2022年研究生入学考试

高等数学(微积分)基础班

2021年1月

$\boxed{\text{多元函数}}$ 同一元函数

1° ~~极限~~ 2° 连续、 3° 偏导数 4° 全微分

5° 极值

第八章 多元函数微分学

考试要求

小题

了解 多元函数的概念，二元函数的几何意义，二元函数的极限与连续的概念，有界闭区域上二元连续函数的性质，多元函数偏导数与全微分的概念，了解隐函数存在定理，多元函数极值和条件极值的概念，二元函数极值存在的充分条件．

大题

会 求多元复合函数一阶、二阶偏导数，求全微分，求多元隐函数的偏导数，求二元函数的极值，用拉格朗日乘数法求条件极值，求简单多元函数的最大值和最小值、并解决一些简单的应用问题.

掌握 多元函数极值存在的必要条件.

1° 二元函数的概念
2° 多元函数的连续概念
3° 求有界闭区域上连续函数的最值

主要考点

1.熟练求偏导数、全微分(求导法则、方法，特别是抽象复合函数的求导)(基本功)

2.求极值及最值(几种情况) 一讲

3.综合题(特别是与微分方程的结合)

第一节 多元函数的基本概念

考试内容概要

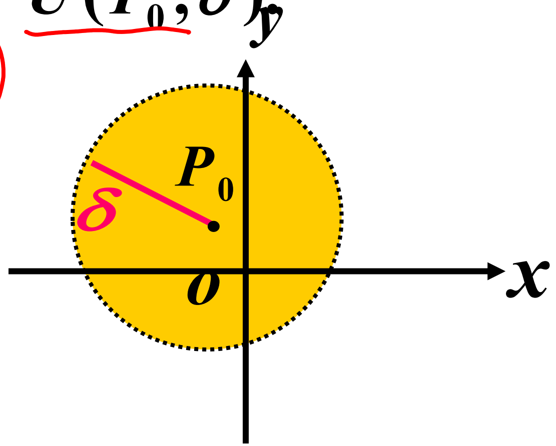
一、平面区域的概念

1、邻域 设 $P_0(x_0, y_0)$是xoy平面上的一个点， δ为一正数，与点 (x_0, y_0)距离小于 δ的点$P(x, y)$的全体，称为点 P_0的δ邻域，记为 $U(P_0,\delta)$.

去心邻域 $\mathring{U}(P_0)$

$$U(P_0,\delta) = \{P \,\|\, PP_0 | < \delta\}$$

$$= \left\{(x, y) \,|\, \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\right\}.$$

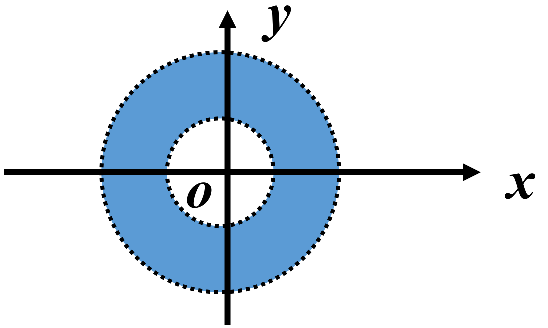


2、平面区域：平面或平面上由几条曲线所围成的部分.

围成平面区域的曲线称为该区域的边界.

不包含边界的区域称为开区域.

$$\{(x,y)\,|\,1 < x^2 + y^2 < 4\}.$$

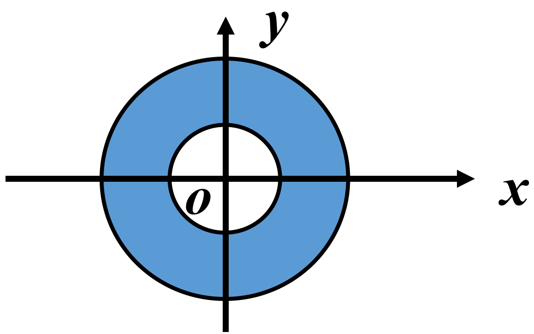


包括边界在内的区域称为闭区域.

$$\{(x,y)\,|\,1 \le x^2 + y^2 \le 4\}.$$

包含部分边界的区域称为半开区域.

$$\{(x,y)\,|\,1 < x^2 + y^2 \le 4\}.$$



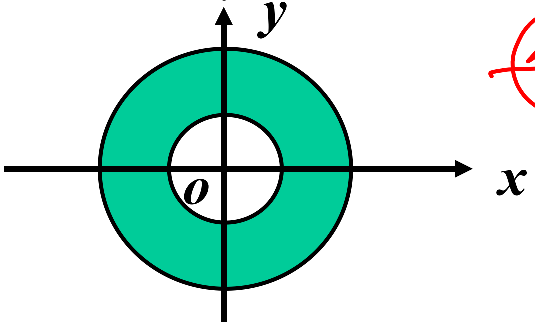
如果区域延伸到无穷远处，则称为无界区域，否则称为有界区域.

有界区域总可以包含在一个以原点为圆心的相当大的圆域内.

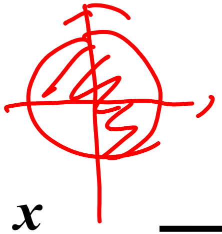
即若D为有界区域，则存在正数R，使得

$$D \subset U(0, R).$$

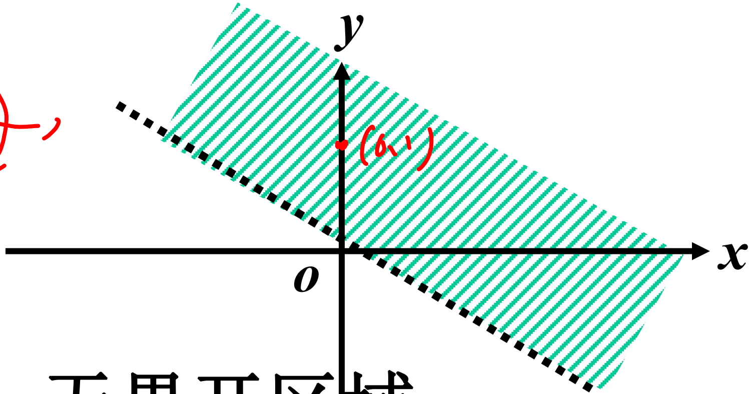
$$\{(x, y) \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$$



有界闭区域；



$$\{(x, y) \mid x + y > 0\}$$



无界开区域.

二、多元函数的概念

1、二元函数的定义

$D \xrightarrow{f} R$

$(x,y) \longrightarrow z=f(x,y)$

设 D 是 xoy 平面上的一个点集，如果对于任意点 $P(x,y)\in D$，按照某个对应法则，变量 z 总有唯一确定的值与之对应，则称变量 z 是变量 x,y 的二元函数，记为 $z=f(x,y)$.

其中：x,y 称为自变量，z 称为因变量.

D 称为函数 $z=f(x,y)$ 的定义域，

全体函数值的集合 $\{z \mid z=f(x,y),\ (x,y)\in D\}$ 称为函数的值域.

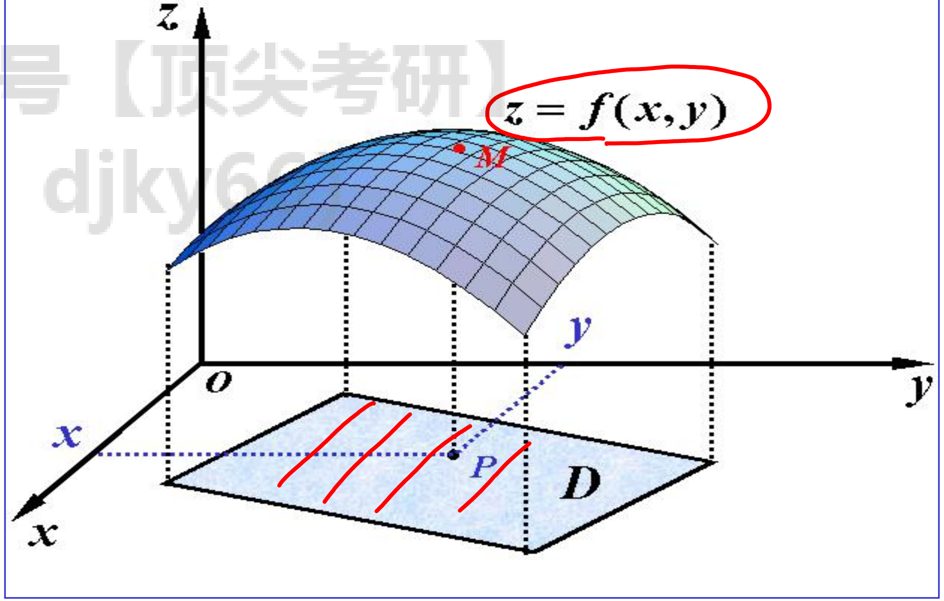
2、二元函数的几何意义

设二元函数 $z = f(x, y)$的定义域为 D，对任意点$P(x, y) \in D$，对应的函数值 $z = f(x, y)$. 以x为横坐标，y为纵坐标，z为竖坐标在空间就确定一点$M(x, y, z)$，当(x, y)取遍D上的一切点时，得一个空间点集

$$\{(x, y, z) \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$$

这个点集称为二元函数 $z = f(x, y)$的图形.

$u=f(x,y,z)$



在空间直角坐标系中，二元函数通常表示一个曲面，其定义域 D 为该曲面在 xoy 平面上的投影区域．

3、多元函数的定义

设D为一个非空的 n元有序数组的集合，若 对$\forall(x_1,x_2,\cdots x_n)\in D$，通过对应法则 f，存在唯一确定的实数y与之对应，则称 y是变量$x_1,x_2,\cdots x_n$的n元函数．记为

$D\subset R^n$

$$y=f(x_1,x_2,\cdots x_n)\quad (x_1,x_2,\cdots x_n)\in D.$$

其中：$x_1,x_2,\cdots x_n$称为自变量， y称为因为变量．

D称为函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots x_n)$的定义域，

全体函数值的集合

$\{y\,|\,y=f(x_1,x_2,\cdots x_n)$，$(x_1,x_2,\cdots x_n)\in D\}$称为函数的值域.

二元及二元以上的函数 统称为多元函数．

三、二元函数的极限

$f(x,y)=A$

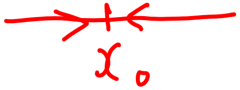
设函数 $z=f(x,y)$ 在平面区域 D 上有定义，

若对任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得

当 $0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，恒有

$|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 A 为函数 $z=f(x,y)$

当 $x\to x_0, y\to y_0$ 时的极限，记作



$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

或 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$， $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$，

几点说明:

分母→0 ⇒ 分子→0

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$，是指点$(x,y)$以任何方式趋于$(x_0,y_0)$时，$f(x,y)$都趋于$A$.

$h(x,y)\le f(x,y)\le g(x,y)$　　$\lim \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}=A$

如果有两种不同趋近方式，使 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$存在，但两者不相等，此时也可断言$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处极限不存在.

局部保号性 $f(x,y)>0$ $\Leftarrow$ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A>0$　$U(P)$

$\Leftrightarrow f(x,y)=A+\alpha(x,y)\ (\alpha\to 0)$

(2) 二元函数的极限也叫 二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$;

二次

(3)二元函数的极限运算法则及性质与一元函数类似.

例 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin xy}{x}$

考 1° 求重极限（常以一元计算之）
2° 证明极限不存在

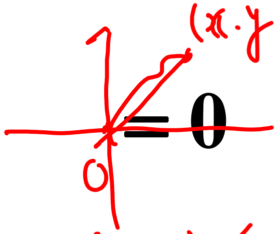
解 令 $u = xy$，则当 $(x, y) \to (0, 2)$ 时，$u \to 0$，

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{xy} \cdot y$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} \cdot \lim_{y\to 2} y$$

$$= 2.$$

例 1、 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$



$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos\theta \\ y = y_0 + r\sin\theta \end{cases}$$

$$(x, y) \to (0, 0) \Longleftrightarrow r \to 0$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta \cdot \cancel{r^2}\sin^2\theta}{\cancel{r^2}}$$

$$= \lim_{r\to 0} r \boxed{\cos\theta\sin^2\theta}$$

有界

$$= 0$$

例 2、 证明极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

y=kx

证明 考察点 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$, 有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2},$$

与k有关

当 k 取不同值时， $\dfrac{k}{1+k^2}$ 也取不同值，

如：$k=1$ 时，$\dfrac{k}{1+k^2}=\dfrac{1}{2}$， $k=2$ 时，$\dfrac{k}{1+k^2}=\dfrac{2}{5}$，

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在 .

确定极限不存在的方法：

(1)令$P(x,y)$沿直线$y=kx$趋向于$P_0(x_0,y_0)$,

若极限值与k有关，则可断言极限不 存在；

(2)找两种不同趋近方式,使$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$存在但不相等,

则$z=f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$处极限不存在.

问题： 若点 (x,y)沿着无数多条平面曲线 趋

向于点(x_0,y_0)时，函数 $z=f(x,y)$都趋向于 **不能.**

A，能否断定 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$?

例、讨论极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 的存在性.　　$x=ky^2$

— 不∃ ✓

$=0$ ✗

分析：取 $y=kx$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=kx\to0}}\frac{k^2x^3}{x^2+k^4x^4}=\lim_{x\to0}\frac{k^2x}{1+k^4x^2}=0$$

又：取 $x=ky^2$ — k不同，极限

$$\lim_{y\to0}\frac{ky^4}{k^2y^4+y^4}=\frac{k}{k^2+1}$$

与k有关

四、二元函数的连续性

1、定义 设二元函数 $f(x,y)$满足条件：

(1) 在点(x_0,y_0)的某邻域内有定义；

(2) 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$存在；

(3) 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$

则称函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续．否则称点(x_0,y_0)是$f(x,y)$的间断点．

如果 $f(x,y)$在平面区域 D内的每一点都连续，则称函数 $f(x,y)$在区域 D内连续．

一般地，求$\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$时，如果$f(P)$是连续函数，且$P_0$是$f(P)$的定义域的内点，则$f(P)$在点$P_0$处连续，于是$\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$.

$\frac{0}{0}$

$u=xy$

$=\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sqrt{1+u}-1}{u}=\frac{1}{2}$

例 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(\sqrt{xy+1}-1)(\sqrt{xy+1}+1)}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\cancel{xy}+\cancel{1}-\cancel{1}}{\cancel{xy}(\sqrt{xy+1}+1)}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{\sqrt{xy+1}+1}=\frac{1}{\sqrt{0\cdot 0+1}+1}=\frac{1}{2}.$$

2、连续函数的性质

(1) 二元连续函数经过有限次的四则运算和复合运算后仍为二元连续函数.

(2) 闭区域上连续函数的性质

[1] 最大值和最小值定理

有界闭区域D上的二元连续函数，必在D上取得最大值和最小值.

[2] 介值定理

有界闭区域D上的二元连续函数，在D上必定取得最大值和最小值的任何值.

五、二元函数的偏导数

$y=f(x)$ $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

1、偏增量，全增量

设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内有定义.

(1)、当x从x_0取得改变量$\Delta x(\Delta x\neq 0)$，而$y=y_0$保持不变时，函数z的改变量

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$$

称为函数$z=f(x,y)$ 对于x的偏改变量或偏增量

(2)、当y从y_0取得改变量$\Delta y(\Delta y \neq 0)$,而$x = x_0$保持不变时,函数$z$的改变量

$$(\Delta z)_y \quad \Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

称为函数$z = f(x, y)$对于y的偏改变量或偏增量

(3)、当x从x_0取得改变量$\Delta x(\Delta x \neq 0)$, y从y_0取得改变量$\Delta y(\Delta y \neq 0)$,函数$z$的改变量

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

称为函数$z = f(x, y)$的全改变量或全增量

2、偏导数

(1)、定义 设函数$z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)的某邻域内有定义

如果当$\Delta x \to 0$时,极限 $= \left.\dfrac{df(x, y_0)}{dx}\right|_{x=x_0}$

$\dfrac{dy}{dx}$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为函数$f(x, y)$在(x_0, y_0)处对x的偏导数.

整体 记为 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$, f_x $z'_x\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ f_x 或$f'_x(x_0, y_0)$.

即 $$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = z'_x\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = f'_x(x_0, y_0)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

如果当$\Delta y\to 0$时，极限

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y} = \frac{df(x_0,y)}{dy}\Big|_{y=y_0}$$

存在，则称此极限值为函数$f(x,y)$在(x_0,y_0)处对y的偏导数.

记为 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$, $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$, $\left.z'_y\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$ 或 $f'_y(x_0,y_0)$.

(x_0, y_0, z_0)

即 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=\left.z'_y\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=f'_y(x_0,y_0)$

$u=f(x,y,z)$

$$f'_x(x_0,y_0,z_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

$$=\frac{df(x,y_0,z_0)}{dx}\Big|_{x=x_0}$$

如果函数$z=f(x,y)$在区域D内任意一点(x,y)处对x的偏导数存在，那么这个偏导数就是x、y的函数，它就称为函数$z=f(x,y)$对自变量x的偏导数．记为

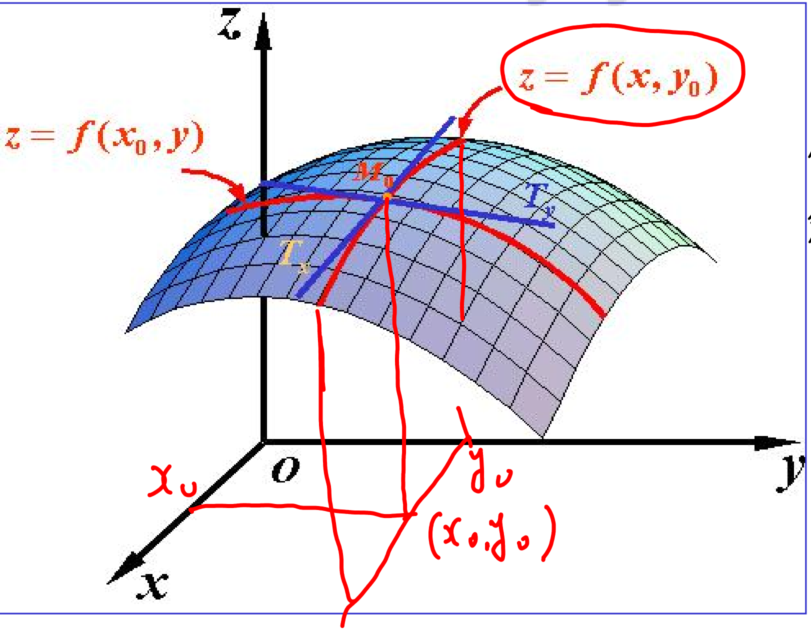
$$\frac{\partial z}{\partial x}、\frac{\partial f}{\partial x}、z_x' 或 f_x'(x,y).$$

同理定义函数 $z=f(x,y)$对自变量 y的偏导数．记为

$$\frac{\partial z}{\partial y}、\frac{\partial f}{\partial y}、z_y' 或 f_y(x,y).$$

3、偏导数的几何意义

设 $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 为曲面 $z = f(x, y)$ 上一点,



偏导数 $f_x(x_0, y_0)$ 就是曲面被平面 $y = y_0$ 所截得的曲线在点 M_0 处的切线 M_0T_x 对 x 轴的斜率.

偏导数 $f_y(x_0, y_0)$ 就是曲面被平面 $x = x_0$ 所截得的曲线在点 M_0 处的切线 M_0T_y 对 y 轴的斜率.

4、高阶偏导数

二阶

函数的一阶偏导数的偏导数称为二阶偏导数.

如 $z = f(x,y)$

$$
\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{xx}(x,y), \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = f''_{yy}(x,y)
\end{array}\right\} \text{纯偏导}
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = f''_{xy}(x,y), \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = f''_{yx}(x,y)
\end{array}\right\} \text{混合偏导}
$$

类似可定义n阶偏导数,

二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数.

定理、 若函数 $z=f(x,y)$ 的两个混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在点 (x_0,y_0) 处连续，则它们相等。

六、全微分

如果函数$z = f(x, y)$在点(x, y)的某邻域内有定义，对于自变量在点(x, y)处的改变量Δx、Δy，函数相应的全增量

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$
$$= \boxed{A\Delta x + B\Delta y} + o(\rho)$$

其中：A、B是x, y的函数，与Δx、Δy无关；

$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$，$o(\rho)$是比$\rho$更高阶的无穷小量.

则称$z = f(x, y)$在点(x, y)处可微分，$A\Delta x + B\Delta y$称为$z = f(x, y)$在点(x, y)处的全微分. 记为

$$dz = df(x, y) = A\Delta x + B\Delta y. = Adx + Bdy$$

$y = f(x)$ $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ $= A\Delta x + o(\Delta x)$ $|\Delta x| |\Delta \ldots$

可微 $\rightleftarrows$ 可导

$(\Delta x, \Delta y)$

$|\Delta x|, |\Delta y|$

若函数在某区域D内各点处处可微分，则称这函数在D内可微分.

1° 如果函数$z = f(x, y)$在点(x, y)的可微分,则函数在该点连续.

$\rho \to 0 \Leftrightarrow \Delta x \to 0\ \Delta y \to 0$

$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x, y) = \Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$, $\lim\limits_{\rho \to 0} \Delta z = 0$,

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x + \Delta x, y + \Delta y) = \lim_{\rho \to 0}[f(x, y) + \Delta z] = f(x, y)$$

故函数$z = f(x, y)$在点(x, y)处连续.

一元函数在某点的导数存在 $\Longleftrightarrow$ 微分存在.

多元函数的各偏导数存在 $\overset{?}{\Longleftrightarrow}$ 全微分存在.

说明：多元函数的各偏导数存在并不能保证全微分存在，

定理 (可微的必要条件) 如果 函数$z=f(x,y)$在点(x,y)可微,则$z=f(x,y)$在点(x,y)的偏导数$f'_x(x,y)$、$f'_y(x,y)$存在,且$z=f(x,y)$在点(x,y)的全微分

$$dz = \overset{A}{\boxed{f'_x(x,y)}}dx + \overset{B}{\boxed{f'_y(x,y)}}dy.$$

证 如果函数 $z=f(x,y)$在点$P(x,y)$可微分,

$$\Delta z = \underline{A}\Delta x + \underline{B}\Delta y + o(\rho)$$

当$\underline{\Delta y=0}$时,上式仍成立, $\rho=\sqrt{\Delta x^2+0^2}=|\Delta x|$,

$\Delta_x z$

$$\underline{\Delta z} = f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=A\cdot\Delta x+\underline{o(|\Delta x|)},\quad \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

$|\Delta x|$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=A=f'_x(x,y),$$

同理可得 $B=f'_y(x,y)$.

定理 (可微的充分条件) 如果函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x,y) 的某邻域内有连续的偏导数 $f_x'(x,y)$、$f_y'(x,y)$，则 $z = f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，并且

在(x,y)处

$$dz = df(x,y) = f_x'(x,y)dx + f_y'(x,y)dy.$$

1° 不连续 ⇒ 不可微

2° 偏导不存在 ⇒

3° 偏导存在，如何判断

$$\Delta z = \underbrace{A}_{f_x}\Delta x + \underbrace{B}_{f_y}\Delta y + o(\rho)$$

注： $z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微的充分必要条件为

$$\Delta z - f_x\Delta x - f_y\Delta y = o(\rho)$$

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\overbrace{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}^{\Delta z} - f_x'(x_0,y_0)\Delta x - f_y'(x_0,y_0)\Delta y}{\rho} = 0$$

多元函数连续、偏导存在、可微的关系：

$z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处

$f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$

$$\begin{array}{ccccc} & & & \nearrow & \text{函数偏导存在} \\ \text{偏导数连续} & \Rightarrow & \text{函数可微} & & \not\Downarrow \ \not\Uparrow \\ & & & \searrow & \text{函数连续} \end{array}$$

$y=f(x)$ 在点 x_0 处

一元函数

（注意：与一元函数有很大区别）

极限∃ ⇐ 连续

常考题型与典型例题

个概念

例 3(1997-1) 二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$ 的在点(0,0)处

分段函数 → $(x,y)\neq(0,0)$

$\Longleftrightarrow (x,y)$

答案：C

(A) 连续、偏导数存在.　　(B) 连续、偏导数不存在.

(C) 不连续、偏导数存在.　　(D) 不连续、偏导数不存在.

分析 1° $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\dfrac{kx^2}{(1+k^2)x^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$ 不存在，不连续

$f_y(0,0)=0$

2° $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}0=0$

例 4(1994-12) 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$, $f'_y(x_0,y_0)$ 存在，是 $f(x,y)$ 在该点连续的

(A) 充分而非必要条件.　　(B) 必要而非充分条件.

(C) 充分必要条件.　　(D) 既非充分也非必要条件.

如 $z=f(x,y)=|x|+|y|$ 在 $(0,0)$ 处连续，

但 $f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不∃

答案：D

例 5(2012-3) 设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0,$$

则 $dz\,|_{(0,1)}=$ $\underline{\;2dx-dy\;}$

$=\alpha(x,y)$ $\quad 2f'_x(0,1)-3f'_y(0,1)=$ 相等

ρ: (x,y) 到 $(0,1)$ 的距离

$1+y-1$

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,1)-f'_x(0,1)x-f'_y(0,1)(y-1)}{\rho}=0$$

$1°$ 分子 $\to 0 \Rightarrow$ 分子 $\to 0 \Rightarrow f(0,1)-1=0 \Rightarrow f(0,1)=0$

$2°$
$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x,y)-1-2x-[-(y-1)]}{\rho}=0$$

$\Rightarrow f'_x(0,1)=2 \quad f'_y(0,1)=-1$

V研客 在线教育 www.vyanke.com

例 6、 证明以下几个反例

(1) $f(x,y)=|x|+|y|$ 在(0,0)连续，但偏导数不存在(也不可微)

(2) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 在(0,0)处偏导数存在，但不连续.

(3) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在(0,0)处偏导数存在，但不可微.

分析 1° $f_x'(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0-0}{x}=0$ $\quad f_y'(0,0)=0$

2° $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}\overset{?}{=}0$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ $\quad$ 不∃ $\quad$ 不可微

(4) $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在(0,0)处可微，但偏导数不连续.

1° $f_x'(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x^2}}{x}=0$

2° $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0$ 可微

3° $(x,y)\neq(0,0)$ 时

$f_x'(x,y)=2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}+(x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{-2x}{(x^2+y^2)^2}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f_x'(x,y)=$ 不存在

例 7(2017-2) 设 $f(x,y)$ 具有一阶偏导数，且在任意的 (x,y)，都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} > 0, \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} < 0$，则 答案：D

$x_1 < x_2$ $f(x,y)$ 关于 x 是单调增加 关于 y ↓

$f(x_1,y) < f(x_2,y)$

(A) $f(0,0) > f(1,1)$.　　(B) $f(0,0) < f(1,1)$.

(C) $f(0,1) > f(1,0)$.　　(D) $f(0,1) < f(1,0)$.

举例

$f(x,y) = x - y$　$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 1 > 0$　$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -1 < 0$

$f(0,0) = 0$　$f(1,1) = 0$　$f(0,1) = -1 < 0$

$f(0,0) < f(1,1)$　$f(0,1)$　$f(1,0) = 1 > 0$

$f(1,1) < f(1,0)$　$< f(1,1)$

$< f(1,0)$

第二节 多元函数的微分法

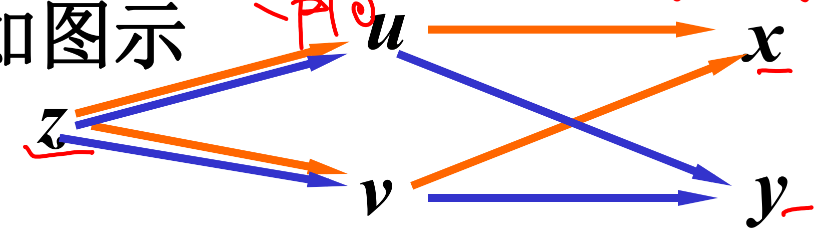
一、复合函数的微分法

定理 如果 $u=\varphi(x,y)$ 及 $v=\psi(x,y)$ 都在点 (x,y) 具有对 x 和 y 的偏导数，且函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导数，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在对应点 (x,y) 的两个偏导数存在．且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$

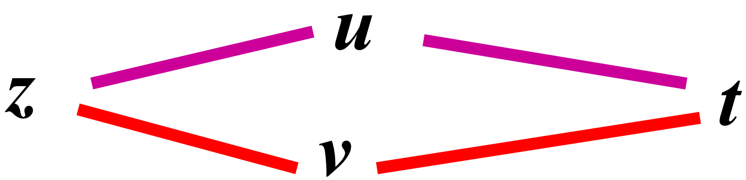
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

链式法则如图示



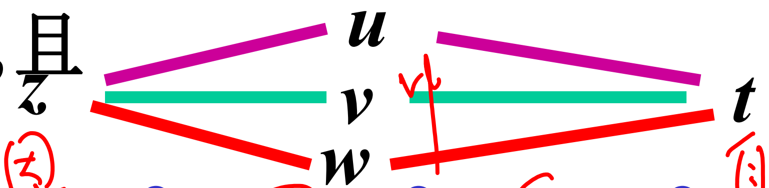
定理 如果 $u=\varphi(t)$ 及 $v=\psi(t)$ 都在点 t 可导，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导数，则复合函数 $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$ 在对应点 t 可导，且其导数可用下公式计算：

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}.$$



上定理的结论可推广到中间变量多于两个的情况.

如 如果 $u=\varphi(t)$、$v=\psi(t)$及$w=\rho(t)$都在点 t 可导,函数 $z=f(u,v,w)$在对应点 (u,v,w)具有连续偏导数,则复合函数 $z=f[\varphi(t),\psi(t),\rho(t)]$在对应点 t可导,且



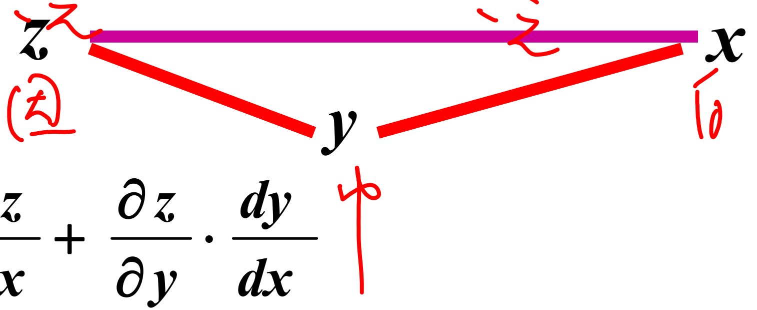
$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dt}$$

以上公式中的导数 $\frac{dz}{dt}$ 称为**全导数.**

特殊地

如果 $z = f(x, y)$, $y = \varphi(x)$, $z = f[x, \varphi(x)]$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$



$$\because \frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$\dfrac{dz}{dx}$ 与 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 不相同.

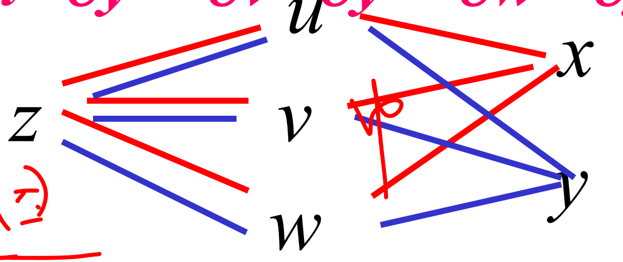
左边 $\dfrac{dz}{dx}$ 中 z 是作为一个自变量 x 的函数, 对 x 求导.

而右边 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 中 z 是作为 x, y 的二元函数, 对 x 求偏导.

类似地可推广到 如果 $u=\varphi(x,y)$、$v=\psi(x,y)$ 及 $w=w(x,y)$ 都在点 (x,y) 具有对 x 和 y 的偏导数，且函数 $z=f(u,v,w)$ 在对应点 (u,v,w) 具有连续偏导数，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y),w(x,y)]$ 在对应点 (x,y) 的两个偏导数存在．且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}$$



$z=f(x,u,v)$

$u=u(x,y)$

$v=v(x,y)$

$\frac{\partial z}{\partial x}$ 之 $z=f(x,u(x,y),v(x,y))$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$

全微分形式不变性

$z = f(u(x,y), v(x,y))$

设 $z=f(u,v)$, $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$，如果 $f(u,v)$, $u(x,y)$, $v(x,y)$ 分别有连续偏导数，则复合函数 $z=f(u,v)$ 在 (x,y) 处的全微分仍可表为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv,$$

即无论 u,v 是自变量还是中间变量，上式总成立.

$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$

注：全微分形式不变性可理解为：对什么变量求偏导就乘以什么变量的微分，不论这个变量是自变量，还是中间变量.

$z = f(x+y, x-y)$

$dz = f'_u du + f'_v dv = f'_1 d(x+y) + f'_2 d(x-y)$

$= (f'_1 + f'_2) dx + (f'_1 - f'_2) dy$

二、隐函数的微分法

定理1 设函数$F(x,y)$在点$P(x_0,y_0)$的某一邻域内具有连续偏导数，且$F(x_0,y_0)=0$，$F'_y(x_0,y_0)\neq 0$，则方程$F(x,y)=0$在点$P(x_0,y_0)=0$的某一邻域内恒能确定一个单值连续且有连续导数的函数$y=f(x)$，它满足条件$y_0=f(x_0)$，并有

$f(x)$

1° 公式法

$F'_x+F'_y\cdot\frac{dy}{dx}=0$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}$$

2° 两边对x求导

3° 两边微分

全微分

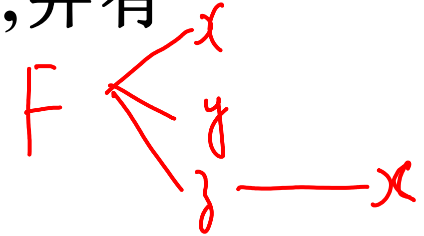
$F'_x dx+F'_y dy=0$

定理2 设函数$F(x,y,z)$在点$P(x_0,y_0,z_0)$的某一邻域内具有连续偏导数，且$F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则方程$F(x,y,z)=0$在点$P(x_0,y_0,z_0)=0$的某一邻域内恒能确定一个单值连续且有连续导数的函数$z=f(x,y)$，它满足条件$z_0=f(x_0,y_0)$，并有

1° 公式

2° 两边对x求偏导

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}.$$



$F'_x+F'_z\frac{\partial z}{\partial x}=0$

$dz=-\frac{F'_x}{F'_z}dx-\frac{F'_y}{F'_z}dy$

3° 两边微分

$F'_x dx+F'_y dy+F'_z dz=0$

注：(数学一)

方程组

设由方程组 $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 & ① \\ G(x,y,u,v)=0 & ② \end{cases}$，确定 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，

则通过等式两边同时对 x，y 求偏导，可解出 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$

$$\begin{cases} F'_x + F'_u \dfrac{\partial u}{\partial x} + F'_u \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 & ③ \\ G'_x + G'_u \dfrac{\partial u}{\partial x} + G'_u \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 & ④ \end{cases}$$

常考题型与典型例题

一、复合函数的偏导数与全微分

$z=f(x,u(x,y),v(x,y))$ 一元

$u=u(x,y)$

$v=v(x,y)$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$

1、初等函数的偏导数和全微分；

2、求抽象函数的复合函数的偏导数和全微分；

$z=f(x,y)$

$y=g(x)$

$z=f(x,g(x))$ 一元

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}$

$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$

$z=f(x,u,v)$

$\frac{\partial z}{\partial x}\neq\frac{\partial f}{\partial x}$

例 1(2011-1) 设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}dt$，则 $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{x=0,y=2}=$ **4**

法1：常规

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{y\sin(xy)}{1+x^2y^2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{(0,2)}=y\cdot\left.\frac{y\cos(xy)(1+x^2y^2)-\sin(xy)\cdot 2xy^2}{(1+x^2y^2)^2}\right|_{(0,2)}=4$$

法2：

$$\left.\frac{d[F_x'(x,2)]}{dx}\right|_{x=0}=\left.\frac{d}{dx}\left(\frac{2\sin(2x)}{1+4x^2}\right)\right|_{x=0}=2\left.\frac{2\cos 2x\cdot(1+4x^2)-8x\sin 2x}{(1+4x^2)^2}\right|_{x=0}$$

定义

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\sin(2x)}{1+4x^2}-0}{x}=4$$

例 2(2011-3) 设函数 $z=\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$，则 $dz\big|_{(1,1)}=$ $(2\ln 2+1)dx+(-2\ln 2-1)dy$

$= \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1)}dx+\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,1)}dy$

笔指

$=e^{\frac{x}{y}\ln\left(1+\frac{x}{y}\right)}$

$\boxed{\text{法1}}$ $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1)}=\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}\left(\frac{1}{y}\ln\left(1+\frac{x}{y}\right)+\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}\right)\Big|_{(1,1)}=2\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right)$

$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,1)}=\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\ln\left(1+\frac{x}{y}\right)+\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right)\Big|_{(1,1)}=2\left(-\ln 2-\frac{1}{2}\right)$

法2 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1)}=\frac{dz(x,1)}{dx}\Big|_{x=1}=\frac{d(1+x)^x}{dx}\Big|_{x=1}$

$e^{x\ln(1+x)}$

例 3(2007-1) 设 $f(u,v)$ 是二元可微函数，$z=f(x^y,y^x)$，

"1" "2"

则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ ______.

$$f_1'\cdot yx^{y-1}+f_2'\cdot y^x\ln y.$$

z — u — x, y; v — x, y

解：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot y\cdot x^{y-1}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot y^x\ln y$$

$$=yx^{y-1}f_1'+y^x\ln y\, f_2'$$

例 4(2017-12) 设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数，$y=f(e^x,\cos x)$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$，$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$

$u=e^x \quad v=\cos x$

$f_1'(1,1)$, $f_{11}''(1,1)+f_1'(1,1)-f_2'(1,1)$.

解：

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=e^x f_1' + \sin x f_2'\Big|_{x=0}=f_1'(1,1)$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=\left[e^x f_1' + e^x\left(e^x f_{11}'' + \sin x f_{12}''\right) - \cos x f_2' - \sin x\left(f_{21}''\cdot e^x - \sin x f_{22}''\right)\right]\Big|_{x=0}$$

f_2'

$y \; \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \; x$

f_1'

例 5(2019-3) 设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x,y)=xy-f(x+y,x-y)$．求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$．

(10分)

$1-3f''_{11}-f''_{22}$．

解：

$\frac{\partial g}{\partial x}=y-f'_1-f'_2$ $\quad \frac{\partial g}{\partial y}=x-f'_1+f'_2$

$-f'_2$

$f \begin{cases} 1 \begin{cases} x \\ y \end{cases} \\ 2 \begin{cases} x \\ y \end{cases} \end{cases}$

f'_1

$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=-(f''_{11}+f''_{12})-(f''_{21}+f''_{22})=-f''_{11}-2f''_{12}-f''_{22}$

$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=1-(f''_{11}-f''_{12})-(f''_{21}-f''_{22})=1-f''_{11}+f''_{22}$

$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=-(f''_{11}-f''_{12})+(f''_{21}-f''_{22})=-f''_{11}+2f''_{12}-f''_{22}$

例 6(2009-2) 设 $z=f(x+y,x-y,xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 dz 与 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

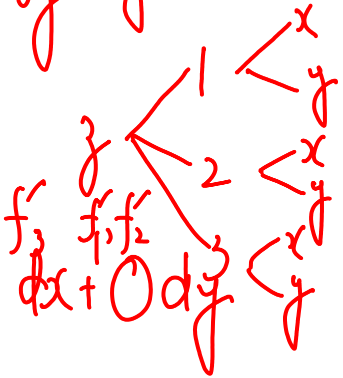
$(f_1'+f_2'+yf_3')dx+(f_1'-f_2'+xf_3')dy$　　$f_3'+f_{11}''-f_{22}''+xyf_{33}''+(x+y)f_{13}''+(x-y)f_{23}''$

$.(f_1'+f_2'+yf_3')dx+(f_1'-f_2'+xf_3')dy$

法一 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_2'+yf_3'$　　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f_1'-f_2'+xf_3'$

法二 $dz=f_1'd(x+y)+f_2'd(x-y)+f_3'd(xy)$

$=f_1'(dx+dy)+f_2'(dx-dy)+f_3'(ydx+xdy)=\boxed{\ }dx+\bigcirc dy$



$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''-f_{12}''+xf_{13}''+f_{21}''-f_{22}''+xf_{23}''+f_3'+y(f_{31}''+f_{32}''+xf_{33}'')$$

例 7(2011-12) 设函数 $z=f(xy,yg(x))$，函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$．求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$．

$g'(1)=0$

$f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1)$

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+yg'(x)f_2'$　$=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1)$

$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=\Big\{f_1'+y(xf_{11}''+g(x)f_{12}'')+g'(x)\big[f_2'+y(xf_{21}''+g(x)f_{22}'')\big]\Big\}\Big|_{(1,1)}$

另解：$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}=yf_1'(y,y)$　$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=\left.\dfrac{d\big(yf_1'(y,y)\big)}{dy}\right|_{y=1}$

$=\left[f_1'(y,y)+y\big(f_{11}''(y,y)+f_{12}''(y,y)\big)\right]\Big|_{y=1}$

例 8(2014-12) 设函数 $f(u)$ 具有 2 阶连续导数，$z = f(e^x \cos y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y)e^{2x}$. 若 $f(0) = 0, f'(0) = 0$，求 $f(u)$ 的表达式.

$\dfrac{1}{16}(e^{2u} - e^{-2u} - 4u)$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x} = f'(u)e^x \cos y$　　$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -f'(u)e^x \sin y$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u)e^{2x}\cos^2 y + f'(u)e^x \cos y$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = +f''(u)e^{2x}\sin^2 y - f'(u)e^x \cos y$

$f''(u)e^{2x} = (4f(u) + u)e^{2x}$

$f''(u) - 4f(u) = u$

$r^2 - 4 = 0$　$r_{1,2} = \pm 2$

$y^* = Au + B$　$-4(Au+B) = u$

$f(u) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{4}u$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 - 2c_2 - \frac{1}{4} = 0 \end{cases}$$

二、隐函数的偏导数与全微分

1、由方程确定的隐函数 $\boxed{\text{(读)}}$

(1)方程两边求偏导数；

(2)方程两边微分；

(3)公式法.

2、由方程组所确定的隐函数的偏导数(数学一)

(3 4)

例 9(2015-23) 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定，则 $dz\big|_{(0,0)} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}dx+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}dy$ $=-\frac{1}{3}dx-\frac{2}{3}dy$.

$x=0,\ y=0 \Rightarrow z=0$

法一：两边求微分

$dx+2dy+3dz=0$

$e^{x+2y+3z}d(x+2y+3z)+yzdx+xzdy+xydz=0$

$x=0,\ y=0,\ z=0$

法二：两边对 x 求偏导

$e^{x+2y+3z}\left(1+3\frac{\partial z}{\partial x}\right)+y\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0$

$x=0,\ y=0,\ z=0 \Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}$

$y=0$

$e^{x+3z}=1$

$e^{x+3z}\left(1+3\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0$

$=-\frac{1}{3}$

法三：$F(x,y,z)=e^{x+2y+3z}+xyz-1$

$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=-\left.\frac{F_x'}{F_z'}\right|_{(0,0)}=-\left.\frac{e^{x+2y+3z}+yz}{e^{x+2y+3z}\cdot 3+xy}\right|_{(0,0)}=-\frac{1}{3}$

或：$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\left.\frac{dz(x,0)}{dx}\right|_{x=0}$

例 10(1988-4) 已知 $u+e^{u}=xy$，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$．$\dfrac{(1+e^{u})^2-xye^{u}}{(1+e^{u})^3}$．

解：两边分别对 x，y 求偏导

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{1+e^u}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+e^u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=y\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{1+e^u}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1+e^u-ye^u\cdot\frac{\partial u}{\partial y}}{(1+e^u)^2}$$

例 11(2010-12) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$ 确定，其中 F 为可微函数，且 $F_2'\neq 0$，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$ ______.

答案：B

(A) x. (B) z. (C) $-x$. (D) $-z$.

分析 公式

$=z$

$F<\begin{matrix}1<\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\\2<\begin{matrix}x\\z<\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{F_1'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+F_2'\cdot\left(-\frac{z}{x^2}\right)}{F_2'\cdot\frac{1}{x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{F_1'\cdot\frac{1}{x}}{F_2'\cdot\frac{1}{x}}$$

$$F_1'd\frac{y}{x}+F_2'd\frac{z}{x}=0$$

$$F_1'\frac{xdy-ydx}{x^2}+F_2'\frac{xdz-zdx}{x^2}$$

$$dz=\square dx+\square dy$$

例12(2001-3) 设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数，又函数 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$ 分别由下列两式确定：

$$e^{xy}-xy=2 \quad 和 \quad e^x=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt，求\frac{du}{dx}.$$

全导数

$$u\begin{cases}x\\ y-x\\ z-x\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial y}+\left[1-\frac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)}\right]\frac{\partial f}{\partial z}.$$

分析

$$\frac{du}{dx}=f_1'+f_2'\boxed{\frac{dy}{dx}}+f_3'\boxed{\frac{dz}{dx}}$$

① 两边对 x 求导 $e^{xy}\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)-\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)=0$ 解之 $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$

② x $e^x=\frac{\sin(x-z)}{x-z}\left(1-\frac{dz}{dx}\right)\Rightarrow\frac{dz}{dx}$

例 13(2008-3) 设 $z=z(x,y)$是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数，其中 φ 具有二阶导数，且 $\varphi'\neq -1$ 时，求

(Ⅰ) dz; $= \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ $\frac{-\varphi'+2x}{\varphi'+1}dx+\frac{-\varphi'+2y}{\varphi'+1}dy$

法二、两边求微分

$2xdx+2ydy-dz = \varphi'(dx+dy+dz)$

(Ⅱ) 记 $u(x,y)=\frac{1}{x-y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$. $=\frac{2(1+2x)\varphi''}{(\varphi'+1)^3}$ $\varphi''(x+y+z)$

法一、公式法 $F(x,y,z)=x^2+y^2-z-\varphi(x+y+z)$

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{2x-\varphi'}{-1-\varphi'}=\frac{2x-\varphi'}{1+\varphi'}$ $\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y-\varphi'}{1+\varphi'}$ $\Rightarrow dz = ①dx + ②dy$

$u(x,y)=\frac{2}{1+\varphi'}$ $\quad \frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2}{(1+\varphi')^2}\cdot\varphi''\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)$

第三节 多元函数的极值与最值

09-20 年多元函数极值及最值分数分布

	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
一	9		4	10	10		10			10		10	12
二	4		4	10	10	4	10	10		10		10	
三	9	10	10	10					4	10		10	12

(设)

多元函数的极值与最值

考试大纲要求：

1. 会求二元函数的极值；
2. 会用拉格朗日乘数法求多元函数的条件极值；
3. 会求简单多元函数的最大值和最小值；
4. 会解决简单的应用问题.

一、二元函数的极值

$y=f(x)$　　$f(x)<f(x_0)$　　$y=2$

1、定义

设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内有定义,对于该邻域内~~异于(x_0,y_0)~~的点(x,y):

(1)若满足不等式　　$f(x,y) \le f(x_0,y_0)$,

则称函数在(x_0,y_0)有极大值;

(2)若满足不等式　　$f(x,y) \ge f(x_0,y_0)$,

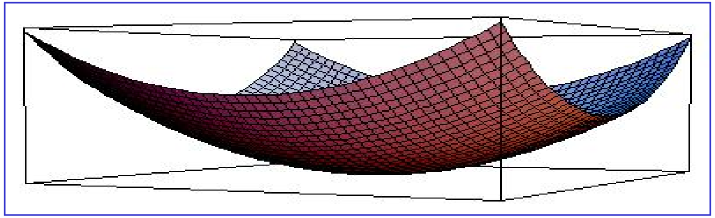
则称函数在(x_0,y_0)有极小值.

极大值和极小值统称为 极值.

使函数取得极值的点称 为极值点.

例 函数 $z = 3x^2 + 4y^2$ ≥ 0

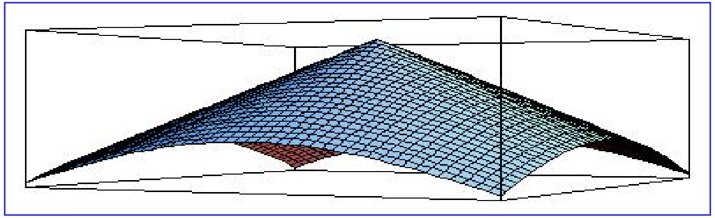
在 $(0,0)$ 处有极小值.



(1)

例 函数 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$

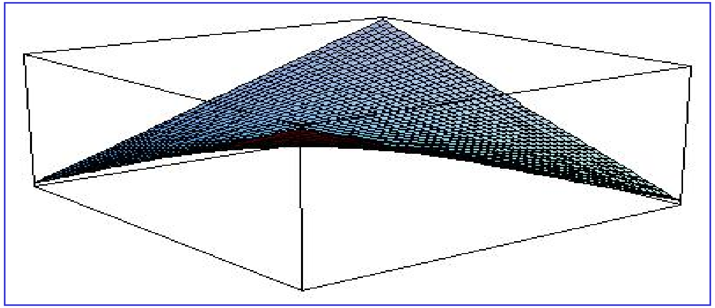
在 $(0,0)$ 处有极大值.



(2)

例 函数 $z = xy$

在 $(0,0)$ 处无极值.



(3)

2、极值存在的条件

定理1(必要条件) 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 具有偏导数，且在点 (x_0, y_0) 处有极值，则它在该点的偏导数必为零 .即

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

证 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处有极值，

则对于点 (x_0, y_0) 的某邻域内任意 (x, y),

都有 $f(x, y) \le f(x_0, y_0)$,

故当 $y = y_0$ 时， 一元函数 $z = f(x, y_0)$

在 $x = x_0$ 处有极大值， 因此，

$$f'_x(x_0, y_0) = 0,$$

同理可得 $f'_y(x_0, y_0) = 0.$

问题1： 若 $f(x_0,y)$ 及 $f(x,y_0)$ 在 (x_0,y_0) 点均取得极值，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 是否也取得到极值？

不一定　例如 $f(x,y)=x^2-y^2$，

当 $x=0$ 时，$f(0,y)=-y^2$ 在 $(0,0)$ 点取得极大值，

当 $y=0$ 时，$f(x,0)=x^2$ 在 $(0,0)$ 点取得极小值，

但 $f(x,y)=x^2-y^2$ 在 $(0,0)$ 点没有极值.

使一阶偏导数同时为零的点，称为函数的**驻点**.

偏导数存在的极值点 $\longrightarrow$ 驻点

注意： 驻点 $\not\longrightarrow$ 极值点

如 $(0,0)$ 是函数 $z=x^2-y^2$ 的驻点，但不是极值点.

问题2：如何判定一个驻点是否为极值点？

定理2(充分条件) 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有连续的二阶连续偏导数，且 (x_0,y_0) 是它的驻点，设

判别式 $\Delta = B^2 - AC = [f''_{xy}(x_0,y_0)]^2 - f''_{xx}(x_0,y_0)f''_{yy}(x_0,y_0)$

AC

则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处是否取得极值的条件如下：

(1)如果 $\Delta<0$，且

A的正负

$A=f''_{xx}(x_0,y_0)<0$，则 $f(x_0,y_0)$ 是极大值；

$A=f''_{xx}(x_0,y_0)>0$，则 $f(x_0,y_0)$ 是极小值；

(2)如果 $\Delta>0$，则 $f(x_0,y_0)$ 不是极值；

(3)如果 $\Delta=0$，则 $f(x_0,y_0)$ 是否为极值需另法判别．

求函数$z=f(x,y)$极值的一般步骤：

第一步：解方程组$\begin{cases} f'_x(x,y)=0, \\ f'_y(x,y)=0, \end{cases}$求出实数解，得驻点.

第二步：对于每一个驻点(x_0,y_0)，求出二阶偏导数的值.$A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$

第三步：定出$\Delta=B^2-AC$的符号，再判定是否是极值.

第四步：如果有偏导数不存在的点，判定是否是极值.

无条件极值： 对自变量除了限制在定义域内外，并无其他条件.

二、条件极值与拉格朗日乘数法

条件极值： 对自变量有附加条件的极值. 化归 $y=g(x)$ 代入

1.求函数$z=f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y)=0$下的极值.

$z=f(x,g(x))$

拉格朗日乘数法

(1)构造拉格朗日函数：

L

$$F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$$

其中λ为常数，称为拉格朗日 乘数.

(2)求联立解方程组

$$\begin{cases} F_x'(x,y)=f_x'(x,y)+\lambda\varphi_x'(x,y)=0 \\ F_y'(x,y)=f_y'(x,y)+\lambda\varphi_y'(x,y)=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

$F_\lambda'=0$

消去λ，解出(x, y)，则函数$f(x, y)$的极值点可能在解出的点(x, y)处取得.

(3)判别(x, y)是否为极值点.

(一般由具体问题的实际 意义进行判定).

拉格朗日乘数法可推广到自变量多于两个的情况:

2.求函数 $u = f(x, y, z)$在约束条件 $\varphi(x, y, z) = 0$, $\psi(x, y, z) = 0$下的极值 .

$$\begin{cases} \varphi = 0 \\ \psi = 0 \end{cases}$$

拉格朗日乘数法

(1)构造拉格朗日函数

$$F(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z) + \mu\psi(x, y, z)$$

其中 λ，μ为常数 (拉格朗日乘数).

(2)求联立解方程组

$\lambda = \frac{5}{4}$

$$
\begin{cases}
F'_x(x,y,z) = f'_x(x,y,z) + \lambda\varphi'_x(x,y,z) + \mu\psi'_x(x,y,z) = 0 \\
F'_y(x,y,z) = f'_y(x,y,z) + \lambda\varphi'_y(x,y,z) + \mu\psi'_y(x,y,z) = 0 \\
F'_z(x,y,z) = f'_z(x,y,z) + \lambda\varphi'_z(x,y,z) + \mu\psi'_z(x,y,z) = 0 \\
\varphi(x,y,z) = 0 \quad F'_\lambda = 0 \\
\psi(x,y,z) = 0 \quad F'_\mu = 0
\end{cases}
$$

消去 λ, μ，解出 (x,y,z)，则函数 $f(x,y,z)$的极值点可能在解出的点 (x,y,z)处取得．

(3)判别(x,y,z)是否为极值点.

三、多元函数的最值

定义2 设函数 $z=f(x,y)$在区域 D上有定义，点$(x_0,y_0)\in D$,如果对 $\forall(x,y)\in D$，恒有：

(1) $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$,

则称$f(x_0,y_0)$为函数 $z=f(x,y)$在D上的最大值，点(x_0,y_0)称为$z=f(x,y)$在D上的最大值点；

(2) $f(x,y)\ge f(x_0,y_0)$,

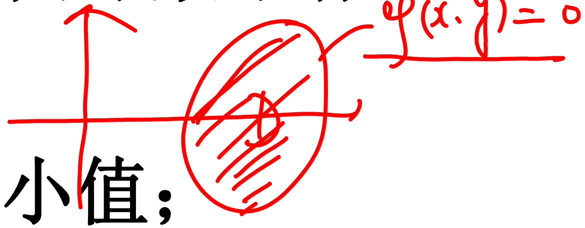
则称$f(x_0,y_0)$为函数 $z=f(x,y)$在D上的最小值，点(x_0,y_0)称为$z=f(x,y)$在D上的最大值点 .

最大值和最小值统称为最值.

求在有界闭区域上连续函数最值的一般方法：

1、求出函数在D内的所有驻点和偏导数不存在的；

$z=f(x,y)$ $D\subset R^2$



2、求在D的边界上的最大值和最小值；

$L=f+\lambda\varphi$

3、比较如上函数值的大小，其中最大者即为最大值，最小者即为最小值.

注：实际问题的最值

例 要造一个容量一定的长方体箱子，问箱子的长、宽、高各为多少时，其表面积最少？

解 设箱子的长、宽、高分别为x、y、z，容量为V，表面积为S，则

$$V = xyz\text{，其中 } x > 0, y > 0, z > 0.$$

$$S = 2(xy + yz + zx) = 2\left(xy + \frac{V}{x} + \frac{V}{y}\right),$$

令 $$\begin{cases} S'_x = 2\left(y - \dfrac{V}{x^2}\right) = 0, \\ S'_y = 2\left(x - \dfrac{V}{y^2}\right) = 0, \end{cases}$$ 得唯一驻点：$(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V})$，

由实际意义知，S一定存在最小值，

所以当长方体箱子的长、宽、高均为$\sqrt[3]{V}$时，

其表面积S取得最少值 $6\sqrt[3]{V^2}$.

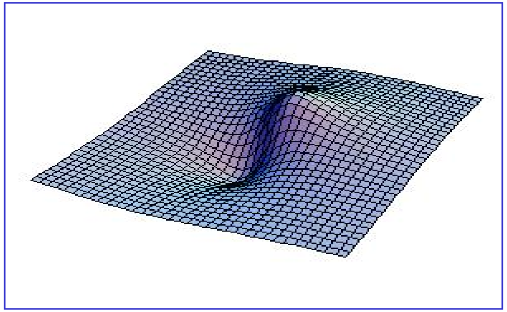
例 求 $z=\dfrac{x+y}{x^2+y^2+1}$ 的最大值和最小值 .

解 由 $z'_x=\dfrac{1\cdot(x^2+y^2+1)-2x\cdot(x+y)}{(x^2+y^2+1)^2}=0,$

$$z'_y=\frac{1\cdot(x^2+y^2+1)-2y\cdot(x+y)}{(x^2+y^2+1)^2}=0,$$

即 $\begin{cases}(x^2+y^2+1)-2x(x+y)=0,\\(x^2+y^2+1)-2y(x+y)=0,\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=y\\2x^2+1-4x^2=0\end{cases}$$



得驻点 : $\left(\dfrac{1}{\sqrt2},\dfrac{1}{\sqrt2}\right)$和$\left(-\dfrac{1}{\sqrt2},-\dfrac{1}{\sqrt2}\right),$

由$z=\dfrac{x+y}{x^2+y^2+1}$，得

$$z\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2\times\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1}=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

因为$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}=\dfrac{x+y}{x^2+y^2+1}=0$，即边界上的值为零.

所以最大值为$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，最小值为$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

常考题型与典型例题

考题形式

数学

1、二元函数的极值

（1）抽象函数——选择(小题，定义)

（2）具体函数——大，填，多

1) 显函数 $z = f(x, y)$；

2) 隐函数 $F(x, y, z) = 0$ 确定 $z = f(x, y)$；

隐条件

3）函数未知，根据已知先求出 $z = f(x, y)$；

2、多元函数的条件极值(最值)

拉格朗日乘数法

3、有界闭区域上多元连续函数的最值

4、实际问题

例 1(2003-3) 设可微函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得极小值，则下列结论正确的是

极小值

(A) $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数等于零.

(B) $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数大于零.

(C) $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数小于零.

(D) $f(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数不存在.

答案：A

例 2(2009-2) 设函数 $z = f(x,y)$ 的全微分为 $dz = xdx + ydy$，则点 $(0,0)$ $\Rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = x,\ \frac{\partial z}{\partial y} = y}$ 一阶连续偏导

（A）不是 $f(x,y)$ 的连续点.（B）不是 $f(x,y)$ 的极值点.

（C）是 $f(x,y)$ 的极大值点.（D）是 $f(x,y)$ 的极小值点.

1° 用充分条件 $A=1,\ B=0,\ C=1 \Rightarrow \Delta = B^2 - AC = -1 < 0$

答案：D

2° 求 $z = f(x,y)$

$z = \frac{1}{2}x^2 + c(y) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = c'(y) = y$

$\Rightarrow c(y) = \frac{1}{2}y^2 + C$

$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + C$

3° 取 $z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$

例 3(2017-3) 二元函数 $z = xy(3 - x - y)$ 的极值点是

(A) (0, 0). (B) (0, 3). (C) (3, 0). (D) (1, 1).

答案：D

例 4(2009-13) 求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

$$f(0,\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$$

$$u_{\max} = (-2)^2 + (-2)^2 + 8^2 = 72, u_{\min} = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6.$$

例 5(2008-2) 求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在约束条件 $z = x^2 + y^2$ 和 $x + y + z = 4$ 下的最大和最小值.

例 6(2005-2) 已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $dz=2xdx-2ydy$，并且 $f(1,1,)=2$．求 $f(x,y)$在椭圆域 $D=\{(x,y)|x^2+\frac{y^2}{4}\le 1\}$ 上的最大值和最小值.

最大值为3，最小值为-2.