

2022年研究生入学考试

高等数学(微积分)基础班

2021年1月

1° 数列 u_n 收敛 2° 级数 $\sum u_n$ 收敛 3° $\sum u_n$ 收敛 $\Rightarrow$ $u_n \rightarrow 0$
? $\leftarrow$ 13 $\leftarrow$ 08

第十章 无穷级数

(ID: 311456) 2009-2021 年级数分数分布

	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
数一	<u>13</u>	10	4	10	14	10	4	10	4	4	<u>14-</u>	14	<u>12</u>
数三	4	0	4	4	4	10	4	14	14	10	14-	14-	12+

第一节 常数项级数

考试要求号【顶尖考研】

- 1、理解 常数项级数收敛、发散以及收敛级数的和的概念。
- 2、了解 任意项级数绝对收敛与条件收敛的概念以及绝对收敛与收敛的关系。
- 3、掌握 级数的基本性质和级数收敛的必要条件，几何级数及 p 级数的收敛与发散的条件。
- 4、掌握 正项级数收敛性的比较判别法、比值判别法、根值判别法、会用积分判别法。
- 5、掌握 交错级数的莱布尼茨判别法。

考试内容概要

一、级数的概念

1. 定义: 形如 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$

的表达式称为(常数项)无穷级数. 一般项

(1) 级数的部分和--级数前 n 项和

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=1}^n u_i$$

(2) 部分和数列--部分和构成的数列 $\{s_n\}$

$$s_1 = u_1,$$

$$s_2 = u_1 + u_2,$$

$$s_3 = u_1 + u_2 + u_3,$$

⋮

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$$

2. 级数的收敛与发散:

当 n 无限增大时, 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列

S_n 有极限 s , 即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s$, 则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,

这时极限 s 叫做级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和. 且记为

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

如果 S_n 没有极限, 则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(1) 常数项级数收敛(发散) $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ 存在(不存在).

对给定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 可惟一确定部分和数列 $\{s_n\}$.

反之, 对给定数列 $\{s_n\}$, 令

$$u_1 = s_1,$$

$$u_2 = s_2 - s_1,$$

$$\vdots$$

$$u_n = s_n - s_{n-1},$$

$$\vdots$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列为 $\{s_n\}$.

微信公众号【职考资料】
(ID: zky666)

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与数列 $\{s_n\}$ 同时收敛或同时发散

且在收敛时有

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k.$$

(3) 当级数收敛时, 其和与部分和的差称为级数的余项.

$$r_n = s - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} u_{n+i}$$

即 $s_n = s$ 误差为 $|r_n|$.

$$(\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0)$$

例1 判定级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n} = \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} + \cdots \text{ 的收敛性.}$$

解 $\because s_n = \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \cdots + \ln \frac{n}{n-1} + \ln \frac{n+1}{n}$

$$= \ln 2 + (\ln 3 - \ln 2) + (\ln 4 - \ln 3) + \cdots + [\ln n - \ln(n-1)] + (\ln(n+1) - \ln n)$$
$$= \ln(n+1),$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = +\infty,$$

所以级数发散.

例1 讨论等比级数(几何级数)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots \quad (a \neq 0) \text{ 的收敛性.}$$

解 如果 $q \neq 1$ 时

$$s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}$$

$$= \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q},$$

$$\text{当 } |q| < 1 \text{ 时, } \because \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a}{1 - q}$$

$$\text{当 } |q| > 1 \text{ 时, } \because \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$$

收敛

发散

如果 $|q|=1$ 时

当 $q=1$ 时, $s_n = na \rightarrow \infty$

级数发散

当 $q=-1$ 时, 级数变为 $\underline{a - a + a - a + \cdots}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a = a,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0,$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \text{ 不存在 } \frac{a}{1-q}$$

级数发散

综上所述得

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \begin{cases} \text{当 } |q| < 1 \text{ 时, 收敛} \\ \text{当 } |q| \geq 1 \text{ 时, 发散} \end{cases}$$

例 判定级数【顶尖考研】

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1) \cdot (n+2)} + \cdots \text{ 的收敛性.}$$

解 $u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \quad = |$

$$\begin{aligned} \text{于是 } s_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \\ &= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1,$$

$$\text{故级数 } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \text{ 收敛, 和为 } 1.$$

2、无穷级数的基本性质

性质1. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛.

证 设 s_n 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 的部分和, w_n 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = w$ 则

$$\begin{aligned} s_n &= ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n \\ &= k(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = kw_n \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} kw_n = kw, \quad \text{故} \sum_{n=1}^{\infty} ku_n = kw.$$

结论: 级数的每一项同乘一个不为零的常数, 敛散性不变.

性质2. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 、 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$ ，

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = w$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛，其和为 $s \pm w$ 。

证 设 $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ ， $w_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ ，

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w$ ，

$$T_n = \sum_{k=1}^n (u_k \pm v_k) = (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n)$$

$$= (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) \pm (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) = s_n \pm w_n$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{T_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n \pm w_n) = \underline{s \pm w}$ ，

故 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = s \pm w = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 。

注：级数的加减运算。

$$\begin{aligned} 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} &= 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} + \sqrt{2} &= \sqrt{2} \\ \sqrt{2} + \sqrt{2} &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

性质3 在一个级数前面加上(或去掉、改变)有限项, 级数的敛散性不变.

证明 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_k + \cdots + u_n + \cdots$ ✓

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} u_n = u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_{k+n}$$

令 $\underbrace{u_1 + u_2 + \cdots + u_k}_{=a} = a, \quad S_n = \underbrace{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}_{\text{与 } \sigma_n \text{ 有关}}$

$$\sigma_n = \underbrace{u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+n}}_{\text{与 } S_{n+k} \text{ 有关}},$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \sigma_n &= \underbrace{u_1 + \cdots + u_k + u_{k+1} + \cdots + u_{k+n}}_{=S_{n+k}} - (u_1 + \cdots + u_k) \\ &= S_{n+k} - a, \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{n+k} - a) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - a.$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=k+1}^{\infty} u_n$ 同时收敛或同时发散.

性质4 收敛级数加括号后所成的级数仍然收敛,且与原级数有相同的和.

分析

σ_n

$$(u_1 + u_2) + (u_3 + u_4 + u_5) + (u_6 + u_7 + u_8 + u_9) + \cdots$$

$$\sigma_1 = s_2, \sigma_2 = s_5, \sigma_3 = s_9, \cdots, \sigma_m = s_n, \cdots$$

显然 数列 $\{\sigma_m\}$ 是数列 $\{s_n\}$ 的一个子序列,

$$\text{所以 } \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s.$$

注意: 收敛级数去括弧后所成的级数不一定收敛.

例如

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots \quad \text{收敛}$$

$$1-1+1-1+1-1+\cdots \quad \text{发散}$$

推论 如果加括号后所成的级数发散,则原级数也发散.

收敛的必要条件

性质5 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

证明 设 $s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 而 $u_n = s_n - s_{n-1}$,

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s - s = 0$$

注 1. 如果级数的一般项不趋于零, 则级数发散;

例如 (1) $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n+1} + \cdots$ 发散

(2) $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1} + \cdots$ 发散

2. 必要条件不充分.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n} = \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} + \cdots$$

有 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 但级数不收敛

微情公考(顶尖考研) (ID: 9116256)

(2) 调和级数 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$

有 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 但级数不收敛。

证明 反证法 假设调和级数收敛, 其和为 s .

$$\begin{aligned} \because \quad \underline{s_{2n} - s_n} &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &> \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\text{又 } \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{2n} - s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} - \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s - s = 0$$

便有 $0 \geq \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty)$ $\therefore$ 级数发散

矛盾

二、级数的审敛准则

1、正项级数

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 中各项均有 $u_n \geq 0$, 这种级数称为正项级数.

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = s_{n-1} + u_n,$$

$$s_1 \leq s_2 \leq L \leq s_n \leq L$$

部分和数列 $\{s_n\}$ 为单调增加数列.

定理 正项级数收敛的充要条件:

正项级数收敛 $\Leftrightarrow$ 它的部分和数列 s_n 有界.

微信视频号: 顶尖考研 (微信号: dykx66)

(1) **比较判别法** 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数,
且满足关系 $u_n \leq v_n (n=1, 2, \dots)$,
1° $u_n \leq v_n (n=1, 2, \dots)$
2° $n=k, k+1, \dots$

则 (1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

大设小必收
小设大必发

证明 $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, $w_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$

$$\because u_n \leq v_n,$$

$$\therefore s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$\leq (v_1 + v_2 + \dots + v_n) = w_n,$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

例 判定调和级数 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ 的敛散性

解

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2}\right)}_{\text{2项}} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\text{2项}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{\text{4项}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16}\right)}_{\text{8项}} \\ &\quad + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^m+1} + \frac{1}{2^m+2} + \cdots + \frac{1}{2^{m+1}}\right)}_{\text{2}^m\text{项}} + \cdots \\ &> \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{\text{2项}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)}_{\text{4项}} + \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right)}_{\text{8项}} \\ &\quad + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{m+1}}\right)}_{\text{2}^{m+1}\text{项}} + \cdots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} + \cdots \end{aligned}$$

$\therefore$ 级数 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} + \cdots$ 发散, $\therefore$ 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

例 判定级数 $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$ ($p > 0$) 的敛散性.

解 当 $p \leq 1$ 时, $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$, 则 P -级数 发散. $\frac{1}{x^p} = \int_{k-1}^k \frac{1}{x^p} dx \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x^{p-1}} dx$

$$\begin{aligned}
 \text{当 } p > 1 \text{ 时, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} &= 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} \right) \\
 &+ \left(\frac{1}{8^p} + \dots + \frac{1}{15^p} \right) + \dots + \left[\frac{1}{(2^m)^p} + \frac{1}{(2^m+1)^p} + \dots + \frac{1}{(2^{m+1}-1)^p} \right] + \dots \\
 &< 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} \right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} \right) + \left(\frac{1}{8^p} + \dots + \frac{1}{8^p} \right) \\
 &+ \dots + \left[\frac{1}{(2^m)^p} + \frac{1}{(2^m)^p} + \dots + \frac{1}{(2^m)^p} \right] + \dots \\
 &= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}} + \frac{1}{8^{p-1}} + \dots + \frac{1}{(2^m)^{p-1}} + \dots
 \end{aligned}$$

$1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}} + \frac{1}{8^{p-1}} + \cdots + \frac{1}{(2^m)^{p-1}} + \cdots$ 是公比为 $\frac{1}{2^{p-1}}$ 的几何级数, 收敛于 $\frac{1}{1 - \frac{1}{2^{p-1}}}$,

所以 P -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛.

P -级数 $\begin{cases} \text{当 } p > 1 \text{ 时, 收敛} \\ \text{当 } p \leq 1 \text{ 时, 发散} \end{cases}$

重要参考级数: 几何级数, p -级数, 调和级数.

(2) 比较判别法的极限形式

$u_n \rightarrow 0$
 $v_n \rightarrow 0$
 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ($u_n \geq 0$)
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ 则

- 1) $l = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;
- 2) $l = +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛;
- 3) 当 $0 < l < +\infty$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散

注: 1、比较审敛法的不方便— 须有 参照级数.

2、正项级数收敛本质上是一般项趋于零足够快。

$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{1}{n})$ $1 - \cos \frac{1}{n} \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

(3) 比值判别法(达朗贝尔D'Alembert判别法)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, 则

(1) 当 $l < 1$ 时, 级数收敛;

(2) 当 $l > 1$ 时, 级数发散;

(3) 当 $l = 1$ 时, 不能确定 .

证明 当 l 为有限数时, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时,

$$\text{有 } \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| < \varepsilon, \quad \text{即 } l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon \quad (n > N)$$

(1) 当 $l < 1$ 时, 取 $\varepsilon < 1 - l$, 使 $r = \varepsilon + l < 1$,

$$u_{N+2} < r u_{N+1}, \quad u_{N+3} < r u_{N+2} < r^2 u_{N+1},$$

$$\cdots, \quad u_{N+m} < r^{m-1} u_{N+1},$$

微信公众账号【顶尖考研】
$$\sum_{m=1}^{\infty} r^{m-1} u_{N+1} = u_{N+1} \sum_{m=1}^{\infty} r^{m-1} \quad \text{收敛}$$

所以 $\sum_{m=1}^{\infty} \underline{u_{N+m}} = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(2) 当 $l > 1$ 时, 取 $\varepsilon < l - 1$, 使 $r = l - \varepsilon > 1$,

当 $n > N$ 时, $u_{n+1} > r u_n > u_n$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$. 故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(3) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散,
级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛,
 } $(l=1)$

因此当 $l = 1$ 时比值判别法失效.

(4)根值审敛法 (柯西判别法):

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \overset{\rho}{\rho}$ (ρ 为数或 $+\infty$),

则 $\rho < 1$ 时, 收敛; $\rho > 1$ 时, 发散.

($\rho = 1$ 时失效)

比值审敛法、根值审敛法的优点:

由项的比值或根值的极限值确定级数的收敛性.

(5) 积分判别法 (折证)

若 $f(x)$ 在区间 $[1, \infty)$ 是正的, 且单调递减, 则级数

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛 当且仅当 反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

如: 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的敛散性, 由于 $\frac{1}{x}$ 在区间 $[1, \infty)$ 的值是正的、单调递减, 且反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty$ 发散, 用积分判别法知调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是发散的.

2、交错级数及其审敛法

正、负项相间的级数称为交错级数。

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = \underbrace{u_1}_{u_1} - \underbrace{u_2}_{(u_2-u_1)} + \underbrace{u_3}_{(u_3-u_2)} - \underbrace{u_4}_{(u_4-u_3)} + \cdots + (-1)^{n-1} u_n + \cdots \quad (\text{其中 } u_n > 0)$$

$$\text{或 } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n = -u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \cdots + (-1)^n u_n + \cdots$$

莱布尼茨定理: 如果交错级数满足条件:

$$(1) \underbrace{u_n}_{u_n} \geq \underbrace{u_{n+1}}_{(n+1)} \quad (n=1, 2, 3, \cdots), \quad (2) \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0,$$

则级数收敛, 且其和 $s \leq u_1$.

注: 莱布尼茨定理是交错级数收敛的充分条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+(-1)^n}} \leq \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n+(-1)^n}}$$

证明 $\because u_{n-1} - u_n \geq 0$,

$$\therefore s_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

数列 s_{2n} 是单调增加的,

$$\begin{aligned} \text{又 } s_{2n} &= u_1 - (u_2 - u_3) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} \\ &\leq u_1 \end{aligned}$$

数列 s_{2n} 是有界的,

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = s \leq u_1. \quad \because \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} = 0,$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{2n} + u_{2n+1}) = s,$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$. $\therefore$ 级数收敛于和 s , 且 $s \leq u_1$.

余项 $r_n = \pm(u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots)$, $|r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots$,

满足收敛的两个条件, $\therefore |r_n| \leq u_{n+1}$.

$$\textcircled{\lim_{n \rightarrow \infty} s_n} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1}$$

例

判定级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-1}$ 的敛散性

解

$$\begin{aligned} \because \left(\frac{\sqrt{x}}{x-1} \right)' &= \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1) - \sqrt{x} \cdot 1 \\ &= \frac{-(1+x)}{2\sqrt{x}(x-1)^2} < 0 \quad (x \geq 2) \end{aligned}$$

故当 $x > 2$ 时, 函数 $\frac{\sqrt{x}}{x-1}$ 单调递减,

$$\therefore u_n > u_{n+1} \quad (n > 2), \quad \text{又 } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1} = 0.$$

$\therefore$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1}$ 收敛.

3、任意项级数

正项和负项任意出现的级数称为任意项级数.

定理 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

证明 令 $v_n = \frac{1}{2}(u_n + |u_n|) = \begin{cases} |u_n|, & u_n \geq 0, \\ 0 & u_n < 0, \end{cases} \quad (n=1, 2, \cdots),$

显然 $v_n \geq 0$, 且 $v_n \leq |u_n|$, $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,

又 $\because \underline{u_n} = \underline{2v_n} - |u_n|$,

则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (2v_n - |u_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} 2v_n - \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

绝对收敛与条件收敛

定义: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛;

若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛.

结论 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. 推论:

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散.

注: 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p}$, $\frac{1}{n^p}$
当 $p > 0$ 时收敛, 当 $p \leq 0$ 时发散;

当 $0 < p \leq 1$ 时条件收敛; 当 $p > 1$ 时绝对收敛。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} &= 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} &= 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} &= 1 \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$p = \frac{1}{2}$$

重要参考级数:【顶尖考研】

1、几何级数(等比级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots \quad (a \neq 0)$$

$$= \frac{a}{1-q} \checkmark$$

$\begin{cases} \text{当 } |q| < 1 \text{ 时, 收敛} \\ \text{当 } |q| \geq 1 \text{ 时, 发散} \end{cases}$

2、 p -级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

对数 p -级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$

$\begin{cases} \text{当 } p > 1 \text{ 时, 收敛} \\ \text{当 } p \leq 1 \text{ 时, 发散} \end{cases}$

3、交错级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^p},$$

当 $p > 0$ 时收敛, 当 $p \leq 0$ 时发散;

当 $0 < p \leq 1$ 时条件收敛; 当 $p > 1$ 时绝对收敛。

常考题型与典型例题

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)
考点

1、数项级数敛散性的判定

(1) 具体级数—判别法 (比较、比值、根值、积分等)

(2) 含参数的级数—讨论参数的取值

(3) 抽象级数—选择题 (较难)

2、数项级数的证明

3、数项级数的和—定义或利用幂级数的和函数

数项级数敛散性的判定解题思路:

- 1、若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散; 否则进一步判断;
(Handwritten: $u_n \sim v_n$)
- 2、若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 先化简 u_n , 视其特点选择适当的判别法:
- (1) 若 u_n 中含有 $\frac{1}{n^\alpha}$ (或 $\frac{1}{n^\alpha \ln^p n}$), 则可与 p 级数 (或对数 p 级数) 比较;
 - (2) 若 u_n 中含有 n 的乘积的形式 (包括 $n!$), 则可考虑用 比值判别法;
 - (3) 若 u_n 中含有形如 $a^{f(n)}$ 的因子, 则可考虑用 根值判别法;
 - (4) 以上方法均失效, 则可利用已知级数的敛散性质, 结合敛散的定义和性质, 考察其收敛性。

3、 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为任意项级数，则可用方法 1 和 2 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 的敛散性

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛；

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，则看 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是否是交错级数，
若是，用莱布尼兹判别法判断 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是否条件收敛。

若不是，用定义或性质。

例 2(2015-3) 下列级数中发散的是

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ · 收敛

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln(1 + \frac{1}{n})$ · 收敛

(C) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{\ln n}$ · 收敛

(D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ · 收敛

分析: (A) 收敛, 把 $\frac{1}{3}$ 提出来 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{3} < 1$

(B) $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln(1 + \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

(C) $\ln n = \ln(1 + n - 1) \leq n - 1$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\frac{1}{n}} = \infty$

(D) $\frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n-1}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1$

例: $\sum u_n y_n \Rightarrow \sum (u_n^T y_n)$ 1° 收敛性

$U_n \rightarrow 0$ (A) 若 $a_n > a_{n+1}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛;

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛, 则 $a_n > a_{n+1}$; 2° 递增(2分), 符号(1分)

✗ (C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则存在常数 $p > 1$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n$ 存在;

(D) 若存在常数 $p > 1$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n$ 存在, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(c) $p > 1$

$a_n = \frac{1}{n^p}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p \cdot \frac{1}{n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq 0$

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^p} dx$

$\int_1^t \frac{1}{x^p} dx = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^t = \frac{t^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}$

$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{-p+1}}{-p+1} = 0$ (since $p > 1$)

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{-p+1}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converges

例 4(2009-1) 设有两个数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则

✗ (A) 当 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ 收敛. 答案: $b_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ $a_n b_n = \frac{1}{n}$

✗ (B) 当 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散. $a_n = b_n = \frac{1}{n}$ $a_n b_n = \frac{1}{n^2}$

(C) 当 $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ 收敛时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛. ✓

✗ (D) 当 $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ 发散时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散. $a_n = b_n = \frac{1}{n}$ $a_n^2 b_n^2 = \frac{1}{n^4}$

idiot: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \{a_n\} \text{ 有界} \Rightarrow \exists M > 0, |a_n| \leq M$
 $a_n^2 b_n^2 \leq M^2 b_n^2 = M^2 |b_n|^2$

例 5(2011-3) 设 $\{u_n\}$ 是数列, 则下列命题正确的是

- (A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛 .
- (B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 .
- (C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛 .
- (D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 .

是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

$= (u_1 + u_2) + (u_3 + u_4) + \dots$

答案: A

幂级数

第二节 幂级数

考试要求

- 1、了解函数项级数的收敛域及和函数的概念.
- 2、理解幂级数收敛半径的概念，并掌握幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域的求法.
- 3、了解幂级数在其收敛区间内的基本性质（和函数的连续性、逐项求导和逐项积分），会求一些幂级数在收敛区间内的和函数，并会由此求出某些数项级数的和.
- 4、了解函数展开为泰勒级数的充分必要条件.
- 5、掌握 e^x ， $\sin x$ ， $\cos x$ ， $\ln(1+x)$ 及 $(1+x)^\alpha$ 的麦克劳林展开式，会用它们将一些简单函数间接展开为幂级数.

考试内容概要

一、函数项级数的一般概念

1、定义

设 $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$ 是定义在区间 I 上的函数, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$ 称为定义在区间 I 上的 函数项级数.

2、收敛点与收敛域

如果 $x_0 \in I$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛, 称 x_0 为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的 收敛点; 否则, 称为 发散点. 收敛域, 发散域.

3、和函数

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k(x)$$

二、幂级数的概念

1. 定义 形如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ $x=x_0$ $n=0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

的级数称为**幂级数**。其中 a_n 称为幂级数的系数

当 $x_0 = 0$ 时,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

例如级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots$,

当 $|x| < 1$ 时, 收敛; $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, 当 $|x| \geq 1$ 时, 发散;

2、幂级数的收敛性

定理 (Abel定理)

如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0 (x_0 \neq 0)$ 处收敛, 则它

在满足不等式 $|x| < |x_0|$ 的一切 x 处绝对收敛。

如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0 (x_0 \neq 0)$ 处发散, 则它

在满足不等式 $|x| > |x_0|$ 的一切 x 处发散。

证明 (1) $\because \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛, $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$,

$\exists M$, 使得 $|a_n x_0^n| \leq M \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

微信公号【顶尖考研】
(ID: djky66)
 $\therefore$ 当 $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$ 时, 等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ 收敛,

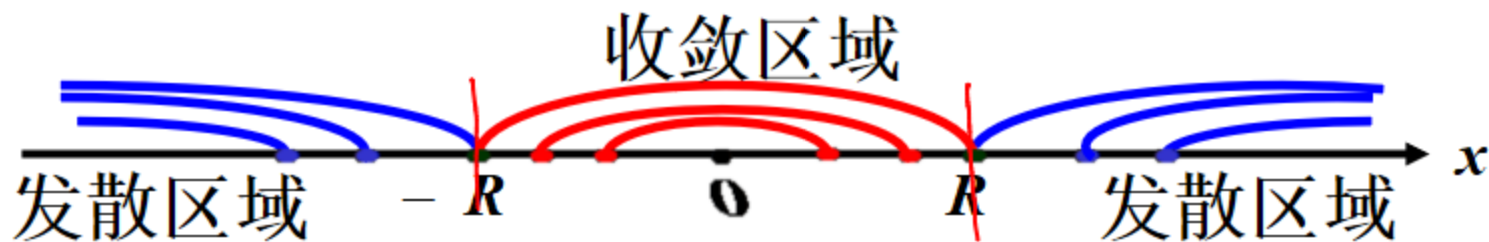
$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 收敛, 即级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛;

(2) 假设当 $x = x_0$ 时发散,

而有一点 x_1 适合 $|x_1| > |x_0|$ 使级数收敛,

由(1)结论 则级数当 $x = x_0$ 时应收敛, 这与所设矛盾.

几何说明



结论 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 不是仅在 $x=0$ 一点收敛, 也不是在整个

数轴上收敛, 则必存在一个完全确定的正数 R , 它具有下列性质:

当 $|x| < R$ 时, 幂级数 绝对收敛;

当 $|x| > R$ 时, 幂级数 发散;

当 $x = R$ 与 $x = -R$ 时, 幂级数可能收敛也可能发散.

定义: 正数 R 称为幂级数的 收敛半径.

$(-R, R)$ 称为幂级数的 收敛区间.

收敛区间及收敛端点称为幂级数的 收敛域.

规定 (1) 幂级数只在 $x=0$ 处收敛, $R=0$, 收敛区间 $x=0$;
(2) 幂级数对一切 x 都收敛, $R=+\infty$, 收敛区间 $(-\infty, +\infty)$.

定理

如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足条件

达朗贝尔判别法

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$$

则 (1) 当 $0 < l < +\infty$ 时, $R = \frac{1}{l}$;

(2) 当 $l = 0$ 时, $R = +\infty$; $(-\infty, +\infty)$

(3) 当 $l = +\infty$ 时, $R = 0$.

证明 对级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 应用达朗贝尔判别法

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |x| = l |x|,$$

(1) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l (l \neq 0)$ 存在,

由比值判别法,

当 $|x| < \frac{1}{l}$ 时, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 收敛,

$$a_n x^n \rightarrow 0$$

从而级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛. $\frac{1}{l} > 1$

当 $|x| > \frac{1}{l}$ 时, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 发散, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

并且从某个 n 开始 $|a_{n+1} x^{n+1}| > |a_n x^n|$,

$|a_n x^n| \not\rightarrow 0$ 从而级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散. $|a_n x^n| > 0$

收敛半径 $R = \frac{1}{l}$;

微信公众账号【顶尖考研】
(ID: djky66)

(2) 如果 $l=0$, $\forall x \neq 0$, 有 $\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$,

级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_nx^n|$ 收敛, 从而级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 绝对收敛.

收敛半径 $R = +\infty$;

(3) 如果 $l = +\infty$, $\forall x \neq 0$, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 必发散.

(否则由定理知将有点 $x \neq 0$ 使 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_nx^n|$ 收敛)

收敛半径 $R = 0$.

例

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} (-nx)^n; \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!};$$

解 (1) $\because l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{1}{n+1}}{(-1)^n \frac{1}{n}} \right|$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \therefore R = 1 \left(\frac{1}{2} \right)$

当 $x = 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, 收敛

当 $x = -1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, 发散

故收敛域是 $(-1, 1]$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-nx)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-n)^n x^n, \quad x=0$

$$\because l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = +\infty, \quad \left(R = \frac{1}{l} = 0 \right)$$

级数只在 $x=0$ 处收敛,

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1$

$$\because l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0, \quad \therefore R = +\infty,$$

收敛域 $(-\infty, +\infty)$.

三、幂级数的运算

1、代数运算性质

设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \underline{x}^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \underline{x}^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2 ,
收敛域分别为 I_1 和 I_2 , $\textcircled{R} = \min \{R_1, R_2\}$,
 $\underline{I} = I_1 \cap I_2$.

1) 加减法

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n. \quad x \in I.$$

2) 乘法

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad x \in (-R, R)$$

$$(\text{其中 } c_n = a_0 \cdot b_n + a_1 \cdot b_{n-1} + \cdots + a_n \cdot b_0)$$

柯西乘积

	$\overset{1}{a_0 b_0}$	$\overset{x}{a_0 b_1}$	$\overset{x^2}{a_0 b_2}$	$\overset{x^3}{a_0 b_3}$	...
	$a_1 b_0$	$a_1 b_1$	$a_1 b_2$	$a_1 b_3$	...
	$a_2 b_0$	$a_2 b_1$	$a_2 b_2$	$a_2 b_3$	...
	$a_3 b_0$	$a_3 b_1$	$a_3 b_2$	$a_3 b_3$	...
	...	...	...	...	...

3) 除法

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \underline{\bar{c}_n} x^n.$$

(相除后的收敛域可能比 I 小得多)

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot x^n = 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots \quad (-\infty, +\infty)$$

$$1-x = 1 - x + 0 \cdot x^2 + \cdots \quad (-\infty, +\infty)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad x \in \underline{(-1, 1)}$$

2、和函数的分析运算性质:

设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R , 和函数为 $S(x)$

1) 连续性

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内连续,

若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在端点收敛, 则 $s(x)$ 在端点单侧连续.

和函数在收敛域上的连续

(2) 可导性

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内可导,

并可逐项求导, 且求导后级数的收敛半径不变.

$$\underline{s'(x)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

(3) 可积性

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在收敛域内可积,

并可逐项求积分, 且积分后级数的收敛半径不变.

$$\int_0^x s(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

四、函数的幂级数展开

1、定义

$$\text{若 } \underline{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \underline{x \in I}$$

则称 $f(x)$ 在 I 上可展开为 $(x-x_0)$ 的幂级数.

问题: 1. 如果能展开, a_n 是什么?

2. 展开式是否唯一?

3. 在什么条件下才能展开成幂级数?

2、定理 如果 $f(x)$ 在 $U_\delta(x_0)$ 内能展成 $(x-x_0)$ 的幂级

数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n,$

则 $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \quad (n=0,1,2,\dots)$
(泰勒系数)

从而展开式唯一。

3、泰勒级数

设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 为任意阶可导，幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \text{ 称为 } f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 的 泰勒级数。}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \text{ 称为 } f(x) \text{ 的 麦克劳林级数。}$$

问题 $f(x)$ 的泰勒级数在收敛域上是否收敛于 $f(x)$?
不一定。

例 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & \underline{x = 0} \end{cases}$

在 $x=0$ 任意阶可导, 且 $f^{(n)}(0) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$

$\therefore f(x)$ 的麦氏级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n = 0 \quad \xrightarrow{(-\infty, +\infty)} x \in (-\infty, +\infty).$

可见, 除 $x=0$ 外, $f(x)$ 的麦氏级数处处不收敛于 $f(x)$.

4、定理 $f(x)$ 在 x_0 的泰勒级数在 (a, b) 内收敛于 $f(x)$

$\Leftrightarrow$ 在 (a, b) 内 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. 示

证明 设 $f(x)$ 的泰勒展开式为,

$$\Rightarrow R_n(x) = f(x) - s_{n+1}(x), \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x)$$

必要性 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1}(x) = f(x)$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - s_{n+1}(x)] = 0$;

充分性 由 $f(x) - s_{n+1}(x) = R_n(x)$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - s_{n+1}(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0,$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1}(x) = f(x)$,

故 $f(x)$ 的泰勒级数收敛于 $f(x)$.

5、常用已知和函数的幂级数

$$(1) \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n; x \in (-1, 1) \Rightarrow \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n; \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}; x \in (-1, 1)$$

$$(2) \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}; x \in (-1, 1]$$
$$\ln(1+x)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}; x \in (-1, 1]$$

$$(3) e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; x \in (-\infty, +\infty)$$

$$(4) \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}; x \in (-\infty, +\infty)$$

$$(5) \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}; x \in (-\infty, +\infty)$$

$$(6) (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots$$

端点再定

6、函数展开成幂级数

(1) 直接法(泰勒级数法)

步骤: (1) 求 $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$;

(2) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ 的范围 I ,

则 $f(x)$ 在 I 上可展成在 x_0 处的泰勒级数,

即关于 $x - x_0$ 的幂级数.

(2) 间接法号【顶尖考研】

根据唯一性，利用已知展开式，通过变量代换、四则运算、恒等变形、逐项求导、逐项积分等方法，求得所要展开式。

例 $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad x \in (-\infty, +\infty),$

$$\cos x = (\sin x)'$$

$$\therefore \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n; \quad (-1 < x < 1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n; \\ (-1 < x < 1)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n};$$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

$$(-1 < x < 1)$$

$$(\arctan x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

微信公众号【顶尖考研】
(ID: djky66)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{若 } x_0 \text{ 满足 } \frac{1}{1-x_0} = \frac{1}{1-x_1}$$

$$R = |x_0| + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} \right)$$

常考题型与典型例题

考点 微信公众号【顶尖考研】

1、求收敛半径、收敛区间及收敛域

2、函数展开成幂级数——直接法和间接法

3、求幂级数的和函数

一、求幂级数的收敛域

1、看作一般的函数项级数，用结论

函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, 先求 $\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right|$ (或 $\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|}$),

则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域为 $\{x \in R: \rho(x) < 1\} \cup \left\{ a \in R: \rho(a) = 1 \text{ 且 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) \text{ 收敛} \right\}$

2、对于不缺项的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 用阿达玛公式

先求 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ (或 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$), 则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径

$R = \frac{1}{\rho}$, 收敛区间为 $(x_0 - R, x_0 + R)$, 收敛域为 $(x_0 - R, x_0 + R) \cup \{\text{收敛端点}\}$

注：缺项幂级数的处理

(1) 看作一般函数项级数; (2) 利用变量替换转化为不缺项的幂级数.

例 1(2009-3) 幂函数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n - (-1)^n}{n^2} x^n$ 的收敛半径为 $\frac{1}{e}$.

分析:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{e^{n+1} - (-1)^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{e^n - (-1)^n} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n+1} \left| 1 - (-\frac{1}{e})^{n+1} \right|}{e^n \left| 1 - (-\frac{1}{e})^n \right|} \cdot \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

$R_1 = \frac{1}{e}$ $R_2 = 1$ $= e$

例 2(1995-1) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + (-3)^n} x^{2n-1}$ 的收敛半径 $R=\sqrt{3}$ ✓

1/4 ✓ $\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{2^{n+1} + (-3)^{n+1}} \cdot \frac{2^n + (-3)^n}{n} \right| \cdot x^2$

$|x| > \sqrt{3}$ 4/12/2

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(\frac{2}{-3})^n + 1}{2 \cdot (-\frac{2}{3})^n - 3} \right| x^2 = \frac{x^2}{3} < 1 \Rightarrow |x| < \sqrt{3}$ 4/2/2

1/4 ✓ $\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + (-3)^n} (x^2)^n = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + (-3)^n} x^{2n}$

$R=3$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{3}$

例 3(2000-1)

求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + (-2)^n} \frac{x^n}{n}$$

的收敛区间, 并

讨论该区间端点处的收敛性.

$[-3, 3)$

$R=3$ $(-3, 3)$ ~~421810~~

分析 1°

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}{3^n + (-2)^n} \right| \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{3}$$

2° $x=3$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 + (-\frac{2}{3})^n} \cdot \frac{1}{n} \right) \sim \frac{1}{n} \quad \text{发散}$$

$x=-3$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n + 2^n}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{1}{n}$$

421810

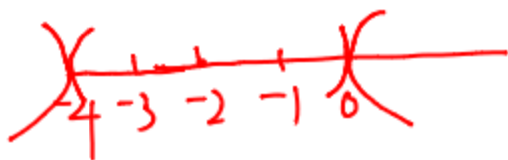
微言公录【顶少考研】
(ID: djky66)

例 4(2008-1) 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛, 在 $x=-4$ 处发散, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$ 的收敛域为 (1, 5]

分析. 1° $R=2$

2° $y_2 \sqrt{e} (0) (1, 5)$

3° $y_2 \sqrt{e} (1, 5]$



例 5(2015-1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则 $x = \sqrt{3}$ 与 $x = 3$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^n$ 的

(A) 收敛点, 收敛点.

(B) 收敛点, 发散点.

(C) 发散点, 收敛点.

(D) 发散点, 发散点.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n \quad R=1$
 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} \quad R=1$
 $(0, 2) \Rightarrow$

V研客™ 金榜时代
在线教育
www.vyake.com

一、函数展开为幂级数

例 6(2006-1) 将函数 $f(x) = \frac{x}{2+x-x^2}$ 展成 x 的幂级数.

$$A = \frac{2}{3} \quad B = \frac{1}{3} = \frac{A}{2-x} + \frac{B}{1+x}$$

$$f(x) = \frac{x}{2+x-x^2} = \frac{x}{(2-x)(1+x)} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{2-x} - \frac{1}{1+x} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}} - \frac{1}{1+x} \right),$$

$$\text{而 } \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, x \in (-1, 1), \quad \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2} \right)^n, x \in (-2, 2),$$

$$f(x) = \frac{x}{2+x-x^2} = \frac{1}{3} \left(-\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n \right) = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n+1} + \frac{1}{2^n} \right) x^n, x \in (-1, 1)$$

例 7(2007-3) 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x - 4}$ 展开成

$x-1$ 的幂级数, 并指出其收敛区间.

分析: $f(x) = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+1} \right)$ $(x_0, 1)$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{x-1-3} - \frac{1}{x-1+2} \right)$$

$$= -\frac{1}{15} \left(\frac{1}{1-\frac{x-1}{3}} - \frac{1}{1+\frac{x-1}{2}} \right)$$

$$= -\frac{1}{15} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{3} \right)^n - \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-1}{2} \right)^n$$

$-1 < x < 3$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \right] (x-1)^n, -1 < x < 3$$

$x \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{x-1}{3} \right| < 1 \quad \left| \frac{x-1}{2} \right| < 1$$

$$|x-1| < 2$$

$$-1 < x < 3$$

例 8、 将函数 $f(x) = \ln(x^2 + x)$ 在 $x = 1$ 的处展开为幂级数.

分析

$$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x} = \frac{2x+1}{x(x+1)}$$

$$\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) (x-1)^n, \quad 0 < x \leq 2$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+(x-1)} + \frac{1}{x-1+2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{2^n}$$

$|x-1| < 1 \Rightarrow \left|\frac{x-1}{2}\right| < 1$

$$\int_1^x f'(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_1^x (-1)^n (t-1)^n dt + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_1^x (-1)^n \frac{(t-1)^n}{2^n} dt$$

$0 < x < 2$

$$f(x) - f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x-1)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} 2^{n+1} (x-1)^{n+1}$$

$$f(x) = \ln 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) (x-1)^{n+1} \quad (0 < x \leq 2)$$

例 9、将函数 $f(x) = \sin x$ 展开成 $x - \frac{\pi}{4}$ 的幂级数.

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n} \right], -\infty < x < +\infty$$

分析

$$\sin x = \sin \left(\underbrace{x - \frac{\pi}{4}}_{\alpha} + \underbrace{\frac{\pi}{4}}_{\beta} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

例 10、将函数 $f(x) = \arctan x^2$ 展开成 x 的幂级数.

分析: $f'(x) = \frac{2x}{1+x^4} = 2x \cdot \frac{1}{1-x^4}$

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+2} x^{4n+2}, -1 \leq x \leq 1$$

$$= 2x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n+1} \quad | -x^4 | < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

$$\int_0^x f'(t) dt = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+2} x^{4n+2}$$

$$f(x) - f(0) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+2} x^{4n+2}$$

$x = \pm 1$

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+2}$$

$-1 < x < 1$

三、求幂级数的和函数

解题思路:

- 1、利用和函数的定义
- 2、利用常见函数的麦克劳林展开式和幂级数的变量替换
- 3、利用幂级数的逐项微分和逐项积分性质

例 11、求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ 的收敛域及和函数。

解：不缺项 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ $\sim$ 等比数列 $\frac{x}{(1-x)^2}, -1 < x < 1$

$\rho = 1$ 时 $R=1$ ， $\rho = 1$ 时 $\rho \neq 1$ ， $x = \pm 1$ 时 $\sum n(\pm 1)^n$ 发散

$\rho = 1$ 时 $\rho \neq 1$ ， $x = \pm 1$ 时 $\sum n(\pm 1)^n$ 发散

$\rho = 1$ 时 $\rho \neq 1$ ， $x = \pm 1$ 时 $\sum n(\pm 1)^n$ 发散

$S(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} (nx^{n-1}) = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)'$

$= x \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$

例 12(2017-1) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} nx^{n-1}$ 在区间 $(-1, 1)$ 内的和

函数 $S(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$. $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ $R = 1$

分析

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^{n-1} x^n]' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n \right)'$$

$$= \left(\frac{x}{1+x} \right)' = \frac{1}{(1+x)^2}$$

例 13(2014-3)

求幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}$$

$(n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域

及和函数.

$$\frac{3-x}{(1-x)^3}$$

$$-1 < x < 1$$

分析

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) + (n+1)] x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} \right)'' + \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \right)' = \left(\frac{x^2}{1-x} \right)'' + \left(\frac{x}{1-x} \right)'$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 \quad R=1$$

$(-1, 1)$

例 14、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛域及和函数.

解法一: $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n+1}$ $R=1$

$$= \frac{1}{x^2} \left[-\ln(1-x) - x \right] \quad \begin{cases} 1 + (\frac{1}{x} - 1) \ln(1-x), x \neq 0; \\ 0, x = 0. \end{cases} \quad -1 \leq x \leq 1$$

解法二: $S(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \frac{1}{x} S_1(x)$

$S_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ $S_1''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$

$S_1(x) = \int_0^x S_1'(t) dt = -\int_0^x \ln(1-t) dt$

例 15(2010-1) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

分析: 1° $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$ — 2. 缺项 $\Rightarrow R=1$

4. 收敛域 $(-1, 1)$ $x = \pm 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 4. 收敛域 $[-1, 1]$

$S(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} = x S_1(x)$

$S_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \frac{1}{1+x^2}$

$\int_0^x S_1'(t) dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$

$S_1(x) - S_1(0) = \arctan x$

$S(x) = x \arctan x$