2022年研究生入学考试

高等数学(微积分)基础班

2020年11月

$\int f(x)dx = F(x) + C$

$F'(x) = f(x)$

sum

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

$= \lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$

$\int e^{x^2} dx$

第四章 不定积分

考试要点

不定积分的计算

考试要求

$2+3+3$

1.理解原函数的概念，理解不定积分的概念． 2个概念

2.掌握不定积分的基本公式，掌握不定积分的性质，掌握换元积分法与分部积分法．

凑微分(第一)，第二换元积分 — 3种方法

3.会求有理函数、三角函数有理式和简单无理函数的不定积分（数一、二）．

3类函数

$\sqrt{a^2-x^2}$ $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$

考试内容概要

一、不定积分的概念与性质

1. 原函数

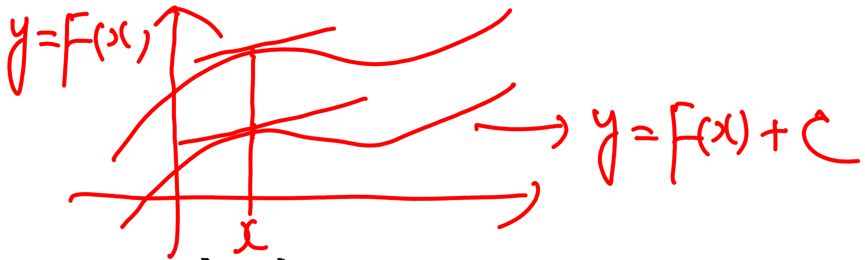
如果在区间 I 内，$F'(x)=f(x)$ 或 $dF(x)=f(x)dx$，则称函数 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 I 内的**原函数**。

$f(x)$ 的任意一个原函数可表示为 $F(x)+C$，其中 C 为任意常数。

2. 不定积分

函数 $f(x)$ 在区间 I 上原函数的全体，称为 $f(x)$ 在 I 内的不定积分，记为 $\int f(x)dx$， $\boxed{320}$ 319

即 $\int f(x)dx = F(x) + \boxed{C}$，其中 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，C 为任意常数。



3. 不定积分的几何意义

$F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数——积分曲线

$\int f(x)dx = F(x) + C$ ——积分曲线族

4. 不定积分存在定理

$f(x)\in[a,b]$ 上连续 可积,

函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，则 $f(x)$ 在 I 上一定存在原函数.

$\left[F(x)=\int_a^x f(t)\,dt\right]' = f(x)$?

函数 $f(x)$ 在区间 I 有第一类间断点，则 $f(x)$ 在 I 上一定不存在原函数.

$F'(x)=f(x)$　x_0　$f(x_0^+)\neq f(x_0^-)$

例 1、由下列函数在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是否存在原函数

(1) $y=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0} y = 0 = f(0)$，有

(2) $y=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$F(x)$ $f(x)$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不∃

$F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$F'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}$

$=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$

符号函数

(3) $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

$(-\infty, +\infty)$

$x = 0$

$(0, +\infty)$ 内 x

$F'(x) = \operatorname{sgn} x$

$F(x)$ 在 $x=0$ 处可导 $F(x) = \begin{cases} -x + C_1, & x < 0 \\ x + C_2, & x > 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = C$

$F(x) = |x| + C$ ×

5、不定积分的性质

（1）$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$；

（2）$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$　　（$k \neq 0$ 为常数）。

线性性

例 2、下列等式中，正确的是

$[F(x)+C]' = F'(x) = f(x)$

(A) $\frac{d}{dx}\boxed{\int f(x)dx} = f(x)$ ✓

(B) $\int f'(x)dx = f(x)$ $+C$ ✓

(C) $\int df(x) = f(x)$ $+C$ ✓

(D) $d\int f(x)dx = f(x)$ dx

答案：A

二、基本积分公式

（1）$\int k dx = kx + C$ （k 为常数）

（2）$\int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \ (\mu \neq -1)$

（3）$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$；

$\int \frac{\sec x(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x} dx$

（4）$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$；

（5）$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$；

（6）$\int \cos dx = \sin x + C$；

（7）$\int \sin x dx = -\cos x + C$；

（8）$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$；

（9）$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$；

（10）$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$；

（11）$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$；

（12）$\int e^x dx = e^x + C$；

（13）$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$；

（14）$\int shxdx = chx + C$；

（15）$\int chxdx = shx + C$

（16）$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

$\csc x \qquad \csc x + \cot x$

（17）$\int \csc x dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$

补充积分公式

$= \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)$

(1) $\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$，$\int \frac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$

$\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$ $= \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} d\left(\frac{x}{a}\right)$

(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$，$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C.$

$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

(3) $\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

(4) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$

例 3、求下列不定积分

分项积分法

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$$

(1) $\int \frac{(x+1)^3}{x^2}dx$

$$=\int \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2}dx$$

$$=\int x\,dx+\int 3\,dx+3\int \frac{1}{x}dx+\int \frac{1}{x^2}dx$$

例 3、求下列不定积分

有理函数

$$(2)\int \frac{x^4-x^2}{1+x^2}dx$$

假分式 = 多项式 + 真分式

除式　商式　被除式

$$\begin{array}{r} x^2-2 \\ 1+x^2 \overline{)\, x^4 - x^2} \\ \underline{x^4+x^2} \\ -2x^2 \\ \underline{-2x^2-2} \\ 2 \end{array}$$

余式

$$=\int\left[(x^2-2)+\frac{2}{1+x^2}\right]dx$$

分项

$$=\frac{1}{3}x^3-2x+2\arctan x+C$$

数二：$\frac{1}{x(1+x^2)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$

$$\int\frac{1}{x(1+x^2)}dx$$

数三

$$=\int\frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)}dx$$

$$=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

例 3、 求下列不定积分

分项积分　　$2+3+3$　　$f(x)=f_1(x)+\cdots+f_n(x)$

恒等变换

(3) $\displaystyle\int \frac{1-\sin x}{1+\sin x}dx$

法一、$\displaystyle\int \frac{1-\sin x}{1+\sin x}dx = \int \frac{1-2\sin x+\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$

$\sec^2 x - 1$

分项 $\displaystyle\int \sec^2 x\,dx + 2\int \frac{d\cos x}{\cos^2 x} + \int \tan^2 x\,dx$

$= 2\tan x - 2\sec x - x + C$

例3、求下列不定积分

(3) $\displaystyle\int \frac{1-\sin x}{1+\sin x}dx$ 诱导公式

法二、$\displaystyle\int \frac{1-\sin x}{1+\sin x}dx = \int \frac{1-\cos(\frac{\pi}{2}-x)}{1+\cos(\frac{\pi}{2}-x)}dx = \int \frac{1-\cos(x-\frac{\pi}{2})}{1+\cos(x-\frac{\pi}{2})}dx$

$$= \int \frac{2\sin^2(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})}{2\cos^2(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})}dx = \int \tan^2(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})\,dx$$

$$= 2\tan(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}) - x + C$$

例 3、求下列不定积分

(3) $\int \frac{1-\sin x}{1+\sin x}dx$

$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

"数学三"

$t=\tan\frac{x}{2}$

法三、$\int \frac{1-\sin x}{1+\sin x}dx=\int \frac{\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}dx=\int \frac{\left(\tan\frac{x}{2}-1\right)^2}{\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)^2}dx$

$$=\int \left(\frac{\tan\frac{x}{2}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{x}{2}}\right)^2 dx=\int \tan^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)dx=2\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-x+C$$

三、三种积分方法

凑x

(1) 第一换元积分法（凑微分法）

u=φ(x)，换元积分法

设 $F'(x)=f(x)$，$\varphi'(x)$ 连续

$\mathrm{d}\varphi(x)$

则 $$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = F[\varphi(x)]+C$$

复杂 → 简单 $\int f(u)du$

(2) 第二换元积分法

设 $x=\varphi(t)$是单调的、可导的函数，并且 $\varphi'(t)\neq 0$，又设 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 具有原函数 $F(t)$，则有换元公式

简单 → 复杂　　回代

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = F(t)+C = F[\varphi^{-1}(x)]+C,$$

其中 $t=\varphi^{-1}(x)$是 $x=\varphi(t)$的反函数.

常用"凑"微分公式：

(1) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b) \quad (a \neq 0)$.

(2) $\int f(\ln x)\frac{1}{x}dx = \int f(\ln x)d(\ln x)$.

$= \frac{1}{n} d x^n$

(3) $\int f(ax^n+b)x^{n-1}dx = \frac{1}{na}\int f(ax^n+b)d(ax^n+b) \ (a \neq 0\ ，\ n \neq 0)$, 特别地

$\int f(\frac{1}{x})\frac{1}{x^2}dx = -\int f(\frac{1}{x})d(\frac{1}{x})$, $\quad \int f(\sqrt{x})\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\int f(\sqrt{x})d(\sqrt{x})$.

(4) $\int f(a^x)a^x dx = \frac{1}{\ln a}\int f(a^x)d(a^x)$, $\quad \int f(e^x)e^x dx = \int f(e^x)d(e^x)$.

(5) $\int f(\sin x)\cos x dx = \int f(\sin x) d\sin x.$

(6) $\int f(\cos x)\sin x dx = -\int f(\cos x) d\cos x.$

(7) $\int f(\tan x)\sec^2 x dx = \int f(\tan x)\dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \int f(\tan x) d\tan x.$

(8) $\int f(\cot x)\csc^2 x dx = \int f(\cot x)\dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -\int f(\cot x) d\cot x.$

(9) $\int f(\arctan x)\dfrac{1}{1+x^2} dx = \int f(\arctan x) d(\arctan x).$

(10) $\int f(\arcsin x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int f(\arcsin x)d(\arcsin x).$

(11) $\int f(\sec x)\sec x\tan x dx=\int f(\sec x)d(\sec x).$

(12) $\int f(\csc x)\csc x\cot x dx=-\int f(\csc x)d(\csc x).$

(13) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int \frac{df(x)}{f(x)}=\ln|f(x)|+C.$

换元积分法中常用的几种代换

(1) 当被积函数中含有 $\sqrt{a^2-x^2}$ 时

$a>0$

$t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$|x|\le a$

令 $x=a\sin t$ 或 $x=a\cos t$

(2) 当被积函数中含有 $\sqrt{a^2+x^2}$ 时

$t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

令 $x=a\tan t$ 或 $x=a\cot t$

(3) 当被积函数中含有 $\sqrt{-a^2+x^2}$ 时

$t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$

令 $x=a\sec t$ 或 $x=a\csc t$

例 4、求下列不定积分

$\int \sec^2 x dx$

(1) $\int \sec^4 x dx$

分析：$\int \sec^4 x dx = \int \sec^2 x \sec^2 x dx = \int \sec^2 x d\tan x$

$u = \tan x$

$= \int (1 + \tan^2 x) d\tan x$

$= \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x + C$

例 4、 求下列不定积分

(2) $\int \frac{(\ln x+2)^2}{x}dx$

$u=\ln x+2$

$=\int(\ln x+2)^2 d(\ln x+2)$

$$=\frac{1}{3}(\ln x+2)^3+C$$

例 4、求下列不定积分

(3) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$

$2d\sqrt{x}$

$=2\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2}d\sqrt{x}$

$=2\int \arctan\sqrt{x}\, d\arctan\sqrt{x}$

$=(\arctan\sqrt{x})^2+C$

例 4、求下列不定积分

(4) $\displaystyle\int \frac{2-x}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$

分析：$\displaystyle\int \frac{2-x}{\sqrt{4-(x-1)^2}}dx = \int \frac{1-x+1}{\sqrt{4-(x-1)^2}}dx$

$x-1=2\sin t$

$-\frac{1}{2}d(1-x)$

$\displaystyle = +\frac{1}{2}\int \frac{d[(1-x)^2-4]}{\sqrt{4-(1-x)^2}} + \int \frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}}d(x-1)$

$\displaystyle = \sqrt{4-(x-1)^2} + \arcsin\frac{x-1}{2} + C$

例 5(1997-2)求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}dx$

$4x-x^2$

解：$\int \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}}dx$

$= \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2}} d\frac{x-2}{2}$

$= \arcsin \frac{x-2}{2} + C$

例 5(1997-2) 求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}dx$

另解：$\int \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}dx = 2\int \frac{1}{\sqrt{4-x}}d\sqrt{x}$

$(\sqrt{x})^2$

$= 2\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2} + C$

例 5(1997-2)求不定积分$\int\frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}dx$

再解：$\int\frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}dx=\int\frac{1}{x\sqrt{\frac{4-x}{x}}}dx$

令 $\sqrt{\frac{4-x}{x}}=t\Rightarrow x=\frac{4}{1+t^2}$

原式$=\int\frac{1}{\frac{4\cancel{t}}{1+t^2}}\frac{-8\cancel{t}}{(1+t^2)^2}dt=-2\int\frac{1}{1+t^2}dt$

$$=-2\arctan t+C=-2\arctan\sqrt{\frac{4-x}{x}}+C$$

例 6(1993-3)求不定积分$\int \frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}dx$

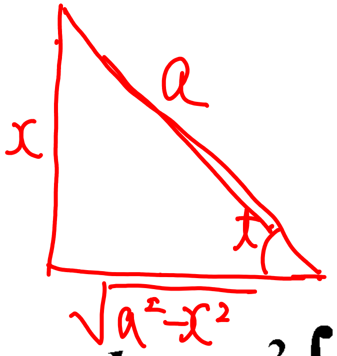
解：$\int \frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}dx = \int \frac{\sin x}{(\cos x)^{\frac{3}{2}}}dx$

$u=\cos x$

$= -\int \frac{d\cos x}{(\cos x)^{\frac{3}{2}}} = 2(\cos x)^{-\frac{1}{2}} + C$

例 7、求下列不定积分，其中 $a>0$

（1） 计算 $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$　　$\frac{1}{2}d(a^2-x^2)$



解： 令 $x = a\sin t$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \int \frac{a^2\sin^2 t}{a\cos t}a\cos t\,dt = a^2\int \sin^2 t\,dt$$

$2\sin t \cdot \cos t$

$$= \frac{a^2}{2}\int (1-\cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}t - \frac{a^2}{4}\sin 2t + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$$

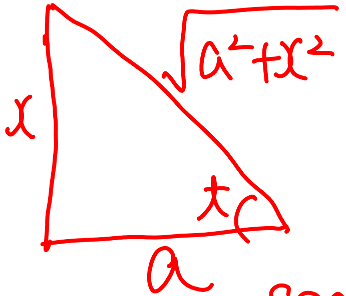
（1）计算 $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

另解：$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\int x d\sqrt{a^2-x^2} = -x\sqrt{a^2-x^2} + \boxed{\int \sqrt{a^2-x^2}dx}$

$$= -x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

(2) $\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^2}dx$

$x = a\tan t$



$= \int \frac{\cancel{a}\sec t}{\cancel{a^2}\tan^2 t} a\sec^2 t \, dt$

$\sec t = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}$

$= \int \frac{1 \;(\sin^2 t + \cos^2 t)}{\sin^2 t \cdot \cos t} dt = \int \frac{1}{\cos t} dt + \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt$ ($\sec t$)

$= \ln|\sec t + \tan t| - \frac{1}{\sin t} + C$

Ok

$$= \ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) - \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} + C$$

另解：$\int\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^2}dx=\int\frac{a^2+x^2}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}dx$

$=\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx+a^2\int\frac{1}{x^3\sqrt{1+(\frac{a}{x})^2}}dx$ $\frac{1}{x^2}$

$=\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{a}{x})^2}}d[1+(\frac{a}{x})^2]$

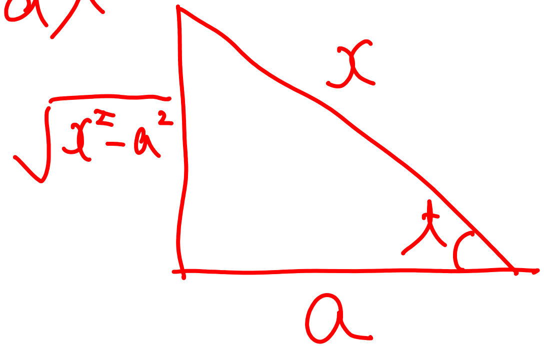
$=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})-\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}+C$

(3) $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx$

$x = a\sec t$　　$t = \operatorname{arcsec}\frac{x}{a}$

$= \int \frac{a\tan t}{\cancel{a\sec t}} \cdot \cancel{a\sec t} \cdot \tan t \, dt$

$= \int a\tan^2 t \, dt$



$$= \sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\frac{a}{x} + C$$

(4) $\int \sqrt{1+e^x}\,dx$

$1+e^x=t^2$

解： $\sqrt{1+e^x}=t \Rightarrow x=\ln(t^2-1)$

$I=\int t\cdot\frac{2t}{t^2-1}dt=2\int\frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt$

$\frac{1}{t^2-1}=\frac{1}{(t-1)(t+1)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right]$

$=2\left(t+\int\frac{1}{t^2-1}dt\right)$

$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|$

$$=2\sqrt{1+e^x}+\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C$$

(3) 分部积分法

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

设 $u = u(x), v = v(x)$ 具有连续导数，则

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

1° 被积函数是两类不同函数的乘积(适用)

2° 谁选为 u, v

3° 理论上 —— 求导(降阶)的函数放函数的导数

分部积分法中 u, v 的选择

$\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$

(1) $\int p_n(x)e^x dx, \int p_n(x)\sin x dx, \int p_n(x)\cos x dx$

$p_n(x)$ 为 n 次多项式,一般选取 $u = \boxed{p_n(x)}$

$\arcsin x$

(2) $\int p_n(x)\ln x dx, \int p_n(x)\arcsin x dx, \int p_n(x)\arctan x dx$, $p_n(x)$ 为 n 次多项式,一般分别选取 $u = \ln x, u = \arcsin x, u = \arctan x$

(3) $\int e^{ax}\sin bx dx, \int e^{bx}\cos bx dx$ 中

循环积分

$I = \cdots = f(I)$

可选取 $u = e^{ax}$,也可分别取 $u = \sin bx, u = \cos bx$

解方程求 I

例 8、 求下列不定积分

(1) $\int xe^{2x}dx = \frac{1}{2}\int xde^{2x} = \frac{1}{2}(xe^{2x} - \int e^{2x}dx)$

$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$

把幂次的降低

(2) $\int x^2 \sin xdx = -\int x^2 d\cos x = -(x^2\cos x - 2\int x\cos xdx)$

$= -x^2\cos x + 2\int xd\sin x$

$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$

(3) $\int x\ln x dx = \frac{1}{2}\int \ln x dx^2 = \frac{1}{2}(x^2\ln x - \int x dx)$

$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$

(4) $\int e^x \sin^2 x dx = \int e^x \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}\boxed{\int e^x \cos 2x dx}$

$I = \int e^x \cos 2x dx = \int \cos 2x de^x = e^x \cos 2x + 2\int e^x \sin 2x dx$

$= e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x - 4\int e^x \cos 2x dx$

$= e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x - 4I$

$I = \frac{1}{5}(\qquad) + C$

$\int e^x \sin^2 x dx = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{10}(e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x) + C$

例 9(1990-3)计算 $\int \frac{\ln x}{(1-x)^2}dx$

$= -\int \frac{\ln x}{(1-x)^2} d(1-x) = \int \ln x \, d\frac{1}{1-x}$

$= \frac{\ln x}{1-x} - \int \frac{1}{(1-x)x} dx$ $\qquad \frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$

$$= \frac{\ln x}{1-x} + \ln\frac{|1-x|}{x} + C$$

例 10(1998-2)计算 $\int \frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}dx$

解：$\int \frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}dx = -\int \ln\sin x\, d\cot x$

$d\ln\sin x = \frac{\cos x}{\sin x}dx$

$= -\cot x\ln\sin x + \int \cot^2 x\,dx$

$= -\cot x\ln\sin x + \int (\csc^2 x - 1)dx$

$= -\cot x\ln\sin x - \cot x - x + C$

四、三类函数的不定积分

(1) 有理函数的积分

$n \geq m$ — 假分式
$n < m$ — 真分式

形如 $$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m}dx$$

解题思路:
多项式除法

1)假分式=多项式+真分式 (数一,二)

2)真分式=部分分式的和

有理函数化为部分分式之和的一般规律：

(1)分母中若有因式$(x-a)^k$，则分解后为

$$\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{x-a},$$

$$\frac{Ax+B}{(x-2)^2}=\frac{A(x-2)+2A+B}{(x-2)^2}$$

(2)分母中若有因式$(x^2+px+q)^k$，其中 $p^2-4q<0$ 则分解后为

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q}$$

积分 $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$, $\quad a^2=q-\dfrac{p^2}{4},\ b=N-\dfrac{Mp}{2}$,

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4},\qquad \text{令 } x+\frac{p}{2}=t$$

$$x^2+px+q=t^2+a^2,\qquad Mx+N=Mt+b,$$

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx=\int\frac{Mt}{(t^2+a^2)^n}dt+\boxed{\int\frac{b}{(t^2+a^2)^n}dt}$$

有理函数的原函数都是初等函数.

(1) $n=1$, $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{b}{a}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{a}+C;$$

(2) $n>1$, $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$

$$= -\frac{M}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}+b\int\frac{1}{(t^2+a^2)^n}dt.$$

$$\frac{x^3+x^2+1}{x^2-1}=x+1+\frac{x+2}{x^2-1}.$$

假分式

$$= x+1+\frac{x+2}{x^2-1}$$

$$\begin{array}{r} x+1 \\ x^2-1\overline{)\,x^3+x^2+1} \\ \underline{x^3-x} \\ x^2+x+1 \\ \underline{x^2-1} \end{array}$$

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$

拆

$$\frac{x}{x^2-1}+\frac{\frac{x+2}{2}}{x^2-1}$$

$\frac{1}{2}(2x-6)+8$

例 11(1999-2) 求不定积分 $\int \frac{x+5}{x^2-6x+13}dx$

解：

$$\int \frac{x+5}{x^2-6x+13}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-6x+13)}{x^2-6x+13} + \int \frac{8}{x^2-6x+13}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13) + \underset{2}{8}\int \frac{1}{\underset{2}{(x-3)}^2+4}d\underset{2}{(x-3)}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13) + 4\arctan\frac{x-3}{2} + C$$

例 12(1987-5)求不定积分$\int \frac{x}{x^4+2x^2+5}dx$

$(x^2+1)^2+4$

解：$\int \frac{x}{x^4+2x^2+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2+4}$

$u=x^2+1$

$= \frac{1}{4}\arctan \frac{x^2+1}{2} + C$

例 13(2019-2) 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx$

解：令 $\dfrac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{(x-1)^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+x+1}$

待定系数得 $A=-2, B=3, C=2, D=1$,

$x=1$

$3x+6 = A(x-1)(x^2+x+1) + B(x^2+x+1) + (Cx+D)(x-1)^2$

$$\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx = -2\int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{3}{(x-1)^2}dx + \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$$

$$= -2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \int \frac{1}{x^2+x+1}d(x^2+x+1)$$

$$= -2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \ln(x^2+x+1) + C.$$

(2) 三角有理函数的积分

由三角函数和常数经过有限次四则运算构成的函数称之．一般记为 $R(\sin x, \cos x)$

形如 $\int R(\sin x, \cos x)dx$

解题思路：

1)万能代换

2)三角变形、换元等

高中

令$u = \tan\frac{x}{2}$ $x = 2\arctan u$

$$\boxed{\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad dx = \frac{2}{1+u^2}du}$$

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}du.$$

有理函数

以下几种情况可作其它变换更简单一些.

(1) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ $\underline{\underline{令 t = \cos x}}$

(2) $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ $\underline{\underline{令 t = \sin x}}$

(3) $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ $\underline{\underline{令 t = \tan x}}$

对应如上情况

(1) $\int R(\sin^2 x, \cos x)\sin x dx \ \underline{\underline{令 t = \cos x}} \ -\int R(1-t^2, t)dt$

(2) $\int R(\sin x, \cos^2 x)\cos x dx \ \underline{\underline{令 t = \sin x}} \ \int R(t, 1-t^2)dt$

(3) $\int R(\tan x)dx \ \underline{\underline{令 t = \tan x}} \ \int R(t)\cdot \frac{1}{1+t^2}dt$

例 14(1996-3)求不定积分 $\int \frac{1}{1+\sin x}dx$

解法一、$\int \frac{1}{1+\sin x}dx = \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx \overset{凑}{=} \tan x - \frac{1}{\cos x} + C$

解法二、$\int \frac{1}{1+\sin x}dx = \int \frac{1}{1+\cos(x-\frac{\pi}{2})}dx = \int \frac{1}{2\cos^2(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})}dx$

解法三、万能代换

例 15(1994-123) 求不定积分 $\int \frac{1}{\sin 2x + 2\sin x} dx$

$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$

$t = \cos x$

解：$\int \frac{1}{\sin 2x + 2\sin x} dx = \int \frac{1}{2\sin x(\cos x + 1)} dx$

$u = \cos x$

$= \int \frac{\sin x}{2\sin^2 x(\cos x + 1)} dx = -\int \frac{1}{2(1-\cos^2 x)(\cos x + 1)} d\cos x$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right)$

$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-u^2} + \frac{1}{(1+u)^2}\right]$ $u = \cos x$

$-\frac{1}{2}\int \frac{1}{(1-u^2)(u+1)} du = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{(1-u)(1+u)^2} du$

$= \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} + \frac{C}{(1+u)^2}$

$= \frac{1}{8}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + \frac{1}{4(1+\cos x)} + C.$

$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$

例 16 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x(1+\sin x)}dx$ $t=\sin x$

解： $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x(1+\sin x)}dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x(1+\sin x)}dx$

$u=\sin x$

$$= \int \frac{\mathrm{d}\sin x}{(1-\sin^2 x)(1+\sin x)}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}u}{(1-u^2)(1+u)} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-u^2}+\frac{1}{(1+u)^2}\right)du$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} - \frac{1}{2(1+\sin x)} + C.$$

$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$

$\sqrt[6]{x} = t$

$\displaystyle= \int \frac{6t^5}{t^3+t^2}dt$

例 17 求 $\int \frac{1}{\sin x(\sin x+\cos x)}dx$ $x=\tan t$

$R(-\sin x,-\cos x)$

$=R(\sin x,\cos x)$

解：$\int \frac{1}{\sin x(\sin x+\cos x)}dx=\int \frac{1}{\sin x\cos x(\tan x+1)}dx$

$=\int \frac{1}{\tan x\cos^2 x(\tan x+1)}dx=\int \frac{d\tan x}{\tan x(\tan x+1)}$

$=\int\left(\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{\tan x+1}\right)d\tan x$

$=\ln\left|\frac{\tan x}{\tan x+1}\right|+C.$

$f(t^3, t^2,$

(3) 简单无理函数的积分

$\sqrt{1-e^x} = t$

t

$\int f(\sqrt{x}, \sqrt[3]{x})$

t

$t = \sqrt[6]{x}$

$x = t^6$

$x = t^2$

讨论类型 $R(x, \sqrt[n]{ax+b})$, $R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+e}}\right)$,

解决方法 作代换去掉根号.

例 18 求不定积分 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}dx = \int \frac{x+1}{x}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}dx$

$= \sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2}$

$x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sec t$

解：令 $\sqrt{\frac{x+1}{x}} = t \Rightarrow x = \frac{1}{t^2-1}, dx = \frac{-2t}{(t^2-1)^2}dt$

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}dx = \int (\cancel{t^2-1})t\frac{-2t}{(t^2-1)^{\cancel{2}}}dt$$

①代

假分式 分parts

$$= -2\int \frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt = -2\int (1+\frac{1}{t^2-1})dt = -2(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|) + C$$

常考题型与典型例题

简单无理函数

例 19 求 $\int \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}dx$

解： 令 $\sqrt{1-x}=t \Rightarrow x=1-t^2, dx=-2tdt$

$$I=\int \frac{-2\cancel{t}}{(1+t^2)\cancel{t}}dt=-2\arctan t+C$$

$$=-2\arctan\sqrt{1-x}+C.$$

分段函数

例 20 设 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\ge 0 \\ \cos x, & x<0 \end{cases}$，则 $\int f(x)dx = \boxed{\int_0^x f(t)dt + C}$

$$\int f(x)dx = \begin{cases} e^x + C_1, & x\ge 0 \\ \sin x + C_2, & x<0 \end{cases}$$

只在 $x=0$ 处连续

$1 + C_1 = C_2$

原函数

$$= \boxed{\begin{cases} e^x, & x\ge 0 \\ \sin x + 1, & x<0 \end{cases}} + C_1$$

V研客 在线教育 www.vyanke.com

例 21(2016-12) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1), & x<1,\\ \ln x, & x\geq 1.\end{cases}$，则 $f(x)$ 的一个原函数是

求 $F(x)$　连续

【答案】(D).

(A) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1), & x\geq 1.\end{cases}$

(B) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)-1, & x\geq 1.\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)+1, & x\geq 1.\end{cases}$

(D) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1)+1, & x\geq 1.\end{cases}$

【分析】 可取 $F(x)=\begin{cases}\int 2(x-1)dx, & x<1,\\ \int \ln x dx, & x\geq 1.\end{cases}=\begin{cases}(x-1)^2+C_1, & x<1,\\ x(\ln x-1)+C_2, & x\geq 1.\end{cases}$

$=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx$

$1+C_1$

$C_1=-1+C_2$

例 22（2006-2）计算 $I=\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx$

$d\arcsin e^x$

【解】 $I=-\int \arcsin e^x de^{-x}=-e^{-x}\arcsin e^x+\int e^{-x}\cdot\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$

$$=-e^{-x}\arcsin e^x+\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx}.$$

令 $t=\sqrt{1-e^{2x}}$，则 $x=\frac{1}{2}\ln(1-t^2), dx=-\frac{t}{1-t^2}dt$，

所以 $\int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx=\int \frac{1}{t^2-1}dt=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-e^{2x}}-1}{\sqrt{1-e^{2x}}+1}\right|+C.$$

例 23(2011-3)计算 $I=\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}dx$

u　　v

【详解 1】 $\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}dx=2\int(\arcsin\sqrt{x}+\ln x)d\sqrt{x}$

$-d(1-x)$

$$=2\sqrt{x}(\arcsin\sqrt{x}+\ln x)-\cancel{2}\int\cancel{\sqrt{x}}\frac{dx}{\cancel{2\sqrt{x}}\sqrt{1-x}}-2\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$=2\sqrt{x}(\arcsin\sqrt{x}+\ln x)+2\sqrt{1-x}-4\sqrt{x}+C.$$

例 23(2011-3)计算 $I=\int \frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}dx$

【详解 2】 令 $t=\sqrt{x}$，

$$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{\arcsin t+2\ln t}{t}tdt = 2\int (\arcsin t+2\ln t)dt$$

$$= 2t(\arcsin t+2\ln t)-2\int t(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}+\frac{2}{t})dt$$

$$= 2t(\arcsin t+2\ln t)+\int \frac{d(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}}-4t$$

$$= 2t(\arcsin t+2\ln t)+2\sqrt{1-t^2}-4t+C$$

$$= 2\sqrt{x}(\arcsin\sqrt{x}+\ln x)+2\sqrt{1-x}-4\sqrt{x}+C.$$

例 24(2009-23) 计算 $I=\int \ln\left(1+\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}\right)dx$

分部积分

根式替换

$\dfrac{1}{(t-1)(t+1)^2}=\dfrac{A}{t-1}+\dfrac{B}{t+1}+\dfrac{C}{(t+1)^2}$

待定系数

【详解】 令 $\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}=t$ 得 $x=\dfrac{1}{t^2-1}$，

u $\quad v$

$$\text{原式}=\int \ln(1+t)\,d\left(\frac{1}{t^2-1}\right)=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int \frac{1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{t+1}dt$$

$$=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int\left(\frac{1}{4(t-1)}+\frac{-1}{4(t+1)}+\frac{1}{2(t+1)^2}\right)dt$$

$$=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2(t+1)}+C$$

$$=x\ln\left(1+\sqrt{\frac{x+1}{x}}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{(x+1)}+\sqrt{x}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{(x+1)}-\sqrt{x}\right)+C$$

例 25(1994-5) 已知 $\dfrac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int x^3 f'(x)dx$ 分部积分法

【详解】 因为 $f(x)=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)'=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，所以

$=\int x^3 d f(x)$

$$\int x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x = x^3 f(x) - \int 3x^2 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

分部

$$= x(x\cos x-\sin x) - 3\int (x\cos x - \cancel{\sin x})\,\mathrm{d}x$$

$$= x^2\cos x - x\sin x - 3\cos x - 3\int x d\sin x$$

$$= x^2\cos x - 4x\sin x - 6\cos x + C$$

例 26(2002-34) 设 $f(\sin^2 x)=\dfrac{x}{\sin x}$，求 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)dx$ $\boxed{求f(x)}$

【详解】令 $u=\sin^2 x$，有 $\sin x=\pm\sqrt{u}$，$x=\pm\arcsin\sqrt{u}$，$f(u)=\dfrac{\arcsin\sqrt{u}}{\sqrt{u}}$，

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)dx=\int\frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\cancel{\sqrt{x}}}dx=\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx \quad -d(1-x)$$

$$=-2\int \underbrace{\arcsin\sqrt{x}}_{u}\, d\underbrace{\sqrt{1-x}}_{v}$$

$$=-2\left[\sqrt{1-x}\cdot\arcsin\sqrt{x}-\int\frac{1}{\cancel{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}}\cdot(\sqrt{x})'\cdot\cancel{\sqrt{1-x}}\,dx\right]$$

$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C.$$