

微信公众号【顶尖考研】

2022年研究生入学考试

高等数学(微积分)基础班

2020年11月

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

第二章 导数与微分

掌握要点

礼九表,
(ID: djk066)

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

- 一、熟记求导公式和求导法则(基本功) $\left(\int_a^x f(t) dt\right)' = f(x)$
- 二、导数的定义(小题出现, 常考) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- 三、分段函数的导数(重点, 与其他知识点结合)
- 四、变限积分求导(几乎每年涉及)
- 五、高阶导数(难点)

考试要求

【顶尖考研】

- 1、理解导数和(了解)微分的概念，理解(了解)导数与微分的关系，理解(了解)导数的几何意义，会求平面曲线的切线方程和法线方程，了解导数的物理意义（经济意义，含边际和弹性），会用导数描述一些物理量，理解函数的可导性与连续性之间的关系。
- 2、掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则，掌握基本初等函数的导数公式，了解微分的四则运算法则和一阶微分形式的不变性，会求函数的微分。
- 3、了解高阶导数的概念，会求简单函数的高阶导数。
- 4、会求分段函数的导数。会求隐函数和由参数方程（数一、二）所确定的函数以及反函数的导数。

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

考试内容概要

一、导数与微分的概念

1、导数

(1) 定义: 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的 某个邻域 内有定义,
 当自变量 x 在 x_0 处取得改变量 Δx ($\Delta x \neq 0$) 时, 相应地
 函数 $f(x)$ 的改变量

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0);$$

如果 Δy 与 Δx 之比当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时的极限存在, 则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 并称这个极限为函数

$y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数, 记为 $y' \Big|_{x=x_0}$,
 或记为 $f'(x_0)$ 或 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0}$ 或 $\frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=x_0}$,

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

即 $y' \Big|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

其它形式 $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

(2)单侧导数

$$\text{左导数: } f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow \cancel{x_0}^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};$$

$$\text{右导数: } f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow \cancel{x_0}^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};$$

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导 $\Leftrightarrow$ 左导数 $f'_-(x_0)$ 和

右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等 . $\frac{f'_-(x_0)}{||} \frac{f'_+(x_0)}{||} \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$

关于导数的说明:

★ $f'(x_0)$ 是因变量在点 x_0 处的变化率, 它反映了因变量随自变量的变化而变化的快慢程度.

$$(a, b] \quad \frac{1}{f}$$

★ 如果函数 $y = f(x)$ 在开区间 (a, b) 内的每点处都可导, 就称函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内可导.

$$\frac{dy}{dx} = dy \cdot \frac{1}{dx}$$

★ 对于任一 $x \in (a, b)$, 都对应着 $f(x)$ 的一个确定的导数值. 这个函数叫做原来函数 $f(x)$ 的导函数. 记作

$$y', f'(x), \frac{dy}{dx} \text{ 或 } \frac{df(x)}{dx}.$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}} \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}} \quad f'(x_0) = \underline{f'(x)} \Big|_{x=x_0}.$$

$$\text{即 } y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{或 } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

★ 如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内可导, 且 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 都存在, 则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可导.

(3) 可导与连续的关系

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则它在点 x_0 处一定连续. 反之不成立.

证 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$
 $x \rightarrow x_0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha \quad \alpha \rightarrow 0 \quad (\Delta x \rightarrow 0)$$

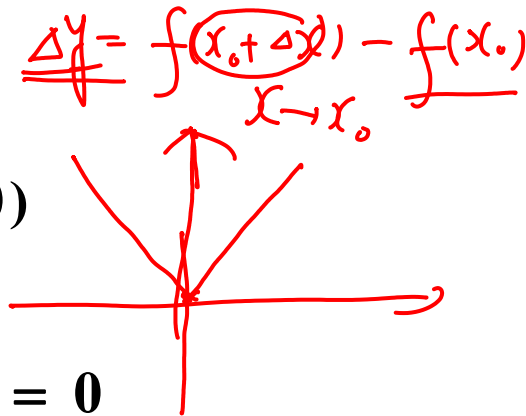
$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x] = 0$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

注: 左导数存在 $\Rightarrow$ 左连续, 右导数存在 $\Rightarrow$ 右连续

左导数存在 + 右导数存在 $\Rightarrow$ 连续



例1 讨论函数 $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 处的连续性与可导性.

解 因 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$,

即 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$,

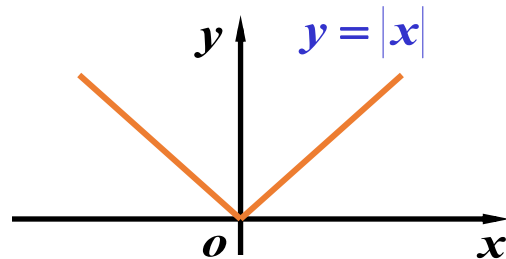
所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

但 $\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$,

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

即 $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, 因此函数 $y = f(x)$ 在 $x = 0$ 点不可导.



例2 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

在 $x = 0$ 处的连续性与可导性

解 $\because \sin \frac{1}{x}$ 是有界函数, $\therefore \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

$\therefore f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

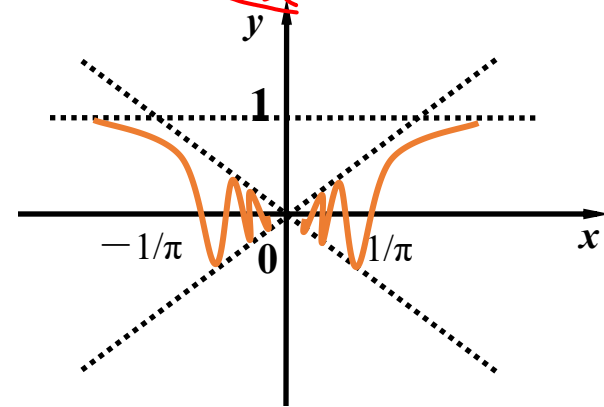
$\therefore f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

但在 $x = 0$ 处有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(0 + \Delta x) \sin \frac{1}{0 + \Delta x} - 0}{\Delta x} = \sin \frac{1}{\Delta x}$$

当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 -1 和 1 之间振荡而极限不存在.

$\therefore f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导.



例3. 已知 $y = \begin{cases} a+bx, & x \leq 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 可导, 求 a, b 之值.

解: $\because f(x)$ 在 $x=0$ 可导, $\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 连续, $f(0) = a$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = 1 \quad \text{故 } a=1.$$

$$\text{从而 } f(x) = \begin{cases} 1+bx, & x \leq 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases} \quad f(0)=1$$

由可导性：

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{(1 + b\Delta x) - 1}{\Delta x} = b$$

故 $b = -1$ ，此时函数为

$$\text{此时, } f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$

例 3(1994-3)、设 $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3}{3}, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$ 则 $f(x)$ 为在 $x=1$ 处的

(Handwritten notes: $a^n - b^n$ and $x^3 - 1 = (x-1)$)

(A) 左、右导数都存在。

(B) 左导数存在但右导数不存在。

(C) 左导数不存在但右导数存在。

(D) 左、右导数都不存在。

【解 1】 $f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}}{x - 1} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x + 1) = 2,$

(Handwritten note: 洛必达法则)

$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - \frac{2}{3}}{x - 1} = \infty,$

左导数存在但右导数不存在。

答案：B

例 3(1994-3)、设 $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3}{3}, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$ 则 $f(x)$ 为在 $x=1$ 处的 (-∞, 1]

- (A) 左、右导数都存在. (B) 左导数存在但右导数不存在.
(C) 左导数不存在但右导数存在. (D) 左、右导数都不存在.

【解 2】 $f'_-(1) = \left(\frac{2}{3}x^3 \right)' \Big|_{x=1} = 2$ 而 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1 \neq \underline{f(1)}$ 不是右导数 $\Rightarrow$ 右导数不存在

左导数存在但右导数不存在.

答案: B

注: 避免错误 $f'_+(1) = (x^2)' \Big|_{x=1} \neq 2$, 而得到 $f'(1) = 2$.

例 4(1990-45) 设函数 $f(x)$ 对任意 x 均满足等式 $f(1+x) = a f(x)$, 且有 $f'(0) = b$, 其中 a, b 为非零常数, 则

- (A) $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导. (B) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 且 $f'(1) = a$.
 (C) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 且 $f'(1) = b$. (D) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 且 $f'(1) = ab$. 【 】

【详解】 由导数定义知

~~(A)~~ + (D)

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{af(\Delta x) - af(0)}{\Delta x} \\ &= a \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = af'(0) = ab. \end{aligned}$$

所以应选(D).

2、微分 号【顶尖考研】

(1)定义: 设函数 $y = f(x)$ 在某区间内有定义, x_0 及 $x_0 + \Delta x$ 在这区间内, 如果

所以计算

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \underline{A \cdot \Delta x} + \underline{o(\Delta x)}$$

成立(其中 A 是与 Δx 无关的常数), 则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 可微, 并且称 $\underline{A \cdot \Delta x}$ 为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 相应于自变量增量 Δx 的微分, 记作

$$dy \Big|_{x=x_0} \text{ 或 } df(x_0), \text{ 即 } dy \Big|_{x=x_0} = A \cdot \Delta x$$

微分 dy 叫做函数增量 Δy 的线性主部. $= \Delta y$

(微分的实质)

(2)可微的条件

函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微的充要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且 $A = f'(x_0)$.

证 必要性 $f(x)$ 在点 x_0 可微,

$$\therefore \Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

$$\text{则 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A.$$

即函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导, 且 $A = f'(x_0)$.

充分性 函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$, 即 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$, $\alpha \rightarrow 0 \quad (\Delta x \rightarrow 0)$,

$$\text{从而 } \Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot (\Delta x),$$

$$= f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x),$$

$f(x)$ 在 x_0 可微, 且 $f'(x_0) = A$.

例 5(1988-123) 若函数 $y=f(x)$ 有 $f'(x_0) = \frac{1}{2}$, 则该函数在 $x = x_0$ 处的微分 dy 是

- (A) 与 Δx 等价的无穷小. (B) 与 Δx 同阶的无穷小.
(C) 比 Δx 低阶的无穷小. (D) 比 Δx 高阶的无穷小.

【分析】 $dy = f'(x_0)\Delta x = \frac{1}{2}\Delta x$

答案: B

3、导数与微分的几何意义

(1) 导数的几何意义

$f'(x_0)$ 表示曲线 $y = f(x)$

在点 $M(x_0, f(x_0))$ 处的

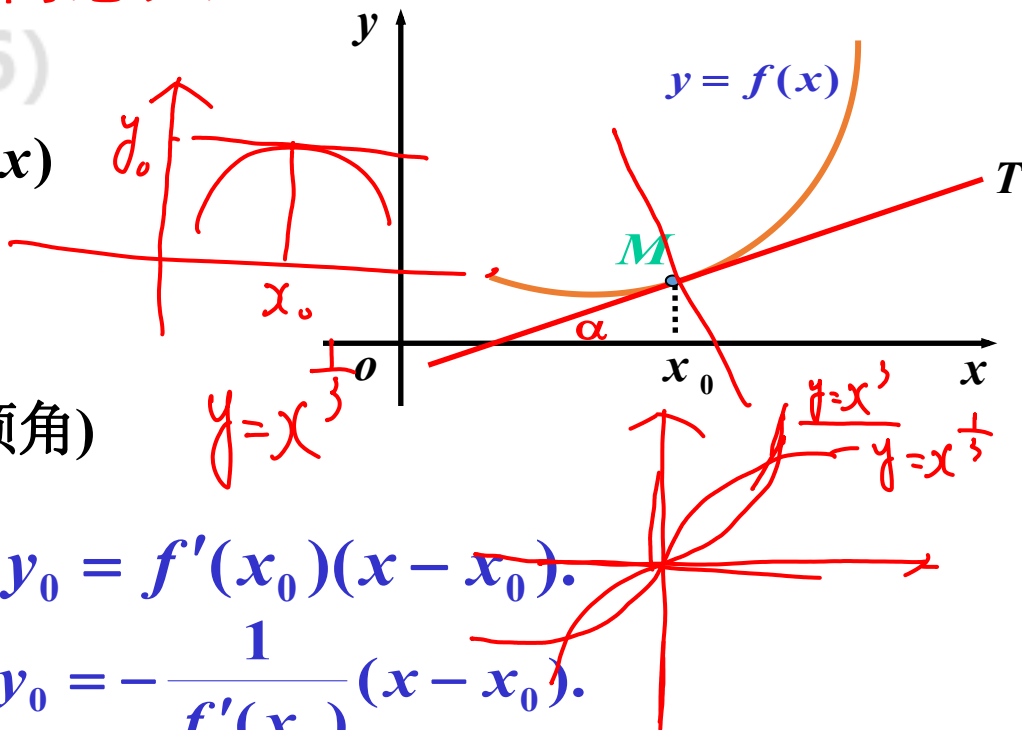
切线的斜率, 即

$f'(x_0) = \tan \alpha$, (α 为倾角)

切线方程为: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$

法线方程为: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$

注: 1) 函数可导 $\Rightarrow$ 曲线有切线, 反之不然;
2) 曲线有水平切线时

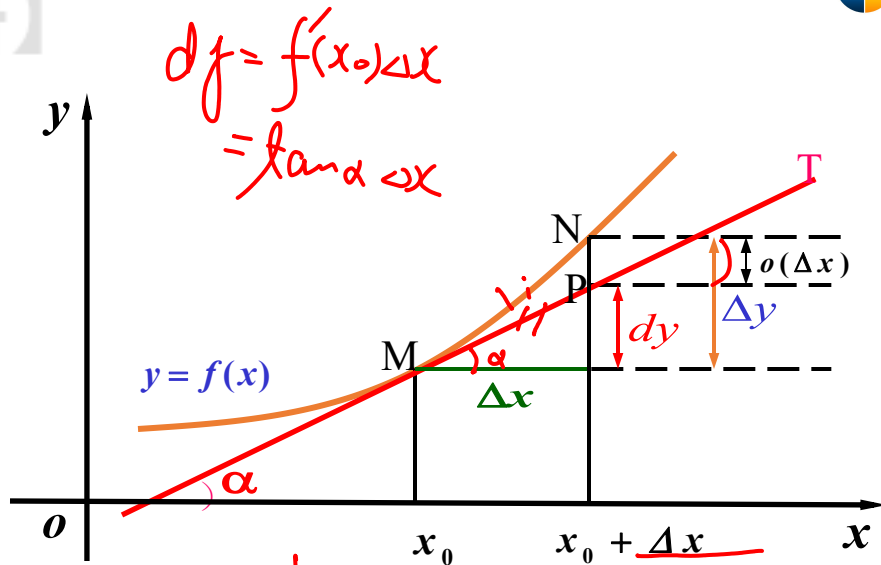


(2) 微分的几何意义

函数 $y = f(x)$ 的微分 dy 就是过点 $M(x, y)$ 的切线的纵坐标的改变量.

当 $|\Delta x|$ 很小时, 在点 M 的附近, 切线段 MP 可近似代替曲线段 MN .

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx$$



$$S = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

(3) 微分形式的不变性

设函数 $y = f(u)$ 有导数 $f'(u)$,

(1) 若 u 是自变量时, $dy = f'(u)du$;

$$y = f[\varphi(x)]$$

(2) 若 u 是中间变量时, 即另一变量 x 的可微函数 $u = \varphi(x)$, 则 $dy = f'(u)\varphi'(x)dx$

$$\because du = \varphi'(x)dx, \quad \therefore \underline{dy = f'(u)du}.$$

结论: 无论 u 是自变量还是中间变量, 函数 $y = f(u)$ 的微分形式总是

$$\boxed{dy = f'(u)du}$$

微分形式的不变性

例6 设 $y = \ln(\underline{x + e^{x^2}})$, 求 dy .

解

$$\begin{aligned}
 dy &= \frac{1}{x + e^{x^2}} d(\underline{x + e^{x^2}}) \\
 &= \frac{1}{x + e^{x^2}} \cdot (dx + \underbrace{de^{x^2}}_{\text{red circle}}) \\
 &= \frac{1}{x + e^{x^2}} \cdot [dx + e^{x^2} d(\underline{x^2})] \\
 &= \frac{1}{x + e^{x^2}} \cdot (dx + 2xe^{x^2} dx) \\
 &= \frac{1 + 2xe^{x^2}}{x + e^{x^2}} dx.
 \end{aligned}$$

$$u = x + e^{x^2}$$

y'

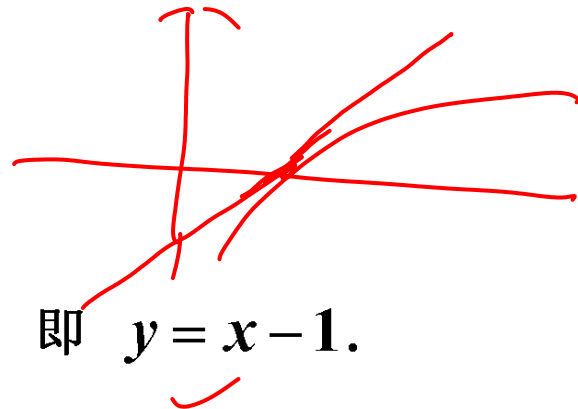
例 7 (2004-1) 曲线 $y=\ln x$ 上与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程为_____。

(ID: djky66)

【详解】 本题也可先设切点为 $(x_0, \ln x_0)$ ，函数 $y=\ln x$ 在此切点的导数为

$$y'|_{x=x_0} = \frac{1}{x_0} = 1, \text{ 得 } x_0 = 1,$$

$(1, 0)$



由此可知所求切线方程为 $y-0=1 \cdot (x-1)$ ，即 $y=x-1$ 。

4、几个概念之间的关系

(ID: djky66)

可微 $\Leftrightarrow$ 可导 $\Rightarrow$ 连续 $\Rightarrow$ 极限存在 ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \underline{\underline{f(x_0)}}$)

例 8 (2020-1) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 则

$$f(x) = |x|$$

(A) 当 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(B) 当 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2}} = 0$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(C) 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$.

(D) 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2}} = 0$. 【 】

1° 1/2 阶无穷小

2° 1/2 阶无穷小

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

【详解 1】当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 得 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$,

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{|x|}} = f'(0) \cdot 0 = 0. \text{ 故选(C).}$$

$$= \frac{x}{|x|} \cdot \frac{|x|}{\sqrt{|x|}} = \frac{x}{|x|} \cdot \sqrt{|x|}$$

例 8 (2020-1) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 则

(A) 当 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.

(B) 当 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2}} = 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.

(C) 当 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$. $\frac{x}{|x|}$

(D) 当 $f(x)$ 在 $\underline{x = 0}$ 处可导时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2}} = 0$. 【 】

【详解 2】可利用举反例排除错误答案. 取 $f(x) = |x|$, 排除(A);

$f(x) = x^2, x \neq 0$
2. 5 分 取 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$, 排除(B); 取 $f(x) = x$, 排除(D).

二、导数公式和求导法则

1、基本初等函数的导数公式

$$(C)' = 0$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

2、求导法则

(1) 函数的和、差、积、商的求导法则

$$1) [u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x);$$

$$2) [u(x) \cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x);$$

$$3) \left[\frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x) \neq 0).$$

注: (1) $[u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)]' = u_1'(x) + u_2'(x) + \dots + u_n'(x)$

(2) $[u_1(x)u_2(x)\dots u_n(x)]' = u_1'(x)u_2(x)\dots u_n(x) + \dots + u_1(x)u_2(x)\dots u_n'(x).$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x) - u(x)v(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)v(x)\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x) - u(x)]v(x) - u(x)[v(x + \Delta x) - v(x)]}{v(x + \Delta x)v(x)\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \cdot v(x) - u(x) \cdot \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}}{v(x + \Delta x)v(x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x) - u(x) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x + \Delta x)v(x)} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

(2)、复合函数的求导法则

(ID: 如果函数 $u = \varphi(x)$ 在点 x_0 可导, 而 $y = f(u)$ 在点 $u_0 = \varphi(x_0)$ 可导, 则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 可导, 且其导数为:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0).$$

即 因变量对自变量求导, 等于因变量对中间变量求导, 乘以中间变量对自变量求导. (链式法则)

$y - u - x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{\cancel{du}} \cdot \frac{\cancel{du}}{dx}$$

证 由 $y = f(u)$ 在点 u_0 可导得

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u_0)$$

$$\text{故 } \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u_0) + \alpha \quad (\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \alpha = 0)$$

则 $\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \alpha\Delta u$, 于是,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[f'(u_0) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x} \right] \\ &= f'(u_0) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= f'(u_0) \varphi'(x_0). \end{aligned}$$

复合函数的求导公式可以推广到有限次复合的情形.

设 $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = \psi(x)$, 则复合函数 $y = f\{\varphi[\psi(x)]\}$ 的导数为 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$.

$y - u - v - x$

$\varphi'(x_0)$

例 9 (1995-2) 设 $y = \cos(x^2) \sin^2 \frac{1}{x}$, 则 $y' =$ _____.

$$\begin{aligned}
 \text{解: } y' &= [\cos(x^2)]' \sin^2 \frac{1}{x} + \cos(x^2) [\sin^2 \frac{1}{x}]' \\
 &= -\overset{\text{sin}}{\sin}(x^2)(x^2)' \sin^2 \frac{1}{x} + \cos(x^2) 2 \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} (\frac{1}{x})' \\
 &= -2 \overset{\sin(x^2)}{x \sin}(x^2) \sin^2 \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \cos(x^2) \sin \frac{2}{x}
 \end{aligned}$$

例 10、设函数 $f(x)$ 可导，试证

(1) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $f'(x)$ 为偶函数；

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $f'(x)$ 为奇函数；

(3) 若 $f(x)$ 为周期函数，则 $f'(x)$ 也为周期函数。

$$f(-x) = -f(x)$$

$$-f'(-x) = -f'(x)$$

$$f'(-x) = f'(x)$$

特别：若 $f(x)$ 为偶函数且 $f'(0)$ 存在，则 $f'(0) = 0$

设 $f(x)$ 以 T 为周期且 $f'(x_0)$ 存在，则 $f'(x_0 + T) = f'(x_0)$

注：若 $f(x)$ 为偶函数， $f'(0) = 0$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(-t) - f(0)}{-t} = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = -f'(0)$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky99)

例 11(2017-1) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, 则 $f^{(3)}(0) = \underline{0}$.

$f(x) \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq \frac{1}{9} \Rightarrow f'(x) \neq 0 \Rightarrow f''(x) \neq \frac{1}{9}$

分析: 实际上 $f^{(3)}(x)$ 为奇函数, 所以 $f^{(3)}(0) = 0$

注: $f(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + L$,

$f^{(3)}(0) = \underline{a_3} 3! = 0.$

$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

$$f^{(4)}(0) = a_4 \cdot 4! = \underline{24}$$

(3)、隐函数的导数

由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 称为隐函数.

$y = f(x)$ 形式称为显函数.

$F(x, y) = 0 \longrightarrow y = f(x)$ 隐函数的显化

问题：隐函数不易显化或不能显化如何求导？

隐函数求导法则：

用复合函数求导法则直接对方程两边求导解出 y' .

例 12(1993-3) 函数 $y = y(x)$ 是由方程 $\sin(x^2 + y^2) + e^x - \underline{xy} = 0$ 所确定, 则 $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解: 方程两边对 x 求导

$$(2x + 2y \frac{dy}{dx}) \cos(x^2 + y^2) + e^x - y^2 - 2xy \frac{dy}{dx} = 0$$

解得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - e^x - 2x \cos(x^2 + y^2)}{\underline{2y \cos(x^2 + y^2) - 2xy}}$$

例13、求由方程 $\underline{xy - e^x + e^y} = 0$ 所确定的隐函数 y 的导数 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0}$.

解 方程两边对 x 求导,

$$\underline{y + x \frac{dy}{dx} - e^x + e^y \frac{dy}{dx} = 0},$$

由原方程知 $x = 0, y = 0,$

所以 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = 1.$

(4)、反函数的导数

如果函数 $x = \varphi(y)$ 在某区间 D_y 内单调、可导且 $\varphi'(y) \neq 0$ ，
那末它的反函数 $y = f(x)$ 在对应区间 D_x 内也可导，且有

$$\frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} \quad | \quad y = f(x)$$

即 反函数的导数等于直接函数导数的倒数。

证 任取 $x \in D_x$, 给 x 以增量 Δx ($\Delta x \neq 0, x + \Delta x \in D_x$)

由 $y = f(x)$ 的单调性可知 $\Delta y \neq 0$,

于是有
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}},$$

因 $f(x)$ 连续, 所以 $\Delta y \rightarrow 0$ ($\Delta x \rightarrow 0$),

又知 $\varphi'(y) \neq 0$

因此
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

即
$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

例14 求函数 $y = \arcsin x$ 的导数.

解 因 $x = \sin y$ 在 $D_y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内单调、可导，

且 $(\sin y)' = \cos y > 0$ ，所以在 $D_x \in (-1, 1)$ 内有

$$\begin{aligned} (\arcsin x)' &= \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \end{aligned}$$

| $y = f(x)$

即

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

同理可得 $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$

(5)、参数方程确定函数的导数(数学一、二要求)

由参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 确定 y 是 x 的函数, 其中

$x = \varphi(t), y = \psi(t)$ 都有二阶导数且 $\varphi'(t) \neq 0$, 则

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad \frac{d^2 y}{d^2 x} = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right)}{dx} \left(\frac{dt}{dx} \right) = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

例 15(2020-1) 设 $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1} \\ y = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) \end{cases}$, 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}}{t + \sqrt{t^2 + 1}} = \frac{1}{t} \quad \checkmark \quad \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=1} = -\sqrt{2}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d \frac{1}{t}}{dt} \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{t^2} \frac{1}{t} = -\frac{1}{t^3}$$

微分公...【顶尖考研】 (6)、对数求导法

适用范围:

多个函数的乘、除和幂指函数 $u(x)^{v(x)}$ 的情形.

方法:

先在方程两边(或函数)取对数, 然后利用隐函数的求导方法求出导数.

例 16(2005-2) 设 $y = (1 + \sin x)^x$, 则 $dy|_{x=\pi} = \frac{\{f(x)\}^{g(x)} \cdot g'(x)}{f(x) - 1} \cdot$

【详解】 两边取对数, $\ln y = x \ln(1 + \sin x)$, 两边对 x 求导, 得

$$\frac{1}{y} y' = \ln(1 + \sin x) + \frac{x \cos x}{1 + \sin x},$$

于是 $y' = (1 + \sin x)^x \cdot [\ln(1 + \sin x) + x \cdot \frac{\cos x}{1 + \sin x}]$, 故 $dy|_{x=\pi} = y'(\pi)dx = -\pi dx$.

【另解】 $y = (1 + \sin x)^x = e^{x \ln(1 + \sin x)}$, 于是

$$y' = e^{x \ln(1 + \sin x)} \cdot [\ln(1 + \sin x) + x \cdot \frac{\cos x}{1 + \sin x}],$$

从而 $dy|_{x=\pi} = y'(\pi)dx = -\pi dx$.

例17 设 $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$, 求 y' .

解

等式两边取对数得

$$\ln y = \frac{1}{2} [\ln(x-1) + \ln(x-2) - \ln(x-3) - \ln(x-4)]$$

上式两边对 x 求导得

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \cdot y' &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x-1} (x-1)' + \frac{1}{x-2} (x-2)' \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{x-3} (x-3)' - \frac{1}{x-4} (x-4)' \right] \\ y' &= \frac{y}{2} \left[\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}} \cdot \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} \right) \end{aligned}$$

(7)、微分的求法

$$dy = \underbrace{f'(x)}_{\text{导数}} dx$$

求法： 计算函数的导数, 乘以自变量的微分.

1) 基本初等函数的微分公式

$$d(c) = 0$$

$$d(x^\mu) = \underbrace{\mu x^{\mu-1}}_{\text{导数}} dx$$

$$d(\sin x) = \cos x dx$$

$$d(\cos x) = -\sin x dx$$

$$d(\tan x) = \sec^2 x dx$$

$$d(\cot x) = -\csc^2 x dx$$

$$d(\sec x) = \sec x \tan x dx$$

$$d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$$

$$d(a^x) = a^x \ln a dx \quad d(e^x) = e^x dx$$

$$d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} dx \quad d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$$

$$d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} dx \quad d(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2} dx$$

2) 函数和、差、积、商的微分法则

$$d(\underline{u} \pm v) = du \pm dv$$

$$d(Cu) = Cdu$$

$$d(uv) = vdu + u dv$$

$$d\left(\frac{\underline{u}}{v}\right) = \frac{vdu - \underline{u}dv}{v^2}$$

三、高阶导数【顶尖考研】

1、高阶导数的概念

如果函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在点 x 处可导,即

$$(\underline{f'(x)})' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

存在,则称 $(f'(x))'$ 为函数 $f(x)$ 在点 x 处的二阶导数

记作 $f''(x), y'', \frac{d^2 y}{dx^2}$ 或 $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$.

二阶导数的导数称为三阶导数, $f'''(x), y'''$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$.

三阶导数的导数称为四阶导数, $f^{(4)}(x), y^{(4)}$, $\frac{d^4 y}{dx^4}$.

一般地, 函数 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数的导数称为
函数 $f(x)$ 的 n 阶导数, 记作

$$f^{(n)}(x), y^{(n)}, \frac{d^n y}{dx^n} \text{ 或 } \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

二阶和二阶以上的导数统称为**高阶导数**.

相应地, $f(x)$ 称为零阶导数; $f'(x)$ 称为一阶导数.

$f(x)$ 的各阶导数在 $x = x_0$ 处的导函数值分别记为:

$$f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0), \text{ 或 } y'|_{x=x_0}, y''|_{x=x_0}, \dots, y^{(n)}|_{x=x_0}.$$

注: 函数 $f(x)$ 在 x 处 n 阶可导, 则在 x 的某邻域内 $f(x)$ 具有一切低于 n 阶的导数.

2. 常用的高阶导数公式

设函数 $u(x), v(x)$ 在 x 处有 n 阶导数, 则

$$(u \pm v)^{(n)} = (u)^{(n)} \pm (v)^{(n)}, \quad (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k (u)^{(k)} (v)^{(n-k)}$$

u, v 到 n 阶的导数公式

$$(1) (x^n)^{(n)} = n! \quad (e^x)^{(n)} = e^x$$

$$(2) (e^{ax+b})^{(n)} = a^n e^{ax+b}, \quad (a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$$

$$(3) [\sin(ax+b)]^{(n)} = a^n \sin\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$[\cos(ax+b)]^{(n)} = a^n \cos\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$(4) \left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n! a^n}{(ax+b)^{n+1}}$$

$$(5) [\ln(ax+b)]^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)! a^n}{(ax+b)^n}$$

$$(u+v)^n$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n}{2}\pi\right)$$

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

例18 设 $y = \sin x$, 求 $y^{(n)}$.

解 $y' = \cos x = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$

$$y'' = -\sin x = \sin(2 \cdot \frac{\pi}{2} + x)$$

$$y''' = -\cos x = \sin(3 \cdot \frac{\pi}{2} + x)$$

$$y^{(4)} = \sin x = \sin(4 \cdot \frac{\pi}{2} + x)$$

$$y^{(5)} = \cos x = \sin(5 \cdot \frac{\pi}{2} + x)$$

... ..

$$y^{(n)} = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

即

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

同理可得

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$\boxed{\text{技巧}}$$

$$1) \text{ 对 } \sin x \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$(\cos^2 x)^{(n)} = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^{(n)}$$

$$\underline{(\sin 3x)^{(n)} = 3^n \sin(3x + n \cdot \frac{\pi}{2})}$$

例 19、设 $y = x^2 \cos x$ ，求 $y^{(n)}$

解、用莱布尼兹公式 $k=0, 1, 2$

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k (\underline{x^2})^{(k)} (\cos x)^{(n-k)}$$

$$= C_n^0 x^2 (\underline{\cos x})^{(n)} + C_n^1 2x (\cos x)^{(n-1)} + C_n^2 2 (\cos x)^{(n-2)}$$

$$= x^2 \cos(x + \frac{n}{2}\pi) + \underline{2nx} \cos(x + \frac{n-1}{2}\pi) + \underline{n(n-1)} \cos(x + \frac{n-2}{2}\pi)$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

常考题型与典型例题

- 1、导数的定义.
- 2、各种形式的求导.
- 3、高阶导数.
- 4、导数的应用. —— 心证

一、导数的定义-命题形式

(ID: djky66)

- 1、分段函数在分界点处的导数.
- 2、已知 $f'(\underline{x_0})$ 存在, 求极限.
- 3、已知极限求 $\boxed{f'(x_0)}$.
- 4、抽象函数 $f(x)$ 可导性未知, 求 $f'(x_0)$ 或 $f'(x)$.

例 20、设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $\overbrace{f'(1)=1}^{a^n-b^n}$ ，求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{\underline{x^{2021} - 1}}$ 。

【分析】

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^{2021} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{(x-1)(x^{2020} + x^{2019} + \dots + x + 1)}$$

$$= \frac{f'(1)}{2021} = \frac{1}{2021}$$

例 21(1994-3) 已知 $f'(x_0) = -1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x_0 - 2x) - f(x_0 - x)} =$

【分析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x_0 - 2x) - f(x_0 - x)} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(x_0 - 2x) - f(x_0 - x)}{-x}}$

$$= - \frac{1}{f'(x_0)} = 1$$

注: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2x) - f(x_0 - x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2x) - f(x_0) - [f(x_0 - x) - f(x_0)]}{x}$

$$= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2x) - f(x_0)}{-2x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f(x_0 - x) - f(x_0)]}{-x} = -f'(x_0) = 1$$

$-2f'(x_0) + f'(x_0)$

例 22(2011-23) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$

- (A) $-2f'(0)$. (B) $-f'(0)$. (C) $f'(0)$. (D) 0.

【详解】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3) - f(0)}{x^3},$

拆项 $= f'(0) - 2f'(0) = -f'(0).$

答案: B

例 23(2006-34) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^2)}{h^2} = 1$, 则

(A) $\underline{f(0)=0}$ 且 $f'_-(0) \exists$ (B) $f(0)=1$ 且 $\underline{f'_-(0) \exists}$

(C) $\underline{f(0)=0}$ 且 $\underline{f'_+(0) \exists}$ (D) $f(0)=1$ 且 $\underline{f'_+(0) \exists}$

改0为1
求导 & 2

$\lim_{h \rightarrow 0} h^2 \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(h^2) \rightarrow 0$

分析: 1、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^2)}{h^2} = 1 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(h^2) = 0 \Rightarrow \underline{f(0)=0}$ $f'(0)=1$ X

2、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^2)}{h^2} = 1 \Rightarrow \lim_{\substack{x=h^2 \\ x \rightarrow 0^+}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1 \Rightarrow \underline{f'_+(0)=1}$

答案: C

例 24(2013-1) 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 确定, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n[f(\frac{1}{n}) - 1] = \underline{\quad}$.

【详解】在方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 中, 令 $x=0$, 得 $y=1$, 等式两端对 x 求导得:

$$y'-1=e^{x(1-y)}(1-y-xy'),$$

将 $x=0, y=1$ 代入上式, 得 $y'(0)=1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[f(\frac{1}{n}) - 1] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\frac{1}{n}) - f(0)}{\frac{1}{n}} = f'(0) = 1.$$

例 25(2018-123) 下列函数中, 在 $x=0$ 处不可导的是

(A) $f(x) = |x| \sin |x|$ (B) $f(x) = |x| \sin \sqrt{|x|}$

(C) $f(x) = \cos |x|$ (D) $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$

(D) 不可导

分析: A、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x| \sin |x|}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x|^2}{x} = 0$

B、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x| \sin \sqrt{|x|}}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x|^{\frac{3}{2}}}{x} = 0$

C、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos |x| - 1}{x} = -\frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x|^2}{x} = 0$

D、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \sqrt{|x|} - 1}{x} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ 不存在

$-\frac{1}{2}|x|^2$

答案: D

例 26(1989-3) 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是

(A) $\lim_{h \rightarrow +\infty} h \left[f(a + \frac{1}{h}) - f(a) \right]$ 存在 $\equiv$ (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f(a + \frac{1}{n}) - f(a) \right]$ 存在

(C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ 存在 (D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{h}$ 存在

分析: D、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{h} \stackrel{t=-h}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} = f'(a)$

C、 $f(x) = \begin{cases} 1, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = 0$

A、 $\lim_{h \rightarrow +\infty} h \left[f(a + \frac{1}{h}) - f(a) \right] \stackrel{t=\frac{1}{h}}{=} \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} = \underline{f'_+(a)}$

B、 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f(a + \frac{1}{n}) - f(a) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a + \frac{1}{n}) - f(a)}{\frac{1}{n}}$ **答案: D**

$f(x)$ 在 $x=a$ 处可导

二、复合函数、隐函数、参数方程求导

例 27(1993-3) 设 $y = \sin[f(x^2)]$, 其中 f 具有二阶导数, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

解: $\frac{dy}{dx} = 2x \cos[f(x^2)] \cdot f'(x^2)$ 链式法则

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= 2 \cos[f(x^2)] f'(x^2) - 2x \sin[f(x^2)] [f'(x^2)]^2 \cdot 2x + 2x \cos[f(x^2)] f''(x^2) \cdot 2x \\ &= 2f'(x^2) \cos[f(x^2)] + 4x^2 \{f''(x^2) \cos[f(x^2)] - [f'(x^2)]^2 \sin[f(x^2)]\} \end{aligned}$$

例 28(2012-2) 设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2-y+1=e^y$ 所确定的隐函数, 则

$$\frac{d^2 y}{d^2 x} \Big|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$x=0, y=0$ $1-y=e^y$ 隐函数

解: 将 $x=0$ 代入方程 $x^2-y+1=e^y$ 得 $y=0$.

在方程 $x^2-y+1=e^y$ 两边同时对 x 求导得 $2x-y'=e^y \cdot y'$,

代入 $x=0, y=0$ 得 $y'(0)=0$.

再在方程 $2x-y'=e^y \cdot y'$ 两边对 x 求导得 $2-y''=e^y \cdot (y')^2 + e^y \cdot y''$,

代入 $x=0, y=0, y'(0)=0$ 得 $y''(0)=1$.

例 29(2013-1) 设 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = t \sin t + \cos t \end{cases}$ (t 为参数), 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} =$ _____.

解: 可计算 $\frac{dx}{dt} = \cos t$, $\frac{dy}{dt} = t \cos t$, 则 $\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} = t$.

由 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{dt}{dx}$ 有

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{dt}{dx} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\cos t} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}.$$

三、高阶导数

方法：1、数学归纳法✓

2、重要函数的高阶导数公式

3、莱布尼兹公式

4、幂级数展开（泰勒公式）

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n)(x - x_0)^n \Rightarrow f^{(n)}(x_0) = a_n n!$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

微信公众号【顶尖考研】

例 30(2007-23) 设函数 $y = \frac{1}{2x+3}$, 则 $y^{(n)}(0)$ = _____.

分析: $y^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n 2^n \underline{n!}}{(2x+3)^{\underline{n+1}}},$

故 $y^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n 2^n n!}{3^{n+1}}.$

例 31(2015-2) 函数 $f(x) = x^2 \cdot 2^x$ 在 $x = 0$ 处的 n

阶导数 $f^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解、用莱布尼兹公式

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k (x^2)^{(k)} (2^x)^{(n-k)}$$

$$= C_n^0 x^2 (2^x)^{(n)} + C_n^1 2x (2^x)^{(n-1)} + \underline{C_n^2 2 (2^x)^{(n-2)}}$$

$$f^{(n)}(0) = C_n^2 2 (2^x)^{(n-2)} \Big|_{x=0} = n(n-1) 2^x (\ln 2)^{n-2} \Big|_{x=0} = n(n-1)(\ln 2)^{n-2}.$$

注：还可考虑用泰勒展开式

四、导数的应用

1、导数的几何意义

例 32(2011-3) 设曲线 $\tan(x + y + \frac{\pi}{4}) = e^y$ 在点 (0,0) 处的切线方程为_____.

【详解】 方程两边对 x 求导得

$$\sec^2(x + y + \frac{\pi}{4})(1 + \underline{\underline{y'}}) = e^y \underline{y'}$$

$$\text{令 } x = y = 0 \quad \text{得} \quad \underline{y'(0) = -2},$$

则曲线在点 (0,0) 处的切线方程为: $y = -2x$.

例 33(2013-2) 曲线 $\begin{cases} x = \arctan t, \\ y = \ln \sqrt{1+t^2} \end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处

的法线方程为 . $= \frac{1}{2} \ln(1+t^2)$

【详解】 将 $t=1$ 代入 $\begin{cases} x = \arctan t, \\ y = \ln \sqrt{1+t^2}, \end{cases}$ 得 $x = \frac{\pi}{4}, y = \frac{1}{2} \ln 2,$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = \left. \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \right|_{t=1} = \left. \frac{\frac{t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} \right|_{t=1} = t \Big|_{t=1} = 1,$$

所求法线方程为 $y - \frac{1}{2} \ln 2 = -\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, 即 $x + y = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2.$

例 34(1997-1) 对数螺线 $\rho = e^\theta$ 在点 $(\rho, \theta) = \left(e^2, \frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程为 _____ .

极坐标 $\Rightarrow$ 直角坐标

【详解】 对数螺线的参数方程可写为
$$\begin{cases} x = e^\theta \cos \theta \\ y = e^\theta \sin \theta \end{cases} \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, $x = 0, y = e^2$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \left. \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} \right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\cancel{e^\theta}(\sin \theta + \cos \theta)}{\cancel{e^\theta}(\cos \theta - \sin \theta)} \bigg|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -1$$

所求切线的直角坐标方程为 $x + y = e^2$.

例 35. 设 $f(x)$ 是可导的偶函数, 它在 $x=0$ 的某邻域内满足

$$f(e^{x^2}) - 3f(1 + \sin x^2) = 2x^2 + o(x^2),$$

$f(-1) = f(1)$
 $f(-1) = ? f(1)$

求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程

分析: 1、由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{x^2}) - 3f(1 + \sin x^2) - 2x^2}{x^2} = 0$, 得

$$f(1) - 3f(1) = 0 \Rightarrow f(1) = 0$$

$$2、\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(e^{x^2})}{e^{x^2} - 1} \cdot \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} - \frac{3f(1 + \sin x^2)}{\sin x^2} \cdot \frac{\sin x^2}{x^2} - 2 \right) = 0$$

$$\text{有 } f'(1) - 3f'(1) - 2 = 0 \Rightarrow f'(1) = -1$$

3. $f(-1) = f(1) = 0, f'(-1) = -f'(1) = 1$, 切线方程为 $y = x + 1$

2、相关变化率

设 $x = x(t)$, $y = y(t)$ 都是可导函数，而变量 x 与 y 之间存在某种关系，因此变化率 $\frac{dx}{dt}$ 与 $\frac{dy}{dt}$ 也存在一定关系，这两个相互依赖的变化率称为相关变化率。

例 36(2016-2) 设已知动点 P 在曲线 $y = x^3$ 上运动, 记坐标原点与 P 间的距离为 l . 若点 P 横坐标时间的变化率为常数 v_0 , 则当点 P 运动到点 $(1, 1)$ 时, l 对时间的变化率是 $\frac{dl}{dt} = v_0$.

【详解】 设动点 $P(x, x^3)$, 则 $l = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + x^6}$,

且 $\frac{dx}{dt} = v_0$, 于是

$$\left. \frac{dl}{dt} \right|_{(x,y)=(1,1)} = \frac{2x + 6x^5}{2\sqrt{x^2 + x^6}} \left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=1} = 2\sqrt{2}v_0.$$