

微信公众号【顶尖考研】

2022年研究生入学考试

高等数学(微积分)基础班

2021年1月

1° $n!j$ - (系数, 定积分) - 奇数

2° 奇数 (数1, 2, -数2, 2, 1, 2)

3° 奇数 (数3 - 1)

第六章 定积分的应用

定积分应用的基本原理——微元法 元分法

在用定积分求面积、体积、平均值、表面积、弧长、功、引力、压力等问题时,常常要利用微元法思想,其基本步骤如下:

(1) 所求量 U 是与区间 $[a, b]$ 以及定义在其上的函数 $f(x)$ 有关的量;

(2) U 对于区间 $[a, b]$ 具有可加性, 即当把区间 $[a, b]$ 分成许多部分区间 Δx 之和时, U 相应地被分成许多部分量 ΔU , 且 U 等于这些部分量之和;

(3) 将 $f(x)$ 在小区间 $[x, x+\Delta x]$ 上近似为常量, 则有 $\Delta U \approx f(x)\Delta x$;

(4) 若 $\Delta U \approx f(x)\Delta x + o(x)$ ($\Delta x \rightarrow 0$), 则把 $f(x)\Delta x$ 称为 U 的微元, 记作 dU , 即

$dU = f(x)\Delta x$, 于是, 所求量 $U = \int_a^b f(x)dx$.

1、定积分的几何应用

(1) 平面图形的面积

(直角坐标) 设平面图形 S 由曲线 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 及直线 $x = a$, $x = b$ 所围成, 则平面图形 S 的面积

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

(极坐标) 设平面图形 S 的边界为曲线 $r = r(\theta)$ 及射线

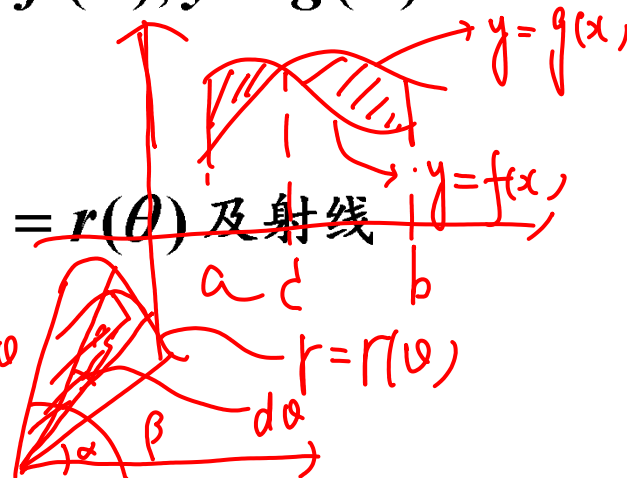
$\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ ($\alpha < \beta$), 则平面图形 S 的面积

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta$$

(参数方程) 由参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

$\alpha \leq t \leq \beta$ 所围平面图形的面积为

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)x'(t)| dt \checkmark$$



(2) 旋转体的体积

$$dV_x = \pi f^2(x) dx \quad dV_y = 2\pi x f(x) dx$$

曲边梯形 $a \leq x \leq b$ 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转体的体

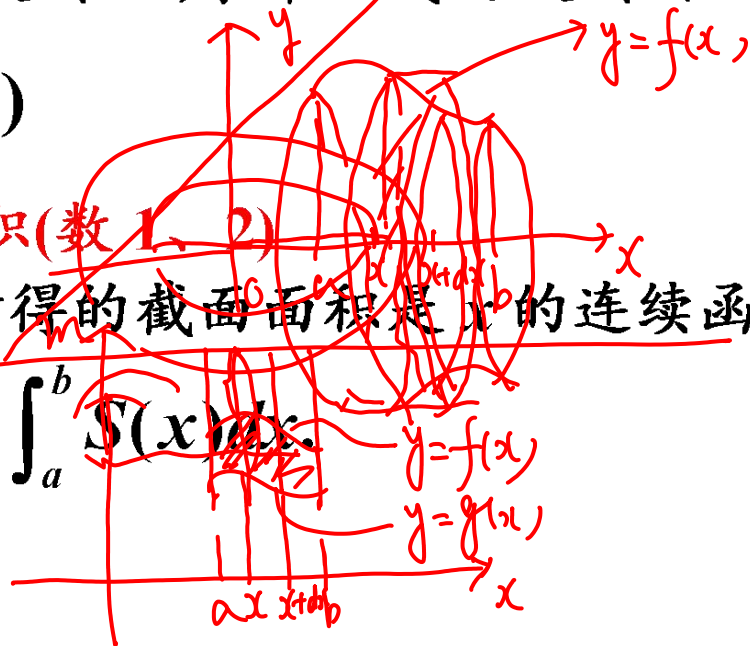
积 $V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$ 绕 y 轴旋转一周所生成的旋转体的体

积 $V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx (f(x) > 0)$

(3) 平行截面面积已知的立体体积(数 1. 2)

设垂直于 x 轴的平面截立体 Ω 所得的截面面积是 x 的连续函数

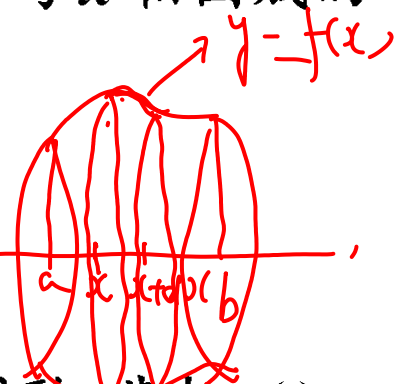
$S(x) (a \leq x \leq b)$, 则 Ω 的体积为 $V = \int_a^b S(x) dx$



(4) 旋转体的侧面积(数 1、2)

由连续曲线 $y=f(x)$ ($f(x) \geq 0$), 直线 $x=a$ 、 $x=b$ 与 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体侧面积为

$$S = 2\pi \int_a^b \underbrace{f(x)}_{2\pi f(x)} \cdot \underbrace{\sqrt{1+f'^2(x)}}_{ds} dx.$$



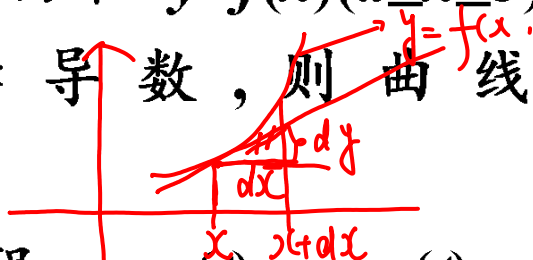
由参数方程 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ 与 x 轴围成的平面图形, 其中 $x(t)$ 、 $y(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上具有一阶连续导数, 且 $\varphi'(t)$ 、 $\psi'(t)$ 不同时为零, 绕 x 轴旋转一周而成的旋转体侧面积为

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

(4)平面曲线的弧长(数1、2)

(直角坐标) 设曲线弧由直角坐标方程 $y=f(x)(a \leq x \leq b)$ 给出, 其中 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有一阶连续导数, 则曲线弧长为

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx \cdot \quad dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$



(参数方程) 设曲线弧由参数方程 $x=\varphi(t), y=\psi(t), \alpha \leq t \leq \beta$ 给出, 其中 $\varphi(t), \psi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上具有一阶连续导数, 且 $\varphi'(t), \psi'(t)$ 不同时为零, 则曲线弧长为 $S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \cdot$

(极坐标方程) 设曲线弧由极坐标方程 $r=r(\theta) (\alpha \leq \theta \leq \beta)$ 给出, 其中 $r(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上具有一阶连续导数, 则曲线弧长为

$$\begin{cases} x = r(\theta) \cos \theta \\ y = r(\theta) \sin \theta \end{cases}$$

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta \cdot$$

2、定积分的经济应用(数学3)

3、定积分的物理应用(数学1、2)

(1) 质心 一细棒位于 x 轴的区间 $[a, b]$ 上, 若其线密度 $\rho(x)$,

则该细棒的质心坐标 $\bar{x} = \frac{\int_a^b x \rho(x) dx}{\int_a^b \rho(x) dx}$



(2) 变力做功

1) 质点在平行于 x 轴的力 $F(x)$ 作用下, 沿 x 轴从 a 移动到 b ,

则力 $F(x)$ 所做的功是 $W = \int_a^b F(x) dx.$

2) 设一容器, 液体表面与 Ox 轴相截于 $x=a$, 底面与 Ox 轴相截于 $x=b$, 垂直于 Ox 轴的平面截容器所得的截面面积为 x 的连续函数 $S(x)$, 则将容器中的液体全部抽出所做的功为

$$W = \int_a^b \rho g x S(x) dx,$$

这里原点建立在容器上底面, 正向为垂直向下的 x 轴, ρ 为液体密度, g 为重力加速度.

(3) **液体静压力** 在液面下深度 h 处, 由液体重量所产生的压强 $P = \rho g h$.

1) 设有一面积为 A 的平面薄板水平地放置在深度为 h 处的均匀静止液体中, 则平面薄板一侧所受的压力为 $F = \text{压强} \times \text{面积} = \rho g h A$.

2) 设有一高为 h , 宽为 $f(x)$ ($f(x) \geq 0$) 的平面薄板垂直地放置在均匀静止液体中, 薄板的上方与液面的距离为 a , 则此薄板所受的侧压力为

$$F = \int_a^{a+h} \rho g x f(x) dx,$$

这里原点建立在液面上, 正向为垂直向下的 x 轴, ρ 为液体密度, g 为重力加速度.

(4) **引力** 质量分别为 m_1, m_2 , 相距为 r 的两质点间的引力大小为

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad \text{其中 } G \text{ 为引力系数.}$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

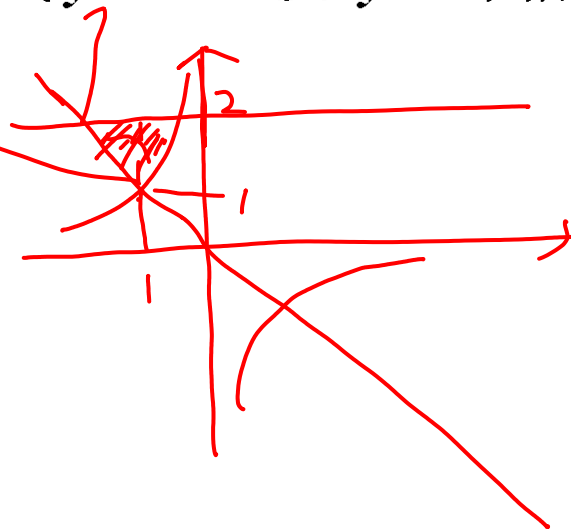
常考题型与典型例题

例 1(2014-3). 设 D 是由曲线 $xy + 1 = 0$ 与直线 $y + x = 0$ 及 $y = 2$ 围成的有界区域, 则 D 的面积为____.

$$\frac{3}{2} - \ln 2$$

$$S = \int_1^2 \left(\frac{1}{y} + y \right) dy = \left(\ln y + \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_1^2$$

$$S = \iint_D dx dy$$



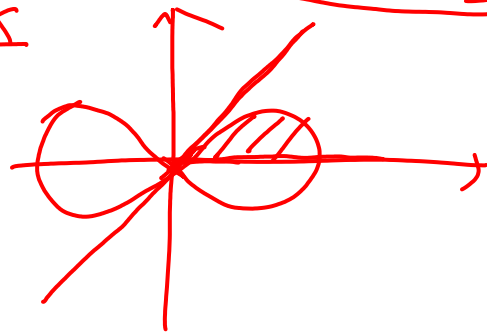
例 2(2013-2) 设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r = \cos 3\theta$ ($-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$),
(ID: djky66)

则 L 所围平面图形的面积是 2212 $\frac{\pi}{12}$

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 6\theta) d\theta$$

$$= \frac{\pi}{12} \checkmark$$



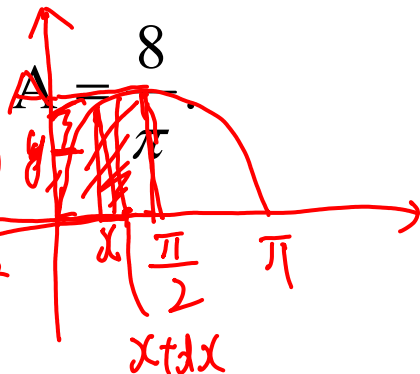
例 3(2015-23) 设 $A > 0$, D 是由曲线段 $y = A \sin x (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ 及直线 $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ 所围成的平面区域, V_1 , V_2 分别表示 D 绕 x 轴与绕 y 轴旋转所成旋转体的体积. 若 $V_1 = V_2$, 求 A 的值.

分析: $V_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi f^2(x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} A^2 \sin^2 x dx = \pi A^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right)$

$$V_2 = \pi \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \cdot A - \int_0^A \pi \left(\arcsin \frac{y}{A} \right)^2 dy = \frac{\pi^2}{4} A^2$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi x f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi A \sin x dx = 2\pi A$$

$$\Rightarrow A = \frac{8}{\pi}$$



例 4(2012-2) 过点 $(0, 1)$ 作曲线 $L: y = \ln x$ 的切线, 切点为 A , 又 L 与 x 轴交于 B 点, 区域 D 由 L 与直线 AB 围成. 求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

【解】 (1) 设切点 A 的坐标为 (x_0, y_0) , 可求得 $x_0 = e^2, y_0 = 2$.

平面图形 D 的面积为 $A = \int_1^{e^2} \ln x dx - \frac{1}{2}(e^2 - 1) \cdot 2 = 2$

(2) D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积

$$V = \pi \int_1^{e^2} \ln^2 x dx - \frac{4\pi(e^2 - 1)}{3} = \frac{2\pi(e^2 - 1)}{3}.$$

例 5(2011-12) 曲线 $y = \int_0^x \tan t dt$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$) 的弧长 s

= $\ln(\sqrt{2} + 1)$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+y'^2} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\tan^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx$$

$$= \ln |\sec x + \tan x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln(\sqrt{2} + 1)$$

例 6 (2011-2) 一个容器内侧是由图中曲线绕 y 轴旋转一周而成的曲面, 该曲线是由

$x^2 + y^2 = 2y$ ($y \geq \frac{1}{2}$) 与 $x^2 + y^2 = 1$ ($y \leq \frac{1}{2}$) 连接而成的。



(1) 求容器的体积; (2) 若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出, 至少需要做多少功?

(长度单位: m , 重力加速度为 gm/s^2 , 水的密度为 10^3 kg/m^3)

【详解】 (1) 旋转体分为体积相等的两部分, 于是, 容器的体积为

$$V = 2 \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \pi (1 - y^2) dy = 2\pi \left(y - \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_{-1}^{\frac{1}{2}} = \frac{9}{4} \pi$$

或者 $V = 2 \int_{\frac{1}{2}}^2 \pi (2y - y^2) dy = 2\pi \left(y^2 - \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{9}{4} \pi$

(2) 当 $-1 \leq y \leq \frac{1}{2}$ 时, 功的微元 $dW = 10^3 g \pi (1 - y^2) (2 - y) dy$

当 $\frac{1}{2} \leq y \leq 2$ 时, 功的微元 $dW = 10^3 g \pi [1 - (y - 1)^2] (2 - y) dy$

$$\begin{aligned} \text{故所求功为 } W &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} 1000 g \pi (1 - y^2) (2 - y) dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 1000 g \pi (2y - y^2) (2 - y) dy \\ &= 1000 g \pi \left[\int_{-1}^{\frac{1}{2}} (2 - y - 2y^2 + y^3) dy + \int_{\frac{1}{2}}^2 (4y - 4y^2 + y^3) dy \right] \\ &= 1000 g \pi \left[\left(2y - \frac{1}{2} y^2 - \frac{2}{3} y^3 + \frac{1}{4} y^4 \right) \Big|_{-1}^{\frac{1}{2}} + \left(2y^2 - \frac{4}{3} y^3 + \frac{1}{4} y^4 \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^2 \right] = 3375 g \pi. \end{aligned}$$