



微信公众号【顶尖考研】

2022年研究生入学考试

高等数学(微积分)基础班

2021年1月



微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

第十二章 多元积分学及其应用



V研客
在线
www.vyanke.com

2009-2021 年三重、线、面积分分数分布

	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
三重	4	4			10		4				10		
一线	4									4			
二线		4	4	10	4	4	10	10	4		4	10	6
一面		10		4					10				
二面	10					10		10		10	4	10	5
合计	18	18	4	14	14	14	14	20	14	14	18	20	11

微信公众号【顶尖考研】
(ID: dyjkyan)

两个字

1. ~~积分区域~~ $\left(\frac{A}{1}\right)$ 定义
2. 被积函数 $\left(\frac{A}{1}\right)$

1. ~~积分~~
2. ~~积分~~ ✓
3. ~~积分~~
4. ~~积分~~

第一节 三重积分

考试要求

1、理解三重积分的概念，了解三重积分的性质

2、会计算三重积分（直角坐标、柱面坐标、球面坐标）。

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} dz dy dx \\ & \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} dz dy dx \end{aligned}$$

考试内容概要

一、定义.

设函数 $f(x, y, z)$ 在有界区域 Ω 上有界, 若对 Ω 作任意分割

$\Delta v_k (k=1, 2, \dots, n)$, 任意取点 $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in \Delta v_k$, 下列“乘积和式”的极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta v_k \quad \text{记作} \quad \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV$$

$$= \iiint f dx dy dz$$

存在, 则称此极限为函数 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上的三重积分.

dv 称为体积元素, 在直角坐标系下常写作 $dx dy dz$.

三重积分的性质与二重积分相似.

例如 中值定理.

设 $f(x, y, z)$ 在有界闭域 Ω 上连续, V 为 Ω 的体积, 则存在 $(\xi, \eta, \zeta) \in \Omega$, 使得

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = f(\xi, \eta, \zeta) V$$

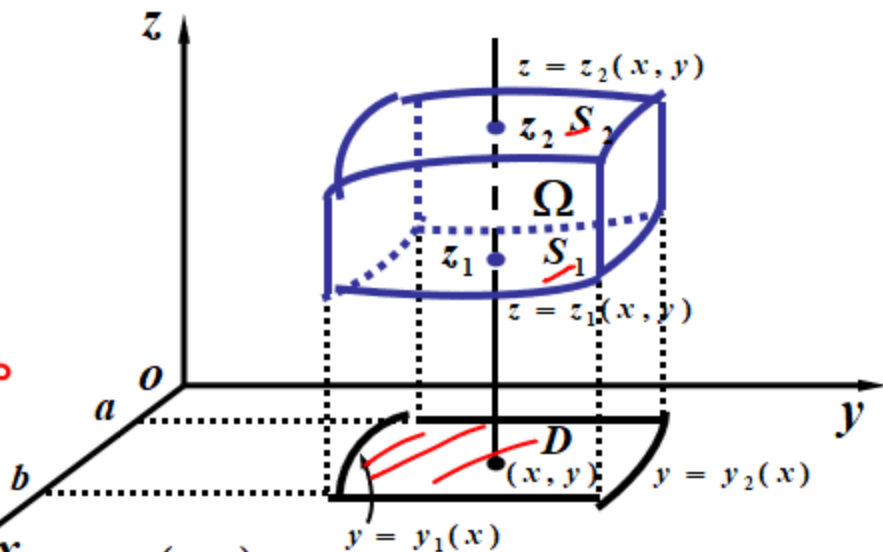
1、利用直角坐标

$$\text{若 } \Omega: z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), \\ (x, y) \in D$$

又若 $D: y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$,
 $a \leq x \leq b$

$$\int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) \underline{dz} \right) dy \right) dx$$

$$= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz.$$



微情公众号【顶公考研】
(ID: dkg666)

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$$

若 $\Omega: (x, y, z) \in D_z, z \in [c_1, c_2]$

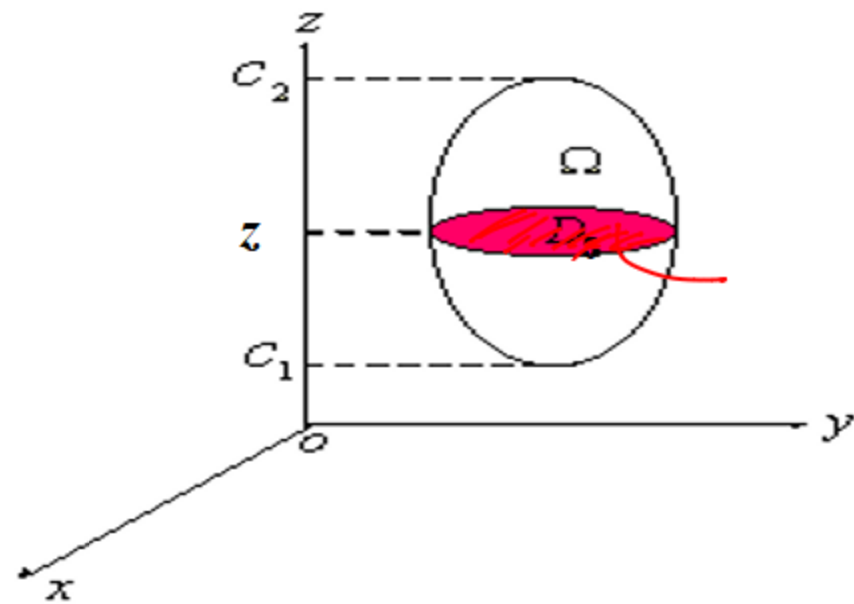
$$z = \int_0^1 -$$

$$= \int_{c_1}^{c_2} \left(\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

$$= \int_{c_1}^{c_2} dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy$$

先二后一

1253713



2、利用柱面坐标计算

点 M 的柱（面）坐标 (ρ, θ, z) .

三族柱坐标面: (x, y, z)

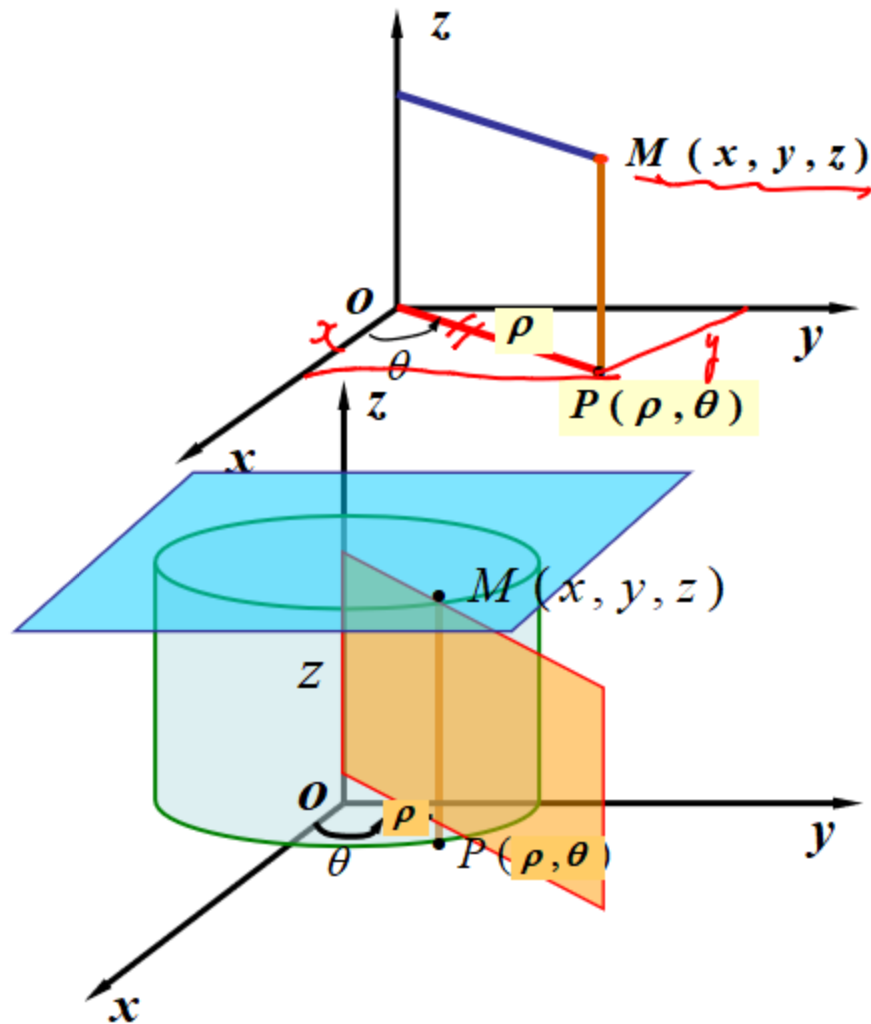
ρ 为常数 $\implies$ 圆柱面;

θ 为常数 $\implies$ 半平面;

z 为常数 $\implies$ 平面.

柱坐标与直角坐标的关系

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \\ z = z. \end{cases} \quad f(x^2+y^2)$$



微信公众号【顶尖考研】

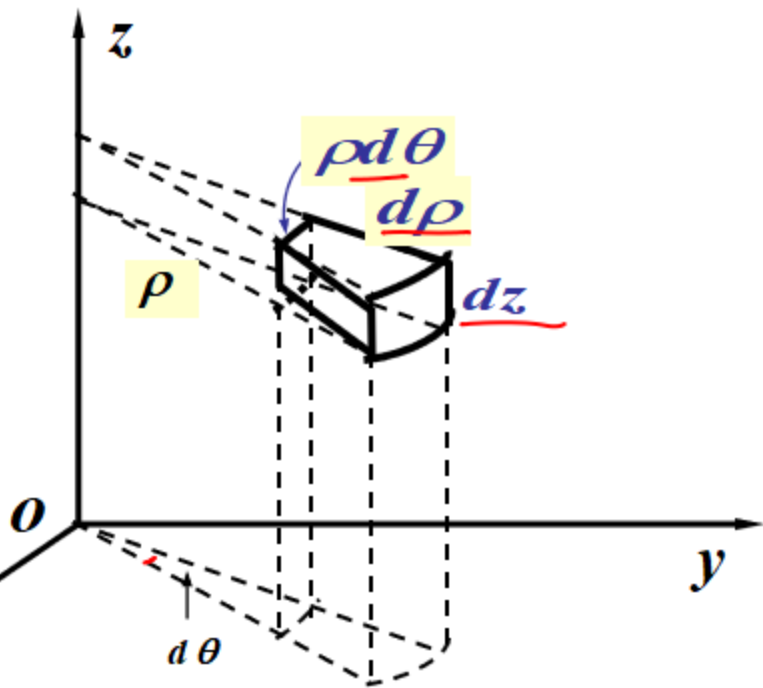
柱坐标系中的体积元素:

$$dv = \rho d\rho d\theta dz,$$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV$$

是子. 面 ρ, θ, z

$$= \iiint_{\Omega} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \cdot \rho d\rho d\theta dz.$$



3、利用球面坐标计算

点 M 的球（面）坐标 (r, φ, θ) .

三族球坐标面：

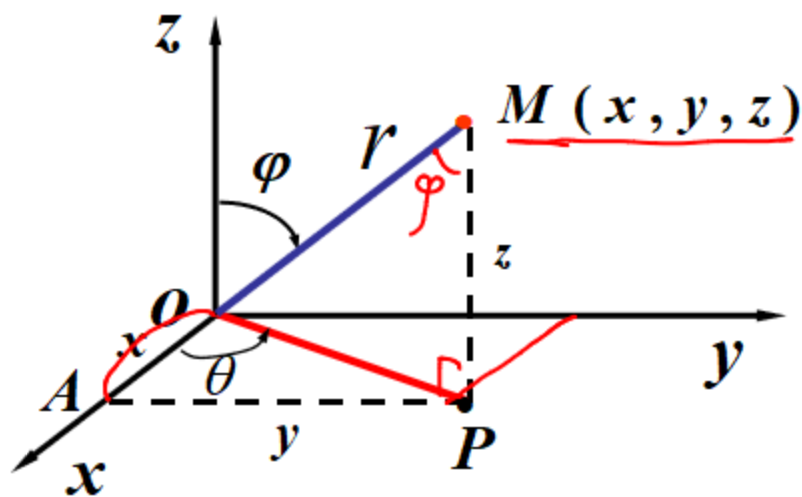
r 为常数 $\implies$ 球 面；

φ 为常数 $\implies$ 圆锥面；

θ 为常数 $\implies$ 半平面.

球坐标与直角坐标的关系

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z = r \cos \varphi. \end{cases}$$



微信公众号【顶尖考研】

球坐标系中的体积元素

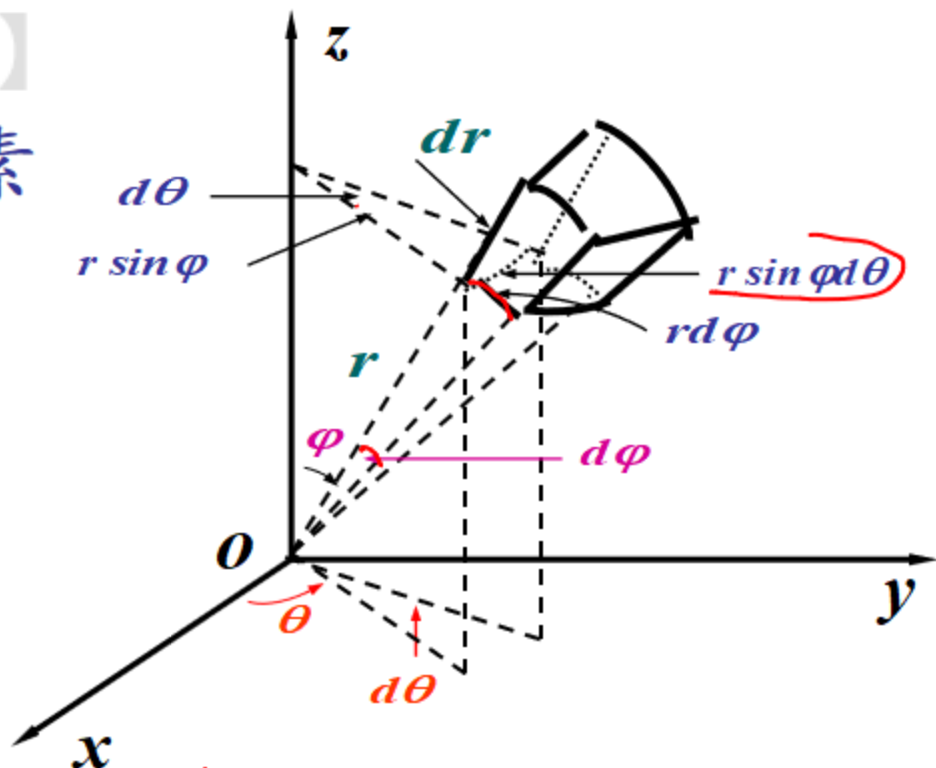
$$dV = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta,$$

$$f(x^2+y^2+z^2) = f(r^2)$$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$$

球坐标变换

$$= \iiint_{\Omega} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta.$$





三重积分的对称性

1、 Ω 关于 xOy 面对称, 则

0,

当 $f(x, y, -z) = -f(x, y, z)$ 时,

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(x, y, -z) = -f(x, y, z) \text{ 时,} \\ 2 \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dV, & \text{当 } f(x, y, -z) = f(x, y, z) \text{ 时.} \end{cases}$$

其中 Ω_1 为 Ω 在 xOy 面上方的部分.

类似地, 可得到 Ω 关于 yOz 平面、 zOx 平面对称的情形.

2、轮换对称性

(1) 若 x, y 互换后区域 Ω 不变, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_{\Omega} f(y, x, z) dV.$$

(2) 若 $x \rightarrow y, y \rightarrow z, z \rightarrow x$ 区域 Ω 不变, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_{\Omega} f(y, z, x) dV = \iiint_{\Omega} f(z, x, y) dV.$$



微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

常考题型与典型例题

1 种坐标系-直角坐标下 $dV=dx dy dz$, 柱坐标下 $dV=r dr d\theta dz$, 球坐标下 $dV=r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$.

2 基本方法——化为累次积分(化为三次积分、二次积分(一次定积分和一次二重积分-先二后一)).

积分顺序与定限顺序相反——先积分者后定限.

3 关键——选择适宜坐标系和累次积分顺序.

1) 积分域的形状(分块少, 表达简便)

边界主要为直角坐标面(柱坐标面、球坐标面)——直角坐标(柱坐标、球坐标);

2) 被积函数的形式

含 x^2+y^2 ——柱坐标, 含 $x^2+y^2+z^2$ ——球坐标.

4 利用对称性、轮换对等性等等化简计算.

例 1(1988) 设有空间区域 $\Omega_1 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0$;

及 $\Omega_2 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, 则

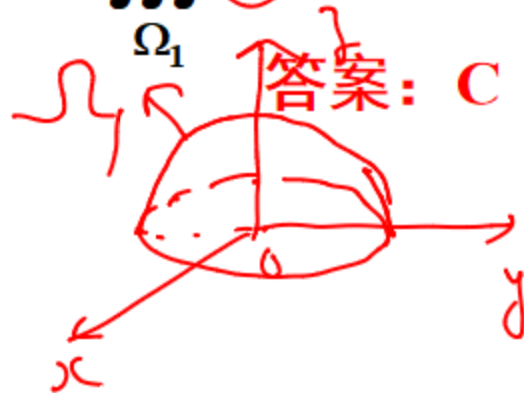
(A) $\iiint_{\Omega_1} x dV = 4 \iiint_{\Omega_2} x dV$.

(B) $\iiint_{\Omega_1} y dV = 4 \iiint_{\Omega_2} y dV$.

(C) $\iiint_{\Omega_1} z dV = 4 \iiint_{\Omega_2} z dV$.

(D) $\iiint_{\Omega_1} xyz dV = 4 \iiint_{\Omega_2} xyz dV$.

分析 Ω_1 关于 z 轴对称, Ω_2 关于 z 轴对称, Ω_1 关于 x, y 轴对称, Ω_2 关于 x, y 轴对称



例 2(2009) 设 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$, 则

$$\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz = \underline{\underline{\frac{4}{15}\pi}}.$$



$$\begin{aligned} 1^\circ \text{ 柱坐标 } - I &= \int_{-1}^1 \iint_{D_z} z^2 dx dy \\ &= \int_{-1}^1 z^2 \cdot \pi(z^2 - 1) dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^\circ \quad \iiint_{\Omega} z^2 dV &= \iiint_{\Omega} x^2 dV = \iiint_{\Omega} y^2 dV \\ &= \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dV = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 r^2 \cdot r^2 \sin\varphi dr \end{aligned}$$

例3(2015) 设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面所围成的空间区域, 则 $\iiint_{\Omega} \underline{(x+2y+3z)} dx dy dz = \underline{\frac{1}{4}}$.

分析: $\iiint_{\Omega} x dV = \iiint_{\Omega} y dV = \iiint_{\Omega} z dV$

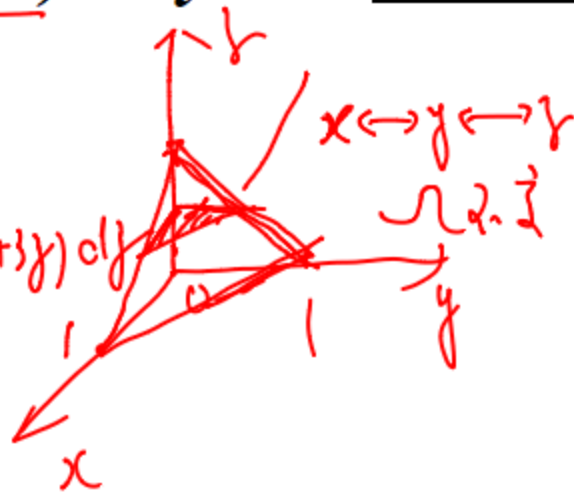
~~对称性~~

$I = 6 \iiint_{\Omega} z dV$

$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x+2y+3z) dz$

$= 6 \int_0^1 z dz \left[\int_{xy} dx dy \right]$

$= 6 \int_0^1 z \cdot \frac{1}{2} (1-z)^2 dz = \frac{1}{4}$



例 4(1989) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (x+z)dV$, 其中 Ω 是由曲

(ID: diky66)

面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 所围成的区域. $\frac{\pi}{8}$

分析 $\iiint_{\Omega} x dV = 0$ $\iiint_{\Omega} z dV$

~~$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$~~ $= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cos\varphi \cdot r \sin\varphi dr$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} =$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} =$

1/2 的极坐标

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dr \int_r^{\sqrt{1-r^2}} z \cdot r dz$$





微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

第二节 曲线积分



- 1、理解两类曲线积分的概念，了解两类曲线积分的性质及两类曲线积分的关系.
- 2、掌握计算两类曲线积分的方法.
- 3、掌握格林公式并会运用平面曲线积分与路径无关的条件，会求二元函数全微分的原函数.

考点 微信公众号【顶尖考研】

1、第一类曲线积分的计算 (小题)

2、第二类曲线积分的计算

(1) 参数法(直接法)

(2) 格林公式

(3) 积分与路径无关

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

考试内容概要

一. 对弧长的曲线积分(第一类曲线积分)

1、概念 $f(P)$ 在光滑曲线段 L 上对弧长的曲线积分, 即 第一类曲线积分

被积函数

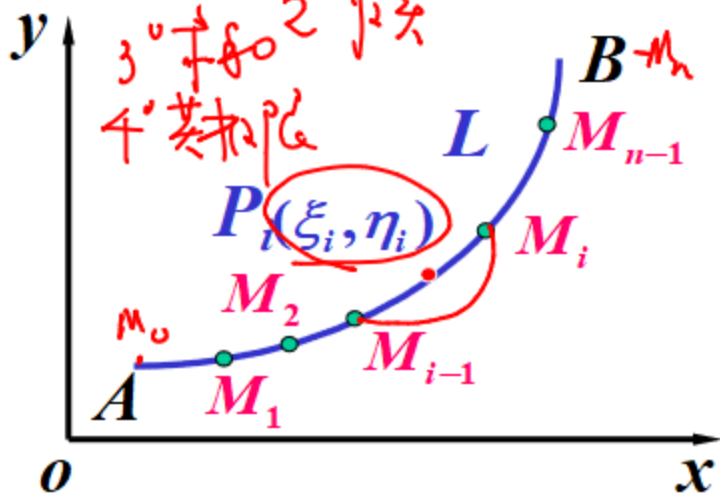
被积表达式

积分和

$$\int_L f(P) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \cdot \Delta s_i$$

积分弧段

弧长元素



在分段光滑的曲线段上的积分 = 各光滑曲线段上的积分之和。

存在条件: 必要条件、充分条件——同重积分、定积分

2、性质——同重积分（定积分）

(1)、线性性；

(2)、关于积分弧的可加性；

(3)、 $\int_L ds = |L|$ ；

(4)、比较定理；

(5)、估值不等式；

(6)、中值定理。

$$\Rightarrow m l \leq \int_L f(x, y) ds \leq M l$$

$$m \leq f(x, y) \leq M$$

$$\int_L f(x, y) ds = f(\xi, \eta) l$$

3、计算 【微分方程】

基本方法(直接法)——找到 L 的单参数方程，将曲线积分化为对该参数的定积分。

设 L 为 xOy 面上的平面光滑曲线段

(1)、若 $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta), \quad \underline{x(t)}, \underline{y(t)} \in \underline{C^1_{[\alpha, \beta]}}$,

$$\text{则 } ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$$

$$\Rightarrow \int_L \underline{f(x, y)} \underline{ds} \\ = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

(2)、若 $L: \underline{y=y(x)} \ (a \leq x \leq b), y(x) \in C^1_{[a,b]}$,

$$\text{则 } ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$$

$$\Rightarrow \int_L f(x, y) ds$$

$$= \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx.$$

$$\int_L f(x, y) ds = \int_c^d f(x(y), y) \sqrt{1 + x'^2(y)} dy$$

(3)、若 $L: \underline{\rho=\rho(\theta)} \ (\alpha \leq \theta \leq \beta), \rho(\theta) \in C^1_{[\alpha, \beta]}$,

$$\text{则 } ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta$$

$$\Rightarrow \int_L f(x, y) ds$$

$$= \int_\alpha^\beta f(\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta) \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta.$$

$$\begin{cases} x = \rho(\theta) \cos \theta \\ y = \rho(\theta) \sin \theta \end{cases}$$

4、设 L 为空间光滑曲线段

(1)、若 $L: \begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \quad (\alpha \leq t \leq \beta), \\ z=z(t), \end{cases} \quad \underline{x(t)}, \underline{y(t)}, \underline{z(t)} \in C^1_{[\underline{\alpha}, \underline{\beta}]},$

则 $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$
 $= \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$

$\Rightarrow \int_L \underline{f(x, y, z)} ds$

$= \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$

$\checkmark \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$
 $\Rightarrow \begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \\ x = x \end{cases}$

(2)、若 $L: \begin{cases} y=y(x), \\ z=z(x), \end{cases} (a \leq x \leq b), y(x), z(x) \in C^1_{[a,b]},$

$$\begin{aligned} \text{则 } ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} \\ &= \sqrt{1 + y'^2(x) + z'^2(x)} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_L f(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}) ds \\ = \int_a^b f(x, y(x), z(x)) \sqrt{1 + y'^2(x) + z'^2(x)} dx. \end{aligned}$$

注意：对弧长的曲线积分化为定积分后，恒有：
上限 > 下限。

5、第一类曲线积分的对称性 (同二重积分类似)

1. 若 L 关于 y 轴对称, 则

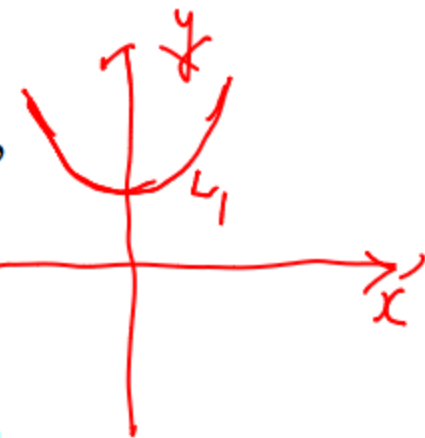
$L \rightsquigarrow L_1$

若 $f(-x, y) = -f(x, y)$,

若 $f(-x, y) = f(x, y)$,

$$\int_L f(x, y) ds = \begin{cases} 0, & \text{若 } f(-x, y) = -f(x, y), \\ 2 \int_{L_1} f(x, y) ds & \text{若 } f(-x, y) = f(x, y), \end{cases}$$

$= \int_{L_1} f(x, y) ds + \int_{L_2} f(x, y) ds$



2. 若 L 关于 x 轴对称, 则

$$\int_L f(x, y) ds = \begin{cases} 0, & \text{若 } f(x, -y) = -f(x, y), \\ 2 \int_{L_1} f(x, y) ds & \text{若 } f(x, -y) = f(x, y). \end{cases}$$

$L \rightsquigarrow y = x \text{ 和 } y = -x$

3. 若 L 关于 x, y 具有轮换对称性, 即 x, y 互换后, L 不变, 则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_L f(y, x) ds = \frac{1}{2} \int_L [f(x, y) + f(y, x)] ds.$$

二、对坐标的曲线积分(第二类曲线积分)

1、定义: $P(x, y)$ 沿光滑有向曲线弧 L 上对坐标 x 的曲线积分 (或称第二类曲线积分)

$$\int_L P(x, y) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i$$

其中 $\Delta x_i = (\overrightarrow{M_{i-1}M_i})_x = x_i - x_{i-1}$.

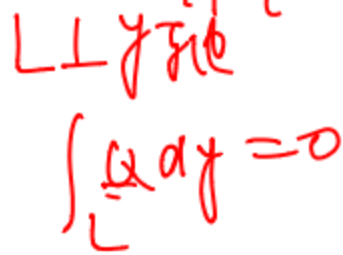
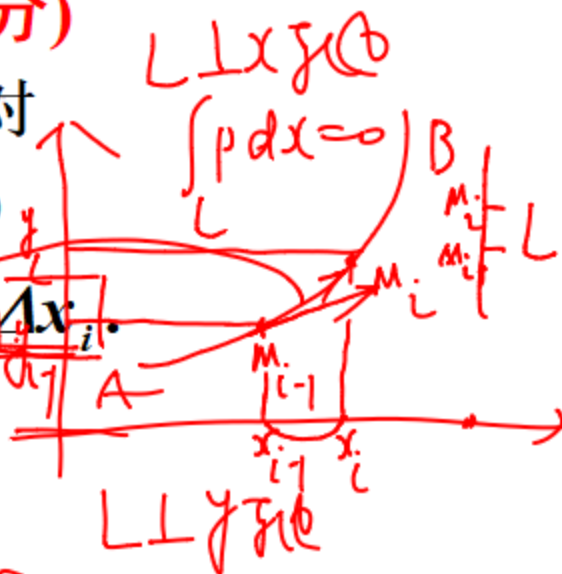
$\int_L P dx + Q dy$ $Q(x, y)$ 对坐标 y 的曲线积分

$$\int_L Q(x, y) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i$$

同样方式定义沿空间有向曲线弧的积分:

$$\int_L \{P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz\}$$

注: 沿垂直于坐标轴的曲线的第二类曲线积分)



2. 性质 众号【顶尖考研】

- (1) 线性; (2) 关于积分弧的可加性;
(3) 有向曲线弧反向, 第二类曲线积分反号:

$$\begin{aligned} \int_{-L} P(x, y) dx &= - \int_L P(x, y) dx \\ \int_{-L} Q(x, y) dy &= - \int_L Q(x, y) dy \\ \int_{-L} \vec{f} \cdot d\vec{s} &= - \int_L \vec{f} \cdot d\vec{s}. \end{aligned}$$

即: 对坐标的曲线积分与曲线的方向有关.

3、计算

(1) 基本方法(直接法或参数法)

1) 曲线 $L: \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$ 起点 $t = \alpha$, 终点 $t = \beta$.

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_{\alpha}^{\beta} \{P[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

2) 曲线 $L: y = \varphi(x)$ x 起点为 a , 终点为 b . 则

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_a^b \{P[x, \varphi(x)] + Q[x, \varphi(x)]\varphi'(x)\}dx$$

3) 曲线 $L: x = \psi(y)$ y 起点为 c , 终点为 d . 则

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_c^d \{P[\psi(y), y]\psi'(y) + Q[\psi(y), y]\}dy$$

(2) 格林公式

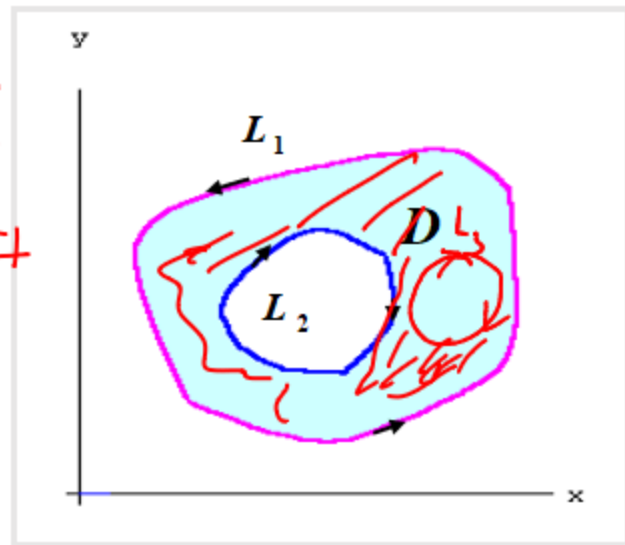
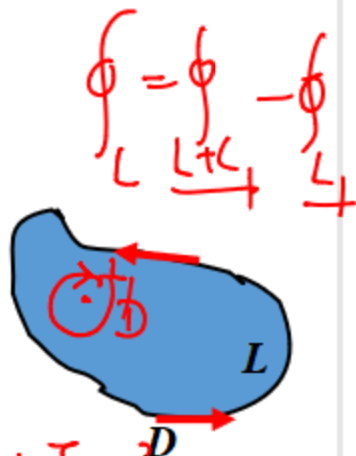
设闭区域 D 由分段光滑曲线 L 围成,

$P(x, y), Q(x, y) \in C^1_D$, 则

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

其中 L 是 D 的边界正向.

曲线 L 的正向: 当观察者沿边界行走时, 区域 D 总在左边.



L 由 L_1 与 L_2 组成

注: 直接用、补曲线用、挖去奇点用格林公式

(3) 利用积分与路径无关

定理 设 D 为单连通区域, $P(x, y), Q(x, y) \in C_D^1$,
那么, 下面四条等价:



1) 在 D 上, $\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}$;

2) 对 $\forall$ 闭路 $L \subset D$, 有 $\oint_L Pdx + Qdy = 0$;

3) 在 D 上, $\int_{\overrightarrow{AB}} Pdx + Qdy$ 与路径无关;

4) 在 D 上, $\int Pdx + Qdy$ 是某个函数的全微分,
即有原函数 $\left(\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy \right)$ 是一个原函数) .

$\int_L du = u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0)$

(4) 利用两类曲线积分的联系

$$\left(\int_L \underline{Pdx + Qdy} = \int_L \underline{(P \cos \alpha + Q \cos \beta) ds} \right)$$

L 正方向上的单位切向量 $\{\cos \alpha, \cos \beta\}$

设有向平面曲线弧为 L :
$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},$$

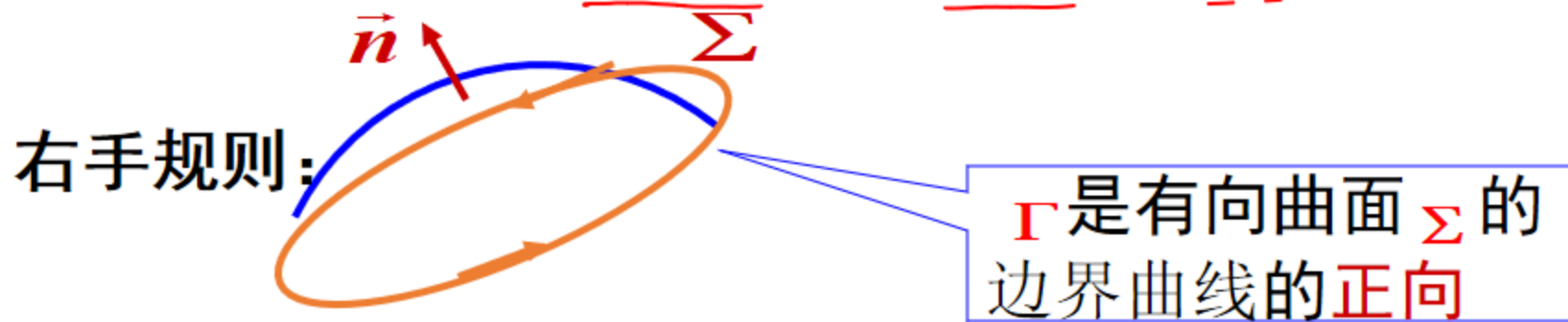
$$\underline{\cos \alpha} = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}}, \quad \underline{\cos \beta} = \frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}}$$

$$\begin{aligned} \int_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta) ds &= \int_L \left(P \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}} + Q \frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}} \right) \sqrt{\cancel{\varphi'^2(t)} + \cancel{\psi'^2(t)}} dt \\ &= \int_L (P \varphi'(t) + Q \psi'(t)) dt = \int_L \underline{Pdx + Qdy} \end{aligned}$$

(5) 利用斯托克斯(stokes)公式(空间曲线)

设 Γ 为分段光滑的空间有向闭曲线, Σ 是以 Γ 为边界的分片光滑的有向曲面, Γ 的正向与 Σ 的侧符合右手规则, $P, Q, R \in C^1_{\Sigma \cup \Gamma}$, 则有

$$\oint_{\Gamma} \underbrace{Pdx + Qdy + Rdz}_{\text{斯托克斯公式}} = \iint_{\Sigma} \underbrace{\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy}_{\text{旋度与面积元点积}}$$



Stokes公式可写成

第二类曲线积分

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

第一类曲面积分

$$= \oint_{\Gamma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds$$

注：空间曲线还可用直接法计算

$$\Gamma: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases} \quad \int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\alpha}^{\beta} \{ P[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)] \varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)] \psi'(t) + R[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)] \omega'(t) \} dt$$

t 起点 α , 终点 β



微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

常考题型与典型例题

一、第一类曲线积分的计算

例 1(1989) 设平面曲线 L 为下半圆周 $y = -\sqrt{1-x^2}$, 则

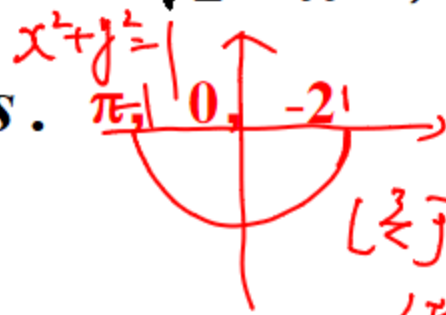
曲线积分 $\int_L (x^2 + y^2) ds = \int_L x ds + \int_L y ds$.

1° $\int_L ds = \pi$

2° $\int_L x ds = 0$

3° $\int_L y ds = \int_{-1}^1 -\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} dx$
 $= -\int_{-1}^1 dx = -2$

$\begin{cases} x = \cos t \\ y = -\sin t \end{cases}$



$L: y \leq 0$
对称

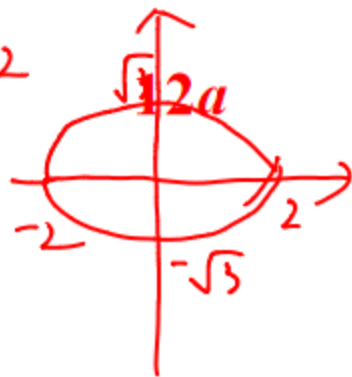
微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

例 2(1998) 设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 其周长记为 a , 则

$$\oint_L (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$\Rightarrow 3x^2 + 4y^2 = 12$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \oint_L (2xy + 12) ds &= \underbrace{\oint_L 2xy ds}_{\text{奇函数在对称区域上积分为0}} + \underbrace{12 \oint_L ds}_{12a} \\ &= 12a \end{aligned}$$



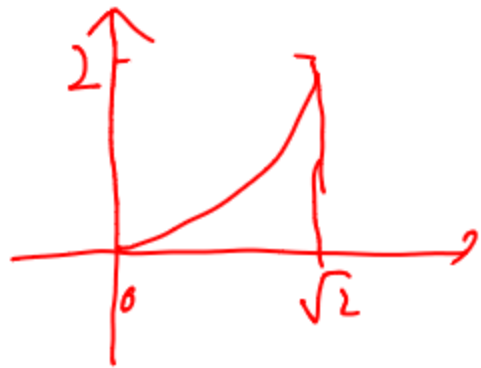
例 3(2009) 已知曲线 $L: y = x^2 (0 \leq x \leq \sqrt{2})$, 则 $\int_L x ds = \underline{\frac{13}{6}}$.

分析

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} x \sqrt{1+4x^2} dx$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4x^2} d(1+4x^2)$$

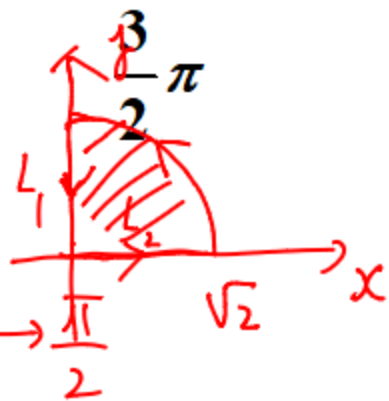
$$= \frac{1}{8} \times \frac{2}{3} (1+4x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}}$$



二、第二类曲线积分的计算

例 4(2004) 设 L 为正向圆周 $x^2 + y^2 = 2$ 在第一象限中的部分, 则曲线积分 $\int_L x dy - 2y dx$ 的值为_____.

$$\begin{aligned} \text{法一: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{2}\cos t \cdot \sqrt{2}\cos t + 2\sqrt{2}\sin t \cdot \sqrt{2}\sin t) dt & \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = \sqrt{2}\sin t \\ t: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{cases} \\ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2 t + 4\sin^2 t) dt & \\ = 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} & \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{法二: } \oint_{L+L_1+L_2} & - \underbrace{\int_{L_1}}_0 - \int_{L_2} = \iint_D 3 dx dy - 0 - 0 \\ \int_L & \end{aligned}$$

例 5(2010) 已知曲线 L 的方程为 $y=1-|x|, x \in [-1,1]$, 起点是 $(-1,0)$, 终点是 $(1,0)$, 则曲线积分 $\int_L xy dx + x^2 dy = \underline{0}$.

解: $\int_L = \int_{L_1} + \int_{L_2} \checkmark$

$$= \int_{-1}^0 (x(1+x) + x^2) dx + \int_0^1 (x(1-x) + x^2) dx = 0$$

(另:)

$\int_{\vec{AB}}$

$\int_{L \cup \vec{AB}}$

$$= \iint_D x dx dy = 0$$

$$= 0 - 0 = 0$$



例 6(1999) 求 $I = \int_L (\underbrace{e^x \sin y - b(x+y)}_P) dx + (\underbrace{e^x \cos y - ax}_Q) dy$, 其中

a, b 为正的常数, L 为从点 $A(2a, 0)$ 沿曲线 $y = \sqrt{2ax - x^2}$

到点 $O(0, 0)$ 的弧.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = e^x \cos y - a \quad \frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y \quad \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} = (b-a)a^2 + 2a^2b$$



$$I = \oint_{L+\vec{OA}} - \int_{\vec{OA}}$$

$$= \iint_D (b-a) dx dy - \int_{\vec{OA}} -bx dx$$

$$= (b-a) \cdot \frac{\pi a^2}{2} + \int_0^{2a} bx dx$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

例 7(2008) 计算曲线积分 $\int_L \sin 2x dx + 2(x^2 - 1)y dy$,

其中 L 是曲线 $y = \sin x$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(\pi,0)$ 的一段. $-\frac{\pi^2}{2}$

解 $I = \oint_{L+L_1} = - \iint_D 4xy dx dy - \int_{\pi}^0 \sin 2x dx$.



$$\oint_L \overset{P}{x} dx + \overset{R}{y} dz = \underline{\pi} \checkmark.$$

L1 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$



微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

第三节 曲面积分



- 1、了解两类曲面积分的概念、性质及两类曲面积分的关系.
- 2、掌握计算两类曲面积分的方法.
- 3、掌握用高斯公式计算曲面积分的方法, 并会用斯托克斯公式计算曲线积分.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

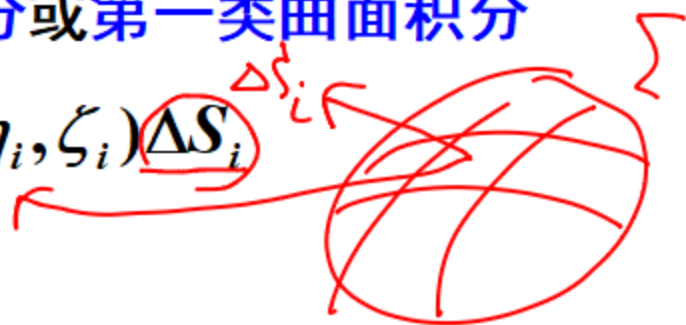
考试内容概要

一、对面积的曲面积分(第一类曲面积分)

1. 定义(ID: djky66)

$f(x,y,z)$ 在曲面 Σ 上对面积的曲面积分或第一类曲面积分

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$



2. 性质

- 1) 线性;
- 2) 关于积分曲面的可加性;
- 3) $\iint_{\Sigma} dS = |\Sigma|$;
- 4) 比较定理;
- 5) 估值不等式;
- 6) 中值定理.

3、计算

基本方法——找到 Σ (以直角坐标为参数) 的**双参数**方程, 将曲面积分化为对参数的二重积分。

1) 设光滑曲面

$\Sigma : \underline{z = z(x, y)}$ $(x, y) \in D_{xy}$, 其中 $z(x, y) \in C^1_{D_{xy}}$

则 $\underline{d\sigma_{xy}} = \underline{\cos(\vec{n}_{\perp}, \vec{k})} dS = \underline{\cos \gamma} \underline{dS}$

而 $\vec{n}_{\perp} = \{-\underline{z'_x}, -\underline{z'_y}, \underline{1}\} \Rightarrow \underline{n^0_{\perp}} = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}} \{-\underline{z'_x}, -\underline{z'_y}, 1\}$

$$\therefore \underline{[dS]} = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} dx dy,$$



则 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$

代入 $\Sigma: z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$

$$= \iint_{D_{xy}} f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy;$$

同理可得

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$$

代入 $\Sigma: y = y(z, x), (z, x) \in D_{zx}$

$$= \iint_{D_{zx}} f[x, y(z, x), z] \sqrt{1 + y_z'^2 + y_x'^2} dz dx;$$

代入 $\Sigma: x = x(y, z), (y, z) \in D_{yz}$

$$\iint_{D_{yz}} f(x, y, z) dS = \dots$$

注意：一投、二代、三换。

4、第一类曲面积分的对称性 (同三重积分类似)

1) 若 Σ 关于 xOy 面对称, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \begin{cases} 0, & \text{若 } \underline{f(x, y, -z) = -f(x, y, z)}, \\ 2 \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS & \text{若 } f(x, y, -z) = f(x, y, z), \end{cases}$$

类似地, 可得到曲面 Σ 关于 yOz 面、 zOx 面对称的情形.

2) 若 x, y 互换后, 曲面 Σ 不变, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma} f(y, x, z) dS = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} [f(x, y, z) + f(y, x, z)] dS;$$

若 $x \rightarrow y, y \rightarrow z, z \rightarrow x$, 曲面 Σ 不变, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma} f(z, x, y) dS = \iint_{\Sigma} f(y, z, x) dS = \cdots;$$

二、对坐标的曲面积分(第二类曲面积分)

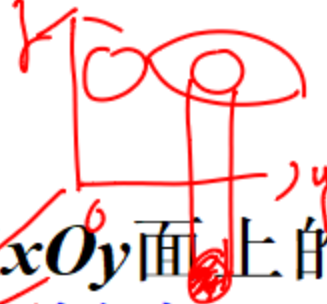
1、概念

双侧曲面: 比如, 函数曲面 $z=z(x,y)$ 、 $y=y(z,x)$ 、 $x=x(y,z)$

单侧曲面: 莫比乌斯 (Möbius) 带。

双侧曲面的一侧称为有向曲面。

有向曲面的投影: 有向曲面 Σ 上小块 ΔS 在 xOy 面上的



(有向)投影 $(\Delta S)_{xy} = \begin{cases} (\Delta \sigma)_{xy} & \text{当 } \Delta S \text{ 取上侧时} \\ -(\Delta \sigma)_{xy} & \text{当 } \Delta S \text{ 取下侧时} \\ 0 & \text{当 } \Delta S \perp xOy \text{ 时} \end{cases}$

其中 $(\Delta \sigma)_{xy}$ 表示投影区域的面积。

$R(x, y, z)$ 在有向（光滑）曲面 Σ 上对坐标 x, y

的曲面积分（第二类曲面积分）

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xy}$$

类似可定义

$$\iint_{\Sigma} \underline{P(x, y, z)} \underline{dy dz}, \quad \iint_{\Sigma} \underline{Q(x, y, z)} \underline{dz dx}.$$

第二类曲面积分存在的充分条件：连续。

注意：垂直于坐标面的曲面的第二类曲面积分。

2. 性质: 公众号【顶尖考研】

- 1). 线性性; 2). 关于积分曲面的可加性;
3). 与积分曲面定向的相关性

$$\begin{aligned} \oint_{-\Sigma} P(x, y, z) dy dz &= - \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz \\ \iint_{-\Sigma} Q(x, y, z) dz dx &= - \iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx \\ \iint_{-\Sigma} R(x, y, z) dx dy &= - \iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy \\ \iint_{-\Sigma} \vec{f}(x, y, z) \cdot d\vec{S} &= - \iint_{\Sigma} \vec{f}(x, y, z) \cdot d\vec{S}. \end{aligned}$$

3、计算

1) 直接法(投影法)

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy$$

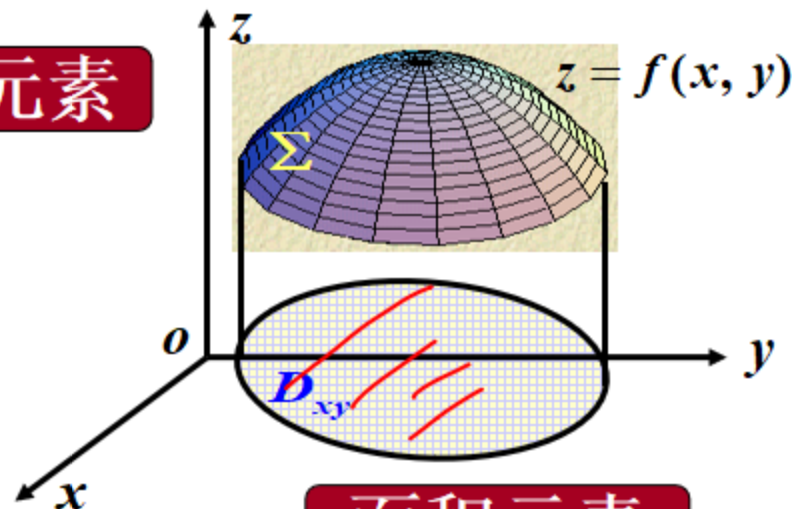
若 $\Sigma: z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$

$$\iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] (\pm dx dy)$$

$$= \pm \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dx dy.$$

注：上侧+下侧-
即：对 x, y 的曲面积分，将 Σ 表为 $z = z(x, y)$ ，代入曲面积分中，化为对 x, y 在 D_{xy} 上的二重积分。

有向投影元素



面积元素

微信公众号【考研数学】
(ID: djky66)

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz$$

注：前侧+后侧-

$$\underline{\underline{\Sigma: x=x(y, z), (y, z) \in D_{yz}}} \pm \iint_{D_{yz}} P[x(y, z), y, z] dy dz$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx$$

注：右侧+左侧-

$$\underline{\underline{\Sigma: y=y(z, x), (z, x) \in D_{zx}}} \pm \iint_{D_{zx}} Q[x, y(z, x), z] dz dx$$

注意：对坐标的曲面积分与所取的侧有关。

2) 高斯公式 【顶尖考研】

设空间闭区域 Ω 由（分片）光滑的闭曲面 Σ 围成， 1° $P(x, y, z)$ 、 $Q(x, y, z)$ 、 $R(x, y, z) \in C^1_\Omega$ ，则

$$\oiint_{\Sigma} P \underline{dydz} + Q \underline{dzdx} + R \underline{dxdy} = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV$$

其中 Σ 是 Ω 的边界曲面的正向

注：直接用、补曲面用、挖去奇点用高斯公式

$$\oiint_{\Sigma} = \oiint_{\Sigma + \Sigma_1} - \oiint_{\Sigma_1}$$

3) 利用两类曲面积分之间的关系

$$\oiint_{\Sigma} P \, dydz + Q \, dzdx + R \, dxdy \\ = \oiint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) \, dS$$

其中 $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 、 $\cos \gamma$ 是 Σ 上正向法向量的方向余弦。



微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

常考题型与典型例题

一、第一类曲面积分的计算

例 1(2000) 设 $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0)$, S_1 为 S 在第一卦限中的部分, 则有, 手书: 对称性 答案: C

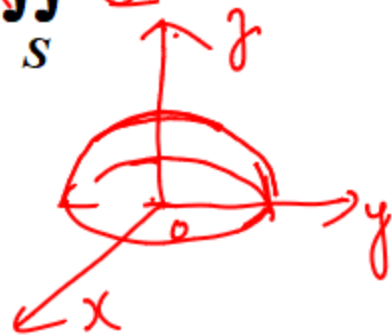
(A) $\iint_S x dS = 4 \iint_{S_1} x dS$.

(B) $\iint_S y dS = 4 \iint_{S_1} x dS$.

(C) $\iint_S z dS = 4 \iint_{S_1} x dS$.

(D) $\iint_S xyz dS = 4 \iint_{S_1} xyz dS$.

$4 \iint_{S_1} z dS$

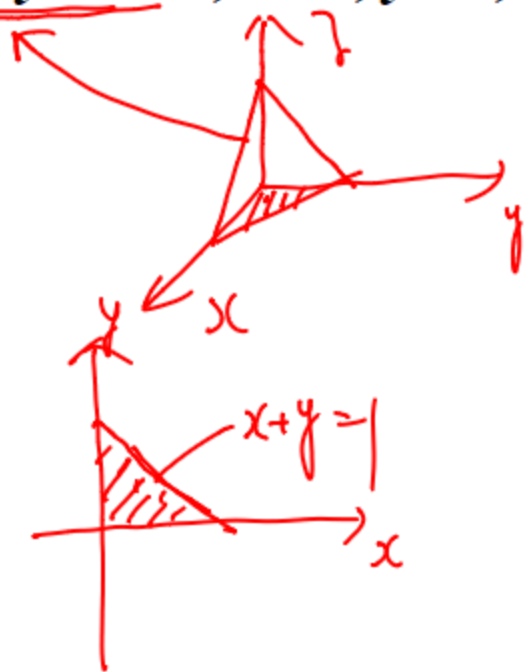


微积分公理【顶尖考研】

例 2(2012) 设 $\Sigma = \{(x, y, z) | \underline{x+y+z=1}, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$,

则 $\iint_{\Sigma} y^2 \underline{dS} = \underline{\quad} \cdot \frac{\sqrt{3}}{12}$ $\Sigma: z=1-x-y$

$\stackrel{\text{原}}{=} \iint_D y^2 \cdot \sqrt{1+y_x^2+y_y^2} dx dy$
 $= \sqrt{3} \iint_D y^2 dx dy = \sqrt{3} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} y^2 dx$

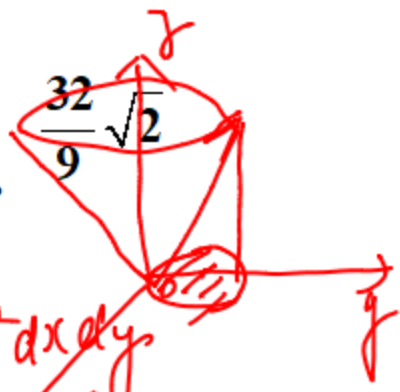


例 3(1995) 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} z dS$, 其中 Σ 为锥面
(ID: djky66)

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在柱体 $x^2 + y^2 \leq 2x$ 内的部分.

分析. $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} dx dy$

$$= \sqrt{2} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

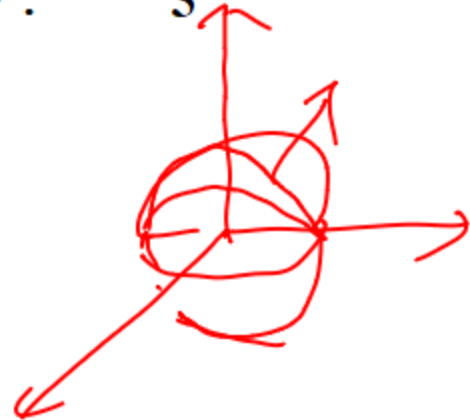


二、第二类曲面积分的计算

例 4(1988) 设 S 为曲面 $\underline{x^2 + y^2 + z^2 = 1}$ 的外侧, 计算

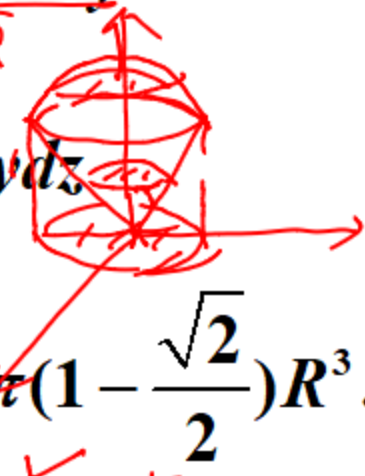
曲面积分 $I = \oint_S \underline{x^3} dydz + \overset{Q}{y^3} dzdx + \overset{R}{z^3} dxdy$. $\frac{12}{5}\pi$

解法 1
= $\iiint_{\Omega} 3(x^2 + y^2 + z^2) dV$
= $3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta d\vartheta \int_0^1 r^2 \cdot r^2 \sin\vartheta dr$



例 5(2005) 设 Ω 是由锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 围成的空间区域, Σ 是 Ω 的整个边界的外侧, 则 $\oint_{\Sigma} \underbrace{xdydz}_P + \underbrace{ydzdx}_Q + \underbrace{zdx dy}_R =$.

【详解】
$$\begin{aligned} I &= \oint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdx dy = \iiint_{\Omega} 3dxdydz \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_0^R \rho^2 d\rho = 2\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) R^3. \end{aligned}$$



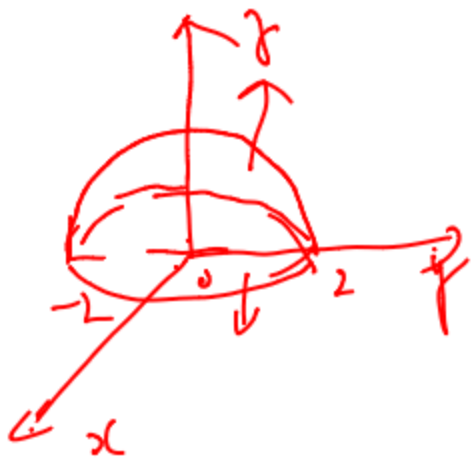
例 6(2008) 设曲面 Σ 是 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 的上侧, 则

$$\iint_{\Sigma} \overset{P}{xy} \overset{Q}{dy} \overset{R}{dz} + \overset{Q}{xz} \overset{R}{dx} + \overset{R}{x^2} \overset{P}{dx} \overset{Q}{dy} = \underline{4\pi}$$

分析: 补面 $\Sigma_1: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ z = 0 \end{cases}$ 下侧.

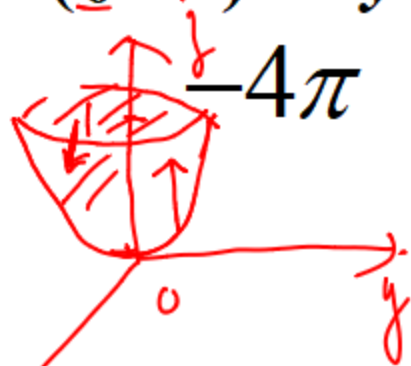
$$I = \oiint_{\Sigma + \Sigma_1} = \iiint_{\Omega} y \, dV - \iint_{\Sigma_1} x^2 \, dx \, dy$$

$$= 0 + \iint_{x^2 + y^2 \leq 4} x^2 \, dx \, dy = \frac{1}{2} \iint_{x^2 + y^2 \leq 4} (x^2 + y^2) \, dx \, dy$$



例 7(2014) 设 Σ 为曲面 $z = x^2 + y^2$ ($z \leq 1$) 的上侧, 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} (x-1)^3 dydz + (y-1)^3 dzdx + (z-1) dxdy$.

分析: 补面 Σ_1 构成闭曲面 Ω 的上侧 Σ 下侧 Σ_1



$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{\Sigma + \Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} = -3 \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dV \\
 &= - \iiint_{\Omega} [3(x-1)^2 + 3(y-1)^2 + 1] dxdydz - \iint_{\Sigma_1} 0 dxdy \\
 &= - \iiint_{\Omega} [3(x^2 + y^2) - 6x - 6y + 7] dxdydz
 \end{aligned}$$



微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

第四节 多元积分的应用

会用重积分、曲线积分及曲面积分求一些几何量与物理量
(~~平面图形的面积、体积、曲面面积、弧长、质量、质心、形~~
心、转动惯量、引力、功及流量等)。

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

考试内容概要

1、多元积分的应用

	<u>平面板</u>	<u>空间体</u>	<u>曲线</u>	<u>曲面</u>
几何 度量	面积: $S = \iint_D d\sigma$	体积: $V = \iiint_{\Omega} dV$	弧长: $L = \int_C ds$	面积: $S = \iint_{\Sigma} dS$
质量	$m = \iint_D \rho(x, y) d\sigma$	$m = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dV$	$m = \int_C \rho(x, y, z) ds$	$m = \iint_{\Sigma} \rho(x, y, z) dS$
<u>质心</u>	$\bar{x} = \frac{\iint_D x \rho(x, y) d\sigma}{\iint_D \rho(x, y) d\sigma}$	$\bar{x} = \frac{\iiint_{\Omega} x \rho(x, y, z) dV}{\iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dV}$	$\bar{x} = \frac{\int_C x \rho(x, y, z) ds}{\int_C \rho(x, y, z) ds}$	$\bar{x} = \frac{\iint_{\Sigma} x \rho(x, y, z) dS}{\iint_{\Sigma} \rho(x, y, z) dS}$
转动 惯量	$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) d\sigma$	$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV$	$I_x = \int_C (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds$	$I_x = \iint_{\Sigma} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dS$

2、变力做功

设质点在力 $F(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ 作用下, 沿平面曲线 C 由 A 点移动到 B 点, 则质点在移动过程中 F 所做的功

向量场

$$W = \int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

$$\vec{A}(x, y, z) = \underline{P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}}$$

3、通量 $\Phi = \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$

4、环流量 $\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz.$



微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

常考题型与典型例题

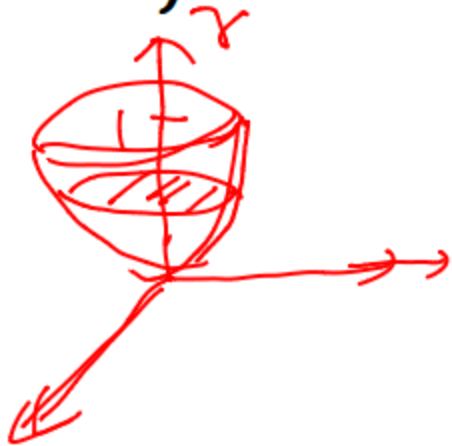
微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

例 1(2010) 设 $\Omega = \{(x, y, z) | \underline{x^2 + y^2 \leq z \leq 1}\}$, 则 Ω 的

形心坐标 $\bar{z} = \underline{\frac{2}{3}}$ $\bar{x}, \bar{y} = 0$

$$\bar{z} = \frac{\iiint_{\Omega} z dv}{\iiint_{\Omega} dv} =$$

$z = f_0 -$

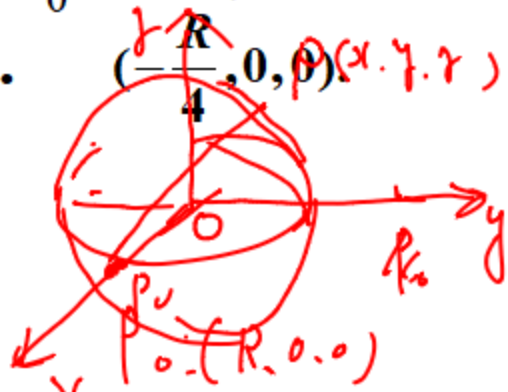


例 2(2000) 设有一半径为 R 的球体, P_0 是此球表面上
的一个定点, 球体上任一点的密度与该点到 P_0 的距离的平方
成正比 (比例系数 $k>0$), 求球体的重心位置.

$$\bar{x} = \frac{\iiint_{\Omega} x k[(x-R)^2 + y^2 + z^2] dV}{\iiint_{\Omega} k[(x-R)^2 + y^2 + z^2] dV}$$

$$\rho \quad \bar{y} = 0$$

$$\bar{z} = 0$$



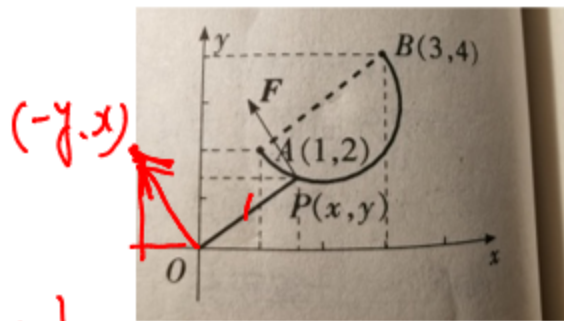
$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} x k[(x-R)^2 + y^2 + z^2] dV &= -2Rk \iiint_{\Omega} x^2 dV & \iiint_{\Omega} k[(x-R)^2 + y^2 + z^2] dV &= k \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dV + k \iiint_{\Omega} R^2 dV \\ &= -\frac{2}{3} Rk \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dV & &= k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R r^2 r^2 \sin \varphi dr + \frac{4}{3} k \pi R^5 = \frac{32}{15} k \pi R^5. \\ &= -\frac{2}{3} Rk \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R r^2 r^2 \sin \varphi dr = -\frac{8}{15} k \pi R^4. \end{aligned}$$

例 3(1990) 质点 P 沿着以 AB 为直径的半圆周，从点 $A(1, 2)$ 运动到点 $B(3, 4)$ 的过程中受变力 $\vec{F}$ 作用（见图）， $\vec{F}$ 的大小等于点 P 到原点 O 之间的距离，其方向垂直于线段 OP 且与 y 轴正向的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$. 求变力 $\vec{F}$ 对质点 P 所做的功.

$$\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}.$$
$$L: \begin{cases} x = 2 + \sqrt{2} \cos \theta \\ y = 3 + \sqrt{2} \sin \theta \end{cases}$$

$$W = \int_L -y dx + x dy$$

$$W = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [\sqrt{2}(3 + \sqrt{2} \sin \theta) \sin \theta + \sqrt{2}(2 + \sqrt{2} \cos \theta) \cos \theta] d\theta = 2(\pi - 1).$$





微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

第五节 场论初步



考试要求

【顶尖考研】

(ID: djky66)

- 1、理解方向导数与梯度的概念，并掌握其计算方法.
- 2、了解散度与旋度的概念，并会计算.

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

考试内容概要

一、方向导数

1、定义: $\vec{l}^0 = \{\cos \alpha, \cos \beta\}$ $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \vec{l}} \right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\rho}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta) - f(x_0, y_0)}{t}$$



2、定理

$z=f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微, 则函数在该点沿任何方向的方向导数均存在, 且

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta$$

二、梯度

$u=f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 的梯度为:

$$\text{grad} f(x, y, z) = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\} = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

注: 函数在某点的梯度是这样一个向量，它的方向是函数在该点方向导数最大的方向，它的模是最大方向导数的值。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{l}} &= f'_x \cos \alpha + f'_y \cos \beta = \{f'_x, f'_y\} \cdot \{\cos \alpha, \cos \beta\} \\ &= |\{f'_x, f'_y\}| |\{\cos \alpha, \cos \beta\}| \cos \theta \leq 0 \dots \end{aligned}$$

三、散度

(ID: djky66)

向量场 $\vec{A}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$

P 、 Q 、 R 函具有一阶连续偏导数，则向量场在点 (x, y, z) 处的散度为

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

四、旋度

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$



微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

常考题型与典型例题

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

例 1(1996) 函数 $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处
沿点 A 指向 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数为 $\frac{1}{2}$.

微信公众号【顶少考研】

(ID: djky66)

例 2、 在椭球面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 上求一点, 使函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在该点沿 $\vec{l} = \{1, -1, 0\}$ 方向的方向导数最大.

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$$

例 3(2012) $\text{grad}(xy + \frac{z}{y})|_{(2,1,1)} = \underline{\hspace{2cm}} \{1,1,1\}$.

微信公众号【顶尖考研】

(ID: dikey66)

例 4(1989) 向量场 $\vec{u}(x, y, z) = xy^2 \vec{i} + ye^z \vec{j} + x \ln(1 + z^2) \vec{k}$
在点 $P(1, 1, 0)$ 处的散度 $\text{div} \vec{u} = \underline{\quad 2 \quad}$.

例 5(2018) 设 $F(x, y, z) = xy\overset{1}{i} - yz\overset{1}{j} + zx\overset{1}{k}$, 则

$$\text{rot } F(1, 1, 0) = \underline{\overset{1}{i} - \overset{1}{k}}.$$