

“助力乡村学校音体美课堂行动”官方合作图书
/ 研客及全国各大考研培训学校指定用书

金榜时代TM
GLIST 明德·弘毅·品质

金榜时代 考研数学系列

概率论与数理统计辅导讲义

学霸养成 笔记与题
高分提档 严选

2022

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

主编◎王式安(北京理工大学)

讲义配套练习
检验自身学习水平

题目严扣知识点
可衍生各类型试题

重点题型详细解析
通透易懂

金榜时代考研数学名师团队



线代王·李永乐

@清华李永乐考研数学辅导团队

微信公众号: 永乐讲线代

B站: 李永乐考研团队



- 原清华大学应用数学系教授 · 北京高教学会数学研究会副理事长
- 广受学生信赖的“线代王” · 曾任全国硕士研究生入学考试北京地区数学阅卷组组长
- 百万畅销书《线性代数辅导讲义》《数学复习全书》主编

李老师作为全国著名的考研数学线性代数辅导专家,对考研数学出题形式、考试重点了如指掌,解题思路极其灵活,辅导针对性极强,效果优良,成绩显著,受到广大学员的交口称赞。其主编的《线性代数辅导讲义》《数学复习全书》《数学基础过关660题》等已被历届考生公认为复习首选辅导书。

前命题组组长·王式安

@清华李永乐考研数学辅导团队

B站: 李永乐考研团队



- 原北京理工大学研究生院院长、应用数学系主任、教授
- 享受国务院特殊津贴的数学专家
- 美国哥伦比亚大学、南佛罗里达大学、纽约大学等大学的客座教授
- 1987-2001年间担任全国硕士研究生入学考试数学命题组组长
- 百万畅销书《概率论与数理统计辅导讲义》《数学复习全书》主编

王老师凭借多年参加考研数学命题工作的深厚经验,对考研数学的命题思路和命题方向了如指掌。其主编的《概率论与数理统计辅导讲义》《数学复习全书》《数学基础过关660题》等已被历届考生公认为复习首选辅导书。

考研高数“三巨头”——刘喜波(高数波叔)

@清华李永乐考研数学辅导团队

- 中国科学院数学博士 · 北方工业大学理学院统计学系系主任、教授



长期从事本科生的教育教学工作,曾荣获学校师德先进个人、十佳班导师等称号,是北京市中青年骨干教师、北京市公共数学优秀教学团队主要成员,主编教材1部、教学参考书3部、教育教学论文集1部、译著2部,参编教学参考书10余部。

武忠祥

@清华李永乐考研数学辅导团队



原西安交通大学(985、211、双一流高校)数学系教授
美国爱荷华大学(2019美国综合性大学TOP100)访问学者
百万畅销书《高等数学辅导讲义》《数学复习全书》主编
高教社《工科数学分析基础》《高等数学基础》等教材主编

考研高数“三巨头”——宋浩(考研数学阅卷人)

@宋浩老师

B站: 宋浩老师官方



- 山东大学数学学院本科研究生、中国科学院博士
- 英国 Queen Mary University of London 访问学者
- 副教授, 考研数学阅卷人

宋老师上课风趣幽默、由浅入深,能把复杂抽象的数学讲得诙谐有趣,上传至B站的数学视频《线性代数》《微积分》《概率论与数理统计》《高等数学》帮助了全国无数的大学生,总播放量近2000万次。宋老师讲考研数学,延续其风趣幽默的特点,喜欢从多种角度找寻思路,善于总结知识点,把晦涩难懂的考研知识讲的生动而有趣。

考研高数“三巨头”——姜晓千(全能名师)

@晓千老师

微信公众号: 晓千老师



- 中国人民大学金融数学博士
- 全国各大省市考研辅导机构全程主讲
- 新浪、搜狐、腾讯、网易、中国教育在线等各大门户网站特邀访谈嘉宾

姜老师对考研数学历年真题有着极其深入的研究,授课风格高屋建瓴、激情洋溢、亲和幽默,深受考研学子喜爱。

第一章 随机事件和概率

1. 选择题

(1) 对任意两个互不相容的事件 A 与 B , 必有

- (A) 如果 $P(A) = 0$, 则 $P(B) = 0$.
- (B) 如果 $P(A) = 0$, 则 $P(B) = 1$.
- (C) 如果 $P(A) = 1$, 则 $P(B) = 0$.
- (D) 如果 $P(A) = 1$, 则 $P(B) = 1$.

(2) 设两两独立且概率相等的三事件 A, B, C 满足条件 $P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{16}$, 且 $ABC = \emptyset$, 则 $P(A)$ 的值必为

- (A) $\frac{1}{4}$.
- (B) $\frac{3}{4}$.
- (C) $\frac{1}{4}$ 或 $\frac{3}{4}$.
- (D) $\frac{1}{3}$.

(3) 设事件 A 与事件 B 互不相容, 则

- (A) $P(\overline{A}\overline{B}) = 0$.
- (B) $P(AB) = P(A)P(B)$.
- (C) $P(A) = 1 - P(B)$.
- (D) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1$.

(4) 设事件 A 和 B 满足 $P(B|A) = 1$, 则

- (A) $B = \Omega$.
- (B) $A \subset B$.
- (C) $P(B|\overline{A}) = 0$.
- (D) $P((A-B)|A) = 0$.

(5) 已知随机事件 A, B, C 中, 满足 $P(AB) = 1$, 则事件 $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$

- (A) 相互独立.
- (B) 两两独立, 但不一定相互独立.
- (C) 不一定两两独立.
- (D) 一定不两两独立.

(6) 设 A, B 为随机事件, 且 $P(B) > 0, P(A|B) = 1$, 则必有

- (A) $P(A \cup B) > P(A)$.
- (B) $P(A \cup B) > P(B)$.
- (C) $P(A \cup B) = P(A)$.
- (D) $P(A \cup B) = P(B)$.

(7) 设 A, B, C 为三个随机事件, 且 A 与 C 相互独立, B 与 C 相互独立, 则 AB 与 C 相互独立的充分必要条件是

- (A) A 与 B 相互独立.
- (B) A 与 B 互不相容.
- (C) $A \cup B$ 与 C 相互独立.
- (D) $A \cup B$ 与 C 互不相容.

2. 填空题

(1) 设 A, B, C 是两两相互独立且三事件不能同时发生的随机事件. 已知 $P(A) = P(B) = P(C) = x$, 则使 $P(A \cup B \cup C)$ 取最大值的 $x =$ _____.



微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

(2) 设对事件 A, B, C 有 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$, $P(AB) = P(BC) = 0$, $P(AC) = \frac{1}{8}$, 则 A, B, C 三个事件中至少出现一个的概率为_____.

(3) 设 $P(A) = P(B) = \frac{1}{3}$, 且 $P(B|A) + P(\bar{B}|\bar{A}) = 1$, 则 $P(AB) =$ _____.

(4) 为从 2 个次品 8 个正品的产品中 2 个次品挑出, 随机从中逐个测试, 则不超过 4 次测试就把 2 个次品挑出的概率为_____.

3. 解答题

(1) 5 双不同的鞋, 从中任取 4 只, 试求下列事件的概率:

(I) 没有 2 只鞋能配成一双;

(II) 恰有 2 只鞋能配成一双;

(III) 能配成 2 双.

(2) 在 A, B, C 三随机事件中, 已知 $P(A \cup B) = 0$, 证明 A, B, C 必相互独立.

(3) 从数 1, 2, 3, 4 中任取一数, 记为 X , 再从 $1, \dots, X$ 中任取一个数, 记为 Y , 试求 Y 为偶数的概率.

(4) 在一张划有等距间隔横线的纸上, 投一枚直径为 2 cm 的硬币. 已知硬币不与横线相交的概率为 0.5, 求横线间距.

(5) 在伯努利试验中, 每次试验成功的概率为 p , 试求下列事件的概率:

(I) 在第 4 次试验之前恰失败了 2 次;

(II) 在第 4 次成功之前恰失败了 2 次.



一、学霸小结

自己总结本章所学的知识、方法与技巧,形成结构,既可巩固所学知识,又可培养独立思考分析问题的能力,养成学以致用的好习惯。

1.

2.

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

3.

4.



5.

最小值

1. 设函数 $f(x) = x^2 + 2x + 1$ ，求 $f(x)$ 在 $x \in [-1, 1]$ 上的最小值。

6.

7.

(ID: djky66)

8.



二、错题分类

综合分析哪些题做得比较好,哪些题存在失误。对错题进行归类,有针对的进行纠错。

类型 1	概念模糊 知识不清 未能掌握
题目序号 或页码	纠错与分析
题目序号 或页码	纠错与分析



类型 2	缺失数学思维 方法运用不灵活
题目序号 或页码	纠错与分析
题目序号 或页码	纠错与分析

微信公众号【顶尖考研】

(ID: djky66)



类型 3	审题不清 不能正确理解题意
题目序号 或页码	纠错与分析
题目序号 或页码	纠错与分析

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



类型 4	运算能力弱 表述不清
------	------------

题目序号 或页码	纠错与分析
-------------	-------

未来名师：号众公言燃
微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

题目序号 或页码	纠错与分析
-------------	-------



第二章 随机变量及其分布

1. 选择题

(1) 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 均为分布函数, 若要使 $F(x) = aF_1(x) - bF_2(x)$ 也是分布函数, 则常数 a 与 b 可取

$$(A) \begin{cases} a = \frac{3}{5}, \\ b = -\frac{2}{5}. \end{cases}$$

$$(B) \begin{cases} a = \frac{2}{3}, \\ b = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

$$(C) \begin{cases} a = -\frac{1}{2}, \\ b = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

$$(D) \begin{cases} a = \frac{1}{2}, \\ b = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

(2) 设随机变量 X 满足 $X^3 \sim N(1, 7^2)$, 记标准正态分布函数为 $\Phi(x)$, 则 $P\{1 < X < 2\}$ 的值为

$$(A) \Phi(2) - \Phi(1).$$

$$(B) \Phi(\sqrt[3]{2}) - \Phi(1).$$

$$(C) \Phi(1) - 0.5.$$

$$(D) \Phi(\sqrt[3]{3}) - \Phi(\sqrt[3]{2}).$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

(3) 已知甲打靶命中率为 p_1 ($0 < p_1 < 1$), 乙打靶命中率为 p_2 ($0 < p_2 < 1$), 现从甲、乙两人中只选一人打一发, 设靶被打中的次数 $X \sim B(1, p)$, 则 p 等于

$$(A) p_1 + p_2.$$

$$(B) \frac{p_1 + p_2}{2}.$$

$$(C) \max(p_1, p_2).$$

$$(D) \min(p_1, p_2).$$

(4) 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 则随机变量 $Y = X^2$ 的概率密度 $f_Y(y)$ 为

$$(A) f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < y < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$(B) f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-y^2}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

$$(C) f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$(D) f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$



(5) 设随机变量 X 服从 $U(0,1)$, 则随机变量 $Y = \min\{X, 2\}$ 的分布函数 $F_Y(y)$ 的间断点个数为

- (A) 0. (B) 1.
(C) 2. (D) 3.

(6) 设随机变量 X 服从 $U(-1,1)$, 则随机变量 $Y = \max\{X, |X|\}$ 服从分布

- (A) $U(-1,1)$. (B) $U(0,1)$.
(C) $U(0,2)$. (D) 非均匀分布.

2. 填空题

(1) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X = k\} = \frac{c}{k!}e^{-2}, k = 0, 1, 2, \dots$, 则常数 $c =$ _____.

(2) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X = k\} = \theta(1-\theta)^{k-1}, k = 1, 2, \dots$, 其中 $0 < \theta < 1$, 若 $P\{X \leq 2\} = \frac{5}{9}$, 则 $P\{X = 3\} =$ _____.

(3) 设某时间段内通过路口的车流量 X 服从泊松分布, 已知该时段内没有车通过的概率为 $\frac{1}{e}$, 则这段时间内至少有两辆车通过的概率为 _____.

(4) 设随机变量 ξ 在 $(1,6)$ 上服从均匀分布, 则方程 $x^2 + \xi x + 1 = 0$ 有实根的概率是 _____.

3. 解答题

(1) 设随机变量 X 服从参数为 $\lambda (\lambda > 0)$ 的指数分布, 且 $P\{X \leq 1\} = \frac{1}{2}$, 试求:

- (I) 参数 λ ;
(II) $P\{X > 2 \mid X > 1\}$.

(2) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & -1 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

令 $Y = X^2 + 1$, 试求:

- (I) Y 的概率密度 $f_Y(y)$;
(II) $P\left\{-1 < Y < \frac{3}{2}\right\}$.



(3) 已知随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, -\infty < x < +\infty.$$

求 $Y = X^2$ 的概率密度.

(4) 在一元二次方程 $x^2 + Bx + C = 0$ 中, B, C 分别是将一枚骰子接连掷两次先后出现的两个点数. 试求:

(I) 该方程有实根的概率 p ;

(II) 该方程有重根的概率 q .

(5) 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布. 试求:

(I) $Y_1 = |X|$ 的分布函数 $F_1(y)$;

(II) $Y_2 = 3X + 2$ 的概率密度 $f_2(y)$.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



一、学霸小结

自己总结本章所学的知识、方法与技巧,形成结构,既可巩固所学知识,又可培养独立思考分析问题的能力,养成学以致用的好习惯。

1.

2.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

3.

4.



5.

6.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

7.

(ID: djky66)

8.



类型 2

缺失数学思维 方法运用不灵活

题目序号
或页码

纠错与分析

微信公众号【顶尖考研】

(ID: djky66)

题目序号
或页码

纠错与分析



类型 3	审题不清 不能正确理解题意
题目序号 或页码	纠错与分析
题目序号 或页码	纠错与分析



第三章 多维随机变量及其分布

1. 选择题

(1) 设随机变量 (X, Y) 的分布函数为 $F(x, y)$, 其边缘分布为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$, 则概率 $P\{X > 1, Y > 1\}$ 等于

- (A) $1 - F(1, 1)$. (B) $1 - F_X(1) - F_Y(1)$.
(C) $F(1, 1) - F_X(1) - F_Y(1) + 1$. (D) $F(1, 1) + F_X(1) + F_Y(1) - 1$.

(2) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从区间 $(0, 1)$ 上的均匀分布, 则 $P\{X^2 + Y^2 \leq 1\} =$

- (A) $\frac{1}{4}$. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{\pi}{8}$. (D) $\frac{\pi}{4}$.

(3) 设相互独立的两随机变量 X, Y 均服从 $E(1)$ 分布, 则 $P\{1 < \min(X, Y) < 2\}$ 的值为

- (A) $e^{-1} - e^{-2}$. (B) $1 - e^{-1}$.
(C) $1 - e^{-2}$. (D) $e^{-2} - e^{-4}$.

(4) 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 为两个分布函数, 其相应的概率密度 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是连续函数, 则可以构造概率密度

- (A) $f_1(x)f_2(x)$. (B) $2f_2(x)f_1(x)$.
(C) $f_1(x)F_2(x)$. (D) $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$.

(5) 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 它们的概率分布均为 $B(1, \frac{1}{2})$, 则有 $P\{X = Y\} =$

- (A) 0. (B) $\frac{1}{4}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) 1.

(6) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 服从标准正态分布 $N(0, 1)$, Y 的概率分布为 $P\{Y = 0\} = P\{Y = 1\} = \frac{1}{2}$, 记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z = XY$ 的分布函数, 则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

2. 填空题

(1) 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 已知 $X \sim U[0, 1]$, $Y \sim U[0, 2]$, 则 $P\{X < Y\} =$ _____.

(2) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -2 < x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 记 $F(x, y)$ 为二维随机变

量 (X, X^2) 的分布函数, 则 $F(-1, 4) =$ _____.



(3) 设二维随机变量 (X, Y) 的分布函数为 $\Phi(2x)\Phi(y-1)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则 (X, Y) 服从的分布及参数为_____.

(4) 随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 6x, & 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

则 $P\{X+Y \leq 1\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 解答题

(1) 设 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = (1 + \sin x \sin y) \varphi(x) \varphi(y),$$

其中 $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < +\infty$.

(I) 求边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$;

(II) (X, Y) 是否为正态随机变量? X 与 Y 是否独立?

(2) 设 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

试求: (I) 求 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$, 并判断 X, Y 是否独立?

(II) $F(\frac{1}{2}, 2)$ 的值.

(3) 设 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} A x e^{-x(1+y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

试求: (I) 常数 A ;

(II) $f_Y(y)$;

(III) $f_{Y|X}(y | x)$.

(4) 设随机变量 X 和 Y 相互独立, $X \sim N(0, 1), Y \sim U[-1, 1]$, 试求 $Z = X + Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$.

(5) 已知随机变量 X_1 和 X_2 的概率分布分别为

$$\begin{array}{c|ccc} X_1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array} \text{ 和 } \begin{array}{c|cc} X_2 & 0 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array},$$

且 $P\{X_1 X_2 = 0\} = 1$.

(I) 求 (X_1, X_2) 的概率分布;

(II) X_1 和 X_2 是否独立?

(III) $P\{X_1 = 0 | X_1 + X_2 = 1\}$.



一、学霸小结

自己总结本章所学的知识、方法与技巧,形成结构,既可巩固所学知识,又可培养独立思考分析问题的能力,养成学以致用的好习惯。

1.

2.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

3.

4.



5.

6.

微信公众号:顶尖考研
(ID: djky66)

7.

8.



类型 1

知识不清

未能掌握

纠错与分析

纠错与分析

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

类型 2

缺失数学思维 方法运用不灵活

题目序号
或页码

纠错与分析

微信公众号【顶尖考研】

题目序号
或页码

纠错与分析

(ID: djky66)



类型 3	审题不清 不能正确理解题意
题目序号 或页码	纠错与分析
题目序号 或页码	纠错与分析

微信公众号【顶尖考研】

(ID: djky66)



类型 4	运算能力弱 表述不清
题目序号 或页码	纠错与分析
题目序号 或页码	纠错与分析

微信公众号【顶尖考研】

(ID: djky66)



第四章 随机变量的数字特征

1. 选择题

(1) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$, 已知 $EX = 1$, 则

(A) $\int_{-\infty}^1 xf(x)dx = \frac{1}{2}$. (B) $\int_{-\infty}^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$.

(C) $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(2x)dx = \frac{1}{4}$. (D) $\int_{-\infty}^0 xf(x)dx = \frac{1}{2}$.

(2) 设随机变量 $X \sim P(1)$, 则 $E\left(\frac{X}{1+X}\right) =$

(A) e^{-1} . (B) e . (C) 1 . (D) $\frac{1}{2}$.

(3) 设随机变量 $X \sim U[-2, 2]$, 记 $Y = \max(|X|, 1)$, 则 $EY =$

(A) $\frac{5}{4}$. (B) 1 . (C) $\frac{1}{2}$. (D) 0 .

(4) 设随机变量 $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim N(1, 4)$, 且相关系数 $\rho_{XY} = 1$, 则

(A) $P\{Y = -2X - 1\} = 1$. (B) $P\{Y = 2X - 1\} = 1$.

(C) $P\{Y = -2X + 1\} = 1$. (D) $P\{Y = 2X + 1\} = 1$.

(5) 将长度为 1m 的木棒随机地截成两段, 则两段长度的相关系数为

(A) 1 . (B) $\frac{1}{2}$. (C) $-\frac{1}{2}$. (D) -1 .

(6) 已知随机变量 X, Y 均服从分布 $B(1, \frac{3}{4})$, 且 $\rho_{XY} = \frac{1}{3}$, 则 $P\{X+Y \leq 1\}$ 等于

(A) $\frac{1}{4}$. (B) $\frac{3}{8}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{5}{8}$.

(7) 随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1, A_2, A_3 , 且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$, 将试验 E 独立重复做 2 次, X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数, Y 表示 2 次试验中结果 A_2 发生的次数, 则 X 与 Y 的相关系数为

(A) $\frac{1}{3}$. (B) $-\frac{1}{3}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $-\frac{1}{2}$.

2. 填空题

(1) 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = 0.3\Phi(x) + 0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right),$$

其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则 $E(X) =$ _____.



(2) 设随机变量的概率分布为 $P\{X=k\} = \frac{c}{k!}, k=0,1,2,\dots$, 则 $E(X^2) =$ _____.

(3) 记 100 次独立重复伯努利试验中成功的次数为 X , 则 DX 的最大值为 _____.

(4) 设 $DX \cdot DY \neq 0$, 且满足关系式 $\sqrt{D(X+Y)} = \sqrt{DX} + \sqrt{DY}$, 则 X 与 Y 的相关系数 $\rho =$ _____.

3. 解答题

(1) 设某种商品每周的需求量是服从区间 $[10, 30]$ 上均匀分布的随机变量, 而经销商店进货数量为区间 $[10, 30]$ 中的某一整数, 商店每销售一单位商品可获利 500 元, 若供大于求则削价处理, 每处理 1 单位商品亏损 100 元, 若供不应求, 则可从外部调剂供应, 此时每单位商品仅获利 300 元. 为使商店所获利润期望值不少于 9280 元, 试确定最少进货量.

(2) 假设一设备开机后无故障工作的时间 X 服从指数分布, 平均无故障工作的时间 EX 为 5 小时. 设备定时开机, 出现故障时自动关机, 而在无故障的情况下工作 2 小时便关机. 记设备每次开机无故障工作的时间为 Y .

试求: (I) 随机变量 Y ;

(II) Y 的分布函数 $F_Y(y)$.

(3) 设随机变量 $U \sim U[-2, 2]$, 随机变量

$$X = \begin{cases} -1, & \text{若 } U \leq -1, \\ 1, & \text{若 } U > -1, \end{cases} \quad Y = \begin{cases} -1, & \text{若 } U \leq 1, \\ 1, & \text{若 } U > 1. \end{cases}$$

试求: (I) X 和 Y 的联合概率分布;

(II) $D(X+Y)$.

(4) 设 A, B 是二随机事件, 随机变量

$$X = \begin{cases} 1, & \text{若 } A \text{ 出现,} \\ -1, & \text{若 } A \text{ 不出现,} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1, & \text{若 } B \text{ 出现,} \\ -1, & \text{若 } B \text{ 不出现.} \end{cases}$$

试证明随机变量 X 和 Y 不相关的充分必要条件是 A 与 B 相互独立.

(5) 某箱装有 100 件产品, 其中一、二和三等品分别为 80、10 和 10 件, 现在从中随机抽取一件, 记

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{若抽到 } i \text{ 等品,} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3).$$

试求随机变量 X_1 与 X_2 的 (I) 联合分布; (II) 相关系数 ρ .

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



一、学霸小结

自己总结本章所学的知识、方法与技巧,形成结构,既可巩固所学知识,又可培养独立思考分析问题的能力,养成学以致用的好习惯。

1.

2.

3.

4.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



5.

尖长圆锥,二

解: 设圆锥的高为 h , 底面半径为 r , 母线长为 l , 则圆锥的体积为 $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

由题意知, 圆锥的侧面积为 $S = \pi r l$.

又因为

所以

6.

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

微信公众号【顶尖考研】

7.

(ID: djky66)

8.



类型 2

缺失数学思维 方法运用不灵活

题目序号
或页码

纠错与分析

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

微信公众号【顶尖考研】

(ID: djky66)

题目序号
或页码

纠错与分析



类型 3	审题不清 不能正确理解题意
题目序号 或页码	纠错与分析
题目序号 或页码	纠错与分析



类型 4	运算能力弱 表述不清
题目序号 或页码	纠错与分析
题目序号 或页码	纠错与分析

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



第五章 大数定律和中心极限定理

1. 选择题

(1) 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, 则根据列维—林德伯格中心极限定理, 当 n 充分大时, S_n 近似服从正态分布, 只要 $X_1, X_2, \dots, X_n$

- (A) 有相同的数学期望.
- (B) 有相同的方差.
- (C) 服从同一指数分布.
- (D) 服从同一离散型分布.

(2) 掷一枚骰子 n 次, S_n 表示各次掷出的点数之和, 已知当 $n \rightarrow \infty$ 时, 随机变量 $Y_n = \frac{6S_n - a}{b}$ 趋于标准正态分布, 则必有

- (A) $\begin{cases} a = \frac{7}{2}n, \\ b = \sqrt{105n}. \end{cases}$ (B) $\begin{cases} a = 21n, \\ b = \sqrt{105n}. \end{cases}$
- (C) $\begin{cases} a = \frac{7}{2}n, \\ b = 105n. \end{cases}$ (D) $\begin{cases} a = 21n, \\ b = 105n. \end{cases}$

(3) 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立, 则根据辛钦大数定律, 当 n 充分大时, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 依概率收敛于其共同的数学期望, 只要 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$

- (A) 有相同的数学期望.
- (B) 服从同一离散型分布.
- (C) 服从同一泊松分布.
- (D) 服从同一连续型分布.

(4) 在大数定律中有 ① 切比雪夫大数定律 ② 伯努利大数定律 ③ 辛钦大数定律, 可以由

- (A) ① 或 ② 都能推出 ③.
- (B) ① 或 ③ 都能推出 ②.
- (C) ② 或 ③ 都能推出 ①.
- (D) 哪一个也不能推出另一个.

2. 填空题

(1) 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立, 均服从参数为 2 的指数分布, 则当 $n \rightarrow \infty$

时, $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 依概率收敛于_____.



(2) 设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别为 -2 和 2 , 方差分别为 1 和 9 , 而相关系数为 -1 . 根据切比雪夫不等式估计 $P\{|X+Y|\geq 6\} \leq$ _____.

3. 解答题

(1) 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$), $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数, 已知 $\Phi(3) = 0.9987$.

(I) 求 $P\{|X - \mu| \geq 3\sigma\}$ 的值;

(II) 根据切比雪夫不等式估计 $P\{|X - \mu| \geq 3\sigma\}$.

(2)(I) 某系统由 100 个部件组成, 运行期间每个部件是否损坏是相互独立的, 损坏的概率均为 0.1 , 如果有 85 个以上的部件完好时系统才能正常工作, 求系统正常工作的概率;

(II) 如果上述系统由 n 个部件组成, 需 80% 以上的部件完好时系统才能正常工作, 问 n 至少多大才能使系统正常工作的概率不小于 0.95 ?

附表: $\Phi(1.667) = 0.9522, \Phi(1.645) = 0.95$.

(3) 写出切比雪夫不等式和切比雪夫大数定律, 并用前者证明后者.

(4) 假设某种型号的螺丝钉的重量是随机变量, 期望值为 50 克, 标准差为 5 克,

求: (I) 100 个螺丝钉一袋的重量超过 5.1 千克的概率;

(II) 每箱螺丝钉装有 500 袋, 500 袋中最多有 4% 的重量超过 5.1 千克的概率.

附表: $\Phi(2) = 0.9772, \Phi(2.577) = 0.9951$.



学霸小结

自己总结本章所学的知识、方法与技巧,形成结构,既可巩固所学知识,又可培养独立思考分析问题的能力,养成学以致用的好习惯。

1.

2.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

3.

4.



5.

6.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

7.

8.



第六章 数理统计的基本概念

1. 选择题

(1) 设随机变量 $X \sim t(n) (n > 1)$, $Y = \frac{1}{X^2}$, 则随机变量 Y 服从的分布为

- (A) $\chi^2(n)$. (B) $\chi^2(n-1)$.
(C) $F(n, 1)$. (D) $F(1, n)$.

(2) 设总体服从参数为 $\lambda (\lambda > 0)$ 的泊松分布, $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自该总体的简单随机样本, 则对于统计量 $T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 和 $T_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n} X_n$ 有

- (A) $ET_1 > ET_2, DT_1 > DT_2$. (B) $ET_1 > ET_2, DT_1 < DT_2$.
(C) $ET_1 < ET_2, DT_1 > DT_2$. (D) $ET_1 < ET_2, DT_1 < DT_2$.

(3) 设 X_1, X_2, X_3, X_4 为来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 则统计量 $\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{X_3^2 + X_4^2}}$ 的分布为

- (A) $N(0, 2)$. (B) $t(2)$. (C) $\chi^2(2)$. (D) $F(2, 2)$.

(4) 设随机变量 X 和 Y 都服从标准正态分布, 则

- (A) $X + Y \sim N(0, 2)$. (B) $X^2 + Y^2 \sim \chi^2(2)$.
(C) X^2 和 Y^2 都服从 $\chi^2(1)$. (D) $X^2/Y^2 \sim F(1, 1)$.

(5) 设 X_1, X_2, X_3 为来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 则统计量 $S = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2} |X_3|}$ 服从的分布为

- (A) $F(1, 1)$. (B) $F(2, 1)$.
(C) $t(1)$. (D) $t(2)$.

(6) 设 $t_\alpha(n)$ 表示自由度为 n 的 t 分布的 α 分位数, 则

- (A) $t_\alpha(n) \cdot t_{1-\alpha}(n) = 1$. (B) $t_\alpha(n) \cdot t_{1-\alpha}(n) = \alpha$.
(C) $t_\alpha(n) + t_{1-\alpha}(n) = 1$. (D) $t_\alpha(n) + t_{1-\alpha}(n) = 0$.

2. 填空题

(1) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{3\theta^2}, & \theta < x < 2\theta, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 θ 是未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 则 $E(\sum_{i=1}^n X_i^2) =$



(2) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma^2)$, 总体 Y 服从正态分布 $N(\mu_2, \sigma^2)$. $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$ 和 $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$ 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本, 则

$$E \left[\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \bar{Y})^2}{n_1 + n_2 - 2} \right] = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(3) 设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} (-\infty < x < +\infty)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为总体 X 的简单随机样本, 其样本方差为 S^2 , 则 $E(S^2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 设 $X_1, X_2, \dots, X_6$ 是来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 已知统计量 $T = a \frac{X_1 + X_2 + X_3}{\sqrt{X_4^2 + X_5^2 + X_6^2}}$ 服从 t 分布, 则常数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 解答题

(1) 设总体的概率密度 $f(x) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}}, -\infty < x < +\infty, \sigma > 0$. $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|$.

求 (I) ET ;

(II) DT .

(2) 设 $X \sim N(0, \sigma^2)$, 从总体 X 中抽取简单随机样本 $X_1, X_2, \dots, X_9$, 其样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 X_i$, 试确定 σ 的值, 使得 $P\{1 < \bar{X} < 3\}$ 为最大.

(3) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 已知 $X \sim B(1, p), 0 < p < 1$, 试求 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 的分布.

(4) 设总体 $X \sim E(\lambda), X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 记 $X_{(1)} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 试求 $X_{(1)}$ 分布密度 $f_{(1)}(x)$.

(5) 设总体 X 的概率密度 $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ X_1, X_2, X_3 为来自总体 X 的简单随机样本, 记 $X_{(3)} = \max(X_1, X_2, X_3)$.

(I) 求 $X_{(3)}$ 的概率密度 $f_{(3)}(x)$;

(II) 求概率 $P\{\max(X_1, X_2) < X_3\}$.



一、学霸小结

自己总结本章所学的知识、方法与技巧,形成结构,既可巩固所学知识,又可培养独立思考分析问题的能力,养成学以致用的好习惯。

1.

2.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

3.

4.



5.

6.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

7.

8.



二、错题分类

综合分析哪些题做得比较好,哪些题存在失误。对错题进行归类,有针对的进行纠错。

类型 1	概念模糊 知识不清 未能掌握
题目序号 或页码	纠错与分析
题目序号 或页码	纠错与分析

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



类型 2	缺失数学思维 方法运用不灵活
------	----------------

题目序号 或页码	纠错与分析
-------------	-------

题目序号 或页码	纠错与分析
-------------	-------



类型 3	审题不清 不能正确理解题意
------	---------------

题目序号 或页码	纠错与分析
-------------	-------

微信公众号【顶尖考研】

(ID: djky66)

题目序号 或页码	纠错与分析
-------------	-------



类型 4	运算能力弱 表述不清
题目序号 或页码	纠错与分析
题目序号 或页码	纠错与分析

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



第七章 参数估计

1. 选择题

(1) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自参数为 λ 的泊松总体 X 的简单随机样本, 则可以构造参数 λ^2 的无偏估计量(或数学期望为 λ^2 的统计量)

- (A) $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(X_i - 1)$. (B) $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$.
(C) $T = (\bar{X})^2$. (D) $T = S^2$.

(2) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 则可以构造未知参数 σ^2 的无偏估计量(或数学期望为 σ^2 的统计量)

- (A) $T = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2$. (B) $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2$.
(C) $T = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n X_i^2$. (D) $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$.

(3) 设一批零件的长度服从正态分布 $N(\mu, 4)$, 其中 μ 未知, 现从中随机抽取 16 个零件, 测得样本均值 $\bar{x} = 10(\text{cm})$, 则 μ 的置信度为 0.90 的置信区间为

- (A) $\left(10 - \frac{1}{2}u_{0.05}, 10 + \frac{1}{2}u_{0.05}\right)$. (B) $\left(10 - \frac{1}{2}u_{0.1}, 10 + \frac{1}{2}u_{0.1}\right)$.
(C) $\left(10 - \frac{2}{\sqrt{15}}u_{0.05}, 10 + \frac{2}{\sqrt{15}}u_{0.05}\right)$. (D) $\left(10 - \frac{2}{\sqrt{15}}u_{0.1}, 10 + \frac{2}{\sqrt{15}}u_{0.1}\right)$.

(4) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 2)$ 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, $\bar{X}$ 为样本均值, 已知 $T = C(X_1 + X_n - 2\bar{X})^2$ 是 σ^2 的无偏估计(或 $ET = \sigma^2$), 则常数 C 必为

- (A) $\frac{1}{2(n-2)}$. (B) $\frac{1}{2(n-1)}$.
(C) $\frac{n}{2(n-2)}$. (D) $\frac{n}{2(n-1)}$.

(5) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 其中 μ 已知, $\sigma^2 > 0$ 为未知参数, 样本均值为 $\bar{X}$, 则 σ^2 的最大似然估计量为

- (A) $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$. (B) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.
(C) $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$. (D) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$.



(6) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自区间 $[-a, a]$ 上均匀分布的总体 X 的简单随机样本, 则参数 a 的最大似然估计 $\hat{a} =$

- (A) $\max_{1 \leq i \leq n} (X_i)$. (B) $\max_{1 \leq i \leq n} (|X_i|)$. (C) $-\min_{1 \leq i \leq n} (X_i)$. (D) $-\min_{1 \leq i \leq n} (|X_i|)$.

2. 填空题

(1) 已知一批零件的长度 X (单位: cm) 服从正态分布 $N(\mu, 1)$, 从中随机地抽取 16 个零件, 得到长度的平均值为 40 (cm), 则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是_____.

注: 标准正态分布函数值 $\Phi(1.96) = 0.975, \Phi(1.645) = 0.95$.

(2) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自区间 $[-a, a]$ 上均匀分布的总体 X 的简单随机样本, 则参数 a 的矩估计量 $\hat{a} =$ _____.

(3) 设总体 $X \sim B(m, p)$, 其中 $p (0 < p < 1)$ 为未知参数, 从总体 X 中抽取简单随机样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$, 记 p 的矩估计量为 $\hat{p}$, 则 $E\hat{p} =$ _____.

3. 解答题

(1) 设总体 X 的概率密度为 $f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1} (0 < x < 1)$, 其中未知参数 $\theta > 0$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 试求

(I) θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$;

(II) θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_2$.

(2) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 已知 $X \sim E(\lambda)$, 其中 $\lambda > 0$ 是未知参数, 试求

(I) λ 的矩估计量 $\hat{\lambda}_1$;

(II) λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}_2$.

(3) 设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 其中参数 $\lambda (\lambda > 0)$ 未知, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求参数 λ 的矩估计量;

(II) 求参数 λ 的最大似然估计量.

(4) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 其中 μ_0 已知, $\sigma^2 > 0$ 未知. $\bar{X}$ 和 S^2 分别表示样本均值和样本方差.

(I) 求参数 σ^2 的最大似然估计 $\hat{\sigma}^2$;

(II) 计算 $E\hat{\sigma}^2$ 和 $D\hat{\sigma}^2$.



(5) 设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 与 $N(\mu, 2\sigma^2)$, 其中 σ 是未知参数且 $\sigma > 0$. 记 $Z = X - Y$.

(I) 求 Z 的概率 $f(z; \sigma^2)$;

(II) 设 $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ 为来自总体 Z 的简单随机样本, 求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$;

(III) 证明 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量.

(6) 设总体 X 的分布函数为

$$F(x; \theta) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

其中 θ 是未知参数且大于零, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求 EX 与 EX^2 ;

(II) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_n$;

(III) 是否存在实数 a , 使得对任何 $\varepsilon > 0$, 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta}_n - a| \geq \varepsilon\} = 0?$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



一、学霸小结

自己总结本章所学的知识、方法与技巧,形成结构,既可巩固所学知识,又可培养独立思考分析问题的能力,养成学以致用用的良好习惯。

1.

2.

微信公众号:顶尖考研
(ID:djky66)

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

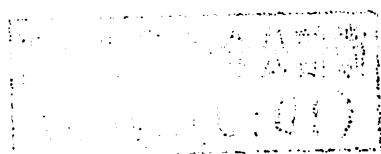
3.

4.



5.

6.



7.

8.



二、错题分类

综合分析哪些题做得比较好,哪些题存在失误。对错题进行归类,有针对的进行纠错。

类型 1	概念模糊	知识不清	未能掌握
------	------	------	------

题目序号 或页码	纠错与分析
-------------	-------

题目序号 或页码	纠错与分析
-------------	-------



类型 2	缺失数学思维 方法运用不灵活
题目序号 或页码	纠错与分析
题目序号 或页码	纠错与分析

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



类型 3	审题不清 不能正确理解题意
题目序号 或页码	纠错与分析 微信公众号:顶尖考研 (ID:djky66) 微信公众号【顶尖考研】 (ID: djky66)
题目序号 或页码	纠错与分析



第八章

假设检验

(仅数学一要求)

1. 选择题

(1) 已知 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 为检验总体 X 的均值大于 Y 的均值, 则应作检验的假设为

(A) $H_0: \mu_1 > \mu_2; H_1: \mu_1 \leq \mu_2.$

(B) $H_0: \mu_1 \geq \mu_2; H_1: \mu_1 < \mu_2.$

(C) $H_0: \mu_1 < \mu_2; H_1: \mu_1 \geq \mu_2.$

(D) $H_0: \mu_1 \leq \mu_2; H_1: \mu_1 > \mu_2.$

(2) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 其中 μ 和 σ^2 均未知, 记 $\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差, 当 $H_0: \mu = \mu_0$ 成立时则有

(A) $\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} \sim N(0, 1).$

(B) $\frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n} \sim t(n-1).$

(C) $\frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n} \sim t(n).$

(D) $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2 \sim \chi^2(n-1).$

2. 填空题

(1) 设 $X_1, X_2, \dots, X_{16}$ 是来自正态总体 $N(\mu, 2^2)$ 的简单随机样本, 样本均值 $\bar{X}$ 在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下检验假设 $H_0: \mu \geq 5; H_1: \mu < 5$ 的拒绝域为_____.

注: 标准正态分布函数值 $\Phi(1.645) = 0.95$.

(2) 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ, σ^2 均未知, $X_1, X_2, \dots, X_{16}$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 样本均值 $\bar{X}$, 样本方差 S^2 , 则在显著性水平 α 下检验假设 $H_0: \mu \geq 30$ 的拒绝域为_____.

(3) 已知总体 X 的概率密度只有两种可能, 设

$$H_0: f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad H_1: f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

对 X 进行一次观测, 得样本 X_1 , 规定 $X_1 \geq \frac{3}{2}$ 时拒绝 H_0 , 否则就接受 H_0 , 则此检验的 α 和 β 分别为_____.



3. 解答题

(1) 设某次考试的考生成绩服从正态分布,从中随机的抽取 36 位考生的成绩,算得平均成绩 66.5 分,标准差为 15 分.问在显著性水平 0.05 下,对这次考试全体考生的平均成绩 μ ,

(I) 可以认为 $\mu \geq 70$ (分)?

(II) 可以认为 $\mu \leq 70$ (分)?

(III) 可以认为 $\mu > 70$ (分)?

(IV) 可以认为 $\mu < 70$ (分)?

附表: t 分布表 $P\{t(n) \leq t_p(n)\} = p$

$t_p(n)$ n	0.95	0.975
35	1.6896	2.0301
36	1.6883	2.0281

(2) 在显著水平 0.10 下,试求上题的结论.

附表: t 分布表 $P\{t(n) \leq t_p(n)\} = p$

$t_p(n)$ n	0.90	0.95
35	1.3062	1.6896
36	1.3055	1.6883



学霸小结

自己总结本章所学的知识、方法与技巧,形成结构,既可巩固所学知识,又可培养独立思考分析问题的能力,养成学以致用的好习惯。

1.

2.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

3.

4.



5.

6.

7.

8.



附录

2018 年概率论与数理统计考题

数学一

- (7) 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x) = f(1-x)$, 且 $\int_0^2 f(x) dx = 0.6$, 则 $P\{X < 0\} =$
(A) 0.2. (B) 0.3. (C) 0.4. (D) 0.5.

- (8) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本. 据此样本检测: 假设 $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$, 则
(A) 如果在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下拒绝 H_0 , 那么在检验水平 $\alpha = 0.01$ 下必拒绝 H_0 .
(B) 如果在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下拒绝 H_0 , 那么在检验水平 $\alpha = 0.01$ 下必接受 H_0 .
(C) 如果在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下接受 H_0 , 那么在检验水平 $\alpha = 0.01$ 下必拒绝 H_0 .
(D) 如果在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下接受 H_0 , 那么在检验水平 $\alpha = 0.01$ 下必接受 H_0 .

- (14) 设随机事件 A 与 B 相互独立, A 与 C 相互独立, $BC = \emptyset$, 若

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}, P(AC | AB \cup C) = \frac{1}{4},$$

则 $P(C) =$ _____.

- (22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P\{X = 1\} = P\{X = -1\} = \frac{1}{2}$, Y 服从参数为 λ 的泊松分布. 令 $Z = XY$.

(I) 求 $\text{Cov}(X, Z)$;

(II) 求 Z 的概率分布.

- (23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \sigma) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}}, -\infty < x < +\infty,$$

其中 $\sigma \in (0, +\infty)$ 为未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本. 记 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$.

(I) 求 $\hat{\sigma}$;

(II) 求 $E\hat{\sigma}$ 和 $D\hat{\sigma}$.

答案解析请参考《历年真题全精解析》



数学三

(7) 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x) = f(1-x)$, 且 $\int_0^2 f(x) dx = 0.6$, 则 $P\{X < 0\} =$

- (A) 0.2 (B) 0.3 (C) 0.4 (D) 0.5

(8) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2) (\sigma > 0)$ 的简单随机样本, 令 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$,

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}, S^* = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}, \text{ 则}$$

(A) $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t(n).$ (B) $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t(n-1).$

(C) $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S^*} \sim t(n).$ (D) $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S^*} \sim t(n-1).$

(14) 随机事件 A, B, C 相互独立, 且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, 则 $P(AC | A \cup B) =$

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P\{X=1\} = P\{X=-1\} = \frac{1}{2}$, Y 服从参数为 λ 的泊松分布. 令 $Z = XY$.

(I) 求 $\text{Cov}(X, Z)$;

(II) 求 Z 的概率分布.

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \sigma) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}}, -\infty < x < +\infty,$$

其中 $\sigma \in (0, +\infty)$ 为未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本. 记 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$.

(I) 求 $\hat{\sigma}$;

(II) 求 $E\hat{\sigma}$ 和 $D\hat{\sigma}$.



2019 年概率论与数理统计考题

数学一

(7) 设 A, B 为随机事件, 则 $P(A) = P(B)$ 的充分必要条件是

(A) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. (B) $P(AB) = P(A)P(B)$.

(C) $P(A\bar{B}) = P(B\bar{A})$. (D) $P(AB) = P(\bar{A}\bar{B})$.

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P\{|X - Y| < 1\}$

(A) 与 μ 无关, 而与 σ^2 有关. (B) 与 μ 有关, 而与 σ^2 无关.

(C) 与 μ, σ^2 都有关. (D) 与 μ, σ^2 都无关.

(14) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ $F(x)$ 为 X 的分布函数, EX 为

X 的数学期望, 则 $P\{F(X) > EX - 1\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从参数为 1 的指数分布, Y 的概率分布为 $P\{Y = -1\} = p, P\{Y = 1\} = 1 - p, (0 < p < 1)$, 令 $Z = XY$.

(I) 求 Z 的概率密度;

(II) p 为何值时, X 与 Z 不相关;

(III) X 与 Z 是否相互独立?

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \sigma^2) = \begin{cases} \frac{A}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x \geq \mu, \\ 0, & x < \mu, \end{cases}$$

其中 μ 是已知参数, $\sigma > 0$ 是未知参数, A 是常数. $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求 A ;

(II) 求 σ^2 的最大似然估计量.



数学三

(7) 设 A, B 为随机事件, 则 $P(A) = P(B)$ 的充分必要条件是

- (A) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. (B) $P(AB) = P(A)P(B)$.
(C) $P(A\bar{B}) = P(B\bar{A})$. (D) $P(AB) = P(\bar{A}\bar{B})$.

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则

$$P\{|X - Y| < 1\}$$

- (A) 与 μ 无关, 而与 σ^2 有关. (B) 与 μ 有关, 而与 σ^2 无关.
(C) 与 μ, σ^2 都有关. (D) 与 μ, σ^2 都无关.

(14) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ $F(x)$ 为 X 的分布函数, EX 为 X 的数学期望, 则 $P\{F(X) > EX - 1\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从参数为 1 的指数分布, Y 的概率分布为 $P\{Y = -1\} = p, P\{Y = 1\} = 1 - p, (0 < p < 1)$, 令 $Z = XY$.

- (I) 求 Z 的概率密度;
(II) p 为何值时, X 与 Z 不相关;
(III) X 与 Z 是否相互独立?

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \sigma^2) = \begin{cases} \frac{A}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x \geq \mu, \\ 0, & x < \mu, \end{cases}$$

其中 μ 是已知参数, $\sigma > 0$ 是未知参数, A 是常数. $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

- (I) 求 A ;
(II) 求 σ^2 的最大似然估计量.



2020 年概率论与数理统计考题

数学一

(7) 设 A, B, C 为三个随机事件, 且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(AB) = 0, P(AC) = P(BC) = \frac{1}{12}$, 则 A, B, C 中恰有一个事件发生的概率为

- (A) $\frac{3}{4}$. (B) $\frac{2}{3}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{5}{12}$.

(8) 设 $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 其中 $P\{X=0\} = P\{X=1\} = \frac{1}{2}$,

$\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数, 则利用中心极限定理可得 $P\left\{\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 55\right\}$ 的近似值为

- (A) $1 - \Phi(1)$. (B) $\Phi(1)$.
(C) $1 - \Phi(0.2)$. (D) $\Phi(0.2)$.

(14) 设 X 服从区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的均匀分布, $Y = \sin X$, 则 $\text{Cov}(X, Y) =$ _____.

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立, 其中 X_1 与 X_2 均服从标准正态分布, X_3 的概率分布为

$$P\{X_3 = 0\} = P\{X_3 = 1\} = \frac{1}{2}, Y = X_3 X_1 + (1 - X_3) X_2$$

- (I) 求二维随机变量 (X_1, Y) 的分布函数, 结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示.
(II) 证明随机变量 Y 服从标准正态分布.

(23) (本题满分 11 分)

设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-(\frac{t}{\theta})^m}, & t \geq 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

其中 θ, m 为参数且大于零.

- (I) 求概率 $P\{T > t\}$ 与 $P\{T > s+t \mid T > s\}$, 其中 $s > 0, t > 0$.
(II) 任取 n 个这种元件做寿命试验, 测得它们的寿命分别为 $t_1, t_2, \dots, t_n$, 若 m 已知, 求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.



数学三

(7) 设 A, B, C 为三个随机事件, 且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(AB) = 0, P(AC) = P(BC) = \frac{1}{12}$, 则 A, B, C 中恰有一个事件发生的概率为

- (A) $\frac{3}{4}$. (B) $\frac{2}{3}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{5}{12}$.

(8) 设随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布 $N(0, 0; 1, 4; -\frac{1}{2})$, 则下列随机变量中服从标准正态分布且与 X 独立的是

- (A) $\frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)$. (B) $\frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)$.
(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$. (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$.

(14) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\} = \frac{1}{2^k}, k=1, 2, 3, \dots$, Y 表示 X 被 3 除的余数, 则 $EY =$ _____.

(22) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) \mid 0 < y < \sqrt{1-x^2}\}$ 上服从均匀分布, 令

$$Z_1 = \begin{cases} 1, & X-Y > 0, \\ 0, & X-Y \leq 0, \end{cases} \quad Z_2 = \begin{cases} 1, & X+Y > 0, \\ 0, & X+Y \leq 0, \end{cases}$$

(I) 求二维随机变量 (Z_1, Z_2) 的概率分布;

(II) 求 Z_1 与 Z_2 的相关系数.

(23) (本题满分 11 分)

设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-(\frac{t}{\theta})^m}, & t \geq 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

其中 θ, m 为参数且大于零.

(I) 求概率 $P\{T > t\}$ 与 $P\{T > s+t \mid T > s\}$, 其中 $s > 0, t > 0$;

(II) 任取 n 个这种元件做寿命试验, 测得它们的寿命分别为 $t_1, t_2, \dots, t_n$, 若 m 已知, 求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.



2021 年概率论与数理统计考题

数学一

- (8) 设 A, B 为随机事件, 且 $0 < P(B) < 1$, 下列命题中为假命题的是
- (A) 若 $P(A | B) = P(A)$, 则 $P(A | \bar{B}) = P(A)$.
- (B) 若 $P(A | B) > P(A)$, 则 $P(\bar{A} | \bar{B}) > P(\bar{A})$.
- (C) 若 $P(A | B) > P(A | \bar{B})$, 则 $P(A | B) > P(A)$.
- (D) 若 $P(A | A \cup B) > P(\bar{A} | A \cup B)$, 则 $P(A) > P(B)$.
- (9) 设 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ 为来自总体 $N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$ 的简单随机样本, 令 $\theta = \mu_1 - \mu_2, \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \hat{\theta} = \bar{X} - \bar{Y}$, 则
- (A) $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计, $D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}$.
- (B) $\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏估计, $D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}$.
- (C) $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计, $D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.
- (D) $\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏估计, $D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.
- (10) 设 $X_1, X_2, \dots, X_{16}$ 是来自总体 $N(\mu, 4)$ 的简单随机样本, 考虑假设检验问题: $H_0: \mu \leq 10, H_1: \mu > 10, \Phi(x)$ 表示标准正态分布函数, 若该检验问题的拒绝域为 $W = \{\bar{X} > 11\}$, 其中 $\bar{X} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} X_i$, 则 $\mu = 11.5$ 时, 该检验犯第二类错误的概率为
- (A) $1 - \Phi(0.5)$. (B) $1 - \Phi(1)$.
- (C) $1 - \Phi(1.5)$. (D) $1 - \Phi(2)$.
- (16) 甲、乙两个盒子中有 2 个红球和 2 个白球, 选从甲盒中任取一球, 观察颜色后放入乙盒, 再从乙盒中任取一球, 令 X, Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球的个数, 则 X 与 Y 的相关系数为_____.
- (22) (本题满分 12 分)
- 在区间 $(0, 2)$ 上随机取一点, 将该区间分成两段, 较短一段的长度记为 X , 较长一段的长度记为 Y . 令 $Z = \frac{Y}{X}$,
- (I) 求 X 的概率密度;
- (II) 求 Z 的概率密度;
- (III) 求 $E\left(\frac{X}{Y}\right)$.



数学三

(8) 设 A, B 为随机事件, 且 $0 < P(B) < 1$, 下列命题中为假命题的是

(A) 若 $P(A | B) = P(A)$, 则 $P(A | \bar{B}) = P(A)$.

(B) 若 $P(A | B) > P(A)$, 则 $P(\bar{A} | \bar{B}) > P(\bar{A})$.

(C) 若 $P(A | B) > P(A | \bar{B})$, 则 $P(A | B) > P(A)$.

(D) 若 $P(A | A \cup B) > P(\bar{A} | A \cup B)$, 则 $P(A) > P(B)$.

(9) 设 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ 为来自总体 $N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$ 的简单随机样本, 令

$$\theta = \mu_1 - \mu_2, \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \hat{\theta} = \bar{X} - \bar{Y}, \text{ 则}$$

$$(A) E(\hat{\theta}) = \theta, D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}. \quad (B) E(\hat{\theta}) = \theta, D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}.$$

$$(C) E(\hat{\theta}) \neq \theta, D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}. \quad (D) E(\hat{\theta}) \neq \theta, D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}.$$

(10) 设总体 X 的概率分布为 $P\{X=1\} = \frac{1-\theta}{2}, P\{X=2\} = P\{X=3\} = \frac{1+\theta}{4}$, 利用来

自总体的样本值 1, 3, 2, 2, 1, 3, 1, 2, 可得 θ 的最大似然估计值为

(A) $\frac{1}{4}$.

(B) $\frac{3}{8}$.

(C) $\frac{1}{2}$.

(D) $\frac{5}{8}$.

(16) 甲, 乙两个盒子中各装有 2 个红球和 2 个白球, 先从甲盒中任取一球, 观察颜色后放入乙盒中, 再从乙盒中任取一球, 令 X, Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球个数, 则 X 与 Y 的相关系数为_____.

(22) (本题满分 12 分)

在区间 $(0, 2)$ 上随机取一点, 将该区间分成两段, 较短一段的长度记为 X , 较长一段的

长度记为 Y . 令 $Z = \frac{Y}{X}$,

(I) 求 X 的概率密度;

(II) 求 Z 的概率密度;

(III) 求 $E\left(\frac{X}{Y}\right)$.



答案与提示

第一章 随机事件和概率

【答案】

1. (1)C. (2)A. (3)D. (4)D. (5)A. (6)C. (7)C.

2. (1) $\frac{1}{2}$. (2) $\frac{5}{8}$. (3) $\frac{1}{9}$. (4) $\frac{C_4^2}{C_{10}^2}$.

3. (1)(I) $\frac{C_5^4 2^4}{C_{10}^4}$; (II) $\frac{C_5^3 C_4^2 \cdot 2^2}{C_{10}^4}$; (III) $\frac{C_5^2}{C_{10}^4}$. (3) $\frac{1}{3}$.

(4) 4 cm.

(5)(I) $C_3^1 p(1-p)^2$; (II) $C_5^3 p^4(1-p)^2$.

【提示】

1. (1) $AB = \emptyset, B \subset \bar{A}, P(B) \leq P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

(2) 设 $P(A) = x$,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) \\ - P(AC) + P(ABC).$$

由 A, B, C 两两独立, 概率相等得 $\frac{9}{16} = 3x - 3x^2 + 0$, 解得 $x = \frac{1}{4}$ 或 $\frac{3}{4}$. 但 $P(A \cup B \cup$

$C) \geq P(A)$, 即 $\frac{9}{16} \geq x$, 故 $x = \frac{1}{4}$.

(3) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(AB) = 1 - P(\emptyset) = 1$.

(4) 由概率得不出事件的结论, (A), (B) 不予考虑.

$P((A-B) | A) = P(A | A) - P(AB | A) = 1 - P(B | A) = 0$.

(5) 讨论事件 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 的独立性, 可等价地考虑事件 A, B, C 的独立性.

因为 $P(AB) = 1$, 可知 $P(A) = P(B) = 1$.

而概率等于 0 或 1 的事件与所有的事件相互独立, 所以 A, B, C 必两两相互独立, 且事件 AB 与事件 C 也相互独立, 从而

$$P(ABC) = P(AB)P(C) = P(A)P(B)P(C).$$

因此 A, B, C 相互独立.

(6) $P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = 1$, 即 $P(AB) = P(B)$.



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A).$$

$$(7) AB \text{ 与 } C \text{ 独立} \Leftrightarrow P((AB)C) = P(AB)P(C).$$

$$\text{又 } P((A \cup B) \cap C) = P(AC \cup BC) = P(AC) + P(BC) - P(AC \cap BC)$$

$$= P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(ABC),$$

$$\text{而 } P(A \cup B)P(C) = [P(A) + P(B) - P(AB)]P(C)$$

$$= P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(AB)P(C),$$

所以 AB 与 C 独立的充要条件为 $P((A \cup B) \cap C) = P(A \cup B)P(C)$, 即 $A \cup B$ 与 C 相互独立.

【评注】 我们不难证明:

设 A, B, C 三个随机事件中, A 与 C 相互独立, B 与 C 相互独立, 则 $A \cup B$ 与 C 独立的充分必要条件是 AB 与 C 独立, 或者 $A - B$ 与 C 独立.

$$\begin{aligned} 2. (1) P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) \\ &\quad - P(AC) + P(ABC) \\ &= 3x - 3x^2 + 0, \end{aligned}$$

使 $P(A \cup B \cup C) = 3x(1-x)$ 取最大值的 $x = \frac{1}{2}$.

(2) A, B, C 三个事件中至少可出现一个的概率为

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) \\ &\quad - P(AC) + P(ABC) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 0 - 0 - \frac{1}{8} + 0 = \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

注意 $P(ABC) \leq P(AB) = 0$.

(3) $P(B | A) = 1 - P(\bar{B} | \bar{A}) = P(B | \bar{A})$, 即 A, B 独立, 故

$$P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{9}.$$

(4) 将产品按测试先后次序排成一行, 10 个产品中 2 个次品的排位共有 C_{10}^2 种可能, 现要不超过 4 次测试就把 2 个次品挑出就相当于在前 4 个位中选两个放次品, 共有 C_4^2 种可能, 故所求概率为 $\frac{C_4^2}{C_{10}^2}$.

3. (1)(I) 5 双鞋共 10 只, 任取 4 只, C_{10}^4 , 都是单只不成双, 涉及 4 双, C_5^4 , 每双中左、右脚取 1, 有 2^4 种;

(II) 恰有一双, 先从 5 双中取一双, 然后从剩下 4 双中挑 2 双, 每双中取 1;

(III) 恰有 2 双, C_5^2 .

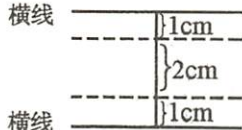
(2) $P(A \cup B) = 0$, 则 $P(A) = P(B) = 0$, 零概率事件 A, B 与所有事件独立.



(3) Y 为偶数的概率

$$P\{Y=2\} + P\{Y=4\} = \frac{13}{48} + \frac{1}{16} = \frac{1}{3}.$$

(4) 横线



硬币中心距横线小于 1cm 时, 硬币与横线相交.

(5) 同例 1.15 类似.

第二章 随机变量及其分布

【答案】

1. (1) A. (2) C. (3) B. (4) C. (5) A. (6) B.

2. (1) e. (2) $\frac{4}{27}$. (3) $1 - \frac{2}{e}$. (4) $\frac{4}{5}$.

3. (1) (I) $\lambda = \ln 2$;

$$(II) P\{X > 2 \mid X > 1\} = \frac{1}{2}.$$

$$(2) (I) f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 1 < y < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$(II) P\left\{-1 < Y < \frac{3}{2}\right\} = \frac{1}{2}.$$

$$(3) f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

$$(4) (I) p = \frac{19}{36};$$

$$(II) q = \frac{1}{18}.$$

$$(5) (I) F_1(y) = \begin{cases} 1 - e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

$$(II) f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} e^{-\frac{y-2}{3}}, & y > 2, \\ 0, & y \leq 2. \end{cases}$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)



【提示】

1. (1) $F(+\infty) = aF_1(+\infty) - bF_2(+\infty)$, 即 $1 = a - b$. 当 $a = \frac{3}{5}, b = -\frac{2}{5}$ 时, $F(x)$ 满足分布函数的充要条件.

$$\begin{aligned}(2) P\{1 < X < 2\} &= P\{1^3 < X^3 < 8\} = P\{1 < X^3 \leq 8\} \\ &= P\{0 < \frac{X^3 - 1}{7} \leq 1\} \\ &= \Phi(1) - \Phi(0) = \Phi(1) - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(3) A ——打中靶, B_1 ——选甲打, B_2 ——选乙打,
 $p = P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)$

$$= \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2 = \frac{p_1 + p_2}{2}.$$

(4) $y \leq 0$ 时, $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\} = 0$.

$$\begin{aligned}0 < y < 1 \text{ 时, } F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\} \\ &= P\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\} \\ &= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x) dx = \int_0^{\sqrt{y}} 2x dx = y.\end{aligned}$$

$y \geq 1$ 时, $F_Y(y) = 1$.

$$\text{因此 } F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ y, & 0 < y < 1, \\ 1, & y \geq 1. \end{cases}$$

(5) $Y = \min\{X, 2\}, X \sim U(0, 1)$, 所以 $Y = \min\{X, 2\} = X$.

(6) $Y = \max\{X, |X|\} = |X|$.

$y \leq 0$ 时, $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{|X| \leq y\} = 0$,

$$\begin{aligned}0 < y < 1 \text{ 时, } F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{|X| \leq y\} \\ &= P\{-y \leq X \leq y\} = \int_{-y}^y f(x) dx \\ &= \int_{-y}^y \frac{1}{2} dx = y.\end{aligned}$$

$y \geq 1$ 时, $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = 1$.

$$2. (1) 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c}{k!} e^{-2} = ce^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = ce^{-2} e = ce^{-1}, \text{ 得 } c = e.$$

(2) $\frac{5}{9} = P\{X \leq 2\} = P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = \theta + \theta(1 - \theta)$, 得

$$\theta^2 - 2\theta + \frac{5}{9} = 0,$$



解得 $\theta = \frac{1}{3}$ 或 $\theta = \frac{5}{3}$, 又 $0 < \theta < 1$, 故 $\theta = \frac{1}{3}$.

$$P\{X=3\} = \theta(1-\theta)^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}.$$

(3) 已知 $P\{X=0\} = \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} = \frac{1}{e}$, 解得 $\lambda = 1$.

$$\begin{aligned} P\{X \geq 2\} &= 1 - P\{X < 2\} = 1 - P\{X=0\} - P\{X=1\} \\ &= 1 - \frac{1}{e} - \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} = 1 - \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

(4) 有实根, $\xi^2 - 4 \geq 0$,

$$P\{\xi^2 - 4 \geq 0\} = P\{\xi \geq 2\} + P\{\xi \leq -2\} = \frac{6-2}{6-1} + 0 = \frac{4}{5}.$$

3. (1) (I) $P\{X \leq 1\} = 1 - P\{X > 1\} = 1 - e^{-\lambda \cdot 1} = \frac{1}{2}$, 即 $e^{-\lambda} = \frac{1}{2}$, 解得 $\lambda = \ln 2$.

$$\begin{aligned} \text{(II)} P\{X > 2 \mid X > 1\} &= P\{X > 2-1\} \\ &= P\{X > 1\} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(2) (I) $y \leq 1$ 时, $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X^2 + 1 \leq y\} = 0$.

$$\begin{aligned} 1 < y < 2 \text{ 时, } F_Y(y) &= P\{X^2 \leq y-1\} \\ &= P\{-\sqrt{y-1} \leq X \leq \sqrt{y-1}\} \\ &= \int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} |x| dx = 2 \int_0^{\sqrt{y-1}} x dx = y-1. \end{aligned}$$

$y \geq 2$ 时, $F_Y(y) = 1$.

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 1 < y < 2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} Y \sim U(1, 2).$$

$$\text{(II)} P\{-1 < Y < \frac{3}{2}\} = P\{1 < Y < \frac{3}{2}\} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

(3) $y \leq 0$ 时, $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\} = 0$.

$$\begin{aligned} y > 0 \text{ 时, } F_Y(y) &= P\{X^2 \leq y\} = P\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\} \\ &= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2} e^{-|x|} dx \\ &= \int_0^{\sqrt{y}} e^{-x} dx = 1 - e^{-\sqrt{y}}. \end{aligned}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

(4) (I) 有实根, $B^2 - 4C \geq 0$, $p = P\{B^2 - 4C \geq 0\}$.

$B = 6$ 时, $C = 1, 2, \dots, 6$;



$B = 5$ 时, $C = 1, 2, \dots, 6$;

$B = 4$ 时, $C = 1, 2, \dots, 4$;

$B = 3$ 时, $C = 1, 2$;

$B = 2$ 时, $C = 1$.

$$p = \frac{19}{36}.$$

(II) 有重根, $B^2 - 4C = 0, q = P\{B^2 - 4C = 0\}$.

$B = 2$ 时, $C = 1$;

$B = 4$ 时, $C = 4$.

$$q = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

(5) (I) $F_1(y) = P\{Y_1 \leq y\} = P\{|X| \leq y\}$
 $= P\{X \leq y\} = F(x), F(x)$ 为 X 的分布函数.

$$\text{所以 } F_1(y) = \begin{cases} 1 - e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

(II) $F_2(y) = P\{Y_2 \leq y\} = P\{3X + 2 \leq y\}$

$$= P\left\{X \leq \frac{y-2}{3}\right\} = F\left(\frac{y-2}{3}\right),$$

$$f_2(y) = F_2'(y) = F'\left(\frac{y-2}{3}\right) = \frac{1}{3}f\left(\frac{y-2}{3}\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-\frac{y-2}{3}}, & \frac{y-2}{3} > 0, \\ 0, & \frac{y-2}{3} \leq 0, \end{cases}$$

$$\text{即 } f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-\frac{y-2}{3}}, & y > 2, \\ 0, & y \leq 2. \end{cases}$$

第三章 多维随机变量及其分布

【答案】

1. (1)C. (2)D. (3)D. (4)D. (5)C. (6)B.

2. (1) $\frac{3}{4}$. (2) $\frac{1}{4}$. (3) $N(0, 1; \frac{1}{4}, 1; 0)$. (4) $\frac{1}{4}$.

3. (1) (I) $f_X(x) = \varphi(x), f_Y(y) = \varphi(y)$;

(II) (X, Y) 非正态随机变量, X, Y 不独立.



$$(2)(I) f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad X, Y \text{ 相互独立;}$$

$$(II) F\left(\frac{1}{2}, 2\right) = \frac{1}{4}.$$

$$(3)(I) A = 1; \quad (II) f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{(1+y)^2}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0; \end{cases}$$

$$(III) x > 0 \text{ 时, } f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} xe^{-xy}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

$$(4) f_Z(z) = \frac{1}{2} [\Phi(z+1) - \Phi(z-1)].$$

$X_2 \backslash X_1$	0	1
-1	$\frac{1}{4}$	0
0	0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	0

(5)(I) ; (II) X_1 和 X_2 不相互独立;

$$(III) P\{X_1 = 0 | X_1 + X_2 = 1\} = \frac{2}{3}.$$

【提示】

$$1. (1) P\{X > 1, Y > 1\}$$

$$= P\{X > 1\} - P\{X > 1, Y \leq 1\}$$

$$= 1 - P\{X \leq 1\} - (P\{Y \leq 1\} - P\{X \leq 1, Y \leq 1\})$$

$$= P\{X \leq 1, Y \leq 1\} - P\{X \leq 1\} - P\{Y \leq 1\} + 1$$

$$= F(1, 1) - F_X(1) - F_Y(1) + 1.$$

$$(2) (X, Y) \text{ 的概率密度为 } f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$P\{X^2 + Y^2 \leq 1\} = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(x, y) dx dy = \frac{\pi}{4}.$$

$$(3) P\{1 < \min(X, Y) < 2\}$$

$$= P\{\min(X, Y) > 1\} - P\{\min(X, Y) \geq 2\}$$

$$= P\{X > 1, Y > 1\} - P\{X \geq 2, Y \geq 2\}$$

$$= P\{X > 1\}P\{Y > 1\} - P\{X \geq 2\}P\{Y \geq 2\}$$

$$= e^{-1} \cdot e^{-1} - e^{-2} \cdot e^{-2} = e^{-2} - e^{-4}.$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)



(4) $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 是两个分布函数, $F_1(x)F_2(x)$ 也满足分布函数的充要条件, 也是分布函数.

$[F_1(x)F_2(x)]' = f_1(x)F_2(x) + F_1(x)f_2(x)$ 就是概率密度.

$$(5) \begin{array}{c|cc} X & 0 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}, \begin{array}{c|cc} Y & 0 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}, \text{且 } X, Y \text{ 相互独立.}$$

$$\begin{aligned} P\{X=Y\} &= P\{X=0, Y=0\} + P\{X=1, Y=1\} \\ &= P\{X=0\}P\{Y=0\} + P\{X=1\}P\{Y=1\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} = P\{XY \leq z\} \\ &= P\{Y=0\}P\{XY \leq z | Y=0\} + \\ &\quad P\{Y=1\}P\{XY \leq z | Y=1\} \\ &= \frac{1}{2}P\{0 \leq z | Y=0\} + \frac{1}{2}P\{X \leq z | Y=1\} \\ &= \frac{1}{2}P\{0 \leq z\} + \frac{1}{2}P\{X \leq z\} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\Phi(z), & z < 0, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(z), & z \geq 0. \end{cases}$$

$F_Z(z)$ 的间断点为 $z=0$.

$$2. (1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x < 1, 0 < y < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$P\{X < Y\} = \iint_{x < y} f(x, y) dx dy = \frac{3}{4}.$$

$$\begin{aligned} (2) F(-1, 4) &= P\{X \leq -1, X^2 \leq 4\} \\ &= P\{X \leq -1, -2 \leq X \leq 2\} = P\{-2 \leq X \leq -1\} \\ &= \int_{-2}^{-1} f(x) dx = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(3) 令 $F(x, y) = \Phi(2x)\Phi(y-1)$, 则

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = \Phi(2x), F_Y(y) = F(+\infty, y) = \Phi(y-1),$$

从而 $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$, 即 X, Y 相互独立.

如果 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$



故 $\Phi(2x)$ 对应 $X \sim N(0, \frac{1}{4})$, $\Phi(y-1)$ 对应 $Y \sim N(1, 1)$. 又

因为 X 与 Y 相互独立, 故 $(X, Y) \sim N(0, 1; \frac{1}{4}, 1; 0)$.

$$(4) P\{X+Y \leq 1\}$$

$$\begin{aligned} &= \iint_{x+y \leq 1} f(x, y) dx dy \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{1-x} 6x dy = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

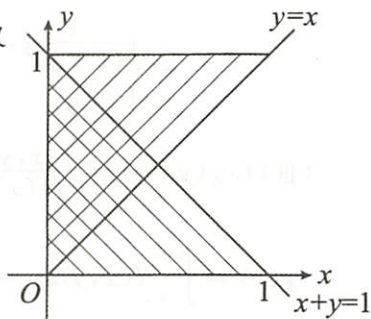


图 3-8

$$3. (1)(I) f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \sin x \sin y) \varphi(x) \varphi(y) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \varphi(y) dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \sin y \varphi(x) \varphi(y) dy$$

$$= \varphi(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) dy + \sin x \varphi(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \sin y \varphi(y) dy$$

$$= \varphi(x), (\text{注意第二个被积函数为奇函数})$$

同理 $f_Y(y) = \varphi(y)$.

(II) (X, Y) 不是正态随机变量.

$f(x, y) \neq f_X(x) f_Y(y) = \varphi(x) \varphi(y)$, X, Y 不相互独立.

$$(2)(I) f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} 2y, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$, X 与 Y 相互独立.

$$(II) F(\frac{1}{2}, 2) = F_X(\frac{1}{2}) F_Y(2) = \int_0^{\frac{1}{2}} f_X(x) dx \cdot \int_0^2 f_Y(y) dy$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 2x dx \cdot 1 = \frac{1}{4}.$$

$$(3)(I) 1 = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} A x e^{-x(1+y)} dx dy = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} A x e^{-x(1+y)} dy$$

$$= \int_0^{+\infty} dx \left(\int_0^{+\infty} A e^{-x(1+y)} d[x(1+y)] \right)$$

$$= \int_0^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} A e^{-t} dt = A \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = A.$$

$$(II) f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^{+\infty} x e^{-x(1+y)} dx, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$



$$= \begin{cases} \frac{1}{(1+y)^2}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

$$(III) f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, f_X(x) > 0.$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy = \begin{cases} \int_0^{+\infty} x e^{-x(1+y)} dy, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{e^{-x}} = \begin{cases} x e^{-xy}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

(4) X 和 Y 相互独立. 记 $\varphi(x), \Phi(x)$ 分别为标准正态分布的密度和分布函数, 则

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

$$= \begin{cases} \varphi(x) \cdot \frac{1}{2}, & -\infty < x < +\infty, -1 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

根据卷积公式 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) dy = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \varphi(z-y) dy$

$$= \int_{z+1}^{z-1} \frac{1}{2} \varphi(t) d(-t)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{z+1} \varphi(t) dt - \int_{-\infty}^{z-1} \varphi(t) dt \right]$$

$$= \frac{1}{2} [\Phi(z+1) - \Phi(z-1)].$$

(5) (I) $P\{X_1 X_2 = 0\} = 1$, 即 $P\{X_1 X_2 \neq 0\} = 0$. 所以

$X_1 \backslash X_2$	0	1	
-1		0	$\frac{1}{4}$
0			$\frac{1}{2}$
1		0	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

, 进一步就有

$X_1 \backslash X_2$	0	1	
-1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

(II) X_1 和 X_2 不相互独立.

因为 $P\{X_1 = 0\} \cdot P\{X_2 = 0\} = \frac{1}{4}$, 而 $P\{X_1 = 0, X_2 = 0\} = 0$.

(III) $P\{X_1 = 0 | X_1 + X_2 = 1\}$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{P\{X_1 = 0, X_1 + X_2 = 1\}}{P\{X_1 + X_2 = 1\}} \\
 &= \frac{P\{X_1 = 0, X_2 = 1\}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

第四章 随机变量的数字特征

【答案】

1. (1)C. (2)A. (3)A. (4)D. (5)D. (6)B. (7)D.

2. (1)0.7. (2)2. (3)25. (4)1.

3. (1)21.

(2) (I) $Y = \min(X, 2)$;

$$(\text{II}) F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 1 - e^{-\frac{y}{2}}, & 0 \leq y < 2, \\ 1, & 2 \leq y. \end{cases}$$

$$(\text{III}) EY = 5 - 5e^{-\frac{2}{5}}.$$

$X \backslash Y$		-1	1	
		$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
(3)(I)	-1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
		$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	

$$(\text{II}) D(X+Y) = 2.$$

$X_1 \backslash X_2$		0	1	
		0.1	0.1	0.2
(5)(I)	0	0.1	0.1	0.2
	1	0.8	0	0.8
		0.9	0.1	

$$(\text{II}) \rho = -\frac{2}{3}.$$



【提示】

$$\begin{aligned}
 1. (1) \int_{-\infty}^{+\infty} xf(2x)dx &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} 2xf(2x)d(2x) \\
 &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \frac{1}{4}EX = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) E\left(\frac{X}{1+X}\right) &= E\left(1 - \frac{1}{1+X}\right) = 1 - E\left(\frac{1}{1+X}\right) \\
 &= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k} \cdot \frac{1^k}{k!} e^{-1} \\
 &= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} e^{-1} = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} e^{-1} \\
 &= 1 - \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} - \frac{1}{0!}\right) e^{-1} = e^{-1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) EY &= E[\max(|X|, 1)] = \int_{|x|>1} |x| f(x)dx + \int_{|x|\leq 1} 1 \cdot f(x)dx \\
 &= 2 \int_1^2 x \cdot \frac{1}{4} dx + \int_{-1}^1 1 \cdot \frac{1}{4} dx \\
 &= \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}.
 \end{aligned}$$

(4) $\rho_{XY} = 1$, 则 $P\{Y = aX + b\} = 1$, 所以 $EY = E(aX + b) = aEX + b$. 现 $EX = 0, EY = 1$, 因此 $b = 1$.

$$\begin{aligned}
 \text{又因为 } 1 &= \rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = \frac{\text{Cov}(X, aX + b)}{1 \cdot 2} \\
 &= \frac{a \text{Cov}(X, X)}{2} = \frac{aD(X)}{2} = \frac{a}{2},
 \end{aligned}$$

得 $a = 2$, 即 $P\{Y = 2X + 1\} = 1$.

(5) 设木棒截成两段为 X 和 $1 - X$, 则

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X, 1 - X)}{\sqrt{DX} \sqrt{D(1 - X)}} = \frac{-\text{Cov}(X, X)}{\sqrt{DX} \sqrt{DX}} = -1.$$

(6)

$\begin{array}{c} Y \\ \backslash X \end{array}$	0	1	
0	a	b	$\frac{1}{4}$
1	c	d	$\frac{3}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	

$$\begin{aligned}
 \rho_{XY} &= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = \frac{E(XY) - EX \cdot EY}{\sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}}} \\
 &= \frac{E(XY) - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{3}{16}} = \frac{1}{3},
 \end{aligned}$$



解得 $E(XY) = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$. 又 $E(XY) = d$, 故 $d = \frac{5}{8}$.

$$\begin{aligned} P\{X+Y \leq 1\} &= 1 - P\{X+Y > 1\} = 1 - P\{X+Y = 2\} \\ &= 1 - d = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

(7) X, Y 均服从 $B(2, \frac{1}{3})$ 分布.

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = \frac{E(XY) - EX \cdot EY}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}}.$$

试验只重复 2 次, XY 的分布为

XY	0	1
P	$\frac{7}{9}$	$\frac{2}{9}$

$$EX = EY = \frac{2}{3}, DX = DY = \frac{4}{9}, E(XY) = \frac{2}{9}, \text{得 } \rho_{XY} = -\frac{1}{2}.$$

【评注】 本题也可用对称性求解:

设 Z 表示 2 次试验中结果 A_3 发生的次数, 显然 $X+Y+Z=2$, X, Y, Z 均服从 $B(2, \frac{1}{3})$, 对称地 $\text{Cov}(X, Z) = \text{Cov}(X, Y)$.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \text{Cov}(X, 2 - X - Z) \\ &= \text{Cov}(X, 2) - \text{Cov}(X, X) - \text{Cov}(X, Z) \\ &= 0 - DX - \text{Cov}(X, Y), \end{aligned}$$

即

$$\text{Cov}(X, Y) = -\frac{1}{2}DX,$$

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX} \sqrt{DY}} = \frac{-\frac{1}{2}DX}{\sqrt{DX} \sqrt{DX}} = -\frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} 2. (1) E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xF'(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x[0.3\varphi(x) + \frac{0.7}{2}\varphi(\frac{x-1}{2})]dx \\ &= 0 + 0.7 = 0.7. \end{aligned}$$

$$(2) 1 = \sum_{k=0}^{\infty} P\{X=k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c}{k!} = c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = ce, \text{得 } c = e^{-1},$$

$$X \sim P(1), EX^2 = DX + (EX)^2 = 2.$$

$$(3) X \sim B(100, p), DX = 100p(1-p), p(1-p) \text{ 的最大值为 } \frac{1}{4}, DX \text{ 的最大值为 } 25.$$

$$(4) \sqrt{D(X+Y)} = \sqrt{DX} + \sqrt{DY}, \text{即}$$



$$D(X+Y) = DX + 2\sqrt{DX}\sqrt{DY} + DY.$$

又因 $D(X+Y) = DX + DY + 2\text{Cov}(X,Y)$, 所以

$$2\text{Cov}(X,Y) = 2\sqrt{DX}\sqrt{DY},$$

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = 1.$$

3. (1) 设进货量为 a , 需求量为 X , 利润函数

$$g(X,a) = \begin{cases} 300X + 200a, & a < X \leq 30, \\ 600X - 100a, & 10 \leq X \leq a. \end{cases}$$

又

$$E[g(X,a)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(X,a)f_X(x)dx \geq 9280,$$

其中

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{20}, & 10 \leq x \leq 30, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

解得 $20\frac{2}{3} \leq a \leq 26$, 故最小进货量是 21 单位.

(2)(I) $Y = \min(X, 2)$.

(II) $X \sim E(\frac{1}{5})$.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{5}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

$y < 2$ 时, $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X \leq y\} = F_X(y)$.

$y \geq 2$ 时, $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{2 \leq y\} = 1$.

$$\text{所以 } F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 1 - e^{-\frac{y}{5}}, & 0 \leq y < 2, \\ 1, & y \geq 2. \end{cases}$$

$$(3)(I) \begin{array}{c|cc} X & -1 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}, \begin{array}{c|cc} Y & -1 & 1 \\ \hline P & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array}, \text{故}$$

$\begin{array}{c} Y \\ \backslash X \end{array}$	-1	1	
-1			$\frac{1}{4}$
1			$\frac{3}{4}$
	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	



$$\text{又 } P\{X=-1, Y=-1\} = P\{U \leq -1, U \leq 1\} = P\{U \leq -1\} = \frac{1}{4},$$

故

$X \backslash Y$	-1	1	
-1	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$
1			$\frac{3}{4}$
	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	

, 所以

$X \backslash Y$	-1	1	
-1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	

(II) 记 $Z = X + Y$, 则

Z	-2	0	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$D(X+Y) = DZ = E(Z - EZ)^2,$$

$$EZ = 0, DZ = E(Z - 0)^2 = E(Z^2) = 4 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} = 2.$$

(4) 证明: X 与 Y 不相关即 $\rho_{XY} = 0$, 等价于 $\text{Cov}(X, Y) = 0$,

等价于 $E(XY) - EXEY = 0$.

$$EX = 1 \cdot P(A) + (-1)P(\bar{A}) = P(A) - [1 - P(A)]$$

$$= 2P(A) - 1,$$

同理 $EY = 2P(B) - 1$.

$$XY = \begin{cases} 1, & AB \cup \bar{A}\bar{B}, \\ -1, & \bar{A}B \cup A\bar{B}. \end{cases}$$

$$E(XY) = 1 \cdot P(AB \cup \bar{A}\bar{B}) + (-1)P(\bar{A}B \cup A\bar{B})$$

$$= P(AB) + P(\bar{A}\bar{B}) - P(\bar{A}B) - P(A\bar{B})$$

$$= P(AB) + [1 - P(A \cup B)] - P(A - B) - P(B - A)$$

$$= P(AB) + 1 - P(A) - P(B) + P(AB) - P(A) + P(AB) -$$

$$P(B) + P(AB)$$

$$= 4P(AB) - 2P(A) - 2P(B) + 1.$$

因此

$$E(XY) - EXEY = 4P(AB) - 2P(A) - 2P(B) + 1 - [2P(A) - 1][2P(B) - 1]$$

$$= 4P(AB) - 4P(A)P(B),$$

所以 X 与 Y 不相关等价于 $P(AB) = P(A)P(B)$, 即 A, B 相互独立.

(5)(I) $\frac{X_1}{P} \begin{array}{c|cc} 0 & 1 \\ \hline 0.2 & 0.8 \end{array}, \frac{X_2}{P} \begin{array}{c|cc} 0 & 1 \\ \hline 0.9 & 0.1 \end{array}, \text{故}$



$X_1 \backslash X_2$	0	1	
0			0.2
1			0.8
	0.9	0.1	

又 $P\{X_1 = 0, X_2 = 0\} = 0.1$. 因为没抽到 1 等品, 也没抽到 2 等品, 抽到只能是 3 等品.
故

$X_1 \backslash X_2$	0	1	
0	0.1		0.2
1			0.8
	0.9	0.1	

$X_1 \backslash X_2$	0	1	
0	0.1	0.1	0.2
1	0.8	0	0.8
	0.9	0.1	

进一步有

$$(II) \rho = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{DX_1} \sqrt{DX_2}}, \text{ 因为 } X_1, X_2 \text{ 都服从 } 0-1 \text{ 分布, 所以}$$

$$DX_1 = 0.2 \cdot 0.8 = 0.16, DX_2 = 0.9 \cdot 0.1 = 0.09.$$

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - EX_1 EX_2,$$

$$EX_1 = 0.8, EX_2 = 0.1, E(X_1 X_2) = 0,$$

$$\rho = \frac{0 - 0.8 \cdot 0.1}{\sqrt{0.16} \sqrt{0.09}} = -\frac{2}{3}.$$

第五章 大数定律和中心极限定理

【答案】

1. (1)C. (2)B. (3)C. (4)B.



2. (1) $\frac{1}{2}$, (2) $\frac{1}{9}$.

3. (1)(I) $P\{|X - \mu| \geq 3\sigma\} = 0.0026$;

(II) $P\{|X - \mu| \geq 3\sigma\} \leq \frac{1}{9}$.

(2)(I) $P\{X > 85\} = 0.9522$; (II) $n = 25$.

(4)(I) $P\left\{\sum_{i=1}^{100} X_i > 5100\right\} = 0.0228$;

(II) $P\left\{\frac{X}{500} \leq 0.04\right\} = 0.9951$.

【提示】

1. (1) 列维 — 林德伯格中心极限定理要求独立同分布, 期望与方差存在. 同一指数分布, 期望与方差存在.

(2) 设 X_i 为第 i 次骰子掷出的点数, $i = 1, 2, \dots, n$, 则 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, 且 $X_1, \dots, X_n$ 独立同分布, 期望与方差存在. 根据列维 — 林德伯格中心极限定理 $\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ 趋于标准正态分布, 其中 $\mu = E(X_i), \sigma^2 = D(X_i)$.

X_i	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

所以

$$EX_i = \frac{1}{6}(1 + 2 + \dots + 6) = \frac{7}{2}.$$

$$\begin{aligned} D(X_i) &= E(X_i^2) - (EX_i)^2 = \frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + \dots + 6^2) - \frac{49}{4} \\ &= \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}. \end{aligned}$$

$$\text{于是 } \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{S_n - n \cdot \frac{7}{2}}{\sqrt{\frac{35}{12}n}} = \frac{6S_n - 21n}{\sqrt{105n}}, \text{ 故 } a = 21n, b = \sqrt{105n}.$$

(3) 辛钦大数定律要求 $X_1, \dots, X_n$ 独立同分布, 期望存在. 同一泊松分布就满足辛钦大数定律条件.

(4) 伯努利大数定律要求满足条件 $X_n \sim B(n, p)$, 如果在 n 次独立重复伯努利试验中, 设 $Y_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 次试验成功,} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 次试验失败,} \end{cases}$ 则 $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$, 且 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 独立同分布, 数学期望存在, 也



就是满足辛钦大数定律的条件. $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 也是两两不相关, 且 $D(Y_i) = p(1-p) \leq C$, 也

满足切比雪夫大数定律的条件, 因此 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i = \frac{X_n}{n} \xrightarrow{p} p$.

2. (1) $X_1^2, X_2^2, \dots, X_n^2, \dots$ 相互独立同分布, 且 $E(X_i^2)$ 存在, 根据辛钦大数定律 $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 依概率收敛于 $E(X^2)$, 其中 $X \sim E(2)$. $E(X^2) = DX + (EX)^2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2}$.

(2) 记 $Z = X + Y$, 则 $EZ = EX + EY = -2 + 2 = 0$,

$$DZ = D(X + Y) = DX + DY + 2\text{Cov}(X, Y)$$

$$= 1 + 9 + 2 \sqrt{DX} \sqrt{DY} \rho_{XY}$$

$$= 10 + 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot (-1) = 4.$$

$$P\{|X + Y| \geq 6\} = P\{|Z - EZ| \geq 6\} \leq \frac{4}{6^2} = \frac{1}{9}.$$

$$\begin{aligned} 3. (1) (I) P\{|X - \mu| \geq 3\sigma\} &= P\left\{\left|\frac{X - \mu}{\sigma}\right| \geq 3\right\} \\ &= 2P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} \leq -3\right\} \\ &= 2\Phi(-3) \\ &= 2[1 - \Phi(3)] = 0.0026. \end{aligned}$$

$$(II) P\{|X - \mu| \geq 3\sigma\} \leq \frac{DX}{(3\sigma)^2} = \frac{1}{9}.$$

(2) (I) 设 $X_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 个部件完好,} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 个部件损坏,} \end{cases} i = 1, 2, \dots, 100$, 完好部件个数 $\sum_{i=1}^{100} X_i = X$, 则系

统正常工作的概率为

$$\begin{aligned} P\left\{\sum_{i=1}^{100} X_i > 85\right\} &= P\{X > 85\} \\ &= P\left\{\frac{X - 100 \times 0.9}{\sqrt{100 \times 0.9 \times 0.1}} > \frac{85 - 100 \times 0.9}{\sqrt{100 \times 0.9 \times 0.1}}\right\} \\ &= 1 - P\left\{\frac{X - 90}{3} \leq \frac{-5}{3}\right\} \approx 1 - \Phi\left(-\frac{5}{3}\right) \\ &= 1 - \left[1 - \Phi\left(\frac{5}{3}\right)\right] = \Phi\left(\frac{5}{3}\right) \\ &= \Phi(1.667) = 0.9522. \end{aligned}$$

这里用了棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理, 也可用列维—林德伯格中心极限定理.

(II) 设 $Y = \sum_{i=1}^n X_i$, $P\{Y > 0.80n\} \geq 0.95$, $Y \sim N(0.9n, 0.09n)$

$$P\{Y > 0.80n\} = P\left\{\frac{Y - 0.9n}{\sqrt{0.09n}} > \frac{0.80n - 0.9n}{\sqrt{0.09n}}\right\}$$



$$\begin{aligned}
 &= 1 - P\left\{\frac{Y - 0.9n}{\sqrt{0.09n}} \leq -\frac{\sqrt{n}}{3}\right\} \\
 &\approx 1 - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{3}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) \\
 &\geq 0.95 = \Phi(1.645),
 \end{aligned}$$

从而 $\frac{\sqrt{n}}{3} \geq 1.645, n \geq 24.35, n = 25$.

(3) 切比雪夫不等式 $P\{|X - EX| \geq \epsilon\} \leq \frac{DX}{\epsilon^2}$.

切比雪夫大数定律 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 两两不相关, 其期望 $E(X_i)$ 与方差 $D(X_i)$ 均存在, 且 $D(X_i) \leq C, i = 1, 2, \dots$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)\right| < \epsilon\right\} = 1.$$

$$\begin{aligned}
 \text{证明: } \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i\right| < \epsilon\right\} \\
 = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i\right| \geq \epsilon\right\}.
 \end{aligned}$$

记 $X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 则

$$\begin{aligned}
 P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i\right| \geq \epsilon\right\} &= P\{|X - EX| \geq \epsilon\} \leq \frac{DX}{\epsilon^2} \\
 &= \frac{\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i}{\epsilon^2} \leq \frac{C}{n\epsilon^2},
 \end{aligned}$$

$$\text{从而 } \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i\right| \geq \epsilon\right\} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C}{n\epsilon^2} = 0.$$

$$\text{所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i\right| < \epsilon\right\} = 1.$$

(4)(I) 设 X_i 为第 i 个螺丝钉的重量, $i = 1, 2, \dots, 100$, 则 $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ 相互独立同分布, 方差 25. 根据列维-林德伯格中心极限定理

$$\begin{aligned}
 P\left\{\sum_{i=1}^{100} X_i > 5100\right\} &= 1 - P\left\{\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 5100\right\} \\
 &= 1 - P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 5000}{50} \leq \frac{5100 - 5000}{50}\right\} \\
 &\approx 1 - \Phi(2) = 0.0228.
 \end{aligned}$$

(II) 设 $Y_j = \begin{cases} 1, & \text{第 } j \text{ 袋螺丝钉的重量超过 } 5.1 \text{ 千克,} \\ 0, & \text{第 } j \text{ 袋螺丝钉的重量不超过 } 5.1 \text{ 千克,} \end{cases}$



$$j = 1, 2, \dots, 500.$$

记 $Y = \sum_{j=1}^{500} Y_j$, $p = 0.0228$, 则 $Y_j \sim B(1, p)$, $Y \sim B(500, p)$.

根据棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理,

$$\begin{aligned} P\{Y \leq 0.04 \times 500\} &= P\{Y \leq 20\} \\ &= P\left\{\frac{Y - 500p}{\sqrt{500p(1-p)}} \leq \frac{20 - 500p}{\sqrt{500p(1-p)}}\right\} \\ &\approx \Phi\left(\frac{20 - 11.4}{\sqrt{11.14008}}\right) = \Phi(2.577) = 0.9951. \end{aligned}$$

第六章 数理统计的基本概念

【答案】

1. (1)C. (2)D. (3)B. (4)C. (5)C. (6)D.

2. (1) $\frac{5n}{2}\theta^2$. (2) σ^2 . (3)2. (4)1.

3. (1)(I) $ET = \sigma$; (II) $DT = \frac{\sigma^2}{n}$. (2) $\sigma = \frac{6}{\sqrt{\ln 3}}$.

$$(3) P\left\{\bar{X} = \frac{k}{n}\right\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

$$(4) f_{(1)}(x) = \begin{cases} n\lambda e^{-n\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad \text{即 } X_{(1)} \sim E(n\lambda).$$

$$(5) (I) f_{(3)}(x) = \begin{cases} 6x^5, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$(II) P\{\max(X_1, X_2) < X_3\} = \frac{1}{3}.$$

【提示】

1. (1) $X \sim t(n)$, $t(n)$ 分布的典型模式为 $X = \frac{X_1}{\sqrt{Y_1/n}}$, 其中 $X_1 \sim N(0, 1)$, $Y_1 \sim \chi^2(n)$,

且 X 与 Y 相互独立, 现 $Y = \frac{1}{X^2} = \frac{Y_1/n}{X_1^2} = \frac{Y_1/n}{X_1^2/1}$, 其中 $Y_1 \sim \chi^2(n)$, $X_1^2 \sim \chi^2(1)$, Y_1 与 X_1^2 相互独立, 故 $Y \sim F(n, 1)$.

$$(2) ET_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n EX_i = \lambda.$$

$$ET_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} EX_i + \frac{1}{n} EX_n = \lambda + \frac{\lambda}{n}, ET_1 < ET_2.$$



$$DT_1 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i = \frac{\lambda}{n}.$$

$$DT_2 = \frac{1}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n-1} DX_i + \frac{1}{n^2} DX_n = \frac{1}{n-1} \lambda + \frac{\lambda}{n^2}, DT_1 < DT_2.$$

$$(3) \textcircled{1} X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2), \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0, 1);$$

$$\textcircled{2} \frac{X_3}{\sigma} \sim N(0, 1), \frac{X_4}{\sigma} \sim N(0, 1), \left(\frac{X_3^2}{\sigma^2} + \frac{X_4^2}{\sigma^2} \right) \sim \chi^2(2);$$

$$\textcircled{3} \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}, \frac{X_3^2}{\sigma^2} + \frac{X_4^2}{\sigma^2} \text{ 相互独立, 所以}$$

$$\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{X_3^2 + X_4^2}} = \frac{(X_1 - X_2)/\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\left(\frac{X_3^2}{\sigma^2} + \frac{X_4^2}{\sigma^2}\right)/2}} \sim t(2).$$

(4) 如果 X, Y 独立, 则(A)(B)(C)(D) 都对, 现 X 与 Y 不一定独立, 只能选(C).

$$(5) \textcircled{1} X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2), \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0, 1);$$

$$\textcircled{2} \frac{X_3}{\sigma} \sim N(0, 1), \left(\frac{X_3}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(1);$$

$$\textcircled{3} \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma} \text{ 与 } \left(\frac{X_3}{\sigma} \right)^2 \text{ 相互独立,}$$

$$S = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2} |X_3|} = \frac{(X_1 - X_2)/\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\left(\frac{X_3}{\sigma}\right)^2/1}} \sim t(1).$$

(6) 由 t 分布的性质 $t_{1-\alpha}(n) = -t_{\alpha}(n)$, 得 $t_{\alpha}(n) + t_{1-\alpha}(n) = 0$.

$$\begin{aligned} 2. (1) E\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right) &= \sum_{i=1}^n E(X_i^2) = nE(X^2) = n \int_{\theta}^{2\theta} x^2 \frac{2x}{3\theta^2} dx \\ &= \frac{2n}{3\theta^2} \int_{\theta}^{2\theta} x^3 dx = \frac{5}{2} n\theta^2. \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 令 } S_X^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2 \text{ 和 } S_Y^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \bar{Y})^2,$$

则 $E(S_X^2) = \sigma^2, E(S_Y^2) = \sigma^2$.

$$\begin{aligned} &E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \bar{Y})^2}{n_1 + n_2 - 2}\right] \\ &= E\left[\frac{(n_1 - 1)S_X^2 + (n_2 - 1)S_Y^2}{n_1 + n_2 - 2}\right] \\ &= \frac{(n_1 - 1)\sigma^2 + (n_2 - 1)\sigma^2}{n_1 + n_2 - 2} = \sigma^2. \end{aligned}$$



$$(3) E(S^2) = DX = E(X^2) - (EX)^2.$$

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = 0.$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = 2.$$

$$\text{所以 } E(S^2) = 2.$$

$$(4) T = a \frac{X_1 + X_2 + X_3}{\sqrt{X_4^2 + X_5^2 + X_6^2}} \sim t(n),$$

$$\textcircled{1} (X_1 + X_2 + X_3) \sim N(0, 3\sigma^2), \frac{X_1 + X_2 + X_3}{\sqrt{3}\sigma} \sim N(0, 1);$$

$$\textcircled{2} \left[\left(\frac{X_4}{\sigma} \right)^2 + \left(\frac{X_5}{\sigma} \right)^2 + \left(\frac{X_6}{\sigma} \right)^2 \right] \sim \chi^2(3);$$

$$\textcircled{3} \frac{X_1 + X_2 + X_3}{\sqrt{3}\sigma} \text{ 与 } \left[\left(\frac{X_4}{\sigma} \right)^2 + \left(\frac{X_5}{\sigma} \right)^2 + \left(\frac{X_6}{\sigma} \right)^2 \right] \text{ 相互独立, 所以}$$

$$\frac{(X_1 + X_2 + X_3)/\sqrt{3}\sigma}{\sqrt{\left[\left(\frac{X_4}{\sigma} \right)^2 + \left(\frac{X_5}{\sigma} \right)^2 + \left(\frac{X_6}{\sigma} \right)^2 \right]}/3} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{\sqrt{X_4^2 + X_5^2 + X_6^2}} \sim t(3),$$

所以 $a = 1$.

$$\begin{aligned} 3. (I) ET &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E|X_i| = E|X| = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}} dx \\ &= \frac{1}{\sigma} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x}{\sigma}} dx = \sigma \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = \sigma. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (II) DT &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D|X_i| = \frac{1}{n} D|X| \\ &= \frac{1}{n} [E|X|^2 - (E|X|)^2] = \frac{1}{n} [EX^2 - \sigma^2], \end{aligned}$$

$$\text{而 } EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}} dx = \frac{1}{\sigma} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x}{\sigma}} dx = 2\sigma^2, \text{ 所以 } DT = \frac{\sigma^2}{n}.$$

$$(2) \bar{X} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 X_i, \bar{X} \sim N(0, \frac{\sigma^2}{9}), \frac{\bar{X}}{\frac{\sigma}{3}} \sim N(0, 1).$$

$$p(\sigma) = P\{1 < \bar{X} < 3\} = P\left\{ \frac{3}{\sigma} < \frac{3\bar{X}}{\sigma} \leq \frac{9}{\sigma} \right\} = \Phi\left(\frac{9}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{3}{\sigma}\right),$$

$$\begin{aligned} \text{由 } p'(\sigma) &= \varphi\left(\frac{9}{\sigma}\right)\left(-\frac{9}{\sigma^2}\right) - \varphi\left(\frac{3}{\sigma}\right)\left(-\frac{3}{\sigma^2}\right) \\ &= -\frac{9}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{81}{2\sigma^2}} + \frac{3}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{9}{2\sigma^2}} = 0, \end{aligned}$$

$$\text{解得 } \sigma = \frac{6}{\sqrt{\ln 3}}.$$



当 $\sigma < \frac{6}{\sqrt{\ln 3}}$ 时, $p'(\sigma) > 0$;

当 $\sigma > \frac{6}{\sqrt{\ln 3}}$ 时, $p'(\sigma) < 0$, 因此 $\sigma = \frac{6}{\sqrt{\ln 3}}$ 时, $P\{1 < \bar{X} < 3\}$ 为最大.

(3) $X \sim B(1, p)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 可看成独立重复 n 次伯努利试验, 所以 $\sum_{i=1}^n X_i \sim B(n,$

$p)$, 即 $P\{\sum_{i=1}^n X_i = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n.$

$\bar{X}$ 的分布 $P\{\bar{X} = \frac{k}{n}\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n.$

(4) 设 $X_{(1)}$ 的分布函数为 $F_{(1)}(x) = P\{X_{(1)} \leq x\}.$

当 $x < 0$ 时, $F_{(1)}(x) = 0$;

$$\begin{aligned} \text{当 } x > 0 \text{ 时, } F_{(1)}(x) &= P\{X_{(1)} \leq x\} = 1 - P\{X_{(1)} > x\} \\ &= 1 - P\{\min(X_1, X_2, \dots, X_n) > x\} \\ &= 1 - P\{X_1 > x, X_2 > x, \dots, X_n > x\} \\ &= 1 - P\{X_1 > x\}P\{X_2 > x\} \cdots P\{X_n > x\} \\ &= 1 - e^{-\lambda x} \cdot e^{-\lambda x} \cdots e^{-\lambda x} = 1 - e^{-n\lambda x}. \end{aligned}$$

$$f_{(1)}(x) = F'_{(1)}(x) = \begin{cases} n\lambda e^{-n\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \text{ 即 } X_{(1)} \sim E(n\lambda).$$

(5)(I) 设 $X_{(3)}$ 的分布函数为 $F_{(3)}(x)$, X 的分布函数为 $F(x)$.

$$\begin{aligned} F_{(3)}(x) &= P\{X_{(3)} \leq x\} = P\{\max(X_1, X_2, X_3) \leq x\} \\ &= P\{X_1 \leq x, X_2 \leq x, X_3 \leq x\} \\ &= P\{X_1 \leq x\}P\{X_2 \leq x\}P\{X_3 \leq x\} = F^3(x). \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad \text{则 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases}$$

$$F^3(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^6, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases} \quad f_{(3)}(x) = \begin{cases} 6x^5, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(II) $P\{\max(X_1, X_2) < X_3\}$

$$= P\{X_1 < X_3, X_2 < X_3\}$$

$$= \iiint_{\substack{x_1 < x_3 \\ x_2 < x_3}} f(x_1)f(x_2)f(x_3)dx_1dx_2dx_3$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{x_3} f(x_1)dx_1 \right] \left[\int_{-\infty}^{x_3} f(x_2)dx_2 \right] f(x_3)dx_3$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(x_3) f(x_3) dx_3 \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(x_3) dF(x_3) = \frac{1}{3} F^3(x_3) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

第七章 参数估计

【答案】

1. (1) A. (2) D. (3) A. (4) C. (5) D. (6) B.

2. (1) (39.51, 40.49). (2) $\sqrt{\frac{3}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}$. (3) p .

3. (1) (I) $\hat{\theta}_1 = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$; (II) $\hat{\theta}_2 = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i}$.

(2) (I) $\hat{\lambda}_1 = \frac{1}{\bar{X}}$; (II) $\hat{\lambda}_2 = \frac{1}{\bar{X}}$.

(3) (I) $\hat{\lambda} = \frac{2}{\bar{X}}$; (II) $\hat{\lambda} = \frac{2}{\bar{X}}$.

(4) (I) $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2$; (II) $E\hat{\sigma}^2 = \sigma^2, D\hat{\sigma}^2 = \frac{2\sigma^4}{n}$.

(5) (I) $f(z; \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}}, -\infty < z < +\infty$;

(II) $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n Z_i^2$; (III) $E\hat{\sigma}^2 = \sigma^2, \hat{\sigma}^2$ 是 σ^2 的无偏估计量.

(6) (I) $EX = \frac{\sqrt{\pi}\theta}{2}, EX^2 = \theta$; (II) $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$;

(III) 存在实数 $a = \theta$, 根据辛钦大数定律有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \epsilon\} = 0.$$

【提示】

1. (1) $E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(X_i - 1)\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (EX_i^2 - EX_i) = EX^2 - EX$
 $= DX + (EX)^2 - EX$
 $= \lambda + \lambda^2 - \lambda = \lambda^2.$

(2) $E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i^2) = EX^2 = DX + (EX)^2$



$$= \sigma^2 + 0 = \sigma^2.$$

(3) $X \sim N(\mu, 4)$, 其中 $\sigma^2 = 4$ 已知, μ 未知, 置信区间应选

$$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2} \right).$$

本题 $n = 16, \sigma = 2, \alpha = 0.1$, 故置信区间为

$$\left(10 - \frac{1}{2} u_{0.05}, 10 + \frac{1}{2} u_{0.05} \right).$$

(4) 方法一

$$\begin{aligned} E[C(X_1 + X_n - 2\bar{X})^2] &= CD(X_1 + X_n - 2\bar{X}) + C[E(X_1 + X_n - 2\bar{X})]^2 \\ &= C[DX_1 + DX_n + 4D\bar{X} - 2\text{Cov}(X_1 + X_n, 2\bar{X})] + C(EX_1 + EX_n - 2E\bar{X})^2 \\ &= C\left[\sigma^2 + \sigma^2 + 4\frac{\sigma^2}{n} - 8\text{Cov}(X_1, \bar{X})\right] + 0 \\ &= C\left[2\sigma^2 + 4\frac{\sigma^2}{n} - 8\text{Cov}\left(X_1, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) - 8\text{Cov}\left(X_1, \frac{X_1}{n}\right)\right] \\ &= C\left[2\sigma^2 - 4\frac{\sigma^2}{n}\right] = C \cdot 2\left[\frac{n-2}{n}\right]\sigma^2 = \sigma^2, \end{aligned}$$

$$\text{故 } C = \frac{n}{2(n-2)}.$$

方法二

$$\begin{aligned} E[C(X_1 + X_n - 2\bar{X})^2] &= CD(X_1 + X_n - 2\bar{X}) + C[E(X_1 + X_n - 2\bar{X})]^2 \\ &= CD\left[\left(X_1 - \frac{2}{n}X_1\right) + \left(X_n - \frac{2}{n}X_n\right) - \frac{2}{n}\sum_{i=2}^{n-1} X_i\right] \\ &= C\left[\left(1 - \frac{2}{n}\right)^2\sigma^2 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^2\sigma^2 + \frac{4}{n^2}(n-2)\sigma^2\right] \\ &= C \cdot \frac{n-2}{n}\left(\frac{n-2}{n} + \frac{n-2}{n} + \frac{4}{n}\right)\sigma^2 \\ &= C \cdot \frac{2(n-2)}{n}\sigma^2 = \sigma^2, \text{ 故 } C = \frac{n}{2(n-2)}. \end{aligned}$$

$$(5) f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2},$$

$$\ln L = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2.$$

$$\text{令 } \frac{d\ln L}{d(\sigma^2)} = -\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 0, \text{ 解得}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2.$$



σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$.

$$(6) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & -a \leq x \leq a, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$L = \begin{cases} \left(\frac{1}{2a}\right)^n, & -a \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq a, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求 L 最大, 就要求 a 尽量小, a 必定满足 $x_i \leq a, i = 1, 2, \dots, n$, 但 a 也得满足 $-a \leq x_i$, 即 $a \geq -x_i, i = 1, 2, \dots, n$.

总之, 要求 a 在满足 $a \geq |x_i|, i = 1, 2, \dots, n$ 的条件下, 尽量小, 所以

$$\hat{a} = \max_{1 \leq i \leq n} |X_i|.$$

2. (1) $X \sim N(\mu, 1)$, 其中 $\sigma^2 = 1$ 已知, μ 未知, 置信区间应选

$$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2} \right).$$

本题 $n = 16, \sigma = 1, \alpha = 0.05$, 故置信区间为

$$\left(40 - \frac{1}{4} u_{0.025}, 40 + \frac{1}{4} u_{0.025} \right), u_{0.025} = 1.96,$$

求得 $(39.51, 40.49)$.

(2) 由于 $EX = 0$ 不含参数 a , 就采用二阶矩. 总体二阶矩为

$$EX^2 = DX + (EX)^2 = DX = \frac{4a^2}{12} = \frac{a^2}{3},$$

样本二阶矩为 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$, 令 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = \frac{a^2}{3}$, 解得 $\hat{a} = \sqrt{\frac{3}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}$.

(3) $X \sim B(m, p)$, $EX = mp$, 所以 $\bar{X} = mp$, 解得

$$\hat{p} = \frac{\bar{X}}{m}, E\hat{p} = \frac{1}{m} E\bar{X} = \frac{1}{m} mp = p.$$

3. (1) (I) $EX = \int_0^1 x \theta x^{\theta-1} dx = \frac{\theta}{\theta+1}, EX = \frac{\theta}{\theta+1} = \bar{X}$,

解得 $\hat{\theta}_1 = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$;

$$(II) L = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \begin{cases} \theta^\theta (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\theta-1}, & 0 < x_1, x_2, \dots, x_n < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

当 $0 < x_1, x_2, \dots, x_n < 1$ 时, $\ln L = n \ln \theta + (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i$.

令 $\frac{d \ln L}{d \theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0$, 解得 $\hat{\theta}_2 = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}$.



$$(2)(I) EX = \frac{1}{\lambda}, EX = \frac{1}{\lambda} = \bar{X}, \hat{\lambda}_1 = \frac{1}{\bar{X}}.$$

$$(II) L = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}, & x_1, x_2, \dots, x_n > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\text{当 } x_1, x_2, \dots, x_n > 0 \text{ 时, } \ln L = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i.$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L}{d \lambda} = \frac{n}{\lambda} - n \bar{x} = 0, \hat{\lambda}_2 = \frac{1}{\bar{X}}.$$

$$(3)(I) EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} \lambda^2 x^2 e^{-\lambda x} dx \\ = \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt = \frac{2}{\lambda}.$$

$$\text{令 } EX = \frac{2}{\lambda} = \bar{X}, \text{解得 } \hat{\lambda} = \frac{2}{\bar{X}}.$$

微信公众号: 顶尖考研
(ID: djky66)

$$(II) L = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \begin{cases} \lambda^{2n} x_1 x_2 \cdots x_n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}, & x_1, x_2, \dots, x_n > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\text{当 } x_1, x_2, \dots, x_n > 0 \text{ 时, } \ln L = 2n \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \ln x_i - \lambda n \bar{x}.$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L}{d \lambda} = \frac{2n}{\lambda} - n \bar{x} = 0, \hat{\lambda} = \frac{2}{\bar{X}}.$$

$$(4)(I) L = \prod_{i=1}^n f(x_i) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2},$$

$$\ln L = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2.$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L}{d(\sigma^2)} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 = 0, \text{解得}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2.$$

$$(II) \text{方法一 } E\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i - \mu_0)^2 = \sigma^2.$$

$$D\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i - \mu_0)^2 = \frac{1}{n} D(X - \mu_0)^2,$$

$$\text{由于 } \frac{X - \mu_0}{\sigma} \sim N(0, 1), \text{故 } \left(\frac{X - \mu_0}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1), D\left(\frac{X - \mu_0}{\sigma}\right)^2 = 2,$$

$$\text{即 } D(X - \mu_0)^2 = 2\sigma^4, D\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} D(X - \mu_0)^2 = \frac{2\sigma^4}{n}.$$



方法二 由于 $\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu_0}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n)$, 所以

$$E\left(\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\right) = n, D\left(\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\right) = 2n.$$

$$\text{即 } E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2, D(\hat{\sigma}^2) = \frac{2\sigma^4}{n}.$$

(5)(I) $X \sim N(\mu, \sigma^2), Y \sim N(\mu, 2\sigma^2)$ 且相互独立, 所以 $X - Y \sim N(0, 3\sigma^2)$.

$$f(z; \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{3\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2 \cdot 3\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}}, -\infty < z < +\infty.$$

$$(II) L = \prod_{i=1}^n f(z_i; \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma} \right)^n e^{-\frac{1}{6\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i^2},$$

$$\ln L = -\frac{n}{2} [\ln(6\pi) + \ln \sigma^2] - \frac{1}{6\sigma^2} \sum_{i=1}^n z_i^2.$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L}{d(\sigma^2)} = -\frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{6\sigma^4} \sum_{i=1}^n z_i^2 = 0, \text{ 解得 } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n z_i^2.$$

最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n Z_i^2$.

$$(III) E(\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n E(Z_i^2) = \frac{1}{3} E(Z^2) = \frac{1}{3} [DZ + (EZ)^2]$$

$$= \frac{1}{3} [3\sigma^2 + 0] = \sigma^2, \hat{\sigma}^2 \text{ 是 } \sigma^2 \text{ 的无偏估计量.}$$

$$\begin{aligned} (6)(I) EX &= \int_0^{+\infty} x f(x; \theta) dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx \\ &= \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{\theta}} d \frac{x^2}{\theta} \\ &= - \int_0^{+\infty} x d e^{-\frac{x^2}{\theta}} = - x e^{-\frac{x^2}{\theta}} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx \\ &= \sqrt{\theta} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}. \end{aligned}$$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 f(x; \theta) dx = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx = \theta \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = \theta.$$

$$\begin{aligned} (II) L(\theta) &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \\ &= \begin{cases} \frac{2^n x_1 x_2 \cdots x_n}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i^2}, & x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{当 } x_1, x_2, \cdots, x_n > 0 \text{ 时, } \ln L(\theta) = n \ln 2 + \sum_{i=1}^n \ln x_i - n \ln \theta - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i^2. \text{ 令 } \frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} =$$



$$-\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0, \text{解得 } \hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2.$$

(Ⅲ) $X_1^2, X_2^2, \dots, X_n^2, \dots$ 是独立同分布随机变量序列, 且 $EX_i^2 = \theta < +\infty$. 根据辛钦大数定律 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \epsilon\} = 0$, 即 $a = \theta$.

第八章 假设检验 (仅数学一要求)

【答案】

1. (1) D. (2) B.

2. (1) $\bar{X} \leq 4.177$. (2) $\bar{X} \leq 30 - \frac{S}{4} t_a(15)$. (3) $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{9}{16}$.

3. (1) (I) 接受. (II) 接受. (III) 拒绝. (IV) 拒绝.

(2) (I) 接受. (II) 拒绝. (III) 接受. (IV) 拒绝.

【提示】

1. (1) 检验 X 的均值 μ_1 大于 Y 的均值 μ_2 , 即 $\mu_1 > \mu_2$, 假设检验中原假设 H_0 必须带等号, 只能选(D). 拒绝 $H_0: \mu_1 \leq \mu_2$, 就是接收 $\mu_1 > \mu_2$.

(2) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 均未知. 当 $H_0: \mu = \mu_0$ 成立时 $\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sqrt{n} \sim t(n-1)$. 选(B).

2. (1) $X \sim N(\mu, 2^2)$, 方差已知, 选用统计量

$$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = 2(\bar{X} - 5) \sim N(0, 1),$$

拒绝域: $U \leq -u_{0.05} = -1.645, 2(\bar{X} - 5) \leq -1.645, \bar{X} \leq 4.177$.

(2) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ 和 σ^2 均未知, 选用统计量

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - 30}{S/4} \sim t(15),$$

拒绝域: $T \leq -t_a(15), \frac{\bar{X} - 30}{S/4} \leq -t_a(15), \bar{X} \leq 30 - \frac{S}{4} t_a(15)$.

(3) $\alpha = P\left\{X_1 \geq \frac{3}{2} \mid H_0\right\} = \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{4},$

$\beta = P\left\{X_1 < \frac{3}{2} \mid H_1\right\} = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{x}{2} dx = \frac{9}{16}.$

3. (1) (I) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ 和 σ^2 均未知, 选用统计量

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{66.5 - 70}{15/\sqrt{36}} = -1.4.$$



$H_0: \mu \geq 70$, 拒绝域: $T \leq -t_{\alpha}(n-1) = -t_{0.95}(35) = -1.6896$, $-1.4 > -1.6896$, 不属拒绝域, 接受 H_0 , 可以认为 $\mu \geq 70$ (分).

(II) $H_0: \mu \leq 70$, 拒绝域: $T \geq t_{\alpha}(n-1) = t_{0.95}(35) = 1.6896$, $-1.4 < 1.6896$, 不属拒绝域, 接受 H_0 , 可以认为 $\mu \leq 70$ (分).

(III) 因为 $\mu > 70$ 不带等号, 只能作 $H_0: \mu \leq 70; H_1: \mu > 70$.

由 (II) 的结果接受了 H_0 , 只能拒绝 H_1 , 不可认为 $\mu > 70$ (分).

(IV) $\mu < 70$ 不带等号, 只能作 $H_0: \mu \geq 70; H_1: \mu < 70$.

由 (I) 知, 接受了 H_0 , 拒绝了 H_1 , 不可认为 $\mu < 70$ (分).

(2)(I) 显著水平为 0.10,

拒绝域: $T \leq -t_{\alpha}(n-1) = -t_{0.90}(35) = -1.3062$,

$H_0: \mu \geq 70$. $-1.4 < -1.3062$, 属于拒绝域, 不可认为 $\mu \geq 70$ (分).

(II) $H_0: \mu \leq 70$,

拒绝域: $T \geq t_{\alpha}(n-1) = t_{0.90}(35) = 1.3062$,

$-1.4 < 1.3062$, 不属于拒绝域, 接受 H_0 , 可以认为 $\mu \leq 70$ (分).

(III) $H_0: \mu \leq 70$, 根据 (II) 的结果: 接受 H_0 , 拒绝 $H_1: \mu > 70$ (分), 不可认为 $\mu > 70$ (分).

(IV) $H_0: \mu \geq 70$, 根据 (I) 的结果: 拒绝 H_0 , 接受了 $H_1: \mu < 70$ (分), 可认为 $\mu < 70$ (分).

(ID: djky66)





金榜时代
JINBANG

金榜图书用户

专享福利活动

微信公众号【顶尖考研】适用于：李永乐老师系列课程

赠送

¥100

代金券

¥200

代金券

¥500

代金券

¥1000

代金券

1. 活动参与方式

关注公众号 金榜时代考研 ▶ 回复“22考研上岸”即可参与

2. 活动时间

即日起——2021年11月24日

3. 兑换方式

扫右侧二维码
进群咨询管理员
领取代金券



书名	出版时间	适用阶段
数学公式的奥秘	2020年3月	全程复习
数学复习全书·基础篇	2020年6月	夯实基础
数学基础过关660题	2020年8月	夯实基础
数学历年真题全精解析·基础篇	2020年10月	夯实基础
数学复习全书	2020年12月	全程复习
数学历年真题全精解析	2021年1月	全程复习
高等数学辅导讲义	2021年2月	强化提高
线性代数辅导讲义	2021年2月	强化提高
概率论与数理统计辅导讲义	2021年2月	强化提高
数学强化通关330题	2021年2月	强化提高
数学决胜冲刺6套卷	2021年10月	冲刺预测
数学临阵磨枪	2021年10月	冲刺预测



关注作者团队微博
与名师一起互动交流



微信扫一扫
解锁更多精彩内容



赠送本