).

$$\text{由 } dz = xdx + ydy \text{ 知, } z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C, \text{ 显然, 点 } (0,0) \text{ 是 } f(x,y) \text{ 的极小值点.}$$

13. 【解】 (A).

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x) \ln f(y), \frac{\partial z}{\partial y} = f(x) \frac{f'(y)}{f(y)},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(x) \ln f(y), \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'(x) \frac{f'(y)}{f(y)}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x) \cdot \frac{f''(y)f(y) - [f'(y)]^2}{f^2(y)}.$$

$$\text{在 } (0,0) \text{ 处, } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(0) \ln f(0), \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = [f''(0)]^2 \ln f(0).$$

当 $f''(0) \ln f(0) > 0, [f''(0)]^2 \ln f(0) > 0$, 即 $f(0) > 1, f''(0) > 0$ 时, $z = f(x) \ln f(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值, 故选(A).

14. 【解】 (A).

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x)g(y), \frac{\partial z}{\partial y} = f(x)g'(y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(x)g(y), \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'(x)g'(y), \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x)g''(y).$$

$$\text{在 } (0,0) \text{ 处, } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(0)g(0),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 &= f''(0)g(0) \cdot f(0)g''(0) - [f'(0)g'(0)]^2 \\ &= f''(0)g''(0)f(0)g(0). \end{aligned}$$

当 $f''(0)g(0) > 0$ 且 $f''(0)g''(0)f(0)g(0) > 0$ 时, $z = f(x)g(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值. 又由 $f(0) > 0, g(0) < 0$ 知 $f''(0) < 0, g''(0) > 0$, 故选(A).



15. 【解】 (B).

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}, y'(x_0) = 0$$

$$y''(x) = -\frac{[F''_{xx} + F''_{xy}y']F'_y - [F''_{yx} + F''_{yy}y']F'_x}{(F'_y)^2}$$

$$y''(x_0) = -\frac{F''_{xx}(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$$

16. 【解】 (A).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = C, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = B$$

由题设 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 可知, $B \neq 0, A + C = 0$, 则 $AC - B^2 < 0$.

故函数 $u(x, y)$ 在区域 D 内无极值点, 因此, $u(x, y)$ 的最大值和最小值都在 D 的边界上取得.

故应选(A).

17. 【解】 -1.

$$z(0, y) = \frac{-(y-1)}{1+\sin(y-1)} = \varphi(y), \text{由导数定义知 } \varphi'(1) = -1, \text{则 } \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(0,1)} = -1.$$

18. 【解】 2.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2}{1+x^2 y^4}, \text{则 } z'_x(0, y) = y^2, \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right|_{(0,1)} = 2y|_{y=1} = 2$$

19. 【解】 $1 + 2\ln 2$.

$$\ln z = x \ln(x + e^y), \frac{\partial z}{\partial x} = z \left[\ln(x + e^y) + \frac{x}{x + e^y} \right], \text{故 } \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,0)} = 1 + 2\ln 2$$

20. 【解】 $(1 + 2\ln 2)(dx - dy)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(1 + \frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} \left[\frac{1}{y} \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y(x+y)} \right],$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\left(1 + \frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} \left[\frac{x}{y^2} \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right) + \frac{x^2}{y^2(x+y)} \right],$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,1)} = 1 + 2\ln 2, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1,1)} = -(1 + 2\ln 2),$$

$$\text{故 } dz|_{(1,1)} = (1 + 2\ln 2)(dx - dy).$$

21. 【解】 $2(1 - \ln 2)$.

由 $(z+y)^x = xy$ 得, $x=1, y=2$ 时, $z=0$.

$$x \ln(z+y) = \ln x + \ln y, \ln(z+y) + \frac{xz'_x}{z+y} = \frac{1}{x}$$

将 $x=1, y=2, z=0$ 代入得 $z'_x = 2(1 - \ln 2)$.

22. 【解】 $-5dx - 2dy$.

由 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ 知, 当 $x=-1, y=0$ 时, $z=1$.

$$3x^2 dx + 3y^2 dy + 3z^2 dz - 3yz dx - 3xz dy - 3xy dz = 0$$

将 $x=-1, y=0, z=1$ 代入得, $3dx + 3dz + 3dy = 0$;

由 $u = x^2 e^y z^3$ 知, $du = 2xe^y z^3 dx + x^2 e^y z^3 dy + 3x^2 e^y z^2 dz$,

将 $x=-1, y=0, z=1$ 代入得, $du = -2dx + dy + 3dz$.

$$du = -2dx + dy + (-3dx - 3dy) = -5dx - 2dy$$

23. 【解】 $\frac{1}{2}x^2 y + \frac{1}{2}xy^2 + x + y^2$.



由 $f(x, 0) = x$ 知, $f'_x(x, 0) = 1$. 由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y$ 知,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \int (x + y) dy = xy + \frac{1}{2}y^2 + \varphi(x)$$

又 $f'_x(x, 0) = 1$, 则 $\varphi(x) = 1$, 从而

$$\frac{\partial z}{\partial x} = xy + \frac{1}{2}y^2 + 1, z = \int (xy + \frac{1}{2}y^2 + 1) dx = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + x + \psi(y)$$

又 $f(0, y) = y^2$, 则 $\psi(y) = y^2$.

24. 【解】 $-\frac{4}{3}x$.

由 $u'_1(x, 2x) = x^2$ 知

$$u''_{11}(x, 2x) + 2u''_{12}(x, 2x) = 2x$$

由 $u(x, 2x) = x$ 知

$$u'_1(x, 2x) + 2u'_2(x, 2x) = 1$$

$$u''_{11}(x, 2x) + 2u''_{12}(x, 2x) + 2u''_{21}(x, 2x) + 4u''_{22}(x, 2x) = 0$$

即:

$$5u''_{11}(x, 2x) + 4u''_{12}(x, 2x) = 0 \quad (2)$$

由(1)和(2)可知 $u''_{11}(x, 2x) = -\frac{4}{3}x$.

25. 【解】 $z - xy$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_1 + F_2 \cdot (-\frac{z}{x^2})}{\frac{1}{y}F_1 + \frac{1}{x}F_2}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_1 \cdot (-\frac{z}{y^2}) + F_2}{\frac{1}{y}F_1 + \frac{1}{x}F_2}$$

则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$.

26. 【解】 5.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2t, y_0) - f(x_0, y_0 - t)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[f(x_0 + 2t, y_0) - f(x_0, y_0)] - [f(x_0, y_0 - t) - f(x_0, y_0)]}{t} \\ &= 2f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0) = 2 \times 2 + 1 = 5. \end{aligned}$$

27. 【解】 5.

由 $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - x + 2y + 2}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = 0$ 知, $f'_x(1, 0) = 1, f'_y(1, 0) = -2$,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t, 0) - f(1, 2t)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[f(1+t, 0) - f(1, 0)] - [f(1, 2t) - f(1, 0)]}{t} \\ &= f'_x(1, 0) - 2f'_y(1, 0) = 5. \end{aligned}$$

28. 【解】 $2(x^2 + y^2)f(xy)$.

$$z = \int_0^1 |xy - t| f(t) dt = \int_0^{xy} (xy - t) f(t) dt + \int_{xy}^1 (t - xy) f(t) dt$$

$$= xy \int_0^{xy} f(t) dt - \int_0^{xy} t f(t) dt + \int_{xy}^1 t f(t) dt - xy \int_{xy}^1 f(t) dt$$

$$z'_x = y \int_0^{xy} f(t) dt + xy^2 f(xy) - xy^2 f(xy) - xy^2 f(xy) + xy^2 f(xy) - y \int_{xy}^1 f(t) dt$$

$$= y \int_0^{xy} f(t) dt - y \int_{xy}^1 f(t) dt$$

$$z''_{xx} = y^2 f(xy) + y^2 f(xy) = 2y^2 f(xy)$$

由对称性知, $z''_{yy} = 2x^2 f(xy)$, 则 $z''_{xx} + z''_{yy} = 2(x^2 + y^2)f(xy)$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



$$29. \text{【解】} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = f'_1 + f'_3 \frac{x}{x^2 + y^2}; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{11} + 2f''_{13} \frac{x}{x^2 + y^2} + f''_{33} \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} + f'_3 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$30. \text{【解】} \quad 51.$$

$$\varphi(1) = f(1, f(1, 1)) = f(1, 1) = 1,$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dx} \varphi^3(x) \right|_{x=1} &= \left[3\varphi^2(x) \frac{d\varphi(x)}{dx} \right] \Big|_{x=1} \\ &= 3\varphi^2(x) [f'_1(x, f(x, x)) + f'_2(x, f(x, x))(f'_1(x, x) + f'_2(x, x))] \Big|_{x=1} \\ &= 3 \cdot 1 \cdot [2 + 3(2 + 3)] = 51. \end{aligned}$$

$$31. \text{【解】} \quad \frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dx}. \quad (*)$$

$$\text{由 } e^{xy} - xy = 2 \text{ 两边对 } x \text{ 求导, 得 } e^{xy} \left(y + x \frac{dy}{dx} \right) - \left(y + x \frac{dy}{dx} \right) = 0,$$

$$\text{即 } \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}. \text{ 又由 } e^z = \int_0^{x-z} \frac{\sin t}{t} dt \text{ 两边对 } x \text{ 求导, 得}$$

$$e^z = \frac{\sin(x-z)}{x-z} \cdot \left(1 - \frac{dz}{dx} \right), \text{ 即 } \frac{dz}{dx} = 1 - \frac{e^z(x-z)}{\sin(x-z)}$$

将其代入(*)式, 得

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{y}{x} \frac{\partial f}{\partial y} + \left[1 - \frac{e^z(x-z)}{\sin(x-z)} \right] \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$32. \text{【解】 (方法一)} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2 \frac{\partial z}{\partial u} + a \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 4a \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + (a-2) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

$$\text{将上述结果代入原方程, 经整理后得 } (10+5a) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + (6+a-a^2) \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0.$$

依题意 a 应满足 $6+a-a^2=0$ 且 $10+5a \neq 0$, 解之得 $a=3$.

(方法二) 将 z 视为以 x, y 为中间变量的 u, v 二元复合函数, 由题设可解得

$$x = \frac{au+2v}{a+2}, y = \frac{-u+v}{a+2}$$

$$\text{从而 } \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{a}{a+2}, \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{a}{a+2}, \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{a+2}, \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{a+2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{a}{a+2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{a+2} \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} &= \frac{a}{a+2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \right) - \frac{1}{a+2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial v} \right) \\ &= \frac{2a}{(a+2)^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{a-2}{(a+2)^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{1}{(a+2)^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

$$\text{依题意 } 6 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \text{ 即 } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

$$\text{代入前式, 得 } \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{2a-6}{(a+2)^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{a-3}{(a+2)^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

$$\text{令 } \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0, \text{ 得 } a-3=0, a+2 \neq 0, \text{ 故 } a=3.$$

$$33. \text{【解】} \quad \text{令 } \frac{y}{x} = u, \text{ 则 } z = (x+y)f(u), \text{ 由 } \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x} \text{ 知}$$

$$(1-u^2)f'(u) + 2f(u) = u.$$

$$f(u) = \frac{1-u}{1+u} \ln(1-u) + \frac{2-u}{1+u} + C.$$

$$z = (x-y) \ln \left(1 - \frac{y}{x} \right) + 2x - y.$$



34.【解】 由于 $f(x, y) = g(r) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$, 得

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g'(r) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = g'(r) \cdot \frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = g''(r) \frac{xy}{r^2} - g'(r) \frac{xy}{r^3} = g''(r) \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} - g'(r) \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^3},$$

$$\text{代入 } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \text{ 化简得 } g''(r) - \frac{1}{r} g'(r) = 0.$$

可解得 $g(r) = C_1 r^2 + C_2$, 从而 $f(x, y) = C_1(x^2 + y^2) + C_2$.

35.【解】 令 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \cdot \frac{dz}{dr}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2} \cdot \frac{d^2 z}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dz}{dr} - \frac{x^2}{r^3} \cdot \frac{dz}{dr}, \text{ 同理 } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^2} \cdot \frac{d^2 z}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dz}{dr} - \frac{y^2}{r^3} \cdot \frac{dz}{dr},$$

$$\text{代入原方程, 即得 } \frac{d^2 z}{dr^2} + z = r^2.$$

解此二阶常系数线性非齐次微分方程, 得其通解为 $z = C_1 \cos r + C_2 \sin r + r^2 - 2$.

$$36.【解】 \begin{cases} f'_x = 4x^3 - 2(x+y) = 0 \\ f'_y = 4y^3 - 2(x+y) = 0 \end{cases}$$

得 $x = y$, 代入上式得驻点是 $(-1, -1), (1, 1), (0, 0)$;

在 $(-1, -1), (1, 1)$ 点, $AC - B^2 > 0$, 且 $A > 0$, 取极小值,

在 $(0, 0)$ 点, $AC - B^2 = 0$, $f(0, 0) = 0$;

$$f(x, -x) = 2x^4 > 0. \quad (x \neq 0)$$

$f(x, 0) = x^4 - x^2 < 0$ ($|x|$ 充分小), 则 $(0, 0)$ 点无极值.

$$37.【解】 f'_x(x, y) = 2x(2 + y^2), f'_y(x, y) = 2x^2 y + \ln y + 1.$$

$$\text{令 } \begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0, \end{cases} \text{ 解得唯一驻点 } (0, \frac{1}{e}).$$

$$\text{由于 } A = f''_{xx}(0, \frac{1}{e}) = 2(2 + y^2) \Big|_{(0, \frac{1}{e})} = 2(2 + \frac{1}{e^2}), B = f''_{xy}(0, \frac{1}{e}) = 4xy \Big|_{(0, \frac{1}{e})} = 0,$$

$$C = f''_{yy}(0, \frac{1}{e}) = (2x^2 + \frac{1}{y}) \Big|_{(0, \frac{1}{e})} = e, \text{ 所以 } B^2 - AC = -2e(2 + \frac{1}{e^2}), \text{ 且 } A > 0.$$

从而 $f(0, \frac{1}{e})$ 是 $f(x, y)$ 的极小值, 极小值为 $f(0, \frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$.

$$38.【解】 \text{由题意 } g'(1) = 0. \text{ 因为 } \frac{\partial z}{\partial x} = yf'_1 + yg'(x)f'_2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'_1 + y[xf''_{11} + g(x)f''_{12}] + g'(x)f'_2 + yg'(x)[f''_{21} + g(x)f''_{22}].$$

$$\text{所以 } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = f'_1(1, 1) + f''_{11}(1, 1) + f''_{12}(1, 1).$$

$$39.【解】 \frac{\partial z}{\partial x} = f'_1(x + y, f(x, y)) + f'_2(x + y, f(x, y)) \cdot f'_1(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{11}(x + y, f(x, y)) + f''_{12}(x + y, f(x, y)) \cdot f'_2(x, y) + f''_{12}(x, y) \cdot f'_2(x + y, f(x, y)) + f'_1(x, y)[f''_{21}(x + y, f(x, y)) + f''_{22}(x + y, f(x, y)) \cdot f'_2(x, y)].$$

由题意知 $f'_1(1, 1) = 0, f'_2(1, 1) = 0$, 从而

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1, 1)} = f''_{11}(2, 2) + f'_2(2, 2)f''_{12}(1, 1)$$



40. 【解】 由 $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$ 得

$$\begin{cases} 4x + 2xz'_x + 8z + 8xz'_x - z'_x = 0, \\ 4y + 2yz'_y + 8xz'_y - z'_y = 0. \end{cases}$$

在上式中令 $z'_x = 0, z'_y = 0$ 得 $x + 2z = 0, y = 0$, 将 $x + 2z = 0, y = 0$ 代入原方程得 $z = 1$ 和 $z = -\frac{8}{7}$.

即驻点为 $(-2, 0, 1)$ 和 $(\frac{16}{7}, 0, -\frac{8}{7})$.

进一步用充分条件判定得点 $(-2, 0, 1)$ 处函数取极小值, 点 $(\frac{16}{7}, 0, -\frac{8}{7})$ 处函数取极大值.

41. 【解】 $f(x, y) = -(x-1) - y - o(\sqrt{(x-1)^2 + y^2})$,

由全微分的定义知 $f(1, 0) = 0, f'_1(1, 0) = f'_2(1, 0) = -1$.

$$g'_x = f'_1 \cdot e^{xy} y + f'_2 \cdot 2x, g'_y = f'_1 \cdot e^{xy} x + f'_2 \cdot 2y$$

从而 $g'_x(0, 0) = 0, g'_y(0, 0) = 0$.

$$g''_{xx} = (f''_{11} \cdot e^{xy} y + f''_{12} \cdot 2x) e^{xy} y + f'_1 \cdot e^{xy} y^2 + (f''_{21} \cdot e^{xy} y + f''_{22} \cdot 2x) 2x + 2f'_2,$$

$$g''_{xy} = (f''_{11} \cdot e^{xy} x + f''_{12} \cdot 2y) e^{xy} y + f'_1 \cdot (e^{xy} xy + e^{xy}) + (f''_{21} \cdot e^{xy} x + f''_{22} \cdot 2y) 2x,$$

$$g''_{yy} = (f''_{11} \cdot e^{xy} x + f''_{12} \cdot 2y) e^{xy} x + f'_1 \cdot e^{xy} x^2 + (f''_{21} \cdot e^{xy} x + f''_{22} \cdot 2y) 2y + 2f'_2,$$

$$A = g''_{xx}(0, 0) = 2f'_2(1, 0) = -2, B = g''_{xy}(0, 0) = f'_1(1, 0) = -1,$$

$$C = g''_{yy}(0, 0) = 2f'_2(1, 0) = -2,$$

$AC - B^2 = 3 > 0$, 且 $A < 0$, 故 $g(0, 0) = f(1, 0) = 0$ 是极大值.

42. 【解】 由 $\begin{cases} f'_x = 2x - 2xy^2 = 0, \\ f'_y = 4y - 2x^2y = 0, \end{cases}$

得 D 内驻点为 $(\pm\sqrt{2}, 1), f(\pm\sqrt{2}, 1) = 2$. 在边界 $L_1: y = 0 (-2 \leq x \leq 2)$, 记

$g(x) = f(x, 0) = x^2$, 显见在 L_1 上 $f(x, y)$ 的最大值为 4, 最小值为 0.

在边界 $L_2: x^2 + y^2 = 4 (y \geq 0)$ 上, 记

$$h(x) = f(x, \sqrt{4-x^2}) = x^4 - 5x^2 + 8 (-2 \leq x \leq 2)$$

由 $h'(x) = 4x^3 - 10x = 0$ 得驻点 $x_1 = 0, x_2 = -\sqrt{\frac{5}{2}}, x_3 = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

$$h(0) = f(0, 2) = 8, h(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}) = f(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}) = \frac{7}{4}$$

综上, $f(x, y)$ 在 D 上的最大值为 8, 最小值为 0.

43. 【解】 由 $dz = (2x + 12y)dx + (12x + 4y)dy$ 知, $z = x^2 + 12xy + 2y^2$

$$\begin{cases} z'_x = 2x + 12y = 0, \\ z'_y = 12x + 4y = 0, \end{cases}$$

驻点: $(0, 0), z(0, 0) = 0$

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + 12xy + 2y^2 + \lambda(4x^2 + y^2 - 25)$$

$$\begin{cases} F'_x = 2x + 12y + 8\lambda x = 0 \\ F'_y = 12x + 4y + 2\lambda y = 0 \\ F'_\lambda = 4x^2 + y^2 - 25 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

(2)

由 (1) 和 (2) 式知:

$$\begin{cases} (1+4\lambda)x + 6y = 0, \\ 6x + (2+\lambda)y = 0, \end{cases} \text{ 且有非零解.}$$

$$\text{则 } \begin{vmatrix} 1+4\lambda & 6 \\ 6 & 2+\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ 解得 } \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -\frac{17}{4},$$

$\lambda_1 = 2$ 时, 驻点 $P_1(2, -3), P_2(-2, 3), z = -50$.

$\lambda_2 = -\frac{17}{4}$ 时, 驻点 $P_3(\frac{3}{2}, 4), P_4(-\frac{3}{2}, -4), z = \frac{425}{4}$.

比较得 $z_{\max} = \frac{425}{4}$.

44.【解】 设 $F(x, y, z, \lambda) = xy + 2yz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 10)$.

$$\text{令} \begin{cases} F'_x = y + 2\lambda x = 0, \\ F'_y = x + 2z + 2\lambda y = 0, \\ F'_z = 2y + 2\lambda z = 0, \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 10 = 0, \end{cases}$$

得可能的最值点 $A(1, \sqrt{5}, 2), B(-1, \sqrt{5}, -2), C(1, -\sqrt{5}, 2), D(-1, -\sqrt{5}, -2), E(2\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}), F(-2\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$.

因为在 A, D 两点处 $u = 5\sqrt{5}$; 在 B, C 两点处 $u = -5\sqrt{5}$; 在 E, F 两点处 $u = 0$,

所以 $u_{\max} = 5\sqrt{5}; u_{\min} = -5\sqrt{5}$.

45.【解】 作拉格朗日函数

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z) + \mu(x + y + z - 4)$$

$$\text{令} \begin{cases} F'_x = 2x + 2\lambda x + \mu = 0, \\ F'_y = 2y + 2\lambda y + \mu = 0, \\ F'_z = 2z - \lambda + \mu = 0, \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 - z = 0, \\ F'_\mu = x + y + z - 4 = 0, \end{cases}$$

解方程组, 得 $(x_1, y_1, z_1) = (1, 1, 2), (x_2, y_2, z_2) = (-2, -2, 8)$. 故所求的最大值为 72, 最小值为 6.

46.【解】 设切点为 $P(x, y)$, 切线为 $Y - y = y'(x)(X - x)$, 由椭圆的方程可知切线斜率为 $y'(x) = -\frac{3x+y}{x+3y}$, 截距 $X_0 = \frac{1}{3x+y}, Y_0 = \frac{1}{x+3y}$, 从而可得所求三角形面积为

$$S = \frac{1}{2(1+8xy)} (x > 0, y > 0)$$

根据题意作拉格朗日函数

$$F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(3x^2 + 2xy + 3y^2 - 1)$$

$$\text{令} \begin{cases} F'_x(x, y, \lambda) = y + 6\lambda x + 2\lambda y = 0, \\ F'_y(x, y, \lambda) = x + 2\lambda x + 6\lambda y = 0, \\ F'_\lambda(x, y, \lambda) = 3x^2 + 2xy + 3y^2 - 1 = 0, \end{cases}$$

求解可得 $x^2 = y^2$, 从而 $x = y = \frac{1}{\sqrt{8}}$, 代入可得面积的最小值为 $S = \frac{1}{4}$.

47.【解】 点 (x, y, z) 到 xOy 面的距离为 $|z|$, 故求 C 上距离 xOy 面最远点和最近点的坐标, 等价于求函数 $H = z^2$ 在条件 $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$ 与 $x + y + 3z = 5$ 下的最大值点和最小值点.

令 $L(x, y, z, \lambda, \mu) = z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 2z^2) + \mu(x + y + 3z - 5)$, 由

$$\begin{cases} L'_x = 2\lambda x + \mu = 0, \\ L'_y = 2\lambda y + \mu = 0, \\ L'_z = 2z - 4\lambda z + 3\mu = 0, \\ x^2 + y^2 - 2z^2 = 0, \\ x + y + 3z = 5 \end{cases}$$



$$\text{得 } x = y, \text{ 从而 } \begin{cases} 2x^2 - 2z^2 = 0, \\ 2x + 3z = 5, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = -5, \\ y = -5, \\ z = 5, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \\ z = 1. \end{cases}$$

根据几何意义, 曲线 C 上存在距离 xOy 面最远的点和最近的点, 故所求点依次为 $(-5, -5, 5)$ 和 $(1, 1, 1)$.

48. 【解】 $L(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} + z^2 - 1) + \mu(x + y + z)$

$$\begin{cases} L'_x = 2x + \frac{2}{3}\lambda x + \mu = 0, \\ L'_y = 2y + \lambda y + \mu = 0, \\ L'_z = 2z + 2\lambda z + \mu = 0, \\ L'_\lambda = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} + z^2 - 1 = 0, \\ L'_\mu = x + y + z = 0, \end{cases}$$

解得 $\lambda = \frac{-11 \pm \sqrt{13}}{6} = -d^2$, 从而可得 $d_1 = \sqrt{\frac{11 + \sqrt{13}}{6}}, d_2 = \sqrt{\frac{11 - \sqrt{13}}{6}}$.

49. 【证】 求函数 xy 在条件 $\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} = k (k > 0)$ 下的最大值.

令 $L(x, y) = xy + \lambda(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - k)$,

$$\begin{cases} L'_x = y + \lambda x^{p-1} = 0, \\ L'_y = x + \lambda y^{q-1} = 0, \\ L'_\lambda = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - k = 0, \end{cases}$$

由此解得 $x = k^{\frac{1}{p}}, y = k^{\frac{1}{q}}$, 这是唯一的驻点, 为最大值点, 则

$$xy \leq k^{\frac{1}{p}} \cdot k^{\frac{1}{q}} = k^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} = k = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

50. 【解】 (1) 由题设知 $\frac{\partial C}{\partial x} = 20 + \frac{x}{2}, \frac{\partial C}{\partial y} = 6 + y, C(0, 0) = 10000$,

从而有 $C(x, y) = 10000 + 20x + \frac{x^2}{4} + 6y + \frac{y^2}{2}$.

(2) 由题设知 $x + y = 50$, 此时的成本函数为

$$f(x) = C(x, 50 - x) = 10000 + 20x + \frac{x^2}{4} + 6(50 - x) + \frac{(50 - x)^2}{2}, 0 \leq x \leq 50$$

求得 $f'(x) = \frac{3x}{2} - 36$, 令 $f'(x) = 0$ 解得唯一驻点 $x = 24$.

又 $f''(24) = \frac{3}{2} > 0$, 所以 $x = 24$ 是成本函数 $C(x, 50 - x)$ 的最小值点.

故当甲为 24 件, 乙为 26 件时, 总成本达到最小, 最小成本为 $C(24, 26) = 11118$ 万元.

(3) $\frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{(24, 26)} = (20 + \frac{x}{2}) \Big|_{(24, 26)} = 32$, 其经济意义为: 当生产乙产品 26 件时, 生产第 25 件甲产品需 32 万元.

51. 【解】 (1) 令 $L(x, y) = R(x, y) - C(x, y) - x - 2y$
 $= 14x + 32y - x^2 - 2xy - 4y^2 - 36$,

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 14 - 2x - 2y = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 32 - 2x - 8y = 0 \end{cases}$$



$x = 4, y = 3$, 根据题意最大值存在, 可能取得极值的点唯一.

则 $x = 4, y = 3$ 时 L 最大, $L_{\max}(4, 3) = 40$ (万元)

(2) 令 $F(x, y, \lambda) = L(x, y) - \lambda(x + 2y - 6)$

$$\begin{cases} F'_x = 14 - 2x - 2y - \lambda = 0, \\ F'_y = 32 - 2x - 8y - 2\lambda = 0, \\ F'_\lambda = x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

解得 $x = 2, y = 2$, 驻点唯一, 最大值存在, $L_{\max}(2, 2) = 28$ (万元).

52. 【证】 考查函数

$$g(x, y) = f(x, y) + 2(x^2 + y^2)$$

在单位圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上, 有 $g(x, y) \geq 1$, 而在圆心处 $g(0, 0) \leq 1$. 这样 $g(x, y)$ 可在单位圆内取到它的最小值. 设该点是 (x_0, y_0) , 从而有

$$\frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

$$\text{即 } \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = -4x_0, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = -4y_0.$$

$$\text{从而 } \left[\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right]^2 = 16(x_0^2 + y_0^2) < 16.$$

第六章 二重积分

1. 【解】 (1)(C).

积分区域由直线 $x = 1, x + y = 4, y = 1, y = 2$ 围成.

(2)(B).

当 $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$ 时, $y = \sin x$ 的反函数应为 $x = \pi - \arcsin y$.

2. 【解】 (1)(D).

区域 D 由 $x^2 + y^2 = 2y, y = x, x = 0$ 所围成,

$$\text{原式} = \int_0^1 dx \int_x^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

(2)(D).

区域 D 由 $x^2 + y^2 = 2x, y = x, y = 0$ 所围成.

3. 【解】 (C).

区域 D 由 $x^2 + y^2 = 1, y = x, y = 0$ 所围成.

4. 【解】 (D).

区域 D 由 $x^2 + y^2 = 1, x + y = 1, y = 0$ 所围成.

5. 【解】 (D).

将积分区域划分成关于 x 轴, y 轴对称的区域.

6. 【解】 (C).

直接法, 由 $f(x, y) = xy + \iint_D f(x, y) d\sigma$ 知

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D xy d\sigma + \iint_D f(x, y) d\sigma \cdot \iint_D d\sigma$$



即 $\iint_D f(x, y) d\sigma = \frac{1}{12} + \frac{1}{3} \iint_D f(x, y) d\sigma$, 得

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \frac{1}{8}, f(x, y) = xy + \frac{1}{8}$$

7.【解】 (D).

由于 $\sin^2(x+y) \leq \sin(x+y) < (x+y)$, 则 $0 < I < K$.

而 $\ln^3(x+y) < 0$ (在 D 内, $0 < (x+y) < 1$), 则 $J < 0$, 选(D).

8.【解】 (D).

$$\begin{aligned} I &= \iint_{|x|+|y| \leq 1} (x^2 + y^3) d\sigma = \iint_{|x|+|y| \leq 1} x^2 d\sigma > 0 \\ J &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^4 - y^4) d\sigma = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^4 d\sigma - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} y^4 d\sigma = 0 \\ K &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^3 - y^2) d\sigma = - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} y^2 d\sigma < 0 \end{aligned}$$

9.【解】 (A).

在区域 D 内 $0 \leq \frac{x+y}{4} \leq 1$, 故应选(A).

10.【解】 (A).

$f(x, y) = y \cos x$ 关于 y 为奇函数, 关于 x 为偶函数, 故由对称性知 $I_2 = I_4 = 0$, 而 $I_1 > 0, I_3 < 0$, 故应选(A).

11.【解】 (B).

由变量对称性知 $I_1 = I_3 = 0$, 在 D_2 上 $y - x > 0$, 则 $I_2 > 0$.

在 D_4 上 $y - x < 0$, 则 $I_4 < 0$.

12.【解】 (C).

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^t dx \int_x^{t-x} e^{-y^2} dy}{t^a} &= - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^t dy \int_0^y e^{-y^2} dx}{t^a} = - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^t dy \int_0^y e^{-y^2} dx}{t^a} \\ &= - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{te^{-t^2}}{at^{a-1}} \quad (a = 2) \\ &= - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$13.【解】 \text{原式} = \int_0^2 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{2-\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^2 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^4 f(x, y) dx.$$

$$14.【解】 \int_0^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^y f(x, y) dx - \int_0^1 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^2 f(x, y) dx - \int_1^2 dy \int_y^2 f(x, y) dx.$$

$$15.【解】 \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}} dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}} dx = \frac{1}{3} (\sqrt{2} - 1).$$

$$16.【解】 \int_0^1 dy \int_{\frac{y}{2}}^y \cos x^2 dx + \int_1^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^1 \cos x^2 dx = \int_0^1 dx \int_x^{2x} \cos x^2 dy = \frac{1}{2} \sin 1.$$

$$\begin{aligned} 17.【解】 \text{原式} &= \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{x^2 - y^2} dy = \frac{\pi}{4} \int_0^1 x^2 dx \quad (\text{几何意义}) \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi}{4} a^2 \\ &= \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18.【解】 \text{原式} &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} [x^2 + 2x + 1 + 2y^2] d\sigma = \pi + \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + 2y^2) d\sigma \\ &= \pi + \frac{3}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) d\sigma = \frac{7}{4} \pi. \end{aligned}$$



19.【解】 由于区域 D 关于 $y = x$ 对称, 由对称性知

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} d\rho = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos \theta} d\theta \\ &= 2 \ln(\sec \theta + \tan \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2 \ln(1 + \sqrt{2})\end{aligned}$$

20.【解】 记半圆 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 与 x 轴所围的区域为 D , 则

$$I = \iint_D [(x-1)^3 + y] dx dy$$

由于积分域 D 关于 $x = 1$ 对称, 则

$$\begin{aligned}\iint_D (x-1)^3 dx dy &= 0 \\ I &= \iint_D y dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} y dy = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}21.【解】 \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin^2 t} \int_0^t dx \int_x^t e^{-(x-y)^2} dy &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^2} \int_0^t dy \int_0^y e^{-(x-y)^2} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^t e^{-(x-t)^2} dx}{2t} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-(t-t)^2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

22.【解】 $f'(t) = \int_t^{\sqrt{t}} \frac{\sin y}{y} dy$, 由于当 $y \in (0, \pi]$ 时 $\frac{\sin y}{y} > 0$, 所以, 由

$$f'(t) = \int_t^{\sqrt{t}} \frac{\sin y}{y} dy = 0$$

得 $\sqrt{t} = t$, 即 $t = 1$, 且当 $0 < t < 1$ 时, $t < \sqrt{t}$, $f'(t) > 0$.

当 $1 < t < \pi$ 时, $\sqrt{t} < t$, $f'(t) < 0$. 则 $f(1)$ 为 $f(t)$ 在 $[0, \pi]$ 上的最大值.

$$f(1) = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^y \frac{\sin y}{y} dx = \int_0^1 [\sin y - y \sin y] dy = 1 - \sin 1$$

$$\begin{aligned}23.【解】 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\int_1^{\frac{1}{n}} e^{-y^2} dy + \int_1^{\frac{2}{n}} e^{-y^2} dy + \cdots + \int_1^{\frac{n-1}{n}} e^{-y^2} dy \right] &= \int_0^1 \left(\int_1^x e^{-y^2} dy \right) dx \\ &= - \int_0^1 dy \int_0^y e^{-y^2} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e} - 1 \right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}24.【解】 \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^6} \int_0^t dx \int_x^t \sin(xy)^2 dy &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^6} \int_0^t dy \int_0^y \sin(xy)^2 dx \quad (\text{交换积分次序}) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{6t^5} \int_0^t \sin(xt)^2 dx \quad (\text{洛必达法则})\end{aligned}$$

令 $xt = u$, 则 $\int_0^t \sin(xt)^2 dx = \frac{1}{t} \int_0^{t^2} \sin u^2 du$, 从而

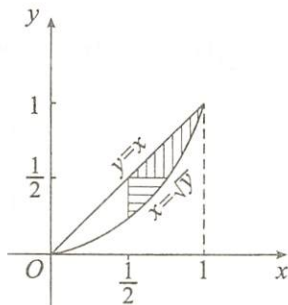
$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^6} \int_0^t dx \int_x^t \sin(xy)^2 dy = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{6t^5} \int_0^{t^2} \sin u^2 du = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2t \sin t^4}{36t^5} = \frac{1}{18}$$

25.【解】 区域 D 如右图阴影部分.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \iint_D e^{\frac{x}{2}} d\sigma = \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} e^{\frac{x}{2}} dy \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 x(e - e^x) dx = \frac{3}{8}e - \frac{1}{2}\sqrt{e}\end{aligned}$$

26.【解】 将 D 分成 $D_1: x^2 + y^2 - 1 \leq 0$ 与 $D_2: x^2 + y^2 - 1 > 0$ 两部分.

$$\iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma = \iint_{D_1} (1 - x^2 - y^2) d\sigma + \iint_{D_2} (x^2 + y^2 - 1) d\sigma$$



$$\text{由于 } \iint_{D_1} (1-x^2-y^2) d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (1-r^2) r dr = \frac{\pi}{8},$$

$$\begin{aligned} \iint_{D_2} (x^2+y^2-1) d\sigma &= \int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 (x^2+y^2-1) dy \\ &= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} - y \right] \bigg|_{\sqrt{1-x^2}}^1 dx = \int_0^1 \left[x^2 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right] dx \\ &= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{2}{3} \right) dx + \frac{2}{3} \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} I, \end{aligned}$$

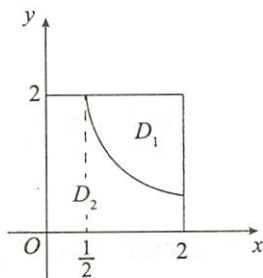
$$\text{其中 } I = \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx \stackrel{x=\sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16},$$

$$\iint_{D_2} (x^2+y^2-1) d\sigma = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3\pi}{16} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{3}.$$

$$\text{因此 } \iint_D |x^2+y^2-1| d\sigma = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}.$$

27. 【解】 曲线 $xy=1$ 将区域 D 分成如右图所示的两个区域 D_1 和 D_2

$$\begin{aligned} \iint_D \max\{xy, 1\} dx dy &= \iint_{D_1} xy dx dy + \iint_{D_2} dx dy \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 xy dy + \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^2 dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_0^{\frac{1}{x}} dy \\ &= \frac{15}{4} - \ln 2 + 1 + 2 \ln 2 = \frac{19}{4} + \ln 2. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 28. \text{【解】 (方法一)} \quad \iint_D xy[1+x^2+y^2] dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^3 \sin \theta \cos \theta [1+r^2] dr \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^3 [1+r^2] dr \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 r^3 dr + \int_1^{\sqrt{2}} 2r^3 dr \right) = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

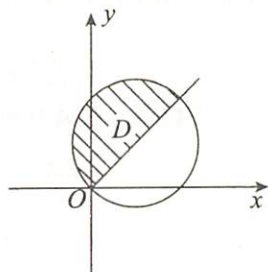
(方法二) 记 $D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, $D_2 = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}, x \geq 0, y \geq 0\}$, 则有 $1 + x^2 + y^2 = 1, (x, y) \in D_1, 1 + x^2 + y^2 = 2, (x, y) \in D_2$.

$$\begin{aligned} \text{于是 } \iint_D xy[1+x^2+y^2] dx dy &= \iint_{D_1} xy dx dy + \iint_{D_2} 2xy dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^3 \sin \theta \cos \theta dr + \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^{\sqrt{2}} 2r^3 \sin \theta \cos \theta dr \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

29. 【解】 如右图所示, 区域 D 的极坐标表示为

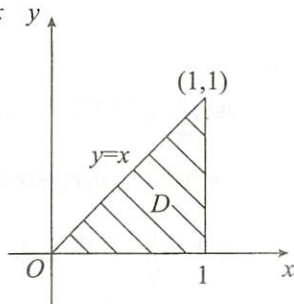
$$0 \leq r \leq 2(\sin \theta + \cos \theta), \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} \iint_D (x-y) dx dy &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{2(\sin \theta + \cos \theta)} r^2 (\cos \theta - \sin \theta) dr \\ &= \frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\sin \theta + \cos \theta)^3 d(\sin \theta + \cos \theta) \\ &= \frac{2}{3} (\sin \theta + \cos \theta)^4 \bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = -\frac{8}{3}. \end{aligned}$$



30. 【解】 由题设知,积分区域 D 如右图所示,将积分化为直角坐标系下 y 的二重积分为

$$\begin{aligned} I &= \iint_D r^2 \sin \theta \sqrt{1-r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} dr d\theta \\ &= \iint_D y \sqrt{1-x^2+y^2} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{1-x^2+y^2} d(1-x^2+y^2) \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 (1-x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^x dx = \frac{1}{3} \int_0^1 [1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}] dx. \end{aligned}$$



设 $x = \sin t$, 则

$$I = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}$$

31. 【解】 在极坐标系下 $D = \left\{ (r, \theta) \mid -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq 0, 0 \leq r \leq -2a \sin \theta \right\}$.

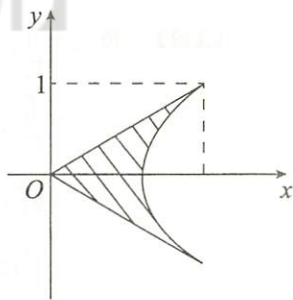
$$I = \iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}} d\sigma = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 d\theta \int_0^{-2a \sin \theta} \frac{r^2}{\sqrt{4a^2-r^2}} dr$$

令 $r = 2a \sin t$, 有

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 d\theta \int_0^{-\theta} 2a^2 (1 - \cos 2t) dt \\ &= 2a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \left(-\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) d\theta = a^2 \left(\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

32. 【解】 区域 D 如图所示.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_D (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) dx dy \\ &= \iint_D (x^3 + 3xy^2) dx dy = 2 \int_0^1 dy \int_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}} (x^3 + 3xy^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 + 2y^2 - 3y^4) dy + 3 \int_0^1 (y^2 - y^4) dy = \frac{14}{15}. \end{aligned}$$



33. 【解】 由 $x^2 + y^2 \leq 2x + 2y$ 知, $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2$

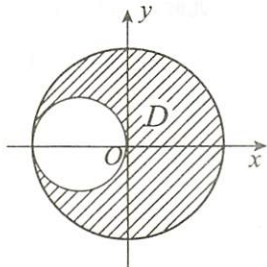
令 $x-1 = u, y-1 = v, D: u^2 + v^2 \leq 2$.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_D [u+1+(v+1)^2] d\sigma = 4\pi + \iint_D v^2 d\sigma \\ &= 4\pi + \frac{1}{2} \iint_D (u^2 + v^2) d\sigma = 5\pi. \end{aligned}$$

34. 【解】 (方法一) $\iint_D (\sqrt{x^2+y^2}+y) d\sigma = \iint_{D_{\text{大圆}}} (\sqrt{x^2+y^2}+y) d\sigma - \iint_{D_{\text{小圆}}} (\sqrt{x^2+y^2}+y) d\sigma$

$$\begin{aligned} \iint_{D_{\text{大圆}}} (\sqrt{x^2+y^2}+y) d\sigma &= \iint_{D_{\text{大}}} \sqrt{x^2+y^2} d\sigma + \iint_{D_{\text{大}}} y d\sigma \quad (\text{据对称性}) \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^2 dr + 0 = \frac{16}{3} \pi. \end{aligned}$$

$$\iint_{D_{\text{小圆}}} (\sqrt{x^2+y^2}+y) d\sigma = \iint_{D_{\text{小}}} \sqrt{x^2+y^2} d\sigma + \iint_{D_{\text{小}}} y d\sigma$$

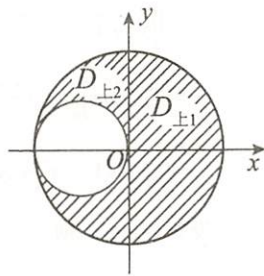


$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta \int_0^{-2\cos\theta} r^2 dr + 0 = \frac{32}{9},$$

$$\text{所以 } \iint_D (\sqrt{x^2+y^2}+y) d\sigma = \frac{16}{9}(3\pi-2).$$

(方法二) 由积分区域对称性和被积函数的奇偶性, $\iint_D y d\sigma = 0$.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_D \sqrt{x^2+y^2} d\sigma + 0 \\ &= 2 \left[\iint_{D_{\text{上1}}} \sqrt{x^2+y^2} d\sigma + \iint_{D_{\text{上2}}} \sqrt{x^2+y^2} d\sigma \right] \\ &= 2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 r^2 dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_{-2\cos\theta}^2 r^2 dr \right] \\ &= 2 \left[\frac{4}{3}\pi + \left(\frac{4}{3}\pi - \frac{16}{9} \right) \right] \\ &= \frac{16}{9}(3\pi-2). \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 35. \text{【解】} \quad \iint_D e^x xy dx dy &= \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}} e^x xy dy = \frac{1}{2} \int_0^1 e^x (1-x^2) dx \\ &= \frac{1}{2} e^x (1-x^2) \Big|_0^1 + \int_0^1 x e^x dx \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} + x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} 36. \text{【解】} \quad \text{原式} &= \iint_{D_{\theta}} [r \sin \theta + r \cos \theta \sqrt{1+r^2 \sin^2 \theta}] r dr d\theta \\ &= \iint_{D_{xy}} [y + x \sqrt{1+y^2}] dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2 \int_0^1 dx \int_x^{1+\sqrt{1-x^2}} y dy = \int_0^1 [(1+\sqrt{1-x^2})^2 - x^2] dx \\ &= \int_0^1 (2-2x^2) dx + 2 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{4}{3} + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 37. \text{【解】} \quad \text{原式} &= 2 \iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy = 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} r^2 dr \\ &= \frac{16}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta = \frac{20\sqrt{2}}{9}. \end{aligned}$$

$$38. \text{【证】} \quad \text{交换积分次序得 } f(t) = \int_0^t dy \int_0^y y^2 e^{-y^2} dx = \int_0^t y^3 e^{-y^2} dy,$$

由于 $y^3 e^{-y^2}$ 是奇函数, 则 $f(x)$ 是偶函数, 因此, 只需考虑 $t \in [0, +\infty)$, 此时, $f'(t) = t^3 e^{-t^3} \geq 0$, $f(t)$ 单调增, 又 $f(0) = 0$,

$$\begin{aligned} f(+\infty) &= \int_0^{+\infty} y^3 e^{-y^2} dy = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} y^2 de^{-y^2} \\ &= -\frac{1}{2} y^2 e^{-y^2} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} y e^{-y^2} dy \\ &= -\frac{1}{2} e^{-y^2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



则对一切的 $t \in (-\infty, +\infty)$, 有 $0 \leq f(t) < \frac{1}{2}$.

$$39. \text{【解】} (1) b = \int_0^2 dx \int_0^2 (1-xy) dy + 2 \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 (xy-1) dy = \frac{3}{2} + 2 \ln 2.$$

(2) 反证法

若 $|f(x, y)| < \frac{1}{b}, (x, y) \in D$

$$\begin{aligned} \text{由于 } 1 &= \left| \iint_D (xy-1) f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_D |xy-1| |f(x, y)| d\sigma \\ &< \frac{1}{b} \iint_D |xy-1| d\sigma = 1, \end{aligned}$$

矛盾. 故存在 $(\xi, \eta) \in D$ 使 $|f(\xi, \eta)| \geq \frac{1}{b}$.

40. 【证】 设 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) g(x) dx - \left(\int_0^1 f(x) dx \right) \left(\int_0^1 g(x) dx \right) &= \iint_D f(x) g(x) d\sigma - \iint_D f(x) g(y) d\sigma \\ &= \iint_D f(x) (g(x) - g(y)) d\sigma, \end{aligned}$$

$$\text{积分区域 } D \text{ 关于 } y = x \text{ 对称, } \iint_D f(x) (g(x) - g(y)) d\sigma = \iint_D f(y) (g(y) - g(x)) d\sigma,$$

$$\begin{aligned} \iint_D f(x) (g(x) - g(y)) d\sigma &= \frac{1}{2} \left(\iint_D f(x) (g(x) - g(y)) d\sigma + \iint_D f(y) (g(y) - g(x)) d\sigma \right) \\ &= \frac{1}{2} \iint_D (f(x) - f(y)) (g(x) - g(y)) d\sigma, \end{aligned}$$

$f(x), g(x)$ 都是单调增, 故 $f(x) - f(y), g(x) - g(y)$ 同时为正, 或同时为负, 所以, 积分非负.

$$\int_0^1 f(x) g(x) dx \geq \left(\int_0^1 f(x) dx \right) \left(\int_0^1 g(x) dx \right)$$

第七章 无穷级数

1. 【解】 (C).

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ 收敛, 则由 $|a_n| \leq |a_n| + |b_n|, |b_n| \leq |a_n| + |b_n|$ 知

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛, 矛盾.

2. 【解】 (B).

只有命题(4)正确, 由 $a_n \leq b_n \leq c_n$ 知, $0 \leq b_n - a_n \leq c_n - a_n$, 又 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 都收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$

收敛, 又 $b_n = (b_n - a_n) + a_n$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

3. 【解】 (B).

$$|a_n| = \sqrt{n} \left| \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x) dx \right| = \frac{\sqrt{n}}{n(n+1)} |f(c)| \quad (\text{积分中值定理})$$

$$\leq \frac{\sqrt{n}}{n(n+1)} M = \frac{M}{\sqrt{n}(n+1)} < \frac{M}{n^{3/2}},$$



则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

4.【解】 (B).

$$\left| \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(e^n + p)} \right| = \frac{1}{\ln(e^n + p)} = \frac{1}{\ln e^n \left(1 + \frac{p}{e^n}\right)} = \frac{1}{n + \ln\left(1 + \frac{p}{e^n}\right)} \sim \frac{1}{n}$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(e^n + p)} \right|$ 发散. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(e^n + p)}$ 是一个交错级数, 且 $u_n = \frac{1}{\ln(e^n + p)}$ 单调减且趋于 0, 则

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(e^n + p)}$ 收敛, 故该级数条件收敛.

5.【解】 (D).

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$ 可知, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 中至少有一个不成立, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 至少有一个发散.

6.【解】 (C).

比如 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 是收敛的, 但级数

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} - a_{2n+1}) &= (a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \cdots \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \cdots \end{aligned}$$

发散, 故应选 (C).

7.【解】 (C).

由于 $\left| (-1)^n \left(n \tan \frac{\lambda}{n} \right) a_{2n} \right| = \left(n \tan \frac{\lambda}{n} \right) a_{2n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(n \tan \frac{\lambda}{n} \right) a_{2n}}{a_{2n}} = \lambda > 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \tan \frac{\lambda}{n} \right) a_{2n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 同敛散, (ID: djky66)

而由于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(n \tan \frac{\lambda}{n} \right) a_{2n}$ 绝对收敛.

8.【解】 (D).

由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}$ (比原级数少第一项) 也收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}$ 逐项相加所得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$ 收敛.

9.【解】 (D).

由上题可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$ 收敛, 该级数乘 $\frac{1}{2}$ 得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛.

10.【解】 (C).

由于数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则 $\{a_n\}$ 有界, 即 $|a_n| \leq M$. 而当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时, $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = 0$, 则当 n 充分大时, $|b_n| < 1$, 此时 $a_n^2 b_n^2 \leq M^2 |b_n|$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛.

11.【解】 (D).

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n}) &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots \end{aligned}$$



显然级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n})$ 就是由收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 加括号得来的, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n})$ 收敛.

12.【解】 (A).

显然级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n}) = (u_1 + u_2) + (u_3 + u_4) + \cdots$ 是由收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 加括号得来的, 则级数

$\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛.

13.【解】 (D).

由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n} \sin \frac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛可知, $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \sin \frac{1}{n^\alpha}$ 收敛,

又 $\sin \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{n^\alpha}$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \sin \frac{1}{n^\alpha}$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$ 同敛散, 则 $\alpha - \frac{1}{2} > 1$, 即 $\alpha > \frac{3}{2}$.

由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛可知, $0 < 2 - \alpha \leq 1$, 即 $1 \leq \alpha < 2$, 故 $\frac{3}{2} < \alpha < 2$.

14.【解】 (D).

由于 $\{a_n\}$ 为正项数列, 若存在常数 $p > 1$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n$ 存在, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^p}}$ 存在, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛, 则级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

15.【解】 (A).

若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n$ 在 $x = 1$ 处收敛, 由阿贝尔定理知该幂级数在区间 $(-3, 1)$ 内绝对收敛, 从而幂

级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n$ 在 $x = 0$ 处绝对收敛, 即级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

16.【解】 (A).

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n}$ 的收敛半径为 1. 由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x = -2$ 处条件收敛知, $a = -3$ 或 $a = -1$, 但 $a = -3$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x = -2$ 处条件收敛矛盾, 则 $a = -1$.

$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (x-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (x+1)^2$ 的收敛半径为 1, $-1 < \ln \frac{1}{2} < 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (x-a)^n$ 在 $x = \ln \frac{1}{2}$ 处绝对收敛.

17.【解】 (C).

由数列 $\{a_n\}$ 单调减少, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n a^k (n = 1, 2, \cdots)$ 无界可知, 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散而交错级数

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛, 即幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x = 2$ 处发散而在 $x = 0$ 处收敛, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 的收敛域为 $[0, 2)$.

18.【解】 $p > 2$.

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p (e^{\frac{1}{n}} - 1) a_n = 1$ 可知, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p \cdot \frac{1}{n} \cdot a_n = 1$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^{p-1}}} = 1$.

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p-1}}$ 同敛散, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $p-1 > 1$, 即 $p > 2$.

19.【解】 $(-2, 4)$.



由于幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^{n+1}$ 可看做幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 逐项求导及平移所得, 则其收敛半径不变为 3, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^{n+1}$ 的中心为 1, 则其收敛区间为 $(-2, 4)$.

20. 【解】 $(1, 5]$.

若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$ 在 $x=5$ 处收敛, 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+2)^n$ 在 $x=-4$ 发散, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$ 在 $x=1$ 处发散, 由阿贝尔定理知, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$ 的收敛域为 $(1, 5]$.

21. 【解】 $(-2, 0)$.

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \ln n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{\ln n}} = 1$ 知, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 又正项数列 $\{a_n\}$ 单调减, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 条件收敛, 即幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n x^n$ 在 $x=1$ 处条件收敛. 其收敛半径为 1,

故幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n} (x+1)^n$ 的收敛半径也为 1, 则其收敛区间为 $(-2, 0)$.

22. 【解】 $(-2, 0)$.

由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 条件收敛可知, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n (x+1)^n$ 在 $x=0$ 处条件收敛, $x=0$ 为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n (x+1)^n$ 的收敛区间的端点, 该幂级数收敛半径为 1.

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n} (x+1)^n$ 与幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n (x+1)^n$ 的收敛半径相同, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n} (x+1)^n$ 的收敛区间为 $(-2, 0)$.

23. 【解】 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

由幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=2$ 时条件收敛可知, 该幂级数收敛半径为 2, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^n$ 收敛. 则当 $|x| < 2$ 时幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 收敛, 从而可知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}$ 在 $|x^2| < 2$ 时收敛, 即当 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ 时幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}$ 收敛, 由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^n$ 收敛可知, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}$ 在 $x = \pm\sqrt{2}$ 处收敛, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}$ 的收敛域为 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

24. 【解】 $[-3, 3)$.

因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(-3)^n + (2)^n]n}{[(-3)^{n+1} + (2)^{n+1}](n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]n}{-3\left[1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right](n+1)} = -\frac{1}{3}$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{3}$, 所以收敛半径为 3, 收敛区间为 $(-3, 3)$.

当 $x = -3$ 时, 因为 $\frac{3^n}{(-3)^n + 2^n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^n 2^n}{(-3)^n + 2^n} \cdot \frac{1}{n}$, 所以原级数在点 $x = -3$ 处收敛.

当 $x = 3$ 时, 由于 $\frac{(-1)^n 3^n}{(-3)^n + 2^n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{3^n}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{(-2)^n}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{1}{n}$, 所以原级数在点 $x = 3$ 处发散.



25.【解】 (1) 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a(\sqrt[n]{n})^a} = \frac{1}{a}$, 则当 $a > 1$ 时原级数收敛, 当 $a < 1$ 原级数发散, 当 $a = 1$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, 则当 $a \leq 1$ 时原级数发散, 当 $a > 1$ 时原级数收敛.

(2) 由于 $\frac{\sqrt{n}}{\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4} dx} \leq \frac{\sqrt{n}}{\int_0^n x dx} = \frac{\sqrt{n}}{\frac{1}{2}n^2} = \frac{2}{n^{3/2}}$, 则原级数收敛.

(3) 由于 $0 < \frac{n^3[\sqrt{2} + (-1)^n]^n}{3^n} \leq \frac{n^3(\sqrt{2} + 1)^n}{3^n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^3(\sqrt{2} + 1)^n}{3^n}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{3} < 1$, 则原级数收敛.

(4) 由于 $(-1)^n \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{2(-1)^n}{(n+1)\sqrt{n}}$, 则原级数收敛.

26.【解】 由 $y' = x + y, y(0) = 1$ 可知, $y'(0) = 1, y''(0) = 2$.

由泰勒公式可知 $y\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. 即 $y\left(\frac{1}{n}\right) - 1 - \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$,

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[y\left(\frac{1}{n}\right) - 1 - \frac{1}{n} \right]$ 收敛.

27.【解】 $f(x) = \frac{x}{(x+1)(x+6)} = \frac{1}{5} \left(\frac{6}{x+6} - \frac{1}{x+1} \right)$
 $= \frac{3}{25} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-4}{10}} - \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-4}{5}} \quad (-1 < x < 9)$
 $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{25} \left(\frac{3}{10^n} - \frac{1}{5^n} \right) (x-4)^n, \quad (-1 < x < 9).$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

28.【解】 $\ln \frac{1}{2+2x+x^2} = -\ln[1 + (x+1)^2]$
 $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^{2n}}{n} \quad (-2 \leq x \leq 0)$

29.【解】 $f'(x) = \frac{8x}{16+x^4} = \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^4} = \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{4n} \quad (|x| < 2)$
 $= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{4n+1} \quad (|x| < 2)$

$f(x) - \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x \left(\frac{t}{2}\right)^{4n+1} dt$

$f(x) = \frac{\pi}{4} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+2} \left(\frac{x}{2}\right)^{4n+2}, \quad (|x| < 2).$

30.【解】 易求得收敛域为 $[-1, 1]$. 令 $S(x) = x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} x^{2n+1}$,

$S'(x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} x^{2n} = 1 + 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{2n-1} = 1 + 2x \arctan x$,

$S(x) = \int_0^x (1 + 2t \arctan t) dt = (1+x^2) \arctan x$.

31.【解】 易求得 $R = +\infty$, 收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

设 $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$, 则 $y^{(4)}(x) = y(x)$, 且 $y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$, 微分方程 $y^{(4)}(x) =$

$y(x)$ 的特征方程为 $r^4 - 1 = 0$, 特征根为 $r_{1,2} = \pm 1, r_{3,4} = \pm i$. 则该方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$, 利用条件 $y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$ 定出通解中的任意常数得



$$y = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x} + 2\cos x)$$

32.【解】 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+3} \cdot n(2n-1)}{(n+1)(2n+1)x^{2n+1}} \right| = x^2$,

所以当 $x^2 < 1$ 即 $-1 < x < 1$ 时,原幂级数绝对收敛;

当 $x = \pm 1$ 时,级数为 $\pm \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$,显然收敛,故原幂级数的收敛域为 $[-1, 1]$.

因 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{n(2n-1)} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}$, 设 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)} = f(x)$, $x \in (-1, 1)$, 则

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2nx^{2n-1}}{n(2n-1)} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1},$$

$$f''(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \frac{2}{1+x^2}.$$

因为 $f'(0) = 0, f(0) = 0$, 所以

$$f'(x) = \int_0^x f''(t) dt + f'(0) = \int_0^x \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \arctan x,$$

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt + f(0) = 2 \int_0^x \arctan t dt = 2 \left(t \arctan t \Big|_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt \right)$$

$$= 2x \arctan x - \ln(1+x^2), \quad x \in [-1, 1],$$

从而 $S(x) = 2x^2 \arctan x - x \ln(1+x^2)$, $x \in [-1, 1]$.

33.【解】 令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)} x^{2n+1}$, 则

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} = x \arctan x$$

上式两端从 0 到 1 积分得 $S(1) = \int_0^1 x \arctan x dx = \frac{\pi-2}{4}$,

$$\text{则 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi-2}{4}.$$

34.【解】 因 $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$, $x \in (-1, 1)$, 故

$$\arctan x = \int_0^x (\arctan t)' dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad x \in [-1, 1]$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } f(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+2} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2}{1-4n^2} x^{2n}, \quad x \in [-1, 1], \end{aligned}$$

$$\text{因此 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} = \frac{1}{2}[f(1)-1] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

35.【解】 设 A_n 为用于第 n 年提取 $(10+9n)$ 万元的贴现值, 则 $A_n = (1+r)^{-n}(10+9n)$, 故

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10+9n}{(1+r)^n} = 10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n}{(1+r)^n} = 200 + 9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1+r)^n}$$

设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$, $x \in (-1, 1)$. 因为



$$S(x) = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = x \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}, x \in (-1, 1)$$

$$\text{所以 } S\left(\frac{1}{1+r}\right) = S\left(\frac{1}{1.05}\right) = 420(\text{万元}),$$

故 $A = 200 + 9 \times 420 = 3980(\text{万元})$, 即至少应存入 3980(万元).

$$36. \text{【解】} \quad (1) \text{ 对 } y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ 求一、二阶导数, 得 } y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}, \text{ 代入 } y'' - 2xy' - 4y = 0 \text{ 并整理, 得 } \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^n = 0,$$

$$\text{于是 } \begin{cases} 2a_2 - 4a_0 = 0, \\ (n+1)(n+2)a_{n+2} - 2(n+2)a_n = 0, n = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

$$\text{从而 } a_{n+2} = \frac{2}{n+1} a_n, n = 1, 2, \dots.$$

$$(2) \text{ 因为 } y(0) = a_0 = 0, y'(0) = a_1 = 1, \text{ 故 } a_{2n} = 0, n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$a_{2n+1} = \frac{2}{2n} a_{2n-1} = \dots = \frac{2^n}{2n \cdot (2n-2) \cdots 4 \cdot 2} a_1 = \frac{1}{n!}, n = 0, 1, 2, \dots.$$

$$\text{从而 } y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = x e^{x^2}, x \in (-\infty, +\infty).$$

$$37. \text{【解】} \quad (1) \text{ 由题设得 } a_{2n} = \frac{3}{(2n)!}, a_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)!}, \text{ 所以幂级数 } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ 的收敛半径为 } +\infty. \text{ 因为}$$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \text{ 所以}$$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

由于 $a_{n-2} - n(n-1)a_n = 0 (n \geq 2)$, 则

$$S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = S(x)$$

$$\text{即 } S''(x) - S(x) = 0.$$

(2) 齐次方程 $S''(x) - S(x) = 0$ 的特征根为 1 和 -1, 则其通解为

$$S(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$$

$$\text{由 } S(0) = a_0 = 3, S'(0) = a_1 = 1 \text{ 知, } C_1 = 1, C_2 = 2. \text{ 所以 } S(x) = e^{-x} + 2e^x.$$

$$38. \text{【解】} \quad \text{由于 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{2} + n}{n+1} \right| = 1, \text{ 所以当 } |x| < 1 \text{ 时幂级数收敛.}$$

$$\text{记 } S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \text{ 则}$$

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{2} + (n-1) \right] a_{n-1} x^{n-1} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_{n-1} x^{n-1} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 \right) + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n \\ &= \frac{1}{2} S(x) + x S'(x). \end{aligned}$$



解微分方程 $\frac{S'(x)}{S(x)} = \frac{1}{2(1-x)}$, $S(0) = 1$ 得 $S(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

故幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数为 $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

39.【解】 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 则

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) x^{n-1} \\ &= S(x) + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^{n+1} = S(x) + \frac{x}{(1-x)^2}, \end{aligned}$$

即 $S'(x) = S(x) + \frac{x}{(1-x)^2}$, 且 $S(0) = a_0 = 2$,

解方程 $S(x) = C e^x + \frac{1}{1-x}$, 由 $S(0) = 2$ 得 $C = 1$, $S(x) = e^x + \frac{1}{1-x}$.

40.【证】 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$, 知 $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$.

由于 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的邻域内有连续一阶导数, 且 $f'(0) = 2 > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 在 $(0, \delta)$ 内 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调增, $f(\frac{1}{n})$ 单调减. 由 $f(0) = 0$ 知, $f(\frac{1}{n}) > 0$,

由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\frac{1}{n}) = 0$, 则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(\frac{1}{n})$ 收敛.

而 $\left| (-1)^n f(\frac{1}{n}) \right| = f(\frac{1}{n})$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 2$. 故 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(\frac{1}{n})$ 条件收敛.

以下题目数学三不要求

41.【证】 $a_n = \int_0^1 f(nx) dx$, 令 $nx = t$, 则 $a_n = \frac{1}{n} \int_0^n f(t) dt$.

$$\begin{aligned} a_n^2 &= \frac{1}{n^2} \left(\int_0^n f(t) dt \right)^2 \leq \frac{1}{n^2} \left(\int_0^n 1^2 dt \right) \cdot \left(\int_0^n f^2(t) dt \right) \quad (\text{柯西积分不等式}) \\ &\leq \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} f^2(t) dt, \end{aligned}$$

令 $\int_0^{+\infty} f^2(x) dx = A$, 则 $\frac{a_n^2}{n^2} \leq \frac{A}{n^{1+\alpha}}$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{n^2}$ ($\alpha > 0$) 收敛.

42.【证】 由 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ 可知, $\frac{b_n}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$, 则 $\frac{b_1}{a_1} \dots \leq \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} \leq \frac{b_n}{a_n}$, $(\frac{b_1}{a_1}) a_n \leq b_n$.

(1) 由 $(\frac{b_1}{a_1}) a_n \leq b_n$ 可知, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 由 $(\frac{b_1}{a_1}) a_n \leq b_n$ 可知, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

43.【证】 由题设知 $\{u_n\}$ 单调增, 则 $u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \geq 2u_{n-2}$.

$$\text{则 } u_{2n} \geq 2u_{n-2} \geq 2^2 u_{n-4} \geq \dots \geq 2^{n-1} u_2 = 5 \cdot 2^{n-1},$$

$$u_{2n-1} \geq 2u_{n-3} \geq 2^2 u_{n-5} \geq \dots \geq 2^{n-1} u_1 = 3 \cdot 2^{n-1},$$

则 $\frac{1}{u_{2n-1}} = \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}}$, $\frac{1}{u_{2n}} = \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}}$, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$ 收敛.

44.【解】 $a_2 = 1$.

$$a_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos 2x dx = 1.$$



45.【解】 (C).

由题设可知本题是将 $f(x)$ 以周期 2 且作奇延拓展开为正弦级数, 则

$$S\left(-\frac{9}{4}\right) = S\left(-\frac{1}{4}\right) = -S\left(-\frac{1}{4}\right) = -\left|\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right| = -\frac{1}{4}$$

46.【解】 $a_0 = \int_0^2 (x-1)dx = 0,$

$$a_n = \int_0^2 (x-1) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -\frac{8}{\pi^2(2k-1)^2}, & n = 2k-1. \end{cases}$$

$$f(x) = -\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2}, 0 \leq x \leq 2.$$

47.【解】 $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1-x^2)dx = 2 - \frac{2\pi^2}{3}$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1-x^2) \cos nx dx = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}, n = 1, 2, \dots$$

$$f(x) = 1 - \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

$$f(0) = 1 - \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \text{ 又由 } f(x) = 1 - x^2 (0 \leq x \leq \pi) \text{ 知, } f(0) = 1, \text{ 则 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

48.【解】 由于 $f(x) = 2 + |x|$ 为偶函数, 则 $b_n = 0, n = 1, 2, \dots$

$$a_0 = 2 \int_0^1 (2+x)dx = 5,$$

$$a_n = 2 \int_0^1 (2+x) \cos(n\pi x) dx = \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2 \pi^2}, n = 1, 2, \dots$$

由收敛定理知

$$2 + |x| = \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi x) = \frac{5}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}, x \in [-1, 1],$$

$$\text{令 } x = 0, \text{ 得 } 2 = \frac{5}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}, \text{ 则 } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

$$\text{故 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

第八章 向量代数与空间解析几何及多元微分在几何上的应用

1.【解】 (C).

L_1 和 L_2 的方向向量分别为 $s_1 = (1, -2, 1)$ 和 $s_2 = (-1, -1, 2)$,

$$\cos \theta = \frac{s_1 \cdot s_2}{|s_1| |s_2|} = \frac{1}{2}, \theta = \frac{\pi}{3}$$

2.【解】 (C).

由于交成直线 L 的两平面的法线向量与 L 的法线向量均垂直, 即

$$(1, 3, 2) \perp (4, -2, 1), (2, -1, -10) \perp (4, -2, 1)$$



故 Π 的法线向量与 L 的方向向量平行, 因此, 直线 L 垂直于 Π .

3.【解】 (C).

设 P 点的坐标为 (x_0, y_0, z_0) , 则曲面在 P 点的法线向量为 $\mathbf{n} = (2x_0, 2y_0, 1)$.

又因为切平面平行于平面 $2x + 2y + z - 1 = 0$, 则 $\frac{2x_0}{2} = \frac{2y_0}{2} = \frac{1}{1}$, $x_0 = y_0 = 1, z_0 = 2$.

4.【解】 (B).

对应于 t_0 处曲线切线的方向向量 $\tau = (1, -2t_0, 3t_0^2)$, 该切线与平面 $x + 2y + z = 4$ 平行 $\Leftrightarrow \tau$ 与该平面的法向量 $\mathbf{n} = (1, 2, 1)$ 垂直 $\Leftrightarrow \tau \cdot \mathbf{n} = 0 \Leftrightarrow 1 - 4t_0 + 3t_0^2 = 0 \Leftrightarrow t_0 = 1$ 或 $t_0 = \frac{1}{3}$, 故选(B).

5.【解】 (C).

函数 $f(x, y)$ 虽然在点 $(0, 0)$ 处的两个偏导数存在, 但不一定可微, 故(A) 不对.

取 x 为参数, 则曲线 $x = x, y = 0, z = f(x, 0)$ 在 $(0, 0, f(0, 0))$ 的切向量为 $(1, 0, 3)$,

故应选(C).

6.【解】 (A).

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2}, \text{故 } \text{grad} f|_{(0,1)} = i.$$

7.【解】 (A).

$\mathbf{n} = (1, -1, 1)$, 则切平面方程为 $x - y + z = -2$.

8.【解】 4.

$$[(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} + \mathbf{c})] \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{a}) = 2(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 4$$

9.【解】 $\sqrt{2}$.

$$d = \frac{|6 + 4|}{\sqrt{9 + 16 + 25}} = \sqrt{2}$$

10.【解】 $x - y + z = 0$.

所求平面的法线向量 $\mathbf{n}$ 和两直线的方向向量都垂直, 故 $\mathbf{n} = (1, -1, 1)$.

11.【解】 $x - 3y - z + 4 = 0$.

12.【解】 $x - 3y + z + 2 = 0$.

所求平面的法线向量 $\mathbf{n} = (1, 0, -1) \times (2, 1, 1) = (1, -3, 1)$.

13.【解】 $2x + 2y - 3z = 0$.

所求平面的法线向量 $\mathbf{n} \perp (4, -1, 2), \mathbf{n} \perp (6, -3, 2)$, 取 $\mathbf{n} = (2, 2, -3)$.

14.【解】 $\frac{1}{\sqrt{5}}(0, \sqrt{2}, \sqrt{3})$.

15.【解】 $x^2 + z^2 = 1 + y^2$.

设点 $M(x, y, z)$ 是旋转曲面上的任一点, 设它在直线上的对应点 $M'(x', y, z')$, 由于 M' 在直线上, 所以有 $x' = 1, y = z'$, 由题意有

$$x^2 + z^2 = (x')^2 + (z')^2 = 1 + y^2$$

所以有 $x^2 + z^2 = 1 + y^2$.

16.【解】 $\frac{2}{9}(1, 2, -2)$.

17.【解】 2.

18.【解】 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

19.【解】 $2\sqrt{3}$.



20.【解】 $\frac{13}{\sqrt{41}}$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (-6)' \frac{-4}{\sqrt{41}} + 1 \cdot \frac{4}{\sqrt{41}} + 5 \cdot \frac{-3}{\sqrt{41}} = \frac{13}{\sqrt{41}}$$

21.【解】 1.

22.【解】 在点(0,0,-1)沿方向(0,0-2)和点(0,0,1)沿方向(0,0,2)的方向导数最大,其最大值为2.

23.【解】 $\frac{x}{0} = \frac{y}{a^2} = \frac{z-a}{0}, y=0.$

24.【解】 设经过 l 且垂直于 Π 的平面方程为 $\Pi_1: A(x-1) + By + C(z-1) = 0$, 则由条件可知

$$A - B + 2C = 0, \quad A + B - C = 0$$

由此解得 $A : B : C = -1 : 3 : 2$. 于是 Π_1 的方程为 $x - 3y - 2z + 1 = 0$.

从而 l_0 的方程为:
$$\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0, \\ x - 3y - 2z + 1 = 0, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x = 2y, \\ z = -\frac{1}{2}(y-1). \end{cases}$$

于是 l_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程为 $x^2 + z^2 = 4y^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2$.

25.【解】 点(3,0,2)处切平面 $x + 2z = 7$; 点(1,2,2)处切平面 $x + 4y + 6z = 21$.

26.【解】 $3x - 9y - 12z + 17 = 0$.

27.【解】 (1) 由梯度的几何意义知, $h(x, y)$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 处沿梯度

$$\text{grad} h(x, y)|_{(x_0, y_0)} = (y_0 - 2x_0)i + (x_0 - 2y_0)j$$

方向的方向导数最大. 方向导数的最大值为该梯度的模, 所以

$$g(x_0, y_0) = \sqrt{(y_0 - 2x_0)^2 + (x_0 - 2y_0)^2} = \sqrt{5x_0^2 + 5y_0^2 - 8x_0y_0}$$

(2) 令 $f(x, y) = g^2(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 8xy$.

由题意, 只需求 $f(x, y)$ 在约束条件 $75 - x^2 - y^2 + xy = 0$ 下的最大值点.

令 $L(x, y, \lambda) = 5x^2 + 5y^2 - 8xy + \lambda(75 - x^2 - y^2 + xy)$, 则

$$\begin{cases} L'_x = 10x - 8y + \lambda(y - 2x) = 0 & \text{①} \\ L'_y = 10y - 8x + \lambda(x - 2y) = 0 & \text{②} \\ L'_\lambda = 75 - x^2 - y^2 + xy = 0 & \text{③} \end{cases}$$

①式与②式相加可得 $(x+y)(2-\lambda) = 0$, 从而得 $y = -x$ 或 $\lambda = 2$.

若 $\lambda = 2$, 则由①式得 $y = x$, 再由③式得 $x = \pm 5\sqrt{3}, y = \pm 5\sqrt{3}$.

若 $y = -x$, 则由③式得 $x = \pm 5, y = \mp 5$.

于是得到4个可能的极值点

$$M_1(5, -5), \quad M_2(-5, 5), \quad M_3(5\sqrt{3}, 5\sqrt{3}), \quad M_4(-5\sqrt{3}, -5\sqrt{3})$$

由于 $f(M_1) = f(M_2) = 450, f(M_3) = f(M_4) = 150$.

故 $M_1(5, -5)$ 或 $M_2(-5, 5)$ 可作为攀登的起点.

28.【解】 雨水沿着 z 下降最快的方向下流, 即沿着 z 的梯度 $\text{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x}i + \frac{\partial z}{\partial y}j$ 的反方向下流, 因而雨

水从椭球面上流下的路线在坐标面 xOy 上的投影曲线上任一点处的切线应与 $\text{grad} z$ 平行.

设雨水流下的路线在 xOy 面上的投影曲线的方程为 $f(x, y) = 0$, 那么在它上面任一点处的切向量为 (dx, dy) , 它应与 $\text{grad} z$ 平行, 所以有

$$(dx, dy) // \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \left(-\frac{x}{4\sqrt{1-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{36}}}, -\frac{y}{9\sqrt{1-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{36}}} \right)$$



即 $\frac{dx}{-\frac{x}{4}} = \frac{dy}{-\frac{y}{9}}$, 这就是投影曲线应满足的微分方程, 解之得 $y = Cx^{\frac{4}{3}}$.

令 $x = 1, y = 3$, 知 $C = 3$, 故过房顶上点 $P(1, 3, \sqrt{11})$ 的雨水流下的路线方程为

$$\begin{cases} z = 4\sqrt{1 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36}} \\ y = 3x^{\frac{4}{3}} \end{cases}$$

第九章 多元积分学及其应用

1. 【解】 (D).

$P(x, y) = \frac{x+ay}{(x+y)^2}, Q(x, y) = \frac{y}{(x+y)^2}$, 由题设知, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 则

$$(a-2)x - ay = -2y, (a-2)x = (a-2)y$$

故 $a = 2$.

2. 【解】 (C).

由于函数 z 既是 x 的偶函数也是 y 的偶函数, 积分域 Ω_1 既关于 yOz 面前后对称也关于 xOz 面左右对称, 则 $\iiint_{\Omega_1} z dv = 4 \iiint_{\Omega_2} z dv$.

3. 【解】 (C).

由于函数 z 既是 x 的偶函数也是 y 的偶函数, 积分域 S 既关于 yOz 面前后对称也关于 xOz 面左右对称, 则 $\iint_S z dS = 4 \iint_{S_1} z dS$. 由变量对称性知, $\iint_{S_1} z dS = \iint_{S_1} x dS$. 故应选 (C).

4. 【解】 (D).

由格林公式知 $I_i = \iint_{D_i} (1 - x^2 - \frac{y^2}{2}) dx dy$, 其中 D_i 为 L_i 围成的平面域 ($i = 1, 2, 3, 4$).

显然在 D_1 和 D_4 上, $1 - x^2 - \frac{y^2}{2} \geq 0, D_4 \supset D_1, 0 < I_1 < I_4$.

又 $I_2 < I_4, I_3 < I_4$, 则 $\max\{I_1, I_2, I_3, I_4\} = I_4$.

5. 【解】 $\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$.

6. 【解】 $(2, -2, 4)$.

7. 【解】 0.

8. 【解】 $\frac{4\pi}{15} abc(a^2 + b^2 + c^2)$.

$$\iiint_{\Omega} (x+y+z)^2 dv = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$$

其中 $\iiint_{\Omega} z^2 dv = \int_{-c}^c z^2 \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = \frac{4\pi}{15} abc^3$.

9. 【解】 $\pi(1 - e^{-1})$.

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_0^{1-r} e^{-(1-r)^2} dz = \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1-z} e^{-(1-z)^2} dr = \pi(1 - e^{-1})$$

10. 【解】 $(a^2 b^2 + 1)L$.



$$\text{原式} = \oint_C (b^2 x^2 + a^2 y^2 + 1) ds = a^2 b^2 \oint_C \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) ds + L = (a^2 b^2 + 1)L.$$

11. 【解】 $\frac{4\pi}{3}a^3 + 26\pi a.$

$$\oint_r [(x+2)^2 + (y-3)^2] ds = \oint_r [(x^2 + y^2) + (4x - 6y) + 13] ds,$$

$$\oint_r (x^2 + y^2) ds = \frac{2}{3} \oint_r (x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{2}{3} \oint_r a^2 ds = \frac{4\pi a^3}{3},$$

$$\oint_r (4x - 6y) ds = -2 \oint_r y ds = -\frac{2}{3} \oint_r (x + y + z) ds = -\frac{2}{3} \oint_r 0 ds = 0,$$

$$\oint_r 13 ds = 26\pi a.$$

12. 【解】 0.

$$L = L_1 + L_2, \text{ 其中 } L_1: y = 1 + x (-1 \leq x \leq 0), L_2: y = 1 - x (0 \leq x \leq 1).$$

$$\int_{L_1} xy dx + x^2 dy = \int_{-1}^0 [x(1+x) + x^2] dx = \int_{-1}^0 (2x^2 + x) dx = \frac{1}{6},$$

$$\int_{L_2} xy dx + x^2 dy = \int_0^1 [x(1-x) - x^2] dx = \int_0^1 (x - 2x^2) dx = -\frac{1}{6},$$

$$\text{故 } \int_{L_2} xy dx + x^2 dy = 0.$$

注:也可补线用格林公式计算.

13. 【解】 $\pi.$

化为平面线积分. 将 $z = x + y$ 代入原积分得

$$I = \oint_L x(x+y) dx + x dy + \frac{y^2}{2} (dx + dy) \quad (L \text{ 为 } x^2 + y^2 = 1 \text{ 沿逆时针方向})$$

$$= \oint_L \left[x(x+y) + \frac{y^2}{2} \right] dx + \left(x + \frac{y^2}{2} \right) dy$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (1-x-y) d\sigma \quad (\text{格林公式})$$

$$= \pi.$$

14. 【解】 $\frac{\pi}{2}.$

$\frac{\partial u}{\partial n}$ 为沿外法线方向的方向导数

$$\oint_L \frac{\partial u}{\partial n} ds = \oint_L \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x) ds + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n, y) ds \right]$$

$$= \oint_L \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(\tau, y) ds - \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\tau, x) ds \right]$$

$$= \oint_L \left[\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx \right] = \iint_D \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] d\sigma \quad (\text{格林公式})$$

$$= \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma = \frac{\pi}{2}. \quad (\text{其中 } D \text{ 为单位圆域 } x^2 + y^2 \leq 1.)$$

15. 【解】 $\frac{8\pi}{3}R^4.$

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma} (x^2 + z^2) dS = \frac{2}{3} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS = \frac{8\pi}{3}R^4.$$

16. 【解】 $2\pi a^2(a^2 + a + 1).$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma} (\sqrt{2}x + z + 1)^2 dS &= \iint_{\Sigma} (2x^2 + z^2 + 1 + 2\sqrt{2}xz + 2\sqrt{2}x + 2z) dS, \\
 \iint_{\Sigma} (2x^2 + z^2) dS &= \frac{1}{2} \iint_{\Sigma_1} (2x^2 + z^2) dS \quad (\text{其中 } \Sigma_1 \text{ 为球面 } x^2 + y^2 + z^2 = a^2) \\
 &= \frac{1}{2} \iint_{\Sigma_1} (x^2 + y^2 + z^2) dS = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma_1} a^2 dS = 2\pi a^4, \\
 \iint_{\Sigma} 1 dS &= 2\pi a^2, \\
 \iint_{\Sigma} (2\sqrt{2}xz + 2\sqrt{2}x + 2z) dS &= 2 \iint_{\Sigma} z dS = 2 \iint_D \sqrt{1 + (x'_x)^2 + (x'_y)^2} dx dy \\
 &= 2 \iint_D a dx dy = 2\pi a^3.
 \end{aligned}$$

17. 【解】 $(2 - \sqrt{2})\pi R^3$.

由高斯公式得

$$\oint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy = \iiint_{\Omega} 3 dv = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^R r^2 \sin \varphi dr = (2 - \sqrt{2})\pi R^3$$

18. 【解】 8.

记 Γ 为圆周 $(x-1)^2 + y^2 = 1$, 则所求面积为

$$S = \oint_{\Gamma} z ds = \oint_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2} ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 \cos^2 \theta} \sqrt{4 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta} d\theta = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = 8$$

19. 【解】 $\frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned}
 \bar{z} &= \frac{\iiint_{\Omega} z dv}{\iiint_{\Omega} dv} \\
 \text{而 } \iiint_{\Omega} dv &= \int_0^1 \left(\iint_{x^2+y^2 \leq z} dx dy \right) dz = \int_0^1 \pi z dz = \frac{\pi}{2}, \\
 \text{且 } \iiint_{\Omega} z dv &= \int_0^1 \left(\iint_{x^2+y^2 \leq z} dx dy \right) z dz = \int_0^1 \pi z^2 dz = \frac{\pi}{3}, \\
 \text{故 } \bar{z} &= \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

20. 【解】 $\iiint_{\Omega} x(1+z) dv = \iiint_{\Omega} x dv = \int_0^1 x \pi (x-x^2) dx = \frac{\pi}{12}$.

21. 【解】 $\iiint_{\Omega} |z - x^2 - y^2| dv = \iiint_{\Omega_1} (z - x^2 - y^2) dv + \iiint_{\Omega_2} (x^2 + y^2 - z) dv$

其中 Ω_1 为 $z = x^2 + y^2$ 与 $z = 1$ 所围区域, 其中 Ω_2 为 $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 1$ 与 $z = 0$ 所围区域,

$$\iiint_{\Omega_1} (z - x^2 - y^2) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_{r^2}^1 (z - r^2) r dz = \frac{\pi}{6},$$

$$\iiint_{\Omega_2} (x^2 + y^2 - z) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_0^{r^2} (r^2 - z) r dz = \frac{\pi}{6}.$$

22. 【解】 $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (1-y) e^{-(1-y-z)^2} dz = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \int_0^{1-y-z} (1-y) e^{-(1-y-z)^2} dz$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (1-y)(1-y-z) e^{-(1-y-z)^2} dz \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{2} (1-y) [1 - e^{-(1-y)^2}] dy = \frac{1}{4e}.
 \end{aligned}$$



23.【解】 取 L_1 为有向线段 $x=0, y$ 从 2 到 0; 由 L 与 L_1 围成的平面区域记为 D .

根据格林公式, 得

$$\begin{aligned} I &= \int_L 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy \\ &= \int_{L+L_1} 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy - \int_{L_1} 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy \\ &= \iint_D \left[\frac{\partial(x^3 + x - 2y)}{\partial x} - \frac{\partial(3x^2 y)}{\partial y} \right] dx dy - \int_2^0 (-2y) dy \\ &= \iint_D 1 dx dy - \int_0^2 2y dy = \pi - \frac{\pi}{2} - 4 = \frac{\pi}{2} - 4. \end{aligned}$$

24.【解】 补线段 $\overline{BA}$, 则

$$\begin{aligned} I &= \oint_{L+\overline{BA}} - \int_{\overline{BA}} \\ &= \iint_{D_1} (\sin y - 3 - \sin y) d\sigma - \iint_{D_2} (\sin y - 3 - \sin y) d\sigma - \int_{\pi}^{-\pi} (e^{-x^2} \sin x - 1) dx \\ &= \int_{\pi}^{-\pi} dx = -2\pi. \end{aligned}$$

25.【解】 在上半平面 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, 设 L 为上半圆 $y = \sqrt{a^2 - x^2} (a > 0)$ 从 $(-a, 0)$ 到 $(a, 0)$ 的弧段. 则

$$\begin{aligned} \int_C \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2} &= \int_L \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{1}{a^2} \int_L (x-y)dx + (x+y)dy \\ &= \frac{1}{a^2} \oint_{L+\overline{AB}} (x-y)dx + (x+y)dy - \frac{1}{a^2} \int_{\overline{AB}} (x-y)dx + (x+y)dy \\ &= -\frac{1}{a^2} \iint_D 2dxdy - \frac{1}{a^2} \int_a^{-a} x dx = -\pi. \end{aligned}$$

26.【解】 由于 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} (x^2 + y^2 \neq 0)$, 则

$$\oint_{L+\overline{CA}} \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2} = \oint_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2}$$

其中 Γ 为椭圆 $4x^2 + y^2 = 1$ 沿逆时针方向, 从而

$$\begin{aligned} \oint_L \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2} &= \oint_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2} - \oint_{\overline{CA}} \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2} \\ &= \oint_{\Gamma} x dy - y dx + \int_0^2 \frac{(-1) dy}{4 + y^2} = \frac{7}{8} \pi. \end{aligned}$$

27.【解】 由曲线积分与路径无关的条件知 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x$.

于是, $Q(x, y) = x^2 + C(y)$, 其中 $C(y)$ 为待定函数.

$$\begin{aligned} \int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy dx + Q(x, y) dy &= \int_0^1 [t^2 + C(y)] dy = t^2 + \int_0^1 C(y) dy \\ \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy dx + Q(x, y) dy &= \int_0^t [1^2 + C(y)] dy = t + \int_0^t C(y) dy \end{aligned}$$

由题设知 $t^2 + \int_0^1 C(y) dy = t + \int_0^t C(y) dy$. 两边对 t 求导, 得

$$2t = 1 + C(t), C(t) = 2t - 1$$

从而 $C(y) = 2y - 1$, 所以 $Q(x, y) = x^2 + 2y - 1$.

28.【解】 由曲线积分与路径无关的充要条件可得 $f'_y(x, y) = \cos y$, 则 $f(x, y) = \sin y + C(x)$.



$$\int_{(0,0)}^{(t,t^2)} [\sin y + C(x)] dx + x \cos y dy = t^2$$

即 $\int_0^t C(x) dx + t \sin t^2 = t^2$, 两边求导得 $C(t) = 2t - \sin t^2 - 2t^2 \cos t^2$,

于是得 $f(x, y) = \sin y + 2x - \sin x^2 - 2x^2 \cos x^2$.

29. 【解】 $I = \int_L \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} + \int_L yf(xy)dx + xf(xy)dy$,

$$\int_L \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = \int_L d \frac{x}{y} = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}.$$

设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数, 则

$$\int_L yf(xy)dx + xf(xy)dy = \int_L f(xy)d(xy) = F(cd) - F(ab)$$

所以当 $ab = cd$ 时, $F(cd) - F(ab) = 0$, 由此得 $I = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$.

30. (1) 【证】 如右图所示, 设 C 是右半平面 $x > 0$ 内的任一段光滑简单闭曲线, 在 C 上任意取定两点 M, N , 作围绕原点的闭曲线 $\overline{MQNRM}$, 同时得到另一围绕原点的闭曲线 $\overline{MQNPM}$. 根据题设可知

$$\oint_{\overline{MQNRM}} \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} - \oint_{\overline{MQNPM}} \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} = 0$$

根据第二类曲线积分的性质, 利用上式可得

$$\begin{aligned} \oint_L \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} &= \oint_{\overline{NRM}} \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} + \oint_{\overline{MPN}} \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} \\ &= \oint_{\overline{NRM}} \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} - \oint_{\overline{NPM}} \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} \\ &= \oint_{\overline{MQNRM}} \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} - \oint_{\overline{MQNPM}} \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4} = 0. \end{aligned}$$

(2) 【解】 设 $P = \frac{\varphi(y)}{2x^2 + y^4}$, $Q = \frac{2xy}{2x^2 + y^4}$, P, Q 在单连通区域 $x > 0$ 内具有一阶连续偏导数, 由 (1) 知,

曲线积分 $\oint_L \frac{\varphi(y)dx + 2xydy}{2x^2 + y^4}$ 在该区域内与路径无关, 故当 $x > 0$ 时, 总有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2y(2x^2 + y^4) - 4x \cdot 2xy}{(2x^2 + y^4)^2} = \frac{-4x^2y + 2y^5}{(2x^2 + y^4)^2} \quad ①$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\varphi'(y)(2x^2 + y^4) - 4\varphi(y)y^3}{(2x^2 + y^4)^2} = \frac{2x^2\varphi'(y) + \varphi'(y)y^4 - 4\varphi(y)y^3}{(2x^2 + y^4)^2} \quad ②$$

比较 ①, ② 两式的右端, 得

$$\begin{cases} \varphi'(y) = -2y, \\ \varphi'(y)y^4 - 4\varphi(y)y^3 = 2y^5 \end{cases} \quad ③$$

由 ③ 得 $\varphi(y) = -y^2 + C$, 将 $\varphi(y)$ 代入 ④ 得 $2y^5 - 4cy^3 = 2y^5$, 所以 $C = 0$, 从而 $\varphi(y) = -y^2$.

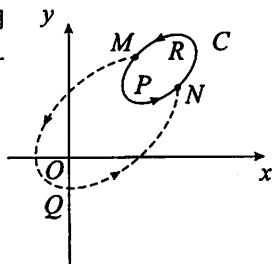
31. 【解】 (1) 由 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 知, $y[g'(x) - f(x)] + f'(x) - g(x) - e^x = 0$

则 $\begin{cases} g'(x) - f(x) = 0 \\ f'(x) - g(x) = e^x \end{cases}$, 从而有 $g''(x) - g(x) = e^x$, 解方程得

$$g(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x$$

$$f(x) = g'(x) = (C_1 + \frac{1}{2})e^x - C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x$$

由 $f(0) = g(0) = 0$ 知, $C_1 = -\frac{1}{4}$, $C_2 = \frac{1}{4}$. 代入可得



$$f(x) = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{2}xe^x$$

$$g(x) = -\frac{1}{4}(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{2}xe^x$$

(2) 取(0,0)到(1,0)再到(1,1)的折线计算

$$I = 2 \int_0^1 [yg(1) + f(1)]dy = \frac{1}{4}(7e - \frac{1}{e})$$

$$\begin{aligned} 32. \text{【证】} \oint_L \frac{\partial u}{\partial n} ds &= \oint_L \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x) ds + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n, y) ds \right] \\ &= \oint_L \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(\tau, y) ds - \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\tau, x) ds \right] \quad (\text{其中 } \tau \text{ 为曲线的切向量}) \\ &= \oint_L \left[\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx \right] = \iint_D \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] d\sigma. \quad (\text{格林公式}) \end{aligned}$$

33.【解】 设 L 为圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 沿逆时针方向, 考虑线积分

$$\begin{aligned} I &= \oint_L (x^2 + y^2) \left(\frac{\partial f}{\partial x} dy - \frac{\partial f}{\partial y} dx \right) = \oint_L \frac{\partial f}{\partial x} dy - \frac{\partial f}{\partial y} dx \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) d\sigma, \quad (\text{格林公式}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又 } I &= \oint_L (x^2 + y^2) \left(\frac{\partial f}{\partial x} dy - \frac{\partial f}{\partial y} dx \right) \\ &= 2 \iint_D (x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}) d\sigma + \iint_D (x^2 + y^2) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) d\sigma, \quad (\text{格林公式}) \end{aligned}$$

$$\text{则 } \iint_D \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) d\sigma = 2 \iint_D (x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}) d\sigma + \iint_D (x^2 + y^2) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) d\sigma,$$

$$\begin{aligned} \text{即 } \iint_D (x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}) d\sigma &= \frac{1}{2} \iint_D [1 - (x^2 + y^2)] \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \iint_D [1 - (x^2 + y^2)] e^{-(x^2 + y^2)} d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 - r^2) e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{2e}. \end{aligned}$$

34.【解】 (方法一) 用斯托克斯公式计算

$$\begin{aligned} I &= \oint_r y dx + z dy + x dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS \\ &= -3 \iint_S \frac{1}{\sqrt{3}} dS = (-3) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \pi a^2 = -\sqrt{3} \pi a^2 \end{aligned}$$

(方法二) 化为平面线积分用格林公式

$$\begin{aligned} I &= \oint_r y dx + z dy + x dz = \oint_c y dx + (-x - y) dy + x(-dx - dy) \\ &= \oint_c ((y - x) dx + (-2x - y) dy) = \iint_D (-2 - 1) dx dy \\ &= (-3) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \pi a^2 = -\sqrt{3} \pi a^2 \end{aligned}$$

其中 C 为 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与 $x + y + z = 0$ 的交线在 xOy 面上的投影且沿逆时针方向, D 是由该投影曲线围成的平面域.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



$$\begin{aligned}
 35.【解】 \quad I &= \oint_{\Sigma} xy dx + z^2 dy + xz dz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & z^2 & xz \end{vmatrix} dS \\
 &= \iint_{\Sigma} (-2z \cos \alpha - z \cos \beta - x \cos \gamma) dS,
 \end{aligned}$$

其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 的上侧, $\cos \alpha = \frac{-x}{\sqrt{2}z}$, $\cos \beta = \frac{-y}{\sqrt{2}z}$, $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$I = \iint_{\Sigma} \left(\sqrt{2}x + \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{2}} \right) dS = \iint_{\Sigma} \left(\sqrt{2}x + \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{2} d\sigma = \iint_{\Sigma} x d\sigma = \pi a^3$$

36.【证】 令 $F = x + y + z + \sqrt{3}a + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2ay - 2az + 2a^2)$

由 $F'_x = 0, F'_y = 0, F'_z = 0, F'_\lambda = 0$, 得 $x - a = y - a = z - a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}a, (a > 0)$.

当 $x - a = y - a = z - a = -\frac{1}{\sqrt{3}}a$ 时, $x + y + z + \sqrt{3}a$ 取最小值, 最小值为 $3a$, 则

$$\iint_{\Sigma} (x + y + z + \sqrt{3}a)^3 dS \geq \iint_{\Sigma} (3a)^3 dS = 27a^3 \cdot 4\pi a^2 = 108\pi a^5.$$

37.【解】 椭球面 S 上的点 $P(x, y, z)$ 处的法向量是 $\mathbf{n} = (2x, 2y - z, 2z - y)$,

点 P 处的切平面与 xOy 面垂直的充要条件是 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = 0 (\mathbf{k} = (0, 0, 1))$,

即 $2z - y = 0$. 所以点 P 的轨迹 C 的方程为 $\begin{cases} 2z - y = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2z - y = 0, \\ x^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1. \end{cases}$

取 $D = \{(x, y) \mid x^2 + \frac{3}{4}y^2 \leq 1\}$, 记 Σ 的方程为 $z = z(x, y), (x, y) \in D$. 由于

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{y-2z}\right)^2 + \left(\frac{2y-z}{y-2z}\right)^2} = \frac{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}}{|y-2z|}$$

所以

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_D \frac{(x + \sqrt{3}) |y - 2z|}{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \\
 &= \iint_D (x + \sqrt{3}) dx dy = \sqrt{3} \iint_D dx dy = 2\pi
 \end{aligned}$$

38.【解】 取 Σ_1 为 xOy 平面上被椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 所围部分的下侧, 记 Ω 为由 Σ 和 Σ_1 围成的空间闭

区域. 根据高斯公式

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \oiint_{\Sigma + \Sigma_1} xz dy dz + 2zy dz dx + 3xy dx dy = \iiint_{\Omega} (z + 2z + 0) dx dy dz \\
 &= \int_0^1 3z dz \iint_{x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1-z} dx dy = \int_0^1 6\pi z(1-z) dz = \pi,
 \end{aligned}$$

$$I_2 = \iint_{\Sigma_1} xz dy dz + 2zy dz dx + 3xy dx dy = -3 \iint_{x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1} xy dx dy = 0,$$

所以 $I = I_1 - I_2 = \pi$.

39.【解】 设 S 为单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的内侧, 由高斯公式得

$$\iint_{S+S} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \iiint_V \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - 3(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} dv = 0,$$



其中 Ω 为椭圆面 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$ 与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 之间的区域.

$$\begin{aligned} \text{则} \oint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} &= - \oint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= - \oint_{\Sigma} x dydz + y dzdx + z dx dy \\ &= \iiint_{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1} (1 + 1 + 1) dv = 4\pi. \end{aligned}$$

40.【解】 (1) 由题设和高斯公式得

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\Sigma} [yf'(x) + yz] dydz - \frac{1}{2} y^2 f(x) dzdx - (zysin x + y^2) dx dy \\ &= \pm \iiint_V (yf''(x) - yf(x) - ysin x) dv \end{aligned}$$

其中 V 为 S 围成的有界闭区域, 当有向曲面 S 的法向量指向外侧时, 取“+”号, 当有向曲面的法向量指向内侧时, 取“-”号. 由 S 的任意性, 知

$$f''(x) - f(x) - \sin x = 0$$

解此线性方程得满足条件 $f(0) = 0, f'(0) = 1$ 的解为

$$f(x) = \frac{3}{4}e^x - \frac{3}{4}e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x$$

(2) 由(1)可知

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma} [yf'(x) + yz] dydz - \frac{1}{2} y^2 f(x) dzdx - (zysin x + y^2) dx dy \\ = \oint_{\Sigma_2} [yf'(x) + yz] dydz - \frac{1}{2} y^2 f(x) dzdx - (zysin x + y^2) dx dy, \end{aligned}$$

其中 Σ_2 为平面 $z = 1$ 包含在 $z = x^2 + y^2$ 之内部分的上侧,

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma_2} [yf'(x) + yz] dydz - \frac{1}{2} y^2 f(x) dzdx - (zysin x + y^2) dx dy \\ = - \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (ysin x + y^2) d\sigma = - \frac{1}{2} \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) d\sigma = - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

41.【解】 补充曲面 $\Sigma_1: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ z = 0 \end{cases}$ 方向取下侧, 则

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma} y^3 dydz + x^3 dzdx + zf(x, y) dx dy \\ = \oint_{\Sigma + \Sigma_1} y^3 dydz + x^3 dzdx + zf(x, y) dx dy - \oint_{\Sigma_1} y^3 dydz + x^3 dzdx + zf(x, y) dx dy \\ = \iiint_{\Omega} f(x, y) dv + 0, \quad (\text{其中 } \Omega \text{ 是上半单位球体}) \end{aligned}$$

$$\text{则 } f(x, y) = 2xy^2 + x^2 + \iiint_{\Omega} f(x, y) dv.$$

$$\text{记 } I_1 = \iiint_{\Omega} f(x, y) dv, \text{ 则 } f(x, y) = 2xy^2 + x^2 + I_1,$$

上式两端在上半单位球体 Ω 上积分得

$$I_1 = \iiint_{\Omega} (2xy^2 + x^2) dv + I_1 \iiint_{\Omega} dv = \iiint_{\Omega} x^2 dv + \frac{2\pi}{3} I_1 = \frac{2\pi}{15} + I_1 \cdot \frac{2\pi}{3}$$



$$\text{解得 } I_1 = \frac{2\pi}{15-10\pi}$$

$$\text{故 } f(x, y) = 2xy^2 + x^2 + \frac{2\pi}{15-10\pi}.$$

$$42. \text{【解】 过点}(1, 0, 0) \text{ 和 } (0, 1, 1) \text{ 的直线方程为 } \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1},$$

$$\text{则 } \begin{cases} x_0 = 1 - z_0, \\ y_0 = z_0, \end{cases} \quad x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2, \quad z = z_0,$$

$$\text{消去 } x_0, y_0, z_0 \text{ 得 } x^2 + y^2 = (1-z)^2 + z^2,$$

$$z = \frac{\iiint_{\Omega} z \, dv}{\iiint_{\Omega} dv} = \frac{\pi \int_0^2 (2z^3 - 2z^2 + z) \, dz}{\pi \int_0^2 (2z^2 - 2z + 1) \, dz} = \frac{7}{5}$$

$$43. \text{【解】 令 } P = 2xy(x^4 + y^2)^\lambda, Q = -x^2(x^4 + y^2)^\lambda. A(x, y) \text{ 在右半平面 } x > 0 \text{ 上为某二元函数 } u(x, y) \text{ 的梯度的充要条件是 } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \text{ 此即}$$

$$4x(x^4 + y^2)^\lambda(\lambda + 1) = 0$$

解之得 $\lambda = -1$. 于是, 在右半平面内任取一点, 例如 $(1, 0)$ 作为积分路径的起点, 则得

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{2xydx - x^2dy}{x^4 + y^2} = \int_1^x \frac{2x \cdot 0}{x^4 + 0^2} dx - \int_0^y \frac{x^2}{x^4 + y^2} dy + C \\ &= -\arctan \frac{y}{x^2} + C. \end{aligned}$$

$$44. \text{【解】 按题意, 变力 } F = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}.$$

$$\text{圆弧 } \widehat{AB} \text{ 的参数方程是 } \begin{cases} x = 2 + \sqrt{2}\cos\theta, \\ y = 3 + \sqrt{2}\sin\theta, \end{cases} \quad -\frac{3}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{变力 } F \text{ 所作的功 } W = \int_{\widehat{AB}} -ydx + xdy$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} [\sqrt{2}(3 + \sqrt{2}\sin\theta)\sin\theta + \sqrt{2}(2 + \sqrt{2}\cos\theta)\cos\theta] d\theta \\ &= 2(\pi - 1). \end{aligned}$$

$$45. \text{【解】 (1) } \Omega \text{ 对 } z \text{ 轴的转动惯量}$$

$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_r^1 r^3 \, dz = \frac{\pi}{10}$$

$$(2) \text{ 点 } (x, y, z) \text{ 到直线 } x = y = z \text{ 的距离平方为}$$

$$d^2 = \frac{|(1, 1, 1) \times (x, y, z)|^2}{3} = \frac{1}{3} [(z-y)^2 + (x-z)^2 + (y-x)^2]$$

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{1}{3} [(z-y)^2 + (x-z)^2 + (y-x)^2] \, dv = \frac{2}{3} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \, dv = \frac{\pi}{5}$$





金榜图书用户

专享福利活动

微信公众号【**顶尖考研**】适用于：李永乐老师系列课程

赠送

¥100

代金券

¥200

代金券

¥500

代金券

¥1000

代金券

1. 活动参与方式

关注公众号 金榜时代考研 ▶ 回复 “22考研上岸” 即可参与

2. 活动时间

即日起——2021年11月24日

3. 兑换方式

扫右侧二维码
进群咨询管理员
领取代金券



书名	出版时间	适用阶段
数学公式的奥秘	2020年3月	全程复习
数学复习全书·基础篇	2020年6月	夯实基础
数学基础过关660题	2020年8月	夯实基础
数学历年真题全精解析·基础篇	2020年10月	夯实基础
数学复习全书	2020年12月	全程复习
数学历年真题全精解析	2021年1月	全程复习
高等数学辅导讲义	2021年2月	强化提高
线性代数辅导讲义	2021年2月	强化提高
概率论与数理统计辅导讲义	2021年2月	强化提高
数学强化通关330题	2021年2月	强化提高
数学决胜冲刺6套卷	2021年10月	冲刺预测
数学临阵磨枪	2021年10月	冲刺预测



解锁更多精彩内容
微信扫一扫



赠送本