



College Mathematics Guidance Series
大学数学学习辅导丛书

高等数学 习题全解指南

上册

同济 · 第七版

同济大学数学系 编

高等教育出版社



College Mathematics Guidance Series
大学数学学习辅导丛书

高等数学 习题全解指南

上册

同济·第七版

同济大学数学系 编

College Mathematics Guidance Series
大学数学学习辅导丛书

GAODENG SHUXUE XITI QUANJIE ZHINAN

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是与同济大学数学系编写的《高等数学》(第七版)相配套的学习辅导书,由同济大学数学系的教师编写。本书内容由三部分组成,第一部分是按《高等数学》(第七版)(上册)的章节顺序编排,给出习题全解,部分题目在解答之后对该类题的解法作了小结、归纳,有的提供了多种解法;第二部分是全国硕士研究生入学统一考试数学试题选解,所选择的试题以工学类为主,少量涉及经济学类试题;第三部分是同济大学高等数学试卷选编以及考题的参考解答。

本书对教材具有相对的独立性,可为学习高等数学的工科和其他非数学类专业学生以及复习高等数学准备报考硕士研究生的人员提供解题指导,也可供讲授高等数学的教师在备课和批改作业时参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习题全解指南:同济第7版·上册/同济大学数学系编. --北京:高等教育出版社,2014.7

ISBN 978-7-04-039691-1

I. ①高… II. ①同… III. ①高等数学—高等学校—题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 095897 号

策划编辑 王 强 责任编辑 于丽娜 特约编辑 张让让 封面设计 王凌波
版式设计 于 婕 插图绘制 杜晓丹 责任校对 刘丽娟 责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社址	北京市西城区德外大街4号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	高教社(天津)印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开 本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印 张	25.25	版 次	2014年7月第1版
字 数	460千字	印 次	2014年7月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	36.70元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 39691-00

前言

由同济大学数学系编写的《高等数学》(第七版)已作为“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材于2014年正式出版。本书是《高等数学》(第七版)的配套用书,主要是为学习高等数学的大学生以及复习高等数学准备报考硕士研究生的人员提供一本解题指导的参考书,也可供讲授高等数学的教师在备课和批改作业时参考。

本书内容由三部分组成,第一部分是《高等数学》(第七版)的习题全解,包括各章的习题与总习题及解答。在解答中,有的题在解答之后,以注释的形式对该类题的解法作了归纳小结,有的题提供了常用的具有典型意义的多种解法。第二部分是全国硕士研究生入学统一考试数学试题选解,包括函数、极限、连续,一元函数微分学,一元函数积分学,微分方程,空间解析几何与向量代数,多元函数微分学,多元函数积分学,无穷级数等八项内容,每项选编的题量在30题左右,其中不乏近几年入学统一考试的试题。在每道试题的前面都注明了试题的年份及类别,如(2010.I)表示为2010年第一类考题。所选择的试题以工科类为主,少量涉及经济学类试题,每道试题都给出了解题的思路与方法,有的还给出了多种解法,以供读者参考。第三部分是同济大学高等数学试卷选编,这部分已作了全部更新,按上、下册内容,选了期中、期末各两套试卷,并提供了试题的参考解答。

本书由同济大学数学系的教师编写,其中第一部分第一、九章,第二部分(一)、(二)、(六)由邱伯骆完成;第一部分第二、三、八章由徐建平完成;第一部分第四、五、六章,第二部分(三)由朱晓平完成;第一部分第七、十二章,第二部分(四)、(八)由应明完成;第一部分第十、十一章,第二部分(五)、(七)由郭镜明完成;第三部分由朱晓平完成。

在使用本书时,建议读者在个人学习、练习的基础上,再加以参考、对照,找出自己在知识掌握方面的不足,学习分析、解题的方法和思路,学会举一反三,采取这种方式参考本书,必能从中获益。本书中存在的问题,欢迎广大专家、同仁和读者批评指正。

编 者

二〇一四年六月

目录



一、《高等数学》(第七版)上册习题全解

第一章 函数与极限	3
习题 1-1 映射与函数	3
习题 1-2 数列的极限	12
习题 1-3 函数的极限	16
习题 1-4 无穷小与无穷大	20
习题 1-5 极限运算法则	23
习题 1-6 极限存在准则 两个重要极限	27
习题 1-7 无穷小的比较	29
习题 1-8 函数的连续性与间断点	31
习题 1-9 连续函数的运算与初等函数的连续性	35
习题 1-10 闭区间上连续函数的性质	39
总习题一	41
第二章 导数与微分	49
习题 2-1 导数概念	49
习题 2-2 函数的求导法则	55
习题 2-3 高阶导数	62
习题 2-4 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 相关变化率	67
习题 2-5 函数的微分	74
总习题二	79
第三章 微分中值定理与导数的应用	87
习题 3-1 微分中值定理	87
习题 3-2 洛必达法则	91
习题 3-3 泰勒公式	95
习题 3-4 函数的单调性与曲线的凹凸性	99

习题 3-5 函数的极值与最大值最小值	109
习题 3-6 函数图形的描绘	118
习题 3-7 曲率	123
习题 3-8 方程的近似解	126
总习题三	129
第四章 不定积分	139
习题 4-1 不定积分的概念与性质	139
习题 4-2 换元积分法	144
习题 4-3 分部积分法	151
习题 4-4 有理函数的积分	156
习题 4-5 积分表的使用	161
总习题四	166
第五章 定积分	178
习题 5-1 定积分的概念与性质	178
习题 5-2 微积分基本公式	184
习题 5-3 定积分的换元法和分部积分法	190
习题 5-4 反常积分	198
* 习题 5-5 反常积分的审敛法 Γ 函数	200
总习题五	203
第六章 定积分的应用	216
习题 6-2 定积分在几何学上的应用	216
习题 6-3 定积分在物理学上的应用	229
总习题六	233
第七章 微分方程	242
习题 7-1 微分方程的基本概念	242
习题 7-2 可分离变量的微分方程	245
习题 7-3 齐次方程	251
习题 7-4 一阶线性微分方程	258
习题 7-5 可降阶的高阶微分方程	266
习题 7-6 高阶线性微分方程	273
习题 7-7 常系数齐次线性微分方程	279
习题 7-8 常系数非齐次线性微分方程	284
* 习题 7-9 欧拉方程	295

* 习题 7-10 常系数线性微分方程组解法举例	299
总习题七	306



二、全国硕士研究生入学统一考试数学试题选解

(一) 函数 极限 连续	323
(二) 一元函数微分学	334
(三) 一元函数积分学	350
(四) 微分方程	362



三、同济大学高等数学试卷选编

(一) 高等数学(上)期中考试试卷(I)	379
试题	379
参考答案	380
(二) 高等数学(上)期中考试试卷(II)	383
试题	383
参考答案	384
(三) 高等数学(上)期末考试试卷(I)	387
试题	387
参考答案	388
(四) 高等数学(上)期末考试试卷(II)	391
试题	391
参考答案	392

一、《高等数学》(第七版)上册
习题全解

第一章 函数与极限

习题 1-1

映射与函数

1. 求下列函数的自然定义域：

$$(1) y = \sqrt{3x + 2};$$

$$(2) y = \frac{1}{1 - x^2};$$

$$(3) y = \frac{1}{x} \sqrt{1 - x^2};$$

$$(4) y = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}};$$

$$(5) y = \sin \sqrt{x};$$

$$(6) y = \tan(x + 1);$$

$$(7) y = \arcsin(x - 3);$$

$$(8) y = \sqrt{3 - x} + \arctan \frac{1}{x};$$

$$(9) y = \ln(x + 1);$$

$$(10) y = e^{\frac{1}{x}}.$$

解 (1) $3x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{2}{3}$, 即定义域为 $\left[-\frac{2}{3}, +\infty \right)$.

(2) $1 - x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$, 即定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

(3) $x \neq 0$ 且 $1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x \neq 0$ 且 $|x| \leq 1$, 即定义域为 $[-1, 0) \cup (0, 1]$.

(4) $4 - x^2 > 0 \Rightarrow |x| < 2$, 即定义域为 $(-2, 2)$.

(5) $x \geq 0$, 即定义域为 $[0, +\infty)$.

(6) $x + 1 \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$), 即定义域为 $\left\{ x \mid x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq \left(k + \frac{1}{2} \right)\pi - 1, k \in \mathbf{Z} \right\}$.

(7) $|x - 3| \leq 1 \Rightarrow 2 \leq x \leq 4$, 即定义域为 $[2, 4]$.

(8) $3 - x \geq 0$ 且 $x \neq 0$, 即定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, 3]$.

(9) $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$, 即定义域为 $(-1, +\infty)$.

(10) $x \neq 0$, 即定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

注 本题是求函数的自然定义域,一般方法是先写出构成所求函数的各个简单函数的定义域,再求出这些定义域的交集,即得所求定义域. 下列简单函数及其定义域是经常用到的:

$$y = \frac{Q(x)}{P(x)}, P(x) \neq 0;$$

$$y = \sqrt[n]{x}, x \geq 0;$$

$$y = \log_a x, x > 0;$$

$$y = \tan x, x \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, k \in \mathbf{Z};$$

$$y = \cot x, x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z};$$

$$y = \arcsin x, |x| \leq 1;$$

$$y = \arccos x, |x| \leq 1.$$

2. 下列各题中, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

$$(1) f(x) = \lg x^2, g(x) = 2 \lg x;$$

$$(2) f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2};$$

$$(3) f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, g(x) = x \sqrt[3]{x - 1};$$

$$(4) f(x) = 1, g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x.$$

解 (1) 不同, 因为定义域不同.

$$(2) \text{不同, 因为对应法则不同, } g(x) = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

(3) 相同, 因为定义域、对应法则均相同.

(4) 不同, 因为定义域不同.

3. 设

$$\varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{3}, \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{3}, \end{cases}$$

求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right), \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right), \varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right), \varphi(-2)$, 并作出函数 $y = \varphi(x)$ 的图形.

$$\text{解 } \varphi\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left|\sin \frac{\pi}{6}\right| = \frac{1}{2}, \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left|\sin \frac{\pi}{4}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}, \varphi(-2) = 0.$$

$y = \varphi(x)$ 的图形如图 1-1 所示.

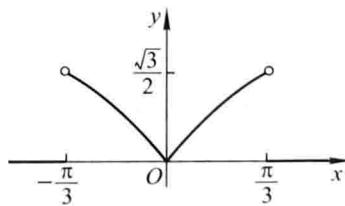


图 1-1

4. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

$$(1) y = \frac{x}{1-x}, (-\infty, 1);$$

(2) $y = x + \ln x, (0, +\infty)$.

证 (1) $y = f(x) = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}, (-\infty, 1)$.

设 $x_1 < x_2 < 1$. 因为

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{1-x_2} - \frac{1}{1-x_1} = \frac{x_2 - x_1}{(1-x_1)(1-x_2)} > 0,$$

所以 $f(x_2) > f(x_1)$, 即 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 内单调增加.

(2) $y = f(x) = x + \ln x, (0, +\infty)$.

设 $0 < x_1 < x_2$. 因为

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2 + \ln x_2 - x_1 - \ln x_1 = x_2 - x_1 + \ln \frac{x_2}{x_1} > 0,$$

所以 $f(x_2) > f(x_1)$, 即 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加.

5. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l, l)$ 内的奇函数, 若 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加, 证明 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

证 设 $-l < x_1 < x_2 < 0$, 则 $0 < -x_2 < -x_1 < l$, 由 $f(x)$ 是奇函数, 得 $f(x_2) - f(x_1) = -f(-x_2) + f(-x_1)$. 因为 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加, 所以 $f(-x_1) - f(-x_2) > 0$, 从而 $f(x_2) > f(x_1)$, 即 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

6. 设下面所考虑的函数都是定义在区间 $(-l, l)$ 上的. 证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数, 两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数, 两个奇函数的乘积是偶函数, 偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

证 (1) 设 $f_1(x), f_2(x)$ 均为偶函数, 则 $f_1(-x) = f_1(x), f_2(-x) = f_2(x)$. 令 $F(x) = f_1(x) + f_2(x)$, 于是

$$F(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = f_1(x) + f_2(x) = F(x),$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x), g_2(x)$ 均为奇函数, 则 $g_1(-x) = -g_1(x), g_2(-x) = -g_2(x)$. 令 $G(x) = g_1(x) + g_2(x)$, 于是

$$G(-x) = g_1(-x) + g_2(-x) = -g_1(x) - g_2(x) = -G(x),$$

故 $G(x)$ 为奇函数.

(2) 设 $f_1(x), f_2(x)$ 均为偶函数, 则 $f_1(-x) = f_1(x), f_2(-x) = f_2(x)$. 令 $F(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$. 于是

$$F(-x) = f_1(-x) \cdot f_2(-x) = f_1(x) f_2(x) = F(x),$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x), g_2(x)$ 均为奇函数, 则 $g_1(-x) = -g_1(x), g_2(-x) = -g_2(x)$. 令 $G(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$. 于是

$$G(-x) = g_1(-x) \cdot g_2(-x) = [-g_1(x)][-g_2(x)]$$

$$= g_1(x) \cdot g_2(x) = G(x),$$

故 $G(x)$ 为偶函数.

设 $f(x)$ 为偶函数, $g(x)$ 为奇函数, 则 $f(-x) = f(x)$, $g(-x) = -g(x)$. 令 $H(x) = f(x) \cdot g(x)$, 于是

$$\begin{aligned} H(-x) &= f(-x) \cdot g(-x) = f(x) [-g(x)] \\ &= -f(x) \cdot g(x) = -H(x), \end{aligned}$$

故 $H(x)$ 为奇函数.

7. 下列函数中哪些是偶函数, 哪些是奇函数, 哪些既非偶函数又非奇函数?

$$(1) y = x^2(1 - x^2); \quad (2) y = 3x^2 - x^3;$$

$$(3) y = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}; \quad (4) y = x(x - 1)(x + 1);$$

$$(5) y = \sin x - \cos x + 1; \quad (6) y = \frac{a^x + a^{-x}}{2}.$$

解 (1) $y = f(x) = x^2(1 - x^2)$, 因为

$$f(-x) = (-x)^2[1 - (-x)^2] = x^2(1 - x^2) = f(x),$$

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(2) $y = f(x) = 3x^2 - x^3$, 因为

$$f(-x) = 3(-x)^2 - (-x)^3 = 3x^2 + x^3,$$

$$f(-x) \neq f(x), \quad \text{且 } f(-x) \neq -f(x),$$

所以 $f(x)$ 既非偶函数又非奇函数.

(3) $y = f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$, 因为

$$f(-x) = \frac{1 - (-x)^2}{1 + (-x)^2} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = f(x),$$

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(4) $y = f(x) = x(x - 1)(x + 1)$, 因为

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)[(-x) - 1][(-x) + 1] \\ &= -x(x + 1)(x - 1) = -f(x), \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

(5) $y = f(x) = \sin x - \cos x + 1$, 因为

$$f(-x) = \sin(-x) - \cos(-x) + 1 = -\sin x - \cos x + 1,$$

$$f(-x) \neq f(x) \text{ 且 } f(-x) \neq -f(x),$$

所以 $f(x)$ 既非偶函数又非奇函数.

(6) $y = f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$, 因为 $f(-x) = \frac{a^{-x} + a^x}{2} = f(x)$, 所以 $f(x)$ 为偶函数.

8. 下列各函数中哪些是周期函数? 对于周期函数, 指出其周期:

$$(1) y = \cos(x - 2); \quad (2) y = \cos 4x;$$

$$(3) y = 1 + \sin \pi x; \quad (4) y = x \cos x;$$

$$(5) \quad y = \sin^2 x.$$

解 (1) 是周期函数, 周期 $l = 2\pi$.

$$(2) \text{ 是周期函数, 周期 } l = \frac{\pi}{2}.$$

$$(3) \text{ 是周期函数, 周期 } l = 2.$$

(4) 不是周期函数.

$$(5) \text{ 是周期函数, 周期 } l = \pi.$$

9. 求下列函数的反函数:

$$(1) \quad y = \sqrt[3]{x+1};$$

$$(2) \quad y = \frac{1-x}{1+x};$$

$$(3) \quad y = \frac{ax+b}{cx+d} (ad - bc \neq 0);$$

$$(4) \quad y = 2 \sin 3x \left(-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6} \right);$$

$$(5) \quad y = 1 + \ln(x+2);$$

$$(6) \quad y = \frac{2^x}{2^x + 1}.$$

分析 函数 f 存在反函数的前提条件为: $f: D \rightarrow f(D)$ 是单射. 本题中所给出的各函数易证均为单射, 特别(1)、(4)、(5)、(6)中的函数均为单调函数, 故都存在反函数.

解 (1) 由 $y = \sqrt[3]{x+1}$ 解得 $x = y^3 - 1$, 即反函数为 $y = x^3 - 1$.

(2) 由 $y = \frac{1-x}{1+x}$ 解得 $x = \frac{1-y}{1+y}$, 即反函数为 $y = \frac{1-x}{1+x}$.

(3) 由 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ 解得 $x = \frac{-dy+b}{cy-a}$, 即反函数为 $y = \frac{-dx+b}{cx-a}$.

(4) 由 $y = 2 \sin 3x \left(-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6} \right)$ 解得 $x = \frac{1}{3} \arcsin \frac{y}{2}$, 即反函数为

$$y = \frac{1}{3} \arcsin \frac{x}{2}.$$

(5) 由 $y = 1 + \ln(x+2)$ 解得 $x = e^{y-1} - 2$, 即反函数为 $y = e^{x-1} - 2$.

(6) 由 $y = \frac{2^x}{2^x + 1}$ 解得 $x = \log_2 \frac{y}{1-y}$, 即反函数为 $y = \log_2 \frac{x}{1-x}$.

10. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义, 试证: 函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

解 设 $f(x)$ 在 X 上有界, 即存在 $M > 0$, 使得

$$|f(x)| \leq M, \quad x \in X,$$

故

$$-M \leq f(x) \leq M, \quad x \in X,$$

即 $f(x)$ 在 X 上有上界 M , 下界 $-M$.

反之, 设 $f(x)$ 在 X 上有上界 K_1 , 下界 K_2 , 即

$$K_2 \leq f(x) \leq K_1, \quad x \in X.$$

取 $M = \max\{|K_1|, |K_2|\}$, 则有

$$|f(x)| \leq M, \quad x \in X,$$

即 $f(x)$ 在 X 上有界.

11. 在下列各题中, 求由所给函数构成的复合函数, 并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值:

$$(1) \quad y = u^2, u = \sin x, x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{\pi}{3};$$

$$(2) \quad y = \sin u, u = 2x, x_1 = \frac{\pi}{8}, x_2 = \frac{\pi}{4};$$

$$(3) \quad y = \sqrt{u}, u = 1 + x^2, x_1 = 1, x_2 = 2;$$

$$(4) \quad y = e^u, u = x^2, x_1 = 0, x_2 = 1;$$

$$(5) \quad y = u^2, u = e^x, x_1 = 1, x_2 = -1.$$

解 (1) $y = \sin^2 x, y_1 = \frac{1}{4}, y_2 = \frac{3}{4}.$

$$(2) \quad y = \sin 2x, y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, y_2 = 1.$$

$$(3) \quad y = \sqrt{1 + x^2}, y_1 = \sqrt{2}, y_2 = \sqrt{5}.$$

$$(4) \quad y = e^{x^2}, y_1 = 1, y_2 = e.$$

$$(5) \quad y = e^{2x}, y_1 = e^2, y_2 = e^{-2}.$$

12. 设 $f(x)$ 的定义域 $D = [0, 1]$, 求下列各函数的定义域:

$$(1) \quad f(x^2); \quad (2) \quad f(\sin x);$$

$$(3) \quad f(x+a) (a > 0); \quad (4) \quad f(x+a) + f(x-a) (a > 0).$$

解 (1) $0 \leq x^2 \leq 1 \Rightarrow x \in [-1, 1].$

$$(2) \quad 0 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow x \in [2n\pi, (2n+1)\pi], n \in \mathbf{Z}.$$

$$(3) \quad 0 \leq x+a \leq 1 \Rightarrow x \in [-a, 1-a].$$

$$(4) \quad \begin{cases} 0 \leq x+a \leq 1, \\ 0 \leq x-a \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{当 } 0 < a \leq \frac{1}{2} \text{ 时, } x \in [a, 1-a]; \text{ 当 } a > \frac{1}{2} \text{ 时, 定义域为 } \emptyset.$$

13. 设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| > 1, \end{cases} \quad g(x) = e^x,$$

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$, 并作出这两个函数的图形.

解 $f[g(x)] = f(e^x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x > 0. \end{cases}$

$$g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e, & |x| < 1, \\ 1, & |x| = 1, \\ e^{-1}, & |x| > 1. \end{cases}$$

$f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$ 的图形依次如图 1-2, 图 1-3 所示.

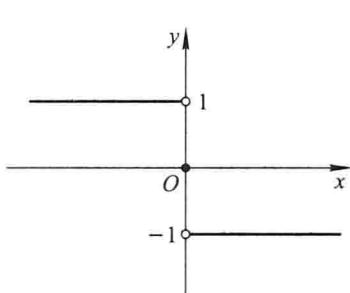


图 1-2

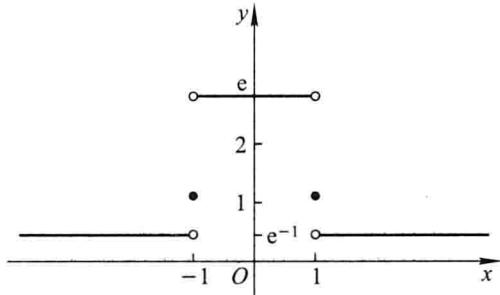


图 1-3

14. 已知水渠的横断面为等腰梯形, 斜角 $\varphi = 40^\circ$ (图 1-4). 当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时, 求湿周 $L(L = AB + BC + CD)$ 与水深 h 之间的函数关系式, 并指明其定义域.

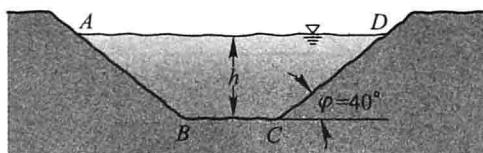


图 1-4

解 $AB = CD = \frac{h}{\sin 40^\circ}$, 又

$$S_0 = \frac{1}{2}h[BC + (BC + 2\cot 40^\circ \cdot h)],$$

得

$$BC = \frac{S_0}{h} - \cot 40^\circ \cdot h,$$

所以

$$L = \frac{S_0}{h} + \frac{2 - \cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}h,$$

而 $h > 0$ 且 $\frac{S_0}{h} - \cot 40^\circ \cdot h > 0$, 因此湿周函数的定义域为 $(0, \sqrt{S_0 \tan 40^\circ})$.

15. 设 xOy 平面上有正方形 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ 及直线 $l: x + y = t(t \geq 0)$. 若 $S(t)$ 表示正方形 D 位于直线 l 左下方部分的面积, 试求 $S(t)$ 与 t 之间的函数关系.

解 当 $0 \leq t \leq 1$ 时, $S(t) = \frac{1}{2}t^2$,

当 $1 < t \leq 2$ 时, $S(t) = 1 - \frac{1}{2}(2-t)^2 = -\frac{1}{2}t^2 + 2t - 1$,

当 $t > 2$ 时, $S(t) = 1$.

故

$$S(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2, & 0 \leq t \leq 1, \\ -\frac{1}{2}t^2 + 2t - 1, & 1 < t \leq 2, \\ 1, & t > 2. \end{cases}$$

16. 求联系华氏温度(用 F 表示)和摄氏温度(用 C 表示)的转换公式,并求

(1) $90^\circ F$ 的等价摄氏温度和 $-5^\circ C$ 的等价华氏温度;

(2) 是否存在一个温度值,使华氏温度计和摄氏温度计的读数是一样的? 如果存在,那么该温度值是多少?

解 设 $F = mC + b$, 其中 m, b 均为常数.

因为 $F = 32^\circ$ 相当于 $C = 0^\circ$, $F = 212^\circ$ 相当于 $C = 100^\circ$, 所以

$$b = 32, \quad m = \frac{212 - 32}{100} = 1.8.$$

故 $F = 1.8C + 32$ 或 $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.

$$(1) F = 90^\circ, \quad C = \frac{5}{9}(90 - 32) \approx 32.2^\circ.$$

$$C = -5^\circ, \quad F = 1.8 \times (-5) + 32 = 23^\circ.$$

(2) 设温度值 t 符合题意,则有

$$t = 1.8t + 32, \quad t = -40.$$

即华氏 -40° 恰好也是摄氏 -40° .

17. 已知 $Rt\triangle ABC$ 中,直角边 AC, BC 的长度分别为 20, 15, 动点 P 从 C 出发,沿三角形边界按 $C \rightarrow B \rightarrow A$ 方向移动;动点 Q 从 C 出发,沿三角形边界按 $C \rightarrow A \rightarrow B$ 方向移动,移动到两动点相遇时为止,且点 Q 移动的速度是点 P 移动的速度的 2 倍. 设动点 P 移动的距离为 x , $\triangle CPQ$ 的面积为 y , 试求 y 与 x 之间的函数关系.

解 因为 $AC = 20, BC = 15$, 所以, $AB = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$.

由 $20 < 2 \cdot 15 < 20 + 25$ 可知, 点 P, Q 在斜边 AB 上相遇.

令 $x + 2x = 15 + 20 + 25$, 得 $x = 20$. 即当 $x = 20$ 时, 点 P, Q 相遇. 因此, 所求函数的定义域为 $(0, 20)$.

(1) 当 $0 < x < 10$ 时, 点 P 在 CB 上, 点 Q 在 CA 上(图 1-5).

由 $|CP| = x$, $|CQ| = 2x$, 得

$$y = x^2.$$

(2) 当 $10 \leq x \leq 15$ 时, 点 P 在 CB 上, 点 Q 在 AB 上(图 1-6).

$$|CP| = x, \quad |AQ| = 2x - 20.$$

设点 Q 到 BC 的距离为 h , 则

$$\frac{h}{20} = \frac{|BQ|}{25} = \frac{45 - 2x}{25},$$

得 $h = \frac{4}{5}(45 - 2x)$. 故

$$y = \frac{1}{2}xh = \frac{2}{5}x(45 - 2x) = -\frac{4}{5}x^2 + 18x.$$

(3) 当 $15 < x < 20$ 时, 点 P , Q 都在 AB 上(图 1-7).

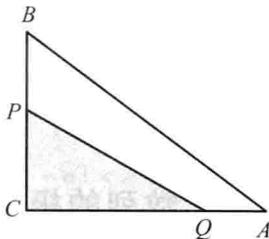


图 1-5

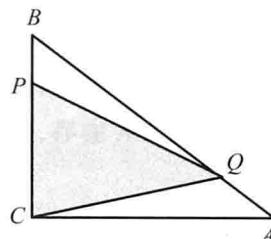


图 1-6

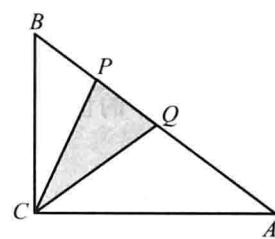


图 1-7

$$|BP| = x - 15, \quad |AQ| = 2x - 20, \quad |PQ| = 60 - 3x.$$

设点 C 到 AB 的距离为 h' , 则

$$h' = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12,$$

得

$$y = \frac{1}{2}|PQ| \cdot h' = -18x + 360.$$

综上可得

$$y = \begin{cases} x^2, & 0 < x < 10, \\ -\frac{4}{5}x^2 + 18x, & 10 \leq x \leq 15, \\ -18x + 360, & 15 < x < 20. \end{cases}$$

18. 利用以下美国人口普查局提供的世界人口数据^①以及指数模型来推测 2020 年的世界人口.

^① 这里世界人口数据是指每年年中的人口数.

年份	人口数(百万)	年增长率(%)
2008	6 708. 2	1. 166
2009	6 786. 4	1. 140
2010	6 863. 8	1. 121
2011	6 940. 7	1. 107
2012	7 017. 5	1. 107
2013	7 095. 2	

解 由表中第3列,猜想2008年后世界人口的年增长率是1.1%.于是,在2008年后的第t年,世界人口将是

$$p(t) = 6708.2 \times (1.011)^t (\text{百万}).$$

2020年对应t=12,于是

$$p(12) = 6708.2 \times (1.011)^{12} \approx 7649.3 (\text{百万}) \approx 76 (\text{亿}).$$

即推测2020年世界人口约为76亿.

习题1-2

数列的极限

1. 下列各题中,哪些数列收敛,哪些数列发散?对收敛数列,通过观察 $|x_n|$ 的变化趋势,写出它们的极限:

$$(1) \left\{ \frac{1}{2^n} \right\}; \quad (2) \left\{ (-1)^n \frac{1}{n} \right\};$$

$$(3) \left\{ 2 + \frac{1}{n^2} \right\}; \quad (4) \left\{ \frac{n-1}{n+1} \right\};$$

$$(5) \{ n(-1)^n \}; \quad (6) \left\{ \frac{2^n - 1}{3^n} \right\};$$

$$(7) \left\{ n - \frac{1}{n} \right\}; \quad (8) \left\{ [(-1)^n + 1] \frac{n+1}{n} \right\}.$$

解 (1) 收敛, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

(2) 收敛, $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0$.

(3) 收敛, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n^2} \right) = 2$.

(4) 收敛, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$.

(5) $\{ n(-1)^n \}$ 发散.

$$(6) \text{ 收敛}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{3^n} = 0.$$

$$(7) \left\{ n - \frac{1}{n} \right\} \text{发散.}$$

$$(8) \left\{ [(-1)^n + 1] \frac{n+1}{n} \right\} \text{发散.}$$

2. (1) 数列的有界性是数列收敛的什么条件?

(2) 无界数列是否一定发散?

(3) 有界数列是否一定收敛?

解 (1) 必要条件.

(2) 一定发散.

(3) 未必一定收敛, 如数列 $\{(-1)^n\}$ 有界, 但它是发散的.

3. 下列关于数列 $\{x_n\}$ 的极限是 a 的定义, 哪些是对的, 哪些是错的? 如果是对的, 试说明理由; 如果是错的, 试给出一个反例.

(1) 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 不等式 $x_n - a < \varepsilon$ 成立;

(2) 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 有无穷多项 x_n , 使不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立;

(3) 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 不等式 $|x_n - a| < c\varepsilon$ 成立, 其中 c 为某个正常数;

(4) 对于任意给定的 $m \in \mathbb{N}_+$, 存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 不等式 $|x_n - a| < \frac{1}{m}$

成立.

解 (1) 错误. 如对数列 $\left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \right\}$, $a = 1$. 对任给的 $\varepsilon > 0$ (设 $\varepsilon < 1$), 存在 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$, 当 $n > N$ 时, $(-1)^n + \frac{1}{n} - 1 \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$, 但 $\left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \right\}$ 的极限不存在.

(2) 错误. 如对数列

$$x_n = \begin{cases} n, & n = 2k - 1, \\ 1 - \frac{1}{n}, & n = 2k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}_+, \quad a = 1.$$

对任给的 $\varepsilon > 0$ (设 $\varepsilon < 1$), 存在 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$, 当 $n > N$ 且 n 为偶数时, $|x_n - a| = \frac{1}{n} < \varepsilon$

成立, 但 $\{x_n\}$ 的极限不存在.

(3) 正确. 对任给的 $\varepsilon > 0$, 取 $\frac{1}{c}\varepsilon > 0$, 按假设, 存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$ 时, 不等式 $|x_n - a| < c \cdot \frac{1}{c}\varepsilon = \varepsilon$ 成立.

(4) 正确. 对任给的 $\varepsilon > 0$, 取 $m \in \mathbf{N}_+$, 使 $\frac{1}{m} < \varepsilon$. 按假设, 存在 $N \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N$

时, 不等式 $|x_n - a| < \frac{1}{m} < \varepsilon$ 成立.

4. 设数列 $\{x_n\}$ 的一般项 $x_n = \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{2}$. 问 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = ?$ 求出 N , 使当 $n > N$ 时, x_n 与其极限之差的绝对值小于正数 ε . 当 $\varepsilon = 0.001$ 时, 求出数 N .

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. 证明如下:

因为

$$|x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{2} \right| \leq \frac{1}{n},$$

要使 $|x_n - 0| < \varepsilon$, 只要 $\frac{1}{n} < \varepsilon$, 即 $n > \frac{1}{\varepsilon}$. 所以 $\forall \varepsilon > 0$ (不妨设 $\varepsilon < 1$), 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$, 则

当 $n > N$ 时, 就有 $|x_n - 0| < \varepsilon$.

当 $\varepsilon = 0.001$ 时, 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] = 1000$. 即若 $\varepsilon = 0.001$, 只要 $n > 1000$, 就有

$|x_n - 0| < 0.001$.

5. 根据数列极限的定义证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+1} = \frac{3}{2};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n} = 1; \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} 0. \underbrace{999\dots 9}_{n \uparrow} = 1.$$

证 (1) 因为要使 $\left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon$, 只要 $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, 所以 $\forall \varepsilon > 0$ (不妨设 $\varepsilon < 1$),

取 $N = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right]$, 则当 $n > N$ 时, 就有 $\left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < \varepsilon$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

(2) 因为 $\left| \frac{3n+1}{2n+1} - \frac{3}{2} \right| = \frac{1}{2(2n+1)} < \frac{1}{4n}$, 要使 $\left| \frac{3n+1}{2n+1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon$, 只要 $\frac{1}{4n} < \varepsilon$, 即 $n > \frac{1}{4\varepsilon}$, 所以 $\forall \varepsilon > 0$ (不妨设 $\varepsilon < \frac{1}{4}$), 取 $N = \left[\frac{1}{4\varepsilon} \right]$, 则当 $n > N$ 时, 就有

$$\left| \frac{3n+1}{2n+1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon, \text{ 即 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+1} = \frac{3}{2}.$$

注 本题中所采用的证明方法是: 先将 $|x_n - a|$ 等价变形, 然后适当放大, 使 N 容易由放大后的量小于 ε 的不等式中求出. 这在按定义证明极限的问题中是经常采用的.

(3) 当 $a = 0$ 时, 所给数列为常数列, 显然有此结论. 以下设 $a \neq 0$. 因为

$$\left| \frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n} - 1 \right| = \frac{\sqrt{n^2 + a^2} - n}{n} = \frac{a^2}{n(\sqrt{n^2 + a^2} + n)} < \frac{a^2}{2n^2},$$

要使 $\left| \frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n} - 1 \right| < \varepsilon$, 只要 $\frac{a^2}{2n^2} < \varepsilon$, 即 $n > \frac{|a|}{\sqrt{2\varepsilon}}$. 所以 $\forall \varepsilon > 0$ (不妨设 $\varepsilon < \frac{1}{2}a^2$), 取

$N = \left[\frac{|a|}{\sqrt{2\varepsilon}} \right]$, 则当 $n > N$ 时, 就有 $\left| \frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n} - 1 \right| < \varepsilon$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + a^2}}{n} = 1$.

(4) 因为 $|0.\underbrace{999\dots9}_{n\text{个}} - 1| = \frac{1}{10^n}$, 要使 $|0.\underbrace{999\dots9}_{n\text{个}} - 1| < \varepsilon$, 只要 $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$, 即

$n > \lg \frac{1}{\varepsilon}$, 所以 $\forall \varepsilon > 0$ (不妨设 $\varepsilon < 1$), 取 $N = \left[\lg \frac{1}{\varepsilon} \right]$, 则当 $n > N$ 时, 就有 $|0.\underbrace{999\dots9}_{n\text{个}} - 1| < \varepsilon$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} 0.\underbrace{999\dots9}_{n\text{个}} = 1$.

例 6. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = |a|$. 并举例说明: 如果数列 $\{|x_n|\}$ 有极限, 但数列 $\{x_n\}$ 未必有极限.

证 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$, 所以 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n > N$ 时, 有 $|u_n - a| < \varepsilon$, 从而有

$$||u_n| - |a|| \leq |u_n - a| < \varepsilon,$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = |a|$.

但由 $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = |a|$, 并不能推得 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$. 例如, 考虑数列 $\{(-1)^n\}$, 虽然 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = 1$, 但 $\{(-1)^n\}$ 没有极限.

例 7. 设数列 $\{x_n\}$ 有界, 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$.

证 因数列 $\{x_n\}$ 有界, 故 $\exists M > 0$, 使得对一切 n 有 $|x_n| \leq M$. $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, 故对 $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M} > 0$, $\exists N$, 当 $n > N$ 时, 就有 $|y_n| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M}$, 从而有

$$|x_n y_n - 0| = |x_n| \cdot |y_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0.$$

例 8. 对于数列 $\{x_n\}$, 若 $x_{2k-1} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$, $x_{2k} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$, 证明: $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$.

证 因为 $x_{2k-1} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$, 所以 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k_1$, 当 $k > k_1$ 时, 有 $|x_{2k-1} - a| < \varepsilon$; 又因为 $x_{2k} \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$, 所以对上述 $\varepsilon > 0$, $\exists k_2$, 当 $k > k_2$ 时, 有 $|x_{2k} - a| < \varepsilon$.

记 $K = \max \{k_1, k_2\}$, 取 $N = 2K$, 则当 $n > N$ 时, 若 $n = 2k-1$, 则

$$k > K + \frac{1}{2} > k_1 \Rightarrow |x_n - a| = |x_{2k-1} - a| < \varepsilon,$$

若 $n = 2k$, 则

$$k > K \geq k_2 \Rightarrow |x_n - a| = |x_{2k} - a| < \varepsilon.$$

从而只要 $n > N$, 就有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

习题 1-3

函数的极限

1. 对图 1-8 所示的函数 $f(x)$, 求下列极限, 如极限不存在, 说明理由.

$$(1) \lim_{x \rightarrow -2} f(x);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -1} f(x);$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$.

(2) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1$.

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在, 因为 $f(0^+) \neq f(0^-)$.

2. 对图 1-9 所示的函数 $f(x)$, 下列陈述中哪些是对的, 哪些是错的?

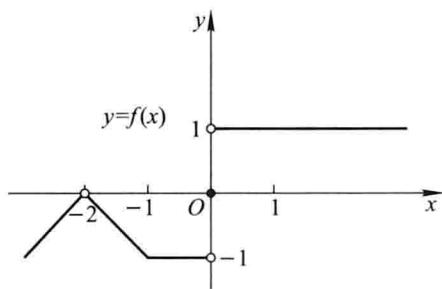


图 1-8

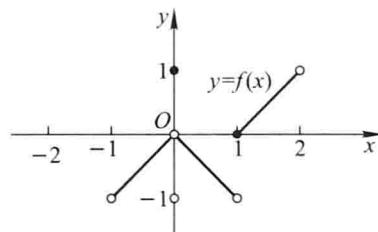


图 1-9

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在;

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$;

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$;

(4) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$;

(5) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在;

(6) 对每个 $x_0 \in (-1, 1)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在.

解 (1) 错, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在与否, 与 $f(0)$ 的值无关. 事实上, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

(2) 对, 因为 $f(0^+) = f(0^-) = 0$.

(3) 错, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 的值与 $f(0)$ 的值无关.

(4) 错, $f(1^+) = 0$, 但 $f(1^-) = -1$, 故 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在.

(5) 对, 因为 $f(1^-) \neq f(1^+)$.

(6) 对.

3. 对图 1-10 所示的函数, 下列陈述中哪些是对的, 哪些是错的?

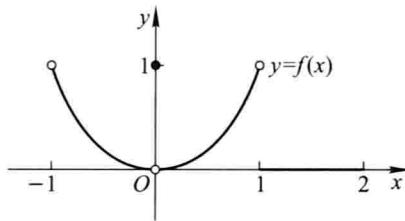


图 1-10

- (1) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$;
 (2) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ 不存在;
 (3) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$;
 (4) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$;
 (5) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$;
 (6) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$;
 (7) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$;
 (8) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$.

解 (1) 对.

(2) 对, 因为当 $x < -1$ 时, $f(x)$ 无定义.

(3) 对, 因为 $f(0^+) = f(0^-) = 0$.

(4) 错, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 的值与 $f(0)$ 的值无关.

(5) 对.

(6) 对.

(7) 对.

(8) 错, 因为当 $x > 2$ 时, $f(x)$ 无定义, $f(2^+)$ 不存在.

4. 求 $f(x) = \frac{x}{x}$, $\varphi(x) = \frac{|x|}{x}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时的左、右极限, 并说明它们在 $x \rightarrow 0$ 时的极限是否存在.

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1.$$

因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x)$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x)$ 不存在.

5. 根据函数极限的定义证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 3} (3x - 1) = 8; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 2} (5x + 2) = 12;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4; \quad (4) \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1 - 4x^2}{2x + 1} = 2.$$

解 (1) 因为

$$|(3x - 1) - 8| = |3x - 9| = 3|x - 3|,$$

要使 $|3x - 1 - 8| < \varepsilon$, 只要 $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{3}$, 所以 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, 则当 $0 < |x - 3| < \delta$ 时, 就有 $|3x - 1 - 8| < \varepsilon$, 即 $\lim_{x \rightarrow 3} (3x - 1) = 8$.

(2) 因为

$$|(5x + 2) - 12| = |5x - 10| = 5|x - 2|,$$

要使 $|5x + 2 - 12| < \varepsilon$, 只要 $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{5}$, 所以 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$, 则当 $0 < |x - 2| < \delta$ 时, 就有 $|5x + 2 - 12| < \varepsilon$, 即 $\lim_{x \rightarrow 2} (5x + 2) = 12$.

(3) 因为 $x \rightarrow -2, x \neq -2$,

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x + 2} - (-4) \right| = |x - 2 - (-4)| = |x + 2| = |x - (-2)|,$$

要使

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x + 2} - (-4) \right| < \varepsilon,$$

只要 $|x - (-2)| < \varepsilon$. 所以 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$, 则当 $0 < |x - (-2)| < \delta$ 时, 就有

$$\left| \frac{x^2 - 4}{x + 2} - (-4) \right| < \varepsilon,$$

即 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4$.

(4) 因为 $x \rightarrow -\frac{1}{2}, x \neq -\frac{1}{2}$,

$$\left| \frac{1 - 4x^2}{2x + 1} - 2 \right| = |1 - 2x - 2| = 2|x - \left(-\frac{1}{2}\right)|,$$

要使

$$\left| \frac{1 - 4x^2}{2x + 1} - 2 \right| < \varepsilon,$$

只要 $|x - \left(-\frac{1}{2}\right)| < \frac{\varepsilon}{2}$, 所以 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, 则当 $0 < |x - \left(-\frac{1}{2}\right)| < \delta$ 时, 就有

$$\left| \frac{1 - 4x^2}{2x + 1} - 2 \right| < \varepsilon,$$

即 $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{1 - 4x^2}{2x + 1} = 2$.

*6. 根据函数极限的定义证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0.$$

证 (1) 因为 $\left| \frac{1+x^3}{2x^3} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2|x|^3}$, 要使 $\left| \frac{1+x^3}{2x^3} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$, 只要

$\frac{1}{2|x|^3} < \varepsilon$, 即 $|x| > \frac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$, 所以 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $X = \frac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$, 则当 $|x| > X$ 时, 就有

$$\left| \frac{1+x^3}{2x^3} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon, \text{ 即 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}.$$

(2) 因为 $\left| \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - 0 \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$, 要使 $\left| \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - 0 \right| < \varepsilon$, 只要 $\frac{1}{\sqrt{x}} < \varepsilon$, 即 $x > \frac{1}{\varepsilon^2}$, 所以

$\forall \varepsilon > 0$, 取 $X = \frac{1}{\varepsilon^2}$, 则当 $x > X$ 时, 就有 $\left| \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - 0 \right| < \varepsilon$, 即 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$.

例 *7. 当 $x \rightarrow 2$ 时, $y = x^2 \rightarrow 4$. 问 δ 等于多少, 使当 $|x - 2| < \delta$ 时, $|y - 4| < 0.001$?

解 由于 $x \rightarrow 2$, $|x - 2| \rightarrow 0$, 不妨设 $|x - 2| < 1$, 即 $1 < x < 3$.

要使 $|x^2 - 4| = |x+2||x-2| < 5|x-2| < 0.001$, 只要

$$|x-2| < \frac{0.001}{5} = 0.0002,$$

取 $\delta = 0.0002$, 则当 $0 < |x - 2| < \delta$ 时, 就有 $|x^2 - 4| < 0.001$.

注 本题证明中, 先限定 $|x - 2| < 1$, 其目的是在 $|x^2 - 4| = |x+2||x-2|$ 中, 将 $|x+2|$ 放大为 5, 从而去掉因子 $|x+2|$, 再令 $5|x-2| < \varepsilon$, 由此可以求出 $|x-2| < \frac{\varepsilon}{5}$, 从而找到 δ . 这在按定义证明极限时, 也是经常采用的一种方法.

例 *8. 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y = \frac{x^2-1}{x^2+3} \rightarrow 1$. 问 X 等于多少, 使当 $|x| > X$ 时, $|y - 1| < 0.01$?

解 因为 $\left| \frac{x^2-1}{x^2+3} - 1 \right| = \frac{4}{x^2+3} < \frac{4}{x^2}$, 要使 $\left| \frac{x^2-1}{x^2+3} - 1 \right| < 0.01$, 只要 $\frac{4}{x^2} <$

0.01 , 即 $|x| > 20$, 取 $X = 20$, 则当 $|x| > X$ 时, 就有 $|y - 1| < 0.01$.

例 *9. 证明函数 $f(x) = |x|$ 当 $x \rightarrow 0$ 时极限为零.

证 因为 $||x| - 0| = |x| = |x - 0|$, 所以 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$, 则当 $0 < |x - 0| < \delta$ 时, 就有 $||x| - 0| < \varepsilon$, 即 $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$.

例 *10. 证明: 若 $x \rightarrow +\infty$ 及 $x \rightarrow -\infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限都存在且都等于 A , 则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A.$$

证 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 所以 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists X_1 > 0$, 当 $x > X_1$ 时, 就有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

又因为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$, 所以对上面的 $\varepsilon > 0$, $\exists X_2 > 0$, 当 $x < -X_2$ 时, 就有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

取 $X = \max\{X_1, X_2\}$, 则当 $|x| > X$, 即 $x > X$ 或 $x < -X$ 时, 就有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 即 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

***11.** 根据函数极限的定义证明: 函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在并且相等.

证 必要性 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 就有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

特别, 当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$; 当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$.

充分性 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$, 当 $0 < x - x_0 < \delta_1$ 时, 就有 $|f(x) - A| < \varepsilon$; 又 $\exists \delta_2 > 0$, 当 $0 < x_0 - x < \delta_2$ 时, 就有 $|f(x) - A| < \varepsilon$. 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 就有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

***12.** 试给出 $x \rightarrow \infty$ 时函数极限的局部有界的定理, 并加以证明.

解 局部有界性定理 如果 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, 那么存在常数 $M > 0$ 和 $X > 0$, 使得当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x)| \leq M$.

证明如下: 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, 所以对 $\varepsilon = 1 > 0$, $\exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 就有 $|f(x) - A| < 1$, 从而

$$|f(x)| \leq |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|,$$

取 $M = |A| + 1$, 即有当 $|x| > X$ 时, $|f(x)| \leq M$.

习题 1-4

无穷小与无穷大

***1.** 两个无穷小的商是否一定是无穷小? 举例说明之.

解 不一定. 例如, $\alpha(x) = 2x$ 与 $\beta(x) = 3x$ 都是当 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小, 但 $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{2}{3}$ 却不是当 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小.

***2.** 根据定义证明:

(1) $y = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ 为当 $x \rightarrow 3$ 时的无穷小;

(2) $y = x \sin \frac{1}{x}$ 为当 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小.

证 (1) 因为 $\left| \frac{x^2 - 9}{x + 3} \right| = |x - 3|$, 所以 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$, 则当 $0 < |x - 3| < \delta$ 时,

就有

$$\left| \frac{x^2 - 9}{x + 3} \right| < \varepsilon,$$

即 $\frac{x^2 - 9}{x + 3}$ 为当 $x \rightarrow 3$ 时的无穷小.

(2) 因为 $\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$, 所以 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$, 则当 $0 < |x| < \delta$ 时, 就有

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| < \varepsilon,$$

即 $x \sin \frac{1}{x}$ 为当 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小.

3. 根据定义证明: 函数 $y = \frac{1+2x}{x}$ 为当 $x \rightarrow 0$ 时的无穷大. 问 x 应满足什么条件, 能使 $|y| > 10^4$?

证 因为 $\left| \frac{1+2x}{x} \right| = \left| \frac{1}{x} + 2 \right| \geq \left| \frac{1}{x} \right| - 2$, 要使 $\left| \frac{1+2x}{x} \right| > M$, 只要 $\left| \frac{1}{x} \right| - 2 > M$,

即 $|x| < \frac{1}{M+2}$, 所以 $\forall M > 0$, 取 $\delta = \frac{1}{M+2}$, 则当 $0 < |x - 0| < \delta$ 时, 就有 $\left| \frac{1+2x}{x} \right| > M$,

即 $\frac{1+2x}{x}$ 为当 $x \rightarrow 0$ 时的无穷大.

令 $M = 10^4$, 取 $\delta = \frac{1}{10^4 + 2}$, 当 $0 < |x - 0| < \frac{1}{10^4 + 2}$ 时, 就能使 $\left| \frac{1+2x}{x} \right| > 10^4$.

注 在本题的证明中, 采取先将 $|f(x)| = \left| \frac{1+2x}{x} \right|$ 等价变形, 然后适当缩小, 使缩小后的量大于 M , 从而求出 δ . 这种方法在按定义证明函数在某个变化过程中为无穷大时, 也是经常采用的.

4. 求下列极限并说明理由:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x^2}{1-x}.$$

$$\text{解 } (1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{x} \right) = 2.$$

理由: 由定理 2, $\frac{1}{x}$ 为当 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小; 再由定理 1, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{x} \right) = 2$.

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x^2}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x) = 1.$$

理由: 由定理 1, $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x) = 1$.

5. 根据函数极限或无穷大定义, 填写下表:

	$f(x) \rightarrow A$	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow +\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$
$x \rightarrow x_0$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $ f(x) - A < \varepsilon.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $ f(x) > M.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $f(x) > M.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $f(x) < -M.$
$x \rightarrow x_0^+$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $ f(x) - A < \varepsilon.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $ f(x) > M.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $f(x) > M.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 即有 $f(x) < -M.$
$x \rightarrow x_0^-$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 > x - x_0 > -\delta$ 时, 即有 $ f(x) - A < \varepsilon.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 > x - x_0 > -\delta$ 时, 即有 $ f(x) > M.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 > x - x_0 > -\delta$ 时, 即有 $f(x) > M.$	$\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 使当 $0 > x - x_0 > -\delta$ 时, 即有 $f(x) < -M.$
$x \rightarrow \infty$	$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使当 $ x > X$ 时, 即有 $ f(x) - A < \varepsilon.$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $ x > X$ 时, 即有 $ f(x) > M.$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $ x > X$ 时, 即有 $f(x) > M.$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $ x > X$ 时, 即有 $f(x) < -M.$
$x \rightarrow +\infty$	$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使当 $x > X$ 时, 即有 $ f(x) - A < \varepsilon.$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $x > X$ 时, 即有 $ f(x) > M.$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $x > X$ 时, 即有 $f(x) > M.$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $x > X$ 时, 即有 $f(x) < -M.$
$x \rightarrow -\infty$	$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使当 $x < -X$ 时, 即有 $ f(x) - A < \varepsilon.$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $x < -X$ 时, 即有 $ f(x) > M.$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $x < -X$ 时, 即有 $f(x) > M.$	$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 使当 $x < -X$ 时, 即有 $f(x) < -M.$

6. 函数 $y = x \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是否有界? 这个函数是否为 $x \rightarrow +\infty$ 时的无穷大? 为什么?

解 因为 $\forall M > 0$, 总有 $x_0 \in (M, +\infty)$, 使 $\cos x_0 = 1$, 从而 $y = x_0 \cos x_0 = x_0 > M$, 所以 $y = x \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界.

又因为 $\forall M > 0, X > 0$, 总有 $x_0 \in (X, +\infty)$, 使 $\cos x_0 = 0$, 从而 $y = x_0 \cos x_0 = 0 < M$, 所以 $y = f(x) = x \cos x$ 不是当 $x \rightarrow +\infty$ 时的无穷大.

*7. 证明: 函数 $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1]$ 内无界, 但这函数不是 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷大.

证 先证函数 $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1]$ 内无界.

因为 $\forall M > 0$, 在 $(0, 1]$ 中总可找到点 x_0 , 使 $f(x_0) > M$. 例如, 可取 $x_0 = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$ ($k \in \mathbb{N}$), 则 $f(x_0) = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, 当 k 充分大时, 可使 $f(x_0) > M$. 所以 $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1]$ 内无界.

再证函数 $y = f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 不是 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷大.

因为 $\forall M > 0, \delta > 0$, 总可找到点 x_0 , 使 $0 < x_0 < \delta$, 但 $f(x_0) < M$. 例如, 可取 $x_0 = \frac{1}{2k\pi}$ ($k \in \mathbb{N}_+$), 当 k 充分大时, $0 < x_0 < \delta$, 但 $f(x_0) = 2k\pi \sin 2k\pi = 0 < M$. 所以 $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 不是 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷大.

8. 求函数 $f(x) = \frac{4}{2 - x^2}$ 的图形的渐近线.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, 所以 $y = 0$ 是函数图形的水平渐近线.

因为 $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x) = \infty$, 所以 $x = -\sqrt{2}$ 及 $x = \sqrt{2}$ 都是函数图形的铅直渐近线.

习题 1-5

极限运算法则

1. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x - 3};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x};$$

$$(5) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right);$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^4 - 3x^2 + 1};$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4};$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) \left(2 - \frac{1}{x^2} \right);$$

$$(11) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right); \quad (12) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)}{n^2};$$

$$(13) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}; \quad (14) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right).$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x - 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 5)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x - 3)} = \frac{9}{-1} = -9$.

$$(2) \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{\lim(x^2 - 3)}{\lim(x^2 + 1)} = \frac{0}{4} = 0.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{\lim(x-1)}{\lim(x+1)} = \frac{0}{2} = 0.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 - 2x + 1}{3x + 2} = \frac{\lim(4x^2 - 2x + 1)}{\lim(3x + 2)} = \frac{1}{2}.$$

$$(5) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 2 - 0 + 0 = 2.$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{\lim\left(2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{2}.$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^4 - 3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}} = \frac{\lim\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{\lim\left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)} = \frac{0}{1} = 0.$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x-2)}{(x-4)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-2}{x-1} = \frac{\lim(x-2)}{\lim(x-1)} = \frac{2}{3}.$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) \left(2 - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{x^2} \right) = 1 \cdot 2 = 2.$$

$$(11) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) \\ = 2 \left(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n+1}} \right) = 2.$$

$$(12) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2}.$$

$$(13) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{2}{n} \right) \left(1 + \frac{3}{n} \right) \\ = \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n} \right) \\ = \frac{1}{5}.$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x+x^2-3}{1-x^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+2)}{1+x+x^2} = -\frac{\lim_{x \rightarrow 1}(x+2)}{\lim_{x \rightarrow 1}(1+x+x^2)} \\
 &= -\frac{3}{3} = -1.
 \end{aligned}$$

2. 计算下列极限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2}{(x-2)^2};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x+1};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 - x + 1).$$

解 (1) 因为

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{x^3 + 2x^2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2}(x-2)^2}{\lim_{x \rightarrow 2}(x^3 + 2x^2)} = 0,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2}{(x-2)^2} = \infty.$$

(2) 因为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = 0,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x+1} = \infty.$$

(3) 因为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^3 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^3}}{2 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)} = 0,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 - x + 1) = \infty.$$

3. 计算下列极限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x}.$$

解 (1) 因为 $x^2 \rightarrow 0 (x \rightarrow 0)$, $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0.$$

(2) 因为 $\frac{1}{x} \rightarrow 0 (x \rightarrow \infty)$, $|\arctan x| < \frac{\pi}{2}$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x} = 0.$$

4. 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$. 下列陈述中哪些是对的, 哪些是错的? 如果是对的, 说明理由; 如果是错的, 试给出一个反例.

$$(1) a_n < b_n, n \in \mathbb{N}_+ ; \quad (2) b_n < c_n, n \in \mathbb{N}_+ ;$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n \text{ 不存在}; \quad (4) \lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n \text{ 不存在}.$$

解 (1) 错. 例如 $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_+$, 当 $n=1$ 时, $a_1 = 1 > \frac{1}{2} = b_1$, 故对

任意 $n \in \mathbb{N}_+$, $a_n < b_n$ 不成立.

(2) 错. 例如 $b_n = \frac{n}{n+1}$, $c_n = (-1)^n n$, $n \in \mathbb{N}_+$. 当 n 为奇数时, $b_n < c_n$ 不

成立.

(3) 错. 例如 $a_n = \frac{1}{n^2}$, $c_n = n$, $n \in \mathbb{N}_+$. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n = 0$.

(4) 对. 因为, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n c_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n}$ 也存在, 与已知条件矛盾.

5. 下列陈述中, 哪些是对的, 哪些是错的? 如果是对的, 说明理由; 如果是错的, 试给出一个反例.

(1) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 不存在, 那么 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ 不存在;

(2) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 都不存在, 那么 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ 不存在;

(3) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 不存在, 那么 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x)$ 不存在.

解 (1) 对. 因为, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 也存在, 与已知条件矛盾.

(2) 错. 例如 $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = -\operatorname{sgn} x$ 在 $x \rightarrow 0$ 时的极限都不存在, 但 $f(x) + g(x) \equiv 0$ 在 $x \rightarrow 0$ 时的极限存在.

(3) 错. 例如 $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在, 但 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

6. 证明本节定理 3 中的(2).

定理 3 (2) 如果 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$, 那么

$$\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B.$$

证 因 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$, 由上节定理 1, 有 $f(x) = A + \alpha$, $g(x) = B + \beta$, 其中 α, β 都是无穷小, 于是

$$f(x)g(x) = (A + \alpha)(B + \beta) = AB + (A\beta + B\alpha + \alpha\beta),$$

由本节定理 2 推论 1, $A\beta, B\alpha, \alpha\beta$ 都是无穷小, 再由本节定理 1, $(A\beta + B\alpha + \alpha\beta)$ 也是无穷小, 由上节定理 1, 得

$$\lim f(x)g(x) = AB = \lim f(x) \cdot \lim g(x).$$

习题 1-6

极限存在准则 两个重要极限

1. 计算下列极限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \omega x}{x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} x \cot x;$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x};$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n} (x \text{ 为不等于零的常数}).$$

解 (1) 当 $\omega \neq 0$ 时，

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \omega x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\omega \cdot \frac{\sin \omega x}{\omega x} \right) = \omega \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \omega x}{\omega x} = \omega;$$

当 $\omega = 0$ 时，

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \omega x}{x} = 0 = \omega,$$

故不论 ω 为何值，均有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \omega x}{x} = \omega$.

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(3 \cdot \frac{\tan 3x}{3x} \right) = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{3x} = 3.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{2}{5} \right) = \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 5x} = \frac{2}{5}.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} x \cot x = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \cdot \cos x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x \sin x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 2.$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} \cdot x \right) = x.$$

2. 计算下列极限：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{\frac{1}{x}};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x} \right)^{2x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{kx} (k \text{ 为正整数}).$$

$$\text{解 } (1) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (-x)]^{\frac{1}{(-x)}(-1)} = e^{-1}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [(1 + 2x)^{\frac{1}{2x}}]^2 = e^2.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right]^2 = e^2.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{kx} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{(-x)}\right]^{(-x)(-k)} = e^{-k}.$$

3. 根据函数极限的定义, 证明极限存在的准则 I'.

准则 I' 如果

$$(1) g(x) \leq f(x) \leq h(x), x \in U(x_0, r);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A,$$

那么 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 且等于 A .

证 $\forall \varepsilon > 0$, 因 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$, 故 $\exists \delta_1 > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时, 有

$|g(x) - A| < \varepsilon$, 即

$$A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon, \quad (3)$$

又因 $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$, 故对上面的 $\varepsilon > 0$, $\exists \delta_2 > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时, 有

$|h(x) - A| < \varepsilon$, 即

$$A - \varepsilon < h(x) < A + \varepsilon. \quad (4)$$

取 $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2, r\}$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 假设(1)及关系式(3)、(4)同时成立, 从而有

$$A - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < A + \varepsilon,$$

即有 $|f(x) - A| < \varepsilon$. 因此 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 且等于 A .

注 对于 $x \rightarrow \infty$ 的情形, 利用极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的定义及假设条件, 可以类似地证明相应的准则 I'.

4. 利用极限存在准则证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right) = 1;$$

(3) 数列 $\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots$ 的极限存在;

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{1+x} = 1;$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1.$$

证 (1) 因 $1 < \sqrt{1 + \frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n}$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$, 由夹逼准则, 即得证.

(2) 因 $\frac{n}{n + \pi} \leq n \left(\frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right) \leq \frac{n^2}{n^2 + \pi}$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n + \pi} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + \pi} = 1$, 由夹逼准则, 即得证.

$$(3) \quad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \quad (n \in \mathbb{N}_+), \quad x_1 = \sqrt{2}.$$

先证数列 $\{x_n\}$ 有界:

$n=1$ 时, $x_1 = \sqrt{2} < 2$; 假定 $n=k$ 时, $x_k < 2$. 当 $n=k+1$ 时, $x_{k+1} = \sqrt{2+x_k} < \sqrt{2+2} = 2$. 故 $x_n < 2$ ($n \in \mathbb{N}_+$).

再证数列 $\{x_n\}$ 单调增加:

因

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{2 + x_n} - x_n = \frac{2 + x_n - x_n^2}{\sqrt{2 + x_n} + x_n} = - \frac{(x_n - 2)(x_n + 1)}{\sqrt{2 + x_n} + x_n},$$

由 $0 < x_n < 2$, 得 $x_{n+1} - x_n > 0$, 即 $x_{n+1} > x_n$ ($n \in \mathbb{N}_+$).

由单调有界准则, 即知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

记 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. 由 $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, 得 $x_{n+1}^2 = 2 + x_n$. 两端同时取极限得

$$a^2 = 2 + a \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a_1 = 2, a_2 = -1 \text{ (舍去).}$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$.

注 本题的求解过程分成两步, 第一步是证明数列 $\{x_n\}$ 单调有界, 从而保证数列的极限存在; 第二步是在递推公式两端同时取极限, 得出一个含有极限值 a 的方程, 再通过解方程求得极限值 a . 注意: 只有在证明数列极限存在的前提下, 才能采用第二步的方法求得极限值. 否则, 直接利用第二步, 有时会导出错误的结果.

(4) 当 $x > 0$ 时, $1 < \sqrt[n]{1+x} < 1+x$; 当 $-1 < x < 0$ 时, $1+x < \sqrt[n]{1+x} < 1$. 而 $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x) = 1$. 由夹逼准则, 即得证.

(5) 当 $x > 0$ 时, $1-x < x \left[\frac{1}{x} \right] \leq 1$. 而 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1-x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$. 由夹逼准则, 即得证.

习题 1-7

无穷小的比较

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $2x - x^2$ 与 $x^2 - x^3$ 相比, 哪一个是高阶无穷小?

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} (2x - x^2) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - x^3) = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x^3}{2x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x^2}{2 - x} = 0,$$

所以当 $x \rightarrow 0$ 时, $x^2 - x^3$ 是比 $2x - x^2$ 高阶的无穷小.

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x)^2$ 与 $\sin^2 x$ 相比, 哪一个是高阶无穷小?

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^2 = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 x = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2}{x^2} = 0,$$

所以当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x)^2$ 是比 $\sin^2 x$ 高阶的无穷小.

3. 当 $x \rightarrow 1$ 时, 无穷小 $1 - x$ 和 (1) $1 - x^3$, (2) $\frac{1}{2}(1 - x^2)$ 是否同阶, 是否等价?

解 (1) $\frac{1-x}{1-x^3} = \frac{1-x}{(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{1}{1+x+x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{1}{3}$ (同阶, 不等价).

(2) $\frac{1-x}{\frac{1}{2}(1-x^2)} = \frac{1-x}{\frac{1}{2}(1-x)(1+x)} = \frac{2}{1+x} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$ (同阶, 等价).

4. 证明: 当 $x \rightarrow 0$ 时, 有

$$(1) \arctan x \sim x;$$

$$(2) \sec x - 1 \sim \frac{x^2}{2}.$$

证 (1) 令 $x = \tan t$, 即 $t = \arctan x$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $t \rightarrow 0$.

因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\tan t} = 1,$$

所以

$$\arctan x \sim x \quad (x \rightarrow 0).$$

(2) 因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x - 1}{\frac{x^2}{2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1, \end{aligned}$$

所以

$$\sec x - 1 \sim \frac{x^2}{2} \quad (x \rightarrow 0).$$

5. 利用等价无穷小的性质, 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{2x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m} \quad (n, m \text{ 为正整数});$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+\sin x} - 1)}.$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}.$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{x^m} = \begin{cases} 0, & n > m, \\ 1, & n = m, \\ \infty, & n < m. \end{cases}$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x - 1}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

注 在作等价无穷小的代换求极限时,可以对分子或分母中的一个或若干个因子作代换,但不能对分子或分母中的某个加项作代换. 例如,本题中若将分子中的 $\tan x$ 、 $\sin x$ 均换成 x ,那么分子成为 0,得出极限为 0,这就导致错误的结果.

$$\begin{aligned}(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+\sin x} - 1)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \sec x)}{\frac{1}{3}x^2 \cdot \frac{1}{2}\sin x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{6}x^2} = -3.\end{aligned}$$

6. 证明无穷小的等价关系具有下列性质:

- (1) $\alpha \sim \alpha$ (自反性);
- (2) 若 $\alpha \sim \beta$, 则 $\beta \sim \alpha$ (对称性);
- (3) 若 $\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma$, 则 $\alpha \sim \gamma$ (传递性).

证 (1) 因为 $\lim \frac{\alpha}{\alpha} = 1$, 所以 $\alpha \sim \alpha$;

(2) 因为 $\alpha \sim \beta$, 即 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$, 所以 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$, 即 $\beta \sim \alpha$;

(3) 因为 $\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma$, 即 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1, \lim \frac{\beta}{\gamma} = 1$, 所以

$$\lim \frac{\alpha}{\gamma} = \lim \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\gamma} \right) = \lim \frac{\alpha}{\beta} \cdot \lim \frac{\beta}{\gamma} = 1, \text{即 } \alpha \sim \gamma.$$

习题 1-8

函数的连续性与间断点

1. 设 $y=f(x)$ 的图形如图 1-11 所示, 试指出 $f(x)$ 的全部间断点, 并对可去间断点补充或修改函数值的定义,使它成为连续点.

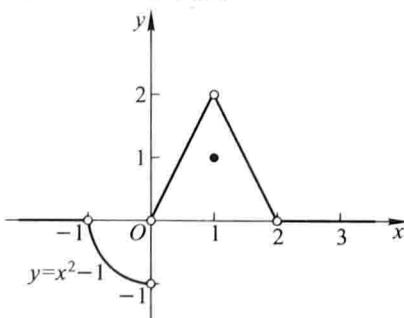


图 1-11

解 $x = -1, 0, 1, 2$ 均为 $f(x)$ 的间断点, 除 $x = 0$ 外它们均为 $f(x)$ 的可去间断点. 补充定义 $f(-1) = f(2) = 0$, 修改定义使 $f(1) = 2$, 则它们均成为 $f(x)$ 的连续点.

2. 研究下列函数的连续性, 并画出函数的图形:

$$(1) f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2; \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x \leq 1, \\ 1, & x < -1 \text{ 或 } x > 1. \end{cases}$$

解 (1) $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 及 $(1, 2]$ 内连续, 在 $x = 1$ 处,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2-x) = 1, \text{ 又 } f(1) = 1,$$

故 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续, 因此 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 函数的图形如图 1-12 所示.

(2) $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 与 $(-1, +\infty)$ 内连续, 在 $x = -1$ 处间断, 但右连续. 因为在 $x = -1$ 处,

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} x = -1, f(-1) = -1,$$

但

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} 1 = 1,$$

即

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x).$$

函数的图形如图 1-13 所示.

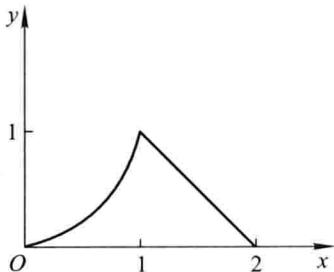


图 1-12

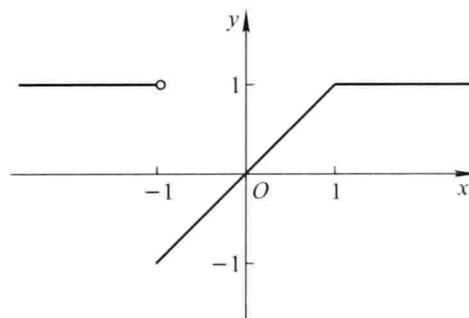


图 1-13

3. 下列函数在指出的点处间断, 说明这些间断点属于哪一类. 如果是可去间断点, 那么补充或改变函数的定义使它连续:

$$(1) y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}, x = 1, x = 2;$$

$$(2) y = \frac{x}{\tan x}, x = k\pi, x = k\pi + \frac{\pi}{2} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

$$(3) y = \cos^2 \frac{1}{x}, x = 0;$$

$$(4) \quad y = \begin{cases} x - 1, & x \leq 1, \\ 3 - x, & x > 1, \end{cases}$$

解 (1) 对 $x = 1$, 因为 $f(1)$ 无定义, 但

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2} = -2,$$

所以, $x = 1$ 为第一类间断点(可去间断点), 重新定义函数:

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}, & x \neq 1, 2, \\ -2, & x = 1, \end{cases}$$

则 $f_1(x)$ 在 $x = 1$ 处连续.

因为 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty$, 所以 $x = 2$ 为第二类间断点(无穷间断点).

(2) 对 $x = 0$, 因为 $f(0)$ 无定义, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$, 所以 $x = 0$ 为第一类间断点(可去间断点), 重新定义函数:

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{x}{\tan x}, & x \neq k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}, \\ 1, & x = 0 \end{cases} \quad (k \in \mathbf{Z}),$$

则 $f_1(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

对 $x = k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$), 因为 $\lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{x}{\tan x} = \infty$, 所以 $x = k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 为第二类间断点(无穷间断点).

对 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$), 因为 $\lim_{x \rightarrow k\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x} = 0$, 而函数在 $k\pi + \frac{\pi}{2}$ 处无定义, 所以 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$) 为第一类间断点(可去间断点), 重新定义函数:

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{x}{\tan x}, & x \neq k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbf{Z}),$$

则 $f_2(x)$ 在 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$) 处连续.

(3) 对 $x = 0$, 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos^2 \frac{1}{x}$ 及 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \cos^2 \frac{1}{x}$ 均不存在, 所以 $x = 0$ 为第二类间断点.

(4) 对 $x = 1$, 因为 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3 - x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1) = 0$, 即左、右极限存在, 但不相等, 所以 $x = 1$ 为第一类间断点(跳跃间断点).

注 在讨论分段函数的连续性时, 在函数的分段点处, 必须分别考虑函数的左连续性和右连续性, 只有函数在该点既左连续, 又右连续, 才能得出函数在该点

连续.

4. 讨论函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性,若有间断点,则判别其类型.

解

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x = \begin{cases} -x, & |x| > 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ x, & |x| < 1. \end{cases}$$

在分段点 $x = -1$ 处,因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} (-x) = 1, \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} x = -1, \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &\neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), \end{aligned}$$

所以 $x = -1$ 为第一类间断点(跳跃间断点).

在分段点 $x = 1$ 处,因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x) = -1, \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &\neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \end{aligned}$$

所以 $x = 1$ 为第一类间断点(跳跃间断点).

5. 下列陈述中,哪些是对的,哪些是错的? 如果是对的,说明理由;如果是错的,试给出一个反例.

(1) 如果函数 $f(x)$ 在 a 连续,那么 $|f(x)|$ 也在 a 连续;

(2) 如果函数 $|f(x)|$ 在 a 连续,那么 $f(x)$ 也在 a 连续.

解 (1) 对. 因为

$$||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)| \rightarrow 0 (x \rightarrow a),$$

所以 $|f(x)|$ 也在 a 连续.

(2) 错. 例如

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

则 $|f(x)|$ 在 $x = 0$ 处连续,而 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续.

*6. 证明:若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续且 $f(x_0) \neq 0$,则存在 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$,当 $x \in U(x_0)$ 时, $f(x) \neq 0$.

证 若 $f(x_0) > 0$,因为 $f(x)$ 在 x_0 连续,所以取 $\varepsilon = \frac{1}{2}f(x_0) > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时,有 $|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2}f(x_0)$,即

$$0 < \frac{1}{2}f(x_0) < f(x) < \frac{3}{2}f(x_0).$$

若 $f(x_0) < 0$, 因为 $f(x)$ 在 x_0 连续, 所以取 $\varepsilon = -\frac{1}{2}f(x_0) > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x \in U(x_0, \delta)$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < -\frac{1}{2}f(x_0)$, 即

$$\frac{3}{2}f(x_0) < f(x) < \frac{1}{2}f(x_0) < 0.$$

因此, 不论 $f(x_0) > 0$ 或 $f(x_0) < 0$, 总存在 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$, 当 $x \in U(x_0)$ 时, $f(x) \neq 0$.

*7. 设

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \end{cases}$$

证明: (1) $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续;

(2) $f(x)$ 在非零的 x 处都不连续.

证 (1) $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$, 则当 $|x - 0| = |x| < \delta$ 时,

$$|f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq |x| < \varepsilon,$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, 即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续.

(2) 我们证明: $\forall x_0 \neq 0$, $f(x)$ 在 x_0 不连续.

若 $x_0 = r \neq 0$, $r \in \mathbf{Q}$, 则 $f(x_0) = f(r) = r$.

分别取一有理数列 $\{r_n\}: r_n \rightarrow r(n \rightarrow \infty)$, $r_n \neq r$; 取一无理数列 $\{s_n\}: s_n \rightarrow r(n \rightarrow \infty)$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r, \lim_{n \rightarrow \infty} f(s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0,$$

而 $r \neq 0$, 由函数极限与数列极限的关系知 $\lim_{x \rightarrow r} f(x)$ 不存在, 故 $f(x)$ 在 r 处不连续.

若 $x_0 = s$, $s \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. 同理可证: $f(x_0) = f(s) = 0$, 但 $\lim_{x \rightarrow s} f(x)$ 不存在, 故 $f(x)$ 在 s 处不连续.

*8. 试举出具有以下性质的函数 $f(x)$ 的例子:

$x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}, \dots, \pm n, \pm \frac{1}{n}, \dots$ 是 $f(x)$ 的所有间断点, 且它们都是无穷间断点.

解 设 $f(x) = \cot(\pi x) + \cot \frac{\pi}{x}$, 显然 $f(x)$ 具有所要求的性质.

习题 1-9

连续函数的运算与初等函数的连续性

1. 求函数 $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 + x - 6}$ 的连续区间, 并求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

解 $f(x)$ 在 $x_1 = -3, x_2 = 2$ 处无意义, 所以这两个点为间断点, 此外函数到处连续, 连续区间为 $(-\infty, -3), (-3, 2), (2, +\infty)$.

因为

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 + x - 6} = \frac{(x^2 - 1)(x + 3)}{(x + 3)(x - 2)} = \frac{x^2 - 1}{x - 2},$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\frac{8}{5}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty.$$

2. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 连续, 证明函数

$$\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad \psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

在点 x_0 也连续.

证 $\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|]$,

$$\psi(x) = \min\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|].$$

又, 若 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 则 $|f(x)|$ 在点 x_0 也连续; 由连续函数的和、差仍连续, 故 $\varphi(x), \psi(x)$ 在点 x_0 也连续.

3. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 2x + 5};$$

$$(2) \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2\alpha)^3;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \ln(2 \cos 2x);$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-4} - \sqrt{x}}{x-1};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sin x - \sin \alpha}{x - \alpha};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x});$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{2}{3}} - 1}{x \ln(1+x)},$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 - 2x + 5} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2x + 5)} = \sqrt{5}.$

$$(2) \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2\alpha)^3 = \left(\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin 2\alpha\right)^3 = \left(\sin \frac{\pi}{2}\right)^3 = 1.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \ln(2 \cos 2x) = \ln\left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} 2 \cos 2x\right) = \ln\left(2 \cos \frac{\pi}{3}\right) = \ln 1 = 0.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{2}.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-4} - \sqrt{x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4}{\sqrt{5x-4} + \sqrt{x}} = 2.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sin x - \sin \alpha}{x - \alpha} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{2 \sin \frac{x - \alpha}{2} \cos \frac{x + \alpha}{2}}{x - \alpha}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sin \frac{x - \alpha}{2}}{\frac{x - \alpha}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow \alpha} \cos \frac{x + \alpha}{2} = \cos \alpha.$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = 1.$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{2}{3}} - 1}{x \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{x \cdot x} = -\frac{1}{3}.$$

注 本题及下一题求极限中,采用了以下几种常用的方法:

- (1) 利用极限运算法则;
- (2) 利用复合函数的连续性,将函数符号与极限号交换次序;
- (3) 利用一些初等方法:因式分解,分子或分母有理化,分子分母同乘或除以一个不为零的因子,消去分母中趋于零的因子等;
- (4) 利用重要极限以及它们的变形;
- (5) 利用等价无穷小替代.

4. 求下列极限:

$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}};$	$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{\sin x}{x};$
$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}};$	$(4) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \tan^2 x)^{\cot^2 x};$
$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}};$	$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \sqrt{1+\sin^2 x} - x};$
$(7) \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e};$	$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x} - e^x + 1}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)} - 1}.$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} = e^0 = 1.$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{\sin x}{x} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) = \ln 1 = 0.$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right]^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \tan^2 x)^{\cot^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} [(1 + 3 \tan^2 x)^{\frac{1}{3} \cot^2 x}]^3 = e^3.$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+x}{6+x} \right)^{\frac{x-1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{3}{6+x} \right)^{-\frac{6+x}{3}} \right]^{-\frac{3}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{6+x} \right)^{-\frac{7}{2}} = e^{-\frac{3}{2}}.$$

$$\begin{aligned} (6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \sqrt{1+\sin^2 x} - x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x(\sqrt{1+\sin^2 x} - 1)(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sec x - 1}{\sqrt{1+\sin^2 x} - 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}\sin^2 x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(e+t) - \ln e}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{t}{e}\right)}{t} = \frac{1}{e}.$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x} - e^x + 1}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1)(e^x - 1)}{(1-x^2)^{\frac{1}{3}} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot x}{-\frac{1}{3}x^2} = -6.$$

5. 设 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上连续, 且 $f(x) \neq 0$, $\varphi(x)$ 在 \mathbf{R} 上有定义, 且有间断点, 则下列陈述中, 哪些是对的, 哪些是错的? 如果是对的, 试说明理由; 如果是错的, 试给出一个反例.

(1) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点; (2) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点;

(3) $f[\varphi(x)]$ 未必有间断点; (4) $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点.

解 (1) 错. 例如, $\varphi(x) = \operatorname{sgn} x$, $f(x) = e^x$, $\varphi[f(x)] \equiv 1$ 在 \mathbf{R} 上处处连续.

(2) 错. 例如, $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ -1, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \end{cases}$ $[\varphi(x)]^2 \equiv 1$ 在 \mathbf{R} 上处处连续.

(3) 对. 例如, $\varphi(x)$ 同(2), $f(x) = |x| + 1$, $f[\varphi(x)] \equiv 2$ 在 \mathbf{R} 上处处连续.

(4) 对. 因为, 若 $F(x) = \frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 在 \mathbf{R} 上处处连续, 则 $\varphi(x) = F(x) \cdot f(x)$ 也在 \mathbf{R} 上处处连续, 这与已知条件矛盾.

6. 设函数

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ a+x, & x \geq 0. \end{cases}$$

应当怎样选择数 a , 才能使得 $f(x)$ 成为在 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续函数.

解 由初等函数的连续性, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 及 $(0, +\infty)$ 内连续, 所以要使 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 只要选择数 a , 使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续即可.

在 $x=0$ 处, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a+x) = a$, $f(0) = a$, 取 $a = 1$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0),$$

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 于是, 选择 $a=1$, $f(x)$ 就成为在 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续函数.

习题 1-10

闭区间上连续函数的性质

- 1.** 假设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 并且对 $[0,1]$ 上任一点 x 有 $0 \leq f(x) \leq 1$. 试证明 $[0,1]$ 中必存在一点 c , 使得 $f(c) = c$ (c 称为函数 $f(x)$ 的不动点).

证 设 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F(0) = f(0) \geq 0$, $F(1) = f(1) - 1 \leq 0$.

若 $F(0) = 0$ 或 $F(1) = 0$, 则 0 或 1 即为 $f(x)$ 的不动点; 若 $F(0) > 0$ 且 $F(1) < 0$, 则由零点定理, 必存在 $c \in (0,1)$, 使 $F(c) = 0$, 即 $f(c) = c$, 这时 c 为 $f(x)$ 的不动点.

- 2.** 证明方程 $x^5 - 3x = 1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

证 设 $f(x) = x^5 - 3x - 1$, 则 $f(x)$ 在闭区间 $[1,2]$ 上连续, 且 $f(1) = -3 < 0$, $f(2) = 25 > 0$. 由零点定理, 即知 $\exists \xi \in (1,2)$, 使 $f(\xi) = 0$, ξ 即为方程的根.

- 3.** 证明方程 $x = a \sin x + b$, 其中 $a > 0, b > 0$, 至少有一个正根, 并且它不超过 $a+b$.

证 设 $f(x) = x - a \sin x - b$, 则 $f(x)$ 在闭区间 $[0, a+b]$ 上连续, 且 $f(0) = -b < 0$, $f(a+b) = a[1 - \sin(a+b)]$. 当 $\sin(a+b) < 1$ 时, $f(a+b) > 0$, 由零点定理, 即知 $\exists \xi \in (0, a+b)$, 使 $f(\xi) = 0$, 即 ξ 为原方程的根, 它是正根且不超过 $a+b$; 当 $\sin(a+b) = 1$ 时, $f(a+b) = 0$, $a+b$ 就是满足条件的正根.

- 4.** 证明任一最高次幂的指数为奇数的代数方程

$$a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \cdots + a_{2n} x + a_{2n+1} = 0$$

至少有一实根, 其中 $a_0, a_1, \dots, a_{2n+1}$ 均为常数, $n \in \mathbb{N}$.

证 当 x 的绝对值充分大时, $f(x) = a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \cdots + a_{2n} x + a_{2n+1}$ 的符号取决于 a_0 的符号, 即当 x 为正时与 a_0 同号, 当 x 为负时与 a_0 异号, 而 $a_0 \neq 0$. 因 $f(x)$ 是连续函数, 它在某充分大的区间的两端处异号, 由零点定理可知它在区间内某一点处必定为零, 故方程 $f(x) = 0$ 至少有一实根.

- 5.** 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$ ($n \geq 3$), 则在 (x_1, x_n) 内至少有一点 ξ , 使 $f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$.

证 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 又 $[x_1, x_n] \subset [a, b]$, 所以 $f(x)$ 在 $[x_1, x_n]$ 上连续. 设

$$M = \max \{f(x) \mid x_1 \leq x \leq x_n\}, m = \min \{f(x) \mid x_1 \leq x \leq x_n\},$$

则

$$m \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \leq M.$$

若上述不等式中为严格不等号, 则由介值定理知, $\exists \xi \in (x_1, x_n)$, 使

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n};$$

若上述不等式中出现等号, 如

$$m = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n},$$

则有 $f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_n) = m$, 任取 x_2, \dots, x_{n-1} 中一点作为 ξ , 即有 $\xi \in (x_1, x_n)$, 使

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

如

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} = M,$$

同理可证.

例 6. 设函数 $f(x)$ 对于闭区间 $[a, b]$ 上的任意两点 x, y , 恒有 $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$, 其中 L 为正常数, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$. 证明: 至少有一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$.

证 任取 $x_0 \in (a, b)$, $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{L}, x_0 - a, b - x_0 \right\}$, 则当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 由

假设

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| < L\delta \leq \varepsilon,$$

所以 $f(x)$ 在 x_0 连续. 由 $x_0 \in (a, b)$ 的任意性知, $f(x)$ 在 (a, b) 内连续.

当 $x_0 = a$ 或 $x_0 = b$ 时, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$, 并将 $|x - x_0| < \delta$ 换成 $x \in [a, a + \delta)$ 或 $x \in (b - \delta, b]$, 便可知 $f(x)$ 在 $x = a$ 右连续, 在 $x = b$ 左连续. 从而 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

又由假设 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 由零点定理即知 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$.

例 7. 证明: 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 必在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

证 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, 则对 $\varepsilon = 1 > 0$, $\exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 有

$$|f(x) - A| < 1 \Rightarrow |f(x)| \leq |f(x) - A| + |A| < |A| + 1.$$

又, $f(x)$ 在 $[-X, X]$ 上连续, 利用有界性定理, 得: $\exists M > 0$, 对 $\forall x \in [-X, X]$, 有 $|f(x)| \leq M$.

取 $M' = \max \{M, |A| + 1\}$, 即有 $|f(x)| \leq M'$, $\forall x \in (-\infty, +\infty)$.

例 8. 在什么条件下, (a, b) 内的连续函数 $f(x)$ 为一致连续?

解 若 $f(a^+), f(b^-)$ 均存在, 设

$$F(x) = \begin{cases} f(a^+), & x = a, \\ f(x), & x \in (a, b), \\ f(b^-), & x = b. \end{cases}$$

易证 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 从而 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续, 也就有 $F(x)$ 在 (a, b) 内一致连续, 即 $f(x)$ 在 (a, b) 内一致连续.

总习题一

1. 在“充分”“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内:

(1) 数列 $\{x_n\}$ 有界是数列 $\{x_n\}$ 收敛的_____条件, 数列 $\{x_n\}$ 收敛是数列 $\{x_n\}$ 有界的_____条件;

(2) $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的_____条件, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在是 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界的_____条件;

(3) $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内无界是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 的_____条件, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 是 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内无界的_____条件;

(4) $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的右极限 $f(x_0^+)$ 及左极限 $f(x_0^-)$ 都存在且相等是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的_____条件.

解 (1) 必要, 充分.

(2) 必要, 充分.

(3) 必要, 充分.

(4) 充分必要.

2. 已知函数

$$f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{-x^2}, & 0 < |x| < \frac{\pi}{2}, \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

在 $x = 0$ 连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 $a = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{-x^2} = 1$.

3. 以下两题中给出了四个结论, 从中选出一个正确的结论:

(1) 设 $f(x) = 2^x + 3^x - 2$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, 有() .

(A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小 (B) $f(x)$ 与 x 同阶但非等价无穷小

(C) $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小 (D) $f(x)$ 是比 x 低阶的无穷小

(2) 设

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1},$$

则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的().

(A) 可去间断点

(B) 跳跃间断点

(C) 第二类间断点

(D) 连续点

解 (1) 因为

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 3^x - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x} \\ &= \ln 2 + \ln 3 = \ln 6 \neq 1,\end{aligned}$$

所以当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 与 x 同阶但非等价无穷小, 应选(B).

(2) $f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$, $f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, 因为 $f(0^+), f(0^-)$ 均存在,

但 $f(0^+) \neq f(0^-)$, 所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点, 应选(B).

4. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 求下列函数的定义域:

- | | |
|----------------------|-------------------|
| (1) $f(e^x)$; | (2) $f(\ln x)$; |
| (3) $f(\arctan x)$; | (4) $f(\cos x)$. |

解 (1) 因为 $0 \leq e^x \leq 1$, 所以 $x \leq 0$, 即函数 $f(e^x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0]$.

(2) 因为 $0 \leq \ln x \leq 1$, 所以 $1 \leq x \leq e$, 即函数 $f(\ln x)$ 的定义域为 $[1, e]$.

(3) 因为 $0 \leq \arctan x \leq 1$, 所以 $0 \leq x \leq \tan 1$, 即函数 $f(\arctan x)$ 的定义域为 $[0, \tan 1]$.

(4) 因为 $0 \leq \cos x \leq 1$, 所以 $2n\pi - \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$, 即函数 $f(\cos x)$ 的定
义域为 $[2n\pi - \frac{\pi}{2}, 2n\pi + \frac{\pi}{2}]$, $n \in \mathbf{Z}$.

5. 设

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & x > 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ -x^2, & x > 0, \end{cases}$$

求 $f[f(x)]$, $g[g(x)]$, $f[g(x)]$, $g[f(x)]$.

解 因为 $f[f(x)] = \begin{cases} 0, & f(x) \leq 0, \\ f(x), & f(x) > 0, \end{cases}$ 而 $f(x) \geq 0$, $x \in \mathbf{R}$, 所以
 $f[f(x)] = f(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

因为 $g[g(x)] = \begin{cases} 0, & g(x) \leq 0, \\ -g^2(x), & g(x) > 0, \end{cases}$ 而 $g(x) \leq 0$, $x \in \mathbf{R}$, 所以
 $g[g(x)] = 0$, $x \in \mathbf{R}$.

因为 $f[g(x)] = \begin{cases} 0, & g(x) \leq 0, \\ g(x), & g(x) > 0, \end{cases}$ 而 $g(x) \leq 0$, $x \in \mathbf{R}$, 所以
 $f[g(x)] = 0$, $x \in \mathbf{R}$.

因为 $g[f(x)] = \begin{cases} 0, & f(x) \leq 0, \\ -f^2(x), & f(x) > 0, \end{cases}$ 而 $f(x) \geq 0$, $x \in \mathbf{R}$, 所以
 $g[f(x)] = g(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

6. 利用 $y = \sin x$ 的图形作出下列函数的图形:

$$(1) y = |\sin x|; \quad (2) y = \sin |x|; \quad (3) y = 2 \sin \frac{x}{2}.$$

解 (1) 作 $y = \sin x$ 的图形在 x 轴下方的部分关于 x 轴的轴对称图形即可得 $y = |\sin x|$ 的图形, 如图 1-14 所示.

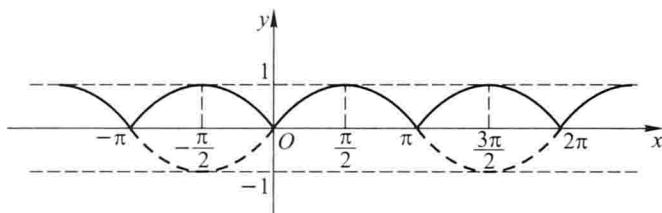


图 1-14

(2) 因为 $y = \sin |x|$ 为偶函数, 所以只要先画出 $y = \sin x$ 在 x 轴正方向上的图形, 再对它作关于 y 轴的轴对称图形即可, 如图 1-15 所示.

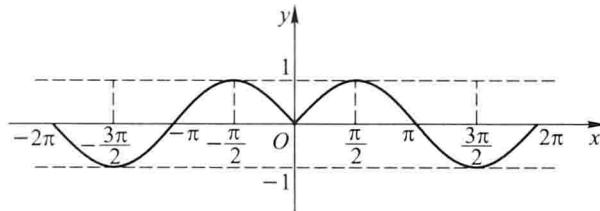


图 1-15

(3) 将 $y = \sin x$ 的图形的振幅增大为 2, 周期增大为 4π , 如图 1-16 所示.

7. 把半径为 R 的一圆形铁皮, 自圆心处剪去圆心角为 α 的一扇形后围成一无底圆锥. 试建立这圆锥的体积 V 与角 α 间的函数关系.

解 设围成的圆锥底半径为 r , 高为 h , 则按题意(图 1-17)有

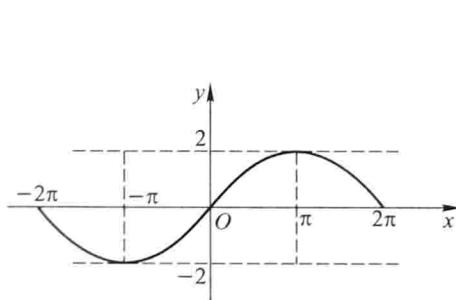


图 1-16

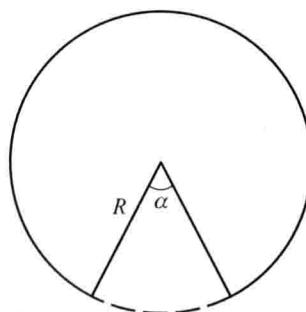


图 1-17

$$(2\pi - \alpha)R = 2\pi r,$$

$$h = \sqrt{R^2 - r^2}.$$

故

$$r = \frac{(2\pi - \alpha)R}{2\pi},$$

$$h = \sqrt{R^2 - \frac{(2\pi - \alpha)^2}{4\pi^2} R^2} = \frac{\sqrt{4\pi\alpha - \alpha^2}}{2\pi} R,$$

圆锥体积

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{(2\pi - \alpha)^2}{4\pi^2} R^2 \cdot \frac{\sqrt{4\pi\alpha - \alpha^2}}{2\pi} R \\ &= \frac{R^3}{24\pi^2} (2\pi - \alpha)^2 \sqrt{4\pi\alpha - \alpha^2} (0 < \alpha < 2\pi). \end{aligned}$$

8. 根据函数极限的定义证明 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = 5$.

证 因为

$$\left| \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} - 5 \right| = \left| \frac{(x-3)(x+2)}{x-3} - 5 \right| = |x-3|,$$

要使 $\left| \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} - 5 \right| < \varepsilon$, 只要 $|x-3| < \varepsilon$. 所以 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$, 则当 $0 < |x-3| < \delta$ 时, 就有

$$\left| \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} - 5 \right| < \varepsilon.$$

即 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = 5$.

9. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x);$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} (a > 0, b > 0, c > 0);$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} (a > 0);$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{\sqrt{1 - x^2} - 1}.$$

解 (1) 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x^2 - x + 1} = 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)^2} = \infty$.

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2x+1}{2}} \right)^{\frac{2x+1}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{\frac{1}{2}} = e.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sec x - 1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

(5) 因为

$$\left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} = \left(1 + \frac{a^x + b^x + c^x - 3}{3} \right)^{\frac{3}{a^x + b^x + c^x - 3} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{a^x - 1}{x} + \frac{b^x - 1}{x} + \frac{c^x - 1}{x} \right)},$$

而

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{a^x + b^x + c^x - 3}{3} \right)^{\frac{3}{a^x + b^x + c^x - 3}} \rightarrow e (x \rightarrow 0), \\ & \frac{a^x - 1}{x} \rightarrow \ln a, \quad \frac{b^x - 1}{x} \rightarrow \ln b, \quad \frac{c^x - 1}{x} \rightarrow \ln c (x \rightarrow 0), \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{3}(\ln a + \ln b + \ln c)} = (abc)^{\frac{1}{3}}.$$

(6) 因为 $(\sin x)^{\tan x} = [1 + (\sin x - 1)]^{\frac{1}{\sin x - 1} \cdot (\sin x - 1) \tan x}$, 而

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [1 + (\sin x - 1)]^{\frac{1}{\sin x - 1}} = e,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x - 1) \tan x &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \sin \frac{\pi}{2}}{\sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)} \cdot \sin x \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin \frac{x - \frac{\pi}{2}}{2} \cos \frac{x + \frac{\pi}{2}}{2}}{2 \sin \frac{x + \frac{\pi}{2}}{2} \cos \frac{x + \frac{\pi}{2}}{2}} \cdot \sin x \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right)}{\sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} \cdot \sin x = 0, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x} = e^0 = 1.$$

(7) 令 $x - a = t$, 则 $x = a + t$, 当 $x \rightarrow a$ 时, $t \rightarrow 0$. 故

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{t}{a}\right)}{t} = \frac{1}{a} \lim_{t \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{t}{a}\right)^{\frac{a}{t}} = \frac{1}{a}.$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{\sqrt{1 - x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -2.$$

10. 设

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ a + x^2, & x \leq 0, \end{cases}$$

要使 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 应当怎样选择数 a ?

解 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 及 $(0, +\infty)$ 内均连续, 要使 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 只要选择数 a , 使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续即可. 而

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a + x^2) = a,$$

又 $f(0) = a$, 故应选择 $a = 0$, 使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 从而 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

11. 设

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}},$$

求 $f(x)$ 的间断点, 并说明间断点所属类型.

$$\text{解 } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}} = \begin{cases} 1+x, & \text{当 } |x| < 1 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } |x| > 1 \text{ 或 } x = -1 \text{ 时,} \\ 1, & \text{当 } x = 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

$x = \pm 1$ 为分段函数的分段点. $x = -1$ 处, 因为 $f(-1^-) = f(-1^+) = f(-1) = 0$, 所以 $x = -1$ 为连续点; $x = 1$ 处, 因为 $f(1^-) = 2, f(1^+) = 0, f(1^-) \neq f(1^+)$, 所以 $x = 1$ 为 $f(x)$ 的间断点, 属第一类间断点, 是跳跃间断点.

12. 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1.$$

证 因为 $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < 1$, 而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1,$$

由夹逼准则, 即得证.

13. 证明方程 $\sin x + x + 1 = 0$ 在开区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个根.

证 设 $f(x) = \sin x + x + 1$, 则 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上连续. 因为

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} + 1 = -\frac{\pi}{2} < 0,$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + 1 = \frac{\pi}{2} + 2 > 0,$$

由介值定理, 至少存在一点 $\xi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 使 $f(\xi) = 0$, 即 $\sin \xi + \xi + 1 = 0$. 所以方程 $\sin x + x + 1 = 0$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个根.

14. 如果存在直线 $L: y = kx + b$, 使得当 $x \rightarrow \infty$ (或 $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$) 时, 曲线 $y = f(x)$ 上的动点 $M(x, y)$ 到直线 L 的距离 $d(M, L) \rightarrow 0$, 则称 L 为曲线 $y = f(x)$ 的渐近线. 当直线 L 的斜率 $k \neq 0$ 时, 称 L 为斜渐近线.

(1) 证明: 直线 $L: y = kx + b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的渐近线的充分必要条件是

$$k = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (x \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty)}} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (x \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty)}} [f(x) - kx];$$

(2) 求曲线 $y = (2x - 1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线.

解 (1) 就 $x \rightarrow +\infty$ 的情形证明, 其他情形类似.

设 $L: y = kx + b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的渐近线.

1° 若 $k \neq 0$, 如图 1-18 所示, $k = \tan \alpha$ (α 为 L 的倾角, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$), 曲线 $y = f(x)$ 上

动点 $M(x, y)$ 到直线 L 的距离为 $|MK|$. 过 M 作横轴的垂线, 交直线 L 于 K_1 , 则

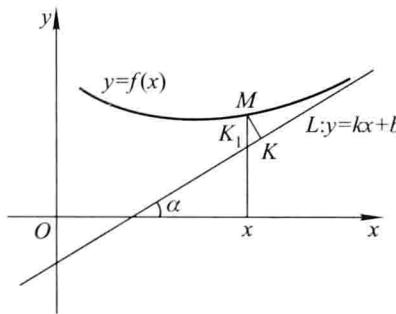


图 1-18

$$|MK_1| = \frac{|MK|}{\cos \alpha}.$$

显然 $|MK| \rightarrow 0$ ($x \rightarrow +\infty$) 与 $|MK_1| \rightarrow 0$ ($x \rightarrow +\infty$) 等价, 而

$$|MK_1| = |f(x) - (kx + b)|.$$

因为 $L: y = kx + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的渐近线, 所以

$$|MK| \rightarrow 0 (x \rightarrow +\infty) \Rightarrow |MK_1| \rightarrow 0 (x \rightarrow +\infty),$$

即

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0, \quad (1)$$

从而

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (kx + b)] + b = 0 + b = b, \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} [f(x) - kx] + k = 0 + k = k. \quad (3)$$

反之,若(2)、(3)成立,则(1)成立,即 $L:y = kx + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的渐近线.

2°若 $k = 0$,设 $L:y = b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线,如图 1-19 所示.按定义有 $|MK| \rightarrow 0 (x \rightarrow +\infty)$,而 $|MK| = |f(x) - b|$,故有

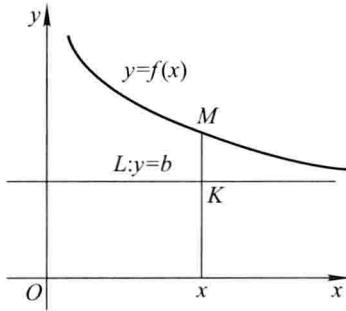


图 1-19

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b, \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0. \quad (5)$$

反之,若(4)、(5)成立,即有 $|MK| = |f(x) - b| \rightarrow 0 (x \rightarrow +\infty)$,故 $y = b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线.

(2) 因为

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)e^{\frac{1}{x}}}{x} = 2,$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow \infty} [(2x-1)e^{\frac{1}{x}} - 2x] = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x(e^{\frac{1}{x}} - 1) - \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} - 1 = 2 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} - 1 = 2 \ln e - 1 = 1, \end{aligned}$$

所以,所求曲线的斜渐近线为 $y = 2x + 1$.

第二章 导数与微分

习题 2-1

导数概念

1. 设物体绕定轴旋转, 在时间间隔 $[0, t]$ 上转过角度 θ , 从而转角 θ 是 t 的函数: $\theta = \theta(t)$. 如果旋转是匀速的, 那么称 $\omega = \frac{\theta}{t}$ 为该物体旋转的角速度. 如果旋转是非匀速的, 应怎样确定该物体在时刻 t_0 的角速度?

解 物体在时间间隔 $[t_0, t_0 + \Delta t]$ 上的平均角速度

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta(t_0 + \Delta t) - \theta(t_0)}{\Delta t}.$$

在时刻 t_0 的角速度

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \theta'(t_0).$$

2. 当物体的温度高于周围介质的温度时, 物体就不断冷却. 若物体的温度 T 与时间 t 的函数关系为 $T = T(t)$, 应怎样确定该物体在时刻 t 的冷却速度?

解 物体在时间间隔 $[t, t + \Delta t]$ 上平均冷却速度

$$\bar{v} = \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t}.$$

在时刻 t 的冷却速度

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t} = T'(t).$$

3. 设某工厂生产 x 件产品的成本为

$$C(x) = 2000 + 100x - 0.1x^2 \text{ (元)},$$

函数 $C(x)$ 称为成本函数, 成本函数 $C(x)$ 的导数 $C'(x)$ 在经济学中称为边际成本. 试求

- (1) 当生产 100 件产品时的边际成本;
- (2) 生产第 101 件产品的成本, 并与(1)中求得的边际成本作比较, 说明边际成本的实际意义.

解 (1) $C'(x) = 100 - 0.2x$,

$$C'(100) = 100 - 20 = 80 \text{ (元/件)}.$$

$$(2) C(101) = 2000 + 100 \times 101 - 0.1 \times (101)^2 = 11079.9 \text{ (元)},$$

$$C(100) = 2000 + 100 \times 100 - 0.1 \times (100)^2 = 11000 \text{ (元)},$$

$$C(101) - C(100) = 11079.9 - 11000 = 79.9 \text{ (元)}.$$

即生产第 101 件产品的成本为 79.9 元,与(1)中求得的边际成本比较,可以看出边际成本 $C'(x)$ 的实际意义是近似表达产量达到 x 单位时再增加一个单位产品所需的成本.

4. 设 $f(x) = 10x^2$, 试按定义求 $f'(-1)$.

$$\begin{aligned} \text{解 } f'(-1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{10(-1 + \Delta x)^2 - 10(-1)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-20\Delta x + 10(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-20 + 10\Delta x) = -20. \end{aligned}$$

5. 证明 $(\cos x)' = -\sin x$.

$$\begin{aligned} \text{证 } (\cos x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[-\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \right] \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x. \end{aligned}$$

6. 下列各题中均假定 $f'(x_0)$ 存在,按照导数定义观察下列极限,指出 A 表示什么:

$$(1) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A, \text{其中 } f(0) = 0, \text{且 } f'(0) \text{ 存在};$$

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h} = A.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) A &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= - \lim_{-\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + (-\Delta x)) - f(x_0)}{-\Delta x} = -f'(x_0). \end{aligned}$$

$$(2) \text{由于 } f(0) = 0, \text{故 } A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0).$$

$$\begin{aligned} (3) A &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \lim_{-h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + (-h)) - f(x_0)}{-h} \\ &= 2f'(x_0). \end{aligned}$$

以下两题中给出了四个结论,从中选出一个正确的结论:

7. 设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x^3, & x \leq 1, \\ x^2, & x > 1, \end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的() .

- (A) 左、右导数都存在 (B) 左导数存在, 右导数不存在
 (C) 左导数不存在, 右导数存在 (D) 左、右导数都不存在

$$\begin{aligned} \text{解 } f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{3} \cdot \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{3} (x^2 + x + 1) = 2; \\ f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - \frac{2}{3}}{x - 1} = \infty, \end{aligned}$$

故该函数左导数存在, 右导数不存在, 因此应选 (B).

8. 设 $f(x)$ 可导, $F(x) = f(x)(1 + |\sin x|)$, 则 $f(0) = 0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的().

- (A) 充分必要条件 (B) 充分条件但非必要条件
 (C) 必要条件但非充分条件 (D) 既非充分条件又非必要条件

$$\begin{aligned} \text{解 } F'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)(1 + \sin x) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x} + f(x) \frac{\sin x}{x} \right] = f'(0) + f(0), \\ F'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)(1 - \sin x) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x} - f(x) \frac{\sin x}{x} \right] = f'(0) - f(0). \end{aligned}$$

当 $f(0) = 0$ 时, $F'_+(0) = F'_-(0)$, 反之当 $F'_+(0) = F'_-(0)$ 时, $f(0) = 0$, 因此应选 (A).

9. 求下列函数的导数:

$$(1) y = x^4; \quad (2) y = \sqrt[3]{x^2}; \quad (3) y = x^{1.6};$$

$$(4) y = \frac{1}{\sqrt{x}}; \quad (5) y = \frac{1}{x^2}; \quad (6) y = x^3 \sqrt[5]{x};$$

$$(7) y = \frac{x^2 \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^5}}.$$

$$\text{解 } (1) y' = 4x^3.$$

$$(2) y = x^{\frac{2}{3}}, y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}.$$

$$(3) \quad y' = 1.6x^{0.6}.$$

$$(4) \quad y = x^{-\frac{1}{2}}, \quad y' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}.$$

$$(5) \quad y = x^{-2}, \quad y' = -2x^{-3}.$$

$$(6) \quad y = x^{\frac{16}{5}}, \quad y' = \frac{16}{5}x^{\frac{11}{5}}.$$

$$(7) \quad y = x^{2+\frac{2}{3}-\frac{5}{2}} = x^{\frac{1}{6}}, \quad y' = \frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}.$$

10. 已知物体的运动规律为 $s = t^3$ m, 求这物体在 $t = 2$ s 时的速度.

解 $v = \frac{ds}{dt} = 3t^2, \quad v|_{t=2} = 12$ (m/s).

11. 如果 $f(x)$ 为偶函数, 且 $f'(0)$ 存在, 证明 $f'(0) = 0$.

证 $f(x)$ 为偶函数, 故有 $f(-x) = f(x)$. 因为

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(-x) - f(0)}{x - 0} \\ &= - \lim_{-x \rightarrow 0} \frac{f(-x) - f(0)}{-x - 0} \\ &= -f'(0), \end{aligned}$$

所以 $f'(0) = 0$.

12. 求曲线 $y = \sin x$ 在具有下列横坐标的各点处切线的斜率:

$$x = \frac{2}{3}\pi, \quad x = \pi.$$

解 由导数的几何意义知

$$k_1 = y'|_{x=\frac{2}{3}\pi} = \cos x|_{x=\frac{2}{3}\pi} = -\frac{1}{2}, \quad k_2 = y'|_{x=\pi} = \cos x|_{x=\pi} = -1.$$

13. 求曲线 $y = \cos x$ 上点 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$ 处的切线方程和法线方程.

解 $y'|_{x=\frac{\pi}{3}} = (-\sin x)|_{x=\frac{\pi}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$

故曲线在点 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$ 处的切线方程为

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{3} \right),$$

$$\text{即 } \frac{\sqrt{3}}{2}x + y - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi \right) = 0.$$

曲线在点 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$ 处的法线方程为

$$y - \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{\pi}{3} \right),$$

$$\text{即 } \frac{2\sqrt{3}}{3}x - y + \frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi = 0.$$

14. 求曲线 $y = e^x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程.

解 $y' |_{x=0} = e^x |_{x=0} = 1,$

故曲线在 $(0, 1)$ 处的切线方程为

$$y - 1 = 1 \cdot (x - 0),$$

即 $x - y + 1 = 0.$

15. 在抛物线 $y = x^2$ 上取横坐标为 $x_1 = 1$ 及 $x_2 = 3$ 的两点, 作过这两点的割线. 问该抛物线上哪一点的切线平行于这条割线?

解 割线的斜率

$$k = \frac{3^2 - 1^2}{3 - 1} = \frac{8}{2} = 4.$$

假设抛物线上点 (x_0, x_0^2) 处的切线平行于该割线, 则有

$$(x^2)' |_{x=x_0} = 4, \text{ 即 } 2x_0 = 4.$$

故 $x_0 = 2$, 由此得所求点为 $(2, 4).$

16. 讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性与可导性:

(1) $y = |\sin x|;$

(2) $y = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |\sin x| = 0 = f(0)$, 故 $y = |\sin x|$ 在 $x=0$ 处连续. 又

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x}{x} = -1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$f'_-(0) \neq f'_+(0)$, 故 $y = |\sin x|$ 在 $x=0$ 处不可导.

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0)$, 故函数在 $x=0$ 处连续. 又

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

故函数在 $x=0$ 处可导.

17. 设函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ ax + b, & x > 1. \end{cases}$$

为了使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且可导, a 、 b 应取什么值?

解 要函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 应有

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1),$$

即 $1 = a + b$.

要函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 应有 $f'_-(1) = f'_+(1)$. 而

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2, \\ f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax + b - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a(x - 1) + a + b - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a(x - 1)}{x - 1} = a. \end{aligned}$$

故 $a = 2, b = -1$.

18. 已知 $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0, \end{cases}$ 求 $f'_+(0)$ 及 $f'_-(0)$, 又 $f'(0)$ 是否存在?

解 $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x} = -1,$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 0}{x} = 0.$$

由于 $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, 故 $f'(0)$ 不存在.

19. 已知 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0, \end{cases}$ 求 $f'(x)$.

解 $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x - 0}{x} = 1,$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x} = 1.$$

由于 $f'_-(0) = f'_+(0) = 1$, 故 $f'(0) = 1$. 因此

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

20. 证明: 双曲线 $xy = a^2$ 上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形的面积都等于 $2a^2$.

证 设 (x_0, y_0) 为双曲线 $xy = a^2$ 上任一点, 曲线在该点处的切线斜率

$$k = \left. \left(\frac{a^2}{x} \right)' \right|_{x=x_0} = -\frac{a^2}{x_0^2},$$

切线方程为

$$y - y_0 = -\frac{a^2}{x_0^2}(x - x_0) \text{ 或 } \frac{x}{2x_0} + \frac{y}{2y_0} = 1,$$

由此可得所构成的三角形的面积为

$$A = \frac{1}{2} |2x_0| |2y_0| = 2a^2.$$

习题 2-2

函数的求导法则

1. 推导余切函数及余割函数的导数公式:

$$(\cot x)' = -\csc^2 x, \quad (\csc x)' = -\csc x \cot x.$$

$$\text{解 } (\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x.$$

$$(\csc x)' = \left(\frac{1}{\sin x} \right)' = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\csc x \cot x.$$

2. 求下列函数的导数:

$$(1) \quad y = x^3 + \frac{7}{x^4} - \frac{2}{x} + 12;$$

$$(2) \quad y = 5x^3 - 2^x + 3e^x;$$

$$(3) \quad y = 2\tan x + \sec x - 1;$$

$$(4) \quad y = \sin x \cos x;$$

$$(5) \quad y = x^2 \ln x;$$

$$(6) \quad y = 3e^x \cos x;$$

$$(7) \quad y = \frac{\ln x}{x};$$

$$(8) \quad y = \frac{e^x}{x^2} + \ln 3;$$

$$(9) \quad y = x^2 \ln x \cos x;$$

$$(10) \quad s = \frac{1 + \sin t}{1 + \cos t}.$$

$$\text{解 } (1) \quad y' = 3x^2 - \frac{28}{x^5} + \frac{2}{x^2}.$$

$$(2) \quad y' = 15x^2 - 2^x \ln 2 + 3e^x.$$

$$(3) \quad y' = 2\sec^2 x + \sec x \tan x = \sec x (2\sec x + \tan x).$$

$$(4) \quad y' = \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right)' = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos 2x = \cos 2x.$$

$$(5) \quad y' = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1).$$

$$(6) \quad y' = 3e^x \cos x - 3e^x \sin x = 3e^x (\cos x - \sin x).$$

$$(7) \quad y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

$$(8) \quad y' = \frac{e^x \cdot x^2 - 2xe^x}{x^4} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}.$$

$$(9) \quad y' = 2x \ln x \cos x + x^2 \cdot \frac{1}{x} \cos x + x^2 \ln x (-\sin x)$$

$$= 2x \ln x \cos x + x \cos x - x^2 \ln x \sin x.$$

$$(10) \quad s' = \frac{\cos t(1 + \cos t) - (1 + \sin t)(-\sin t)}{(1 + \cos t)^2} = \frac{1 + \sin t + \cos t}{(1 + \cos t)^2}.$$

3. 求下列函数在给定点处的导数:

$$(1) \quad y = \sin x - \cos x, \text{求 } y'|_{x=\frac{\pi}{6}} \text{ 和 } y'|_{x=\frac{\pi}{4}};$$

$$(2) \quad \rho = \theta \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta, \text{求 } \left. \frac{d\rho}{d\theta} \right|_{\theta=\frac{\pi}{4}};$$

$$(3) \quad f(x) = \frac{3}{5-x} + \frac{x^2}{5}, \text{求 } f'(0) \text{ 和 } f'(2).$$

$$\text{解} \quad (1) \quad y' = \cos x + \sin x, \quad y'|_{x=\frac{\pi}{6}} = \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}+1}{2},$$

$$y'|_{x=\frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}.$$

$$(2) \quad \left. \frac{d\rho}{d\theta} \right|_{\theta=0} = \sin \theta + \theta \cos \theta + \frac{1}{2}(-\sin \theta) = \frac{1}{2} \sin \theta + \theta \cos \theta,$$

$$\left. \frac{d\rho}{d\theta} \right|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(1 + \frac{\pi}{2} \right).$$

$$(3) \quad f'(x) = \frac{3}{(5-x)^2} + \frac{2}{5}x, \quad f'(0) = \frac{3}{25}, \quad f'(2) = \frac{1}{3} + \frac{4}{5} = \frac{17}{15}.$$

4. 以初速 v_0 竖直上抛的物体, 其上升高度 s 与时间 t 的关系是 $s = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$. 求:

(1) 该物体的速度 $v(t)$; (2) 该物体达到最高点的时刻.

$$\text{解} \quad (1) \quad v(t) = \frac{ds}{dt} = v_0 - gt.$$

$$(2) \quad \text{物体达到最高点的时刻 } v=0, \text{ 即 } v_0 - gt = 0, \text{ 故 } t = \frac{v_0}{g}.$$

5. 求曲线 $y = 2 \sin x + x^2$ 上横坐标为 $x=0$ 的点处的切线方程和法线方程.

解

$$y' = 2 \cos x + 2x, \quad y'|_{x=0} = 2, \quad y|_{x=0} = 0,$$

因此曲线在点 $(0,0)$ 处的切线方程为

$$y - 0 = 2(x - 0),$$

即 $2x - y = 0$, 法线方程为

$$y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 0),$$

即 $x + 2y = 0$.

6. 求下列函数的导数:

$$(1) \quad y = (2x + 5)^4;$$

$$(2) \quad y = \cos(4 - 3x);$$

$$(3) \quad y = e^{-3x^2};$$

$$(4) \quad y = \ln(1 + x^2);$$

(5) $y = \sin^2 x;$

(6) $y = \sqrt{a^2 - x^2};$

(7) $y = \tan x^2;$

(8) $y = \arctan(e^x);$

(9) $y = (\arcsin x)^2;$

(10) $y = \ln \cos x.$

解 (1) $y' = 4(2x+5)^3 + 2 = 8(2x+5)^3.$

(2) $y' = -\sin(4-3x)(-3) = 3\sin(4-3x).$

(3) $y' = e^{-3x^2} + (-6x) = -6xe^{-3x^2}.$

(4) $y' = \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2}.$

(5) $y' = 2\sin x \cos x = \sin 2x.$

(6) $y' = \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$

(7) $y' = \sec^2 x^2 + 2x = 2x \sec^2 x^2.$

(8) $y' = \frac{1}{1+(e^x)^2} \cdot e^x = \frac{e^x}{1+e^{2x}}.$

(9) $y' = 2\arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x.$

(10) $y' = \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = -\tan x.$

7. 求下列函数的导数:

(1) $y = \arcsin(1-2x);$

(2) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

(3) $y = e^{-\frac{x}{2}} \cos 3x;$

(4) $y = \arccos \frac{1}{x};$

(5) $y = \frac{1-\ln x}{1+\ln x};$

(6) $y = \frac{\sin 2x}{x};$

(7) $y = \arcsin \sqrt{x};$

(8) $y = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2});$

(9) $y = \ln(\sec x + \tan x);$

(10) $y = \ln(\csc x - \cot x).$

解 (1) $y' = \frac{1}{\sqrt{1-(1-2x)^2}} \cdot (-2) = -\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$

(2) $y' = \frac{-\frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}}{(\sqrt{1-x^2})^2} = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$

(3) $y' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} \cos 3x - 3e^{-\frac{x}{2}} \sin 3x$

$$= -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(\cos 3x + 6\sin 3x).$$

$$(4) y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{|x|}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$(5) y' = \frac{-\frac{1}{x}(1 + \ln x) - (1 - \ln x) \cdot \frac{1}{x}}{(1 + \ln x)^2} = -\frac{2}{x(1 + \ln x)^2}.$$

$$(6) y' = \frac{2x \cos 2x - \sin 2x}{x^2}.$$

$$(7) y' = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x - x^2}}.$$

$$(8) y' = \frac{1}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}}\right) = \frac{1}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} \cdot \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{\sqrt{a^2 + x^2}} \\ = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

$$(9) y' = \frac{1}{\sec x + \tan x} (\sec x \tan x + \sec^2 x) = \sec x.$$

$$(10) y' = \frac{1}{\csc x - \cot x} (-\csc x \cot x + \csc^2 x) = \csc x.$$

8. 求下列函数的导数：

$$(1) y = \left(\arcsin \frac{x}{2}\right)^2;$$

$$(2) y = \ln \tan \frac{x}{2};$$

$$(3) y = \sqrt{1 + \ln^2 x};$$

$$(4) y = e^{\arctan \sqrt{x}};$$

$$(5) y = \sin^n x \cos nx;$$

$$(6) y = \arctan \frac{x+1}{x-1};$$

$$(7) y = \frac{\arcsin x}{\arccos x};$$

$$(8) y = \ln \ln \ln x;$$

$$(9) y = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}};$$

$$(10) y = \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

$$\text{解 } (1) y' = 2 \arcsin \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 \arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

$$(2) y' = \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \cdot \sec^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x} = \csc x.$$

$$(3) y' = \frac{1}{2\sqrt{1 + \ln^2 x}} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x \sqrt{1 + \ln^2 x}}.$$

$$(4) \quad y' = e^{\arctan \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} e^{\arctan \sqrt{x}}.$$

$$\begin{aligned} (5) \quad y' &= n \sin^{n-1} x \cos x \cos nx + \sin^n x (-\sin nx) \cdot n \\ &= n \sin^{n-1} x (\cos x \cos nx - \sin x \sin nx) \\ &= n \sin^{n-1} x \cos (n+1)x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \quad y' &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2 + (x+1)^2} \\ &= -\frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (7) \quad y' &= \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arccos x - \arcsin x \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right)}{(\arccos x)^2} \\ &= \frac{\arccos x + \arcsin x}{\sqrt{1-x^2} (\arccos x)^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2} (\arccos x)^2}. \end{aligned}$$

$$(8) \quad y' = \frac{1}{\ln \ln x} \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x \ln \ln x}.$$

$$\begin{aligned} (9) \quad y' &= \\ &\left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \right) (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) - (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) \left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}} (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2 + \frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}} (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^2}{2 + 2\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{4} \frac{2+2}{(1+\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (10) \quad y' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2x(1+x)}\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}. \end{aligned}$$

9. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 可导, 且 $f^2(x) + g^2(x) \neq 0$, 试求函数 $y = \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$ 的导数.

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{2\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}} [2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x)] \\ &= \frac{f(x)f'(x) + g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}}. \end{aligned}$$

10. 设 $f(x)$ 可导, 求下列函数的导数 $\frac{dy}{dx}$:

$$(1) \quad y = f(x^2); \quad (2) \quad y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x).$$

$$\text{解 } (1) \quad y' = f'(x^2)2x = 2xf'(x^2).$$

$$\begin{aligned} (2) \quad y' &= f'(\sin^2 x)2\sin x \cos x + f'(\cos^2 x)2\cos x(-\sin x) \\ &= \sin 2x[f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)]. \end{aligned}$$

11. 求下列函数的导数:

$$(1) \quad y = e^{-x}(x^2 - 2x + 3);$$

$$(2) \quad y = \sin^2 x \cdot \sin(x^2);$$

$$(3) \quad y = \left(\arctan \frac{x}{2}\right)^2;$$

$$(4) \quad y = \frac{\ln x}{x^n};$$

$$(5) \quad y = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}};$$

$$(6) \quad y = \ln \cos \frac{1}{x};$$

$$(7) \quad y = e^{-\sin^2 \frac{1}{x}};$$

$$(8) \quad y = \sqrt{x + \sqrt{x}};$$

$$(9) \quad y = x \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{4 - x^2};$$

$$(10) \quad y = \arcsin \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\text{解 } (1) \quad y' = -e^{-x}(x^2 - 2x + 3) + e^{-x}(2x - 2) = e^{-x}(-x^2 + 4x - 5).$$

$$\begin{aligned} (2) \quad y' &= 2\sin x \cos x \cdot \sin(x^2) + \sin^2 x \cos(x^2) \cdot 2x \\ &= \sin 2x \sin(x^2) + 2x \sin^2 x \cos(x^2). \end{aligned}$$

$$(3) \quad y' = 2\arctan \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{4+x^2} \arctan \frac{x}{2}.$$

$$(4) \quad y' = \frac{\frac{1}{x}x^n - nx^{n-1}\ln x}{x^{2n}} = \frac{1 - n\ln x}{x^{n+1}}.$$

$$\begin{aligned} (5) \quad y' &= \frac{(e^t + e^{-t})(e^t + e^{-t}) - (e^t - e^{-t})(e^t - e^{-t})}{(e^t + e^{-t})^2} \\ &= \frac{4}{(e^t + e^{-t})^2}. \end{aligned}$$

$$\text{或 } y' = (\operatorname{th} t)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}.$$

$$(6) \quad y' = \frac{1}{\cos \frac{1}{x}} \left(-\sin \frac{1}{x} \right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{x^2} \tan \frac{1}{x}.$$

$$(7) \quad y' = e^{-\sin^2 \frac{1}{x}} \left(-2 \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{2}{x} e^{-\sin^2 \frac{1}{x}}.$$

$$(8) \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}.$$

$$(9) \quad y' = \arcsin \frac{x}{2} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{(-2x)}{2\sqrt{4-x^2}}$$

$$= \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin \frac{x}{2}.$$

$$(10) \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+t^2) - 2t \cdot 2t}{(1+t^2)^2}$$

$$= \frac{1+t^2}{\sqrt{(1-t^2)^2}} \cdot \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = \frac{2(1-t^2)}{|1-t^2|(1+t^2)}$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{1+t^2}, & |t| < 1, \\ -\frac{2}{1+t^2}, & |t| > 1. \end{cases}$$

12. 求下列函数的导数:

$$(1) \quad y = \operatorname{ch}(\operatorname{sh} x);$$

$$(2) \quad y = \operatorname{sh} x \cdot e^{\operatorname{ch} x};$$

$$(3) \quad y = \operatorname{th}(\ln x);$$

$$(4) \quad y = \operatorname{sh}^3 x + \operatorname{ch}^2 x;$$

$$(5) \quad y = \operatorname{th}(1-x^2);$$

$$(6) \quad y = \operatorname{arsh}(x^2+1);$$

$$(7) \quad y = \operatorname{arch}(e^{2x});$$

$$(8) \quad y = \operatorname{arctan}(\operatorname{th} x);$$

$$(9) \quad y = \ln \operatorname{ch} x + \frac{1}{2\operatorname{ch}^2 x};$$

$$(10) \quad y = \operatorname{ch}^2 \left(\frac{x-1}{x+1} \right).$$

$$\text{解 } (1) \quad y' = \operatorname{sh}(\operatorname{sh} x) \cdot \operatorname{ch} x = \operatorname{ch} x \operatorname{sh}(\operatorname{sh} x).$$

$$(2) \quad y' = \operatorname{ch} x e^{\operatorname{ch} x} + \operatorname{sh} x e^{\operatorname{ch} x} \operatorname{sh} x = e^{\operatorname{ch} x} (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh}^2 x).$$

$$(3) \quad y' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(\ln x)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \operatorname{ch}^2(\ln x)}.$$

$$(4) \quad y' = 3\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch} x + 2\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x (3\operatorname{sh} x + 2).$$

$$(5) \quad y' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(1-x^2)} \cdot (-2x) = -\frac{2x}{\operatorname{ch}^2(1-x^2)}.$$

$$(6) \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1+(x^2+1)^2}} \cdot 2x = \frac{2x}{\sqrt{x^4+2x^2+2}}.$$

$$(7) \quad y' = \frac{1}{\sqrt{(e^{2x})^2-1}} \cdot e^{2x} \cdot 2 = \frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}-1}}.$$

$$(8) \quad y' = \frac{1}{1 + (\operatorname{th} x)^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{1 + \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x}$$

$$= \frac{1}{1 + 2\operatorname{sh}^2 x}.$$

$$(9) \quad y' = \frac{1}{\operatorname{ch} x} \operatorname{sh} x - \frac{1}{(2\operatorname{ch}^2 x)^2} \cdot 4\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} - \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x}$$

$$= \frac{\operatorname{sh} x(\operatorname{ch}^2 x - 1)}{\operatorname{ch}^3 x} = \frac{\operatorname{sh}^3 x}{\operatorname{ch}^3 x} = \operatorname{th}^3 x.$$

$$(10) \quad y' = 2\operatorname{ch}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \cdot \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2}{(x+1)^2} \operatorname{sh}\left(2 \cdot \frac{x-1}{x+1}\right).$$

 13. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在点 x_0 的某一邻域内有定义, $f(x)$ 在 x_0 处可导, $f(x_0) = 0$, $g(x)$ 在 x_0 处连续, 试讨论 $f(x)g(x)$ 在 x_0 处的可导性.

解 由 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且 $f(x_0) = 0$, 则有

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{x - x_0};$$

由 $g(x)$ 在 x_0 处连续, 则有 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$, 故

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{x - x_0} g(x) = f'(x_0)g(x_0),$$

即 $f(x)g(x)$ 在 x_0 处可导, 其导数为 $f'(x_0)g(x_0)$.

 14. 设函数 $f(x)$ 满足下列条件:

(1) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, 对一切 $x, y \in \mathbf{R}$;

(2) $f(x) = 1 + xg(x)$, 而 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$.

试证明 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上处处可导, 且 $f'(x) = f(x)$.

证 由(2)知 $f(0) = 1$, 故

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)f(\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[f(x) \cdot \frac{f(\Delta x) - 1}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[f(x) \cdot \frac{\Delta x g(\Delta x)}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x)g(\Delta x)] = f(x) \cdot 1 = f(x). \end{aligned}$$

习题 2-3

高阶导数

 1. 求下列函数的二阶导数:

$$(1) \quad y = 2x^2 + \ln x; \quad (2) \quad y = e^{2x-1};$$

(3) $y = x \cos x;$

(4) $y = e^{-t} \sin t;$

(5) $y = \sqrt{a^2 - x^2};$

(6) $y = \ln(1 - x^2);$

(7) $y = \tan x;$

(8) $y = \frac{1}{x^3 + 1};$

(9) $y = (1 + x^2) \arctan x;$

(10) $y = \frac{e^x}{x};$

(11) $y = x e^{x^2};$

(12) $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$

解 (1) $y' = 4x + \frac{1}{x}, y'' = 4 - \frac{1}{x^2}.$

(2) $y' = e^{2x-1} \cdot 2 = 2e^{2x-1}, y'' = 2e^{2x-1} \cdot 2 = 4e^{2x-1}.$

(3) $y' = \cos x + x(-\sin x) = \cos x - x \sin x,$

$y'' = -\sin x - \sin x - x \cos x = -2\sin x - x \cos x.$

(4) $y' = e^{-t}(-1) \sin t + e^{-t} \cos t = e^{-t}(\cos t - \sin t),$
 $y'' = e^{-t}(-1)(\cos t - \sin t) + e^{-t}(-\sin t - \cos t)$
 $= e^{-t}(-2\cos t) = -2e^{-t}\cos t.$

(5) $y' = \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$

$y'' = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2} - x \cdot \frac{(-2x)}{2\sqrt{a^2 - x^2}}}{(\sqrt{a^2 - x^2})^2} = \frac{-a^2}{(a^2 - x^2)^{3/2}}.$

(6) $y' = \frac{1}{1 - x^2} \cdot (-2x) = \frac{2x}{x^2 - 1},$

$y'' = \frac{2(x^2 - 1) - 2x \cdot (2x)}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{2(1 + x^2)}{(1 - x^2)^2}.$

(7) $y' = \sec^2 x, y'' = 2\sec^2 x \tan x.$

(8) $y' = \frac{-3x^2}{(x^3 + 1)^2},$

$y'' = -\frac{3[2x(x^3 + 1)^2 - x^2 \cdot 2(x^3 + 1) \cdot 3x^2]}{(x^3 + 1)^4} = \frac{6x(2x^3 - 1)}{(x^3 + 1)^3}.$

(9) $y' = 2x \arctan x + (1 + x^2) \cdot \frac{1}{1 + x^2} = 2x \arctan x + 1,$

$y'' = 2 \arctan x + 2x \frac{1}{1 + x^2} = 2 \arctan x + \frac{2x}{1 + x^2}.$

(10) $y' = \frac{x e^x - e^x}{x^2} = \frac{(x - 1)e^x}{x^2},$

$y'' = \frac{(e^x + (x - 1)e^x)x^2 - 2x(x - 1)e^x}{x^4} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}.$

$$(11) \quad y' = e^{x^2} + xe^{x^2} \cdot 2x = (1 + 2x^2)e^{x^2}, \\ y'' = 4xe^{x^2} + (1 + 2x^2)e^{x^2} \cdot 2x = 2x(3 + 2x^2)e^{x^2}.$$

$$(12) \quad y' = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \\ y'' = \frac{-\frac{2x}{\sqrt{1 + x^2}}}{(\sqrt{1 + x^2})^2} = -\frac{x}{\sqrt{(1 + x^2)^3}}.$$

2. 设 $f(x) = (x + 10)^6$, $f'''(2) = ?$

解 $f'(x) = 6(x + 10)^5$, $f''(x) = 30(x + 10)^4$, $f'''(x) = 120(x + 10)^3$,
 $f'''(2) = 120 \times 12^3 = 207360$.

3. 设 $f''(x)$ 存在, 求下列函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$$(1) \quad y = f(x^2); \quad (2) \quad y = \ln[f(x)].$$

解 (1) $y' = f'(x^2) \cdot 2x = 2xf'(x^2)$,
 $y'' = 2f'(x^2) + 2xf''(x^2) \cdot 2x$
 $= 2f'(x^2) + 4x^2f''(x^2)$.

$$(2) \quad y' = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad y'' = \frac{f''(x)f(x) - f'^2(x)}{f^2(x)}.$$

4. 试从 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$ 导出:

$$(1) \quad \frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{y''}{(y')^3}; \quad (2) \quad \frac{d^3x}{dy^3} = \frac{3(y'')^2 - y'y'''}{(y')^5}.$$

解 (1) $\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left(\frac{dx}{dy} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{y'} \right) \frac{dx}{dy} = -\frac{y''}{(y')^2} \cdot \frac{1}{y'} = -\frac{y''}{(y')^3}$.

$$(2) \quad \frac{d^3x}{dy^3} = \frac{d}{dy} \left(\frac{d^2x}{dy^2} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{-y''}{(y')^3} \right) \frac{dx}{dy} = -\frac{y'''(y')^3 - y'' \cdot 3(y')^2 y''}{(y')^6} \cdot \frac{1}{y'} \\ = \frac{3(y'')^2 - y'y'''}{(y')^5}.$$

5. 已知物体的运动规律为 $s = A \sin \omega t$ (A, ω 是常数), 求物体运动的加速度, 并验证:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = 0.$$

解 $\frac{ds}{dt} = A \cos \omega t \cdot \omega = A\omega \cos \omega t$, $\frac{d^2s}{dt^2} = -A\omega^2 \sin \omega t$,

故

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = -A\omega^2 \sin \omega t + \omega^2 A \sin \omega t = 0.$$

6. 密度大的陨星进入大气层时, 当它离地心为 s km 时的速度与 \sqrt{s} 成反比. 试证陨星

的加速度 a 与 s^2 成反比.

证 由题意知 $v = \frac{ds}{dt} = \frac{k}{\sqrt{s}}$, 其中 k 为比例系数, 则

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{k}{\sqrt{s}} \right) \cdot \frac{ds}{dt} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{k}{s^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{k}{\sqrt{s}} = -\frac{k^2}{2s^2},$$

即陨星的加速度与 s^2 成反比.

7. 假设质点沿 x 轴运动的速度为 $\frac{dx}{dt} = f(x)$, 试求质点运动的加速度.

解 质点运动的加速度为

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d}{dx} (f(x)) \frac{dx}{dt} = f'(x)f(x).$$

8. 验证函数 $y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$ (λ, C_1, C_2 是常数) 满足关系式

$$y'' - \lambda^2 y = 0.$$

解 $y' = C_1 \lambda e^{\lambda x} - C_2 \lambda e^{-\lambda x}$, $y'' = C_1 \lambda^2 e^{\lambda x} + C_2 \lambda^2 e^{-\lambda x}$,

故

$$y'' - \lambda^2 y = C_1 \lambda^2 e^{\lambda x} + C_2 \lambda^2 e^{-\lambda x} - \lambda^2 (C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}) = 0.$$

9. 验证函数 $y = e^x \sin x$ 满足关系式

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

解 $y' = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x)$,

$$y'' = e^x (\sin x + \cos x) + e^x (\cos x - \sin x) = 2e^x \cos x,$$

故

$$y'' - 2y' + 2y = 2e^x \cos x - 2e^x (\sin x + \cos x) + 2e^x \sin x = 0.$$

10. 求下列函数所指定的阶的导数:

$$(1) y = e^x \cos x, \text{求 } y^{(4)}; \quad (2) y = x^2 \sin 2x, \text{求 } y^{(50)}.$$

解 (1) 利用莱布尼茨公式 $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$, 其中, $C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$.

$$(e^x \cos x)^{(4)} = (e^x)^{(4)} \cos x + 4(e^x)^{(3)}(\cos x)' + \frac{4 \cdot 3}{2!}(e^x)''(\cos x)'' +$$

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!}(e^x)'(\cos x)''' + e^x(\cos x)^{(4)}$$

$$= e^x \cos x - 4e^x \sin x + 6e^x(-\cos x) + 4e^x \sin x + e^x \cos x$$

$$= -4e^x \cos x.$$

(2) 由 $(\sin 2x)^{(n)} = 2^n \sin \left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$ 及莱布尼茨公式得

$$(x^2 \sin 2x)^{(50)} = x^2 (\sin 2x)^{(50)} + 50(x^2)'(\sin 2x)^{(49)} + \frac{50 \cdot 49}{2!}(x^2)''(\sin 2x)^{(48)}$$

$$\begin{aligned}
&= 2^{50}x^2 \sin\left(2x + \frac{50\pi}{2}\right) + 100 \cdot 2^{49}x \sin\left(2x + \frac{49\pi}{2}\right) + \\
&\quad \frac{50 \cdot 49}{2} \cdot 2 \cdot 2^{48} \sin\left(2x + \frac{48\pi}{2}\right) \\
&= 2^{50}(-x^2 \sin 2x + 50x \cos 2x + \frac{1}{2} \cdot 225 \sin 2x).
\end{aligned}$$

11. 求下列函数的 n 阶导数的一般表达式:

$$(1) y = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \quad (a_1, a_2, \dots, a_n \text{ 都是常数});$$

$$(2) y = \sin^2 x; \quad (3) y = x \ln x; \quad (4) y = x e^x.$$

$$\text{解 } (1) y' = nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + a_2(n-2)x^{n-3} + \cdots + a_{n-1},$$

$$y'' = n(n-1)x^{n-2} + a_1(n-1)(n-2)x^{n-3} + \cdots + a_{n-2},$$

.....

$$y^{(n)} = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

$$(2) y = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x),$$

$$y^{(n)} = \frac{-1}{2} \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) \cdot 2^n$$

$$= -2^{n-1} \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

$$(3) y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1, y'' = \frac{1}{x},$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-1}} \quad (n \geq 2).$$

$$(4) y' = e^x + x e^x = (1+x)e^x, y'' = e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x.$$

设 $y^{(k)} = (k+x)e^x$, 则 $y^{(k+1)} = e^x + (k+x)e^x = (1+k+x)e^x$, 故 $y^{(n)} = (n+x)e^x$.

12. 求函数 $f(x) = x^2 \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)$ ($n \geq 3$).

解 本题可用莱布尼茨公式求解.

$$\text{设 } u = \ln(1+x), v = x^2, \text{ 则 } u^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} \quad (n=1, 2, \dots), v' = 2x, v'' = 2, v^{(k)} = 0 \quad (k \geq 3).$$

故由莱布尼茨公式, 得

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} \cdot x^2 + n \frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}} \cdot 2x +$$

$$\frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}} \cdot 2 \quad (n \geq 3)$$

$$f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2} \quad (n \geq 3).$$

习题 2-4

隐函数及由参数方程所确定的函数的导数
相关变化率

1. 求由下列方程所确定的隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$:

$$(1) \quad y^2 - 2xy + 9 = 0;$$

$$(2) \quad x^3 + y^3 - 3axy = 0;$$

$$(3) \quad xy = e^{x+y};$$

$$(4) \quad y = 1 - xe^y.$$

解 (1) 在方程两端分别对 x 求导, 得

$$2yy' - 2y - 2xy' = 0,$$

从而 $y' = \frac{y}{y-x}$, 其中 $y = y(x)$ 是由方程 $y^2 - 2xy + 9 = 0$ 所确定的隐函数.

(2) 在方程两端分别对 x 求导, 得

$$3x^2 + 3y^2y' - 3ay - 3axy' = 0,$$

从而 $y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$, 其中 $y = y(x)$ 是由方程 $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ 所确定的隐函数.

(3) 在方程两端分别对 x 求导, 得

$$y + xy' = e^{x+y}(1 + y'),$$

从而 $y' = \frac{e^{x+y} - y}{x - e^{x+y}}$, 其中 $y = y(x)$ 是由方程 $xy = e^{x+y}$ 所确定的隐函数.

(4) 在方程两端分别对 x 求导, 得

$$y' = -e^y - xe^y y',$$

从而, $y' = -\frac{e^y}{1 + xe^y}$, 其中 $y = y(x)$ 是由方程 $y = 1 - xe^y$ 所确定的隐函数.

2. 求曲线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 在点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a\right)$ 处的切线方程和法线方程.

解 由导数的几何意义知, 所求切线的斜率为

$$k = y'|_{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a\right)},$$

在曲线方程两端分别对 x 求导, 得

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y' = 0,$$

从而, $y' = -\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}}$, $y'|_{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a, \frac{\sqrt{2}}{4}a\right)} = -1$.

于是所求的切线方程为

$$y - \frac{\sqrt{2}}{4}a = -1 \left(x - \frac{\sqrt{2}}{4}a \right),$$

即 $x + y = \frac{\sqrt{2}}{2}a$. 法线方程为

$$y - \frac{\sqrt{2}}{4}a = 1 \cdot \left(x - \frac{\sqrt{2}}{4}a \right),$$

即 $x - y = 0$.

3. 求由下列方程所确定的隐函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$:

- (1) $x^2 - y^2 = 1$; (2) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$;
 (3) $y = \tan(x + y)$; (4) $y = 1 + xe^y$.

解 (1) 应用隐函数的求导方法, 得

$$2x - 2yy' = 0,$$

于是, $y' = \frac{x}{y}$.

在上式两端再对 x 求导, 得

$$y'' = \frac{y - xy'}{y^2} = \frac{y - \frac{x^2}{y}}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3},$$

(2) 应用隐函数的求导方法, 得

$$2xb^2 + 2a^2yy' = 0,$$

于是

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{b^2x}{a^2y}, \\ y'' &= -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}. \end{aligned}$$

(3) 应用隐函数的求导方法, 得

$$y' = \sec^2(x + y)(1 + y') = [1 + \tan^2(x + y)](1 + y') = (1 + y^2)(1 + y'),$$

于是

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(1 + y^2)}{1 - (1 + y^2)} = -\frac{1}{y^2} - 1, \\ y'' &= \frac{2y'}{y^3} = -\frac{2(1 + y^2)}{y^5} = -2\csc^2(x + y)\cot^3(x + y). \end{aligned}$$

(4) 应用隐函数的求导方法, 得

$$y' = e^y + xe^y y',$$

于是

$$\begin{aligned} y' &= \frac{e^y}{1 - xe^y}, \\ y'' &= \frac{e^y \cdot y'(1 - xe^y) - e^y(-e^y - xe^y y')}{(1 - xe^y)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{e^y y' + e^{2y}}{(1 - xe^y)^2} = \frac{e^{2y}(2 - xe^y)}{(1 - xe^y)^3}.$$

4. 用对数求导法求下列函数的导数:

$$(1) \quad y = \left(\frac{x}{1+x} \right)^x;$$

$$(2) \quad y = \sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}};$$

$$(3) \quad y = \frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5};$$

$$(4) \quad y = \sqrt{x \sin x \sqrt{1-e^x}}.$$

解 (1) 在 $y = \left(\frac{x}{1+x} \right)^x$ 两端取对数, 得

$$\ln y = x[\ln x - \ln(1+x)].$$

在上式两端分别对 x 求导, 并注意到 $y = y(x)$, 得

$$\frac{y'}{y} = [\ln x - \ln(1+x)] + x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right) = \ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x},$$

于是

$$y' = y \left(\ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x} \right) = \left(\frac{x}{1+x} \right)^x \left(\ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x} \right).$$

(2) 在 $y = \sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$ 两端取对数, 得

$$\ln y = \frac{1}{5} \left[\ln(x-5) - \frac{1}{5} \ln(x^2+2) \right] = \frac{1}{5} \ln(x-5) - \frac{1}{25} \ln(x^2+2).$$

在上式两端分别对 x 求导, 并注意到 $y = y(x)$, 得

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{x-5} - \frac{1}{25} \cdot \frac{2x}{x^2+2},$$

于是

$$y' = y \left[\frac{1}{5(x-5)} - \frac{2x}{25(x^2+2)} \right] = \sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}} \left[\frac{1}{5(x-5)} - \frac{2x}{25(x^2+2)} \right].$$

(3) 在 $y = \frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$ 两端取对数, 得

$$\ln y = \frac{1}{2} \ln(x+2) + 4 \ln(3-x) - 5 \ln(1+x).$$

在上式两端分别对 x 求导, 并注意到 $y = y(x)$, 得

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+2} + 4 \cdot \frac{(-1)}{3-x} - 5 \cdot \frac{1}{1+x},$$

于是

$$y' = y \left[\frac{1}{2(x+2)} - \frac{4}{3-x} - \frac{5}{1+x} \right]$$

$$= \frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5} \left[\frac{1}{2(x+2)} - \frac{4}{3-x} - \frac{5}{1+x} \right].$$

(4) 在 $y = \sqrt{x \sin x \sqrt{1-e^x}}$ 两端取对数, 得

$$\ln y = \frac{1}{2} [\ln x + \ln \sin x + \frac{1}{2} \ln(1-e^x)].$$

在上式两端分别对 x 求导, 并注意到 $y = y(x)$, 得

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x} + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(-e^x)}{1-e^x} \right],$$

于是

$$\begin{aligned} y' &= y \left[\frac{1}{2x} + \frac{\cos x}{2 \sin x} - \frac{e^x}{4(1-e^x)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{x \sin x \sqrt{1-e^x}} \left[\frac{1}{x} + \cot x - \frac{e^x}{2(1-e^x)} \right]. \end{aligned}$$

5. 求下列参数方程所确定的函数的导数 $\frac{dy}{dx}$:

$$(1) \begin{cases} x = at^2, \\ y = bt^3; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x = \theta(1 - \sin \theta), \\ y = \theta \cos \theta. \end{cases}$$

$$\text{解 } (1) \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3bt^2}{2at} = \frac{3b}{2a}t.$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\cos \theta - \theta \sin \theta}{1 - \sin \theta + \theta(-\cos \theta)} = \frac{\cos \theta - \theta \sin \theta}{1 - \sin \theta - \theta \cos \theta}.$$

6. 已知 $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t, \end{cases}$ 求当 $t = \frac{\pi}{3}$ 时 $\frac{dy}{dx}$ 的值.

$$\text{解 } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t \cos t - e^t \sin t}{e^t \sin t + e^t \cos t} = \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t},$$

于是

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{t=\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{3} - 2.$$

7. 写出下列曲线在所给参数值相应的点处的切线方程和法线方程:

$$(1) \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos 2t, \end{cases} \text{ 在 } t = \frac{\pi}{4} \text{ 处; }$$

$$(2) \begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^2}, \\ y = \frac{3at^2}{1+t^2}, \end{cases} \text{在 } t=2 \text{ 处.}$$

解 (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2\sin 2t}{\cos t} = -4\sin t,$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}.$$

$t = \frac{\pi}{4}$ 对应点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, 曲线在点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ 处的切线方程为

$$y - 0 = -2\sqrt{2} \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

即 $2\sqrt{2}x + y - 2 = 0$. 法线方程为

$$y - 0 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

即 $\sqrt{2}x - 4y - 1 = 0$.

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\left(\frac{3at^2}{1+t^2} \right)'}{\left(\frac{3at}{1+t^2} \right)} = \frac{\frac{3a[2t(1+t^2) - t^2 \cdot 2t]}{(1+t^2)^2}}{\frac{3a[(1+t^2) - t \cdot 2t]}{(1+t^2)^2}}$$

$$= \frac{2t}{1-t^2},$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=2} = -\frac{4}{3},$$

$t = 2$ 对应点 $\left(\frac{6}{5}a, \frac{12}{5}a\right)$. 曲线在点 $\left(\frac{6}{5}a, \frac{12}{5}a\right)$ 处的切线方程为

$$y - \frac{12}{5}a = -\frac{4}{3} \left(x - \frac{6}{5}a \right),$$

即 $4x + 3y - 12a = 0$. 法线方程为

$$y - \frac{12}{5}a = \frac{3}{4} \left(x - \frac{6}{5}a \right),$$

即 $3x - 4y + 6a = 0$.

8. 求下列参数方程所确定的函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$$(1) \begin{cases} x = \frac{t^2}{2}, \\ y = 1 - t; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x = 3e^{-t}, \\ y = 2e^t; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x = f'(t), \\ y = tf'(t) - f(t), \end{cases} \text{设 } f''(t) \text{ 存在且不为零.}$$

解 (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-1}{t}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{1}{t^2}, \frac{1}{t^3}.$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{b \cos t}{-a \sin t} = -\frac{b}{a} \cot t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{b}{a}(-\csc^2 t)}{-a \sin t} = \frac{-b}{a^2 \sin^3 t}.$$

$$(3) \frac{dy}{dx} = \frac{2e^t}{-3e^{-t}} = -\frac{2}{3}e^{2t}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\frac{4}{3}e^{2t}}{-3e^{-t}} = \frac{4}{9}e^{3t}.$$

$$(4) \frac{dy}{dx} = \frac{f'(t) + tf''(t) - f'(t)}{f''(t)} = t, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{f''(t)}.$$

9. 求下列参数方程所确定的函数的三阶导数 $\frac{d^3y}{dx^3}$:

$$(1) \begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = t - \arctan t. \end{cases}$$

解 (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 3t^2}{-2t} = -\frac{1}{2t} + \frac{3}{2}t,$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{1}{2t^2} + \frac{3}{2}}{-2t} = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{t^3} + \frac{3}{t} \right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{-\frac{1}{4} \left(-\frac{3}{t^4} - \frac{3}{t^2} \right)}{-2t} = -\frac{3}{8t^5}(1 + t^2).$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{1 - \frac{1}{1 + t^2}}{\frac{2t}{1 + t^2}} = \frac{t}{2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1 + t^2}} = \frac{1 + t^2}{4t} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{t} + t \right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{t^2} + 1 \right)}{\frac{2t}{1 + t^2}} = \frac{t^4 - 1}{8t^3}.$$

10. 落在平静水面上的石头,产生同心波纹. 若最外一圈波半径的增大速率总是 6 m/s ,问在 2 s 末扰动水面面积增大的速率为多少?

解 设最外一圈波的半径为 $r = r(t)$,圆的面积 $S = S(t)$. 在 $S = \pi r^2$ 两端分别对 t 求导,得

$$\frac{dS}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}.$$

当 $t = 2$ 时, $r = 6 \times 2 = 12$, $\frac{dr}{dt} = 6$,代入上式得

$$\left. \frac{dS}{dt} \right|_{t=2} = 2\pi \cdot 12 \cdot 6 = 144\pi (\text{m}^2/\text{s}).$$

11. 注水入深 8 m 、上顶直径 8 m 的正圆锥形容器中,其速率为 $4 \text{ m}^3/\text{min}$. 当水深为 5 m 时,其表面上升的速率为多少?

解 如图 2-1 所示,设在 t 时刻容器中的水深为 $h(t)$,水的容积为 $V(t)$,因为 $\frac{r}{4} = \frac{h}{8}$,即 $r = \frac{h}{2}$,所以

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{12}h^3,$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}h^2 \frac{dh}{dt}, \quad \frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2} \frac{dV}{dt}.$$

故

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{h=5} = \frac{4}{25\pi} \cdot 4 = \frac{16}{25\pi} \approx 0.204 (\text{m}/\text{min}).$$

12. 溶液自深 18 cm 、顶直径 12 cm 的正圆锥形漏斗中漏入一直径为 10 cm 的圆柱形筒中. 开始时漏斗中盛满了溶液. 已知当溶液在漏斗中深为 12 cm 时,其表面下降的速率为 1 cm/min . 问此时圆柱形筒中溶液表面上升的速率为多少?

解 如图 2-2,设在 t 时刻漏斗中的水深为 $H = H(t)$,圆柱形筒中水深为 $h = h(t)$.

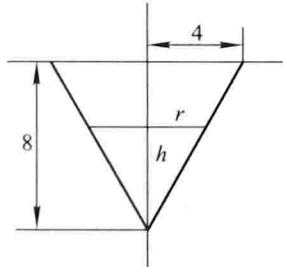


图 2-1

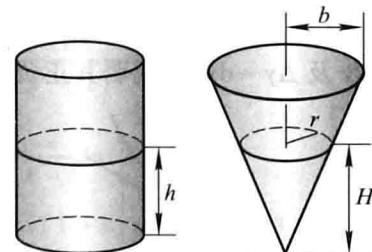


图 2-2

建立 h 与 H 之间的关系:

$$\frac{1}{3}\pi 6^2 \cdot 18 - \frac{1}{3}\pi r^2 H = \pi 5^2 h.$$

又, $\frac{r}{6} = \frac{H}{18}$, 即 $r = \frac{H}{3}$. 故

$$\frac{1}{3}\pi 6^2 \cdot 18 - \frac{1}{3}\pi\left(\frac{H}{3}\right)^2 H = \pi 5^2 h,$$

$$\text{即 } 216\pi - \frac{\pi}{27}H^3 = 25\pi h.$$

上式两端分别对 t 求导, 得

$$-\frac{3}{27}\pi H^2 \frac{dH}{dt} = 25\pi \frac{dh}{dt}.$$

当 $H = 12$ 时, $\frac{dH}{dt} = -1$, 此时

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{25\pi} \left(-\frac{3}{27}\pi H^2 \frac{dH}{dt} \right) \Big|_{\substack{H=12 \\ \frac{dH}{dt}=-1}} = \frac{16}{25} \approx 0.64 \text{ (cm/min)}.$$

习题 2-5

函数的微分

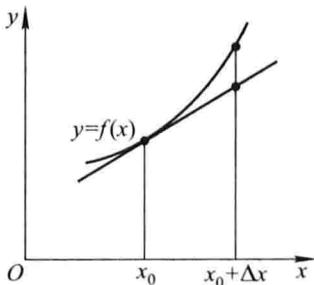
1. 已知 $y = x^3 - x$, 计算在 $x = 2$ 处当 Δx 分别等于 1, 0.1, 0.01 时的 Δy 及 dy .

$$\begin{aligned} \text{解 } \Delta y &= (x + \Delta x)^3 - (x + \Delta x) - x^3 + x \\ &= 3x(\Delta x)^2 + 3x^2\Delta x + (\Delta x)^3 - \Delta x, \\ dy &= (3x^2 - 1)\Delta x. \end{aligned}$$

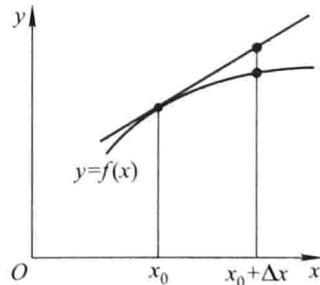
于是

$$\begin{aligned} \Delta y \Big|_{\substack{x=2 \\ \Delta x=1}} &= 6 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 1^3 - 1 = 18, dy \Big|_{\substack{x=2 \\ \Delta x=1}} = 11 \cdot 1 = 11; \\ \Delta y \Big|_{\substack{x=2 \\ \Delta x=0.1}} &= 6 \cdot (0.1)^2 + 12 \cdot (0.1) + (0.1)^3 - 0.1 = 1.161, \\ dy \Big|_{\substack{x=2 \\ \Delta x=0.1}} &= 11 \cdot (0.1) = 1.1; \\ \Delta y \Big|_{\substack{x=2 \\ \Delta x=0.01}} &= 6 \cdot (0.01)^2 + 12 \cdot (0.01) + (0.01)^3 - 0.01 = 0.110601, \\ dy \Big|_{\substack{x=2 \\ \Delta x=0.01}} &= 11 \cdot (0.01) = 0.11. \end{aligned}$$

2. 设函数 $y = f(x)$ 的图形如图 2-3(a)、(b)、(c)、(d) 中分别标出在点 x_0 的 dy 、 Δy 及 $\Delta y - dy$, 并说明其正负.



(a)



(b)

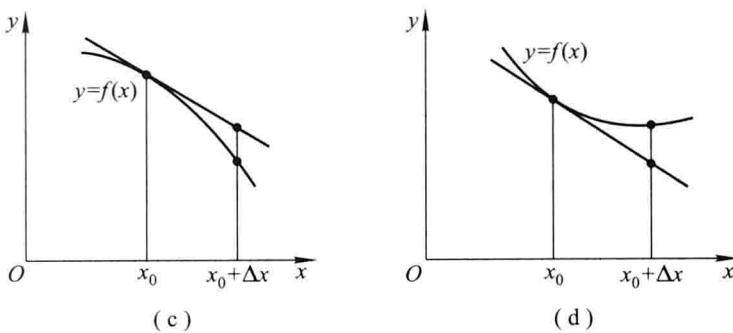


图 2-3

解 (a) $\Delta y > 0, dy > 0, \Delta y - dy > 0.$

(b) $\Delta y > 0, dy > 0, \Delta y - dy < 0.$

(c) $\Delta y < 0, dy < 0, \Delta y - dy < 0.$

(d) $\Delta y < 0, dy < 0, \Delta y - dy > 0.$

3. 求下列函数的微分:

$$(1) y = \frac{1}{x} + 2\sqrt{x};$$

$$(2) y = x \sin 2x;$$

$$(3) y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}};$$

$$(4) y = \ln^2(1-x);$$

$$(5) y = x^2 e^{2x};$$

$$(6) y = e^{-x} \cos(3-x);$$

$$(7) y = \arcsin\sqrt{1-x^2};$$

$$(8) y = \tan^2(1+2x^2);$$

$$(9) y = \arctan\frac{1-x^2}{1+x};$$

$$(10) s = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (A, \omega, \varphi \text{ 是常数}).$$

解 (1) $dy = y' dx = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx.$

(2) $dy = y' dx = (\sin 2x + x \cos 2x \cdot 2) dx = (\sin 2x + 2x \cos 2x) dx.$

$$(3) dy = y' dx = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{(\sqrt{x^2 + 1})^2} dx = \frac{dx}{(x^2 + 1)^{3/2}}.$$

$$(4) dy = y' dx = 2 \ln(1-x) \cdot \frac{(-1)}{1-x} dx = \frac{2}{x-1} \ln(1-x) dx.$$

$$(5) dy = y' dx = (2x e^{2x} + x^2 e^{2x} \cdot 2) dx = 2x(1+x) e^{2x} dx.$$

$$(6) dy = y' dx = [-e^{-x} \cos(3-x) + e^{-x} \sin(3-x)] dx$$

$$= e^{-x} [\sin(3-x) - \cos(3-x)] dx.$$

$$(7) dy = y' dx = \left[\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}} \cdot \frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}} \right] dx = -\frac{x}{|x|} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \begin{cases} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & -1 < x < 0, \\ -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

$$(8) dy = y'dx = [2\tan(1+2x^2) \cdot \sec^2(1+2x^2) \cdot 4x] dx \\ = 8x\tan(1+2x^2)\sec^2(1+2x^2)dx.$$

$$(9) dy = y'dx = \frac{1}{1 + \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2} \cdot \frac{(-2x)(1+x^2) - (1-x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^2} dx \\ = -\frac{2x}{1+x^4}dx.$$

$$(10) ds = s'dt = [A\cos(\omega t + \varphi) \cdot \omega] dt = A\omega\cos(\omega t + \varphi)dt.$$

4. 将适当的函数填入下列括号内,使等式成立:

$$(1) d(\quad) = 2dx; \quad (2) d(\quad) = 3xdx;$$

$$(3) d(\quad) = \cos tdt; \quad (4) d(\quad) = \sin \omega xdx;$$

$$(5) d(\quad) = \frac{1}{1+x}dx; \quad (6) d(\quad) = e^{-2x}dx;$$

$$(7) d(\quad) = \frac{1}{\sqrt{x}}dx; \quad (8) d(\quad) = \sec^2 3xdx.$$

解 (1) $d(2x+C) = 2dx.$

$$(2) d\left(\frac{3}{2}x^2 + C\right) = 3xdx.$$

$$(3) d(\sin t + C) = \cos tdt.$$

$$(4) d\left(-\frac{1}{\omega}\cos \omega x + C\right) = \sin \omega xdx.$$

$$(5) d(\ln(1+x) + C) = \frac{1}{1+x}dx.$$

$$(6) d\left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + C\right) = e^{-2x}dx.$$

$$(7) d(2\sqrt{x} + C) = \frac{1}{\sqrt{x}}dx.$$

$$(8) d\left(\frac{1}{3}\tan 3x + C\right) = \sec^2 3xdx.$$

上述 C 均为任意常数.

5. 如图 2-4 所示的电缆 AOB 的长为 s , 跨度为 $2l$, 电缆的最低点 O 与杆顶连线 AB 的距离为 f , 则电缆长可按下面公式计算:

$$s = 2l\left(1 + \frac{2f^2}{3l^2}\right),$$

当 f 变化了 Δf 时,电缆长的变化约为多少?

$$\text{解 } s = 2l \left(1 + \frac{2f^2}{3l^2} \right), \Delta s \approx ds = 2l \cdot \frac{4f}{3l^2} \Delta f = \frac{8f}{3l} \Delta f.$$

6. 设扇形的圆心角 $\alpha = 60^\circ$,半径 $R = 100\text{ cm}$ (图2-5). 如果 R 不变, α 减少 $30'$,问扇形面积大约改变了多少? 又如果 α 不变, R 增加 1 cm ,问扇形面积大约改变了多少?

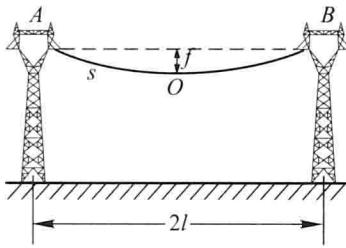


图 2-4

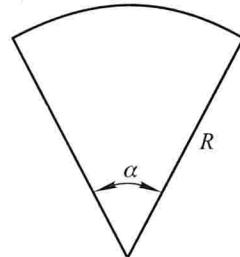


图 2-5

解 扇形面积公式为 $S = \frac{R^2}{2}\alpha$. 于是

$$\Delta S \approx dS = \frac{R^2}{2} \Delta \alpha.$$

将 $R = 100$, $\Delta \alpha = -30' = -\frac{\pi}{360}$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 代入上式得

$$\Delta S \approx \frac{1}{2} \cdot 100^2 \cdot \left(-\frac{\pi}{360} \right) \approx -43.63 \text{ cm}^2.$$

又

$$\Delta S \approx dS \approx \alpha R \Delta R,$$

将 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $R = 100$, $\Delta R = 1$ 代入上式得

$$\Delta S \approx \frac{\pi}{3} \cdot 100 \cdot 1 \approx 104.72 \text{ cm}^2.$$

7. 计算下列三角函数值的近似值:

$$(1) \cos 29^\circ; \quad (2) \tan 136^\circ.$$

解 (1) 由 $\cos x \approx \cos x_0 + (\cos x)'|_{x=x_0} \cdot (x - x_0)$,取 $x_0 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ 得

$$\begin{aligned} \cos 29^\circ &= \cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180} \right) \approx \cos \frac{\pi}{6} + (-\sin x)|_{x=\frac{\pi}{6}} \cdot \left(-\frac{\pi}{180} \right) \\ &\approx \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{360} \approx 0.87475. \end{aligned}$$

(2) 由 $\tan x \approx \tan x_0 + (\tan x)'|_{x=x_0} \cdot (x - x_0)$,取 $x_0 = \frac{3}{4}\pi$ 得

$$\tan 136^\circ \approx \tan \frac{3}{4}\pi + \sec^2 x \Big|_{x=\frac{3}{4}\pi} \cdot \frac{\pi}{180} \approx -0.96509.$$

8. 计算下列反三角函数值的近似值:

$$(1) \arcsin 0.5002; \quad (2) \arccos 0.4995.$$

解 (1) 由 $\arcsin x \approx \arcsin x_0 + (\arcsin x)'|_{x=x_0} \cdot (x-x_0)$, 取 $x_0 = 0.5$ 得

$$\begin{aligned} \arcsin 0.5002 &\approx \arcsin 0.5 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Big|_{x=0.5} \cdot 0.0002 \\ &\approx 30^\circ 47''. \end{aligned}$$

(2) 由 $\arccos x \approx \arccos x_0 + (\arccos x)'|_{x=x_0} \cdot (x-x_0)$, 取 $x_0 = 0.5$ 得

$$\begin{aligned} \arccos 0.4995 &\approx \arccos 0.5 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Big|_{x=0.5} \cdot (-0.0005) \\ &\approx 60^\circ 2''. \end{aligned}$$

9. 当 $|x|$ 较小时, 证明下列近似公式:

$$(1) \tan x \approx x \quad (x \text{ 是角的弧度值}); \quad (2) \ln(1+x) \approx x;$$

$$(3) \sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{n}x; \quad (4) e^x \approx 1 + x.$$

并计算 $\tan 45'$ 和 $\ln 1.002$ 的近似值.

$$\text{解 } (1) \tan x \approx \tan 0 + (\tan x)' \Big|_{x=0} \cdot x = 0 + \sec^2 0 \cdot x = x.$$

$$(2) \ln(1+x) \approx \ln(1+0) + [\ln(1+x)]' \Big|_{x=0} \cdot x = 0 + \frac{1}{1+0}x = x.$$

$$(3) \sqrt[n]{1+x} \approx \sqrt[n]{1+0} + (\sqrt[n]{1+x})'|_{x=0} \cdot x = 1 + \frac{1}{n}(1+0)^{\frac{1}{n}-1} \cdot x = 1 + \frac{1}{n}x.$$

$$(4) e^x \approx e^0 + (e^x)'|_{x=0} \cdot x = 1 + e^0 x = 1 + x.$$

$$\tan 45' = \tan 0.01309 \approx 0.01309, \ln(1.002) \approx 0.002.$$

10. 计算下列各根式的近似值:

$$(1) \sqrt[3]{996}; \quad (2) \sqrt[6]{65}.$$

解 由 $\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{n}$ 知

$$(1) \sqrt[3]{996} = \sqrt[3]{1000-4} = 10 \sqrt[3]{1-\frac{4}{1000}} \approx 10 \left[1 + \frac{1}{3} \left(-\frac{4}{1000} \right) \right] \approx 9.987.$$

$$(2) \sqrt[6]{65} = \sqrt[6]{64+1} = 2 \sqrt[6]{1+\frac{1}{64}} \approx 2 \left(1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{64} \right) \approx 2.0052.$$

11. 计算球体体积时, 要求精确度在 2% 以内. 问这时测量直径 D 的相对误差不能超过多少?

$$\text{解 由 } V = \frac{1}{6}\pi D^3 \text{ 知}$$

$$dV = \frac{\pi}{2} D^2 \Delta D,$$

于是由 $\left| \frac{dV}{V} \right| = \left| \frac{\frac{\pi}{2} D^2 \Delta D}{\frac{1}{6} \pi D^3} \right| = 3 \left| \frac{\Delta D}{D} \right| \leq 2\% \text{, 知}$

$$\left| \frac{\Delta D}{D} \right| \leq \frac{0.02}{3} \approx 0.667\%.$$

- * 12. 某厂生产如图 2-6 所示的扇形板, 半径 $R = 200 \text{ mm}$, 要求中心角 α 为 55° . 产品检验时, 一般用测量弦长 l 的办法来间接测量中心角 α . 如果测量弦长 l 时的误差 $\delta_l = 0.1 \text{ mm}$, 问由此而引起的中心角测量误差 δ_α 是多少?

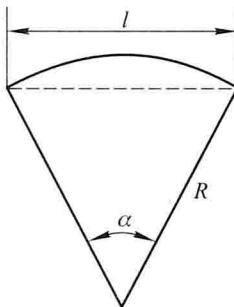


图 2-6

解 如图 2-6, 由 $\frac{l}{2} = R \sin \frac{\alpha}{2}$ 得

$$\alpha = 2 \arcsin \frac{l}{2R} = 2 \arcsin \frac{l}{400},$$

故

$$\delta_\alpha = |\alpha'| \delta_l = \frac{2}{\sqrt{1 - \left(\frac{l}{400}\right)^2}} \cdot \frac{1}{400} \cdot \delta_l.$$

当 $\alpha = 55^\circ$ 时, $l = 2R \sin \frac{\alpha}{2} = 400 \sin (27.5^\circ) \approx 184.7$. 将 $l \approx 184.7, \delta_l = 0.1$ 代入上式得

$$\delta_\alpha \approx \frac{2}{\sqrt{1 - \left(\frac{184.7}{400}\right)^2}} \cdot \frac{1}{400} \cdot 0.1 \approx 0.00056 \text{ (弧度)} = 1'55''.$$

总习题二

1. 在“充分”“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内:

(1) $f(x)$ 在点 x_0 可导是 $f(x)$ 在点 x_0 连续的 _____ 条件. $f(x)$ 在点 x_0 连续是

$f(x)$ 在点 x_0 可导的_____条件.

(2) $f(x)$ 在点 x_0 的左导数 $f'_-(x_0)$ 及右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等是 $f(x)$ 在点 x_0 可导的_____条件.

(3) $f(x)$ 在点 x_0 可导是 $f(x)$ 在点 x_0 可微的_____条件.

解 (1) 充分, 必要.

(2) 充分必要.

(3) 充分必要.

2. 设 $f(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$ ($n \geq 2$), 则 $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$\text{解 } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} [(x+1)(x+2)\cdots(x+n)] = n!.$$

3. 下述题中给出了四个结论, 从中选出一个正确的结论:

设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是 ().

$$(A) \lim_{h \rightarrow +\infty} h \left[f\left(a + \frac{1}{h}\right) - f(a) \right] \text{ 存在}$$

$$(B) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a+h)}{h} \text{ 存在}$$

$$(C) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \text{ 存在}$$

$$(D) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{h} \text{ 存在}$$

解 由 $\lim_{h \rightarrow +\infty} h \left[f\left(a + \frac{1}{h}\right) - f(a) \right] = \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{f\left(a + \frac{1}{h}\right) - f(a)}{\frac{1}{h}}$ 存在, 仅可知 $f'_+(a)$ 存

在, 故不能选(A).

取 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$, 显然, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+2h) - f(0+h)}{h} = 0$, 但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导,

故不能选(B).

取 $f(x) = |x|$, 显然, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0-h)}{2h} = 0$. 但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导, 故不

能选(C).

而 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{h} = \lim_{-h \rightarrow 0} \frac{f(a+(-h)) - f(a)}{-h}$ 存在, 按导数定义知

$f'(a)$ 存在, 故选择(D).

4. 设有一根细棒, 取棒的一端作为原点, 棒上任意点的坐标为 x , 于是分布在区间 $[0, x]$ 上细棒的质量 m 是 x 的函数 $m = m(x)$. 应怎样确定细棒在点 x_0 处的线密度 (对于均匀细棒来说, 单位长度细棒的质量叫做这细棒的线密度)?

解 在区间 $[x_0, x_0 + \Delta x]$ 上的平均线密度为

$$\bar{\rho} = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{m(x_0 + \Delta x) - m(x_0)}{\Delta x}.$$

在点 x_0 处的线密度为

$$\rho(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m(x_0 + \Delta x) - m(x_0)}{\Delta x} = \left. \frac{dm}{dx} \right|_{x=x_0}.$$

5. 根据导数的定义,求 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的导数.

解 由导数的定义知,当 $x \neq 0$ 时,

$$\left(\frac{1}{x} \right)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x + \Delta x)} = -\frac{1}{x^2}.$$

6. 求下列函数 $f(x)$ 的 $f'_-(0)$ 及 $f'_+(0)$, 又 $f'(0)$ 是否存在:

$$(1) f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ \ln(1+x), & x \geq 0; \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$\text{解 } (1) f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

由 $f'_-(0) = f'_+(0) = 1$ 知 $f'(0) = f'_-(0) = f'_+(0) = 1$.

$$(2) f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0.$$

由 $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ 知 $f'(0)$ 不存在.

7. 讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0),$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

不存在, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

8. 求下列函数的导数:

$$(1) y = \arcsin(\sin x);$$

$$(2) y = \arctan \frac{1+x}{1-x};$$

$$(3) y = \ln \tan \frac{x}{2} - \cos x + \ln \tan x;$$

$$(4) y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}});$$

$$(5) y = x^{\frac{1}{x}} (x > 0).$$

$$\text{解 } (1) y' = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \cos x = \frac{\cos x}{|\cos x|}.$$

$$(2) y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$(3) y' = \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \cdot \sec^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} + \sin x \ln \tan x - \cos x \frac{1}{\tan x} \sec^2 x$$

$$= \sin x \cdot \ln \tan x.$$

$$(4) y' = \frac{1}{e^x + \sqrt{1+e^{2x}}} \left(e^x + \frac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}} \right) = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$$

(5) 先在等式两端分别取对数, 得 $\ln y = \frac{\ln x}{x}$, 再在所得等式两端分别对 x 求导,

得

$$\frac{y'}{y} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

于是

$$y' = x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x).$$

9. 求下列函数的二阶导数:

$$(1) y = \cos^2 x + \ln x; \quad (2) y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\text{解 } (1) y' = 2\cos x(-\sin x) + \ln x + \cos^2 x \cdot \frac{1}{x} = -\sin 2x + \ln x + \frac{\cos^2 x}{x}.$$

$$y'' = -2\cos 2x \cdot \ln x - \sin 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{2\cos x(-\sin x) \cdot x - \cos^2 x}{x^2}$$

$$= -2\cos 2x \cdot \ln x - \frac{2\sin 2x}{x} - \frac{\cos^2 x}{x^2}.$$

$$(2) y' = \frac{\sqrt{1-x^2} - x \frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}}{(\sqrt{1-x^2})^2} = \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

$$y'' = -\frac{3}{2} \cdot (1-x^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot (-2x) = \frac{3x}{(1-x^2)^{5/2}},$$

10. 求下列函数的 n 阶导数:

$$(1) y = \sqrt[m]{1+x}; \quad (2) y = \frac{1-x}{1+x}.$$

$$\text{解 } (1) y' = \frac{1}{m}(1+x)^{\frac{1}{m}-1}, y'' = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)(1+x)^{\frac{1}{m}-2}, \dots,$$

$$y^{(n)} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{m}-n+1\right)(1+x)^{\frac{1}{m}-n}.$$

$$(2) \text{ 由 } \left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} \text{ 知}$$

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{(n)} = \left(-1 + \frac{2}{x+1}\right)^{(n)} = 2\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} \\ &= \frac{2 \cdot (-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}. \end{aligned}$$

11. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + xy = e$ 所确定, 求 $y''(0)$.

解 把方程两边分别对 x 求导, 得

$$e^y y' + y + xy' = 0. \quad (1)$$

将 $x=0$ 代入 $e^y + xy = e$, 得 $y=1$, 再将 $x=0, y=1$ 代入(1)式得 $y'|_{x=0} = -\frac{1}{e}$, 在(1)

式两边分别关于 x 再求导, 可得

$$e^y y'^2 + e^y y'' + y' + y' + xy'' = 0. \quad (2)$$

将 $x=0, y=1, y'|_{x=0} = -\frac{1}{e}$ 代入(2)式, 得 $y''(0) = \frac{1}{e^2}$.

12. 求下列由参数方程所确定的函数的一阶导数 $\frac{dy}{dx}$ 及二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$$(1) \begin{cases} x = a\cos^3 \theta, \\ y = a\sin^3 \theta; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = \ln \sqrt{1+t^2}, \\ y = \arctan t. \end{cases}$$

$$\text{解} \quad (1) \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{3a\cos^2\theta(-\sin\theta)} = -\tan\theta,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-\sec^2\theta}{-3a\cos^2\theta\sin\theta} = \frac{1}{3a}\sec^4\theta\csc\theta.$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t}{1+t^2}} = \frac{1}{t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{t}{1+t^2}} = -\frac{1+t^2}{t^3}.$$

13. 求曲线 $\begin{cases} x = 2e^t \\ y = e^{-t} \end{cases}$, 在 $t=0$ 相应的点处的切线方程及法线方程.

$$\text{解} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-e^{-t}}{2e^t} = -\frac{1}{2e^{2t}}, \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = -\frac{1}{2}.$$

$t=0$ 对应的点为 $(2, 1)$, 故曲线在点 $(2, 1)$ 处的切线方程为

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2),$$

即 $x + 2y - 4 = 0$. 法线方程为 $y - 1 = 2(x - 2)$, 即 $2x - y - 3 = 0$.

14. 已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数, 它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式

$$f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x) = 8x + o(x),$$

且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程.

解 由 $f(x)$ 连续, 令关系式两端 $x \rightarrow 0$, 取极限得

$$f(1) - 3f(1) = 0, \quad f(1) = 0.$$

又

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x)}{x} = 8,$$

而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \sin x) - 3f(1 - \sin x)}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$\frac{\text{令 } t = \sin x}{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t) - 3f(1-t)}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t) - f(1)}{t} + 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1-t) - f(1)}{-t}$$

$$= 4f'(1),$$

故 $f'(1) = 2$.

由于 $f(x+5) = f(x)$, 于是 $f(6) = f(1) = 0$.

$$f'(6) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(6+x) - f(6)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} = f'(1) = 2,$$

因此, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(6, f(6))$, 即 $(6, 0)$ 处的切线方程为

$$y - 0 = 2(x - 6),$$

即 $2x - y - 12 = 0$.

- 15.** 当正在高度 H 飞行的飞机开始向机场跑道下降时, 如图 2-7 所示, 从飞机到机场的水平地面距离为 L . 假设飞机下降的路径为三次函数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的图形, 其中 $y|_{x=-L} = H$, $y|_{x=0} = 0$. 试确定飞机的降落路径.

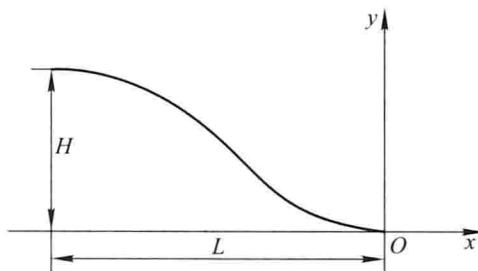


图 2-7

解 设立坐标系如图 2-7 所示. 根据题意, 可知

$$y|_{x=0} = 0 \Rightarrow d = 0,$$

$$y|_{x=-L} = H \Rightarrow -aL^3 + bL^2 - cL = H.$$

为使飞机平稳降落, 尚需满足

$$y'|_{x=0} = 0 \Rightarrow c = 0,$$

$$y'|_{x=-L} = 0 \Rightarrow 3aL^2 - 2bL = 0.$$

解得 $a = \frac{2H}{L^3}$, $b = \frac{3H}{L^2}$. 故飞机的降落路径为

$$y = H \left[2 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + 3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right].$$

- 16.** 甲船以 6 km/h 的速率向东行驶, 乙船以 8 km/h 的速率向南行驶. 在中午 12 点整, 乙船位于甲船之北 16 km 处. 问下午 1 点整两船相离的速率为多少?

解 设从中午 12 点整起, 经过 t 小时, 甲船与乙船的距离为

$$s = \sqrt{(16 - 8t)^2 + (6t)^2},$$

故速率

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{2(16 - 8t) \cdot (-8) + 72t}{2\sqrt{(16 - 8t)^2 + (6t)^2}}.$$

当 $t = 1$ 时(即下午 1 点整)两船相离的速率为

$$v|_{t=1} = \frac{-128 + 72}{20} = -2.8 \text{ (km/h).}$$

17. 利用函数的微分代替函数的增量求 $\sqrt[3]{1.02}$ 的近似值.

解 利用 $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{3}x$, 取 $x = 0.02$, 得

$$\sqrt[3]{1.02} \approx 1 + \frac{1}{3} \times (0.02) = 1.007.$$

18. 已知单摆的振动周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, 其中 $g = 980 \text{ cm/s}^2$, l 为摆长(单位为 cm). 设原摆长为 20 cm, 为使周期 T 增大 0.05 s, 摆长约需加长多少?

解 由 $\Delta T \approx dT = \frac{\pi}{\sqrt{gl}} \Delta l$, 得

$$\Delta l = \frac{\sqrt{gl}}{\pi} dT \approx \frac{\sqrt{gl}}{\pi} \Delta T,$$

故

$$\Delta l|_{l=20} \approx \frac{\sqrt{980 \times 20}}{3.14} \times 0.05 \approx 2.23 \text{ (cm)}.$$

即摆长约需加长 2.23 cm.

微分中值定理与导数的应用

习题 3-1

微分中值定理

 1. 验证罗尔定理对函数 $y = \ln \sin x$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 上的正确性.

证 函数 $f(x) = \ln \sin x$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 上连续, 在 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ 内可导, 又

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \ln \sin \frac{\pi}{6} = \ln \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \ln \sin \frac{5\pi}{6} = \ln \frac{1}{2},$$

即 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, 故 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 上满足罗尔定理条件, 由罗尔定理知至少存在一点 $\xi \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$, 使 $f'(\xi) = 0$. 又, $f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 取 $n = 0$, 得 $\xi = \frac{\pi}{2} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$. 因此罗尔定理对函数 $y = \ln \sin x$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 上是正确的.

 2. 验证拉格朗日中值定理对函数 $y = 4x^3 - 5x^2 + x - 2$ 在区间 $[0, 1]$ 上的正确性.

证 函数 $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 2$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 故 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上满足拉格朗日中值定理条件, 从而至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{-2 - (-2)}{1} = 0.$$

又, 由 $f'(\xi) = 12\xi^2 - 10\xi + 1 = 0$ 可知 $\xi = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{12} \in (0, 1)$, 因此拉格朗日中值定理对函数 $y = 4x^3 - 5x^2 + x - 2$ 在区间 $[0, 1]$ 上是正确的.

 3. 对函数 $f(x) = \sin x$ 及 $F(x) = x + \cos x$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上验证柯西中值定理的正确性.

证 函数 $f(x) = \sin x, F(x) = x + \cos x$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上连续, 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内可导, 且在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内, $F'(x) = 1 - \sin x \neq 0$, 故 $f(x), F(x)$ 满足柯西中值定理条件, 从而至少存在一点 $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 使

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)}{F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

由

$$\frac{1-0}{\frac{\pi}{2}-1} = \frac{\cos \xi}{1-\sin \xi},$$

即 $\frac{\cos \frac{\xi}{2} + \sin \frac{\xi}{2}}{\cos \frac{\xi}{2} - \sin \frac{\xi}{2}} = \frac{2}{\pi-2}$, 可得 $\tan \frac{\xi}{2} = \frac{4-\pi}{\pi}$. 所以, $\xi = 2n\pi + 2\arctan \frac{4-\pi}{\pi}$. 由题设,

取 $n=0$, 得 $\xi_0 = 2\arctan \frac{4-\pi}{\pi}$. 因 $0 < \frac{4-\pi}{\pi} < 1$, 故 $\xi_0 = 2\arctan \left(\frac{4-\pi}{\pi} \right) \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$. 因

此, 柯西中值定理对 $f(x) = \sin x, F(x) = x + \cos x$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ 上是正确的.

4. 试证明对函数 $y = px^2 + qx + r$ 应用拉格朗日中值定理时所求得的点 ξ 总是位于区间的正中间.

证 任取数值 a, b , 不妨设 $a < b$, 函数 $f(x) = px^2 + qx + r$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 故由拉格朗日中值定理知至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a),$$

即 $pb^2 + qb + r - pa^2 - qa - r = (2p\xi + q)(b-a)$. 经整理得 $\xi = \frac{a+b}{2}$, 即所求得的 ξ 总是位于区间的正中间.

5. 不用求出函数 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数, 说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根, 并指出它们所在的区间.

解 函数 $f(x)$ 分别在 $[1, 2], [2, 3], [3, 4]$ 上连续, 分别在 $(1, 2), (2, 3), (3, 4)$ 内可导, 且 $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$. 由罗尔定理知至少存在 $\xi_1 \in (1, 2), \xi_2 \in (2, 3), \xi_3 \in (3, 4)$, 使

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = f'(\xi_3) = 0.$$

即方程 $f'(x)=0$ 至少有三个实根, 又方程 $f'(x)=0$ 为三次方程, 故它至多有三个实根, 因此方程 $f'(x)=0$ 有且仅有三个实根, 它们分别位于区间 $(1, 2), (2, 3), (3, 4)$ 内.

6. 证明恒等式: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ ($-1 \leq x \leq 1$).

证 取函数 $f(x) = \arcsin x + \arccos x, x \in [-1, 1]$. 因

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \equiv 0,$$

故 $f(x) \equiv C$. 取 $x=0$, 得 $f(0) = C = \frac{\pi}{2}$. 因此

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in [-1, 1].$$

7. 若方程 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x = 0$ 有一个正根 $x = x_0$, 证明方程 $a_0nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$ 必有一个小于 x_0 的正根.

证 取函数 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x$. $f(x)$ 在 $[0, x_0]$ 上连续, 在 $(0, x_0)$ 内可导, 且 $f(0) = f(x_0) = 0$, 由罗尔定理知至少存在一点 $\xi \in (0, x_0)$, 使 $f'(\xi) = 0$, 即 方程 $a_0nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$ 必有一个小于 x_0 的正根.

8. 若函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内具有二阶导数, 且 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$, 其中 $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$. 证明: 在 (x_1, x_3) 内至少有一点 ξ , 使得 $f''(\xi) = 0$.

证 根据题意知函数 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2], [x_2, x_3]$ 上连续, 在 $(x_1, x_2), (x_2, x_3)$ 内可导且 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$, 故由罗尔定理知至少存在点 $\xi_1 \in (x_1, x_2), \xi_2 \in (x_2, x_3)$, 使 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$.

又 $f'(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上连续, 在 (ξ_1, ξ_2) 内可导, 故由罗尔定理知至少存在点 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (x_1, x_3)$ 使 $f''(\xi) = 0$.

9. 设 $a > b > 0, n > 1$, 证明:

$$nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b).$$

证 取函数 $f(x) = x^n$, $f(x)$ 在 $[b, a]$ 上连续, 在 (b, a) 内可导, 由拉格朗日中值定理知, 至少存在一点 $\xi \in (b, a)$, 使

$$f(a) - f(b) = f'(\xi)(a-b),$$

即 $a^n - b^n = n\xi^{n-1}(a-b)$. 又 $0 < b < \xi < a, n > 1$, 故

$$0 < b^{n-1} < \xi^{n-1} < a^{n-1}.$$

因此

$$nb^{n-1}(a-b) < n\xi^{n-1}(a-b) < na^{n-1}(a-b),$$

即 $nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b)$.

10. 设 $a > b > 0$, 证明:

$$\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}.$$

证 取函数 $f(x) = \ln x$, $f(x)$ 在 $[b, a]$ 上连续, 在 (b, a) 内可导, 由拉格朗日中值定理知, 至少存在一点 $\xi \in (b, a)$, 使

$$f(a) - f(b) = f'(\xi)(a-b),$$

即 $\ln a - \ln b = \frac{1}{\xi}(a-b)$. 又, $0 < b < \xi < a$, 故 $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{b}$, 因此

$$\frac{a-b}{a} < \frac{a-b}{\xi} < \frac{a-b}{b},$$

即 $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$.

11. 证明下列不等式:

$$(1) |\arctan a - \arctan b| \leq |a - b|;$$

(2) 当 $x > 1$ 时, $e^x > e \cdot x$.

证 (1) 当 $a = b$ 时, 显然成立. 当 $a \neq b$ 时, 取函数 $f(x) = \arctan x$, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 或 $[b, a]$ 上连续, 在 (a, b) 或 (b, a) 内可导, 由拉格朗日中值定理知, 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 或 (b, a) , 使

$$f(a) - f(b) = f'(\xi)(a - b),$$

$$\text{即 } \arctan a - \arctan b = \frac{1}{1 + \xi^2}(a - b), \text{ 故}$$

$$|\arctan a - \arctan b| = \frac{1}{1 + \xi^2}|a - b| \leq |a - b|.$$

(2) 取函数 $f(t) = e^t$, $f(t)$ 在 $[1, x]$ 上连续, 在 $(1, x)$ 内可导. 由拉格朗日中值定理知, 至少存在一点 $\xi \in (1, x)$, 使

$$f(x) - f(1) = f'(\xi)(x - 1),$$

$$\text{即 } e^x - e = e^\xi(x - 1). \text{ 又, } 1 < \xi < x, \text{ 故 } e^\xi > e, \text{ 因此}$$

$$e^x - e > e(x - 1),$$

$$\text{即 } e^x > x \cdot e.$$

12. 证明方程 $x^5 + x - 1 = 0$ 只有一个正根.

证 取函数 $f(x) = x^5 + x - 1$, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续,

$$f(0) = -1 < 0, \quad f(1) = 1 > 0,$$

由零点定理知, 至少存在点 $x_1 \in (0, 1)$, 使 $f(x_1) = 0$, 即方程 $x^5 + x - 1 = 0$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个正根.

若方程 $x^5 + x - 1 = 0$ 还有一个正根 x_2 , 即 $f(x_2) = 0$, 则由 $f(x) = x^5 + x - 1$ 在 $[x_1, x_2]$ (或 $[x_2, x_1]$) 上连续, 在 (x_1, x_2) (或 (x_2, x_1)) 内可导, 知 $f(x)$ 满足罗尔定理条件, 故至少存在点 $\xi \in (x_1, x_2)$ (或 (x_2, x_1)), 使

$$f'(\xi) = 0.$$

但 $f'(\xi) = 5\xi^4 + 1 > 0$, 矛盾. 因此方程 $x^5 + x - 1 = 0$ 只有一个正根.

13. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 证明在 (a, b) 内有一点 ξ , 使

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = (b - a) \begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

证 取函数 $F(x) = \begin{vmatrix} f(a) & f(x) \\ g(a) & g(x) \end{vmatrix}$, 由 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导知 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 由拉格朗日中值定理知, 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使 $F(b) - F(a) = F'(\xi)(b - a)$. 即

$$F(b) = \begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}, \quad F(a) = \begin{vmatrix} f(a) & f(a) \\ g(a) & g(a) \end{vmatrix} = 0,$$

$$F'(\xi) = \begin{vmatrix} 0 & f(x) \\ 0 & g(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f(a) & f'(x) \\ g(a) & g'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix},$$

故

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix} (b-a).$$

例 14. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足关系式 $f'(x) = f(x)$, 且 $f(0) = 1$, 则 $f(x) = e^x$.

证 取函数 $F(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 因

$$F'(x) = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{e^{2x}} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} = 0,$$

故 $F(x) = C$. 又 $F(0) = C = f(0) = 1$, 因此 $F(x) = 1$, 即 $\frac{f(x)}{e^x} = 1$, 故 $f(x) = e^x$.

例 15. 设函数 $y = f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有 n 阶导数, 且 $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$, 试用柯西中值定理证明:

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} \quad (0 < \theta < 1).$$

证 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有 n 阶导数, 在该邻域内任取点 x , 由柯西中值定理得

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f(x) - f(0)}{x^n - 0^n} = \frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{n-1}},$$

其中 ξ_1 介于 $0, x$ 之间. 又

$$\frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{n-1}} = \frac{f'(\xi_1) - f'(0)}{n(\xi_1^{n-1} - 0^{n-1})} = \frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)\xi_2^{n-2}},$$

其中 ξ_2 介于 $0, \xi_1$ 之间. 依此类推, 得

$$\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{n!\xi_{n-1}} = \frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - f^{(n-1)}(0)}{n!(\xi_{n-1} - 0)} = \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!},$$

其中 ξ_n 介于 $0, \xi_{n-1}$ 之间, 记 $\xi_n = \theta x$ ($0 < \theta < 1$), 因此

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!} = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} \quad (0 < \theta < 1).$$

习题 3-2

洛必达法则

例 1. 用洛必达法则求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\tan 5x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} (a \neq 0);$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \tan 7x}{\ln \tan 2x};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 3x};$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\arccot x};$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{\sec x - \cos x};$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x;$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{1/x^2};$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right);$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x;$$

$$(15) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x};$$

$$(16) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\tan x}.$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1.$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 2.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{3 \cos 3x}{5 \sec^2 5x} = -\frac{3}{5}.$$

$$\begin{aligned} (5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\sin x} \cos x}{2(\pi - 2x) \cdot (-2)} = -\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cot x}{4(\pi - 2x)} \\ &= -\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\csc^2 x}{-8} = -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \frac{m}{n} a^{m-n} (a \neq 0).$$

$$\begin{aligned} (7) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \tan 7x}{\ln \tan 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\tan 7x} \cdot \sec^2 7x \cdot 7}{\frac{1}{\tan 2x} \sec^2 2x \cdot 2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan 2x}{\tan 7x} \cdot \frac{\sec^2 7x}{\sec^2 2x} \cdot \frac{7}{2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{7x} \cdot \frac{\sec^2 7x}{\sec^2 2x} \cdot \frac{7}{2} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (8) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 3x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{3 \sec^2 3x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 3x}{3 \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-6 \cos 3x \sin 3x}{-6 \cos x \sin x} \\ &= -\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x} = -\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-3 \sin 3x}{-\sin x} = 3. \end{aligned}$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{1 + x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x^2}{x + x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} + 1}{\frac{1}{x} + 1} = 1.$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{\sec x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{1 + x^2}}{\sec x \tan x + \sin x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{\cos^2 x}{1 + \cos^2 x} \cdot \frac{2}{1 + x^2} = 1.$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \sec^2 2x} = \frac{1}{2}.$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1/x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1/x^2} \left(\frac{1}{x^2}\right)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{1/x^2} = +\infty.$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)}, \text{而}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{a}{x}} \cdot \left(-\frac{a}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{1 + \frac{a}{x}} = a,$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a.$$

$$(15) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x}, \text{而}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\cos x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0,$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} = e^0 = 1$.

$$(16) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\tan x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x}{x} + \frac{-\ln x}{x}}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x} = e^0 = 1.$$

注 在用洛必达法则求极限时,除了注意用洛必达法则对极限类型等的要求以外,还要注意求极限的过程中合理地应用重要极限、等价无穷小、初等变换等方法,以使运算过程更快捷、简洁.

2. 验证极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$ 存在,但不能用洛必达法则得出.

证 由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + \sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1}$ 不存在,故不能使用洛必达法则来求此极

限,但并不表明此极限不存在,此极限可用以下方法求得:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) = 1 + 0 = 1.$$

$$x^2 \sin \frac{1}{x}$$

3. 验证极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ 存在,但不能用洛必达法则得出.

证 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(x^2 \sin \frac{1}{x} \right)'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$ 不存在,故不能使用洛必达法则

来求此极限,但可用以下方法求此极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{\sin x} \cdot x \sin \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 1 \cdot 0 = 0.$$

4. 讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ e^{-\frac{1}{2}}, & x \leq 0 \end{cases}$$

在点 $x = 0$ 处的连续性.

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \ln \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]},$$

而

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left[\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2},$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^{-\frac{1}{2}},$$

又

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}, f(0) = e^{-\frac{1}{2}}.$$

因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$, 故函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

习题 3-3

泰勒公式

1. 按 $(x-4)$ 的幂展开多项式 $f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$.

解 因为

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 15x^2 + 2x - 3, f''(x) = 12x^2 - 30x + 2, \\ f'''(x) &= 24x - 30, f^{(4)}(x) = 24, f^{(n)}(x) = 0 (n \geq 5). \\ f(4) &= -56, f'(4) = 21, f''(4) = 74, f'''(4) = 66, f^{(4)}(4) = 24, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} &x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4 \\ &= f(4) + f'(4)(x-4) + \frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2 + \frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3 + \frac{f^{(4)}(4)}{4!}(x-4)^4 \\ &= -56 + 21(x-4) + 37(x-4)^2 + 11(x-4)^3 + (x-4)^4. \end{aligned}$$

2. 应用麦克劳林公式, 按 x 的幂展开函数 $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^3$.

$$\begin{aligned} \text{解 } f(x) &= x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 45x^3 + 30x^2 - 9x + 1, \quad f(0) = 1, \\ f'(x) &= 6x^5 - 45x^4 + 120x^3 - 135x^2 + 60x - 9, \quad f'(0) = -9, \\ f''(x) &= 30x^4 - 180x^3 + 360x^2 - 270x + 60, \quad f''(0) = 60, \\ f'''(x) &= 120x^3 - 540x^2 + 720x - 270, \quad f'''(0) = -270, \\ f^{(4)}(x) &= 360x^2 - 1080x + 720, \quad f^{(4)}(0) = 720, \\ f^{(5)}(x) &= 720x - 1080, \quad f^{(5)}(0) = -1080, \\ f^{(6)}(x) &= 720, \quad f^{(6)}(0) = 720, \\ f^{(n)}(x) &= 0 \quad (n \geq 7), \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} &(x^2 - 3x + 1)^3 \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6 \\ &= 1 - 9x + 30x^2 - 45x^3 + 30x^4 - 9x^5 + x^6. \end{aligned}$$

3. 求函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 按 $(x-4)$ 的幂展开的带有拉格朗日余项的 3 阶泰勒公式.

解 因为 $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$, $f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$,
 $f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}$. $f(4) = 2$, $f'(4) = \frac{1}{4}$, $f''(4) = -\frac{1}{32}$, $f'''(4) = \frac{3}{256}$.

故

$$\begin{aligned}\sqrt{x} &= f(4) + f'(4)(x-4) + \frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2 + \frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-4)^4 \\ &= 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3 - \frac{15}{384\xi^{7/2}}(x-4)^4,\end{aligned}$$

其中 ξ 介于 x 与 4 之间.

4. 求函数 $f(x) = \ln x$ 按 $(x-2)$ 的幂展开的带有佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式.

解 因为

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}, \quad f^{(n)}(2) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2^n},$$

故

$$\begin{aligned}\ln x &= f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 + \cdots + \\ &\quad \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n + o[(x-2)^n] \\ &= \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{2^3}(x-2)^2 + \frac{1}{3 \cdot 2^3}(x-2)^3 + \cdots + \\ &\quad (-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot 2^n}(x-2)^n + o[(x-2)^n].\end{aligned}$$

5. 求函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 按 $(x+1)$ 的幂展开的带有拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式.

解 因为

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}, \quad f^{(n)}(-1) = -n!,$$

故

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3 + \cdots + \\ &\quad \frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(x+1)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x+1)^{n+1} \\ &= -[1 + (x+1) + (x+1)^2 + \cdots + (x+1)^n] + (-1)^{n+1} \xi^{-(n+2)} (x+1)^{n+1},\end{aligned}$$

其中 ξ 介于 x 与 -1 之间.

6. 求函数 $f(x) = \tan x$ 的带有佩亚诺余项的 3 阶麦克劳林公式.

解 因为

$$f(x) = \tan x, \quad f'(x) = \sec^2 x, \quad f''(x) = 2 \sec^2 x \tan x,$$

$$\begin{aligned}f''(x) &= 4\sec^2 x \tan^2 x + 2\sec^4 x, \\f^{(4)}(x) &= 8\sec^2 x \tan^3 x + 8\sec^4 x \tan x + 8\sec^4 x \tan x \\&= 8\sec^2 x \tan^3 x + 16\sec^4 x \tan x \\&= \frac{8(\sin^2 x + 2)\sin x}{\cos^5 x}, \\f(0) &= 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = 2,\end{aligned}$$

故 $f(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

例 7. 求函数 $f(x) = xe^x$ 的带有佩亚诺余项的 n 阶麦克劳林公式.

解 因为 $f(x) = xe^x, f^{(n)}(x) = (n+x)e^x$ (见习题 2-3, 11(4)), $f^{(n)}(0) = n$, 故

$$\begin{aligned}xe^x &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + o(x^n) \\&= x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{(n-1)!} + o(x^n).\end{aligned}$$

例 8. 验证当 $0 < x \leq \frac{1}{2}$ 时, 按公式 $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ 计算 e^x 的近似值时, 所产生的误

差小于 0.01, 并求 \sqrt{e} 的近似值, 使误差小于 0.01.

证 设 $f(x) = e^x$, 则 $f^{(n)}(0) = 1$, 故 $f(x) = e^x$ 的三阶麦克劳林公式为 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{e^\xi}{4!}x^4$, 其中 ξ 介于 0 与 x 之间. 按 $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ 计算 e^x 的近似值时, 其误差为

$$|R_3(x)| = \frac{e^\xi}{4!}x^4.$$

当 $0 < x \leq \frac{1}{2}$ 时, $0 < \xi < \frac{1}{2}$, $|R_3(x)| \leq \frac{3^{\frac{1}{2}}}{4!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \approx 0.0045 < 0.01$,

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \approx 1.645.$$

例 9. 应用三阶泰勒公式求下列各数的近似值, 并估计误差:

$$(1) \sqrt[3]{30}; \quad (2) \sin 18^\circ.$$

解 (1) 因为

$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}} \\&\approx 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^3 \\&= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3, \\R_3(x) &= \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)}{4!}(1+\xi)^{\frac{1}{3}-4}x^4,\end{aligned}$$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间. 故

$$\sqrt[3]{30} = \sqrt[3]{27+3} = 3\sqrt[3]{1+\frac{1}{9}} \approx 3 \left[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} - \frac{1}{9} \left(\frac{1}{9} \right)^2 + \frac{5}{81} \left(\frac{1}{9} \right)^3 \right] \approx 3.10724.$$

误差

$$|R_3| = 3 \cdot \left| \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \left(\frac{1}{3} - 2 \right) \left(\frac{1}{3} - 3 \right)}{4!} (1 + \xi)^{\frac{1}{3}-4} \left(\frac{1}{9} \right)^4 \right|,$$

ξ 介于 0 与 $\frac{1}{9}$ 之间, 即 $0 < \xi < \frac{1}{9}$, 因此

$$|R_3| = \left| \frac{80}{4! \cdot 3^{11}} \right| \approx 1.88 \times 10^{-5}.$$

(2) 已知 $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$, $R_4(x) = \frac{\sin(\xi + \frac{5}{2}\pi)}{5!} x^5$, ξ 介于 0 与 $\frac{\pi}{10}$ 之间, 故

$$\sin 18^\circ = \sin \frac{\pi}{10} \approx \frac{\pi}{10} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{10} \right)^3 \approx 0.3090,$$

$$|R_4| \leq \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{10} \right)^5 \approx 2.55 \times 10^{-5}.$$

注 利用 $R_3(x) = \frac{\sin(\xi + \frac{4}{2}\pi)}{4!} x^4$, $\xi \in (0, \frac{\pi}{10})$, 可得误差 $|R_3| \leq \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{10} \right)^4 \approx 1.3 \times 10^{-4}$.

*** 10.** 利用泰勒公式求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt[4]{x^4 - 2x^3});$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2 [x + \ln(1-x)]};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2}) \sin x^2};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right].$$

$$\text{解 } (1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt[4]{x^4 - 2x^3})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\left(1 + \frac{3}{x} \right)^{\frac{1}{3}} - \left(1 - \frac{2}{x} \right)^{\frac{1}{4}} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3}{2} + \frac{o\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \right] = \frac{3}{2}.$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) - 1 - \left(-\frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4)}{x^2 \left[x + \left(-x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) \right]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{8}\right)x^4 + o(x^4)}{-\frac{1}{2}x^4 + o(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{12} + \frac{o(x^4)}{x^4}}{-\frac{1}{2} + \frac{o(x^4)}{x^4}} = \frac{-\frac{1}{12}}{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}.$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2}) \sin x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 - \left(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)\right)}{\left[1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - 1 - x^2 + o(x^2)\right] \left[x^2 + o(x^2)\right]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{8}x^4 + o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4 + o(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{8} + \frac{o(x^4)}{x^4}}{-\frac{3}{2} + \frac{o(x^4)}{x^4}} = \frac{\frac{1}{8}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{12}.$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x + \frac{1}{2} + \frac{o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} \right] = \frac{1}{2}.$$

习题 3-4**函数的单调性与曲线的凹凸性**

1. 判定函数 $f(x) = \arctan x - x$ 的单调性.

解 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = -\frac{x^2}{1+x^2} \leq 0$ 且 $f'(x) = 0$ 仅在 $x = 0$ 时成立. 因此函数

$f(x) = \arctan x - x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调减少.

2. 判定函数 $f(x) = x + \cos x$ 的单调性.

解 $f'(x) = 1 - \sin x \geq 0$, 且当 $x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $f'(x) = 0$. 可以看出在 $(-\infty, +\infty)$ 的任一有限子区间上, 使 $f'(x) = 0$ 的点只有有限个. 因此函数 $f(x) = x + \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加.

3. 确定下列函数的单调区间:

$$(1) y = 2x^3 - 6x^2 - 18x - 7; \quad (2) y = 2x + \frac{8}{x} (x > 0);$$

$$(3) y = \frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}; \quad (4) y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2});$$

$$(5) y = (x-1)(x+1)^3; \quad (6) y = \sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2} (a > 0);$$

$$(7) y = x^n e^{-x} \quad (n > 0, x \geq 0); \quad (8) y = x + |\sin 2x|.$$

解 (1) 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且

$$y' = 6x^2 - 12x - 18 = 6(x-3)(x+1).$$

令 $y' = 0$, 得驻点 $x_1 = -1, x_2 = 3$, 这两个驻点把 $(-\infty, +\infty)$ 分成三个部分区间 $(-\infty, -1], [-1, 3], [3, +\infty)$.

当 $-\infty < x < -1$ 及 $3 < x < +\infty$ 时, $y' > 0$, 因此函数在 $(-\infty, -1], [3, +\infty)$ 上单调增加; 当 $-1 < x < 3$ 时, $y' < 0$, 因此函数在 $[-1, 3]$ 上单调减少.

(2) 函数的定义域为 $(0, +\infty)$, 在 $(0, +\infty)$ 内可导, 且

$$y' = 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^2 - 8}{x^2} = \frac{2(x-2)(x+2)}{x^2}.$$

令 $y' = 0$, 得驻点 $x_1 = -2$ (舍去), $x_2 = 2$. 它把 $(0, +\infty)$ 分成两个部分区间 $(0, 2], [2, +\infty)$.

当 $0 < x < 2$ 时, $y' < 0$, 因此函数在 $(0, 2]$ 上单调减少; 当 $2 < x < +\infty$ 时, $y' > 0$, 因此函数在 $[2, +\infty)$ 上单调增加.

(3) 函数除 $x=0$ 外处处可导, 且

$$y' = \frac{-10(12x^2 - 18x + 6)}{(4x^3 - 9x^2 + 6x)^2} = \frac{-120\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)}{(4x^3 - 9x^2 + 6x)^2}.$$

令 $y' = 0$, 得驻点 $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1$. 这两个驻点把区间 $(-\infty, 0)$ 及 $(0, +\infty)$ 分成四个部分区间 $(-\infty, 0), \left(0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right], [1, +\infty)$.

当 $-\infty < x < 0, 0 < x < \frac{1}{2}, 1 < x < +\infty$ 时, $y' < 0$, 因此函数在 $(-\infty, 0), \left(0, \frac{1}{2}\right], [1, +\infty)$ 内单调减少; 当 $\frac{1}{2} < x < 1$ 时, $y' > 0$, 因此函数在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上单调增加.

(4) 函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且

$$y' = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0,$$

因此函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加.

(5) 函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导,且

$$\begin{aligned} y' &= (x+1)^3 + (x-1) \cdot 3(x+1)^2 \\ &= (x+1)^2(4x-2) = 4(x+1)^2 \left(x - \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

令 $y'=0$,得驻点 $x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{2}$,这两个驻点把区间 $(-\infty, +\infty)$ 分成三个部分区间 $(-\infty, -1], [-1, \frac{1}{2}]$ 及 $[\frac{1}{2}, +\infty)$.

当 $-\infty < x < -1$ 及 $-1 < x < \frac{1}{2}$ 时, $y' < 0$,因此函数在 $(-\infty, \frac{1}{2})$ 上单调减少;当 $\frac{1}{2} < x < +\infty$ 时, $y' > 0$,因此函数在 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调增加.

(6) 函数在 $x_1 = \frac{a}{2}, x_2 = a$ 处不可导且在 $(-\infty, \frac{a}{2}), (\frac{a}{2}, a), (a, +\infty)$ 内可

$$\text{导, } y' = \frac{-6 \left(x - \frac{2a}{3} \right)}{3\sqrt[3]{(2x-a)^2(a-x)}}.$$

令 $y'=0$,得驻点 $x_3 = \frac{2a}{3}$,这个驻点及 $x_1 = \frac{a}{2}, x_2 = a$ 把区间 $(-\infty, +\infty)$ 分成四个部分区间 $(-\infty, \frac{a}{2}], [\frac{a}{2}, \frac{2}{3}a], [\frac{2}{3}a, a], [a, +\infty)$.

当 $-\infty < x < \frac{a}{2}$ 及 $\frac{a}{2} < x < \frac{2}{3}a, a < x < +\infty$ 时, $y' > 0$,因此函数在 $(-\infty, \frac{2}{3}a]$,
 $[a, +\infty)$ 上单调增加;当 $\frac{2}{3}a < x < a$ 时, $y' < 0$,因此函数在 $[\frac{2}{3}a, a]$ 上单调减少.

(7) 函数在 $[0, +\infty)$ 内可导,且

$$y' = nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} = x^{n-1}e^{-x}(n-x).$$

令 $y'=0$,得驻点 $x_1 = n$,这个驻点把区间 $[0, +\infty)$ 分成两个部分区间 $[0, n], [n, +\infty)$.

当 $0 < x < n$ 时, $y' > 0$,因此函数在 $[0, n]$ 上单调增加;当 $n < x < +\infty$ 时, $y' < 0$,因此函数在 $[n, +\infty)$ 上单调减少.

(8) 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,且

$$y = \begin{cases} x + \sin 2x, & n\pi \leq x \leq n\pi + \frac{\pi}{2}, \\ x - \sin 2x, & n\pi + \frac{\pi}{2} < x \leq (n+1)\pi \end{cases} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$y' = \begin{cases} 1 + 2\cos 2x, & n\pi < x < n\pi + \frac{\pi}{2}, \\ 1 - 2\cos 2x, & n\pi + \frac{\pi}{2} < x < (n+1)\pi \end{cases} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

令 $y' = 0$, 得驻点 $x = n\pi + \frac{\pi}{3}$ 及 $x = n\pi + \frac{5\pi}{6}$, 按照这些驻点将区间 $(-\infty, +\infty)$ 分成下列部分区间

$$\left[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{3} \right], \left[n\pi + \frac{\pi}{3}, n\pi + \frac{\pi}{2} \right], \left[n\pi + \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{5\pi}{6} \right], \left[n\pi + \frac{5\pi}{6}, (n+1)\pi \right] \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

当 $n\pi < x < n\pi + \frac{\pi}{3}$ 时, $y' > 0$, 因此函数在 $\left[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{3} \right]$ 上单调增加;

当 $n\pi + \frac{\pi}{3} < x < n\pi + \frac{\pi}{2}$ 时, $y' < 0$, 因此函数在 $\left[n\pi + \frac{\pi}{3}, n\pi + \frac{\pi}{2} \right]$ 上单调减少;

当 $n\pi + \frac{\pi}{2} < x < n\pi + \frac{5\pi}{6}$ 时, $y' > 0$, 因此函数在 $\left[n\pi + \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{5\pi}{6} \right]$ 上单调增加;

当 $n\pi + \frac{5\pi}{6} < x < (n+1)\pi$ 时, $y' < 0$, 因此函数在 $\left[n\pi + \frac{5\pi}{6}, (n+1)\pi \right]$ 上单调减少.

综上可知, 函数在 $\left[\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right]$ 上单调增加, 在 $\left[\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right]$ 上单调减少

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

4. 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导, $y = f(x)$ 的图形如图 3-1 所示, 则导函数 $f'(x)$ 的图形为图 3-2 中所示的四个图形中的哪一个?

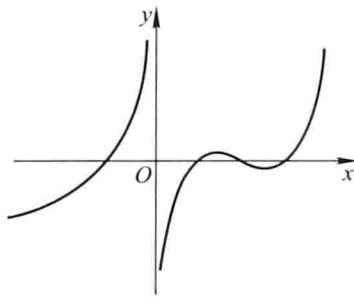


图 3-1

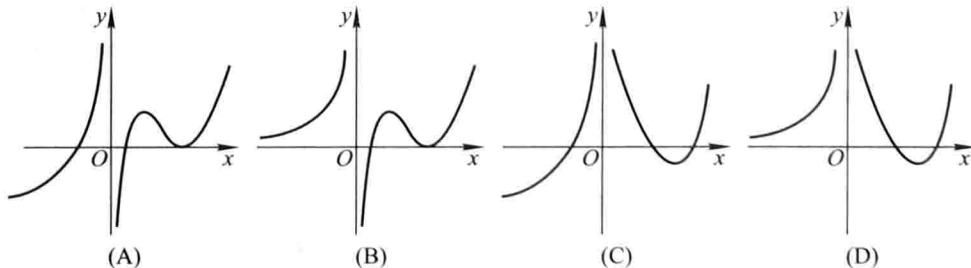


图 3-2

解 由所给图形知,当 $x < 0$ 时, $y = f(x)$ 单调增加,从而 $f'(x) \geq 0$,故排除(A),(C);当 $x > 0$ 时,随着 x 增大, $y = f(x)$ 先单调增加,然后单调减少,再单调增加,因此随着 x 增大,先有 $f'(x) \geq 0$,然后 $f'(x) \leq 0$,继而又有 $f'(x) \geq 0$,故应选(D).

5. 证明下列不等式:

$$(1) \text{ 当 } x > 0 \text{ 时}, 1 + \frac{1}{2}x > \sqrt{1+x};$$

$$(2) \text{ 当 } x > 0 \text{ 时}, 1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2};$$

$$(3) \text{ 当 } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ 时}, \sin x + \tan x > 2x;$$

$$(4) \text{ 当 } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ 时}, \tan x > x + \frac{1}{3}x^3;$$

$$(5) \text{ 当 } x > 4 \text{ 时}, 2^x > x^2.$$

$$\text{解 } (1) \text{ 取 } f(t) = 1 + \frac{1}{2}t - \sqrt{1+t}, t \in [0, x].$$

$$f'(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1+t}} = \frac{\sqrt{1+t}-1}{2\sqrt{1+t}} > 0, \quad t \in (0, x).$$

因此,函数 $f(t)$ 在 $[0, x]$ 上单调增加,故当 $x > 0$ 时, $f(x) > f(0)$,即

$$1 + \frac{1}{2}x - \sqrt{1+x} > 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 - \sqrt{1+0} = 0,$$

$$\text{亦即 } 1 + \frac{x}{2} > \sqrt{1+x} \quad (x > 0).$$

$$(2) \text{ 取 } f(t) = 1 + t \ln(t + \sqrt{1+t^2}) - \sqrt{1+t^2}, t \in [0, x].$$

$$f'(t) = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) > 0, t \in (0, x).$$

因此,函数 $f(t)$ 在 $[0, x]$ 上单调增加,故当 $x > 0$ 时, $f(x) > f(0)$,即

$$1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} > 1 + 0 - 1 = 0,$$

$$\text{亦即 } 1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2} \quad (x > 0).$$

$$(3) \text{ 取 } f(x) = \sin x + \tan x - 2x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$f'(x) = \cos x + \sec^2 x - 2,$$

$$f''(x) = -\sin x + 2\sec^2 x \tan x = \sin x(2\sec^3 x - 1) > 0, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

因此, $f'(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加,故当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f'(x) > f'(0) = 0$,从而 $f(x)$ 在

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加,即 $f(x) > f(0) = 0$,亦即

$$\sin x + \tan x - 2x > 0, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

所以, $\sin x + \tan x > 2x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$(4) \text{ 取 } f(x) = \tan x - x - \frac{1}{3}x^3, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$f'(x) = \sec^2 x - 1 - x^2 = \tan^2 x - x^2 = (\tan x - x)(\tan x + x).$$

由

$$g'(x) = (\tan x - x)' = \sec^2 x - 1 = \tan^2 x > 0$$

知 $g(x) = \tan x - x$ 在 $[0, x]$ 上单调增加, 即

$$g(x) = \tan x - x > g(0) = 0.$$

故 $f'(x) > 0, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. 从而 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加, 因此 $f(x) > f(0)$,

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. 即当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\tan x - x - \frac{1}{3}x^3 > 0$. 从而

$$\tan x > x + \frac{1}{3}x^3 \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

$$(5) \text{ 取 } f(t) = t \ln 2 - 2 \ln t, t \in [4, x].$$

$$f'(t) = \ln 2 - \frac{2}{t} = \frac{\ln 4}{2} - \frac{2}{x} > \frac{\ln e}{2} - \frac{2}{4} = 0,$$

故当 $x > 4$ 时, $f(x)$ 单调增加, 从而 $f(x) > f(4) = 0$, 即

$$x \ln 2 - 2 \ln x > 0,$$

亦即 $2^x > x^2 (x > 4)$.

6. 讨论方程 $\ln x = ax$ (其中 $a > 0$) 有几个实根?

解 取函数 $f(x) = \ln x - ax, x \in (0, +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{1}{x} - a.$$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = \frac{1}{a}$.

当 $0 < x < \frac{1}{a}$ 时, $f'(x) > 0$, 因此函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 内单调增加; 当 $\frac{1}{a} < x < +\infty$

时, $f'(x) < 0$, 因此函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 内单调减少. 从而 $f\left(\frac{1}{a}\right)$ 为最大值, 又 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, 故

当 $f\left(\frac{1}{a}\right) = \ln \frac{1}{a} - 1 = 0$, 即 $a = \frac{1}{e}$ 时, 曲线 $y = \ln x - ax$ 与 x 轴仅有一个交点, 这

时, 原方程有惟一实根.

当 $f\left(\frac{1}{a}\right) = \ln \frac{1}{a} - 1 > 0$, 即 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时, 曲线 $y = \ln x - ax$ 与 x 轴有两个交点, 这

时,原方程有两个实根.

当 $f\left(\frac{1}{a}\right) = \ln \frac{1}{a} - 1 < 0$, 即 $a > \frac{1}{e}$ 时, 曲线 $y = \ln x - ax$ 与 x 轴没有交点, 这时, 原方程没有实根.

7. 单调函数的导函数是否必为单调函数? 研究下面这个例子:

$$f(x) = x + \sin x.$$

解 单调函数的导函数不一定是单调函数. 例如函数 $f(x) = x + \sin x$, 由于 $f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$, 且 $f'(x)$ 在任何有限区间内只有有限个零点. 因此函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内为单调增加函数. 但它的导函数 $f'(x) = 1 + \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内却不是单调函数.

8. 设 I 为一无穷区间, 函数 $f(x)$ 在 I 上连续, I 内可导, 试证明: 如果在 I 的任一有限的子区间上, $f'(x) \geq 0$ (或 $f'(x) \leq 0$), 且等号仅在有限多个点处成立, 那么 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加 (或单调减少).

证 在 I 内任取两点 x_1, x_2 , 不妨设 $x_1 < x_2$. 在 $[x_1, x_2]$ 上应用拉格朗日中值定理, 得到

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0 \quad (\text{或} \leq 0),$$

其中 $\xi \in (x_1, x_2)$, 即 $f(x_2) \geq f(x_1)$ (或 $f(x_2) \leq f(x_1)$), 因此, $f(x)$ 在 I 上单调不减 (或单调不增), 从而对任一 $x \in [x_1, x_2]$, 有

$$f(x_2) \geq f(x) \geq f(x_1) \quad (\text{或} f(x_2) \leq f(x) \leq f(x_1)).$$

若 $f(x_1) = f(x_2)$, 则有 $f(x) \equiv f(x_1)$, $x \in [x_1, x_2]$, 故 $f'(x) \equiv 0$, $x \in [x_1, x_2]$, 这与 $f'(x) = 0$ 在 I 的任一有限子区间上仅在有限多个点处成立的假定相矛盾, 因此 $f(x_2) > f(x_1)$ (或 $f(x_2) < f(x_1)$), 即 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加 (或单调减少).

9. 判定下列曲线的凹凸性:

$$(1) y = 4x - x^2; \quad (2) y = \sin x;$$

$$(3) y = x + \frac{1}{x} \quad (x > 0); \quad (4) y = x \arctan x.$$

解 (1) $y' = 4 - 2x$, $y'' = -2 < 0$. 故曲线 $y = 4x - x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是凸的.

(2) $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, 令 $y'' = 0$, 得 $x = 0$.

当 $-\infty < x < 0$ 时, $y'' < 0$, 曲线 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, 0]$ 上是凸的.

当 $0 < x < +\infty$ 时, $y'' > 0$, 曲线 $y = \sin x$ 在 $[0, +\infty)$ 上是凹的.

(3) $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$, $y'' = \frac{2}{x^3} > 0$ ($x > 0$), 故曲线 $y = x + \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内是凹的.

(4) $y' = \arctan x + \frac{x}{1+x^2}$, $y'' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1+x^2-x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{(1+x^2)^2} > 0$,

故曲线 $y = x \arctan x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是凹的.

10. 求下列函数图形的拐点及凹或凸的区间:

(1) $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 5$;

(2) $y = xe^{-x}$;

(3) $y = (x+1)^4 + e^x$;

(4) $y = \ln(x^2 + 1)$;

(5) $y = e^{\arctan x}$;

(6) $y = x^4(12\ln x - 7)$.

解 (1) $y' = 3x^2 - 10x + 3$, $y'' = 6x - 10$, 令 $y'' = 0$ 得 $x = \frac{5}{3}$.

当 $-\infty < x < \frac{5}{3}$ 时, $y'' < 0$, 因此曲线在 $(-\infty, \frac{5}{3})$ 上是凸的; 当 $\frac{5}{3} < x < +\infty$ 时,

$y'' > 0$, 因此曲线在 $(\frac{5}{3}, +\infty)$ 上是凹的. 故点 $(\frac{5}{3}, \frac{20}{27})$ 为拐点.

(2) $y' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$, $y'' = -e^{-x} + (1-x)(-e^{-x}) = e^{-x}(x-2)$.

令 $y'' = 0$, 得 $x = 2$.

当 $-\infty < x < 2$ 时, $y'' < 0$, 因此曲线在 $(-\infty, 2)$ 上是凸的; 当 $2 < x < +\infty$ 时,

$y'' > 0$, 因此曲线在 $(2, +\infty)$ 上是凹的. 故点 $(2, \frac{2}{e^2})$ 为拐点.

(3) $y' = 4(x+1)^3 + e^x$, $y'' = 12(x+1)^2 + e^x > 0$, 因此曲线在 $(-\infty, +\infty)$ 内是凹的, 曲线没有拐点.

(4) $y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$, $y'' = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2(x-1)(x+1)}{(x^2 + 1)^2}$.

令 $y'' = 0$, 得 $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

当 $-\infty < x < -1$ 时, $y'' < 0$, 因此曲线在 $(-\infty, -1)$ 上是凸的; 当 $-1 < x < 1$ 时, $y'' > 0$, 因此曲线在 $[-1, 1]$ 上是凹的; 当 $1 < x < +\infty$ 时, $y'' < 0$, 因此曲线在 $[1, +\infty)$ 上是凸的. 曲线有两个拐点, 分别为 $(-1, \ln 2)$, $(1, \ln 2)$.

(5) $y' = e^{\arctan x} \frac{1}{1+x^2}$, $y'' = \frac{-2e^{\arctan x} \left(x - \frac{1}{2}\right)}{(1+x^2)^2}$, 令 $y'' = 0$, 得 $x = \frac{1}{2}$.

当 $-\infty < x < \frac{1}{2}$ 时, $y'' > 0$, 因此曲线在 $(-\infty, \frac{1}{2})$ 上是凹的; 当 $\frac{1}{2} < x < +\infty$ 时,

$y'' < 0$, 因此曲线在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上是凸的. 故点 $(\frac{1}{2}, e^{\arctan \frac{1}{2}})$ 为拐点.

(6) $y' = 4x^3(12\ln x - 7) + x^4 \cdot 12 \frac{1}{x} = 4x^3(12\ln x - 4)$,

$y'' = 12x^2(12\ln x - 4) + 4x^3 \cdot 12 \frac{1}{x} = 144x^2 \ln x (x > 0)$.

令 $y'' = 0$, 得 $x = 1$.

当 $0 < x < 1$ 时, $y'' < 0$, 因此曲线在 $(0, 1)$ 上是凸的; 当 $1 < x < +\infty$ 时, $y'' > 0$, 因此曲线在 $[1, +\infty)$ 上是凹的. 故点 $(1, -7)$ 为拐点.

11. 利用函数图形的凹凸性, 证明下列不等式:

$$(1) \frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \quad (x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1);$$

$$(2) \frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}} \quad (x \neq y);$$

$$(3) x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2} \quad (x > 0, y > 0, x \neq y).$$

证 (1) 取函数 $f(t) = t^n, t \in (0, +\infty)$.

$$f'(t) = nt^{n-1}, f''(t) = n(n-1)t^{n-2}, t \in (0, +\infty).$$

当 $n > 1$ 时, $f''(t) > 0, t \in (0, +\infty)$. 因此 $f(t) = t^n$ 在 $(0, +\infty)$ 内图形是凹的, 故对任何 $x > 0, y > 0, x \neq y$, 恒有

$$\frac{1}{2}[f(x) + f(y)] > f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

$$\text{即 } \frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \quad (x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1).$$

(2) 取函数 $f(t) = e^t, t \in (-\infty, +\infty)$. $f'(t) = e^t, f''(t) = e^t > 0, t \in (-\infty, +\infty)$.

因此 $f(t) = e^t$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内图形是凹的, 故对任何 $x, y \in (-\infty, +\infty), x \neq y$, 恒有

$$\frac{1}{2}[f(x) + f(y)] > f\left(\frac{x+y}{2}\right), \text{ 即}$$

$$\frac{1}{2}(e^x + e^y) > e^{\frac{x+y}{2}} \quad (x \neq y).$$

(3) 取函数 $f(t) = t \ln t, t \in (0, +\infty), f'(t) = \ln t + 1, f''(t) = \frac{1}{t} > 0,$

$t \in (0, +\infty)$, 因此 $f(t) = t \ln t$ 在 $(0, +\infty)$ 内图形是凹的, 故对任何 $x, y \in (0, +\infty), x \neq y$, 恒有

$$\frac{1}{2}[f(x) + f(y)] > f\left(\frac{x+y}{2}\right), \text{ 即}$$

$$\frac{1}{2}(x \ln x + y \ln y) > \frac{x+y}{2} \ln \frac{x+y}{2},$$

亦即

$$x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2} \quad (x \neq y).$$

12. 试证明曲线 $y = \frac{x-1}{x^2+1}$ 有三个拐点位于同一直线上.

$$\text{证 } y' = \frac{(x^2+1) - 2x(x-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2},$$

$$y'' = \frac{(-2x+2)(x^2+1)^2 - 2(x^2+1) \cdot 2x(-x^2+2x+1)}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{2x^3 - 6x^2 - 6x + 2}{(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{2(x+1)[x - (2-\sqrt{3})][x - (2+\sqrt{3})]}{(x^2+1)^3}.$$

令 $y'' = 0$, 得 $x_1 = -1$, $x_2 = 2 - \sqrt{3}$, $x_3 = 2 + \sqrt{3}$.

当 $-\infty < x < -1$ 时, $y'' < 0$, 因此曲线在 $(-\infty, -1]$ 上是凸的;

当 $-1 < x < 2 - \sqrt{3}$ 时, $y'' > 0$, 因此曲线在 $[-1, 2 - \sqrt{3}]$ 上是凹的;

当 $2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}$ 时, $y'' < 0$, 因此曲线在 $[2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}]$ 上是凸的;

当 $2 + \sqrt{3} < x < +\infty$ 时, $y'' > 0$, 因此曲线在 $[2 + \sqrt{3}, +\infty)$ 上是凹的,

故曲线有三个拐点, 分别为 $(-1, -1)$, $\left(2 - \sqrt{3}, \frac{1 - \sqrt{3}}{4(2 - \sqrt{3})}\right)$, $\left(2 + \sqrt{3}, \frac{1 + \sqrt{3}}{4(2 + \sqrt{3})}\right)$.

由于

$$\frac{\frac{1 - \sqrt{3}}{4(2 - \sqrt{3})} - (-1)}{2 - \sqrt{3} - (-1)} = \frac{\frac{1 + \sqrt{3}}{4(2 + \sqrt{3})} - (-1)}{2 + \sqrt{3} - (-1)} = \frac{1}{4},$$

故这三个拐点在一条直线上.

13. 问 a, b 为何值时, 点 $(1, 3)$ 为曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点?

$$\text{解 } y' = 3ax^2 + 2bx, y'' = 6ax + 2b = 6a\left(x + \frac{b}{3a}\right).$$

令 $y'' = 0$, 得 $x_0 = -\frac{b}{3a}$.

当 $-\infty < x < -\frac{b}{3a}$ 时, $y'' < 0$, 因此曲线在 $(-\infty, -\frac{b}{3a}]$ 上是凸的;

当 $-\frac{b}{3a} < x < +\infty$ 时, $y'' > 0$. 因此曲线在 $\left(-\frac{b}{3a}, +\infty\right)$ 上是凹的;

当 $x_0 = -\frac{b}{3a}$ 时, $y_0 = a\left(-\frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 = \frac{2b^3}{27a^2}$. 由于 y'' 在 x_0 的两侧变号, 故点 $\left(-\frac{b}{3a}, \frac{2b^3}{27a^2}\right)$ 为曲线的惟一拐点.

$$\text{从而要使点 } (1, 3) \text{ 为拐点, 则} \begin{cases} -\frac{b}{3a} = 1, \\ \frac{2b^3}{27a^2} = 3, \end{cases} \text{解得 } a = -\frac{3}{2}, b = \frac{9}{2}.$$

14. 试决定曲线 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 中的 a, b, c, d , 使得 $x = -2$ 处曲线有水平切线, $(1, -10)$ 为拐点, 且点 $(-2, 44)$ 在曲线上.

$$\text{解 } y' = 3ax^2 + 2bx + c, y'' = 6ax + 2b.$$

根据题意有 $y(-2) = 44$, $y'(-2) = 0$, $y(1) = -10$, $y''(1) = 0$, 即

$$\begin{cases} -8a + 4b - 2c + d = 44, \\ 12a - 4b + c = 0, \\ a + b + c + d = -10, \\ 6a + 2b = 0. \end{cases}$$

解此方程组得 $a = 1, b = -3, c = -24, d = 16$.

15. 试决定 $y = k(x^2 - 3)^2$ 中 k 的值, 使曲线的拐点处的法线通过原点.

解 $y' = 2k(x^2 - 3) \cdot 2x = 4kx(x^2 - 3), y'' = 4k(x^2 - 3) + 4kx \cdot 2x = 12k(x - 1)(x + 1)$.

令 $y'' = 0$, 得 $x_1 = -1, x_2 = 1$.

当 $-\infty < x < -1$ 时, $y'' > 0$, 因此曲线在 $(-\infty, -1]$ 上是凹的; 当 $-1 < x < 1$ 时, $y'' < 0$, 因此曲线在 $[-1, 1]$ 上是凸的; 当 $1 < x < +\infty$ 时, $y'' > 0$, 因此曲线在 $[1, +\infty)$ 上是凹的, 从而知 $(-1, 4k), (1, 4k)$ 为曲线的拐点.

由 $y'|_{x=-1} = 8k$ 知过点 $(-1, 4k)$ 的法线方程为

$$Y - 4k = -\frac{1}{8k}(X + 1).$$

要使该法线过原点, 则 $(0, 0)$ 应满足这方程, 将 $X = 0, Y = 0$ 代入上式, 得

$$k = \pm \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

由 $y'|_{x=1} = -8k$ 知, 过点 $(1, 4k)$ 的法线方程为

$$Y - 4k = \frac{1}{8k}(X - 1).$$

同理, 要使该法线过原点, 将 $X = 0, Y = 0$ 代入上式得 $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{8}$. 所以, 当 $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{8}$ 时,

该曲线的拐点处的法线通过原点.

16. 设 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某邻域内具有三阶连续导数, 如果 $f''(x_0) = 0$, 而 $f'''(x_0) \neq 0$, 试问 $(x_0, f(x_0))$ 是否为拐点? 为什么?

解 已知 $f'''(x_0) \neq 0$, 不妨设 $f'''(x_0) > 0$, 由于 $f'''(x)$ 在 $x = x_0$ 的某个邻域内连续, 因此必存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时 $f'''(x) > 0$, 故在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内 $f''(x)$ 单调增加. 又已知 $f''(x_0) = 0$, 从而当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时 $f''(x) < f''(x_0) = 0$, 即函数 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内的图形是凸的, 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f''(x) > f''(x_0) = 0$, 即函数 $f(x)$ 在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内的图形是凹的, 所以点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线的拐点.

习题 3-5

函数的极值与最大值最小值

1. 求下列函数的极值:

$$(1) y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7; \quad (2) y = x - \ln(1 + x);$$

(3) $y = -x^4 + 2x^2$;

(4) $y = x + \sqrt{1-x}$;

(5) $y = \frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$;

(6) $y = \frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$;

(7) $y = e^x \cos x$;

(8) $y = x^{\frac{1}{x}}$;

(9) $y = 3 - 2(x+1)^{\frac{1}{3}}$;

(10) $y = x + \tan x$.

解 (1) $y' = 6x^2 - 12x - 18, y'' = 12x - 12$.

令 $y' = 0$ 得驻点 $x_1 = -1, x_2 = 3$.

由 $y''|_{x=-1} = -24 < 0$ 知 $y|_{x=-1} = 17$ 为极大值, 由 $y''|_{x=3} = 24 > 0$ 知 $y|_{x=3} = -47$ 为极小值.

(2) 函数的定义域为 $(-1, +\infty)$, 在 $(-1, +\infty)$ 内可导, 且

$$y' = 1 - \frac{1}{1+x}, \quad y'' = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (x > -1).$$

令 $y' = 0$ 得驻点 $x = 0$. 由 $y''|_{x=0} = 1 > 0$ 知 $y|_{x=0} = 0$ 为极小值.

(3) $y' = -4x^3 + 4x = -4x(x^2 - 1), y'' = -12x^2 + 4$.

令 $y' = 0$ 得驻点 $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 0$.

由 $y''|_{x=-1} = -8 < 0$ 知 $y|_{x=-1} = 1$ 为极大值, 由 $y''|_{x=1} = -8 < 0$ 知 $y|_{x=1} = 1$

为极小值, 由 $y''|_{x=0} = 4 > 0$ 知 $y|_{x=0} = 0$ 为极小值.

(4) 函数的定义域为 $(-\infty, 1]$, 在 $(-\infty, -1)$ 内可导, 且

$$y' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2\sqrt{1-x}-1}{2\sqrt{1-x}}, y'' = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1-x)^{3/2}}.$$

令 $y' = 0$ 得驻点 $x = \frac{3}{4}$, 由 $y''|_{x=\frac{3}{4}} = -2 < 0$ 知 $y|_{x=\frac{3}{4}} = \frac{5}{4}$ 为极大值.

$$(5) y' = \frac{3\sqrt{4+5x^2} - (1+3x) \cdot \frac{10x}{2\sqrt{4+5x^2}}}{4+5x^2} = \frac{12-5x}{(4+5x^2)^{3/2}} = \frac{-5\left(x-\frac{12}{5}\right)}{(4+5x^2)^{3/2}}.$$

令 $y' = 0$ 得驻点 $x = \frac{12}{5}$.

当 $-\infty < x < \frac{12}{5}$ 时, $y' > 0$, 因此函数在 $(-\infty, \frac{12}{5})$ 上单调增加; 当 $\frac{12}{5} < x < +\infty$ 时

$y' < 0$, 因此函数在 $[\frac{12}{5}, +\infty)$ 上单调减少, 从而 $y\left(\frac{12}{5}\right) = \frac{\sqrt{205}}{10}$ 为极大值.

$$(6) y' = \frac{(6x+4)(x^2+x+1) - (2x+1)(3x^2+4x+4)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}.$$

令 $y' = 0$ 得驻点 $x_1 = -2, x_2 = 0$.

当 $-\infty < x < -2$ 时, $y' < 0$, 因此函数在 $(-\infty, -2)$ 上单调减少; 当 $-2 < x < 0$ 时, $y' > 0$, 因此函数在 $[-2, 0]$ 上单调增加; 当 $0 < x < +\infty$ 时, $y' < 0$, 因此函数在

$[0, +\infty)$ 上单调减少. 从而可知 $y(-2) = \frac{8}{3}$ 为极小值, $y(0) = 4$ 为极大值.

$$(7) \quad y' = e^x \cos x - e^x \sin x = e^x (\cos x - \sin x), \quad y'' = -2e^x \sin x.$$

令 $y' = 0$, 得驻点 $x_k = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$, $x'_{k+1} = 2k\pi + \frac{5}{4}\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

由 $y''|_{x=2k\pi+\frac{\pi}{4}} = -\sqrt{2}e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}} < 0$ 知 $y|_{x=2k\pi+\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

为极大值.

由 $y''|_{x'=2k\pi+\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{2k\pi+\frac{5\pi}{4}} > 0$ 知 $y|_{x=2k\pi+\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{2k\pi+\frac{5}{4}\pi}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

为极小值.

(8) 函数的定义域为 $(0, +\infty)$, 在 $(0, +\infty)$ 内可导, 且

$$y' = (e^{\frac{1}{x}\ln x})' = e^{\frac{1}{x}\ln x} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \ln x),$$

令 $y' = 0$, 得驻点 $x = e$.

当 $0 < x < e$ 时, $y' > 0$, 因此函数在 $(0, e]$ 上单调增加; 当 $e < x < +\infty$ 时, $y' < 0$, 因此函数在 $[e, +\infty)$ 上单调减少, 从而可知 $y(e) = e^{\frac{1}{e}}$ 为极大值.

(9) 当 $x \neq -1$ 时, $y' = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(x+1)^{2/3}} < 0$. 又 $x = -1$ 时函数有定义. 因此可知函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调减少, 从而函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内无极值.

(10) 由 $y' = 1 + \sec^2 x > 0$ 知所给函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加, 从而函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内无极值.

2. 试证明: 如果函数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 满足条件 $b^2 - 3ac < 0$, 那么这函数没有极值.

证 $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. 由 $b^2 - 3ac < 0$ 知 $a \neq 0, c \neq 0, y'$ 是二次三项式,

$$\Delta = (2b)^2 - 4(3a) \cdot c = 4(b^2 - 3ac) < 0.$$

当 $a > 0$ 时, y' 的图像开口向上, 且在 x 轴上方, 故 $y' > 0$, 从而所给函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加. 当 $a < 0$ 时, y' 的图像开口向下, 且在 x 轴下方, 故 $y' < 0$, 从而所给函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调减少. 因此, 只要条件 $b^2 - 3ac < 0$ 成立, 所给函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调, 故函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内无极值.

3. 试问 a 为何值时, 函数 $f(x) = a \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$ 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处取得极值? 它是极大值还是极小值? 并求此极值.

解 $f'(x) = a \cos x + \cos 3x$, 函数在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处取得极值, 则 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$, 即 $a \cos \frac{\pi}{3} + \cos \pi = 0$, 故 $a = 2$.

又 $f''(x) = -2 \sin x - 3 \sin 3x$, $f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2 \sin \frac{\pi}{3} - 3 \sin \pi = -\sqrt{3} < 0$, 因此

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}\sin\pi = \sqrt{3} \text{ 为极大值.}$$

4. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数, 且 $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, 证明:

(1) 当 n 为奇数时, $f(x)$ 在 x_0 处不取得极值;

(2) 当 n 为偶数时, $f(x)$ 在 x_0 处取得极值, 且当 $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时, $f(x_0)$ 为极大值, 当 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时, $f(x_0)$ 为极小值.

证 由含佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式及已知条件, 得

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

即 $f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$, 由此式可知 $f(x) - f(x_0)$ 在 x_0 某邻域内的符号由 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ 在 x_0 某邻域内的符号决定.

(1) 当 n 为奇数时, $(x - x_0)^n$ 在 x_0 两侧异号, 所以 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ 在 x_0 两侧异号, 从而 $f(x) - f(x_0)$ 在 x_0 两侧异号, 故 $f(x)$ 在 x_0 处不取得极值.

(2) 当 n 为偶数时, 在 x_0 两侧 $(x - x_0)^n > 0$, 若 $f^{(n)}(x_0) < 0$, 则 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n < 0$, 从而 $f(x) - f(x_0) < 0$, 即 $f(x) < f(x_0)$, 故 $f(x_0)$ 为极大值; 若 $f^{(n)}(x_0) > 0$, 则 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n > 0$, 从而 $f(x) - f(x_0) > 0$, 即 $f(x) > f(x_0)$, 故 $f(x_0)$ 为极小值.

5. 试利用习题 4 的结论, 讨论函数 $f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$ 的极值.

解 $f'(x) = e^x - e^{-x} - 2\sin x$, $f''(x) = e^x + e^{-x} - 2\cos x$, $f'''(x) = e^x - e^{-x} + 2\sin x$, $f^{(4)}(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$, 故 $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = 4 > 0$, 因此函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有极小值, 极小值为 4.

6. 求下列函数的最大值、最小值:

$$(1) y = 2x^3 - 3x^2, -1 \leq x \leq 4;$$

$$(2) y = x^4 - 8x^2 + 2, -1 \leq x \leq 3;$$

$$(3) y = x + \sqrt{1-x}, -5 \leq x \leq 1.$$

解 (1) 函数在 $[-1, 4]$ 上可导, 且 $y' = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$.

令 $y' = 0$, 得驻点 $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. 比较 $y|_{x=-1} = -5$, $y|_{x=0} = 0$, $y|_{x=1} = -1$, $y|_{x=4} = 80$, 得函数的最大值为 $y|_{x=4} = 80$, 最小值为 $y|_{x=-1} = -5$.

(2) 函数在 $[-1, 3]$ 上可导, 且

$$y' = 4x^3 - 16x = 4x(x-2)(x+2).$$

令 $y' = 0$ 得驻点 $x_1 = -2$ (舍去), $x_2 = 0$, $x_3 = 2$.

比较 $y|_{x=-1} = -5$, $y|_{x=0} = 2$, $y|_{x=2} = -14$, $y|_{x=3} = 11$, 得函数的最大值为 $y|_{x=3} = 11$, 最小值为 $y|_{x=2} = -14$.

$$(3) \text{ 函数在 } [-5, 1] \text{ 上可导, 且 } y' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2\sqrt{1-x}-1}{2\sqrt{1-x}}.$$

令 $y' = 0$, 得驻点 $x = \frac{3}{4}$. 比较 $y|_{x=-5} = -5 + \sqrt{6}$, $y|_{x=\frac{3}{4}} = \frac{5}{4}$, $y|_{x=1} = 1$, 得函数的最大值为 $y|_{x=\frac{3}{4}} = \frac{5}{4}$, 最小值为 $y|_{x=-5} = \sqrt{6} - 5$.

7. 问函数 $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x - 7$ ($1 \leq x \leq 4$) 在何处取得最大值? 并求出它的最大值.

解 函数在 $[1, 4]$ 上可导, 且 $y' = 6x^2 - 12x - 18 = 6(x+1)(x-3)$.

令 $y' = 0$, 得驻点 $x_1 = -1$ (舍去), $x_2 = 3$. 比较 $y|_{x=1} = -29$, $y|_{x=3} = -61$, $y|_{x=4} = -47$, 得函数在 $x=1$ 处取得最大值, 且最大值为 $y|_{x=1} = -29$.

8. 问函数 $y = x^2 - \frac{54}{x}$ ($x < 0$) 在何处取得最小值?

解 函数在 $(-\infty, 0)$ 内可导, 且 $y' = 2x + \frac{54}{x^2} = \frac{2(x^3 + 27)}{x^2}$, $y'' = 2 - \frac{108}{x^3}$.

令 $y' = 0$, 得驻点 $x = -3$. 由 $y''|_{x=-3} = 6 > 0$ 知 $x = -3$ 为极小值点. 又函数在 $(-\infty, 0)$ 内的驻点惟一, 故极小值点就是最小值点, 即 $x = -3$ 为最小值点, 且最小值为 $y|_{x=-3} = 27$.

9. 问函数 $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ ($x \geq 0$) 在何处取得最大值?

解 函数在 $[0, +\infty)$ 上可导, 且

$$y' = \frac{x^2 + 1 - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2},$$

$$y'' = \frac{-2x(3 - x^2)}{(x^2 + 1)^3}.$$

令 $y' = 0$, 得驻点 $x = -1$ (舍去), $x = 1$. 由 $y''|_{x=1} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2} < 0$ 知 $x = 1$ 为极大值点, 又函数在 $[0, +\infty)$ 上的驻点惟一, 故极大值点就是最大值点, 即 $x = 1$ 为最大值点, 且最大值为 $y|_{x=1} = \frac{1}{2}$.

10. 某车间靠墙壁要盖一间长方形小屋, 现有存砖只够砌 20 m 长的墙壁. 问应围成怎样的长方形才能使这间小屋的面积最大?

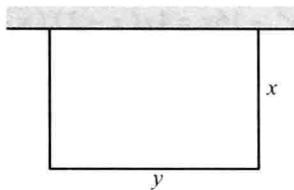


图 3-3

解 如图 3-3, 设这间小屋的宽为 x , 长为 y , 则小屋的面积为 $S = xy$.

已知 $2x + y = 20$, 即 $y = 20 - 2x$. 故

$$S = x(20 - 2x) = 20x - 2x^2, x \in (0, 10).$$

$S' = 20 - 4x, S'' = -4$. 令 $S' = 0$, 得驻点 $x = 5$. 由 $S'' < 0$ 知 $x = 5$ 为极大值点, 又驻点惟一, 故极大值点就是最大值点, 即当宽为 5 m, 长为 10 m 时这间小屋的面积最大.

11. 要造一圆柱形油罐, 体积为 V , 问底半径 r 和高 h 等于多少时, 才能使表面积最小? 这时底直径与高的比是多少?

解 已知 $\pi r^2 h = V$, 即 $h = \frac{V}{\pi r^2}$. 圆柱形油罐的表面积

$$\begin{aligned} A &= 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} \\ &= 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}, \quad r \in (0, +\infty). \\ A' &= 4\pi r - \frac{2V}{r^2}, \quad A'' = 4\pi + \frac{4V}{r^3}. \end{aligned}$$

令 $A' = 0$, 得 $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. 由 $A'' \Big|_{r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}} = 4\pi + 8\pi = 12\pi > 0$, 知 $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 为极小值点,

又驻点惟一, 故极小值点就是最小值点. 此时 $h = \frac{V}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r$, 即

$2r : h = 1 : 1$, 所以当底半径为 $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 和高 $h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时, 才能使表面积最小. 这时底直径与高的比为 1:1.

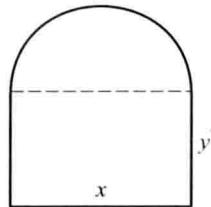


图 3-4

12. 某地区防空洞的截面拟建成矩形加半圆(图 3-4). 截面的面积为 5 m^2 . 问底宽 x 为多少时才能使截面的周长最小, 从而使建造时所用的材料最省?

解 设截面的周长为 l , 已知 $l = x + 2y + \frac{\pi x}{2}$ 及 $xy + \frac{\pi}{2} \left(\frac{x}{2} \right)^2 = 5$, 即 $y = \frac{5}{x} - \frac{\pi x}{8}$. 故

$$l = x + \frac{\pi x}{4} + \frac{10}{x}, \quad x \in \left(0, \sqrt{\frac{40}{\pi}} \right).$$

$$l' = 1 + \frac{\pi}{4} - \frac{10}{x^2}, \quad l'' = \frac{20}{x^3}.$$

令 $l' = 0$, 得驻点 $x = \sqrt{\frac{40}{4 + \pi}}$. 由 $l'' \Big|_{x=\sqrt{\frac{40}{4+\pi}}} = \frac{20}{\left(\frac{40}{4+\pi} \right)^{3/2}} > 0$ 知 $x = \sqrt{\frac{40}{4 + \pi}}$ 为极小

值点, 又驻点惟一, 故极小值点就是最小值点. 所以当截面的底宽为 $x = \sqrt{\frac{40}{4 + \pi}}$ 时, 才能使截面的周长最小, 从而使建造时所用的材料最省.

13. 设有质量为 5 kg 的物体, 置于水平面上, 受力 F 的作用而开始移动(图 3-5). 设摩擦系数 $\mu = 0.25$, 问力 F 与水平线的交角 α 为多少时, 才可使力 F 的大小为最小.

解 如图 3-5, 力 F 的大小用 $|F|$ 表示, 则由 $|F| \cos \alpha = (P - |F| \sin \alpha) \mu$ 知

$$|F| = \frac{\mu P}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}, \quad \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right].$$

设 $y = \cos \alpha + \mu \sin \alpha, \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$, 则 $y' = -\sin \alpha + \mu \cos \alpha$.

令 $y' = 0$, 得驻点 $\alpha_0 = \arctan \mu$. 又 $y'' \Big|_{\alpha=\alpha_0} = -\cos \alpha_0 - \mu \sin \alpha_0 < 0$, 所以驻点 α_0

为极大值点, 又驻点惟一, 因此 α_0 为函数 $y = y(\alpha)$ 的最大值点, 这时, 即 $\alpha = \alpha_0 = \arctan(0.25) \approx 14^\circ 2'$ 时, 力 F 的大小为最小.

14. 有一杠杆, 支点在它的一端. 在距支点 0.1 m 处挂一质量为 49 kg 的物体. 加力于杠杆的另一端使杠杆保持水平(图 3-6). 如果杠杆的线密度为 5 kg/m, 求最省力的杆长?

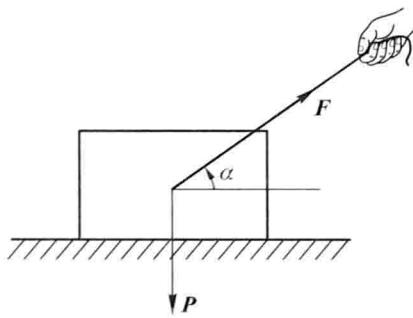


图 3-5

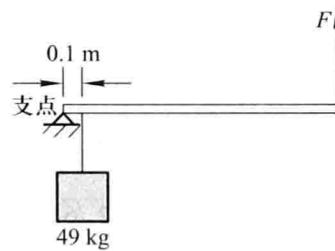


图 3-6

解 如图 3-6, 设最省力的杆长为 x (m), 则此时杠杆的重力为 $5gx$, 由力矩平衡公式

$$x|F| = 49g \times 0.1 + 5gx \cdot \frac{x}{2} \quad (x > 0),$$

知

$$|F| = \frac{4.9}{x}g + \frac{5}{2}gx, \quad |F|' = -\frac{4.9}{x^2}g + \frac{5}{2}g,$$

$$|F|'' = \frac{9.8}{x^3}g.$$

令 $|F|' = 0$, 得驻点 $x = 1.4$. 又 $|F|'' \Big|_{x=1.4} = \frac{9.8}{(1.4)^3}g > 0$, 故 $x = 1.4$ 为极小值点, 又

驻点惟一, 因此 $x = 1.4$ 也是最小值点, 即杆长为 1.4 m 时最省力.

15. 从一块半径为 R 的圆铁片上挖去一个扇形做成一个漏斗(图 3-7). 问留下的扇形的中心角 φ 取多大时, 做成的漏斗的容积最大?

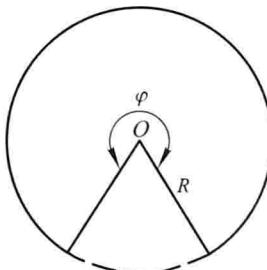


图 3-7

解 如图 3-7, 设漏斗的高为 h , 顶面的圆半径为 r , 则漏斗的容积为 $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, 又

$$2\pi r = R\varphi, \quad h = \sqrt{R^2 - r^2}.$$

故

$$V = \frac{R^3}{24\pi^2} \sqrt{4\pi^2\varphi^4 - \varphi^6} \quad (0 < \varphi < 2\pi),$$

$$V' = \frac{R^3}{24\pi^2} \cdot \frac{16\pi^2\varphi^3 - 6\varphi^5}{2\sqrt{4\pi^2\varphi^4 - \varphi^6}} = \frac{R^3}{24\pi^2} \cdot \frac{8\pi^2\varphi - 3\varphi^3}{\sqrt{4\pi^2 - \varphi^2}}.$$

令 $V' = 0$ 得 $\varphi = \sqrt{\frac{8}{3}}\pi = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$. 当 $0 < \varphi < \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 时, $V' > 0$, 故 V 在 $[0, \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi]$ 内单调增

加; 当 $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi < \varphi < 2\pi$ 时, $V' < 0$, 故 V 在 $[\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi, 2\pi)$ 内单调减少. 因此 $\varphi = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 为极大值点, 又驻点惟一, 从而 $\varphi = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 也是最大值点, 即当 φ 取 $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 时, 做成的漏斗的容积最大.

16. 某吊车的车身高为 1.5 m, 吊臂长 15 m. 现在要把一个 6 m 宽、2 m 高的屋架, 水平地吊到 6 m 高的柱子上去(图 3-8), 问能否吊得上去?

解 如图 3-8, 设吊臂对地面的倾角为 φ , 屋架能够吊到最大的高度为 h , 由

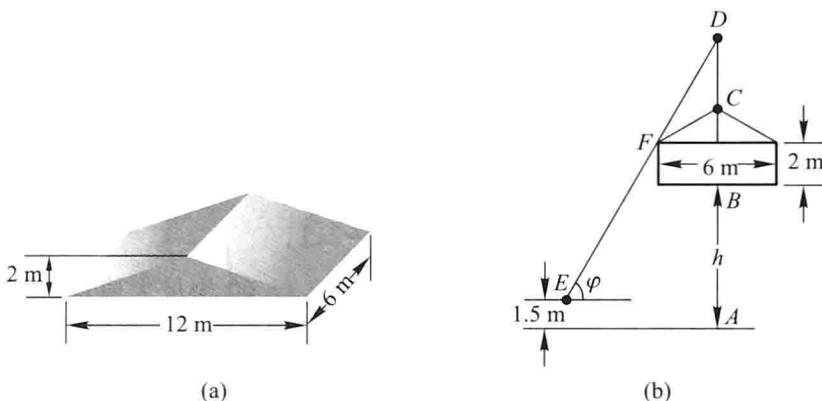


图 3-8

$15 \sin \varphi = h - 1.5 + 2 + 3 \tan \varphi$ 知

$$h = 15 \sin \varphi - 3 \tan \varphi - \frac{1}{2},$$

$$h' = 15 \cos \varphi - \frac{3}{\cos^2 \varphi}, \quad h'' = -15 \sin \varphi - \frac{6 \sin \varphi}{\cos^3 \varphi}.$$

令 $h' = 0$, 得 $\cos \varphi = \sqrt[3]{\frac{1}{5}}$, 即得唯一驻点 $\varphi_0 = \arccos \sqrt[3]{\frac{1}{5}} \approx 54^\circ 13'$. 又 $h'' \Big|_{\varphi=\varphi_0} < 0$,

故 $\varphi_0 \approx 54^\circ 13'$ 为极大值点也是最大值点. 即当 $\varphi_0 \approx 54^\circ 13'$ 时, h 达到最大值 $h_0 = 15 \sin 54^\circ 13' - 3 \tan 54^\circ 13' - \frac{1}{2} \approx 7.506$ m, 而柱子高只有 6 m, 所以能吊得上去.

17. 一房地产公司有 50 套公寓要出租. 当月租金定为 4000 元时, 公寓会全部租出去. 当月租金每增加 200 元时, 就会多一套公寓租不出去. 而租出去的公寓平均每月需花费 400 元的维修费. 试问房租定为多少时可获得最大收入?

解 设每套月房租为 x 元, 则租不出去的房子套数为 $\frac{x - 4000}{200} = \frac{x}{200} - 20$, 租出

去的套数为 $50 - \left(\frac{x}{200} - 20 \right) = 70 - \frac{x}{200}$, 租出的每套房子获利 $(x - 400)$ 元. 故总利润为

$$y = \left(70 - \frac{x}{200} \right) (x - 400) = -\frac{x^2}{200} + 72x - 28000.$$

$$y' = -\frac{x}{100} + 72, \quad y'' = \frac{-1}{100}.$$

令 $y' = 0$, 得驻点 $x = 7200$. 由 $y'' < 0$ 知 $x = 7200$ 为极大值点, 又驻点惟一, 这极大值点就是最大值点. 即当每套月房租定在 7200 元时, 可获得最大收入.

18. 已知制作一个背包的成本为 40 元, 如果每一个背包的售出价为 x 元, 售出的背包数由

$$n = \frac{a}{x - 40} + b(80 - x)$$

给出,其中 a, b 为正常数. 问什么样的售出价格能带来最大利润?

解 设利润函数为 $p(x)$, 则

$$p(x) = (x - 40)n = a + b(x - 40)(80 - x).$$

$$p'(x) = b(120 - 2x),$$

令 $p'(x) = 0$, 得 $x = 60$ (元). 由 $p''(x) = -2b < 0$ 知 $x = 60$ 为极大值点, 又驻点惟一, 这极大值点就是最大值点, 即售出价格定在 60 元时能带来最大利润.

习题 3-6

函数图形的描绘

描绘下列函数的图形:

$$1. \quad y = \frac{1}{5}(x^4 - 6x^2 + 8x + 7); \quad 2. \quad y = \frac{x}{1 + x^2};$$

$$3. \quad y = e^{-(x-1)^2}; \quad 4. \quad y = x^2 + \frac{1}{x};$$

$$5. \quad y = \frac{\cos x}{\cos 2x}.$$

解 1. (1) 所给函数 $y = \frac{1}{5}(x^4 - 6x^2 + 8x + 7)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$. 而

$$y' = \frac{1}{5}(4x^3 - 12x + 8) = \frac{4}{5}(x+2)(x-1)^2, y'' = \frac{4}{5}(3x^2 - 3) = \frac{12}{5}(x+1)(x-1).$$

(2) 令 $y' = 0$, 得 $x = -2, x = 1$, 令 $y'' = 0$, 得 $x = 1, x = -1$. 根据上述点将区间 $(-\infty, +\infty)$ 分成下列四个部分区间:

$$(-\infty, -2], [-2, -1], [-1, 1], [1, +\infty).$$

(3) 在各部分区间内 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的符号、相应曲线弧的升降及凹凸以及拐点等如下表:

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	-	0	+	+	+	0	+
y''	+	+	+	0	-	0	+
$y = f(x)$ 的图形		$\left(-2, -\frac{17}{5}\right)$		拐点		拐点	

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \text{ 图形没有铅直、水平、斜渐近线.}$$

$$(5) \quad \text{由 } f(-2) = -\frac{17}{5}, f(-1) = -\frac{6}{5}, f(1) = 2, f(0) = \frac{7}{5} \text{ 得图形上的四个点}$$

$$\left(-2, -\frac{17}{5}\right), \left(-1, -\frac{6}{5}\right), (1, 2), \left(0, \frac{7}{5}\right).$$

(6) 作图如图 3-9.

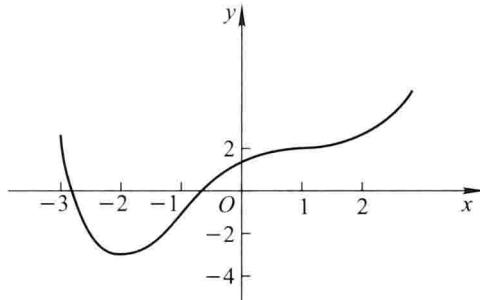


图 3-9

2. (1) 所给函数 $y = \frac{x}{1+x^2}$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$. 由于 $y = \frac{x}{1+x^2}$ 是奇函数,

它的图形关于原点对称, 因此可以只讨论 $[0, +\infty)$ 上该函数的图形, 求出

$$y' = \frac{1+x^2-x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},$$

$$y'' = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

(2) 在 $[0, +\infty)$ 内, y' 的零点为 $x=1$, y'' 的零点为 $x=\sqrt{3}$, 根据这两点把区间 $[0, +\infty)$ 分成三个区间: $[0, 1]$, $[1, \sqrt{3}]$, $[\sqrt{3}, +\infty)$.

(3) 在 $[0, +\infty)$ 内的各部分区间内 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的符号、相应曲线弧的升降及凹凸以及拐点等如下表:

x	0	$(0, 1)$	1	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
y'	+	+	0	-	-	-
y''	-	-	-	-	0	+
$y=f(x)$ 的图形	拐点	↑	$\left(1, \frac{1}{2}\right)$	↓	拐点	↑

(4) 由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$, 所以图形有一条水平渐近线 $y=0$, 图形无铅直渐近线及斜渐近线.

(5) 由 $f(0)=0$, $f(1)=\frac{1}{2}$, $f(\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{4}$ 得在 $[0, +\infty)$ 内图形上的点 $(0, 0)$,

$$\left(1, \frac{1}{2}\right), \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

(6) 利用图形的对称性, 作出图形如图 3-10.

3. (1) 所给函数 $y = e^{-(x-1)^2}$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 而

$$y' = -2(x-1)e^{-(x-1)^2},$$

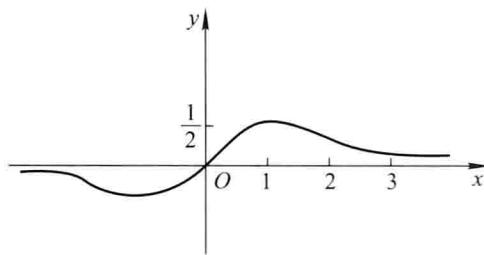


图 3-10

$$y'' = -4(2x^2 - 4x + 1)e^{-(x-1)^2}.$$

(2) 令 $y' = 0$, 得驻点 $x = 1$; 令 $y'' = 0$, 得 $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, 根据上述点将区间 $(-\infty, +\infty)$ 分成四个部分区间:

$$\left(-\infty, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right], \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right], \left[1, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right], \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right).$$

(3) 在各部分区间内 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的符号, 相应曲线弧的升降及凹凸以及拐点等如下表:

x	$\left(-\infty, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$	$1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$	1	$\left(1, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$	$1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$
y'	+	+	+	0	-	-	-
y''	+	0	-	-	-	0	+
$y=f(x)$ 的图形		拐点		(1,1)		拐点	

(4) 由 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-(x-1)^2} = 0$ 知图形有一条水平渐近线 $y=0$, 图形无铅直渐近线及斜渐近线.

(5) 由 $f(1) = 1, f\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}}, f(0) = e^{-1}, f\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}}$, 得图形上的点 $(1,1), \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right), (0, e^{-1}), \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

(6) 作图如图 3-11.

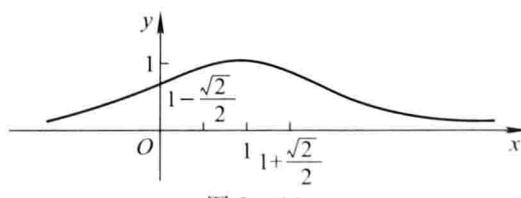


图 3-11

4. (1) 所给函数 $y = x^2 + \frac{1}{x}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

$$y' = 2x - \frac{1}{x^2}, \quad y'' = 2 + \frac{2}{x^3}.$$

(2) 令 $y' = 0$, 得 $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; 令 $y'' = 0$, 得 $x = -1$, 又 $x = 0$ 时函数无定义, 根据上述点, 将区间 $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ 分成四个部分区间: $(-\infty, -1], [-1, 0), \left(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right], \left[\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty\right)$.

(3) 在各部分区间内 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的符号, 相应曲线弧的升降及凹凸以及拐点等如下表:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$\left(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty\right)$
y'	-	-	-	-	0	+	
y''	+	0	-	+	+	+	
$y = f(x)$ 的图形		拐点					

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) = \infty$, 所以图形有一条铅直渐近线 $x = 0$, 图形无水平、斜渐近线.

(5) 由 $f(-1) = 0, f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$ 得在 $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ 内图形上的点 $(-1, 0), \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\right)$.

(6) 作图如图 3-12.

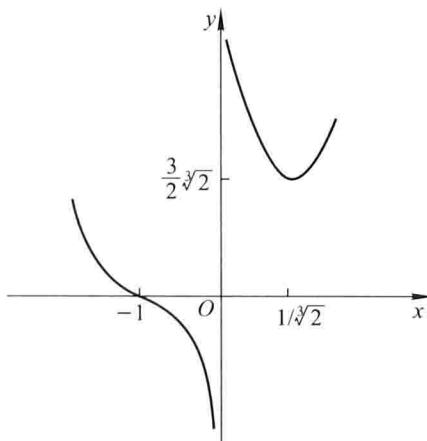


图 3-12

5. (1) 所给函数 $y = \frac{\cos x}{\cos 2x}$ 的定义域 $D = \left\{ x \mid x \neq \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, x \in \mathbf{R}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}$.

由于 $y = \frac{\cos x}{\cos 2x}$ 是偶函数, 它的图形关于 y 轴对称, 且由于函数是以 2π 为周期的函数, 因此可以只讨论 $[0, \pi]$ 部分的图形. 求出

$$y' = \frac{-\sin x \cos 2x + \cos x \cdot 2\sin 2x}{\cos^2(2x)} = \frac{\sin x(3 - 2\sin^2 x)}{\cos^2(2x)},$$

$$y'' = \frac{\cos x(3 + 12\sin^2 x - 4\sin^4 x)}{\cos^3(2x)}.$$

(2) 令 $y' = 0$, 得 $x = 0, x = \pi$; 令 $y'' = 0$, 得 $x = \frac{\pi}{2}$; 又函数在点 $x = \frac{\pi}{4}$ 及 $x = \frac{3}{4}\pi$ 处无定义. 根据这些点把区间 $[0, \pi]$ 分成四个部分区间: $\left[0, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right), \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$.

(3) 在 $[0, \pi]$ 内的各部分区间内 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的符号, 相应曲线弧的升降及凹凸以及拐点等如下表:

x	0	$\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$	$\frac{3\pi}{4}$	$\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$	π
y'	0	+		+	+	+		+	0
y''	+	+		-	+	+		-	-
$y = f(x)$ 的图形	$(0, 1)$				拐点				$(\pi, -1)$

(4) 由 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \infty$ 及 $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^+} f(x) = \infty$, 知图形有两条铅直渐近线: $x = \frac{\pi}{4}$ 及 $x = \frac{3}{4}\pi$, 图形无水平及斜渐近线.

(5) 由 $f(0) = 1, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ 得图形上的点 $(0, 1), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

(6) 利用图形对称性及函数的周期性, 作图如图 3-13.

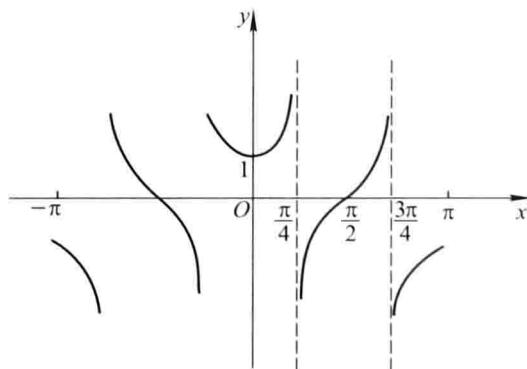


图 3-13

习题 3-7

曲率

1. 求椭圆 $4x^2 + y^2 = 4$ 在点 $(0, 2)$ 处的曲率.

解 由 $8x + 2yy' = 0$ 知 $y' = \frac{-4x}{y}$, $y'' = \frac{-16}{y^3}$. 故 $y'|_{x=0} = 0$, $y''|_{x=0} = -2$, 故在点

$(0, 2)$ 处的曲率为

$$K = \left. \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} \right|_{(0,2)} = 2.$$

2. 求曲线 $y = \ln \sec x$ 在点 (x, y) 处的曲率及曲率半径.

解 $y' = \frac{1}{\sec x} \cdot \sec x \tan x = \tan x$, $y'' = \sec^2 x$. 故曲率

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{\sec^2 x}{(1+\tan^2 x)^{3/2}} = |\cos x|,$$

曲率半径 $\rho = \frac{1}{K} = |\sec x|$.

3. 求抛物线 $y = x^2 - 4x + 3$ 在其顶点处的曲率及曲率半径.

解 抛物线的顶点为 $(2, -1)$, $y' = 2x - 4$, $y'' = 2$.

抛物线 $y = x^2 - 4x + 3$ 在其顶点处的曲率

$$K = \left. \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} \right|_{(2,-1)} = 2,$$

曲率半径 $\rho = \frac{1}{K} = \frac{1}{2}$.

4. 求曲线 $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ 在 $t = t_0$ 处的曲率.

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3a \sin^2 t \cos t}{-3a \cos^2 t \sin t} = -\tan t$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sec^2 t}{-3a \cos^2 t \sin t} = \frac{1}{3a \sin t \cos^4 t}.$$

故曲线在 $t = t_0$ 处的曲率为

$$K = \left. \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} \right|_{t=t_0} = \left. \frac{\left| \frac{1}{3a \sin t \cos^4 t} \right|}{[1 + (-\tan t)^2]^{3/2}} \right|_{t=t_0} = \frac{2}{|3 \sin(2t_0)|}.$$

5. 对数曲线 $y = \ln x$ 上哪一点处的曲率半径最小? 求出该点处的曲率半径.

解 $y' = \frac{1}{x}$, $y'' = -\frac{1}{x^2}$. 曲线的曲率

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\left| -\frac{1}{x^2} \right|}{\left[1 + \left(\frac{1}{x} \right)^2 \right]^{3/2}} = \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}},$$

曲率半径为

$$\rho = \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x}.$$

又 $\rho' = \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}(2x^2-1)}{x^2}$. 令 $\rho' = 0$ 得驻点 $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (舍去).

当 $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $\rho' < 0$, 即 ρ 在 $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上单调减少; 当 $\frac{\sqrt{2}}{2} < x < +\infty$ 时, $\rho' > 0$, 即 ρ 在 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ 上单调增加. 因此在 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 处 ρ 取得极小值; 驻点唯一, 从而 ρ 的极小值就是最小值, 因此最小的曲率半径为

$$\rho \Big|_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

6. 证明曲线 $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ 在点 (x, y) 处的曲率半径为 $\frac{y^2}{a}$.

证 $y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a}, y'' = \frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, 曲线在点 (x, y) 处的曲率为

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\left| \frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a} \right|}{\left(1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a} \right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}},$$

曲率半径为 $\rho = \frac{1}{K} = a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} = \frac{y^2}{a}$.

7. 一飞机沿抛物线路径 $y = \frac{x^2}{10000}$ (y 轴铅直向上, 单位为 m) 作俯冲飞行. 在坐标原点 O 处飞机的速度为 $v = 200$ m/s, 飞行员体重 $G = 70$ kg. 求飞机俯冲至最低点即原点 O 处时座椅对飞行员的反力.

解 $y' = \frac{2x}{10000} = \frac{x}{5000}, y'' = \frac{1}{5000}$.

抛物线在坐标原点的曲率半径为

$$\rho = \frac{1}{K} \Big|_{x=0} = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} \Big|_{x=0} = 5000.$$

所以向心力为 $F_1 = \frac{mv^2}{\rho} = \frac{70 \times 200^2}{5000} = 560$ (N).

座椅对飞行员的反力 F 等于飞行员的离心力及飞行员本身的重量对座椅的压力之和,因此

$$F = mg + F_1 = 70 \times 9.8 + 560 = 1246$$
 (N).

8. 汽车连同载重共 5 t, 在抛物线拱桥上行驶, 速度为 21.6 km/h, 桥的跨度为 10 m, 拱的矢高为 0.25 m(图 3-14). 求汽车越过桥顶时对桥的压力.

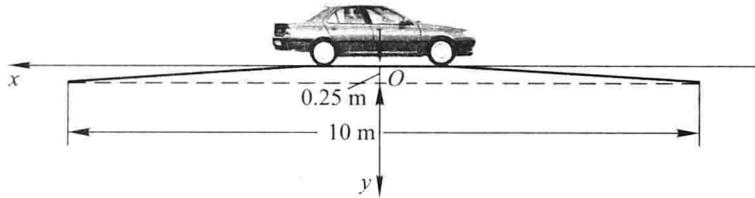


图 3-14

解 设立直角坐标系如图 3-14 所示, 设抛物线拱桥方程为

$$y = ax^2.$$

由于抛物线过点 $(5, 0.25)$, 代入方程得 $a = \left. \frac{y}{x^2} \right|_{(5, 0.25)} = \frac{0.25}{25} = 0.01$.

$$y' = 2ax, \quad y'' = 2a,$$

因此

$$\left. y' \right|_{x=0} = 0, \left. y'' \right|_{x=0} = 0.02,$$

$$\rho \left|_{x=0} \right. = \frac{1}{K} \left|_{x=0} \right. = \frac{\left(1 + y'^2 \right)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} \left|_{x=0} \right. = 50.$$

汽车越过桥顶点时对桥的压力为

$$F = mg - \frac{mv^2}{\rho} = 5 \times 10^3 \times 9.8 - \frac{5 \times 10^3 \times \left(\frac{21.6 \times 10^3}{3600} \right)^2}{50} = 45400$$
 (N).

- 9*. 求曲线 $y = \ln x$ 在与 x 轴交点处的曲率圆方程.

解 解方程组 $\begin{cases} y = \ln x, \\ y = 0, \end{cases}$ 得曲线与 x 轴的交点为 $(1, 0)$.

$$y' = \frac{1}{x}, \quad y'' = -\frac{1}{x^2}, \quad \text{故 } \left. y' \right|_{x=1} = 1, \left. y'' \right|_{x=1} = -1.$$

设曲线在点 $(1, 0)$ 处的曲率中心为 (α, β) , 则

$$\alpha = \left[x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} \right]_{(1,0)} = 1 - \frac{1 \cdot (1+1^2)}{-1} = 3,$$

$$\beta = \left[y + \frac{1+y'^2}{y''} \right]_{(1,0)} = 0 + \frac{1+1^2}{-1} = -2.$$

曲率半径

$$\rho = \frac{1}{K} \Big|_{x=1} = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} \Big|_{x=1} = \frac{(1+1^2)^{\frac{3}{2}}}{1} = \sqrt{8},$$

因此所求的曲率圆方程为 $(\xi - 3)^2 + (\eta + 2)^2 = 8$.

10. 求曲线 $y = \tan x$ 在点 $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ 处的曲率圆方程.

解 $y' = \sec^2 x, y'' = 2 \sec^2 x \tan x$, 故 $y'|_{x=\frac{\pi}{4}} = 2, y''|_{x=\frac{\pi}{4}} = 4$.

设曲线在点 $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ 处的曲率中心的坐标为 (α, β) , 则

$$\alpha = \left[x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} \right]_{\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)} = \frac{\pi}{4} - \frac{2(1+4)}{4} = \frac{\pi-10}{4},$$

$$\beta = \left[y + \frac{1+y'^2}{y''} \right]_{\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)} = 1 + \frac{1+4}{4} = \frac{9}{4}.$$

曲率半径

$$\rho = \frac{1}{K} \Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} \Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{5^{\frac{3}{2}}}{4},$$

因此所求的曲率圆方程为 $\left(\xi - \frac{\pi-10}{4}\right)^2 + \left(\eta - \frac{9}{4}\right)^2 = \frac{125}{16}$.

11. 求抛物线 $y^2 = 2px$ 的渐屈线方程.

解 由 $2yy' = 2p$, 及 $y'^2 + yy'' = 0$ 知 $y' = \frac{p}{y}, y'' = -\frac{p^2}{y^3}$.

故抛物线 $y^2 = 2px$ 的渐屈线方程为

$$\begin{cases} \alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = x - \frac{\frac{p}{y} \left[1 + \left(\frac{p}{y} \right)^2 \right]}{-\frac{p^2}{y^3}} = \frac{3y^2}{2p} + p, \\ \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = y + \frac{1 + \left(\frac{p}{y} \right)^2}{-\frac{p^2}{y^3}} = -\frac{y^3}{p^2}, \end{cases}$$

其中 y 为参数, 消去参数 y 得渐屈线方程为

$$27p\beta^2 = 8(\alpha - p)^3.$$

习题 3-8

方程的近似解

1. 试证明方程 $x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内有惟一的实根, 并用二分法求这个根的近似值, 使误差不超过 0.01.

解 设函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 1$, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(0) = -1 < 0$,

$f(1) = 3 > 0$. 由零点定理知至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使 $f(\xi) = 0$, 即方程 $x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个实根.

又 $f'(x) = 3x^2 - 6x + 6 = 3(x - 1)^2 + 3 > 0$, 故函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调增加, 从而方程 $f(x) = 0$, 即 $x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$ 在 $(0, 1)$ 内至多有一个实根. 因此方程 $x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$ 在 $(0, 1)$ 内有惟一的实根.

现用二分法求这个实根的近似值:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_n	0	0	0	0.125	0.125	0.157	0.173	0.180	0.180	0.182	0.183
b_n	1	0.5	0.25	0.25	0.188	0.188	0.188	0.188	0.184	0.184	0.184
中点 x_n	0.5	0.25	0.125	0.188	0.157	0.173	0.180	0.184	0.182	0.183	0.183
$f(x_n)$ 的符号	+	+	-	+	-	-	-	+	-	+	+

故使误差不超过 0.01 的根的近似值为 $\xi = 0.183$.

2. 试证明方程 $x^5 + 5x + 1 = 0$ 在区间 $(-1, 0)$ 内有惟一的实根, 并用切线法求这个根的近似值, 使误差不超过 0.01.

解 设函数 $f(x) = x^5 + 5x + 1$. $f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 上连续, 且 $f(-1) = -5 < 0, f(0) = 1 > 0$. 由零点定理知至少存在一点 $\xi \in (-1, 0)$, 使 $f(\xi) = 0$ 即方程 $x^5 + 5x + 1 = 0$ 在区间 $(-1, 0)$ 内至少有一实根.

又 $f'(x) = 5x^4 + 5 > 0$, 故函数 $f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 上单调增加, 从而方程 $f(x) = 0$ 即 $x^5 + 5x + 1 = 0$ 在 $(-1, 0)$ 内至多有一个实根, 因此方程 $x^5 + 5x + 1 = 0$ 在区间 $(-1, 0)$ 内有惟一的实根.

现用切线法求这个实根的近似值:

由 $f''(x) = 20x^3, f''(-1) = -20 < 0$ 知取 $x_0 = -1$, 利用递推公式 $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$, 得:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -1 - \frac{f(-1)}{f'(-1)} = -0.5,$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -0.5 - \frac{f(-0.5)}{f'(-0.5)} \approx -0.21,$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -0.21 - \frac{f(-0.21)}{f'(-0.21)} \approx -0.20,$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = -0.20 - \frac{f(-0.20)}{f'(-0.20)} \approx -0.20.$$

故使误差不超过 0.01 的根的近似值为 $\xi = -0.20$.

3. 用割线法求方程 $x^3 + 3x - 1 = 0$ 的近似根, 使误差不超过 0.01.

解 设 $f(x) = x^3 + 3x - 1$, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(0) = -1 < 0, f(1) = 3 > 0$, 由零点定理知至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使 $f(\xi) = 0$; 又 $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$, 故 $f(x)$ 在

[0,1]上单调增加,从而方程 $f(x)=0$ 在(0,1)内有惟一实根.

现用割线法求这个根的近似值:

由 $f''(x)=6x, f''(1)=6>0$ 知取 $x_0=1$. 又取 $x_1=0.8$, 利用递推公式 $x_{n+1}=$

$$x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n), \text{得:}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} \cdot f(x_1) = 0.8 - \frac{0.8 - 1}{f(0.8) - f(1)} \cdot f(0.8) \\ &\approx 0.449, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 - \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} \cdot f(x_2) = 0.449 - \frac{0.449 - 0.8}{f(0.449) - f(0.8)} \cdot f(0.449) \\ &\approx 0.345, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_4 &= x_3 - \frac{x_3 - x_2}{f(x_3) - f(x_2)} \cdot f(x_3) = 0.345 - \frac{0.345 - 0.449}{f(0.345) - f(0.449)} \cdot f(0.345) \\ &\approx 0.323, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_5 &= x_4 - \frac{x_4 - x_3}{f(x_4) - f(x_3)} \cdot f(x_4) = 0.323 - \frac{0.323 - 0.345}{f(0.323) - f(0.345)} \cdot f(0.323) \\ &\approx 0.322. \end{aligned}$$

至此,计算无需再继续,因 x_4 与 x_5 的前两位小数相同,故以 0.32 作为根的近似值,其误差小于 0.01.

4. 求方程 $x \lg x = 1$ 的近似根,使误差不超过 0.01.

解 设函数 $f(x) = x \lg x - 1$. $f(x)$ 在 [1,3] 上连续,且

$$f(1) = -1 < 0, \quad f(3) = 3 \lg 3 - 1 > 0,$$

由零点定理知至少存在一点 $\xi \in (1,3)$, 使 $f(\xi) = 0$, 即方程 $x \lg x = 1$ 在区间 (1,3) 内至少有一实根.

又 $f'(x) = \lg x + x \cdot \frac{1}{x \ln 10} = \lg x + \frac{1}{\ln 10} > 0 (x \geq 1)$, 故函数 $f(x)$ 在 [1,3] 上单调增加, 从而方程 $f(x)=0$, 即 $x \lg x = 1$ 在 (1,3) 内至多有一个实根, 因此方程 $x \lg x = 1$ 在 (1,3) 内有惟一的实根.

现用二分法求这个根的近似值:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	1	2	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50	2.50
b_n	3	3	3	2.75	2.63	2.57	2.53	2.52	2.51
中点 x_n	2	2.50	2.75	2.63	2.57	2.53	2.52	2.51	2.51
$f(x_n)$ 的符号	-	-	+	+	+	+	+	+	+

故误差不超过 0.01 的根的近似值为 $\xi = 2.51$.

总习题三

1. 填空：

设常数 $k > 0$, 函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点的个数

为_____.

解 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} = \frac{e-x}{xe}$, 令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = e$.

当 $0 < x < e$ 时, $f'(x) > 0$, 故函数 $f(x)$ 在 $(0, e]$ 上单调增加; 当 $e < x < +\infty$ 时, $f'(x) < 0$, 故函数 $f(x)$ 在 $[e, +\infty)$ 上单调减少. 从而 $x = e$ 为函数 $f(x)$ 的极大值点. 由于驻点唯一, 极大值也是最大值且最大值 $f(e) = k > 0$. 又

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty,$$

故曲线 $y = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 与 x 轴有两个交点, 因此函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 在 $(0, +\infty)$

内的零点的个数为 2.

2. 以下两题中给出了四个结论, 从中选出一个正确的结论:

(1) 设在 $[0, 1]$ 上 $f''(x) > 0$, 则 $f'(0), f'(1), f(1) - f(0)$ 或 $f(0) - f(1)$ 几个数的大小顺序为() .

(A) $f'(1) > f'(0) > f(1) - f(0)$ (B) $f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$

(C) $f(1) - f(0) > f'(1) > f'(0)$ (D) $f'(1) > f(0) - f(1) > f'(0)$

(2) 设 $f'(x_0) = f''(x_0) = 0, f'''(x_0) > 0$, 则().

(A) $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值 (B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(C) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值 (D) $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

解 (1) 由拉格朗日中值定理知 $f(1) - f(0) = f'(\xi)$, 其中 $\xi \in (0, 1)$. 由于 $f''(x) > 0, f'(x)$ 单调增加, 故 $f'(0) < f'(\xi) < f'(1)$. 即

$$f'(0) < f(1) - f(0) < f'(1).$$

因此应填(B).

(2) 解法一 取 $f(x) = x^3, f'(x) = 3x^2, f''(x) = 6x, f'''(x) = 6 > 0, x_0 = 0$, 符合题意, 但明显排除(A)、(B)、(C). 因此应填(D).

解法二 由已知条件及 $f'''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{x - x_0} > 0$ 知, 在 x_0 某

邻域内, 当 $x < x_0$ 时, $f''(x) < 0$; 当 $x > x_0$ 时, $f''(x) > 0$, 所以 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

由此可知, 在 x_0 的某去心邻域内有 $f'(x) > f'(x_0) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是单调增加的, 从而 $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值. 再由已知条件及极值的第二充分判别

法知, $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极小值. 综上所述, 本题只能选(D).

3. 列举一个函数 $f(x)$ 满足: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内除某一点外处处可导, 但在 (a, b) 内不存在点 ξ , 使 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

解 取 $f(x) = |x|$, 区间为 $[-1, 1]$. 函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续, 在 $(-1, 1)$ 内除点 $x = 0$ 外处处可导, 但 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内不存在点 ξ , 使 $f'(\xi) = 0$, 即不存在 $\xi \in (-1, 1)$, 使 $f(1) - f(-1) = f'(\xi)[1 - (-1)]$.

4. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = k$, 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+a) - f(x)]$.

解 由拉格朗日中值定理知

$$f(x+a) - f(x) = f'(\xi)a,$$

ξ 介于 x 与 $x+a$ 之间, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\xi \rightarrow \infty$. 故

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+a) - f(x)] = \lim_{\xi \rightarrow \infty} f'(\xi)a = ka.$$

5. 证明多项式 $f(x) = x^3 - 3x + a$ 在 $[0, 1]$ 上不可能有两个零点.

证 假设多项式 $f(x) = x^3 - 3x + a$ 在 $[0, 1]$ 上有两个零点, 即存在 $x_1, x_2 \in [0, 1]$, 使 $f(x_1) = f(x_2) = 0$, 不妨设 $x_1 < x_2$.

函数 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上连续, 在 (x_1, x_2) 内可导, 由罗尔定理知至少存在一点 $\xi \in (x_1, x_2) \subset (0, 1)$, 使 $f'(\xi) = 0$, 但 $f'(x) = 3x^2 - 3$ 在 $(0, 1)$ 内恒不等于零, 故多项式 $f(x) = x^3 - 3x + a$ 在 $[0, 1]$ 上不可能有两个零点.

6. 设 $a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$, 证明多项式 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个零点.

证 取函数 $F(x) = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$. $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $F(0) = 0, F(1) = a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$, 由罗尔定理知至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使 $F'(\xi) = 0$, 即多项式 $f(x) = F'(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个零点.

7. 设 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 在 $(0, a)$ 内可导, 且 $f(a) = 0$, 证明存在一点 $\xi \in (0, a)$, 使 $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$.

证 取函数 $F(x) = xf(x)$. $F(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 在 $(0, a)$ 内可导, 且 $F(0) = 0, F(a) = af(a) = 0$, 由罗尔定理知至少存在一点 $\xi \in (0, a)$, 使

$$F'(\xi) = [xf(x)]'|_{x=\xi} = f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0.$$

- 8*. 设 $0 < a < b$, 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 试利用柯西中值定理, 证明存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使

$$f(b) - f(a) = \xi f'(\xi) \ln \frac{b}{a}.$$

证 取函数 $F(x) = \ln x, f(x), F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $F'(x) = \frac{1}{x} \neq 0, x \in (a, b)$. 由柯西中值定理知至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

即

$$\frac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a} = \frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}},$$

亦即 $f(b) - f(a) = \xi f'(\xi) \ln \frac{b}{a}$.

9. 设 $f(x), g(x)$ 都是可导函数, 且 $|f'(x)| < g'(x)$, 证明: 当 $x > a$ 时,

$$|f(x) - f(a)| < g(x) - g(a).$$

分析 要证 $x > a$ 时, $|f(x) - f(a)| < g(x) - g(a)$, 即要证

$$-[g(x) - g(a)] < f(x) - f(a) < g(x) - g(a),$$

亦即要证

$$f(x) - g(x) < f(a) - g(a),$$

$$f(x) + g(x) > f(a) + g(a).$$

证 取 $F(x) = f(x) - g(x), G(x) = f(x) + g(x), x \in (a, +\infty)$. 由 $|f'(x)| < g'(x)$ 知

$$f'(x) - g'(x) < 0, \quad f'(x) + g'(x) > 0,$$

故 $F'(x) = f'(x) - g'(x) < 0, G'(x) = f'(x) + g'(x) > 0$, 即当 $x > a$ 时函数 $F(x)$ 单调减少, $G(x)$ 单调增加. 因此

$$F(x) < F(a), \quad G(x) > G(a) (x > a).$$

从而

$$f(x) - g(x) < f(a) - g(a), f(x) + g(x) > f(a) + g(a) \quad (x > a).$$

即当 $x > a$ 时, $|f(x) - f(a)| < g(x) - g(a)$.

10. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^x}{1 - x + \ln x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right];$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} [(a_1^{\frac{1}{x}} + a_2^{\frac{1}{x}} + \cdots + a_n^{\frac{1}{x}})/n]^{nx} \quad (\text{其中 } a_1, a_2, \dots, a_n > 0).$$

$$\text{解 } (1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^x}{1 - x + \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^x(1 + \ln x)}{-1 + \frac{1}{x}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x \ln x + x^x - 1}{x - 1} \cdot x \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x (\ln x + 1) \ln x + x^{x-1} + x^x (\ln x + 1)}{1} \\
 &= 2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)}, \text{ 而} \\
 &\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{2}{\pi} + \ln \arctan x}{\frac{1}{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\arctan x} \cdot \frac{-x^2}{1+x^2} \right) = -\frac{2}{\pi},
 \end{aligned}$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x = e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(a_1^{\frac{1}{x}} + a_2^{\frac{1}{x}} + \cdots + a_n^{\frac{1}{x}})/n]^{nx} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} nx [\ln(a_1^{\frac{1}{x}} + a_2^{\frac{1}{x}} + \cdots + a_n^{\frac{1}{x}}) - \ln n]},$$

而

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow \infty} nx [\ln(a_1^{\frac{1}{x}} + a_2^{\frac{1}{x}} + \cdots + a_n^{\frac{1}{x}}) - \ln n] \\
 &= n \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(a_1^{\frac{1}{x}} + a_2^{\frac{1}{x}} + \cdots + a_n^{\frac{1}{x}}) - \ln n}{\frac{1}{x}} \\
 &= n \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{a_1^{\frac{1}{x}} + a_2^{\frac{1}{x}} + \cdots + a_n^{\frac{1}{x}}} [a_1^{\frac{1}{x}} \ln a_1 + a_2^{\frac{1}{x}} \ln a_2 + \cdots + a_n^{\frac{1}{x}} \ln a_n] \left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} \\
 &= n \cdot \frac{1}{n} (\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n) = \ln(a_1 a_2 \cdots a_n),
 \end{aligned}$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(a_1^{\frac{1}{x}} + a_2^{\frac{1}{x}} + \cdots + a_n^{\frac{1}{x}})/n]^{nx} = a_1 a_2 \cdots a_n.$$

11. 求下列函数在指定的 x_0 处具有指定阶数及余项的泰勒公式：

(1) $f(x) = x^3 \ln x$, $x_0 = 1$, $n = 4$, 拉格朗日余项;

(2) $f(x) = \arctan x$, $x_0 = 0$, $n = 3$, 佩亚诺余项;

(3) $f(x) = e^{\sin x}$, $x_0 = 0$, $n = 3$, 佩亚诺余项;

(4) $f(x) = \ln \cos x$, $x_0 = 0$, $n = 6$, 佩亚诺余项.

解 (1) $f(1) = 0$, $f'(x) = 3x^2 \ln x + x^2$, $f'(1) = 1$;

$f''(x) = 6x \ln x + 5x$, $f''(1) = 5$; $f'''(x) = 6 \ln x + 11$, $f'''(1) = 11$;

$$f^{(4)}(x) = \frac{6}{x}, f^{(4)}(1) = 6; f^{(5)}(x) = -\frac{6}{x^2}, f^{(5)}(\xi) = -\frac{6}{\xi^2},$$

因此,

$$x^3 \ln x = (x-1) + \frac{5}{2!}(x-1)^2 + \frac{11}{3!}(x-1)^3 + \frac{6}{4!}(x-1)^4 - \frac{6}{5!}\xi^2(x-1)^5,$$

其中 ξ 介于 1 和 x 之间.

$$(2) f(0) = 0, f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, f'(0) = 1; f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, f''(0) = 0; f'''(x) = -\frac{2(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}, f'''(0) = -2;$$

因此,

$$\arctan x = x - \frac{x^2}{3} + o(x^4).$$

注: 也可用下列方法求 $y = \arctan x$ 在 $x = 0$ 处的导数.

对 $y' = \frac{1}{1+x^2}$, 即 $(1+x^2)y' = 1$, 求 n 阶导数:

$$(1+x^2)y^{(n+1)} + 2nxy^{(n)} + n(n-1)y^{(n-1)} = 0,$$

令 $x = 0$ 得

$$y^{(n+1)}(0) = -n(n-1)y^{(n-1)}(0),$$

由 $y''(0) = 0$, $y'(0) = 1$ 得

$$y^{(2m)}(0) = 0,$$

$$y^{(2m+1)}(0) = -2m(2m-1)y^{(2m-1)}(0) = (-1)(2m)!.$$

(3) $e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2!} \sin^2 x + \frac{1}{3!} \sin^3 x + o(x^3)$, 又, $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)$, 故

$$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3).$$

(4) $\ln \cos x = \ln[1 + (\cos x - 1)] = \cos x - 1 - \frac{1}{2}(\cos x - 1)^2 + \frac{1}{3}(\cos x - 1)^3 + o(x^6)$, 又, $\cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + o(x^7)$, 因此,

$$o(x^6), \text{ 又, } \cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + o(x^7), \text{ 因此,}$$

$$\begin{aligned}\ln \cos x &= \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 \right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6 \right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{8}x^6 \right) + o(x^6) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6).\end{aligned}$$

12. 证明下列不等式:

$$(1) \text{ 当 } 0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2} \text{ 时}, \frac{\tan x_2}{\tan x_1} > \frac{x_2}{x_1};$$

$$(2) \text{ 当 } x > 0 \text{ 时}, \ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x};$$

$$(3) \text{ 当 } e < a < b < e^2 \text{ 时}, \ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a).$$

证 (1) 取函数 $f(x) = \frac{\tan x}{x}, 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时,

$$f'(x) = \frac{x \sec^2 x - \tan x}{x^2} > 0 (x \sec^2 x - \tan x > x - \tan x > 0)$$

故 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内单调增加, 因此, 当 $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ 时,

$$f(x_2) > f(x_1),$$

即

$$\frac{\tan x_2}{x_2} > \frac{\tan x_1}{x_1},$$

亦即

$$\frac{\tan x_2}{\tan x_1} > \frac{x_2}{x_1}.$$

(2) 取函数 $f(x) = (1+x) \ln(1+x) - \arctan x (x > 0)$.

当 $x > 0$ 时,

$$f'(x) = \ln(1+x) + 1 - \frac{1}{1+x^2} > 0,$$

故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加, 因此, 当 $x > 0$ 时,

$$f(x) > f(0),$$

即 $(1+x) \ln(1+x) - \arctan x > 0$, 亦即

$$\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}.$$

(3) 设 $f(x) = \ln^2 x (e < a < x < b < e^2)$.

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 由拉格朗日中值定理知, 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\ln^2 b - \ln^2 a = \frac{2 \ln \xi}{\xi} (b - a).$$

设 $\varphi(t) = \frac{\ln t}{t}$, 则 $\varphi'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2}$. 当 $t > e$ 时, $\varphi'(t) < 0$, 所以 $\varphi(t)$ 在 $[e, +\infty)$ 上单调减少, 而 $e < a < \xi < b < e^2$, 从而 $\varphi(\xi) > \varphi(e^2)$, 即

$$\frac{\ln \xi}{\xi} > \frac{\ln e^2}{e^2} = \frac{2}{e^2},$$

因此, $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2} (b - a)$.

13. 设 $a > 1$, $f(x) = a^x - ax$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的驻点为 $x(a)$. 问 a 为何值时, $x(a)$ 最小? 并求出最小值.

解 由 $f'(x) = a^x \ln a - a = 0$, 得惟一驻点

$$x(a) = 1 - \frac{\ln \ln a}{\ln a}.$$

考察函数 $x(a) = 1 - \frac{\ln \ln a}{\ln a}$ 在 $a > 1$ 时的最小值. 令

$$x'(a) = -\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{a} \ln \ln a}{(\ln a)^2} = -\frac{1 - \ln \ln a}{a (\ln a)^2} = 0,$$

得惟一驻点, $a = e^e$. 当 $a > e^e$ 时, $x'(a) > 0$; 当 $a < e^e$ 时, $x'(a) < 0$, 因此

$$x(e^e) = 1 - \frac{1}{e}$$

为极小值, 也是最小值.

14. 求椭圆 $x^2 - xy + y^2 = 3$ 上纵坐标最大和最小的点.

解 在椭圆方程两端分别对 x 求导, 得

$$2x - y - xy' + 2yy' = 0,$$

$$y' = \frac{y - 2x}{2y - x}.$$

令 $y' = 0$, 得 $y = 2x$. 将 $y = 2x$ 代入椭圆方程后得 $x^2 = 1$, 故 $x = \pm 1$. 从而得到椭圆上的点 $(1, 2)$, $(-1, -2)$. 根据题意即知点 $(1, 2)$, $(-1, -2)$ 为椭圆 $x^2 - xy + y^2 = 3$ 上纵坐标最大和最小的点.

15. 求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项.

解 取函数 $f(x) = x^{\frac{1}{x}} (x > 0)$, 则

$$f'(x) = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \ln x).$$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = e$. 当 $0 < x < e$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $e < x < +\infty$ 时, $f'(x) < 0$, 因此点 $x = e$ 为 $f(x)$ 的极大值点. 由于驻点唯一, 极大值点也是最大值点且最大值为 $f(e) = e^{\frac{1}{e}}$.

由 $1 < \sqrt{2}$ 及 $f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 内单调减少, 知

$$\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \cdots > \sqrt[n]{n} > \cdots$$

又 $\max\{\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}\} = \sqrt[3]{3}$, 故数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项为 $\sqrt[3]{3}$.

16. 曲线弧 $y = \sin x$ ($0 < x < \pi$) 上哪一点处的曲率半径最小? 求出该点处的曲率半径.

解 $y' = \cos x, y'' = -\sin x$, 曲线 $y = \sin x$ ($0 < x < \pi$) 的曲率为

$$K = \frac{|\sin x|}{(1 + \cos^2 x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|\sin x|}{(1 + \cos^2 x)^{3/2}},$$

由 $K' = \frac{2\cos x(1 + \sin^2 x)}{(1 + \cos^2 x)^{\frac{5}{2}}} = 0$ 知 $x = \frac{\pi}{2}$.

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $K' > 0$; 当 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ 时, $K' < 0$. 因此 $x = \frac{\pi}{2}$ 为 K 的极大值点. 又驻点惟一, 故极大值点也是最大值点, 且 K 的最大值为

$$K = \left. \frac{|\sin x|}{(1 + \cos^2 x)^{\frac{3}{2}}} \right|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1.$$

此时曲率半径 $\rho = 1$ 最小, 故曲线弧 $y = \sin x$ ($0 < x < \pi$) 上点 $x = \frac{\pi}{2}$ 处的曲率半径最小且曲率半径为 $\rho = 1$.

17. 证明方程 $x^3 - 5x - 2 = 0$ 只有一个正根, 并求此正根的近似值, 精确到 10^{-3} .

证 取函数 $f(x) = x^3 - 5x - 2, f'(x) = 3x^2 - 5$.

令 $f'(x) = 0$ 得驻点 $x = \sqrt{\frac{5}{3}}$.

当 $0 < x < \sqrt{\frac{5}{3}}$ 时, $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $[0, \sqrt{\frac{5}{3}}]$ 上单调减少, 又

$$f(0) = -2 < 0, f\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{3}{2}} - 5\sqrt{\frac{5}{3}} - 2 < 0.$$

因此方程 $f(x) = 0$ 即 $x^3 - 5x - 2 = 0$ 在 $(0, \sqrt{\frac{5}{3}})$ 内没有实根.

当 $\sqrt{\frac{5}{3}} < x < +\infty$ 时, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $\left[\sqrt{\frac{5}{3}}, +\infty\right)$ 上单调增加, 因此方程 $f(x) = 0$ 在 $\left[\sqrt{\frac{5}{3}}, +\infty\right)$ 上至多有一实根, 又 $f(3) = 10 > 0$, 由零点定理知至少存在

一点 $\xi \in \left(\sqrt{\frac{5}{3}}, 3\right)$, 使 $f(\xi) = 0$, 即方程 $f(x) = 0$ 亦即 $x^3 - 5x - 2 = 0$ 在 $\left(\sqrt{\frac{5}{3}}, 3\right)$ 内至少有一实根, 因此方程 $x^3 - 5x - 2 = 0$ 在 $\left(\sqrt{\frac{5}{3}}, 3\right)$ 内只有一正根.

综上, 方程 $x^3 - 5x - 2 = 0$ 只有一个正根.

现在用二分法来求该方程正根的近似值,由 $f(2) = -4 < 0$,为了方便起见,取区间 $[2, 3]$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_n	2	2	2.25	2.375	2.375	2.406	2.406	2.414	2.414	2.414	2.414
b_n	3	2.5	2.5	2.5	2.438	2.438	2.422	2.422	2.418	2.416	2.415
中点 x_n	2.5	2.25	2.375	2.438	2.406	2.422	2.414	2.418	2.416	2.415	2.415
$f(x_n)$ 的符号	+	-	-	+	-	+	-	+	+	+	+

故误差不超过 10^{-3} 的正根的近似值为 $\xi = 2.415$.

18. 设 $f''(x_0)$ 存在,证明

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0).$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0 - h)}{2h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} + \frac{f'(x_0 - h) - f'(x_0)}{-h} \right] \\ &= \frac{1}{2} [f''(x_0) + f''(x_0)] \\ &= f''(x_0). \end{aligned}$$

19. 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内二阶可导,且 $f''(x) \geq 0$. 证明对于 (a, b) 内任意两点 x_1, x_2 及 $0 \leq t \leq 1$,有

$$f[(1-t)x_1 + tx_2] \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

证 由 $x_1, x_2 \in (a, b)$ 知 $x_0 = (1-t)x_1 + tx_2 \in (a, b)$,利用泰勒公式有

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2!}f''(\xi_1)(x_1 - x_0)^2, \xi_1 \text{介于 } x_1 \text{ 与 } x_0 \text{ 之间};$$

$$f(x_2) = f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0) + \frac{1}{2!}f''(\xi_2)(x_2 - x_0)^2, \xi_2 \text{介于 } x_2 \text{ 与 } x_0 \text{ 之间}.$$

由 $f''(x) \geq 0$ 知 $f''(\xi_1) \geq 0, f''(\xi_2) \geq 0$,故

$$f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \text{ 及 } f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0),$$

因此,

$$\begin{aligned} & (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \\ & \geq (1-t)f(x_0) + tf(x_0) + f'(x_0)[(1-t)(x_1 - x_0) + t(x_2 - x_0)] \\ & = f(x_0) + f'(x_0)[(1-t)x_1 + tx_2 - x_0] = f(x_0), \end{aligned}$$

即 $f[(1-t)x_1 + tx_2] \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$.

20. 试确定常数 a 和 b ,使 $f(x) = x - (a + b\cos x)\sin x$ 为当 $x \rightarrow 0$ 时关于 x 的5阶无穷小.

解 利用泰勒公式

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x - a \sin x - \frac{b}{2} \sin 2x \\
 &= x - a \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \right] - \frac{b}{2} \left[2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} + o(x^5) \right] \\
 &= (1 - a - b)x + \left(\frac{a}{6} + \frac{2b}{3} \right)x^3 - \left(\frac{a}{120} + \frac{2b}{15} \right)x^5 + o(x^5).
 \end{aligned}$$

按题意,应有

$$\begin{cases} 1 - a - b = 0, \\ \frac{a}{6} + \frac{2b}{3} = 0, \\ \frac{a}{120} + \frac{2b}{15} \neq 0, \end{cases}$$

得 $a = \frac{4}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$. 因此,当 $a = \frac{4}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$ 时, $f(x) = x - (a + b \cos x) \sin x$ 是 $x \rightarrow 0$ 时关于 x 的 5 阶无穷小.

第四章 不定积分

习题 4-1

不定积分的概念与性质

1. 利用导数验证下列等式：

$$(1) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C;$$

$$(2) \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + C;$$

$$(3) \int \frac{2x}{(x^2 + 1)(x + 1)^2} dx = \arctan x + \frac{1}{x + 1} + C;$$

$$(4) \int \sec x dx = \ln |\tan x + \sec x| + C;$$

$$(5) \int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C;$$

$$(6) \int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

解 (1) $\frac{d}{dx} [\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C] = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$

(2) $\frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + C \right) = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot x - \sqrt{x^2 - 1}}{x^2} = \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}.$

(3) $\frac{d}{dx} \left(\arctan x + \frac{1}{x + 1} + C \right) = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{(x + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)(x + 1)^2}.$

(4) $\frac{d}{dx} (\ln |\tan x + \sec x| + C) = \frac{1}{\tan x + \sec x} \cdot (\sec^2 x + \sec x \tan x) = \sec x.$

(5) $\frac{d}{dx} (x \sin x + \cos x + C) = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x.$

(6)
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C \right] &= \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) \\ &= e^x \sin x. \end{aligned}$$

2. 求下列不定积分：

$$(1) \int \frac{dx}{x^2};$$

$$(2) \int x \sqrt{x} dx;$$

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}};$

(4) $\int x^2 \sqrt[3]{x} dx;$

(5) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x}};$

(6) $\int \sqrt[n]{x^n} dx;$

(7) $\int 5x^3 dx;$

(8) $\int (x^2 - 3x + 2) dx;$

(9) $\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}}$ (g 是常数);

(10) $\int (x^2 + 1)^2 dx;$

(11) $\int (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x^3} - 1) dx;$

(12) $\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}} dx;$

(13) $\int \left(2e^x + \frac{3}{x}\right) dx;$

(14) $\int \left(\frac{3}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx;$

(15) $\int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right) dx;$

(16) $\int 3^x e^x dx;$

(17) $\int \frac{2 \cdot 3^x - 5 \cdot 2^x}{3^x} dx;$

(18) $\int \sec x (\sec x - \tan x) dx;$

(19) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx;$

(20) $\int \frac{dx}{1 + \cos 2x};$

(21) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx;$

(22) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx;$

(23) $\int \cot^2 x dx;$

(24) $\int \cos \theta (\tan \theta + \sec \theta) d\theta;$

(25) $\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx;$

(26) $\int \frac{3x^4 + 2x^2}{x^2 + 1} dx.$

解 (1) $\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + C = -\frac{1}{x} + C.$

(2) $\int x \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{\frac{3}{2}+1} x^{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C.$

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} + C = 2\sqrt{x} + C.$

(4) $\int x^2 \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{7}{3}} dx = \frac{1}{\frac{7}{3}+1} x^{\frac{7}{3}+1} + C = \frac{3}{10} x^{\frac{10}{3}} + C.$

(5) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x}} = \int x^{-\frac{5}{2}} dx = \frac{1}{-\frac{5}{2}+1} x^{-\frac{5}{2}+1} + C = -\frac{2}{3} x^{-\frac{3}{2}} + C.$

$$(6) \int \sqrt[m]{x^n} dx = \frac{1}{\frac{n}{m} + 1} x^{\frac{n}{m} + 1} + C = \frac{m}{m+n} x^{\frac{m+n}{m}} + C.$$

$$(7) \int 5x^3 dx = \frac{5}{3+1} x^{3+1} + C = \frac{5}{4} x^4 + C.$$

$$(8) \int (x^2 - 3x + 2) dx = \int x^2 dx - 3 \int x dx + 2 \int 1 dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2} x^2 + 2x + C.$$

$$(9) \int \frac{dh}{\sqrt{2gh}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int h^{-\frac{1}{2}} dh = \frac{1}{\sqrt{2g}} \times 2 \sqrt{h} + C = \sqrt{\frac{2h}{g}} + C.$$

$$\begin{aligned} (10) \int (x^2 + 1)^2 dx &= \int (x^4 + 2x^2 + 1) dx = \int x^4 dx + 2 \int x^2 dx + \int 1 dx \\ &= \frac{x^5}{5} + \frac{2}{3} x^3 + x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (11) \int (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x^3} - 1) dx &= \int (x^2 + x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} - 1) dx \\ &= \int x^2 dx + \int x^{\frac{3}{2}} dx - \int x^{\frac{1}{2}} dx - \int 1 dx \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (12) \int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}} dx &= \int (x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) dx \\ &= \int x^{\frac{3}{2}} dx - 2 \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C. \end{aligned}$$

$$(13) \int \left(2e^x + \frac{3}{x}\right) dx = 2 \int e^x dx + 3 \int \frac{dx}{x} = 2e^x + 3 \ln|x| + C.$$

$$\begin{aligned} (14) \int \left(\frac{3}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx &= 3 \int \frac{dx}{1+x^2} - 2 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= 3 \arctan x - 2 \arcsin x + C. \end{aligned}$$

$$(15) \int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right) dx = \int e^x dx - \int x^{-\frac{1}{2}} dx = e^x - 2x^{\frac{1}{2}} + C.$$

$$(16) \int 3^x e^x dx = \int (3e)^x dx = \frac{(3e)^x}{\ln(3e)} + C = \frac{3^x e^x}{\ln 3 + 1} + C.$$

$$\begin{aligned} (17) \int \frac{2 \cdot 3^x - 5 \cdot 2^x}{3^x} dx &= 2 \int dx - 5 \int \left(\frac{2}{3}\right)^x dx = 2x - \frac{5}{\ln \frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^x + C \\ &= 2x - \frac{5}{\ln 2 - \ln 3} \left(\frac{2}{3}\right)^x + C. \end{aligned}$$

$$(18) \int \sec x (\sec x - \tan x) dx = \int \sec^2 x dx - \int \sec x \tan x dx \\ = \tan x - \sec x + C.$$

$$(19) \int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1 + \cos x}{2} dx = \frac{x + \sin x}{2} + C.$$

$$(20) \int \frac{dx}{1 + \cos 2x} = \int \frac{\sec^2 x}{2} dx = \frac{\tan x}{2} + C.$$

$$(21) \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} dx = \sin x - \cos x + C.$$

$$(22) \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int (\csc^2 x - \sec^2 x) dx \\ = \int \csc^2 x dx - \int \sec^2 x dx = -(\cot x + \tan x) + C.$$

$$(23) \int \cot^2 x dx = \int \csc^2 x dx - \int dx = -\cot x - x + C.$$

$$(24) \int \cos \theta (\tan \theta + \sec \theta) d\theta = \int \sin \theta d\theta + \int d\theta = -\cos \theta + \theta + C.$$

$$(25) \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx = \int dx - \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = x - \arctan x + C.$$

$$(26) \int \frac{3x^4 + 2x^2}{x^2 + 1} dx = \int 3x^2 dx - \int dx + \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = x^3 - x + \arctan x + C.$$

3. 含有未知函数的导数的方程称为微分方程,例如方程 $\frac{dy}{dx} = f(x)$, 其中 $\frac{dy}{dx}$ 为未知函数的导数, $f(x)$ 为已知函数. 如果将函数 $y = \varphi(x)$ 代入微分方程,使微分方程成为恒等式,那么函数 $y = \varphi(x)$ 就称为这个微分方程的解. 求下列微分方程满足所给条件的解:

$$(1) \frac{dy}{dx} = (x - 2)^2, y|_{x=2} = 0;$$

$$(2) \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2}{t^3}, \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=1} = 1, x|_{t=1} = 1.$$

解 (1) $y = \int (x - 2)^2 dx = \frac{1}{3}(x - 2)^3 + C,$

由 $y|_{x=2} = 0$, 得 $C = 0$, 于是所求的解为 $y = \frac{1}{3}(x - 2)^3$.

$$(2) \frac{dx}{dt} = \int \frac{2}{t^3} dt = -\frac{1}{t^2} + C_1,$$

由 $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=1} = 1$, 得 $C_1 = 2$, 故 $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2} + 2$,

$$x = \int \left(-\frac{1}{t^2} + 2 \right) dt = \frac{1}{t} + 2t + C_2,$$

由 $x|_{t=1} = 1$, 得 $C_2 = -2$, 于是所求的解为 $x = \frac{1}{t} + 2t - 2$.

4. 汽车以 20 m/s 的速度行驶, 刹车后匀减速行驶了 50 m 停住, 求刹车加速度. 可执行下列步骤:

(1) 求微分方程 $\frac{d^2s}{dt^2} = -k$ 满足条件 $\frac{ds}{dt} \Big|_{t=0} = 20$ 及 $s|_{t=0} = 0$ 的解;

(2) 求使 $\frac{ds}{dt} = 0$ 的 t 值;

(3) 求使 $s = 50$ 的 k 值.

$$\text{解 } (1) \quad \frac{ds}{dt} = \int -k dt = -kt + C_1,$$

由 $\frac{ds}{dt} \Big|_{t=0} = 20$, 得 $C_1 = 20$, 故

$$\frac{ds}{dt} = -kt + 20,$$

$$s = \int (-kt + 20) dt = -\frac{1}{2}kt^2 + 20t + C_2,$$

由 $s|_{t=0} = 0$, 得 $C_2 = 0$, 于是所求的解为

$$s = -\frac{1}{2}kt^2 + 20t.$$

(2) 令 $\frac{ds}{dt} = 0$, 解得 $t = \frac{20}{k}$.

(3) 根据题意, 当 $t = \frac{20}{k}$ 时, $s = 50$, 即

$$-\frac{1}{2}k\left(\frac{20}{k}\right)^2 + \frac{400}{k} = 50,$$

解得 $k = 4$, 即得刹车加速度为 -4 m/s^2 .

5. 一曲线通过点 $(e^2, 3)$, 且在任一点处的切线的斜率等于该点横坐标的倒数, 求该曲线的方程.

解 设曲线方程为 $y = f(x)$, 则点 (x, y) 处的切线斜率为 $f'(x)$, 由条件得

$$f'(x) = \frac{1}{x},$$

因此 $f(x)$ 为 $\frac{1}{x}$ 的一个原函数, 故有 $f(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

又, 根据条件曲线过点 $(e^2, 3)$, 有 $f(e^2) = 3$ 解得 $C = 1$, 即得所求曲线方程为

$$y = \ln x + 1.$$

6. 一物体由静止开始运动, 经 t 秒后的速度是 $3t^2$ (m/s), 问

(1) 在 3 秒后物体离开出发点的距离是多少?

(2) 物体走完 360 m 需要多少时间?

解 (1) 设此物体自原点沿横轴正向由静止开始运动, 位移函数为 $s = s(t)$, 则

$$s(t) = \int v(t) dt = \int 3t^2 dt = t^3 + C,$$

由假设可知 $s(0) = 0$, 故 $s(t) = t^3$, 于是所求距离为 $s(3) = 27$ (m).

(2) 由 $t^3 = 360$, 得 $t = \sqrt[3]{360} \approx 7.11$ (s).

7. 证明函数 $\arcsin(2x - 1)$, $\arccos(1 - 2x)$ 和 $2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ 都是 $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ 的原函数.

$$\text{证 } [\arcsin(2x - 1)]' = \frac{1}{\sqrt{1 - (2x - 1)^2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{x - x^2}},$$

$$[\arccos(1 - 2x)]' = -\frac{1}{\sqrt{1 - (1 - 2x)^2}} \cdot (-2) = \frac{1}{\sqrt{x - x^2}},$$

$$\left(2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)' = 2 \frac{1}{1 + \frac{x}{1-x}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-x}{x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{\sqrt{x - x^2}}.$$

故结论成立.

习题 4-2

换元积分法

1. 在下列各式等号右端的空白处填入适当的系数, 使等式成立 (例如: $dx = \frac{1}{4}d(4x + 7)$):

$$(1) dx = \underline{\quad} d(ax);$$

$$(2) dx = \underline{\quad} d(7x - 3);$$

$$(3) xdx = \underline{\quad} d(x^2);$$

$$(4) xdx = \underline{\quad} d(5x^2);$$

$$(5) xdx = \underline{\quad} d(1 - x^2);$$

$$(6) x^3 dx = \underline{\quad} d(3x^4 - 2);$$

$$(7) e^{2x} dx = \underline{\quad} d(e^{2x});$$

$$(8) e^{-\frac{x}{2}} dx = \underline{\quad} d(1 + e^{-\frac{x}{2}});$$

$$(9) \sin \frac{3}{2} x dx = \underline{\quad} d(\cos \frac{3}{2} x);$$

$$(10) \frac{dx}{x} = \underline{\quad} d(5 \ln|x|);$$

$$(11) \frac{dx}{x} = \underline{\quad} d(3 - 5 \ln|x|);$$

$$(12) \frac{dx}{1 + 9x^2} = \underline{\quad} d(\arctan 3x);$$

$$(13) \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \underline{\quad} d(1 - \arcsin x);$$

$$(14) \frac{xdx}{\sqrt{1 - x^2}} = \underline{\quad} d(\sqrt{1 - x^2}).$$

$$\text{解 } (1) \frac{1}{a}; \quad (2) \frac{1}{7}; \quad (3) \frac{1}{2}; \quad (4) \frac{1}{10}; \quad (5) -\frac{1}{2};$$

$$(6) \frac{1}{12}; \quad (7) \frac{1}{2}; \quad (8) -2; \quad (9) -\frac{2}{3}; \quad (10) \frac{1}{5};$$

$$(11) -\frac{1}{5}; \quad (12) \frac{1}{3}; \quad (13) -1; \quad (14) -1.$$

2. 求下列不定积分(其中 a, b, ω, φ 均为常数):

$$(1) \int e^{5t} dt;$$

$$(2) \int (3 - 2x)^3 dx;$$

$$(3) \int \frac{dx}{1 - 2x};$$

$$(4) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{2 - 3x}};$$

$$(5) \int (\sin ax - e^{\frac{x}{b}}) dx;$$

$$(6) \int \frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt;$$

$$(7) \int x e^{-x^2} dx;$$

$$(8) \int x \cos(x^2) dx;$$

$$(9) \int \frac{x}{\sqrt{2 - 3x^2}} dx;$$

$$(10) \int \frac{3x^3}{1 - x^4} dx;$$

$$(11) \int \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 5} dx;$$

$$(12) \int \cos^2(\omega t + \varphi) \sin(\omega t + \varphi) dt;$$

$$(13) \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx;$$

$$(14) \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx;$$

$$(15) \int \tan^{10} x \cdot \sec^2 x dx;$$

$$(16) \int \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x};$$

$$(17) \int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1 - x^2}};$$

$$(18) \int \frac{10^{2\arccos x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx;$$

$$(19) \int \tan \sqrt{1 + x^2} \cdot \frac{x dx}{\sqrt{1 + x^2}};$$

$$(20) \int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1 + x)} dx;$$

$$(21) \int \frac{1 + \ln x}{(x \ln x)^2} dx;$$

$$(22) \int \frac{dx}{\sin x \cos x};$$

$$(23) \int \frac{\ln \tan x}{\cos x \sin x} dx;$$

$$(24) \int \cos^3 x dx;$$

$$(25) \int \cos^2(\omega t + \varphi) dt;$$

$$(26) \int \sin 2x \cos 3x dx;$$

$$(27) \int \cos x \cos \frac{x}{2} dx;$$

$$(28) \int \sin 5x \sin 7x dx;$$

$$(29) \int \tan^3 x \sec x dx;$$

$$(30) \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}};$$

$$(31) \int \frac{1 - x}{\sqrt{9 - 4x^2}} dx;$$

$$(32) \int \frac{x^3}{9 + x^2} dx;$$

$$(33) \int \frac{dx}{2x^2 - 1};$$

$$(34) \int \frac{dx}{(x + 1)(x - 2)};$$

(35) $\int \frac{x}{x^2 - x - 2} dx;$

(36) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} (a > 0);$

(37) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}};$

(38) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}};$

(39) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} dx;$

(40) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{2x}};$

(41) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - x^2}};$

(42) $\int \frac{dx}{x + \sqrt{1 - x^2}};$

(43) $\int \frac{x - 1}{x^2 + 2x + 3} dx;$

(44) $\int \frac{x^3 + 1}{(x^2 + 1)^2} dx.$

解 (1) 令 $u = 5t$, 由第一类换元法得

$$\int e^{5t} dt = \frac{1}{5} \int e^u du = \frac{1}{5} e^u + C = \frac{1}{5} e^{5t} + C.$$

(2) 令 $u = 3 - 2x$, 由第一类换元法得

$$\int (3 - 2x)^3 dx = -\frac{1}{2} \int u^3 du = -\frac{u^4}{8} + C = -\frac{(3 - 2x)^4}{8} + C.$$

(3) 令 $u = 1 - 2x$, 由第一类换元法得

$$\int \frac{dx}{1 - 2x} = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2} \ln|u| + C = -\frac{1}{2} \ln|1 - 2x| + C.$$

$$\begin{aligned} (4) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{2 - 3x}} &= \int -\frac{1}{3}(2 - 3x)^{-\frac{1}{3}} d(2 - 3x) \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} (2 - 3x)^{\frac{2}{3}} + C = -\frac{1}{2} (2 - 3x)^{\frac{2}{3}} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \int (\sin ax - e^{\frac{x}{b}}) dx &= \int \sin ax dx - \int e^{\frac{x}{b}} dx \\ &= \int \frac{1}{a} \sin ax d(ax) - \int b e^{\frac{x}{b}} d\left(\frac{x}{b}\right) \\ &= \frac{1}{a}(-\cos ax) - b e^{\frac{x}{b}} + C = -\frac{\cos ax}{a} - b e^{\frac{x}{b}} + C. \end{aligned}$$

$$(6) \int \frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt = \int 2 \sin \sqrt{t} d\sqrt{t} = -2 \cos \sqrt{t} + C.$$

$$(7) \int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int e^{-x^2} d(-x^2) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$$

$$(8) \int x \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int \cos(x^2) d(x^2) = \frac{1}{2} \sin(x^2) + C.$$

$$(9) \int \frac{x}{\sqrt{2 - 3x^2}} dx = -\frac{1}{6} \int (2 - 3x^2)^{-\frac{1}{2}} d(2 - 3x^2)$$

$$= -\frac{1}{6} \cdot 2(2-3x^2)^{\frac{1}{2}} + C = -\frac{\sqrt{2-3x^2}}{3} + C.$$

$$(10) \int \frac{3x^3}{1-x^4} dx = -\frac{3}{4} \int \frac{1}{1-x^4} d(1-x^4) = -\frac{3}{4} \ln|1-x^4| + C.$$

$$(11) \int \frac{x+1}{x^2+2x+5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+5) + C.$$

$$(12) \int \cos^2(\omega t + \varphi) \sin(\omega t + \varphi) dt = -\frac{1}{\omega} \int \cos^2(\omega t + \varphi) d[\cos(\omega t + \varphi)] \\ = -\frac{1}{3\omega} \cos^3(\omega t + \varphi) + C.$$

$$(13) \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = - \int \frac{1}{\cos^3 x} d(\cos x) = \frac{1}{2\cos^2 x} + C.$$

$$(14) \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx = \int \frac{d(\sin x - \cos x)}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} = \frac{3}{2} (\sin x - \cos x)^{\frac{2}{3}} + C.$$

$$(15) \int \tan^{10} x \cdot \sec^2 x dx = \int \tan^{10} x d(\tan x) = \frac{1}{11} \tan^{11} x + C.$$

$$(16) \int \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x \ln \ln x} = \int \frac{d(\ln \ln x)}{\ln \ln x} = \ln|\ln \ln x| + C.$$

$$(17) \int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}} = \int \frac{d(\arcsin x)}{(\arcsin x)^2} = -\frac{1}{\arcsin x} + C.$$

$$(18) \int \frac{10^{2\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int -10^{2\arccos x} d(\arccos x) = -\frac{10^{2\arccos x}}{2\ln 10} + C.$$

$$(19) \int \tan \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \int \tan \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} \\ = \int \tan \sqrt{1+x^2} d(\sqrt{1+x^2}) \\ = -\ln |\cos \sqrt{1+x^2}| + C.$$

$$(20) \int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \int \frac{2\arctan \sqrt{x}}{1+x} d\sqrt{x} = \int 2\arctan \sqrt{x} d(\arctan \sqrt{x}) \\ = (\arctan \sqrt{x})^2 + C.$$

$$(21) \int \frac{1+\ln x}{(x \ln x)^2} dx = \int \frac{d(x \ln x)}{(x \ln x)^2} = -\frac{1}{x \ln x} + C.$$

$$(22) \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \csc 2x d(2x) = \ln|\csc 2x - \cot 2x| + C = \ln|\tan x| + C.$$

$$(23) \int \frac{\ln \tan x}{\cos x \sin x} dx = \int \frac{\ln \tan x}{\tan x} d(\tan x) = \int \ln \tan x d(\ln \tan x) \\ = \frac{(\ln \tan x)^2}{2} + C.$$

$$(24) \int \cos^3 x dx = \int (1 - \sin^2 x) d(\sin x) = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C.$$

$$(25) \int \cos^2(\omega t + \varphi) dt = \int \frac{\cos 2(\omega t + \varphi) + 1}{2} dt = \frac{\sin 2(\omega t + \varphi)}{4\omega} + \frac{t}{2} + C.$$

$$(26) \int \sin 2x \cos 3x dx = \int \frac{1}{2} (\sin 5x - \sin x) dx = -\frac{1}{10} \cos 5x + \frac{1}{2} \cos x + C.$$

$$\begin{aligned} (27) \int \cos x \cos \frac{x}{2} dx &= \int \frac{1}{2} \left(\cos \frac{3}{2}x + \cos \frac{1}{2}x \right) dx \\ &= \frac{1}{3} \sin \frac{3}{2}x + \sin \frac{1}{2}x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (28) \int \sin 5x \sin 7x dx &= \int -\frac{1}{2} (\cos 12x - \cos 2x) dx \\ &= -\frac{1}{24} \sin 12x + \frac{1}{4} \sin 2x + C. \end{aligned}$$

$$(29) \int \tan^3 x \sec x dx = \int (\sec^2 x - 1) d(\sec x) = \frac{1}{3} \sec^3 x - \sec x + C.$$

$$(30) \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = \int \frac{d(e^x)}{e^{2x} + 1} = \arctan(e^x) + C.$$

$$\begin{aligned} (31) \int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{d\left(\frac{2x}{3}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{3}\right)^2}} + \frac{1}{8} \int \frac{d(9-4x^2)}{\sqrt{9-4x^2}} \\ &= \frac{\arcsin \frac{2x}{3}}{2} + \frac{\sqrt{9-4x^2}}{4} + C. \end{aligned}$$

$$(32) \int \frac{x^3}{9+x^2} dx = \int x dx - \frac{9}{2} \int \frac{d(9+x^2)}{9+x^2} = \frac{x^2}{2} - \frac{9}{2} \ln(9+x^2) + C.$$

$$(33) \int \frac{dx}{2x^2-1} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{\sqrt{2x}-1} - \frac{1}{\sqrt{2x}+1} \right) dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2x}-1}{\sqrt{2x}+1} \right| + C.$$

$$\begin{aligned} (34) \int \frac{dx}{(x+1)(x-2)} &= \int \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (35) \int \frac{x}{x^2-x-2} dx &= \int \frac{x}{(x-2)(x+1)} dx = \int \frac{1}{3} \left(\frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{2}{3} \ln|x-2| + \frac{1}{3} \ln|x+1| + C. \end{aligned}$$

(36) 设 $x = a \sin u \left(-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2} \right)$, 则 $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos u$, $dx = a \cos u du$, 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \int a^2 \sin^2 u du = a^2 \int \frac{1 - \cos 2u}{2} du \\ &= \frac{a^2}{2} \left(u - \frac{\sin 2u}{2} \right) + C \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{x \sqrt{a^2 - x^2}}{2} + C. \end{aligned}$$

(37) 当 $x > 1$ 时,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} &\stackrel{x = \frac{1}{t}}{=} - \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = -\arcsin t + C \\ &= -\arcsin \frac{1}{x} + C, \end{aligned}$$

当 $x < -1$ 时,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} \stackrel{x = \frac{1}{t}}{=} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin \frac{1}{x} + C,$$

故在 $(-\infty, -1)$ 或 $(1, +\infty)$ 内, 有

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = -\arcsin \frac{1}{|x|} + C.$$

(38) 设 $x = \tan u \left(-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2} \right)$, 则 $\sqrt{x^2 + 1} = \sec u$, $dx = \sec^2 u du$, 于是

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}} = \int \cos u du = \sin u + C = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} + C.$$

(39) 当 $x > 3$ 时, 令 $x = 3 \sec u \left(0 \leq u < \frac{\pi}{2} \right)$,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} dx &= \int 3 \tan^2 u du = 3 \int (\sec^2 u - 1) du = 3 \tan u - 3u + C \\ &= \sqrt{x^2 - 9} - 3 \arccos \frac{3}{x} + C; \end{aligned}$$

当 $x < -3$ 时, 令 $x = 3 \sec u \left(\frac{\pi}{2} < u \leq \pi \right)$,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} dx &= - \int 3 \tan^2 u du = -3 \int (\sec^2 u - 1) du = -3 \tan u + 3u + C' \\ &= \sqrt{x^2 - 9} + 3 \arccos \frac{3}{x} + C' \\ &= \sqrt{x^2 - 9} - 3 \arccos \frac{3}{-x} + C' + 3\pi, \end{aligned}$$

故可统一写作 $\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} dx = \sqrt{x^2 - 9} - 3 \arccos \frac{3}{|x|} + C.$

$$(40) \int \frac{dx}{1 + \sqrt{2x}} \stackrel{x = \frac{u^2}{2}}{=} \int \frac{udu}{1 + u} = u - \ln(1 + u) + C = \sqrt{2x} - \ln(1 + \sqrt{2x}) + C.$$

(41) 令 $x = \sin t \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \right)$, 则 $\sqrt{1 - x^2} = \cos t$, $dx = \cos t dt$, 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - x^2}} &= \int \frac{\cos t}{1 + \cos t} dt = \int \frac{2 \cos^2 \frac{t}{2} - 1}{2 \cos^2 \frac{t}{2}} dt = t - \tan \frac{t}{2} + C \\ &= t - \frac{\sin t}{1 + \cos t} + C = \arcsin x - \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} + C. \end{aligned}$$

(42) 设 $x = \sin t \left(-\frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{2} \right)$, 则 $\sqrt{1 - x^2} = \cos t$, $dx = \cos t dt$, 于是

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{1 - x^2}} = \int \frac{\cos t dt}{\sin t + \cos t},$$

记 $I_1 = \int \frac{\cos t dt}{\sin t + \cos t}$, $I_2 = \int \frac{\sin t dt}{\sin t + \cos t}$, 利用

$$I_1 + I_2 = \int dt = t + C,$$

$$I_1 - I_2 = \int \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} dt = \int \frac{d(\sin t + \cos t)}{\sin t + \cos t} = \ln |\sin t + \cos t| + C,$$

求得

$$I_1 = \int \frac{\cos t dt}{\sin t + \cos t} = \frac{1}{2}(t + \ln |\sin t + \cos t|) + C,$$

即求得在 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right)$ 内, 有

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2}(\arcsin x + \ln |x + \sqrt{1 - x^2}|) + C;$$

再设 $x = \sin t \left(-\frac{\pi}{2} < t < -\frac{\pi}{4} \right)$, 重复上面的过程, 可得在 $\left(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ 内有与上面不

定积分形式相同的结果. 从而在 $\left(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ 或 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right)$ 内, 有

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2}(\arcsin x + \ln |x + \sqrt{1 - x^2}|) + C.$$

$$(43) \int \frac{x-1}{x^2+2x+3} dx = \int \frac{x+1-2}{(x+1)^2+2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d[(x+1)^2+2]}{(x+1)^2+2} - \sqrt{2} \int \frac{d\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 3) - \sqrt{2} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

(44) 设 $x = \tan t \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \right)$, 则 $x^2 + 1 = \sec^2 t$, $dx = \sec^2 t dt$, 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+1}{(x^2+1)^2} dx &= \int \frac{\tan^3 t + 1}{\sec^2 t} dt \\ &= \int \frac{\cos^2 t - 1}{\cos t} d(\cos t) + \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \cos^2 t - \ln |\cos t| + \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t + C \\ &= \frac{1}{2} \cos^2 t - \ln |\cos t| + \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \sin t \cos t + C. \end{aligned}$$

按 $\tan t = x$ 作辅助三角形(图 4-1), 便有

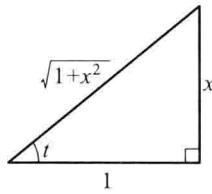


图 4-1

$$\cos t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

于是

$$\int \frac{x^3+1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1+x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} \arctan x + C.$$

习题 4-3

分部积分法

求下列不定积分:

1. $\int x \sin x dx.$

2. $\int \ln x dx.$

3. $\int \arcsin x dx.$

4. $\int x e^{-x} dx.$

5. $\int x^2 \ln x dx.$

6. $\int e^{-x} \cos x dx.$

7. $\int e^{-2x} \sin \frac{x}{2} dx.$

8. $\int x \cos \frac{x}{2} dx.$

9. $\int x^2 \arctan x dx.$

10. $\int x \tan^2 x dx.$

11. $\int x^2 \cos x dx.$

12. $\int t e^{-2t} dt.$

13. $\int \ln^2 x dx.$

14. $\int x \sin x \cos x dx.$

15. $\int x^2 \cos^2 \frac{x}{2} dx.$

16. $\int x \ln(x-1) dx.$

17. $\int (x^2 - 1) \sin 2x dx.$

18. $\int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx.$

19. $\int e^{\sqrt[3]{x}} dx.$

20. $\int \cos \ln x dx.$

21. $\int (\arcsin x)^2 dx.$

22. $\int e^x \sin^2 x dx.$

23. $\int x \ln^2 x dx.$

24. $\int e^{\sqrt{3x+9}} dx.$

解 1. $\int x \sin x dx = - \int x d(\cos x) = -x \cos x + \int \cos x dx$
 $= -x \cos x + \sin x + C.$

2. $\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C.$

3. $\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$

4. $\int x e^{-x} dx = - \int x de^{-x} = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C.$

5. $\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} \int \ln x d(x^3) = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3} \int x^3 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C.$

6. $\int e^{-x} \cos x dx = - \int \cos x d(e^{-x}) = -e^{-x} \cos x + \int e^{-x} (-\sin x) dx$
 $= -e^{-x} \cos x + \int \sin x d(e^{-x})$
 $= -e^{-x} \cos x + e^{-x} \sin x - \int e^{-x} \cos x dx,$

故有

$$\int e^{-x} \cos x dx = \frac{e^{-x}(\sin x - \cos x)}{2} + C.$$

7. $\int e^{-2x} \sin \frac{x}{2} dx = -\frac{1}{2} \int \sin \frac{x}{2} d(e^{-2x})$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-2x} \cdot \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx \\
&= -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{8}\int \cos\frac{x}{2}d(e^{-2x}) \\
&= -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{8}e^{-2x}\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\int e^{-2x} \cdot \left(-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\right)dx \\
&= -\frac{1}{8}\left(4\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)e^{-2x} - \frac{1}{16}\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx,
\end{aligned}$$

故

$$\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx = -\frac{2}{17}\left(4\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)e^{-2x} + C.$$

$$\begin{aligned}
8. \int x\cos\frac{x}{2}dx &= 2\int xd\left(\sin\frac{x}{2}\right) = 2x\sin\frac{x}{2} - 2\int \sin\frac{x}{2}dx \\
&= 2x\sin\frac{x}{2} + 4\cos\frac{x}{2} + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9. \int x^2\arctan xdx &= \frac{1}{3}\int \arctan x d(x^3) = \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2}dx \\
&= \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{3}\int \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx \\
&= \frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10. \int x\tan^2 xdx &= \int x(\sec^2 x - 1)dx = \int xd(\tan x) - \frac{x^2}{2} \\
&= x\tan x + \ln|\cos x| - \frac{x^2}{2} + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
11. \int x^2\cos xdx &= \int x^2d(\sin x) = x^2\sin x - \int 2x\sin xdx \\
&= x^2\sin x + \int 2xd(\cos x) \\
&= x^2\sin x + 2x\cos x - \int 2\cos xdx \\
&= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12. \int te^{-2t}dt &= -\frac{1}{2}\int t d(e^{-2t}) = -\frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{2}\int e^{-2t}dt \\
&= -\frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
13. \int \ln^2 xdx &= x\ln^2 x - \int 2\ln xdx = x\ln^2 x - 2x\ln x + \int 2dx \\
&= x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14. \int x \sin x \cos x dx &= \int -\frac{x}{4} d(\cos 2x) = -\frac{x \cos 2x}{4} + \frac{1}{4} \int \cos 2x dx \\
 &= -\frac{x \cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{8} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15. \int x^2 \cos^2 \frac{x}{2} dx &= \frac{1}{2} \int x^2 (1 + \cos x) dx = \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{2} \int x^2 d(\sin x) \\
 &= \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{2} x^2 \sin x - \int x \sin x dx \\
 &= \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{2} x^2 \sin x + \int x d(\cos x) \\
 &= \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{2} x^2 \sin x + x \cos x - \int \cos x dx \\
 &= \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{2} x^2 \sin x + x \cos x - \sin x + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 16. \int x \ln(x-1) dx &= \frac{1}{2} \int \ln(x-1) d(x^2 - 1) \\
 &= \frac{1}{2}(x^2 - 1) \ln(x-1) - \frac{1}{2} \int (x+1) dx \\
 &= \frac{1}{2}(x^2 - 1) \ln(x-1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17. \int (x^2 - 1) \sin 2x dx &= -\frac{1}{2} \int (x^2 - 1) d(\cos 2x) \\
 &= -\frac{1}{2}(x^2 - 1) \cos 2x + \int x \cos 2x dx \\
 &= -\frac{1}{2}(x^2 - 1) \cos 2x + \frac{1}{2} \int x d(\sin 2x) \\
 &= -\frac{1}{2}(x^2 - 1) \cos 2x + \frac{1}{2}x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx \\
 &= -\frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{3}{2} \right) \cos 2x + \frac{1}{2}x \sin 2x + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 18. \int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx &= \int -\ln^3 x d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\ln^3 x}{x} - 3 \int \ln^2 x d\left(\frac{1}{x}\right) \\
 &= -\frac{\ln^3 x}{x} - 3 \left[\frac{\ln^2 x}{x} + 2 \int \ln x d\left(\frac{1}{x}\right) \right] \\
 &= -\frac{\ln^3 x + 3 \ln^2 x + 6 \ln x + 6}{x} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19. \int e^{\sqrt[3]{x}} dx &\stackrel{x=u^3}{=} \int 3u^2 e^u du = \int 3u^2 d(e^u) = 3u^2 e^u - \int 6u d(e^u) \\
 &= (3u^2 - 6u + 6) e^u + C = 3e^{\sqrt[3]{x}} (x^{2/3} - 2x^{1/3} + 2) + C.
 \end{aligned}$$

$$20. \int \cos \ln x dx = \int e^u \cos u du,$$

而

$$\begin{aligned} \int e^u \cos u du &= \int \cos u d(e^u) = e^u \cos u + \int e^u \sin u du \\ &= e^u \cos u + \int \sin u d(e^u) \\ &= e^u \cos u + e^u \sin u - \int e^u \cos u du, \end{aligned}$$

因此 $\int e^u \cos u du = \frac{e^u(\cos u + \sin u)}{2} + C$, 故有

$$\int \cos \ln x dx = \frac{x(\cos \ln x + \sin \ln x)}{2} + C.$$

$$\begin{aligned} 21. \int (\arcsin x)^2 dx &= x(\arcsin x)^2 - \int \frac{2x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x(\arcsin x)^2 + \int 2 \arcsin x d(\sqrt{1-x^2}) \\ &= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 22. \int e^x \sin^2 x dx &= \frac{1}{2} \int e^x (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} \int e^x \cos 2x dx, \\ \int e^x \cos 2x dx &= \int \cos 2x d(e^x) = e^x \cos 2x + 2 \int e^x \sin 2x dx \\ &= e^x \cos 2x + 2 \int \sin 2x d(e^x) \\ &= e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x - 4 \int e^x \cos 2x dx, \end{aligned}$$

得 $\int e^x \cos 2x dx = \frac{e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x}{5} + C$, 因此有

$$\int e^x \sin^2 x dx = \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{5} e^x \sin 2x - \frac{1}{10} e^x \cos 2x + C.$$

$$\begin{aligned} 23. \int x \ln^2 x dx &= \int \ln^2 x d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} \ln^2 x - \int x \ln x dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln^2 x - \int \ln x d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} \ln^2 x - \frac{x^2}{2} \ln x + \int \frac{x}{2} dx \\ &= \frac{x^2}{4} (2 \ln^2 x - 2 \ln x + 1) + C. \end{aligned}$$

24. 设 $\sqrt{3x+9} = u$, 即 $x = \frac{1}{3}(u^2 - 9)$, $dx = \frac{2}{3}u du$, 则

$$\int e^{\sqrt{3x+9}} dx = \int \frac{2}{3} u e^u du = \int \frac{2}{3} u d(e^u)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{3}ue^u - \int \frac{2}{3}e^u du = \frac{2}{3}ue^u - \frac{2}{3}e^u + C \\
 &= \frac{2}{3}e^{\sqrt{3x+9}}(\sqrt{3x+9} - 1) + C.
 \end{aligned}$$

习题 4-4

有理函数的积分

求下列不定积分：

1. $\int \frac{x^3}{x+3} dx.$

2. $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10} dx.$

3. $\int \frac{x+1}{x^2-2x+5} dx.$

4. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}.$

5. $\int \frac{3}{x^3+1} dx.$

6. $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} dx.$

7. $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$

8. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x} dx.$

9. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}.$

10. $\int \frac{1}{x^4-1} dx.$

11. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}.$

12. $\int \frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2} dx.$

13. $\int \frac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2} dx.$

14. $\int \frac{dx}{3+\sin^2 x}.$

15. $\int \frac{dx}{3+\cos x}.$

16. $\int \frac{dx}{2+\sin x}.$

17. $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}.$

18. $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}.$

19. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}.$

20. $\int \frac{(\sqrt{x})^3-1}{\sqrt{x}+1} dx.$

21. $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} dx.$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}.$

23. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}.$

24. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}.$

解 1. $\int \frac{x^3}{x+3} dx = \int \left(x^2 - 3x + 9 - \frac{27}{x+3} \right) dx$

$$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 9x - 27 \ln|x+3| + C.$$

2. $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10} dx = \int \frac{d(x^2+3x-10)}{x^2+3x-10} = \ln|x^2+3x-10| + C.$

$$\begin{aligned}
 3. \int \frac{x+1}{x^2-2x+5} dx &= \int \frac{x-1}{(x-1)^2+4} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1} dx \\
 &= \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 5) + \arctan \frac{x-1}{2} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \int \frac{dx}{x(x^2+1)} &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} \\
 &= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. \int \frac{3}{1+x^3} dx &= \int \frac{3}{(1+x)(x^2-x+1)} dx = \int \left(\frac{1}{1+x} + \frac{2-x}{x^2-x+1} \right) dx \\
 &= \ln|1+x| - \frac{1}{2} \int \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2-x+1} dx \\
 &= \ln|1+x| - \frac{1}{2} \ln(x^2-x+1) + \sqrt{3} \int \frac{1}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} d\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) \\
 &= \ln|1+x| - \frac{1}{2} \ln(x^2-x+1) + \sqrt{3} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. \int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} dx &= \int \left[\frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2} \right] dx \\
 &= \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C \\
 &= \frac{1}{2} \ln|x^2-1| + \frac{1}{x+1} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7. \int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} &= \int \left[-\frac{1}{2(x+1)} + \frac{2}{x+2} - \frac{3}{2(x+3)} \right] dx \\
 &= -\frac{1}{2} \ln|x+1| + 2 \ln|x+2| - \frac{3}{2} \ln|x+3| + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8. \int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x} dx &= \int \left(x^2+x+1 + \frac{8}{x} - \frac{3}{x-1} - \frac{4}{x+1} \right) dx \\
 &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 8 \ln|x| - 3 \ln|x-1| - 4 \ln|x+1| + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9. \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)} &= \int \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1+x}{2(x^2+1)} \right] dx \\
 &= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \arctan x - \frac{1}{4} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} \\
 &= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \arctan x - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. \int \frac{1}{x^4 - 1} dx &= \int \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} dx \\
 &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx \\
 &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \arctan x + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11. \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)} &= \int \left(\frac{-x}{x^2+1} + \frac{x+1}{x^2+x+1} \right) dx \\
 &= -\frac{\ln(x^2+1)}{2} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} + \\
 &\quad \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx \\
 &= -\frac{\ln(x^2+1)}{2} + \frac{\ln(x^2+x+1)}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12. \int \frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2} dx &= \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2} dx + \int \frac{2x dx}{(x^2+1)^2} \\
 &= \arctan x - \frac{1}{x^2+1} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13. \int \frac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2} dx &= \int \left[-\frac{1}{x^2+x+1} + \frac{x-1}{(x^2+x+1)^2} \right] dx \\
 &= -\int \frac{1}{x^2+x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^2} - \frac{3}{2} \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx,
 \end{aligned}$$

令 $u = x + \frac{1}{2}$, 并记 $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx &= \int \frac{1}{(u^2+a^2)^2} du = \frac{1}{2a^2} \left[\frac{u}{u^2+a^2} + \int \frac{1}{u^2+a^2} du \right] \\
 &= \frac{u}{2a^2(u^2+a^2)} + \frac{1}{2a^2} \int \frac{1}{u^2+a^2} du,
 \end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned}
 &\int \frac{1}{x^2+x+1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx \\
 &= \int \frac{1}{u^2+a^2} du + \frac{3}{2} \left[\frac{u}{2a^2(u^2+a^2)} + \frac{1}{2a^2} \int \frac{1}{u^2+a^2} du \right] \\
 &= \frac{3u}{4a^2(u^2+a^2)} + \left(\frac{3}{4a^2} + 1 \right) \int \frac{1}{u^2+a^2} du \\
 &= \frac{3u}{4a^2(u^2+a^2)} + \frac{1}{a} \left(\frac{3}{4a^2} + 1 \right) \arctan \frac{u}{a} + C_1
 \end{aligned}$$

$$= \frac{2x+1}{2(x^2+x+1)} + \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C_1,$$

因此有

$$\begin{aligned} \int \frac{-x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2} dx &= -\frac{1}{2(x^2 + x + 1)} - \frac{2x+1}{2(x^2+x+1)} - \\ &\quad \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C \\ &= -\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14. \int \frac{dx}{3 + \sin^2 x} &= - \int \frac{d(\cot x)}{3 \csc^2 x + 1} \xrightarrow{u = \cot x} - \int \frac{du}{3u^2 + 4} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \frac{\sqrt{3}u}{2} + C \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \frac{\sqrt{3}\cot x}{2} + C. \end{aligned}$$

$$15. \text{令 } u = \tan \frac{x}{2}, \text{则}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3 + \cos x} &= \int \frac{1}{3 + \frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2} du = \int \frac{1}{2+u^2} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{2}} + C. \end{aligned}$$

$$16. \text{令 } u = \tan \frac{x}{2}, \text{则}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2 + \sin x} &= \int \frac{1}{2 + \frac{2u}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2} du = \int \frac{1}{u^2 + u + 1} du \\ &= \int \frac{1}{\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} du = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2u+1}{\sqrt{3}} + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2\tan \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

$$17. \text{令 } u = \tan \frac{x}{2}, \text{则}$$

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} = \int \frac{1}{1 + \frac{2u}{1+u^2} + \frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2} du$$

$$= \int \frac{du}{1+u} = \ln|1+u| + C = \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

18. 令 $u = \tan\frac{x}{2}$, 则

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} &= \int \frac{1}{\frac{4u}{1+u^2} - \frac{1-u^2}{1+u^2} + 5} \cdot \frac{2}{1+u^2} du \\ &= \int \frac{1}{3u^2 + 2u + 2} du \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{\left(u + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} d\left(u + \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{3u+1}{\sqrt{5}} + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{3\tan\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C. \end{aligned}$$

19. 令 $u = \sqrt[3]{x+1}$, 即 $x = u^3 - 1$, 则

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}} &= \int \frac{3u^2}{1+u} du = \int \left(3u - 3 + \frac{3}{1+u}\right) du \\ &= \frac{3}{2}u^2 - 3u + 3\ln|1+u| + C \\ &= \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2} - 3\sqrt[3]{x+1} + 3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+1}\right| + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20. \int \frac{(\sqrt{x})^3 - 1}{\sqrt{x} + 1} dx &= \int \left(x - \sqrt{x} + 1 - \frac{2}{\sqrt{x} + 1}\right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + x - \int \frac{4t}{t+1} dt \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + x - 4 \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + x - 4\sqrt{x} + 4\ln(\sqrt{x} + 1) + C. \end{aligned}$$

21. 令 $u = \sqrt{x+1}$, 即 $x = u^2 - 1$, 则

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} + 1} dx &= \int \frac{u-1}{u+1} \cdot 2udu = 2 \int \left(u - 2 + \frac{2}{u+1}\right) du \\ &= u^2 - 4u + 4\ln|u+1| + C \\ &= x - 4\sqrt{x+1} + 4\ln(\sqrt{x+1} + 1) + C_1 (C_1 = C + 1). \end{aligned}$$

22. 令 $u = \sqrt[4]{x}$, 即 $x = u^4$, 则

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} &= \int \frac{1}{u^2 + u} \cdot 4u^3 du = 4 \int \left(u - 1 + \frac{1}{u+1} \right) du \\ &= 2u^2 - 4u + 4 \ln|u+1| + C \\ &= 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4 \ln(\sqrt[4]{x} + 1) + C. \end{aligned}$$

23. 解法一

令 $u = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, 即 $x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, 则

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x} &= \int u \cdot \frac{1+u^2}{1-u^2} \cdot \frac{-4u}{(1+u^2)^2} du = \int \frac{-4u^2}{(1-u^2)(1+u^2)} du \\ &= \int \left(\frac{2}{1+u^2} - \frac{1}{1-u} - \frac{1}{1+u} \right) du \\ &= 2 \arctan u + \ln|1-u| - \ln|1+u| + C \\ &= 2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln \left| \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \right| + C. \end{aligned}$$

解法二

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x} &= \int \frac{1-x}{x\sqrt{1-x^2}} dx \xrightarrow{x = \sin u} \int \frac{1-\sin u}{\sin u} du \\ &= \int \csc u du - \int du = \ln|\csc u - \cot u| - u + C \\ &= \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{|x|} - \arcsin x + C. \end{aligned}$$

24. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} = \int \frac{1}{x^2-1} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx,$

令 $u = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$, 即 $x = \frac{u^3+1}{u^3-1}$, 得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} &= \int \frac{u}{\left(\frac{u^3+1}{u^3-1}\right)^2 - 1} \cdot \frac{-6u^2}{(u^3-1)^2} du = -\frac{3}{2} \int du \\ &= -\frac{3}{2}u + C = -\frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C. \end{aligned}$$

习题 4-5

积分表的使用

利用积分表计算下列不定积分：

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 9}}$.
2. $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx$.
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x + x^2}}$.
4. $\int \sqrt{2x^2 + 9} dx$.
5. $\int \sqrt{3x^2 - 2} dx$.
6. $\int e^{2x} \cos x dx$.
7. $\int x \arcsin \frac{x}{2} dx$.
8. $\int \frac{dx}{(x^2 + 9)^2}$.
9. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.
10. $\int e^{-2x} \sin 3x dx$.
11. $\int \sin 3x \sin 5x dx$.
12. $\int \ln^3 x dx$.
13. $\int \frac{1}{x^2(1-x)} dx$.
14. $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$.
15. $\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$.
16. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$.
17. $\int \frac{x}{(2+3x)^2} dx$.
18. $\int \cos^6 x dx$.
19. $\int x^2 \sqrt{x^2 - 2} dx$.
20. $\int \frac{1}{2+5\cos x} dx$.
21. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{2x-1}}$.
22. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$.
23. $\int \frac{x+5}{x^2-2x-1} dx$.
24. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$.
25. $\int \frac{x^4}{25+4x^2} dx$.

解 注意:下列各题中最后括号内所标的是所用积分公式在教材上册附录IV积分表中的编号.

$$\begin{aligned}
 1. \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 9}} &= \frac{1}{2} \int \frac{d(2x)}{\sqrt{(2x)^2 - 3^2}} = \frac{1}{2} \ln |2x + \sqrt{(2x)^2 - 3^2}| + C \\
 &= \frac{1}{2} \ln |2x + \sqrt{4x^2 - 9}| + C. \quad (45)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx &= \int \frac{1}{(x+1)^2 + 2^2} d(x+1) = \frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2} + C. \quad (19) \\
 3. \int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x + x^2}} &= \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2 + 1}} = \ln |x-2 + \sqrt{(x-2)^2 + 1}| + C \\
 &= \ln (x-2 + \sqrt{5 - 4x + x^2}) + C. \quad (31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \int \sqrt{2x^2 + 9} dx &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \sqrt{(\sqrt{2}x)^2 + 3^2} d(\sqrt{2}x) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{\sqrt{2}x}{2} \sqrt{(\sqrt{2}x)^2 + 3^2} + \frac{3^2}{2} \ln [\sqrt{2}x + \sqrt{(\sqrt{2}x)^2 + 3^2}] \right\} + C \\
 &= \frac{x}{2} \sqrt{2x^2 + 9} + \frac{9\sqrt{2}}{4} \ln (\sqrt{2}x + \sqrt{2x^2 + 9}) + C. \quad (39)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. \int \sqrt{3x^2 - 2} dx &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \sqrt{(\sqrt{3}x)^2 - (\sqrt{2})^2} d(\sqrt{3}x) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{\sqrt{3}x}{2} \sqrt{(\sqrt{3}x)^2 - (\sqrt{2})^2} - \right. \\
 &\quad \left. \frac{(\sqrt{2})^2}{2} \ln \left| \sqrt{3}x + \sqrt{(\sqrt{3}x)^2 - (\sqrt{2})^2} \right| \right] + C \\
 &= \frac{x}{2} \sqrt{3x^2 - 2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \ln |\sqrt{3}x + \sqrt{3x^2 - 2}| + C. \quad (53)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. \int e^{2x} \cos x dx &= \frac{1}{2^2 + 1^2} e^{2x} (\sin x + 2 \cos x) + C \\
 &= \frac{1}{5} e^{2x} (\sin x + 2 \cos x) + C. \quad (129)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7. \int x \arcsin \frac{x}{2} dx &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2^2}{4} \right) \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{4} \sqrt{2^2 - x^2} + C \\
 &= \left(\frac{x^2}{2} - 1 \right) \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{4} \sqrt{4 - x^2} + C. \quad (114)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8. \int \frac{dx}{(x^2 + 9)^2} &= \int \frac{dx}{(x^2 + 3^2)^2} \\
 &= \frac{x}{2(2-1)3^2(x^2 + 3^2)} + \frac{2 \times 2 - 3}{2(2-1)3^2} \int \frac{dx}{x^2 + 3^2} \\
 &= \frac{x}{18(x^2 + 9)} + \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3} + C \\
 &= \frac{x}{18(x^2 + 9)} + \frac{1}{54} \arctan \frac{x}{3} + C. \quad (20, 19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9. \int \frac{dx}{\sin^3 x} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin x} \\
 &= -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln |\csc x - \cot x| + C. \quad (97, 88)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. \int e^{-2x} \sin 3x dx &= \frac{1}{(-2)^2 + 3^2} e^{-2x} (-2 \sin 3x - 3 \cos 3x) + C \\
 &= -\frac{e^{-2x}}{13} (2 \sin 3x + 3 \cos 3x) + C. \quad (128)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11. \int \sin 3x \sin 5x dx &= -\frac{1}{2(3+5)} \sin(3+5)x + \frac{1}{2(3-5)} \sin(3-5)x + C \\
 &= -\frac{1}{16} \sin 8x + \frac{1}{4} \sin 2x + C. \quad (101)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12. \int \ln^3 x dx &= x(\ln x)^3 - 3 \int \ln^2 x dx \\
 &= x(\ln x)^3 - 3 \left[x(\ln x)^2 - 2 \int \ln x dx \right] \\
 &= x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6 \int \ln x dx \\
 &= x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6(x \ln x - x) + C \\
 &= x \ln^3 x - 3x \ln^2 x + 6x \ln x - 6x + C. \quad (135, 132)
 \end{aligned}$$

$$13. \int \frac{1}{x^2(1-x)} dx = -\frac{1}{x} - \ln \left| \frac{1-x}{x} \right| + C. \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
 14. \int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx &= 2\sqrt{x-1} - \int \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx \\
 &= 2\sqrt{x-1} - 2 \arctan \sqrt{x-1} + C. \quad (17, 15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15. \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx &= \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} dx \\
 &= \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctan x + C. \quad (20, 19)
 \end{aligned}$$

$$16. \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \arccos \frac{1}{|x|} + C. \quad (51)$$

$$17. \int \frac{x}{(2+3x)^2} dx = \frac{1}{9} \left(\ln |2+3x| + \frac{2}{2+3x} \right) + C. \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
 18. \int \cos^6 x dx &= \frac{1}{6} \cos^5 x \sin x + \frac{5}{6} \int \cos^4 x dx \\
 &= \frac{1}{6} \cos^5 x \sin x + \frac{5}{6} \left(\frac{1}{4} \cos^3 x \sin x + \frac{3}{4} \int \cos^2 x dx \right) \\
 &= \frac{1}{6} \cos^5 x \sin x + \frac{5}{24} \cos^3 x \sin x + \frac{5}{8} \int \cos^2 x dx \\
 &= \frac{1}{6} \cos^5 x \sin x + \frac{5}{24} \cos^3 x \sin x + \frac{5}{8} \left(\frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{1}{2} \int dx \right) \\
 &= \frac{1}{6} \cos^5 x \sin x + \frac{5}{24} \cos^3 x \sin x + \frac{5}{16} \cos x \sin x + \frac{5}{16} x + C. \quad (96)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19. \int x^2 \sqrt{x^2-2} dx &= \frac{x}{8} (2x^2-2) \sqrt{x^2-2} - \frac{4}{8} \ln \left| x + \sqrt{x^2-2} \right| + C \\
 &= \frac{x}{4} (x^2-1) \sqrt{x^2-2} - \frac{1}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2-2} \right| + C. \quad (56)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 20. \int \frac{1}{2 + 5 \cos x} dx &= \frac{1}{7} \sqrt{\frac{7}{3}} \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{7}{3}}}{\tan \frac{x}{2} - \sqrt{\frac{7}{3}}} \right| + C \\
 &= \frac{1}{\sqrt{21}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} \tan \frac{x}{2} + \sqrt{7}}{\sqrt{3} \tan \frac{x}{2} - \sqrt{7}} \right| + C. \quad (106)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 21. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{2x-1}} &= -\frac{\sqrt{2x-1}}{x} - \frac{2}{-2} \int \frac{dx}{x \sqrt{2x-1}} \\
 &= \frac{\sqrt{2x-1}}{x} + 2 \arctan \sqrt{2x-1} + C. \quad (16, 15)
 \end{aligned}$$

22. 解法一

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx &= \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C. \quad (59, 61)
 \end{aligned}$$

解法二

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx &= (x+1) \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - 2 \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{2}} + C \\
 &= \sqrt{1-x^2} - 2 \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{2}} + C. \quad (80)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 23. \int \frac{x+5}{x^2-2x-1} dx &= \int \frac{x}{x^2-2x-1} dx + 5 \int \frac{1}{x^2-2x-1} dx \\
 &= \frac{1}{2} \ln |x^2-2x-1| - \frac{-2}{2} \int \frac{1}{x^2-2x-1} dx + 5 \int \frac{1}{x^2-2x-1} dx \\
 &= \frac{1}{2} \ln |x^2-2x-1| + 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{(-2)^2-4 \cdot 1 \cdot (-1)}} \cdot \\
 &\quad \ln \left| \frac{2x-2-\sqrt{(-2)^2-4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2x-2+\sqrt{(-2)^2-4 \cdot 1 \cdot (-1)}} \right| + C \\
 &= \frac{1}{2} \ln |x^2-2x-1| + \frac{3}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x-(\sqrt{2}+1)}{x+(\sqrt{2}-1)} \right| + C. \quad (30, 29)
 \end{aligned}$$

$$24. \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x-x^2}} = -\sqrt{1+x-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C. \quad (78)$$

$$\begin{aligned}
 25. \int \frac{x^4}{25+4x^2} dx &= \int \left(\frac{1}{4} x^2 - \frac{25}{16} + \frac{625}{16} \cdot \frac{1}{25+4x^2} \right) dx \\
 &= \frac{x^3}{12} - \frac{25}{16} x + \frac{625}{32} \int \frac{1}{5^2+(2x)^2} d(2x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x^3}{12} - \frac{25}{16}x + \frac{625}{32} \cdot \frac{1}{5} \arctan \frac{2x}{5} + C \\
 &= \frac{x^3}{12} - \frac{25}{16}x + \frac{125}{32} \arctan \frac{2x}{5} + C. \quad (19)
 \end{aligned}$$

总习题四

1. 填空：

$$(1) \int x^3 e^x dx = \underline{\hspace{10em}};$$

$$(2) \int \frac{x+5}{x^2 - 6x + 13} dx = \underline{\hspace{10em}}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad (1) \int x^3 e^x dx &= \int x^3 d(e^x) = x^3 e^x - 3 \int x^2 d(e^x) \\
 &= x^3 e^x - 3 \left[x^2 e^x - \int 2x d(e^x) \right] = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \left(x e^x - \int e^x dx \right) \\
 &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + C,
 \end{aligned}$$

因此，应填 $x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + C$.

$$\begin{aligned}
 (2) \int \frac{x+5}{x^2 - 6x + 13} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 - 6x + 13)'}{x^2 - 6x + 13} dx + \int \frac{8}{x^2 - 6x + 13} dx \\
 &= \frac{1}{2} \ln(x^2 - 6x + 13) + \int \frac{8}{(x-3)^2 + 4} dx \\
 &= \frac{1}{2} \ln(x^2 - 6x + 13) + 4 \arctan \frac{x-3}{2} + C,
 \end{aligned}$$

因此，应填 $\frac{1}{2} \ln(x^2 - 6x + 13) + 4 \arctan \frac{x-3}{2} + C$.

2. 以下两题中给出了四个结论，从中选出一个正确的结论：

$$(1) \text{已知 } f'(x) = \frac{1}{x(1+2\ln x)}, \text{且 } f(1) = 1, \text{则 } f(x) \text{ 等于 ()}.$$

$$(A) \ln(1+2\ln x) + 1 \qquad (B) \frac{1}{2} \ln(1+2\ln x) + 1$$

$$(C) \frac{1}{2} \ln(1+2\ln x) + \frac{1}{2} \qquad (D) 2\ln(1+2\ln x) + 1$$

$$(2) \text{在下列等式中，正确的结果是 ()}.$$

$$(A) \int f'(x) dx = f(x) \qquad (B) \int df(x) = f(x)$$

$$(C) \frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x) \qquad (D) d \int f(x) dx = f(x)$$

解 (1) 由微积分基本定理，有

$$\begin{aligned} f(x) - f(1) &= \int_1^x f'(t) dt = \int_1^x \frac{1}{t(1+2\ln t)} dt = \frac{1}{2} \int_1^x \frac{1}{1+2\ln t} d(1+2\ln t) \\ &= \frac{1}{2} [\ln(1+2\ln t)]_1^x = \frac{1}{2} \ln(1+2\ln x), \end{aligned}$$

根据条件 $f(1) = 1$, 得 $f(x) = \frac{1}{2} \ln(1+2\ln x) + 1$. 故选(B).

(2) 根据微分运算与积分运算的关系, 可知

$$\int df(x) = \int f'(x) dx = f(x) + C,$$

$$\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x),$$

$$d \int f(x) dx = \left(\frac{d}{dx} \int f(x) dx \right) dx = f(x) dx,$$

故选(C).

3. 已知 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $\int x^3 f'(x) dx$.

解 根据条件, 有 $\int f(x) dx = \frac{\sin x}{x} + C$, 即 $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x} \right)' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$, 因

此

$$\begin{aligned} \int x^3 f'(x) dx &= x^3 f(x) - \int 3x^2 f(x) dx = x(x \cos x - \sin x) - 3 \int x^2 d\left(\frac{\sin x}{x}\right) \\ &= x^2 \cos x - x \sin x - 3 \left(x^2 \cdot \frac{\sin x}{x} - \int \frac{\sin x}{x} \cdot 2x dx \right) \\ &= x^2 \cos x - 4x \sin x - 6 \cos x + C. \end{aligned}$$

4. 求下列不定积分(其中 a, b 为常数):

$$(1) \int \frac{dx}{e^x - e^{-x}};$$

$$(2) \int \frac{x}{(1-x)^3} dx;$$

$$(3) \int \frac{x^2}{a^6 - x^6} dx (a > 0);$$

$$(4) \int \frac{1 + \cos x}{x + \sin x} dx;$$

$$(5) \int \frac{\ln \ln x}{x} dx;$$

$$(6) \int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx;$$

$$(7) \int \tan^4 x dx;$$

$$(8) \int \sin x \sin 2x \sin 3x dx;$$

$$(9) \int \frac{dx}{x(x^6 + 4)};$$

$$(10) \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx (a > 0);$$

$$(11) \int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}};$$

$$(12) \int x \cos^2 x dx;$$

$$(13) \int e^{ax} \cos bx dx;$$

$$(14) \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}};$$

- (15) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$; (16) $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{5/2}}$;
- (17) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$; (18) $\int \sqrt{x}\sin\sqrt{x}dx$;
- (19) $\int \ln(1+x^2)dx$; (20) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx$;
- (21) $\int \arctan\sqrt{x}dx$; (22) $\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}dx$;
- (23) $\int \frac{x^3}{(1+x^8)^2}dx$; (24) $\int \frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}dx$;
- (25) $\int \frac{dx}{16-x^4}$; (26) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$;
- (27) $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$; (28) $\int e^{\sin x} \frac{x\cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x}dx$;
- (29) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx$; (30) $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}$;
- (31) $\int \frac{e^{3x}+e^x}{e^{4x}-e^{2x}+1}dx$; (32) $\int \frac{xe^x}{(e^x+1)^2}dx$;
- (33) $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx$; (34) $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$;
- (35) $\int \sqrt{1-x^2}\arcsin xdx$; (36) $\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;
- (37) $\int \frac{\cot x}{1+\sin x}dx$; (38) $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$;
- (39) $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$; (40) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x}dx$.
- 解 (1) $\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 1} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{e^x + 1} \right) d(e^x)$
 $= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right| + C.$
- (2) $\int \frac{x}{(1-x)^3}dx \stackrel{u=1-x}{=} \int \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^3} \right) du = -\frac{1}{u} + \frac{1}{2u^2} + C$
 $= -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2(1-x)^2} + C.$
- (3) $\int \frac{x^2}{a^6-x^6}dx = \int \frac{d(x^3)}{3(a^6-x^6)} \stackrel{u=x^3}{=} \int \frac{du}{3(a^6-u^2)}$
 $= \frac{1}{6a^3} \int \left(\frac{1}{a^3+u} + \frac{1}{a^3-u} \right) du$

$$= \frac{1}{6a^3} \ln \left| \frac{a^3 + u}{a^3 - u} \right| + C = \frac{1}{6a^3} \ln \left| \frac{a^3 + x^3}{a^3 - x^3} \right| + C.$$

$$(4) \int \frac{1 + \cos x}{x + \sin x} dx = \int \frac{d(x + \sin x)}{x + \sin x} = \ln |x + \sin x| + C.$$

$$(5) \int \frac{\ln \ln x}{x} dx = \int \ln \ln x d(\ln x) = \ln x \ln \ln x - \int \ln x \cdot \frac{1}{x \ln x} dx \\ = \ln x (\ln \ln x - 1) + C.$$

$$(6) \int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin^2 x)}{1 + \sin^4 x} = \frac{\arctan(\sin^2 x)}{2} + C.$$

$$(7) \int \tan^4 x dx = \int \tan^2 x (\sec^2 x - 1) dx \\ = \int \tan^2 x d(\tan x) - \int (\sec^2 x - 1) dx \\ = \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + C.$$

$$(8) \int \sin x \sin 2x \sin 3x dx = \int \frac{1}{2} (\cos x - \cos 3x) \sin 3x dx \\ = \frac{1}{2} \int \cos x \sin 3x dx - \frac{1}{2} \int \cos 3x \sin 3x dx \\ = \frac{1}{4} \int (\sin 2x + \sin 4x) dx - \frac{1}{12} \sin^2 3x \\ = -\frac{1}{16} \cos 4x - \frac{1}{8} \cos 2x - \frac{1}{12} \sin^2 3x + C.$$

$$(9) \int \frac{dx}{x(x^6 + 4)} \stackrel{x = \frac{1}{u}}{=} \int \frac{-u^5 du}{1 + 4u^6} = -\frac{1}{24} \int \frac{d(1 + 4u^6)}{1 + 4u^6} \\ = -\frac{1}{24} \ln(1 + 4u^6) + C = -\frac{1}{24} \ln \frac{x^6 + 4}{x^6} + C \\ = \frac{1}{4} \ln |x| - \frac{1}{24} \ln(x^6 + 4) + C.$$

(10) 解法一

$$\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx = \int \frac{a+x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} d\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{2} \int \frac{d(a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ = a \arcsin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

解法二 令 $u = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$, 即 $x = a \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}$, 则

$$\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx = \int u \cdot \frac{4au}{(1+u^2)^2} du = \int -2au d\left(\frac{1}{1+u^2}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2au}{1+u^2} + \int \frac{2a}{1+u^2} du \\
&= -\frac{2au}{1+u^2} + 2a \arctan u + C \\
&= (x-a) \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + 2a \arctan \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C \\
&= -\sqrt{a^2 - x^2} + 2a \arctan \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C.
\end{aligned}$$

(11) 解法一

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}} \\
&\stackrel{x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sec u}{=} \int \sec u du = \ln |\sec u + \tan u| + C \\
&= \ln |2x+1+2\sqrt{x(1+x)}| + C.
\end{aligned}$$

解法二 当 $x > 0$ 时, 因为 $\frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x}{1+x}}$, 故令 $u = \sqrt{\frac{x}{1+x}}$, 即

$$x = \frac{u^2}{1-u^2}, \text{ 则}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} &= \int \frac{2}{1-u^2} du = \int \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right) du \\
&= \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + C = \ln \left| \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{x}} \right| + C \\
&= \ln |2x+1+2\sqrt{x(1+x)}| + C,
\end{aligned}$$

当 $x < -1$ 时, 同样可得 $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = \ln |2x+1+2\sqrt{x(1+x)}| + C$.

$$\begin{aligned}
(12) \int x \cos^2 x dx &= \frac{1}{2} \int x(1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{4} \int x d(2x + \sin 2x) \\
&= \frac{x(2x + \sin 2x)}{4} - \frac{1}{4} \int (2x + \sin 2x) dx \\
&= \frac{x^2}{4} + \frac{x \sin 2x}{4} + \frac{\cos 2x}{8} + C.
\end{aligned}$$

(13) 当 $a \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}
\int e^{ax} \cos bx dx &= \frac{1}{a} \int \cos bx d(e^{ax}) \\
&= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} \int \sin bxd(e^{ax}) \\
 &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \cos bxdx.
 \end{aligned}$$

因此有

$$\int e^{ax} \cos bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx) + C,$$

当 $a = 0$ 时,

$$\int e^{ax} \cos bxdx = \begin{cases} \frac{\sin bx}{b} + C, & b \neq 0, \\ x + C, & b = 0. \end{cases}$$

(14) 令 $u = \sqrt{1 + e^x}$, 即作换元 $x = \ln(u^2 - 1)$, 得

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x}} &= \int \frac{2du}{u^2 - 1} = \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C = \ln \frac{\sqrt{1 + e^x} - 1}{\sqrt{1 + e^x} + 1} + C. \\
 (15) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} &\stackrel{x = \frac{1}{u}}{=} - \int \frac{udu}{\sqrt{1 - u^2}} = \sqrt{1 - u^2} + C = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + C,
 \end{aligned}$$

易知当 $x < 0$ 和 $x > 0$ 时的结果相同.

(16) 设 $x = a \sin u \left(-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2} \right)$, 则 $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos u$, $dx = a \cos u du$,

于是

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{5/2}} &= \frac{1}{a^4} \int \sec^4 u du = \frac{1}{a^4} \int (\tan^2 u + 1) d(\tan u) \\
 &= \frac{\tan^3 u}{3a^4} + \frac{\tan u}{a^4} + C \\
 &= \frac{1}{3a^4} \left[\frac{x^3}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} + \frac{3x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right] + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (17) \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1 + x^2}} &\stackrel{x = \frac{1}{u}}{=} \int \frac{-u^3 du}{\sqrt{1 + u^2}} = - \int \left(u \sqrt{1 + u^2} - \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}} \right) du \\
 &= -\frac{1}{3} (1 + u^2)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{1 + u^2} + C \\
 &= -\frac{1}{3} \frac{\sqrt{(1 + x^2)^3}}{x^3} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} + C,
 \end{aligned}$$

易知当 $x < 0$ 和 $x > 0$ 时结果相同.

$$\begin{aligned}
 (18) \int \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx &\stackrel{x=u^2}{=} \int 2u^2 \sin u du = - \int 2u^2 d(\cos u) \\
 &= -2u^2 \cos u + \int 4u \cos u du \\
 &= -2u^2 \cos u + 4u \sin u - \int 4 \sin u du \\
 &= -2u^2 \cos u + 4u \sin u + 4 \cos u + C \\
 &= -2x \cos \sqrt{x} + 4 \sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 4 \cos \sqrt{x} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (19) \int \ln(1+x^2) dx &= x \ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2} dx \\
 &= x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \arctan x + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (20) \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx &= \int \tan^2 x \sec x dx = \int \sec^3 x dx - \int \sec x dx \\
 &= \left(\frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \int \sec x dx \right) - \int \sec x dx \\
 &= \frac{1}{2} \sec x \tan x - \frac{1}{2} \int \sec x dx \\
 &= \frac{1}{2} \sec x \tan x - \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (21) \int \arctan \sqrt{x} dx &= \int \arctan \sqrt{x} d(1+x) = (1+x) \arctan \sqrt{x} - \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\
 &= (1+x) \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (22) \int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x} dx &= \int \frac{\sqrt{2} \left| \cos \frac{x}{2} \right|}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx = \pm \sqrt{2} \int \csc \frac{x}{2} d\left(\frac{x}{2}\right) \\
 &= \pm \sqrt{2} \ln \left| \csc \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} \right| + C,
 \end{aligned}$$

上式当 $\cos \frac{x}{2} > 0$ 时取正, 当 $\cos \frac{x}{2} < 0$ 时取负.

$$\begin{aligned}
 \text{当 } \cos \frac{x}{2} > 0 \text{ 时, } \ln \left| \csc \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} \right| &= \ln \frac{1 - \cos \frac{x}{2}}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} \\
 &= \ln \left(\left| \csc \frac{x}{2} \right| - \left| \cot \frac{x}{2} \right| \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{当 } \cos \frac{x}{2} < 0 \text{ 时, } \ln \left| \csc \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} \right| &= \ln \frac{1 - \cos \frac{x}{2}}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} \\ &= \ln \left(\left| \csc \frac{x}{2} \right| + \left| \cot \frac{x}{2} \right| \right) = -\ln \left(\left| \csc \frac{x}{2} \right| - \left| \cot \frac{x}{2} \right| \right), \end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{\sin x} dx &= \sqrt{2} \ln \left(\left| \csc \frac{x}{2} \right| - \left| \cot \frac{x}{2} \right| \right) + C, \\ (23) \quad \int \frac{x^3}{(1 + x^8)^2} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{(1 + x^8)^2} d(x^4) \xrightarrow{u = x^4} \frac{1}{4} \int \frac{1}{(1 + u^2)^2} du, \end{aligned}$$

设 $u = \tan t \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \right)$, 则 $1 + u^2 = \sec^2 t$, $du = \sec^2 t dt$, 于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{4} \int \cos^2 t dt = \frac{2t + \sin 2t}{16} + C \\ &= \frac{\arctan x^4}{8} + \frac{x^4}{8(1 + x^8)} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (24) \quad \int \frac{x^{11}}{x^8 + 3x^4 + 2} dx &\xrightarrow{u = x^4} \frac{1}{4} \int \frac{u^2}{u^2 + 3u + 2} du \\ &= \frac{1}{4} \int \left(1 + \frac{1}{u+1} - \frac{4}{u+2} \right) du \\ &= \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}\ln|1+u| - \ln|2+u| + C \\ &= \frac{x^4}{4} + \ln \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{2+x^4} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (25) \quad \int \frac{dx}{16 - x^4} &= \int \frac{1}{(2-x)(2+x)(4+x^2)} dx \\ &= \int \left[\frac{1}{32(2-x)} + \frac{1}{32(2+x)} + \frac{1}{8(4+x^2)} \right] dx \\ &= \frac{1}{32} \ln \left| \frac{2+x}{2-x} \right| + \frac{1}{16} \arctan \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

(26) 解法一

令 $u = \tan \frac{x}{2}$, 得

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx &= \int \frac{4u}{(1+u)^2(1+u^2)} du = \int \left[\frac{-2}{(1+u)^2} + \frac{2}{1+u^2} \right] du \\ &= \frac{2}{1+u} + 2 \arctan u + C = \frac{2}{1+\tan \frac{x}{2}} + x + C. \end{aligned}$$

解法二

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx &= \int \frac{\sin x(1 - \sin x)}{\cos^2 x} dx \\ &= - \int \frac{1}{\cos^2 x} d(\cos x) - \int (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \sec x - \tan x + x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (27) \quad \int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx &= \int \frac{x}{2} \sec^2 \frac{x}{2} dx + \int \tan \frac{x}{2} dx \\ &= \int x d\left(\tan \frac{x}{2}\right) + \int \tan \frac{x}{2} dx \\ &= x \tan \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (28) \quad \int e^{\sin x} \frac{x \cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x} dx &= \int x e^{\sin x} \cos x dx - \int e^{\sin x} \tan x \sec x dx \\ &= \int x d(e^{\sin x}) - \int e^{\sin x} d(\sec x) \\ &= x e^{\sin x} - \int e^{\sin x} dx - (\sec x e^{\sin x} - \int e^{\sin x} dx) \\ &= (x - \sec x) e^{\sin x} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (29) \quad \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} dx &\stackrel{x = u^6}{=} \int \frac{6}{u(u+1)} du = 6 \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du \\ &= 6 \ln \left| \frac{u}{1+u} \right| + C = \ln \frac{x}{(\sqrt[6]{x} + 1)^6} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (30) \quad \int \frac{dx}{(1 + e^x)^2} &\stackrel{x = \ln u}{=} \int \frac{du}{u(1+u)^2} = \int \left[\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u} - \frac{1}{(1+u)^2} \right] du \\ &= \ln u - \ln(1+u) + \frac{1}{1+u} + C \\ &= x - \ln(1 + e^x) + \frac{1}{1 + e^x} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (31) \quad \int \frac{e^{3x} + e^x}{e^{4x} - e^{2x} + 1} dx &= \int \frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x} - 1 + e^{-2x}} dx = \int \frac{d(e^x - e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2 + 1} \\ &= \arctan(e^x - e^{-x}) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (32) \quad \int \frac{x e^x}{(e^x + 1)^2} dx &= - \int x d\left(\frac{1}{e^x + 1}\right) = - \frac{x}{e^x + 1} + \int \frac{dx}{e^x + 1} \\ &= - \frac{x}{e^x + 1} + \int \frac{e^{-x} dx}{1 + e^{-x}} \\ &= - \frac{x}{e^x + 1} - \ln(1 + e^{-x}) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (33) \quad & \int \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) dx = x \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{2x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx \\
 &= x \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) - \int 2 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) d(\sqrt{1+x^2}) \\
 &= x \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 2x + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (34) \quad & \int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx \stackrel{x=\frac{1}{u}}{=} \int \frac{u \ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} du = - \int \ln u d((1+u^2)^{-\frac{1}{2}}) \\
 &= -\frac{\ln u}{\sqrt{1+u^2}} + \int \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} \\
 &= \frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \\
 &= \frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C.
 \end{aligned}$$

(35) 设 $x = \sin u$ ($-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$), 则 $\sqrt{1-x^2} = \cos u$, $dx = \cos u du$, 于是

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx &= \int u \cos^2 u du = \frac{1}{2} \int u(1+\cos 2u) du \\
 &= \frac{1}{4} \int u d(2u + \sin 2u) \\
 &= \frac{u(2u + \sin 2u)}{4} - \frac{1}{4} \int (2u + \sin 2u) du \\
 &= \frac{u^2}{4} + \frac{u}{4} \sin 2u - \frac{\sin^2 u}{4} + C \\
 &= \frac{(\arcsin x)^2}{4} + \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} \arcsin x - \frac{x^2}{4} + C.
 \end{aligned}$$

(36) 设 $x = \cos u$ ($0 < u < \pi$), 则 $\sqrt{1-x^2} = \sin u$, $dx = -\sin u du$, 于是

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= - \int u \cos^3 u du = - \int u d\left(\sin u - \frac{1}{3} \sin^3 u\right) \\
 &= -u\left(\sin u - \frac{1}{3} \sin^3 u\right) + \int \left(\sin u - \frac{1}{3} \sin^3 u\right) du \\
 &= -u\left(\sin u - \frac{1}{3} \sin^3 u\right) - \frac{1}{3} \int (2 + \cos^2 u) d(\cos u) \\
 &= -u\left(\sin u - \frac{1}{3} \sin^3 u\right) - \frac{2}{3} \cos u - \frac{1}{9} \cos^3 u + C \\
 &= -\frac{1}{3} \sqrt{1-x^2} (2+x^2) \arccos x - \frac{1}{9} x (6+x^2) + C.
 \end{aligned}$$

$$(37) \int \frac{\cot x}{1 + \sin x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin x(1 + \sin x)} dx = \int \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{1 + \sin x} \right) d(\sin x)$$

$$= \ln \left| \frac{\sin x}{1 + \sin x} \right| + C.$$

$$(38) \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = - \int \cot x \sec^2 x d(\cot x) \xrightarrow{u = \cot x} - \int u \left(1 + \frac{1}{u^2} \right) du$$

$$= - \frac{u^2}{2} - \ln |u| + C = - \frac{\cot^2 x}{2} - \ln |\cot x| + C.$$

$$(39) \int \frac{dx}{(2 + \cos x) \sin x} = \int \frac{d(\cos x)}{(2 + \cos x)(\cos^2 x - 1)}$$

$$\xrightarrow{u = \cos x} \int \frac{du}{(2 + u)(u^2 - 1)}$$

$$= \int \left[\frac{1}{6(u-1)} - \frac{1}{2(u+1)} + \frac{1}{3(u+2)} \right] du$$

$$= \frac{1}{6} \ln |u-1| - \frac{1}{2} \ln |u+1| + \frac{1}{3} \ln |u+2| + C$$

$$= \frac{1}{6} \ln(1 - \cos x) - \frac{1}{2} \ln(1 + \cos x) + \frac{1}{3} \ln(2 + \cos x) + C.$$

(40) 解法一

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(\sin x + \cos x)^2 - \frac{1}{2}}{\sin x + \cos x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int (\sin x + \cos x) dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx$$

$$= \frac{1}{2}(-\cos x + \sin x) - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx,$$

令 $u = \tan \frac{x}{2}$, 则 $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $dx = \frac{2}{1+u^2} du$, 故有

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{2}{2u + 1 - u^2} du = - \int \frac{2}{(u-1)^2 - (\sqrt{2})^2} du$$

$$= - \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{u-1-\sqrt{2}} du + \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{u-1+\sqrt{2}} du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{u-1+\sqrt{2}}{u-1-\sqrt{2}} \right| + C',$$

因此有

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}}{\tan \frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}} \right| + C.$$

解法二

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx &= \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} dx \xrightarrow{u = x + \frac{\pi}{4}} \int \frac{2 \sin^2 u - 1}{2 \sqrt{2} \sin u} du \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \sin u du - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \csc u du \\
 &= -\frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \csc\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right| + C.
 \end{aligned}$$

第五章 定积分

习题 5-1

定积分的概念与性质

1. 利用定积分定义计算由抛物线 $y = x^2 + 1$, 两直线 $x = a, x = b (b > a)$ 及 x 轴所围成的图形的面积.

解 由于函数 $f(x) = x^2 + 1$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 因此可积, 为计算方便, 不妨把 $[a, b]$ 分成 n 等份, 则分点为 $x_i = a + \frac{i(b-a)}{n} (i = 0, 1, 2, \dots, n)$, 每个小区间长度为 $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$, 取 ξ_i 为小区间的右端点 x_i , 则

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\left(a + \frac{i(b-a)}{n} \right)^2 + 1 \right] \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n (a^2 + 1) + 2 \frac{a(b-a)^2}{n^2} \sum_{i=1}^n i + \frac{(b-a)^3}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= (b-a)(a^2 + 1) + a(b-a)^2 \frac{(n+1)}{n} + (b-a)^3 \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}. \end{aligned}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 上式极限为

$$(b-a)(a^2 + 1) + a(b-a)^2 + \frac{1}{3}(b-a)^3 = \frac{b^3 - a^3}{3} + b - a,$$

即为所求图形的面积.

2. 利用定积分定义计算下列积分:

$$(1) \int_a^b x dx (a < b); \quad (2) \int_0^1 e^x dx.$$

解 由于被积函数在积分区间上连续, 因此把积分区间分成 n 等份, 并取 ξ_i 为小区间的右端点, 得到

$$\begin{aligned} (1) \int_a^b x dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[a + \frac{i(b-a)}{n} \right] \frac{b-a}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \right] \\ &= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}. \end{aligned}$$

$$(2) \int_0^1 e^x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} e^{\frac{i}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(e^{\frac{1}{n}})^{n+1} - 1}{n(e^{\frac{1}{n}} - 1)}$$

$$= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{\frac{n+1}{n}} - 1)}{\lim_{n \rightarrow \infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1)} = e - 1.$$

3. 利用定积分的几何意义, 证明下列等式:

$$(1) \int_0^1 2x dx = 1; \quad (2) \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4};$$

$$(3) \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0; \quad (4) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx.$$

证 (1) 根据定积分的几何意义, 定积分 $\int_0^1 2x dx$ 表示由直线 $y = 2x$, $x = 1$ 及 x 轴围成的图形的面积, 该图形是三角形, 底边长为 1, 高为 2, 因此面积为 1, 即 $\int_0^1 2x dx = 1$.

(2) 根据定积分的几何意义, 定积分 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ 表示的是由曲线 $y = \sqrt{1-x^2}$ 以及 x 轴、 y 轴围成的在第 I 象限内的图形面积, 即单位圆的四分之一的图形, 因此有 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$.

(3) 由于函数 $y = \sin x$ 在区间 $[0, \pi]$ 上非负, 在区间 $[-\pi, 0]$ 上非正. 根据定积分的几何意义, 定积分 $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx$ 表示曲线 $y = \sin x$ ($x \in [0, \pi]$) 与 x 轴所围成的图形 D_1 的面积减去曲线 $y = \sin x$ ($x \in [-\pi, 0]$) 与 x 轴所围成的图形 D_2 的面积, 显然图形 D_1 与 D_2 的面积是相等的, 因此有 $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0$.

(4) 由于函数 $y = \cos x$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上非负. 根据定积分的几何意义, 定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ 表示曲线 $y = \cos x$ ($x \in [0, \frac{\pi}{2}]$) 与 x 轴和 y 轴所围成的图形 D_1 的面积加上曲线 $y = \cos x$ ($x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$) 与 x 轴和 y 轴所围成的图形 D_2 的面积, 而图形 D_1 的面积和图形 D_2 的面积显然相等, 因此有 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$.

4. 利用定积分的几何意义, 求下列积分:

$$(1) \int_0^t x dx (t > 0); \quad (2) \int_{-2}^4 \left(\frac{x}{2} + 3 \right) dx;$$

$$(3) \int_{-1}^2 |x| dx; \quad (4) \int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx.$$

解 (1) 根据定积分的几何意义, $\int_0^t x dx$ 表示的是由直线 $y = x$, $x = t$ 以及 x 轴所

围成的直角三角形面积,该直角三角形的两条直角边的长均为 t ,因此面积为 $\frac{t^2}{2}$,故

$$\text{有} \int_0^t x dx = \frac{t^2}{2}.$$

(2) 根据定积分的几何意义, $\int_{-2}^4 \left(\frac{x}{2} + 3 \right) dx$ 表示的是由直线 $y = \frac{x}{2} + 3, x = -2, x = 4$ 以及 x 轴所围成的梯形的面积,该梯形的两底长分别为 $\frac{-2}{2} + 3 = 2$ 和 $\frac{4}{2} + 3 = 5$,梯形的高为 $4 - (-2) = 6$,因此面积为 21. 故有 $\int_{-2}^4 \left(\frac{x}{2} + 3 \right) dx = 21$.

(3) 根据定积分的几何意义, $\int_{-1}^2 |x| dx$ 表示的是由折线 $y = |x|$ 和直线 $x = -1, x = 2$ 以及 x 轴所围成的图形的面积. 该图形由两个等腰直角三角形组成,一个由直线 $y = -x, x = -1$ 和 x 轴所围成,其直角边长为 1,面积为 $\frac{1}{2}$;另一个由直线 $y = x, x = 2$ 和 x 轴所围成,其直角边长为 2,面积为 2. 因此 $\int_{-1}^2 |x| dx = \frac{5}{2}$.

(4) 根据定积分的几何意义, $\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} dx$ 表示的是由上半圆周 $y = \sqrt{9 - x^2}$ 以及 x 轴所围成的半圆的面积,因此有 $\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} dx = \frac{9}{2}\pi$.

5. 设 $a < b$,问 a, b 取什么值时,积分 $\int_a^b (x - x^2) dx$ 取得最大值?

解 根据定积分几何意义, $\int_a^b (x - x^2) dx$ 表示的是由 $y = x - x^2, x = a, x = b$,以及 x 轴所围成的图形在 x 轴上方部分的面积减去 x 轴下方部分面积. 因此如果下方部分面积为 0,上方部分面积为最大时, $\int_a^b (x - x^2) dx$ 的值最大,即当 $a = 0, b = 1$ 时,积分 $\int_a^b (x - x^2) dx$ 取得最大值.

6. 已知 $\ln 2 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$,试用抛物线法公式(1-6)求出 $\ln 2$ 的近似值(取 $n = 10$,计算时取 4 位小数).

解 计算 y_i 并列表

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0.0000	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	1.0000
y_i	1.0000	0.9091	0.8333	0.7692	0.7143	0.6667	0.6250	0.5882	0.5556	0.5263	0.5000

按抛物线法公式(1-6),求得

$$s = \frac{1}{30} [(y_0 + y_{10}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9)]$$

$\approx 0.6931.$

例 7. 设 $\int_{-1}^1 3f(x) dx = 18$, $\int_{-1}^3 f(x) dx = 4$, $\int_{-1}^3 g(x) dx = 3$. 求

$$(1) \int_{-1}^1 f(x) dx;$$

$$(2) \int_1^3 f(x) dx;$$

$$(3) \int_3^{-1} g(x) dx;$$

$$(4) \int_{-1}^3 \frac{1}{5}[4f(x) + 3g(x)] dx.$$

$$\text{解 } (1) \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 3f(x) dx = 6.$$

$$(2) \int_1^3 f(x) dx = \int_{-1}^3 f(x) dx - \int_{-1}^1 f(x) dx = -2.$$

$$(3) \int_3^{-1} g(x) dx = - \int_{-1}^3 g(x) dx = -3.$$

$$(4) \int_{-1}^3 \frac{1}{5}[4f(x) + 3g(x)] dx = \frac{4}{5} \int_{-1}^3 f(x) dx + \frac{3}{5} \int_{-1}^3 g(x) dx = 5.$$

例 8. 水利工程中要计算拦水闸门所受的水压力. 已知闸门上水的压强 p 与水深 h 存在函数关系, 且有 $p = 9.8h$ (kN/m^2). 若闸门高 $H = 3 \text{ m}$, 宽 $L = 2 \text{ m}$, 求水面与闸门顶相齐时闸门所受的水压力 P .

解 在区间 $[0, 3]$ 上插入 $n-1$ 个分点 $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_n = 3$, 取 $\xi_i \in [h_{i-1}, h_i]$, 并记 $\Delta h_i = h_i - h_{i-1}$, 得到闸门所受水压力的近似值为 $\sum_{i=1}^n p(\xi_i)2\Delta h_i$, 根据定积分的定义可知闸门所受的水压力为

$$P = \int_0^3 2p(h) dh = 19.6 \int_0^3 h dh,$$

由于被积函数连续, 而连续函数是可积的, 因此积分值与积分区间的分法和 ξ_i 的取法无关. 为方便计算, 对区间 $[0, 3]$ 进行 n 等分, 并取 ξ_i 为小区间的端点 $h_i = \frac{3i}{n}$, 于是

$$\int_0^3 h dh = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{9i}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9(n+1)}{2n} = \frac{9}{2},$$

故

$$P = 19.6 \int_0^3 h dh = 88.2 (\text{kN}).$$

例 9. 证明定积分性质:

$$(1) \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx (k \text{ 是常数}); \quad (2) \int_a^b 1 \cdot dx = \int_a^b dx = b - a.$$

证 根据定积分的定义, 在区间 $[a, b]$ 中插入 $n-1$ 个点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, 记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, 任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 则

$$(1) \int_a^b kf(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n kf(\xi_i) \Delta x_i = k \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = k \int_a^b f(x) dx.$$

$$(2) \int_a^b 1 \cdot dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (b - a) = b - a.$$

10. 估计下列各积分的值:

$$(1) \int_1^4 (x^2 + 1) dx;$$

$$(2) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (1 + \sin^2 x) dx;$$

$$(3) \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x \arctan x dx;$$

$$(4) \int_2^0 e^{x^2-x} dx.$$

解 (1) 在区间 $[1, 4]$ 上, $2 \leq x^2 + 1 \leq 17$, 因此有

$$6 = \int_1^4 2 dx \leq \int_1^4 (x^2 + 1) dx \leq \int_1^4 17 dx = 51.$$

(2) 在区间 $\left[\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right]$ 上, $1 = 1 + 0 \leq 1 + \sin^2 x \leq 1 + 1 = 2$, 因此有

$$\pi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} dx \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (1 + \sin^2 x) dx \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} 2 dx = 2\pi.$$

(3) 在区间 $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right]$ 上, 函数 $f(x) = x \arctan x$ 是单调增加的, 因此 $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \leq f(x) \leq f(\sqrt{3})$, 即 $\frac{\pi}{6\sqrt{3}} \leq x \arctan x \leq \frac{\pi}{\sqrt{3}}$, 故有

$$\frac{\pi}{9} = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6\sqrt{3}} dx \leq \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x \arctan x dx \leq \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\pi}{\sqrt{3}} dx = \frac{2}{3}\pi.$$

(4) 设 $f(x) = x^2 - x$, $x \in [0, 2]$, 则 $f'(x) = 2x - 1$, $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的最大值、最小值必为 $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(2)$ 中的最大值和最小值, 即最大值和最小值分别为 $f(2) = 2$ 和 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$, 因此有

$$2e^{-\frac{1}{4}} = \int_0^2 e^{-\frac{1}{4}} dx \leq \int_0^2 e^{x^2-x} dx \leq \int_0^2 e^2 dx = 2e^2,$$

而 $\int_2^0 e^{x^2-x} dx = - \int_0^2 e^{x^2-x} dx$, 故 $-2e^2 \leq \int_2^0 e^{x^2-x} dx \leq -2e^{-\frac{1}{4}}$.

11. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 证明 $\int_0^1 f^2(x) dx \geq \left(\int_0^1 f(x) dx\right)^2$.

证 记 $a = \int_0^1 f(x) dx$, 则由定积分性质 5, 得

$$\int_0^1 [f(x) - a]^2 dx \geq 0,$$

即

$$\begin{aligned} \int_0^1 [f(x) - a]^2 dx &= \int_0^1 f^2(x) dx - 2a \int_0^1 f(x) dx + a^2 \\ &= \int_0^1 f^2(x) dx - \left[\int_0^1 f(x) dx \right]^2 \geq 0, \end{aligned}$$

由此结论成立.

12. 设 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明

(1) 若在 $[a, b]$ 上, $f(x) \geq 0$, 且 $f(x) \not\equiv 0$, 则 $\int_a^b f(x) dx > 0$;

(2) 若在 $[a, b]$ 上, $f(x) \geq 0$, 且 $\int_a^b f(x) dx = 0$, 则在 $[a, b]$ 上, $f(x) \equiv 0$;

(3) 若在 $[a, b]$ 上, $f(x) \leq g(x)$, 且 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$, 则在 $[a, b]$ 上,

$f(x) \equiv g(x)$.

证 (1) 根据条件必定存在 $x_0 \in [a, b]$, 使得 $f(x_0) > 0$. 由函数 $f(x)$ 在 x_0 连续可知, 存在 $a \leq \alpha < \beta \leq b$, 使得当 $x \in [\alpha, \beta]$ 时 $f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}$. 因此有

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^\alpha f(x) dx + \int_\alpha^\beta f(x) dx + \int_\beta^b f(x) dx,$$

由定积分性质得到:

$$\int_a^\alpha f(x) dx \geq 0, \quad \int_\alpha^\beta f(x) dx \geq \int_\alpha^\beta \frac{f(x_0)}{2} dx = \frac{\beta - \alpha}{2} f(x_0) > 0, \quad \int_\beta^b f(x) dx \geq 0,$$

故得到结论 $\int_a^b f(x) dx > 0$.

(2) 用反证法. 如果 $f(x) \not\equiv 0$, 则由(1) 得到 $\int_a^b f(x) dx > 0$, 与假设条件矛盾, 因此结论成立.

(3) 因为 $h(x) = g(x) - f(x) \geq 0$, 且

$$\int_a^b h(x) dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx = 0,$$

由(2) 可得在 $[a, b]$ 上

$$h(x) \equiv 0,$$

从而结论成立.

13. 根据定积分的性质及第 12 题的结论, 说明下列各对积分哪—个的值较大:

(1) $\int_0^1 x^2 dx$ 还是 $\int_0^1 x^3 dx$?

(2) $\int_1^2 x^2 dx$ 还是 $\int_1^2 x^3 dx$?

(3) $\int_1^2 \ln x dx$ 还是 $\int_1^2 (\ln x)^2 dx$?

(4) $\int_0^1 x dx$ 还是 $\int_0^1 \ln(1+x) dx$?

(5) $\int_0^1 e^x dx$ 还是 $\int_0^1 (1+x) dx$?

解 (1) 在区间 $[0,1]$ 上 $x^2 \geq x^3$, 因此 $\int_0^1 x^2 dx$ 比 $\int_0^1 x^3 dx$ 大.

(2) 在区间 $[1,2]$ 上 $x^2 \leq x^3$, 因此 $\int_1^2 x^3 dx$ 比 $\int_1^2 x^2 dx$ 大.

(3) 在区间 $[1,2]$ 上由于 $0 \leq \ln x \leq 1$, 得 $\ln x \geq (\ln x)^2$, 因此 $\int_1^2 \ln x dx$ 比 $\int_1^2 (\ln x)^2 dx$ 大.

(4) 由教材第三章第一节例 1 可知, 当 $x > 0$ 时, $\ln(1+x) < x$, 因此 $\int_0^1 x dx$ 比 $\int_0^1 \ln(1+x) dx$ 大.

(5) 由于当 $x > 0$ 时 $\ln(1+x) < x$, 故此时有 $1+x < e^x$, 因此 $\int_0^1 e^x dx$ 比 $\int_0^1 (1+x) dx$ 大.

习题 5-2

微积分基本公式

1. 试求函数 $y = \int_0^x \sin t dt$ 当 $x = 0$ 及 $x = \frac{\pi}{4}$ 时的导数.

解 $\frac{dy}{dx} = \sin x$, 因此 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0$, $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. 求由参数表达式 $x = \int_0^t \sin u du$, $y = \int_0^t \cos u du$ 所确定的函数对 x 的导数 $\frac{dy}{dx}$.

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = \frac{\cos t}{\sin t} = \cot t$.

3. 求由 $\int_0^y e^t dt + \int_0^x \cos t dt = 0$ 所决定的隐函数对 x 的导数 $\frac{dy}{dx}$.

解 方程两端分别对 x 求导, 得 $e^y \frac{dy}{dx} + \cos x = 0$, 故 $\frac{dy}{dx} = -e^{-y} \cos x$.

4. 当 x 为何值时, 函数 $I(x) = \int_0^x te^{-t^2} dt$ 有极值?

解 容易知道 $I(x)$ 可导, 而 $I'(x) = xe^{-x^2} = 0$ 只有惟一解 $x = 0$. 当 $x < 0$ 时 $I'(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时 $I'(x) > 0$, 故 $x = 0$ 为函数 $I(x)$ 的惟一的极值点(极小值点).

5. 计算下列各导数:

$$(1) \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt; \quad (2) \frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}};$$

$$(3) \frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt.$$

$$\text{解 } (1) \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt = 2x \sqrt{1+x^4}.$$

$$(2) \frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = \frac{d}{dx} \left(\int_0^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} - \int_0^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \right)$$

$$= \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}.$$

$$(3) \frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt = \frac{d}{dx} \left[\int_0^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt - \int_0^{\sin x} \cos(\pi t^2) dt \right]$$

$$= -\sin x \cos(\pi \cos^2 x) - \cos x \cos(\pi \sin^2 x)$$

$$= -\sin x \cos(\pi - \pi \sin^2 x) - \cos x \cos(\pi \sin^2 x)$$

$$= (\sin x - \cos x) \cos(\pi \sin^2 x).$$

6. 证明 $f(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^3} dt$ 在 $[-1, +\infty)$ 上是单调增加函数, 并求 $(f^{-1})'(0)$.

证 显然 $f(x)$ 在 $[-1, +\infty)$ 上可导, 且当 $x > -1$ 时, $f'(x) = \sqrt{1+x^3} > 0$, 因此 $f(x)$ 在 $[-1, +\infty)$ 是单调增加函数.

注意到 $f(1) = 0$, 故 $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

7. 设 $f(x)$ 具有三阶连续导数, $y=f(x)$ 的图形如图 5-1 所示. 问下列积分中的哪一个积分值为负?

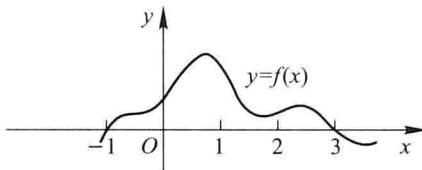


图 5-1

- | | |
|-----------------------------|------------------------------|
| (A) $\int_{-1}^3 f(x) dx$ | (B) $\int_{-1}^3 f'(x) dx$ |
| (C) $\int_{-1}^3 f''(x) dx$ | (D) $\int_{-1}^3 f'''(x) dx$ |

解 根据 $y=f(x)$ 的图形可知, 在区间 $[-1, 3]$ 上 $f(x) \geq 0$, 且 $f(-1) = f(3) = 0$, $f'(-1) > 0$, $f''(-1) < 0$, $f'(3) < 0$, $f''(3) > 0$. 因此

$$\int_{-1}^3 f(x) dx > 0, \quad \int_{-1}^3 f'(x) dx = f(3) - f(-1) = 0,$$

$$\int_{-1}^3 f''(x) dx = f'(3) - f'(-1) < 0, \quad \int_{-1}^3 f'''(x) dx = f''(3) - f''(-1) > 0. \text{ 故选(C).}$$

8. 计算下列积分:

$$(1) \int_0^a (3x^2 - x + 1) dx; \quad (2) \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx;$$

(3) $\int_4^9 \sqrt{x}(1 + \sqrt{x}) dx;$

(4) $\int_{\frac{1}{\beta}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2};$

(5) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$

(6) $\int_0^{\sqrt{3}a} \frac{dx}{a^2+x^2};$

(7) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}};$

(8) $\int_{-1}^0 \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1} dx;$

(9) $\int_{-e-1}^{-2} \frac{dx}{1+x};$

(10) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 \theta d\theta;$

(11) $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx;$

(12) $\int_0^2 f(x) dx,$ 其中 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1, \\ \frac{1}{2}x^2, & x > 1. \end{cases}$

解 (1) $\int_0^a (3x^2 - x + 1) dx = \left[x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x \right]_0^a$
 $= a^3 - \frac{1}{2}a^2 + a = a \left(a^2 - \frac{1}{2}a + 1 \right).$

(2) $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3x^3} \right]_1^2 = \frac{21}{8}.$

(3) $\int_4^9 \sqrt{x}(1 + \sqrt{x}) dx = \int_4^9 (\sqrt{x} + x) dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} \right]_4^9 = \frac{271}{6}.$

(4) $\int_{\frac{1}{\beta}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_{\frac{1}{\beta}}^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$

(5) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{3}.$

(6) $\int_0^{\sqrt{3}a} \frac{dx}{a^2+x^2} = \left[\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \right]_0^{\sqrt{3}a} = \frac{\pi}{3a}.$

(7) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \left[\arcsin \frac{x}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6}.$

(8) $\int_{-1}^0 \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1} dx = \int_{-1}^0 \left(3x^2 + \frac{1}{x^2+1} \right) dx$

$= [x^3 + \arctan x]_{-1}^0 = 1 + \frac{\pi}{4}.$

(9) $\int_{-e-1}^{-2} \frac{dx}{1+x} = [\ln |1+x|]_{-e-1}^{-2} = -1.$

(10) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 \theta - 1) d\theta = [\tan \theta - \theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}.$

$$(11) \int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \int_0^\pi \sin x dx + \int_\pi^{2\pi} (-\sin x) dx \\ = [-\cos x]_0^\pi + [\cos x]_\pi^{2\pi} = 4.$$

$$(12) \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 (x+1) dx + \int_1^2 \frac{1}{2} x^2 dx \\ = \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{6} \right]_1^2 = \frac{8}{3}.$$

9. 设 $k \in \mathbb{N}_+$, 试证下列各题:

$$(1) \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = 0; \quad (2) \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = 0;$$

$$(3) \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \pi; \quad (4) \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \pi.$$

解 (1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = \left[\frac{1}{k} \sin kx \right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = \left[-\frac{1}{k} \cos kx \right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$

(3) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2kx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx = \pi$, 其中由(1)得

到 $\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2kx dx = 0.$

(4) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2kx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx = \pi$, 其中由(1)得

到 $\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2kx dx = 0.$

10. 设 $k, l \in \mathbb{N}_+$, 且 $k \neq l$. 证明:

$$(1) \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin lx dx = 0; \quad (2) \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx dx = 0;$$

$$(3) \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lx dx = 0.$$

解 (1) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin lx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(k+l)x - \sin(k-l)x] dx \\ = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k+l)x dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k-l)x dx \\ = 0,$

其中由上一题 $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(k+l)x dx = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(k-l)x dx = 0$.

$$(2) \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k+l)x + \cos(k-l)x] dx \\ = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k+l)x dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k-l)x dx$$

$$= 0,$$

其中由上一题 $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k+l)x dx = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k-l)x dx = 0$.

$$\begin{aligned}(3) \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lx dx &= -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k+l)x - \cos(k-l)x] dx \\&= -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k+l)x dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k-l)x dx \\&= 0,\end{aligned}$$

其中由上一题 $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k+l)x dx = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k-l)x dx = 0$.

11. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)^2}{\int_0^x te^{2t^2} dt}.$$

$$\text{解 } (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x^2}{1} = 1.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)^2}{\int_0^x te^{2t^2} dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{x^2} \int_0^x e^{t^2} dt}{xe^{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \int_0^x e^{t^2} dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{x^2}}{1} = 2.$$

12. 设

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1], \\ x, & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

求 $\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt$ 在 $[0, 2]$ 上的表达式, 并讨论 $\Phi(x)$ 在 $(0, 2)$ 内的连续性.

解 当 $x \in [0, 1]$ 时, $\Phi(x) = \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3}$; 当 $x \in [1, 2]$ 时, $\Phi(x) = \int_0^1 t^2 dt +$

$$\int_1^x t dt = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}, \text{ 即}$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}, & x \in [0, 1], \\ \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}, & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \Phi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3}$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \Phi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{3}$, 且 $\Phi(1) = \frac{1}{3}$, 故函

数 $\Phi(x)$ 在 $x = 1$ 处连续, 而在其他点处显然连续, 因此函数 $\Phi(x)$ 在区间 $(0, 2)$ 内连续.

注 事实上, 由于 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 内连续, 故 $\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt$ 在 $(0, 2)$ 内可导,

因此 $\Phi(x)$ 必在 $(0, 2)$ 内连续. 我们甚至有以下更强的结论:

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界并可积, 则 $\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt$ 在 $[a, b]$ 上连续. 按照连续函数定义不难证明这一结论. 作为练习, 请读者自己证明之.

13. 设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & x < 0 \text{ 或 } x > \pi. \end{cases}$$

求 $\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的表达式.

解 当 $x < 0$ 时, $\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt = 0$;

当 $0 \leq x \leq \pi$ 时, $\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{1}{2} \sin t dt = \frac{1 - \cos x}{2}$;

当 $x > \pi$ 时, $\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^\pi f(t) dt + \int_\pi^x f(t) dt$
 $= \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin t dt = 1$.

即

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1 - \cos x}{2}, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$$

14. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导且 $f'(x) \leq 0$,

$$F(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt.$$

证明在 (a, b) 内有 $F'(x) \leq 0$.

$$\begin{aligned} \text{证 } F'(x) &= \frac{1}{(x-a)^2} \left[(x-a)f(x) - \int_a^x f(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{(x-a)^2} [(x-a)f(x) - (x-a)f(\xi)] \quad (\xi \in (a, x) \subset [a, b]) \\ &= \frac{x-\xi}{x-a} f'(\eta) \quad (\eta \in (\xi, x) \subset (a, b)), \end{aligned}$$

由条件可知结论成立.

15. 设 $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$, 求 $F'(0)$.

$$\text{解 } F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{1} = 1.$$

16. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. 证明函数

$$y = e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt$$

满足微分方程 $\frac{dy}{dx} + y = f(x)$, 并求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x)$.

证 $\frac{dy}{dx} = -e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt + e^{-x} \cdot e^x f(x)$
 $= -y + f(x),$

因此 $y(x)$ 满足微分方程 $\frac{dy}{dx} + y = f(x)$.

由条件 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, 从而存在 $X_0 > 0$, 当 $x > X_0$ 时, 有

$$f(x) > \frac{1}{2}.$$

因此,

$$\begin{aligned} \int_0^x e^t f(t) dt &= \int_0^{X_0} e^t f(t) dt + \int_{X_0}^x e^t f(t) dt \\ &\geq \int_0^{X_0} e^t f(t) dt + \int_{X_0}^x \frac{1}{2} e^{X_0} dt \\ &= \int_0^{X_0} e^t f(t) dt + \frac{1}{2} e^{X_0} (x - X_0), \end{aligned}$$

故, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\int_0^x e^t f(t) dt \rightarrow +\infty$, 从而利用洛必达法则, 有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x e^t f(t) dt}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(x)}{e^x} = 1.$$

习题 5-3

定积分的换元法和分部积分法

1. 计算下列定积分:

$$(1) \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) dx;$$

$$(2) \int_{-2}^1 \frac{dx}{(11 + 5x)^3};$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos^3 \varphi d\varphi;$$

$$(4) \int_0^{\pi} (1 - \sin^3 \theta) d\theta;$$

$$(5) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du;$$

$$(6) \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2 - x^2} dx;$$

$$(7) \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{8 - 2y^2} dy;$$

$$(8) \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2} dx;$$

$$(9) \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx (a > 0);$$

$$(10) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 + x^2}};$$

$$(11) \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5 - 4x}};$$

$$(12) \int_1^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}};$$

$$(13) \int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x} - 1};$$

$$(14) \int_0^{\sqrt{2}a} \frac{x dx}{\sqrt{3a^2 - x^2}} (a > 0);$$

$$(15) \int_0^1 te^{-\frac{t^2}{2}} dt;$$

$$(16) \int_1^{e^2} \frac{dx}{x \sqrt{1 + \ln x}};$$

$$(17) \int_{-2}^0 \frac{(x + 2) dx}{x^2 + 2x + 2};$$

$$(18) \int_0^2 \frac{x dx}{(x^2 - 2x + 2)^2};$$

$$(19) \int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x dx;$$

$$(20) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^4 \theta d\theta;$$

$$(21) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx;$$

$$(22) \int_{-5}^5 \frac{x^3 \sin^2 x}{x^4 + 2x^2 + 1} dx;$$

$$(23) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 2x dx;$$

$$(24) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx;$$

$$(25) \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos 2x} dx;$$

$$(26) \int_0^{2\pi} |\sin(x + 1)| dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) dx &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) d\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \left[-\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

$$(2) \int_{-2}^1 \frac{dx}{(11 + 5x)^3} = \int_{-2}^1 \frac{d(11 + 5x)}{5(11 + 5x)^3} = \left[-\frac{1}{10(11 + 5x)^2} \right]_{-2}^1 = \frac{51}{512}.$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos^3 \varphi d\varphi = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d(\cos \varphi) = \left[-\frac{1}{4} \cos^4 \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned} (4) \int_0^{\pi} (1 - \sin^3 \theta) d\theta &= \pi + \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \theta) d(\cos \theta) \\ &\stackrel{u = \cos \theta}{=} \pi + \int_1^{-1} (1 - u^2) du = \pi - \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

$$(5) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2u) du$$

$$= \frac{1}{2} \left[u + \frac{1}{2} \sin 2u \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

$$(6) \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2 - x^2} dx \stackrel{x = \sqrt{2} \sin u}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos^2 u du = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

$$(7) \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{8 - 2y^2} dy = \frac{y = 2\sin u}{\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 4\sqrt{2}\cos^2 u du} \\ = 2\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2u) du \\ = 2\sqrt{2} \left[u + \frac{1}{2}\sin 2u \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(\pi + 2).$$

$$(8) \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx = \frac{x = \sin u}{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u} du} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\csc^2 u - 1) du \\ = \left[-\cot u - u \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

$$(9) \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x = a\sin u}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4 \sin^2 u \cos^2 u du} = \frac{a^4}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2u)^2 d(2u) \\ = \frac{a^4}{8} \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = \frac{a^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt \\ = \frac{a^4}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16} a^4.$$

$$(10) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}} = \frac{x = \frac{1}{u}}{\int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{-u}{\sqrt{1+u^2}} du} = \left[-\sqrt{1+u^2} \right]_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\ = \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$(11) \text{令 } u = \sqrt{5 - 4x}, \text{即 } x = \frac{5 - u^2}{4}, \text{得}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5 - 4x}} = \int_3^1 \frac{u^2 - 5}{8} du = \left[\frac{u^3}{24} - \frac{5}{8}u \right]_3^1 = \frac{1}{6}.$$

$$(12) \text{令 } u = \sqrt{x}, \text{即 } x = u^2, \text{得}$$

$$\int_1^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} = \int_1^2 \frac{2u du}{1 + u} = [2u - 2\ln(1 + u)]_1^2 = 2 + 2\ln \frac{2}{3}.$$

$$(13) \text{令 } u = \sqrt{1 - x}, \text{即 } x = 1 - u^2, \text{得}$$

$$\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}-1} = \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{-2u du}{u-1} = -2[u + \ln(1-u)]_{\frac{1}{2}}^0 = 1 - 2\ln 2.$$

$$(14) \int_0^{\sqrt{2}a} \frac{x dx}{\sqrt{3a^2 - x^2}} = -\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}a} \frac{d(3a^2 - x^2)}{\sqrt{3a^2 - x^2}} \\ = -[\sqrt{3a^2 - x^2}]_0^{\sqrt{2}a} = (\sqrt{3} - 1)a.$$

$$(15) \int_0^1 te^{-\frac{t^2}{2}} dt = -\int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}} d\left(-\frac{t^2}{2}\right) = [-e^{-\frac{t^2}{2}}]_0^1 = 1 - e^{-\frac{1}{2}}.$$

$$(16) \int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \int_0^2 \frac{du}{\sqrt{1+u}} = [2\sqrt{1+u}]_0^2 = 2\sqrt{3} - 2.$$

$$\begin{aligned} (17) \int_{-2}^0 \frac{(x+2)dx}{x^2+2x+2} &= \int_{-2}^0 \frac{(x+1)+1}{(x+1)^2+1} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+2x+2) + \arctan(x+1) \right]_{-2}^0 \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

(18) 令 $x = 1 + \tan u$, 则 $dx = \sec^2 u du$, 因此

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{x dx}{(x^2 - 2x + 2)^2} &= \int_0^2 \frac{x dx}{[(x-1)^2 + 1]^2} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + \tan u) du}{\sec^2 u} \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 u du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2u) du \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(19) 由于被积函数为奇函数, 因此 $\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x dx = 0$.

(20) 由于被积函数为偶函数, 因此

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^4 \theta d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^4 \theta d\theta = 8 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi.$$

(21) 由于被积函数为偶函数, 因此有

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin x)^2 d(\arcsin x) \\ &= \frac{2}{3} [(\arcsin x)^3]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi^3}{324}. \end{aligned}$$

(22) 由于被积函数为奇函数, 因此

$$\int_{-5}^5 \frac{x^3 \sin^2 x}{x^4 + 2x^2 + 1} dx = 0.$$

$$\begin{aligned} (23) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 2x dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x (1 - 2\sin^2 x) dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\sin^2 x) d(\sin x) \\ &= \left[\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 2x dx &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 3x + \cos x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} \sin 3x + \sin x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$(24) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x} \sin x dx$$

$$\stackrel{u = \cos x}{=} -2 \int_1^0 \sqrt{u} du = \frac{4}{3}.$$

$$(25) \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos 2x} dx = \int_0^\pi \sqrt{2} \sin x dx = \sqrt{2} [-\cos x]_0^\pi = 2\sqrt{2}.$$

$$(26) \int_0^{2\pi} |\sin(x+1)| dx \stackrel{x=u-1}{=} \int_1^{2\pi+1} |\sin u| du,$$

由于 $|\sin x|$ 是以 π 为周期的周期函数, 因此

$$\text{上式} = 2 \int_0^\pi |\sin u| du = 4.$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx.$$

证 令 $x = a + b - u$, 则

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= - \int_b^a f(a+b-u) du = \int_a^b f(a+b-u) du \\ &= \int_a^b f(a+b-x) dx. \end{aligned}$$

3. 证明: $\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2} \quad (x > 0).$

$$\text{证 } \int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} \stackrel{t=\frac{1}{u}}{=} - \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{du}{1+u^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{du}{1+u^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}.$$

4. 证明: $\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx \quad (m, n \in \mathbb{N}).$

证 令 $x = 1-u$, 则

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_1^0 -(1-u)^m u^n du = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx.$$

5. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $n \in \mathbb{Z}$, 证明

$$\int_{\frac{n}{2}\pi}^{\frac{n+1}{2}\pi} f(|\sin x|) dx = \int_{\frac{n}{2}\pi}^{\frac{n+1}{2}\pi} f(|\cos x|) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx.$$

证 令 $x = u + \frac{n}{2}\pi$, 则 $dx = du$, 因此

$$\int_{\frac{n}{2}\pi}^{\frac{n+1}{2}\pi} f(|\sin x|) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\left|\sin\left(u + \frac{n}{2}\pi\right)\right|\right) du$$

$$= \begin{cases} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin u) du, & n \text{ 为偶数}, \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos u) du, & n \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

$$\int_{\frac{n}{2}\pi}^{\frac{n+1}{2}\pi} f(|\cos x|) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\left|\cos\left(u + \frac{n}{2}\pi\right)\right|\right) du$$

$$= \begin{cases} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos u) du, & n \text{ 为偶数}, \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin u) du, & n \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

由于 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$, 因此结论成立.

6. 若 $f(x)$ 是连续的奇函数, 证明 $\int_0^x f(t) dt$ 是偶函数; 若 $f(x)$ 是连续的偶函数, 证明

$\int_0^x f(t) dt$ 是奇函数.

证 记 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则有

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt \stackrel{t = -u}{=} - \int_0^x f(-u) du,$$

当 $f(x)$ 为奇函数时, $F(-x) = \int_0^x f(u) du = F(x)$, 故 $\int_0^x f(t) dt$ 是偶函数.

当 $f(x)$ 为偶函数时, $F(-x) = - \int_0^x f(u) du = -F(x)$, 故 $\int_0^x f(t) dt$ 是奇函数.

7. 计算下列定积分:

$$(1) \int_0^1 xe^{-x} dx;$$

$$(2) \int_1^e x \ln x dx;$$

$$(3) \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} t \sin \omega t dt (\omega \text{ 为常数});$$

$$(4) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx;$$

$$(5) \int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx;$$

$$(6) \int_0^1 x \arctan x dx;$$

$$(7) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx;$$

$$(8) \int_1^2 x \log_2 x dx;$$

$$(9) \int_0^{\pi} (x \sin x)^2 dx;$$

$$(10) \int_1^e \sin(\ln x) dx;$$

$$(11) \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx;$$

$$(12) \int_0^1 (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} dx (m \in \mathbf{N}_+);$$

$$(13) J_m = \int_0^{\pi} x \sin^m x dx (m \in \mathbf{N}_+).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) \int_0^1 xe^{-x} dx &= - \int_0^1 x d(e^{-x}) = - [xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx \\ &= -e^{-1} + [-e^{-x}]_0^1 = 1 - \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

$$(2) \int_1^e x \ln x dx = \int_1^e \frac{\ln x}{2} d(x^2) = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

$$\begin{aligned} (3) \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} t \sin \omega t dt &= - \frac{1}{\omega} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} t d(\cos \omega t) = - \frac{1}{\omega} \left[t \cos \omega t \right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} + \frac{1}{\omega} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos \omega t dt \\ &= - \frac{2\pi}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2} \left[\sin \omega t \right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = - \frac{2\pi}{\omega^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx &= - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x d(\cot x) = \left[-x \cot x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot x dx \\ &= - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\pi}{4} + \left[\ln |\sin x| \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{9} \right) \pi + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx &= \int_1^4 2 \ln x d\sqrt{x} = \left[2\sqrt{x} \ln x \right]_1^4 - \int_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}} dx \\ &= 8 \ln 2 - [4\sqrt{x}]_1^4 = 4(2 \ln 2 - 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \int_0^1 x \arctan x dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 \arctan x d(x^2) \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 \arctan x \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} [x - \arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (7) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x d(e^{2x}) \\ &= \frac{1}{2} [e^{2x} \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin x dx \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x d(e^{2x}) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} [e^{2x} \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx, \end{aligned}$$

因此有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx = \frac{1}{5} (e^\pi - 2).$$

$$(8) \int_1^2 x \log_2 x dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \log_2 x d(x^2)$$

$$= \frac{1}{2} [x^2 \log_2 x]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{x}{\ln 2} dx$$

$$= 2 - \frac{1}{4 \ln 2} [x^2]_1^2 = 2 - \frac{3}{4 \ln 2}.$$

$$\begin{aligned}(9) \int_0^\pi (x \sin x)^2 dx &= \frac{1}{2} \int_0^\pi x^2 (1 - \cos 2x) dx \\&= \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4} \int_0^\pi x^2 d(\sin 2x) \\&= \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4} [x^2 \sin 2x]_0^\pi + \frac{1}{2} \int_0^\pi x \sin 2x dx \\&= \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4} \int_0^\pi x d(\cos 2x) \\&= \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4} [x \cos 2x]_0^\pi + \frac{1}{4} \int_0^\pi \cos 2x dx \\&= \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(10) \int_1^e \sin(\ln x) dx &\stackrel{x = e^u}{=} \int_0^1 e^u \sin u du = [\sin u]_0^1 - \int_0^1 e^u \cos u du \\&= e \sin 1 - [\cos u]_0^1 - \int_0^1 e^u \sin u du \\&= e(\sin 1 - \cos 1) + 1 - \int_0^1 e^u \sin u du,\end{aligned}$$

$$\text{所以, } \int_1^e \sin(\ln x) dx = \frac{e}{2} (\sin 1 - \cos 1) + \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned}(11) \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx &= - \int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x dx + \int_1^e \ln x dx \\&= - [\ln x]_{\frac{1}{e}}^1 + \int_{\frac{1}{e}}^1 dx + [\ln x]_1^e - \int_1^e dx \\&= 2 - \frac{2}{e}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(12) \int_0^1 (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} dx &\stackrel{x = \sin u}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+1} u du \\&= \begin{cases} \frac{m}{m+1} \cdot \frac{m-2}{m-1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & m \text{ 为奇数,} \\ \frac{m}{m+1} \cdot \frac{m-2}{m-1} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3}, & m \text{ 为偶数,} \end{cases} \\&= \begin{cases} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot m}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (m+1)} \cdot \frac{\pi}{2}, & m \text{ 为奇数,} \\ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (m+1)}, & m \text{ 为偶数.} \end{cases}\end{aligned}$$

(13) 由教材本节的例 6, 可得

$$J_m = \int_0^\pi x \sin^m x \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \sin^m x \, dx.$$

而

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^m x \, dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^m t \, dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m t \, dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx, \end{aligned}$$

故

$$J_m = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx.$$

从而有

$$J_m = \begin{cases} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (m-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot m} \cdot \pi, & m \text{ 为大于 1 的奇数}, \\ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot m} \cdot \frac{\pi^2}{2}, & m \text{ 为偶数}, \end{cases}$$

$$J_1 = \pi.$$

习题 5 - 4

反常积分

1. 判定下列各反常积分的收敛性, 如果收敛, 计算反常积分的值:

$$(1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4};$$

$$(2) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}};$$

$$(3) \int_0^{+\infty} e^{-ax} \, dx (a > 0);$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)};$$

$$(5) \int_0^{+\infty} e^{-pt} \sin \omega t \, dt (p > 0, \omega > 0);$$

$$(6) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2};$$

$$(7) \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(8) \int_0^2 \frac{dx}{(1-x)^2};$$

$$(9) \int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}};$$

$$(10) \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}.$$

$$\text{解 } (1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4} = \left[-\frac{1}{3x^3} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{3}.$$

$$(2) \int_1^t \frac{dx}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_1^t = 2\sqrt{t} - 2, \text{ 当 } t \rightarrow +\infty \text{ 时, 该极限不存在, 故该反常积分发散.}$$

$$(3) \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = \left[-\frac{1}{a} e^{-ax} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a}.$$

$$\begin{aligned} (4) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)} &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1-x}{1+x^2} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{4} \ln \frac{(1+x)^2}{1+x^2} + \frac{1}{2} \arctan x \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \int e^{-pt} \sin \omega t dt &= -\frac{1}{p} \int \sin \omega t d(e^{-pt}) \\ &= -\frac{1}{p} e^{-pt} \sin \omega t + \frac{\omega}{p} \int e^{-pt} \cos \omega t dt \\ &= -\frac{1}{p} e^{-pt} \sin \omega t - \frac{\omega}{p^2} \int \cos \omega t d(e^{-pt}) \\ &= -\frac{1}{p} e^{-pt} \sin \omega t - \frac{\omega}{p^2} e^{-pt} \cos \omega t - \frac{\omega^2}{p^2} \int e^{-pt} \sin \omega t dt, \end{aligned}$$

因此,

$$\int e^{-pt} \sin \omega t dt = \frac{-pe^{-pt} \sin \omega t - \omega e^{-pt} \cos \omega t}{p^2 + \omega^2} + C,$$

故

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-pt} \sin \omega t dt &= \left[\frac{-pe^{-pt} \sin \omega t - \omega e^{-pt} \cos \omega t}{p^2 + \omega^2} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} &= \int_{-\infty}^0 \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + 1} + \int_0^{+\infty} \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + 1} \\ &= [\arctan(x+1)]_{-\infty}^0 + [\arctan(x+1)]_0^{+\infty} = \pi. \end{aligned}$$

$$(7) \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = [-\sqrt{1-x^2}]_0^1 = 1.$$

$$(8) \int_0^t \frac{dx}{(1-x)^2} = \left[\frac{1}{1-x} \right]_0^t = \frac{1}{1-t} - 1, \text{ 当 } t \rightarrow 1 \text{ 时极限不存在, 故原反常积分发散.}$$

$$(9) \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}} \stackrel{x=u^2+1}{=} 2 \int_0^1 (u^2+1) du = \frac{8}{3}.$$

$$(10) \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \int_1^e \frac{d(\ln x)}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} = [\arcsin \ln x]_1^e = \frac{\pi}{2}.$$

2. 当 k 为何值时, 反常积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 收敛? 当 k 为何值时, 这反常积分发散? 又当

k 为何值时, 这反常积分取得最小值?

$$\text{解 } \int \frac{dx}{x(\ln x)^k} = \int \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^k} = \begin{cases} \ln \ln x + C, & k = 1, \\ -\frac{1}{(k-1)\ln^{k-1} x} + C, & k \neq 1, \end{cases}$$

因此当 $k \leq 1$ 时, 反常积分发散; 当 $k > 1$ 时, 该反常积分收敛, 此时

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k} = \left[-\frac{1}{(k-1)\ln^{k-1} x} \right]_2^{+\infty} = \frac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}.$$

记 $f(k) = \frac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}$, 则

$$\begin{aligned} f'(k) &= -\frac{1}{(k-1)^2(\ln 2)^{2k-2}}[(\ln 2)^{k-1} + (k-1)(\ln 2)^{k-2}\ln \ln 2] \\ &= -\frac{1 + (k-1)\ln \ln 2}{(k-1)^2(\ln 2)^{k-1}}, \end{aligned}$$

令 $f'(k) = 0$, 得 $k = 1 - \frac{1}{\ln \ln 2}$. 当 $1 < k < 1 - \frac{1}{\ln \ln 2}$ 时, $f'(k) < 0$, 当 $k > 1 - \frac{1}{\ln \ln 2}$

时, $f'(k) > 0$, 故 $k = 1 - \frac{1}{\ln \ln 2}$ 为函数 $f(k)$ 的最小值点, 即当 $k = 1 - \frac{1}{\ln \ln 2}$ 时所给反常积分取得最小值.

3. 利用递推公式计算反常积分 $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx (n \in \mathbb{N})$.

$$\text{解 } I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1.$$

当 $n \geq 1$ 时,

$$I_n = -\int_0^{+\infty} x^n d(e^{-x}) = -[x^n e^{-x}]_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = n I_{n-1},$$

故有 $I_n = n!$.

4. 计算反常积分 $\int_0^1 \ln x dx$.

$$\text{解 } \int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C,$$

因此

$$\int_0^1 \ln x dx = [x \ln x - x]_0^1 = -1 - \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x - x) = -1.$$

* 习题 5-5

反常积分的审敛法 Γ 函数

1. 判定下列反常积分的收敛性:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx; \quad (2) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt[3]{x^2 + 1}};$$

(3) $\int_1^{+\infty} \sin \frac{1}{x^2} dx$;

(4) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x|\sin x|}$;

(5) $\int_1^{+\infty} \frac{x \arctan x}{1+x^3} dx$;

(6) $\int_1^2 \frac{dx}{(\ln x)^3}$;

(7) $\int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^4}}$;

(8) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$.

解 (1) 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \frac{x^2}{x^4+x^2+1} = 1$, 因此 $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+x^2+1} dx$ 收敛.

(2) 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{5}{3}} \cdot \frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}} = 1$, 因此 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$ 收敛.

(3) 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x^2} = 1$, 因此 $\int_1^{+\infty} \sin \frac{1}{x^2} dx$ 收敛.

(4) 由于当 $x \geq 0$ 时, $\frac{1}{1+x|\sin x|} \geq \frac{1}{1+x}$, 且 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x}$ 发散, 因此 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x|\sin x|}$ 发散.

(5) 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \frac{x \arctan x}{1+x^3} = \frac{\pi}{2}$, 因此 $\int_1^{+\infty} \frac{x \arctan x}{1+x^3} dx$ 收敛.

(6) $x=1$ 是被积函数的瑕点. 由于 $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \cdot \frac{1}{(\ln x)^3} = +\infty$, 因此 $\int_1^2 \frac{dx}{(\ln x)^3}$ 发散.

(7) $x=1$ 是被积函数的瑕点. 由于 $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2}$, 因此 $\int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^4}}$ 收敛.

(8) 被积函数有两个瑕点: $x=1, x=2$. 由于 $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}} = -1$, 因此 $\int_1^{1.5} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$ 收敛; 又因为 $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x-2)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}} = 1$, 因此 $\int_{1.5}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$ 收敛, 故 $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$ 收敛.

2. 设反常积分 $\int_1^{+\infty} f^2(x) dx$ 收敛, 证明反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 绝对收敛.

解 因为 $\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \frac{f^2(x) + \frac{1}{x^2}}{2}$, 由于 $\int_1^{+\infty} f^2(x) dx$ 收敛, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ 也收敛, 因此

$\int_1^{+\infty} \left| \frac{f(x)}{x} \right| dx$ 收敛. 即 $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 绝对收敛.

3. 用 Γ 函数表示下列积分, 并指出这些积分的收敛范围:

$$(1) \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx (n > 0); \quad (2) \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x} \right)^p dx;$$

$$(3) \int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n} dx (m \neq 0).$$

解 (1) 令 $u = x^n$, 即 $x = u^{\frac{1}{n}}$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx = \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{n}-1} du = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right),$$

在 $n > 0$ 时都收敛.

(2) 令 $u = \ln \frac{1}{x}$, 即 $x = e^{-u}$,

$$\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x} \right)^p dx = \int_{+\infty}^0 -u^p e^{-u} du = \int_0^{+\infty} u^p e^{-u} du = \Gamma(p+1),$$

当 $p > -1$ 时收敛.

(3) 令 $u = x^n$, 即 $x = u^{\frac{1}{n}}$.

$$\text{当 } n > 0 \text{ 时}, \int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{n} u^{\frac{m+1}{n}-1} e^{-u} du = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right),$$

$$\text{当 } n < 0 \text{ 时}, \int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n} dx = \int_{+\infty}^0 \frac{1}{n} u^{\frac{m+1}{n}-1} e^{-u} du = -\frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right),$$

故 $\int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n} dx = \frac{1}{|n|} \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$, 当 $\frac{m+1}{n} > 0$ 时收敛.

4. 证明 $\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)\sqrt{\pi}}{2^k}$, 其中 $k \in \mathbb{N}_+$.

$$\begin{aligned} \text{证} \quad \Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) &= \frac{2k-1}{2} \Gamma\left(\frac{2k-1}{2}\right) = \frac{2k-1}{2} \cdot \frac{2k-3}{2} \Gamma\left(\frac{2k-3}{2}\right) \\ &= \frac{2k-1}{2} \cdot \frac{2k-3}{2} \cdots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2^k} \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

5. 证明以下各式(其中 $n \in \mathbb{N}_+$):

$$(1) 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) = 2^n \Gamma(n+1);$$

$$(2) 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) = \frac{\Gamma(2n)}{2^{n-1} \Gamma(n)};$$

$$(3) \sqrt{\pi} \Gamma(2n) = 2^{2n-1} \Gamma(n) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{证} \quad (1) 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) = 2^n n! = 2^n \Gamma(n+1).$$

$$(2) 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) = \frac{(2n-1)!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)} = \frac{\Gamma(2n)}{2^{n-1} (n-1)!} = \frac{\Gamma(2n)}{2^{n-1} \Gamma(n)}.$$

(3) 因为 $\sqrt{\pi}\Gamma(2n) = (2n-1)! \sqrt{\pi}$,

$$\begin{aligned}\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= (n-1)! \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n} \\ &= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)}{2^{n-1}} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n} \\ &= \frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}} \sqrt{\pi},\end{aligned}$$

因此结论成立.

总习题五

1. 填空:

(1) 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积的 _____ 条件, 而 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积的 _____ 条件;

(2) 对 $[a, +\infty)$ 上非负、连续的函数 $f(x)$, 它的变上限积分 $\int_a^x f(t) dt$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界是反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛的 _____ 条件;

* (3) 绝对收敛的反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 一定 _____;

(4) 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义且 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上可积, 此时积分 $\int_a^b f(x) dx$ 存在.

(5) 设函数 $f(x)$ 连续, 则 $\frac{d}{dx} \int_0^x t f(t^2 - x^2) dt =$ _____.

解 (1) 必要, 充分. (2) 充分必要. (3) 收敛.

(4) 不一定. 例如 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ -1, & x \text{ 为无理数,} \end{cases}$ 则 $|f(x)| = 1$ 在 $[a, b]$ 上可积, 而 $\int_a^b f(x) dx$ 不存在.

(5) $xf(-x^2)$. 作换元 $u = t^2 - x^2$, 则

$$\begin{aligned}\int_0^x t f(t^2 - x^2) dt &= \frac{1}{2} \int_0^x f(t^2 - x^2) d(t^2 - x^2) = \frac{1}{2} \int_{-x^2}^0 f(u) du \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{-x^2} f(u) du,\end{aligned}$$

因此

$$\frac{d}{dx} \int_0^x t f(t^2 - x^2) dt = -\frac{1}{2} f(-x^2) \cdot (-2x) = xf(-x^2).$$

2. 以下两题中给出了四个结论,从中选出一个正确的结论:

(1) 设 $I = \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1+x}} dx$, 则估计 I 值的大致范围为() .

$$(A) \quad 0 \leq I \leq \frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$(B) \frac{\sqrt{2}}{10} \leq I \leq \frac{1}{5}$$

$$(C) \frac{1}{5} < I < 1$$

(D) $I \geq 1$

(2) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数, 则必有() .

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数

解 (1) 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $\frac{1}{\sqrt{2}}x^4 \leq \frac{x^4}{\sqrt{1+x}} \leq x^4$, 因此

$$\frac{\sqrt{2}}{10} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}} x^4 dx \leq \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1+x}} dx \leq \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5},$$

故选(B).

(2) 记 $G(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则 $G(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 且

$G(x)$ 是奇(偶)函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶(奇)函数,

又 $F(x) = G(x) + C$, 其中 C 是一常数, 而常数是偶函数, 故由奇、偶函数的性质知应选(A).

取周期函数 $f(x) = \cos x + 1$, 则 $F(x) = \sin x + x + C$ 不是周期函数, 故(C)不成立; 取单调增加函数 $f(x) = 2x, x \in \mathbf{R}$, 则 $F(x) = x^2 + C$ 在 \mathbf{R} 上不是单调函数, 故(D)不成立.

 3. 回答下列问题：

(1) 设函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) \geq g(x)$, 那么 $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$ 在几何上表示什么?

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) \geq 0$, 那么 $\int_a^b \pi f^2(x) dx$ 在几何上表示什么?

(3) 如果在时刻 t 以 $\varphi(t)$ 的流量(单位时间内流过的流体的体积或质量)向一水池注水,那么 $\int_{t_0}^{t_2} \varphi(t) dt$ 表示什么?

(4) 如果某国人口增长的速率为 $u(t)$, 那么 $\int_{T_1}^{T_2} u(t) dt$ 表示什么?

(5) 如果一公司经营某种产品的边际利润函数为 $P'(x)$, 那么 $\int_{1000}^{2000} P'(x) dx$ 表示什么?

解 (1) $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$ 表示由曲线 $y = f(x), y = g(x)$ 以及直线 $x = a, x = b$ 所围成的图形的面积.

(2) $\int_a^b \pi f^2(x) dx$ 表示 xOy 面上, 由曲线 $y = f(x), x = a, x = b$ 以及 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转一周而得到的旋转体的体积.

(3) $\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) dt$ 表示在时间段 $[t_1, t_2]$ 内向水池注入的水的总量.

(4) $\int_{T_1}^{T_2} u(t) dt$ 表示该国在 $[T_1, T_2]$ 时间段内增加的人口总量.

(5) $\int_{1000}^{2000} P'(x) dx$ 表示从经营第 1000 个产品起一直到第 2000 个产品的利润总量.

*4. 利用定积分的定义计算下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \frac{i}{n}}; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} (p > 0).$$

$$\text{解 } (1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \frac{i}{n}} = \int_0^1 \sqrt{1+x} dx = \left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \right)^p = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}.$$

5. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x}{x-a} \int_a^x f(t) dt, \text{ 其中 } f(x) \text{ 连续}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctant)^2 dt}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$\text{解 } (1) \text{ 记 } F(x) = x \int_a^x f(t) dt,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x}{x-a} \int_a^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - F(a)}{x-a} = F'(a) = af(a).$$

(2) 先证明所求极限为未定式 $\frac{\infty}{\infty}$. 由于当 $x > \tan 1$ 时, $\arctan x > 1$, 记

$$c = \int_0^{\tan 1} (\arctan t)^2 dt, \text{ 则当 } x > \tan 1 \text{ 时, 有}$$

$$\int_0^x (\arctan t)^2 dt = c + \int_{\tan 1}^x (\arctan t)^2 dt > c + \int_{\tan 1}^x dt = c + x - \tan 1;$$

故有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x (\arctan t)^2 dt = +\infty$, 从而利用洛必达法则有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\arctan x)^2}{\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}} = \frac{\pi^2}{4}.$$

6. 下列计算是否正确,试说明理由:

$$(1) \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = - \int_{-1}^1 \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \left[-\arctan \frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -\frac{\pi}{2};$$

(2) 因为

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+x+1} \stackrel{x=\frac{1}{t}}{=} - \int_{-1}^1 \frac{dt}{t^2+t+1},$$

所以

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+x+1} = 0.$$

$$(3) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \frac{x}{1+x^2} dx = 0.$$

解 (1) 不对. 因为 $u = \frac{1}{x}$ 在 $[-1, 1]$ 上有间断点 $x=0$, 不符合换元法的要求.

而由习题 5-1 的第 12 题可知该积分一定为正,因此该积分计算不对. 事实上,

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}.$$

(2) 不对. 原因与(1)相同. 事实上,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+x+1} &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} d\left(x+\frac{1}{2}\right) \\ &= \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right]_{-1}^1 = \frac{\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

(3) 不对. 因为 $\int_0^A \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+A^2)$, 当 $A \rightarrow +\infty$ 时极限不存在, 故

$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$ 发散,也就得到 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$ 发散.

7. 设 $x > 0$, 证明 $\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$.

证 记 $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt$, 则当 $x > 0$ 时, 有

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 0,$$

由拉格朗日中值定理的推论,得

$$f(x) \equiv C \quad (x > 0).$$

而 $f(1) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$, 故 $C = \frac{\pi}{2}$, 从而结论成立.

8. 设 $p > 0$, 证明

$$\frac{p}{1+p} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^p} < 1.$$

证 由于当 $p > 0, 0 < x < 1$ 时, $0 < \frac{1}{1+x^p} < 1$, 因此有 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^p} < 1$. 又

$$1 - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^p} = \int_0^1 \frac{x^p dx}{1+x^p} < \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{1+p},$$

故有 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^p} > \frac{p}{1+p}$, 原题得证.

9. 设 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上均连续, 证明:

$$(1) \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx \quad (\text{柯西 - 施瓦茨不等式});$$

$$(2) \left(\int_a^b [f(x) + g(x)]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{闵可夫斯基不等式}).$$

证 (1) 对任意实数 λ , 有 $\int_a^b [f(x) + \lambda g(x)]^2 dx \geq 0$, 即

$$\int_a^b f^2(x) dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x) dx + \lambda^2 \int_a^b g^2(x) dx \geq 0,$$

上式左边是一个关于 λ 的二次三项式, 它非负的条件是其系数判别式非正, 即有

$$4 \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 - 4 \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx \leq 0,$$

从而本题得证.

$$\begin{aligned} (2) \int_a^b [f(x) + g(x)]^2 dx &= \int_a^b [f^2(x) + 2f(x)g(x) + g^2(x)] dx \\ &= \int_a^b f^2(x) dx + 2 \int_a^b f(x)g(x) dx + \int_a^b g^2(x) dx \\ &\leq \int_a^b f^2(x) dx + 2 \left(\int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} + \int_a^b g^2(x) dx \\ &= \left[\left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2, \end{aligned}$$

从而本题得证.

10. 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$. 证明

$$\int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \geq (b-a)^2.$$

证 根据上一题所证的柯西 - 施瓦茨不等式, 有

$$\left(\int_a^b \sqrt{f(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx \right)^2 \leq \int_a^b (\sqrt{f(x)})^2 dx \cdot \int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{f(x)}} \right)^2 dx,$$

即得

$$\int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \geq (b-a)^2.$$

11. 计算下列积分:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx; \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx;$$

$$(3) \int_0^a \frac{dx}{x + \sqrt{a^2 - x^2}} (a > 0); \quad (4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin 2x} dx;$$

$$(5) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \cos^2 x}; \quad (6) \int_0^{\pi} x \sqrt{\cos^2 x - \cos^4 x} dx;$$

$$(7) \int_0^{\pi} x^2 + \cos x + dx; \quad (8) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{x+1} + e^{3-x}};$$

$$(9) \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x^2 - x|}}; \quad (10) \int_0^x \max\{t^3, t^2, 1\} dt.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1 + \cos x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{2} \sec^2 \frac{x}{2} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos x} d(1 + \cos x) \\ &= \left[x \tan \frac{x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan \frac{x}{2} dx - \left[\ln(1 + \cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} + \left[2 \ln \cos \frac{x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \ln 2 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \frac{\cos x + \sin x}{\cos x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x + \sin x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx, \end{aligned}$$

而

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x + \sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left[\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right] dx$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{4} - u \\ &\implies -\int_{\frac{\pi}{4}}^0 (\ln \sqrt{2} + \ln \cos u) du \\ &= \frac{\pi \ln 2}{8} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx, \end{aligned}$$

故

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx = \frac{\pi \ln 2}{8}.$$

$$\begin{aligned} (3) \int_0^a \frac{dx}{x + \sqrt{a^2 - x^2}} &\stackrel{x = a \sin u}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u du}{\sin u + \cos u} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u du}{\cos u + \sin u} \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u du}{\sin u + \cos u} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u du}{\cos u + \sin u} \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} du = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin 2x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx \\ &= [\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2(\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

(5) 注意到 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}$, 因此有

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \cos^2 x} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x dx}{\sec^2 x + 1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\tan x)}{\tan^2 x + 2} \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \int_0^{\pi} x \sqrt{\cos^2 x - \cos^4 x} dx &= \int_0^{\pi} x |\cos x| |\sin x| dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} |\cos x| |\sin x| dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \sin x dx \right] \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2} \sin^2 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2} \sin^2 x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (7) \int_0^{\pi} x^2 |\cos x| dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2 \cos x dx \\
 &= [x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \\
 &\quad [x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
 &= \frac{\pi^2}{2} + 2\pi - 4.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (8) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{x+1} + e^{3-x}} &= \frac{1}{e^2} \int_0^{+\infty} \frac{d(e^{x-1})}{e^{2x-2} + 1} = \frac{1}{e^2} [\arctan(e^{x-1})]_0^{+\infty} \\
 &= \frac{1}{e^2} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{e} \right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (9) \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x^2 - x|}} &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{d(2x - 1)}{\sqrt{1 - (2x - 1)^2}}; \\
 &= [\arcsin(2x - 1)]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{\pi}{2}; \\
 \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x^2 - x|}} &= \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x}} = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{d(2x - 1)}{\sqrt{(2x - 1)^2 - 1}} \\
 &= [\ln(2x - 1 + \sqrt{(2x - 1)^2 - 1})]_1^{\frac{3}{2}} = \ln(2 + \sqrt{3}),
 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x^2 - x|}} &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x^2 - x|}} + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x^2 - x|}} \\
 &= \frac{\pi}{2} + \ln(2 + \sqrt{3}).
 \end{aligned}$$

(10) 当 $x < -1$ 时,

$$\int_0^x \max\{t^3, t^2, 1\} dt = \int_0^{-1} dt + \int_{-1}^x t^2 dt = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3};$$

当 $-1 \leq x \leq 1$ 时,

$$\int_0^x \max\{t^3, t^2, 1\} dt = \int_0^x dt = x;$$

当 $x > 1$ 时,

$$\int_0^x \max\{t^3, t^2, 1\} dt = \int_0^1 dt + \int_1^x t^3 dt = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{4}.$$

因此

$$\int_0^x \max\{t^3, t^2, 1\} dt = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}, & x < -1, \\ x, & -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{4}, & x > 1. \end{cases}$$

12. 设 $f(x)$ 为连续函数, 证明

$$\int_0^x f(t)(x-t)dt = \int_0^x \left(\int_0^t f(u)du \right) dt.$$

$$\begin{aligned} \text{证 } \int_0^x \left(\int_0^t f(u)du \right) dt &= \left[t \int_0^t f(u)du \right]_0^x - \int_0^x t f(t)dt \\ &= x \int_0^x f(u)du - \int_0^x t f(t)dt \\ &= x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x t f(t)dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt. \end{aligned}$$

本题也可利用原函数性质来证明, 记等式左端的函数为 $F(x)$ 、右端的函数为 $G(x)$, 则

$$F'(x) = \left(x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x t f(t)dt \right)' = \int_0^x f(t)dt,$$

$$G'(x) = \int_0^x f(u)du = \int_0^x f(t)dt,$$

即 $F(x)$ 、 $G(x)$ 都为函数 $\int_0^x f(t)dt$ 的原函数, 因此它们至多只差一个常数, 但由于

$F(0) = G(0) = 0$, 因此必有 $F(x) = G(x)$.

13. 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$,

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_b^x \frac{dt}{f(t)}, x \in [a, b].$$

证明: (1) $F'(x) \geq 2$; (2) 方程 $F(x) = 0$ 在区间 (a, b) 内有且仅有一个根.

$$\text{证 } (1) F'(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} \geq 2 \sqrt{f(x) \cdot \frac{1}{f(x)}} = 2.$$

$$(2) F(a) = \int_a^a \frac{dt}{f(t)} = - \int_a^b \frac{dt}{f(t)} < 0, F(b) = \int_a^b f(t)dt > 0, \text{由闭区间上连续函数}$$

性质可知 $F(x)$ 在区间 (a, b) 内必有零点, 根据(1)可知函数 $F(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上单调增加, 从而零点惟一, 即方程 $F(x) = 0$ 在区间 (a, b) 内有且仅有一个根.

14. 求 $\int_0^2 f(x-1)dx$, 其中

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^x}, & x < 0, \\ \frac{1}{1+x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \int_0^2 f(x-1) dx = \int_{-1}^1 f(u) du = \int_{-1}^0 \frac{du}{1+e^u} + \int_0^1 \frac{du}{1+u} \\
 &= \int_{-1}^0 \frac{e^{-u}}{1+e^{-u}} du + [\ln(1+u)]_0^1 \\
 &= [-\ln(1+e^{-u})]_{-1}^0 + \ln 2 = \ln(1+e).
 \end{aligned}$$

15. 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续不变号. 证明至少存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使下式成立:

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx \quad (\text{积分第一中值定理}).$$

证 不妨设 $g(x) \geq 0$, 由定积分性质可知 $\int_a^b g(x) dx \geq 0$. 记 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值为 M 、最小值为 m , 则有

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x),$$

故有

$$\begin{aligned}
 m \int_a^b g(x) dx &= \int_a^b mg(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \\
 &\leq \int_a^b Mg(x) dx = M \int_a^b g(x) dx.
 \end{aligned}$$

当 $\int_a^b g(x) dx = 0$ 时, 由上述不等式可知 $\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$, 故结论成立.

当 $\int_a^b g(x) dx > 0$ 时, 有

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M,$$

由闭区间上连续函数性质, 知存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx},$$

从而结论成立.

***16.** 证明: $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx = \frac{n-1}{2} \int_0^{+\infty} x^{n-2} e^{-x^2} dx$ ($n > 1$), 并用它证明:

$$\int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \Gamma(n+1) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

证 当 $n > 1$ 时,

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x^{n-1} d(e^{-x^2})$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2} [x^{n-1} e^{-x^2}]_0^{+\infty} + \frac{n-1}{2} \int_0^{+\infty} x^{n-2} e^{-x^2} dx \\
 &= \frac{n-1}{2} \int_0^{+\infty} x^{n-2} e^{-x^2} dx.
 \end{aligned}$$

记 $I_n = \int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} dx$, 则

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} dx = \frac{2n+1-1}{2} \int_0^{+\infty} x^{2n-1} e^{-x^2} dx \\
 &= n \int_0^{+\infty} x^{2n-1} e^{-x^2} dx = nI_{n-1},
 \end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}
 I_n &= n! I_0 = n! \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = n! \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^{+\infty} \\
 &= \frac{1}{2} n! = \frac{1}{2} \Gamma(n+1).
 \end{aligned}$$

***17.** 判断下列反常积分的收敛性:

$$\begin{array}{ll}
 (1) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} dx; & (2) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}}; \\
 (3) \int_2^{+\infty} \frac{\cos x}{\ln x} dx; & (4) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}.
 \end{array}$$

解 (1) $x=0$ 为被积函数 $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}$ 的瑕点, 而 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{2}} \cdot f(x) = 1$, 因此

$\int_0^1 f(x) dx$ 收敛; 又由于 $|f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x^3}}$, 而 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx$ 收敛, 故 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 因

此 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} dx$ 收敛.

(2) $x=2$ 为被积函数 $f(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}}$ 的瑕点, 而

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)^{\frac{1}{3}} \cdot f(x) = \frac{1}{2},$$

因此 $\int_2^3 f(x) dx$ 收敛; 又由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{5}{3}} \cdot f(x) = 1$, 因此 $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}}$ 收敛, 故

$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}}$ 收敛.

$$\begin{aligned}
 (3) \int_2^{+\infty} \frac{\cos x}{\ln x} dx &= \int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln x} d(\sin x) = \left[\frac{\sin x}{\ln x} \right]_2^{+\infty} + \int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x \ln^2 x} dx \\
 &= \int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x \ln^2 x} dx - \frac{\sin 2}{\ln 2},
 \end{aligned}$$

又由于 $\left| \frac{\sin x}{x \ln^2 x} \right| \leq \frac{1}{x \ln^2 x}$, 而 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$ 收敛, 故 $\int_2^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x \ln^2 x} \right| dx$ 收敛, 即 $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x \ln^2 x} dx$ 绝对收敛, 因此 $\int_2^{+\infty} \frac{\cos x}{\ln x} dx$ 收敛.

(4) $x=0, x=1, x=2$ 为被积函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}$ 的瑕点,

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{2}{3}} f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^{\frac{1}{3}} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^{\frac{1}{3}} f(x) = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$, 故 $\int_0^3 f(x) dx$ 收敛; 又

由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{4}{3}} \cdot f(x) = 1$, 因此 $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}$ 收敛, 故 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}$ 收敛.

18. 计算下列反常积分:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx; \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} \quad (\alpha \geq 0).$$

解 (1) $x=0$ 为被积函数 $f(x) = \ln \sin x$ 的瑕点, 而

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cdot f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{x^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cot x}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x^{\frac{3}{2}}}{\tan x} = 0, \end{aligned}$$

故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$ 收敛.

$$\text{又 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx, \text{ 而}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = \frac{x = \frac{\pi}{2} - u}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^0 -\ln \cos u du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos u du,$$

因此

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x \cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln \sin 2x - \ln 2) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin 2x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 dx \\ &\stackrel{u=2x}{=} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin u du - \frac{\pi}{4} \ln 2, \end{aligned}$$

故

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

(2) 记被积函数为 $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$, 则当 $\alpha=0$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot f(x) = \frac{1}{2}$, 当 $\alpha > 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot f(x) = 0$, 因此当 $\alpha \geq 0$ 时, $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$ 收敛.

令 $x = \frac{1}{t}$, 得到 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \int_{+\infty}^0 \frac{-t^\alpha dt}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}$, 又

$$\int_{+\infty}^0 \frac{-t^\alpha dt}{(1+t^2)(1+t^\alpha)} = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)},$$

故

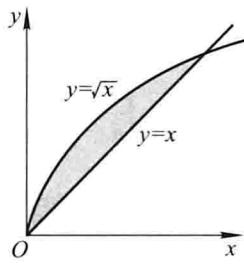
$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} &= \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} + \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} [\arctan x]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

第六章 定积分的应用

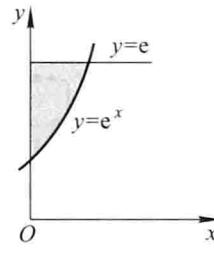
习题 6-2

定积分在几何学上的应用

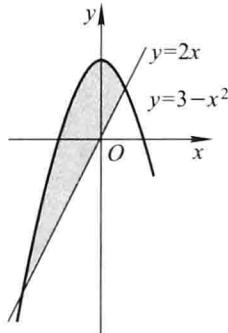
1. 求图 6-1 中各阴影部分的面积:



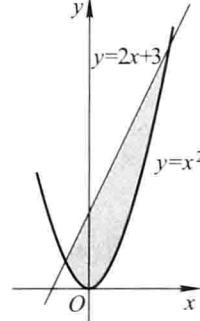
(1)



(2)



(3)



(4)

图 6-1

解 (1) 解方程组 $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = x, \end{cases}$ 得到交点坐标为 $(0,0)$ 和 $(1,1)$.

如果取 x 为积分变量, 则 x 的变化范围为 $[0,1]$, 相应于 $[0,1]$ 上的任一小区间 $[x, x+dx]$ 的窄条面积近似于高为 $\sqrt{x} - x$ 、底为 dx 的窄矩形的面积, 因此有

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x) dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

如果取 y 为积分变量, 则 y 的变化范围为 $[0,1]$, 相应于 $[0,1]$ 上的任一小区间 $[y, y+dy]$ 的窄条面积近似于高为 $y - y^2$ 、底为 dy 的窄矩形的面积, 因此有

$$A = \int_0^1 (y - y^2) dy = \left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 \right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

(2) 取 x 为积分变量, 则易知 x 的变化范围为 $[0,1]$, 相应于 $[0,1]$ 上的任一小区间 $[x, x+dx]$ 的窄条面积近似于高为 $e - e^x$ 、底为 dx 的窄矩形的面积, 因此有

$$A = \int_0^1 (e - e^x) dx = [ex - e^x]_0^1 = 1.$$

如果取 y 为积分变量, 则易知 y 的变化范围为 $[1,e]$, 相应于 $[1,e]$ 上的任一小区间 $[y, y+dy]$ 的窄条面积近似于高为 dy 、底为 $\ln y$ 的窄矩形的面积, 因此有

$$A = \int_1^e \ln y dy = [\ln y]_1^e - \int_1^e dy = e - (e - 1) = 1.$$

(3) 解方程组 $\begin{cases} y = 2x, \\ y = 3 - x^2, \end{cases}$ 得到交点坐标为 $(-3, -6)$ 和 $(1, 2)$.

如果取 x 为积分变量, 则 x 的变化范围为 $[-3,1]$, 相应于 $[-3,1]$ 上的任一小区间 $[x, x+dx]$ 的窄条面积近似于高为 $(3 - x^2) - 2x = -x^2 - 2x + 3$ 、底为 dx 的窄矩形的面积, 因此有

$$A = \int_{-3}^1 (-x^2 - 2x + 3) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x \right]_{-3}^1 = \frac{32}{3}.$$

如果用 y 为积分变量, 则 y 的变化范围为 $[-6,3]$, 但是在 $[-6,2]$ 上的任一小区间 $[y, y+dy]$ 的窄条面积近似于高为 dy 、底为 $\frac{y}{2} - (-\sqrt{3-y}) = \frac{y}{2} + \sqrt{3-y}$ 的窄矩形的面积, 在 $[2,3]$ 上的任一小区间 $[y, y+dy]$ 的窄条面积近似于高为 dy 、宽为 $\sqrt{3-y} - (-\sqrt{3-y}) = 2\sqrt{3-y}$ 的窄矩形的面积, 因此有

$$\begin{aligned} A &= \int_{-6}^2 \left(\frac{y}{2} + \sqrt{3-y} \right) dy + \int_2^3 2\sqrt{3-y} dy \\ &= \left[\frac{y^2}{4} - \frac{2}{3}(3-y)^{\frac{3}{2}} \right]_{-6}^2 + \left[-\frac{4}{3}(3-y)^{\frac{3}{2}} \right]_2^3 = \frac{32}{3}, \end{aligned}$$

从这里可看到本小题以 x 为积分变量较容易做. 原因是本小题中的图形边界曲线, 若分为上下两段的话, 则为 $y = 2x$ 和 $y = 3 - x^2$; 而分为左右两段的话, 则为

$$x = -\sqrt{3-y} \text{ 和 } x = \begin{cases} \frac{y}{2}, & -6 \leq y < 2, \\ \sqrt{3-y}, & 2 \leq y \leq 3, \end{cases} \quad \text{其中右段曲线的表示相对比较复杂, 也就}$$

导致计算形式复杂.

(4) 解方程组 $\begin{cases} y = 2x + 3, \\ y = x^2, \end{cases}$ 得到交点坐标为 $(-1,1)$ 和 $(3,9)$, 与(3)相同的原因, 本小

题以 x 为积分变量计算较容易. 取 x 为积分变量, 则 x 的变化范围为 $[-1,3]$, 相应于 $[-1,3]$ 上的任一小区间 $[x, x+dx]$ 的窄条面积近似于高为 $2x + 3 - x^2$ 、底为 dx 的窄矩形的面积, 因此有

$$A = \int_{-1}^3 (2x + 3 - x^2) dx = \left[x^2 + 3x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^3 = \frac{32}{3}.$$

2. 求由下列各曲线所围成的图形的面积：

$$(1) y = \frac{1}{2}x^2 \text{ 与 } x^2 + y^2 = 8 \text{ (两部分都要计算);}$$

$$(2) y = \frac{1}{x} \text{ 与直线 } y = x \text{ 及 } x = 2;$$

$$(3) y = e^x, y = e^{-x} \text{ 与直线 } x = 1;$$

$$(4) y = \ln x, y \text{ 轴与直线 } y = \ln a, y = \ln b (b > a > 0).$$

解 (1) 如图 6-2, 先计算图形 D_1 (阴影部分) 的面积, 容易求得 $y = \frac{1}{2}x^2$ 与 $x^2 + y^2 = 8$ 的交点为 $(-2, 2)$ 和 $(2, 2)$. 取 x 为积分变量, 则 x 的变化范围为 $[-2, 2]$, 相应于 $[-2, 2]$ 上的任一小区间 $[x, x+dx]$ 的窄条面积近似于高为 $\sqrt{8-x^2} - \frac{1}{2}x^2$ 、底为 dx 的窄矩形的面积, 因此有

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-2}^2 \left(\sqrt{8-x^2} - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = 2 \int_0^2 \left(\sqrt{8-x^2} - \frac{1}{2}x^2 \right) dx \\ &= 2 \left[\frac{x}{2}\sqrt{8-x^2} + 4\arcsin \frac{x}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{6}x^3 \right]_0^2 = 2\pi + \frac{4}{3}, \end{aligned}$$

图形 D_2 的面积为

$$A_2 = \pi(2\sqrt{2})^2 - \left(2\pi + \frac{4}{3} \right) = 6\pi - \frac{4}{3}.$$

(2) 如图 6-3, 取 x 为积分变量, 则 x 的变化范围为 $[1, 2]$, 相应于 $[1, 2]$ 上的任一小区间 $[x, x+dx]$ 的窄条面积近似于高为 $x - \frac{1}{x}$ 、底为 dx 的窄矩形的面积, 因此有

$$A = \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x} \right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \ln x \right]_1^2 = \frac{3}{2} - \ln 2.$$

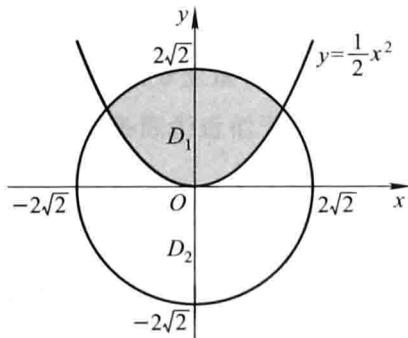


图 6-2

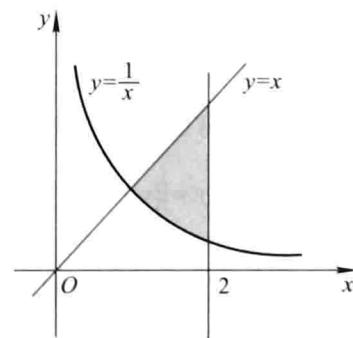


图 6-3

(3) 如图 6-4, 取 x 为积分变量, 则 x 的变化范围为 $[0,1]$, 相应于 $[0,1]$ 上的任一小区间 $[x, x+dx]$ 的窄条面积近似于高为 $e^x - e^{-x}$ 、底为 dx 的窄矩形的面积, 因此有

$$A = \int_0^1 (e^x - e^{-x}) dx = e + \frac{1}{e} - 2.$$

(4) 如图 6-5, 取 y 为积分变量, 则 y 的变化范围为 $[\ln a, \ln b]$, 相应于 $[\ln a, \ln b]$ 上的任一小区间 $[y, y+dy]$ 的窄条面积近似于高为 dy 、底为 e^y 的窄矩形的面积, 因此有

$$A = \int_{\ln a}^{\ln b} e^y dy = [e^y]_{\ln a}^{\ln b} = b - a.$$

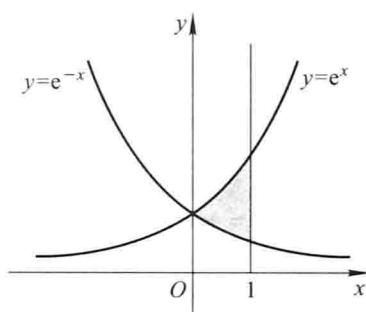


图 6-4

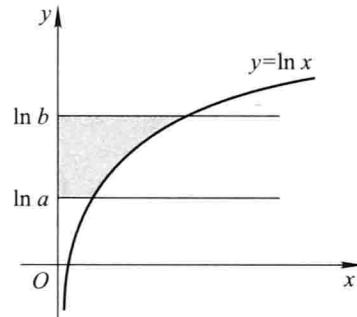


图 6-5

3. 求抛物线 $y = -x^2 + 4x - 3$ 及其在点 $(0, -3)$ 和 $(3, 0)$ 处的切线所围成的图形的面积.

解 首先求得导数 $y' |_{x=0} = 4, y' |_{x=3} = -2$, 故抛物线在点 $(0, -3), (3, 0)$ 处的切线分别为 $y = 4x - 3, y = -2x + 6$, 容易求得这两条切线交点为 $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ (如图 6-6), 因此所求面积为

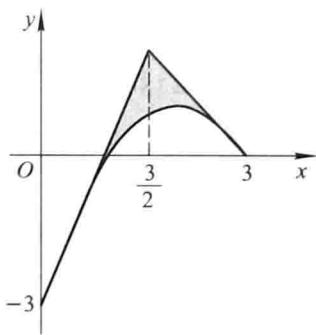


图 6-6

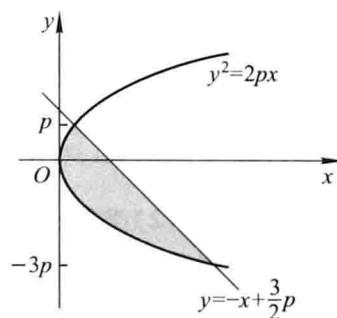


图 6-7

$$A = \int_0^{\frac{3}{2}} [4x - 3 - (-x^2 + 4x - 3)] dx + \int_{\frac{3}{2}}^3 [-2x + 6 - (-x^2 + 4x - 3)] dx$$

$$= \frac{9}{4}.$$

4. 求抛物线 $y^2 = 2px$ 及其在点 $\left(\frac{p}{2}, p\right)$ 处的法线所围成的图形的面积.

解 利用隐函数求导方法, 抛物线方程 $y^2 = 2px$ 两端分别对 x 求导, 得

$$2yy' = 2p,$$

即得 $y' \Big|_{\left(\frac{p}{2}, p\right)} = 1$, 故法线斜率为 $k = -1$, 从而得到法线方程为 $y = -x + \frac{3}{2}p$ (如图 6-7), 因此所求面积为

$$A = \int_{-3p}^p \left(-y + \frac{3}{2}p - \frac{1}{2p}y^2 \right) dy = \left[-\frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{2}py - \frac{1}{6p}y^3 \right]_{-3p}^p = \frac{16}{3}p^2.$$

5. 求由下列各曲线所围成的图形的面积:

$$(1) \rho = 2a \cos \theta; \quad (2) x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t;$$

$$(3) \rho = 2a(2 + \cos \theta).$$

$$\text{解 } (1) A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(2a \cos \theta)^2 d\theta = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \pi a^2.$$

(2) 由对称性可知, 所求面积为第一象限部分面积的 4 倍, 记曲线 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ 上的点为 (x, y) , 因此

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_0^a y dx = 4 \int_0^a [a \sin^3 t \cdot 3a \cos^2 t (-\sin t)] dt \\ &= 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 t - \sin^6 t) dt = \frac{3}{8}\pi a^2. \end{aligned}$$

注 对于参数方程的处理方式一般可采用本题的方法, 首先根据问题化为积分 (其中记曲线上的点为 (x, y)), 再根据参数方程进行换元, 即可化为关于参数的积分进行计算.

$$\begin{aligned} (3) A &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}[2a(2 + \cos \theta)]^2 d\theta = 2a^2 \int_0^{2\pi} (4 + 4\cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= 2a^2 \int_0^{2\pi} (4 + \cos^2 \theta) d\theta = 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 + \cos^2 \theta) d\theta = 18\pi a^2. \end{aligned}$$

6. 求由摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ 的一拱 ($0 \leq t \leq 2\pi$) 与横轴所围成的图形的面积.

解 本题做法与题 5(2) 类似. 以 x 为积分变量, 则 x 的变化范围为 $[0, 2\pi a]$, 设摆线上的点为 (x, y) , 则所求面积为

$$A = \int_0^{2\pi a} y dx,$$

再根据参数方程换元, 令 $x = a(t - \sin t)$, 则 $y = a(1 - \cos t)$, 因此有

$$A = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt$$

$$= 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos^2 t) dt = 3\pi a^2.$$

7. 求对数螺线 $\rho = ae^\theta$ ($-\pi \leq \theta \leq \pi$) 及射线 $\theta = \pi$ 所围成的图形的面积.

$$\text{解 } A = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (ae^\theta)^2 d\theta = \frac{a^2}{4} [e^{2\theta}]_{-\pi}^{\pi} = \frac{a^2}{4} (e^{2\pi} - e^{-2\pi}).$$

8. 求下列各曲线所围成图形的公共部分的面积:

$$(1) \rho = 3 \cos \theta \text{ 及 } \rho = 1 + \cos \theta;$$

$$(2) \rho = \sqrt{2} \sin \theta \text{ 及 } \rho^2 = \cos 2\theta.$$

解 (1) 首先求出两曲线交点为 $(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{3})$ 和 $(\frac{3}{2}, -\frac{\pi}{3})$, 由于图形关于极轴的对称性(如图 6-8), 因此所求面积为极轴上面部分面积的 2 倍, 即得

$$A = 2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} (1 + \cos \theta)^2 d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (3 \cos \theta)^2 d\theta \right] = \frac{5\pi}{4}.$$

(2) 首先求出两曲线交点为 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{6})$ 和 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5\pi}{6})$, 由于图形的对称性(如图 6-9),

因此有

$$A = 2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2} (\sqrt{2} \sin \theta)^2 d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \cos 2\theta d\theta \right] = \frac{\pi}{6} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}.$$

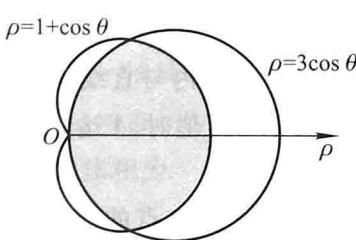


图 6-8

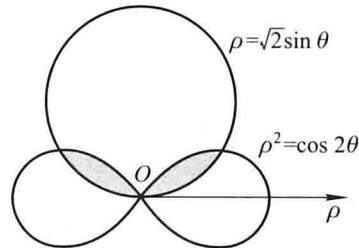


图 6-9

9. 求位于曲线 $y = e^x$ 下方, 该曲线过原点的切线的左方以及 x 轴上方之间的图形的面积.

解 先求曲线过原点的切线方程, 设切点为 (x_0, y_0) , 其中 $y_0 = e^{x_0}$, 则切线的斜率为 e^{x_0} , 故切线方程为

$$y - y_0 = e^{x_0} (x - x_0),$$

由于该切线过原点, 因此有 $y_0 = e^{x_0} x_0$, 解得 $x_0 = 1$, $y_0 = e$, 即切线方程为

$$y = ex.$$

如图 6-10 可知所求面积为

$$A = \int_{-\infty}^0 e^x dx + \int_0^1 (e^x - ex) dx$$

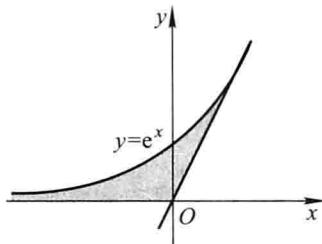


图 6-10

$$= [e^x]_{-\infty}^0 + \left[e^x - \frac{e}{2}x^2 \right]_0^1 = \frac{e}{2}.$$

10. 求由抛物线 $y^2 = 4ax$ 与过焦点的弦所围成的图形面积的最小值.

解 抛物线的焦点为 $(a, 0)$, 设过焦点的直线为 $y = k(x - a)$, 则该直线与抛物线的交点的纵坐标为 $y_1 = \frac{2a - 2a\sqrt{1+k^2}}{k}$, $y_2 = \frac{2a + 2a\sqrt{1+k^2}}{k}$, 面积为

$$\begin{aligned} A &= \int_{y_1}^{y_2} \left(a + \frac{y}{k} - \frac{y^2}{4a} \right) dy = a(y_2 - y_1) + \frac{y_2^2 - y_1^2}{2k} - \frac{y_2^3 - y_1^3}{12a} \\ &= \frac{8a^2(1+k^2)^{3/2}}{3k^3} = \frac{8a^2}{3} \left(1 + \frac{1}{k^2} \right)^{3/2}, \end{aligned}$$

故面积是 k 的单调减少函数, 因此其最小值在 $k \rightarrow \infty$ 即弦为 $x = a$ 时取到, 最小值为 $\frac{8}{3}a^2$.

11. 已知抛物线 $y = px^2 + qx$ (其中 $p < 0, q > 0$) 在第一象限内与直线 $x + y = 5$ 相切, 且此抛物线与 x 轴所围成的图形的面积为 A . 问 p 和 q 为何值时, A 达到最大值, 并求出此最大值.

解 依题意知, 抛物线如图 6-11 所示, 求得它与 x 轴交点的横坐标为 $x_1 = 0$,

$$x_2 = -\frac{q}{p}.$$

抛物线与 x 轴所围成的图形面积为

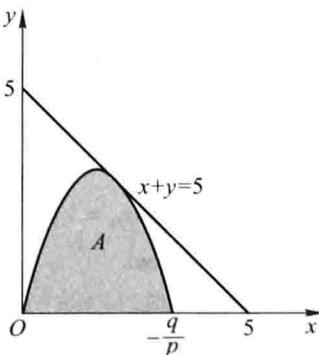


图 6-11

$$A = \int_0^{-\frac{q}{p}} (px^2 + qx) dx = \left[\frac{p}{3}x^3 + \frac{q}{2}x^2 \right]_0^{-\frac{q}{p}} = \frac{q^3}{6p^2}.$$

因直线 $x + y = 5$ 与抛物线 $y = px^2 + qx$ 相切, 故它们有惟一交点. 由方程组

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ y = px^2 + qx, \end{cases}$$

得 $px^2 + (q+1)x - 5 = 0$, 其判别式 $\Delta = (q+1)^2 + 20p = 0$, 解得 $p = -\frac{1}{20}(1+q)^2$, 代

入面积 A , 得

$$A(q) = \frac{200q^3}{3(1+q)^4}.$$

令 $A'(q) = \frac{200q^2(3-q)}{3(q+1)^5} = 0$, 得惟一驻点 $q = 3$. 当 $0 < q < 3$ 时, $A'(q) > 0$, 当 $q > 3$ 时,

$A'(q) < 0$. 于是, 当 $q = 3$ 时, $A(q)$ 取极大值, 也是最大值. 此时 $p = -\frac{4}{5}$, 最大值

$$A = \frac{225}{32}.$$

例 12. 由 $y = x^3$, $x = 2$, $y = 0$ 所围成的图形, 分别绕 x 轴及 y 轴旋转, 计算所得两个旋转体的体积.

解 (1) 图形绕 x 轴旋转, 该体积为

$$V = \int_0^2 \pi(x^3)^2 dx = \frac{128}{7}\pi.$$

(2) 图形绕 y 轴旋转, 则该立体可看作圆柱体(即由 $x = 2$, $y = 8$, $x = 0$, $y = 0$ 所围成的图形绕 y 轴所得的立体)减去由曲线 $x = \sqrt[3]{y}$, $y = 8$, $x = 0$ 所围成的图形绕 y 轴所得的立体, 因此体积为

$$V = \pi \cdot 2^2 \cdot 8 - \int_0^8 \pi(\sqrt[3]{y})^2 dy = \frac{64}{5}\pi.$$

例 13. 把星形线 $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ 所围成的图形绕 x 轴旋转, 计算所得旋转体的体积.

解 记 x 轴上方部分星形线的函数为 $y = y(x)$, 则所求体积为曲线 $y = y(x)$ 与 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转而成, 故有

$$V = \int_{-a}^a \pi y^2 dx.$$

由于星形线的参数方程为 $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, 所以对上述积分作换元 $x = a \cos^3 t$, 便得

$$V = \int_{-\pi}^0 \pi(a \sin^3 t)^2 (a \cos^3 t)' dt = \frac{32}{105}\pi a^3.$$

例 14. 用积分方法证明图 6-12 中球缺的体积为

$$V = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3} \right).$$

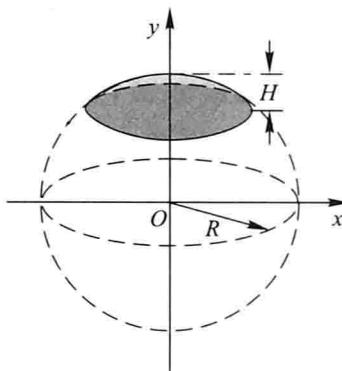


图 6-12

解 该立体可看作由曲线 $x = \sqrt{R^2 - y^2}$, $y = R - H$ 和 $x = 0$ 所围成的图形绕 y 轴旋转所得, 因此体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_{R-H}^R \pi(\sqrt{R^2 - y^2})^2 dy = \pi \left[R^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right]_{R-H}^R \\ &= \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3} \right). \end{aligned}$$

15. 求下列已知曲线所围成的图形, 按指定的轴旋转所产生的旋转体的体积:

- (1) $y = x^2$, $x = y^2$, 绕 y 轴;
- (2) $y = \arcsin x$, $x = 1$, $y = 0$, 绕 x 轴;
- (3) $x^2 + (y - 5)^2 = 16$, 绕 x 轴;
- (4) 摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ 的一拱, $y = 0$, 绕直线 $y = 2a$.

解 (1) $V = \int_0^1 [\pi(\sqrt{y})^2 - \pi(y^2)^2] dy = \frac{3}{10}\pi.$

$$\begin{aligned} (2) V &= \int_0^1 \pi(\arcsin x)^2 dx = [\pi x(\arcsin x)^2]_0^1 - 2\pi \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x dx \\ &= \frac{\pi^3}{4} - 2\pi \left\{ [-\sqrt{1-x^2} \arcsin x]_0^1 + \int_0^1 dx \right\} = \frac{\pi^3}{4} - 2\pi. \end{aligned}$$

(3) 该立体为由曲线 $y = 5 + \sqrt{16 - x^2}$, $x = -4$, $x = 4$, $y = 0$ 所围成图形绕 x 轴旋转所得立体减去由曲线 $y = 5 - \sqrt{16 - x^2}$, $x = -4$, $x = 4$, $y = 0$ 所围成图形绕 x 轴旋转所得立体, 因此体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_{-4}^4 \pi(5 + \sqrt{16 - x^2})^2 dx - \int_{-4}^4 \pi(5 - \sqrt{16 - x^2})^2 dx \\ &= \int_{-4}^4 20\pi\sqrt{16 - x^2} dx \\ &\stackrel{x = 4\sin t}{=} 320\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 640\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 160\pi^2. \end{aligned}$$

(4) 该立体可看作由直线 $y = 2a, y = 0, x = 0, x = 2\pi a$ 所围成的图形绕 $y = 2a$ 旋转所得的圆柱体减去由摆线以及直线 $y = 2a, x = 0, x = 2\pi a$ 所围成的图形绕 $y = 2a$ 旋转所得的立体, 记摆线上的点为 (x, y) , 则体积为

$$V = \pi(2a)^2(2\pi a) - \int_0^{2\pi a} \pi(2a - y)^2 dx = 8\pi^2 a^3 - \int_0^{2\pi a} \pi(2a - y)^2 dx,$$

再根据摆线的参数方程进行换元, 即作换元 $x = a(t - \sin t)$, 此时 $y = a(1 - \cos t)$, 因此有

$$\begin{aligned} V &= 8\pi^2 a^3 - \int_0^{2\pi} \pi[2a - a(1 - \cos t)]^2 a(1 - \cos t) dt \\ &= 8\pi^2 a^3 - \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 + \cos t - \cos^2 t - \cos^3 t) dt \\ &= 8\pi^2 a^3 - 4\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 7\pi^2 a^3. \end{aligned}$$

16. 求圆盘 $x^2 + y^2 \leq a^2$ 绕 $x = -b$ ($b > a > 0$) 旋转所成旋转体的体积.

解 记由曲线 $x = \sqrt{a^2 - y^2}, x = -b, y = -a, y = a$ 围成的图形绕 $x = -b$ 旋转所得旋转体的体积为 V_1 , 由曲线 $x = -\sqrt{a^2 - y^2}, x = -b, y = -a, y = a$ 围成的图形绕 $x = -b$ 旋转所得旋转体的体积为 V_2 , 则所求体积为

$$\begin{aligned} V &= V_1 - V_2 = \int_{-a}^a \pi(\sqrt{a^2 - y^2} + b)^2 dy - \int_{-a}^a \pi(-\sqrt{a^2 - y^2} + b)^2 dy \\ &= \int_{-a}^a 4\pi b \sqrt{a^2 - y^2} dy \xrightarrow{y = a \sin t} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\pi a^2 b \cos^2 t dt \\ &= 8\pi a^2 b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 2\pi^2 a^2 b. \end{aligned}$$

17. 设有一截锥体, 其高为 h , 上、下底均为椭圆, 椭圆的轴长分别为 $2a, 2b$ 和 $2A, 2B$, 求这截锥体的体积.

解 用与下底相距 x 且平行于底面的平面去截该立体得到一个椭圆, 记其半轴长分别为 u, v , 则

$$u = \frac{a-A}{h}x + A, \quad v = \frac{b-B}{h}x + B,$$

该椭圆面积为 $\pi \left(\frac{a-A}{h}x + A \right) \left(\frac{b-B}{h}x + B \right)$, 因此体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \pi \left(\frac{a-A}{h}x + A \right) \left(\frac{b-B}{h}x + B \right) dx \\ &= \frac{1}{6}\pi h [2(ab + AB) + aB + bA]. \end{aligned}$$

18. 计算底面是半径为 R 的圆, 而垂直于底面上一条固定直径的所有截面都是等边三角形的立体体积(图 6-13).

解 以 x 为积分变量, 则 x 的变化范围为 $[-R, R]$, 相应的截面等边三角形边长为

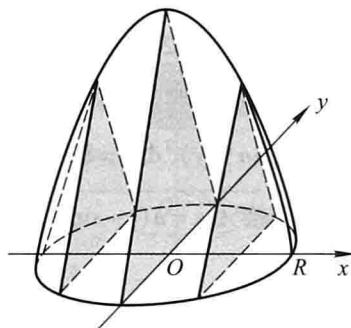


图 6-13

$2\sqrt{R^2 - x^2}$, 面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{R^2 - x^2})^2 = \sqrt{3}(R^2 - x^2)$, 因此体积为

$$V = \int_{-R}^R \sqrt{3}(R^2 - x^2) dx = \frac{4\sqrt{3}}{3}R^3.$$

19. 证明: 由平面图形 $0 \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)$ 绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

证 取横坐标 x 为积分变量, 与区间 $[a, b]$ 上任一小区间 $[x, x + dx]$ 相应的窄条图形绕 y 轴旋转所成的旋转体近似于一圆柱壳, 柱壳的高为 $f(x)$, 厚为 dx , 底面圆周长为 $2\pi x$, 故其体积近似等于 $2\pi x f(x) dx$, 从而由元素法即得结论.

20. 利用题 19 的结论, 计算曲线 $y = \sin x (0 \leq x \leq \pi)$ 和 x 轴所围成的图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

解 $V = 2\pi \int_0^\pi x \sin x dx = \pi^2 \int_0^\pi \sin x dx = 2\pi^2.$

注 在计算积分时, 这里利用了教材第五章第三节中的例 6 的结论 $\int_0^\pi xf(\sin x) dx =$

$$\frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx.$$

21. 设由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $x = a, x = 2$ 及 $y = 0$ 所围成的平面图形为 D_1 , 由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $x = a$ 及 $y = 0$ 所围成的平面图形为 D_2 , 其中 $0 < a < 2$ (图 6-14).

(1) 试求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1 , D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2 ;

(2) 问当 a 为何值时, $V_1 + V_2$ 取得最大值? 试求此最大值.

解 (1) $V_1 = \pi \int_a^2 (2x^2)^2 dx = \frac{4\pi}{5}(32 - a^5);$

$$V_2 = \pi a^2 \cdot 2a^2 - \pi \int_0^{2a^2} \frac{y}{2} dy = 2\pi a^4 - \pi a^4 = \pi a^4.$$

(2) 设

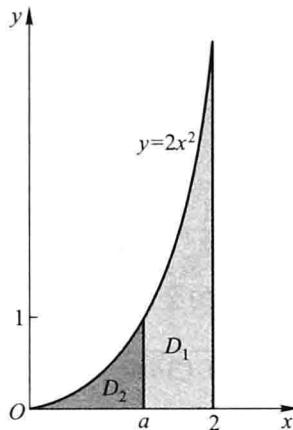


图 6-14

$$V = V_1 + V_2 = \frac{4\pi}{5}(32 - a^5) + \pi a^4,$$

由 $V' = 4\pi a^3(1 - a) = 0$, 解得区间 $(0, 2)$ 内惟一驻点 $a = 1$.

当 $0 < a < 1$ 时, $V' > 0$; 当 $a > 1$ 时, $V' < 0$. 因此 $a = 1$ 是极大值点也是最大值点, 此时 $V_1 + V_2$ 取得最大值 $\frac{129}{5}\pi$.

22. 计算曲线 $y = \ln x$ 相应于 $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$ 的一段弧的长度.

$$\begin{aligned} \text{解 } s &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} dx \stackrel{x = \sqrt{u^2 - 1}}{=} \int_2^3 \frac{u^2}{u^2 - 1} du \\ &= \left[u + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| \right]_2^3 = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

23. 计算半立方抛物线 $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3$ 被抛物线 $y^2 = \frac{x}{3}$ 截得的一段弧的长度.

解 联立两个方程 $\begin{cases} y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3, \\ y^2 = \frac{x}{3}, \end{cases}$ 得到两条曲线的交点为 $\left(2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ 和 $\left(2, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, 由于曲线关于 x 轴对称, 因此所求弧段长为第一象限部分的 2 倍, 第一

象限部分弧段为 $y = \sqrt{\frac{2}{3}(x-1)^3} (1 \leq x \leq 2)$, $y' = \sqrt{\frac{3}{2}(x-1)}$, 故所求弧的长度为

$$s = 2 \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{3}{2}(x-1)} dx = \sqrt{6} \left[\frac{2}{3} \left(x - \frac{1}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \frac{8}{9} \left[\left(\frac{5}{2} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right].$$

24. 计算抛物线 $y^2 = 2px$ 从顶点到这曲线上的一点 $M(x, y)$ 的弧长.

解 不妨设 $p > 0$, 由于顶点到 (x, y) 的弧长与顶点到 $(x, -y)$ 的弧长相等, 因此不妨设 $y > 0$, 故有

$$\begin{aligned}
 s &= \int_0^y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_0^y \sqrt{1 + \left(\frac{y}{p}\right)^2} dy \\
 &= \frac{1}{p} \left[\frac{1}{2} y \sqrt{p^2 + y^2} + \frac{1}{2} p^2 \ln(y + \sqrt{p^2 + y^2}) \right]_0^y \\
 &= \frac{1}{2p} y \sqrt{p^2 + y^2} + \frac{1}{2} p \ln \frac{y + \sqrt{p^2 + y^2}}{p}.
 \end{aligned}$$

25. 计算星形线 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ 的全长.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } s &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} dt \\
 &= 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = 6a.
 \end{aligned}$$

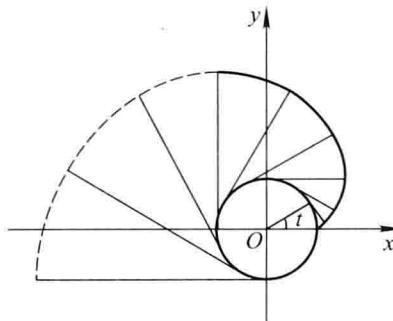


图 6-15

26. 将绕在圆(半径为 a)上的细线放开拉直,使细线与圆周始终相切(图6-15),细线端点画出的轨迹叫做圆的渐伸线,它的方程为

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t).$$

算出这曲线上相应于 $0 \leq t \leq \pi$ 的一段弧的长度.

解 $\frac{dx}{dt} = a t \cos t, \frac{dy}{dt} = a t \sin t$, 因此有

$$s = \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^\pi a t dt = \frac{a}{2} \pi^2.$$

27. 在摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ 上求分摆线第一拱成 $1:3$ 的点的坐标.

解 对应于摆线第一拱的参数 t 的范围为 $[0, 2\pi]$, 参数 t 在范围 $[0, t_0]$ 时摆线的长度为

$$\begin{aligned}
 s_0 &= \int_0^{t_0} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = a \int_0^{t_0} 2 \sin \frac{t}{2} dt \\
 &= 4a \left(1 - \cos \frac{t_0}{2}\right),
 \end{aligned}$$

当 $t_0 = 2\pi$ 时, 长度为 $8a$, 故所求点对应的参数 t_0 满足 $4a \left(1 - \cos \frac{t_0}{2}\right) = \frac{8a}{4}$, 解得

$t_0 = \frac{2\pi}{3}$, 从而得到点的坐标为 $\left(\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a, \frac{3a}{2} \right)$.

28. 求对数螺线 $\rho = e^{a\theta}$ 相应于 $0 \leq \theta \leq \varphi$ 的一段弧长.

$$\text{解 } s = \int_0^\varphi \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta = \int_0^\varphi \sqrt{1 + a^2} e^{a\theta} d\theta = \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a} (e^{a\varphi} - 1).$$

29. 求曲线 $\rho \theta = 1$ 相应于 $\frac{3}{4} \leq \theta \leq \frac{4}{3}$ 的一段弧长.

$$\begin{aligned} \text{解 } s &= \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta = \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{\sqrt{1 + \theta^2}}{\theta^2} d\theta = - \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \sqrt{1 + \theta^2} d\left(\frac{1}{\theta}\right) \\ &= - \left[\frac{\sqrt{1 + \theta^2}}{\theta} \right]_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} + \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{1}{\sqrt{1 + \theta^2}} d\theta = \frac{5}{12} + \left[\ln(\theta + \sqrt{1 + \theta^2}) \right]_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \\ &= \ln \frac{3}{2} + \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

30. 求心形线 $\rho = a(1 + \cos \theta)$ 的全长.

$$\text{解 } s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 + \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} 2a \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta = 8a.$$

习题 6-3

定积分在物理学上的应用

1. 由实验知道, 弹簧在拉伸过程中, 需要的力 F (单位:N) 与伸长量 s (单位:cm) 成正比, 即

$$F = ks \quad (k \text{ 是比例常数}).$$

如果把弹簧由原长拉伸 6 cm, 计算所作的功.

$$\text{解 } W = \int_0^6 ksds = 18k \text{ (N} \cdot \text{cm)} = 0.18k \text{ (J)}.$$

2. 直径为 20 cm、高为 80 cm 的圆筒内充满压强为 10 N/cm^2 的蒸汽. 设温度保持不变, 要使蒸气体积缩小一半, 问需要作多少功?

解 由条件 $pV = k$ 为常数, 故 $k = 10 \cdot 100^2 \cdot \pi \cdot 0.1^2 \cdot 0.8 = 800\pi$. 设圆筒内高度减少 h m 时蒸汽的压强为 $p(h) \text{ N/m}^2$, 则 $p(h) = \frac{k}{V} = \frac{800\pi}{(0.8-h)S}$, 压力为 $P = p(h)S = \frac{800\pi}{0.8-h}$, 因此作的功为

$$W = \int_0^{0.4} \frac{800\pi}{0.8-h} dh = 800\pi \left[-\ln(0.8-h) \right]_0^{0.4} = 800\pi \ln 2 \approx 1742 \text{ (J)}.$$

3. (1) 证明: 把质量为 m 的物体从地球表面升高到 h 处所作的功是

$$W = \frac{mgRh}{R+h},$$

其中 g 是地面上的重力加速度, R 是地球的半径;

(2) 一个人造地球卫星的质量为 173 kg, 在高于地面 630 km 处进入轨道. 问把这个卫星从地面送到 630 km 的高空处, 克服地球引力要作多少功? 已知 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, 地球半径 $R = 6370 \text{ km}$.

解 (1) 质量为 m 的物体与地球中心相距 x 时, 引力为 $F = G \frac{mM}{x^2}$, 根据条件

$$mg = G \frac{mM}{R^2}, \text{ 因此有 } G = \frac{R^2 g}{M}, \text{ 从而作的功为}$$

$$W = \int_R^{R+h} \frac{mgR^2}{x^2} dx = mgR^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) = \frac{mgRh}{R+h}.$$

$$(2) \text{ 作的功为 } W = \frac{mgRh}{R+h} = 971973 \approx 9.72 \times 10^5 (\text{ kJ}).$$

4. 一物体按规律 $x = ct^3$ 作直线运动, 介质的阻力与速度的平方成正比. 计算物体由 $x = 0$ 移到 $x = a$ 时, 克服介质阻力所作的功.

解 速度为 $v = \frac{dx}{dt} = 3ct^2$, 阻力为 $R = kv^2 = 9kc^2 t^4$, 由此得到

$$dW = Rdx = 27kc^3 t^6 dt.$$

设当 $t = T$ 时, $x = a$, 得 $T = \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{3}}$, 故

$$W = \int_0^T 27kc^3 t^6 dt = \frac{27kc^3}{7} T^7 = \frac{27}{7} kc^{\frac{2}{3}} a^{\frac{7}{3}}.$$

5. 用铁锤将一铁钉击入木板, 设木板对铁钉的阻力与铁钉击入木板的深度成正比, 在击第一次时, 将铁钉击入木板 1 cm. 如果铁锤每次打击铁钉所作的功相等, 问锤击第二次时, 铁钉又击入多少?

解 设木板对铁钉的阻力为 R , 则铁钉击入木板的深度为 h 时的阻力为

$$R = kh, \quad \text{其中 } k \text{ 为常数.}$$

铁锤击第一次时所作的功为

$$W_1 = \int_0^1 R dh = \int_0^1 kh dh = \frac{k}{2}.$$

设锤击第二次时, 铁钉又击入 h_0 cm, 则锤击第二次所作的功为

$$W_2 = \int_1^{1+h_0} R dh = \int_1^{1+h_0} kh dh = \frac{k}{2} [(1 + h_0)^2 - 1],$$

由条件 $W_1 = W_2$ 得 $h_0 = \sqrt{2} - 1$.

6. 设一圆锥形贮水池, 深 15 m, 口径 20 m, 盛满水, 今以唧筒将水吸尽, 问要作多少功?

解 以高度 h 为积分变量, 变化范围为 $[0, 15]$, 对该区间内任一小区间 $[h,$

$h + dh$], 体积为 $\pi \left(\frac{10}{15}h \right)^2 dh$, 记 γ 为水的密度, 则作功为

$$W = \int_0^{15} \frac{4}{9} \pi \gamma g h^2 (15 - h) dh = 1875 \pi \gamma g$$

$$\approx 5.76975 \times 10^7 (\text{J}).$$

例 7. 有一闸门, 它的形状和尺寸如图 6-16 所示, 水面超过门顶 2 m. 求闸门上所受的水压力.

解 设水深 x m 的地方压强为 $p(x)$, 则

$$p(x) = 1000gx,$$

取 x 为积分变量, 则 x 的变化范围为 $[2, 5]$, 对该区间内任一小区间 $[x, x + dx]$, 压力为

$$dF = p(x) dS = 2p(x) dx = 2000gxdx,$$

因此闸门上所受的水压力为

$$F = \int_2^5 2000gxdx = 1000g[x^2]_2^5 = 21000g(\text{N}) \approx 205.8(\text{kN}).$$

例 8. 洒水车上的水箱是一个横放的椭圆柱体, 尺寸如图 6-17 所示. 当水箱装满水时, 计算水箱的一个侧面所受的压力.

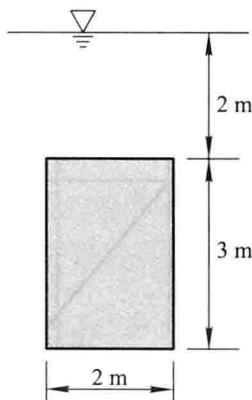


图 6-16

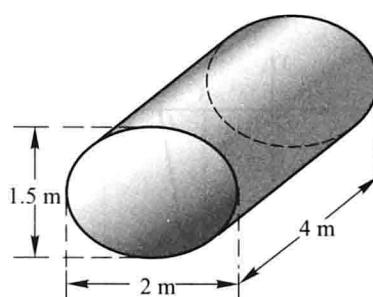


图 6-17

解 以侧面的椭圆长轴为 x 轴, 短轴为 y 轴设立坐标系, 则该椭圆的方程为 $x^2 + \frac{y^2}{0.75^2} = 1$, 取 y 为积分变量, 则 y 的变化范围为 $[-0.75, 0.75]$, 对该区间内任一小区间 $[y, y + dy]$, 该小区间相应的水深为 $0.75 - y$, 相应面积为

$$dS = 2 \sqrt{1 - \frac{y^2}{0.75^2}} dy,$$

得到该小区间相应的压力

$$dF = 1000g(0.75 - y) dS = 2000g(0.75 - y) \sqrt{1 - \frac{y^2}{0.75^2}} dy,$$

因此压力为

$$F = \int_{-0.75}^{0.75} 2000g(0.75 - y) \sqrt{1 - \frac{y^2}{0.75^2}} dy \approx 17318(N) \approx 17.3(kN).$$

9. 有一等腰梯形闸门,它的两条底边各长 10 m 和 6 m,高为 20 m,较长的底边与水面相齐.计算闸门的一侧所受的水压力.

解 如图 6-18 建立坐标系,则过 A、B 两点的直线方程为 $y = 10x - 50$. 取 y 为积分变量, y 的变化范围为 $[-20, 0]$, 对应小区间 $[y, y + dy]$ 的面积近似值为 $2xdy = \left(\frac{y}{5} + 10\right)dy$, γ 表示水的密度,因此水压力为

$$P = \int_{-20}^0 \left(\frac{y}{5} + 10\right)(-\gamma g) dy = 1.4373 \times 10^7(N) = 14373(kN).$$

10. 一底为 8 cm、高为 6 cm 的等腰三角形片,铅直地沉没在水中,顶在上,底在下且与水面平行,而顶离水面 3 cm,试求它每面所受的压力.

解 如图 6-19 建立坐标系,取三角形顶点为原点,取积分变量为 x ,则 x 的变化范围为 $[0, 0.06]$, 易知 B 的坐标为 $(0.06, 0.04)$, 因此 OB 的方程为 $y = \frac{2}{3}x$, 故对应小区间 $[x, x + dx]$ 的面积近似值为

$$dS = 2 \cdot \frac{2}{3}x \cdot dx = \frac{4}{3}x dx.$$

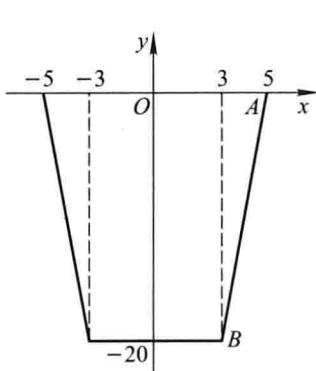


图 6-18

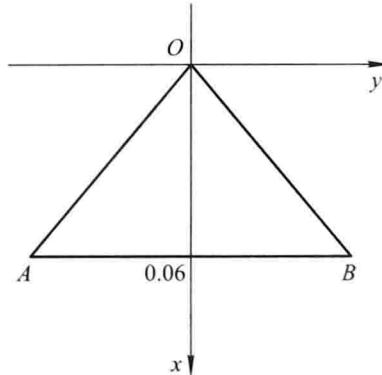


图 6-19

记 γ 为水的密度,则在 x 处的水压强为

$$p = \gamma g(x + 0.03) = 1000g(x + 0.03),$$

故压力为

$$F = \int_0^{0.06} 1000g(x + 0.03) \cdot \frac{4}{3}x dx = 0.168g \approx 1.65(N).$$

11. 设有一长度为 l 、线密度为 μ 的均匀细直棒,在与棒的一端垂直距离为 a 单位处有一质量为 m 的质点 M ,试求这细棒对质点 M 的引力.

解 如图 6-20 设立坐标系, 取 y 为积分变量, 则 y 的变化范围为 $[0, l]$, 对应小区间 $[y, y+dy]$ 与质点 M 的引力的大小的近似值为

$$dF = G \frac{m\mu dx}{r^2},$$

其中 $r = \sqrt{a^2 + x^2}$, 把该力分解, 得到 x 轴、 y 轴方向的分量分别为

$$dF_x = -\frac{a}{r} dF = -G \frac{am\mu}{(a^2 + x^2)^{3/2}} dx,$$

$$dF_y = \frac{x}{r} dF = G \frac{m\mu x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} dx,$$

因此

$$F_x = \int_0^l -G \frac{am\mu}{(a^2 + x^2)^{3/2}} dx \xrightarrow{x = a \tan t} -G \frac{m\mu}{a} \int_0^{\arctan \frac{l}{a}} \cos t dt = -\frac{Gm\mu l}{a \sqrt{a^2 + l^2}},$$

$$F_y = \int_0^l G \frac{m\mu x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} dx = \left[-G \frac{m\mu}{(a^2 + x^2)^{1/2}} \right]_0^l = m\mu G \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + l^2}} \right).$$

E 12. 设有一半径为 R 、中心角为 φ 的圆弧形细棒, 其线密度为常数 μ . 在圆心处有一质量为 m 的质点 M , 试求这细棒对质点 M 的引力.

解 如图 6-21 建立坐标系, 则相应小区间 $[\theta, \theta + d\theta]$ 的弧长为 $Rd\theta$, 根据对称性可知所求的铅直方向引力分量为零, 水平方向的引力分量为

$$F_x = \int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}} \cos \theta \frac{Gm\mu R d\theta}{R^2} = \frac{2Gm\mu}{R} \sin \frac{\varphi}{2}.$$

故所求引力的大小为 $\frac{2Gm\mu}{R} \sin \frac{\varphi}{2}$, 方向为 M 指向圆弧的中心.

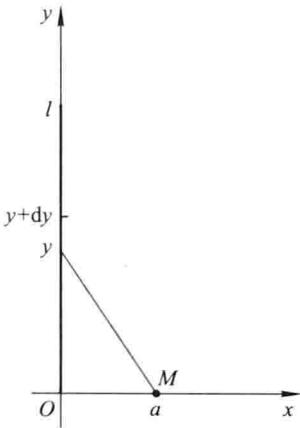


图 6-20

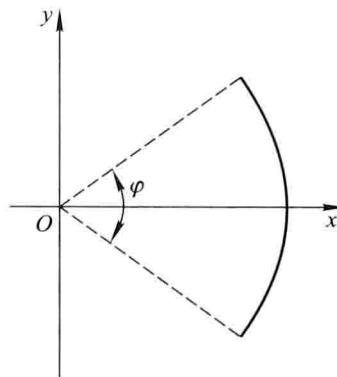


图 6-21

总习题六

E 1. 填空:

(1) 曲线 $y = x^3 - 5x^2 + 6x$ 与 x 轴所围成的图形的面积 $A = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 曲线 $y = \frac{\sqrt{x}}{3}(3-x)$ 上相应于 $1 \leq x \leq 3$ 的一段弧的长度 $s = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 (1) 令 $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$, 解得 $x = 0, 2, 3$.

当 $0 \leq x \leq 2$ 时, $y \geq 0$; 当 $2 \leq x \leq 3$ 时, $y \leq 0$. 故

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 (x^3 - 5x^2 + 6x) dx - \int_2^3 (x^3 - 5x^2 + 6x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^2 - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2 \right]_2^3 = \frac{37}{12}. \end{aligned}$$

$$(2) s = \int_1^3 \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_1^3 \frac{1+x}{2\sqrt{x}} dx = \left[\sqrt{x} + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_1^3 = 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}.$$

2. 以下两题中给出了四个结论,从中选出一个正确的结论:

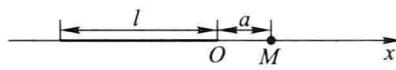


图 6-22

(1) 设 x 轴上有一长度为 l 、线密度为常数 μ 的细棒, 在细棒右端的距离为 a 处有一质量为 m 的质点 M (图 6-22), 已知万有引力常量为 G , 则质点 M 和细棒之间的引力的大小为() .

$$(A) \int_{-l}^0 \frac{Gm\mu}{(a-x)^2} dx \quad (B) \int_0^l \frac{Gm\mu}{(a-x)^2} dx$$

$$(C) 2 \int_{-\frac{l}{2}}^0 \frac{Gm\mu}{(a-x)^2} dx \quad (D) 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{Gm\mu}{(a-x)^2} dx$$

(2) 设在区间 $[a, b]$ 上, $f(x) > 0, f'(x) > 0, f''(x) < 0$. 令 $A_1 = \int_a^b f(x) dx, A_2 = f(a)(b-a), A_3 = \frac{1}{2}[f(a) + f(b)](b-a)$, 则有().

$$(A) A_1 < A_2 < A_3 \quad (B) A_2 < A_1 < A_3$$

$$(C) A_3 < A_1 < A_2 \quad (D) A_2 < A_3 < A_1$$

解 (1) 选 (A).

(2) 解法一 从几何意义判断: 因为 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加. 又因 $f''(x) < 0$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上向上凸, 如图 6-23 所示, 矩形面积 < 梯形面积 < 曲边梯形面积, 故选 (D).

解法二 证 $A_2 < A_3$. 因 $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加, 得 $f(b) > f(a)$, 从而

$$A_3 - A_2 = (b-a) \frac{f(b) - f(a)}{2} > 0,$$

即 $A_3 > A_2$.

证 $A_1 > A_3$. 联结点 $(a, f(a))$ 与点 $(b, f(b))$ 的直线方程为

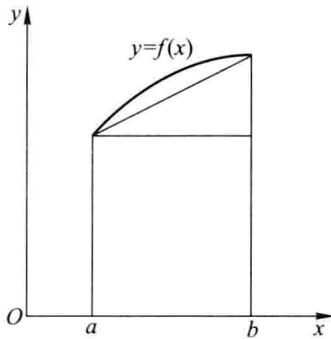


图 6-23

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

因为 $f''(x) < 0$, 所以曲线 $y = f(x)$ 是向上凸的, 从而有

$$f(x) > f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad x \in (a, b).$$

两边积分, 得

$$\int_a^b f(x) dx > \frac{1}{2} [f(a) + f(b)](b - a),$$

即 $A_1 > A_3$.

3. 一金属棒长 3 m, 离棒左端 x m 处的线密度 $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ (kg/m). 问 x 为何值时, $[0, x]$ 一段的质量为全棒质量的一半.

解 $[0, x]$ 一段的质量为

$$m(x) = \int_0^x \rho(x) dx = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = 2(\sqrt{1+x} - 1),$$

总质量为 $m(3) = 2$, 要满足 $m(x) = \frac{1}{2}m(3)$, 求得 $x = \frac{5}{4}$ (m).

4. 求由曲线 $\rho = a \sin \theta$ 及 $\rho = a(\cos \theta + \sin \theta)$ ($a > 0$) 所围图形公共部分的面积.

解 首先求出两曲线的交点, 联立方程 $\begin{cases} \rho = a \sin \theta, \\ \rho = a(\cos \theta + \sin \theta), \end{cases}$ 解得交点坐标为 $\left(a, \frac{\pi}{2}\right)$, 注意到当 $\theta = 0$ 时, $\rho = a \sin \theta = 0$, 当 $\theta = \frac{3\pi}{4}$ 时, $\rho = a(\cos \theta + \sin \theta) = 0$, 故两曲线分别过 $(0, 0)$ 和 $\left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$, 即都过极点 (见图 6-24), 因此所求面积为

$$A = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{2} [a(\cos \theta + \sin \theta)]^2 d\theta + \frac{1}{2}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{a^2}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} (1 + \sin 2\theta) d\theta + \frac{\pi a^2}{8} \\
 &= \frac{a^2}{4} (\pi - 1).
 \end{aligned}$$

5. 如图 6-25 所示, 从下到上依次有三条曲线: $y = x^2$, $y = 2x^2$ 和 C , 假设对曲线 $y = 2x^2$ 上的任一点 P , 所对应的面积 A 和 B 恒相等, 求曲线 C 的方程.

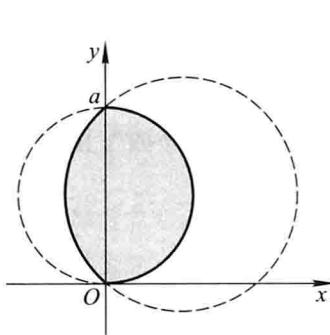


图 6-24

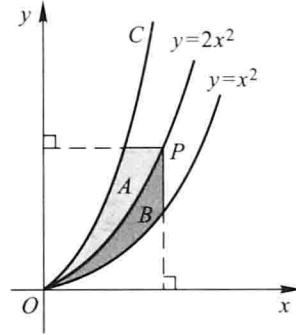


图 6-25

解 设曲线 C 的方程为 $x = f(y)$, P 点坐标为 $(\sqrt{\frac{y}{2}}, y)$, 则

$$A = \int_0^y \left[\sqrt{\frac{y}{2}} - f(y) \right] dy, \quad B = \int_0^{\sqrt{\frac{y}{2}}} (2x^2 - x^2) dx,$$

根据条件, 对任意 $y \geq 0$ 都有

$$\int_0^y \left[\sqrt{\frac{y}{2}} - f(y) \right] dy = \int_0^{\sqrt{\frac{y}{2}}} (2x^2 - x^2) dx,$$

上式对 y 求导, 得

$$\sqrt{\frac{y}{2}} - f(y) = \frac{y}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2y}},$$

因此

$$f(y) = \frac{3\sqrt{2y}}{8},$$

即曲线 C 为 $x = \frac{3\sqrt{2y}}{8}$, 或 $y = \frac{32}{9}x^2$ ($x \geq 0$).

6. 设抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 通过点 $(0, 0)$, 且当 $x \in [0, 1]$ 时, $y \geq 0$. 试确定 a, b, c 的值, 使得抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与直线 $x = 1, y = 0$ 所围图形的面积为 $\frac{4}{9}$, 且使该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积最小.

解 由已知条件: 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 通过点 $(0, 0)$, 可得 $c = 0$. 抛物线

$y = ax^2 + bx + c$ 与直线 $x = 1, y = 0$ 所围图形的面积为

$$S = \int_0^1 (ax^2 + bx) dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2},$$

从而得到 $\frac{a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{4}{9}$, 即 $a = \frac{4}{3} - \frac{3}{2}b$. 该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积为

$$V = \int_0^1 \pi(ax^2 + bx)^2 dx = \pi \left(\frac{a^2}{5} + \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{3} \right) = \frac{\pi}{30}(b-2)^2 + \frac{2}{9}\pi,$$

因此当 $b=2$ 时体积为最小, 此时 $a = -\frac{5}{3}$, 抛物线为

$$y = -\frac{5}{3}x^2 + 2x = \frac{x}{3}(6-5x),$$

在区间 $[0, 1]$ 上, 此抛物线满足 $y \geq 0$, 故所求解: $a = -\frac{5}{3}, b = 2, c = 0$ 符合题目要求.

7. 过坐标原点作曲线 $y = \ln x$ 的切线, 该切线与曲线 $y = \ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D .

(1) 求 D 的面积 A ; (2) 求 D 绕直线 $x = e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V .

解 (1) 设切点的横坐标为 x_0 , 则曲线 $y = \ln x$ 在点 $(x_0, \ln x_0)$ 处的切线方程是

$$y = \ln x_0 + \frac{1}{x_0}(x - x_0).$$

由该切线过原点知 $y = \ln x_0 - 1 = 0$, 从而 $x_0 = e$, 所以该切线的方程是

$$y = \frac{1}{e}x.$$

平面图形 D 的面积

$$A = \int_0^1 (e^y - ey) dy = \frac{1}{2}e - 1.$$

(2) 切线 $y = \frac{x}{e}$ 与 x 轴及直线 $x = e$ 所围成的三角形绕直线 $x = e$ 旋转所得的圆

锥体的体积为

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi e^2.$$

曲线 $y = \ln x$ 与 x 轴及直线 $x = e$ 所围成的图形绕直线 $x = e$ 旋转所得的旋转体的体积为

$$V_2 = \int_0^1 \pi(e - e^y)^2 dy = \frac{\pi}{2}(-e^2 + 4e - 1),$$

因此, 所求旋转体的体积为

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{6}(5e^2 - 12e + 3).$$

8. 求由曲线 $y = x^{\frac{3}{2}}$, 直线 $x = 4$ 及 x 轴所围图形绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积.

解 如图 6-26, 取 x 为积分变量, 则 x 的变化范围为 $[0, 4]$, 因此体积为

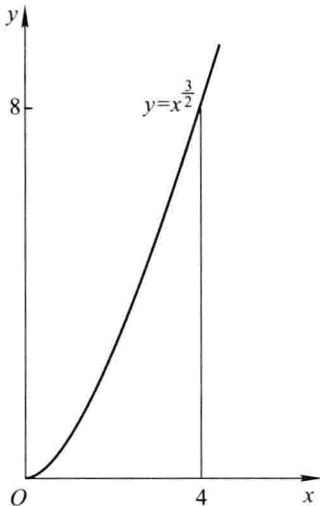


图 6-26

$$V = \int_0^4 2\pi x f(x) dx = \int_0^4 2\pi x^{5/2} dx = \frac{512}{7}\pi.$$

9. 求圆盘 $(x - 2)^2 + y^2 \leq 1$ 绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积.

解 这是一个圆环面, 可以看作由图形 $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2 + \sqrt{1 - y^2}, -1 \leq y \leq 1\}$ 绕 y 轴旋转所得的立体减去由图形 $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2 - \sqrt{1 - y^2}, -1 \leq y \leq 1\}$ 绕 y 轴旋转所得的立体, 因此

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^1 \pi (2 + \sqrt{1 - y^2})^2 dy - \int_{-1}^1 \pi (2 - \sqrt{1 - y^2})^2 dy = 8\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 - y^2} dy \\ &= 8\pi \left[\frac{y}{2}\sqrt{1 - y^2} + \frac{1}{2}\arcsin y \right]_{-1}^1 = 4\pi^2. \end{aligned}$$

10. 求抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 被圆 $x^2 + y^2 = 3$ 所截下的有限部分的弧长.

解 联立两曲线方程 $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2, \\ x^2 + y^2 = 3, \end{cases}$ 得到两曲线的交点为 $(-\sqrt{2}, 1), (\sqrt{2}, 1)$, 因此

所求弧长为

$$\begin{aligned} s &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x\sqrt{1 + x^2} + \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{6} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

11. 半径为 r 的球沉入水中, 球的上部与水面相切, 球的密度与水相同, 现将球从水中取出, 需作多少功?

解 取 x 轴的正向铅直向上, 沉入水中的球心为原点, 并取 x 为积分变量, 则 x 的变化范围为 $[-r, r]$. 对应区间 $[x, x + dx]$ 的球的薄片的体积为

$$dV = \pi(\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \pi(r^2 - x^2) dx,$$

由于该部分在水面以下重力与浮力的合力为零(因为球的密度与水的密度相同), 在水面以上移动距离为 $r + x$, 故作功为

$$\begin{aligned} W &= \int_{-r}^r g\pi(r^2 - x^2)(r + x) dx \\ &= \int_{-r}^r g\pi r(r^2 - x^2) dx + \int_{-r}^r g\pi x(r^2 - x^2) dx \\ &= 2\pi gr \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \frac{4}{3}\pi gr^4. \end{aligned}$$

12. 边长为 a 和 b 的矩形薄板, 与液面成 α 角斜沉于液体内, 长边平行于液面而位于深 h 处, 设 $a > b$, 液体的密度为 ρ , 试求薄板每面所受的压力.

解 如图 6-27, 记 x 为薄板上点到近水面的长边的距离, 取 x 为积分变量, 则 x 的变化范围为 $[0, b]$, 对应小区间 $[x, x + dx]$, 压强为 $\rho g(h + x \sin \alpha)$, 面积为 adx , 因此压力为

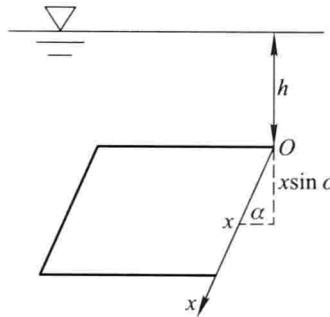


图 6-27

$$F = \int_0^b \rho g a (h + x \sin \alpha) dx = \frac{1}{2} \rho g a b (2h + b \sin \alpha).$$

13. 设星形线 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ 上每一点处的线密度的大小等于该点到原点距离的立方, 在原点 O 处有一单位质点, 求星形线的第一象限的弧段对这质点的引力.

解 取参数 t 为积分变量, 变化范围为 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 对应区间 $[t, t + dt]$ 的弧长为

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = 3a \cos t \sin t dt,$$

该弧段质量为 $(a^2 \cos^6 t + a^2 \sin^6 t)^{\frac{3}{2}} ds = 3a^4 \cos t \sin t (\cos^6 t + \sin^6 t)^{\frac{3}{2}} dt$, 该弧段与质点的引力大小为

$$G \frac{3a^4 \cos t \sin t (\cos^6 t + \sin^6 t)^{\frac{3}{2}} dt}{a^2 \cos^6 t + a^2 \sin^6 t} = 3G a^2 \cos t \sin t (\cos^6 t + \sin^6 t)^{\frac{1}{2}} dt,$$

因此曲线弧对这质点引力的水平方向分量、铅直方向分量分别为

$$\begin{aligned} F_x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a \cos^3 t}{\sqrt{a^2 \cos^6 t + a^2 \sin^6 t}} 3 G a^2 \cos t \sin t (\cos^6 t + \sin^6 t)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 G a^2 \cos^4 t \sin t dt = 3 G a^2 \left[-\frac{\cos^5 t}{5} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{5} G a^2, \\ F_y &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a \sin^3 t}{\sqrt{a^2 \cos^6 t + a^2 \sin^6 t}} 3 G a^2 \cos t \sin t (\cos^6 t + \sin^6 t)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 G a^2 \cos t \sin^4 t dt = 3 G a^2 \left[\frac{\sin^5 t}{5} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{5} G a^2, \end{aligned}$$

因此所求引力 $\mathbf{F} = \left(\frac{3}{5} G a^2, \frac{3}{5} G a^2 \right)$, 即大小为 $\frac{3\sqrt{2}}{5} G a^2$, 方向角为 $\frac{\pi}{4}$.

14. 某建筑工地打地基时, 需用汽锤将桩打进土层. 汽锤每次击打, 都要克服土层对桩的阻力而作功. 设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比(比例系数为 $k, k > 0$). 汽锤第一次击打将桩打进地下 a m. 根据设计方案, 要求汽锤每次击打桩时所作的功与前一次击打时所作的功之比为常数 $r (0 < r < 1)$. 问:

(1) 汽锤击打桩 3 次后, 可将桩打进地下多深?

(2) 若击打次数不限, 则汽锤至多能将桩打进地下多深?

解 (1) 设第 n 次击打后, 桩被打进地下 x_n , 第 n 次击打时, 汽锤克服阻力所作的功为 $W_n (n \in \mathbb{N}^*)$. 由题设, 当桩被打进地下的深度为 x 时, 土层对桩的阻力的大小为 kx , 所以

$$W_1 = \int_0^{x_1} kx dx = \frac{k}{2} x_1^2 = \frac{k}{2} a^2,$$

$$W_2 = \int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{k}{2} (x_2^2 - x_1^2) = \frac{k}{2} (x_2^2 - a^2).$$

由 $W_2 = r W_1$, 可得

$$x_2^2 - a^2 = r a^2,$$

即 $x_2^2 = (1 + r) a^2$.

$$W_3 = \int_{x_2}^{x_3} kx dx = \frac{k}{2} (x_3^2 - x_2^2) = \frac{k}{2} [x_3^2 - (1 + r) a^2],$$

由 $W_3 = r W_2 = r^2 W_1$, 可得

$$x_3^2 - (1 + r) a^2 = r^2 a^2,$$

从而

$$x_3 = \sqrt{1 + r + r^2} a,$$

即汽锤击打桩 3 次后, 可将桩打进地下 $\sqrt{1 + r + r^2} a$ m.

$$(2) W_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} kx dx = \frac{k}{2} (x_n^2 - x_{n-1}^2), \text{由 } W_n = rW_{n-1}, \text{可得}$$

$$x_n^2 - x_{n-1}^2 = r(x_{n-1}^2 - x_{n-2}^2),$$

由(1)知 $x_2^2 - x_1^2 = ra^2$, 因此 $x_n^2 - x_{n-1}^2 = r^{n-1}a^2$, 从而由归纳法, 可得

$$x_n = \sqrt{1 + r + \cdots + r^{n-1}} a,$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a \sqrt{\frac{1 - r^n}{1 - r}} = \frac{a}{\sqrt{1 - r}},$$

即若击打次数不限, 汽锤至多能将桩打进地下 $\frac{a}{\sqrt{1 - r}}$ m.

第七章 微分方程

习题 7-1

微分方程的基本概念

1. 试说出下列各微分方程的阶数：

$$(1) x(y')^2 - 2yy' + x = 0;$$

$$(2) x^2y'' - xy' + y = 0;$$

$$(3) xy''' + 2y'' + x^2y = 0;$$

$$(4) (7x - 6y)dx + (x + y)dy = 0;$$

$$(5) L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0;$$

$$(6) \frac{dp}{d\theta} + p = \sin^2 \theta.$$

解 (1) 一阶; (2) 二阶; (3) 三阶; (4) 一阶; (5) 二阶; (6) 一阶.

2. 指出下列各题中的函数是否为所给微分方程的解：

$$(1) xy' = 2y, y = 5x^2;$$

$$(2) y'' + y = 0, y = 3\sin x - 4\cos x;$$

$$(3) y'' - 2y' + y = 0, y = x^2 e^x;$$

$$(4) y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1 \lambda_2 y = 0, y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

解 (1) 由 $y = 5x^2$, 得 $y' = 10x$, $xy' = 10x^2 = 2y$, 故 $y = 5x^2$ 是所给微分方程的解.

(2) 由 $y = 3\sin x - 4\cos x$, 得 $y' = 3\cos x + 4\sin x$, 进而得

$$y'' = -3\sin x + 4\cos x,$$

于是

$$y'' + y = (-3\sin x + 4\cos x) + (3\sin x - 4\cos x) = 0,$$

故 $y = 3\sin x - 4\cos x$ 是所给微分方程的解.

(3) 由 $y = x^2 e^x$, 得 $y' = 2xe^x + x^2 e^x = (2x + x^2) e^x$, 进而得

$$y'' = (2 + 2x)e^x + (2x + x^2)e^x = (2 + 4x + x^2)e^x,$$

于是

$$y'' - 2y' + y = [(2 + 4x + x^2) - 2(2x + x^2) + x^2]e^x = 2e^x \neq 0,$$

故 $y = x^2 e^x$ 不是所给微分方程的解.

(4) 由 $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, 得 $y' = \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 x}$, 进而得

$$y'' = \lambda_1^2 C_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2^2 C_2 e^{\lambda_2 x},$$

于是

$$\begin{aligned} y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1 \lambda_2 y \\ = \lambda_1^2 C_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2^2 C_2 e^{\lambda_2 x} - \lambda_1 (\lambda_1 + \lambda_2) C_1 e^{\lambda_1 x} - \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2) C_2 e^{\lambda_2 x} + \\ \lambda_1 \lambda_2 C_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_1 \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 x} = 0, \end{aligned}$$

故 $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ 是所给微分方程的解.

3. 在下列各题中, 验证所给二元方程所确定的函数为所给微分方程的解:

$$(1) (x - 2y)y' = 2x - y, x^2 - xy + y^2 = C;$$

$$(2) (xy - x)y'' + xy'^2 + yy' - 2y' = 0, y = \ln(xy).$$

解 (1) 在方程 $x^2 - xy + y^2 = C$ 两端对 x 求导, 得

$$2x - (y + xy') + 2yy' = 0,$$

即 $(x - 2y)y' = 2x - y$. 故所给二元方程所确定的函数是微分方程的解.

(2) 在方程 $y = \ln(xy)$ 两端对 x 求导, 得

$$y' = \frac{y + xy'}{xy},$$

即 $(xy - x)y' - y = 0$, 再在上式两端对 x 求导, 得

$$(y + xy' - 1)y' + (xy - x)y'' - y' = 0,$$

即 $(xy - x)y'' + xy'^2 + yy' - 2y' = 0$. 故所给二元方程所确定的函数是所给微分方程的解.

4. 在下列各题中, 确定函数关系式中所含的参数, 使函数满足所给的初值条件:

$$(1) x^2 - y^2 = C, y|_{x=0} = 5;$$

$$(2) y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1;$$

$$(3) y = C_1 \sin(x - C_2), y|_{x=\pi} = 1, y'|_{x=\pi} = 0.$$

解 (1) 由 $y|_{x=0} = 5$, 将 $x = 0, y = 5$ 代入函数关系中, 得 $C = -25$, 即

$$x^2 - y^2 = -25.$$

(2) 由 $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$, 得

$$y' = (C_2 + 2C_1 + 2C_2 x)e^{2x}.$$

将 $x = 0, y = 0$ 及 $y' = 1$ 代入以上两式, 得

$$\begin{cases} 0 = C_1, \\ 1 = C_2 + 2C_1, \end{cases}$$

故 $C_1 = 0, C_2 = 1, y = xe^{2x}$.

(3) 由 $y = C_1 \sin(x - C_2)$, 得

$$y' = C_1 \cos(x - C_2).$$

将 $x = \pi, y = 1$ 及 $y' = 0$ 代入以上两式, 得

$$\begin{cases} 1 = C_1 \sin(\pi - C_2) = C_1 \sin C_2, \\ 0 = C_1 \cos(\pi - C_2) = -C_1 \cos C_2. \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 1 = C_1 \sin(\pi - C_2) = C_1 \sin C_2, \\ 0 = C_1 \cos(\pi - C_2) = -C_1 \cos C_2. \end{cases} \quad (2)$$

由(1)² + (2)² 得 $C_1^2 = 1$, 不妨取 $C_1 = 1$, 由(1)式得 $C_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, 故

$$y = \sin\left(x - 2k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x.$$

注 取 $C_1 = -1$, 可得相同的结果.

5. 写出由下列条件确定的曲线所满足的微分方程:

(1) 曲线在点 (x, y) 处的切线的斜率等于该点横坐标的平方;

(2) 曲线上点 $P(x, y)$ 处的法线与 x 轴的交点为 Q , 且线段 PQ 被 y 轴平分.

解 (1) 设曲线方程为 $y = y(x)$, 它在点 (x, y) 处的切线斜率为 y' , 依条件, 有

$$y' = x^2,$$

此为曲线方程所满足的微分方程.

(2) 设曲线方程为 $y = y(x)$, 因它在点 $P(x, y)$ 处的切线斜率为 y' , 故该点处法线斜率为 $-\frac{1}{y'}$.

由条件知 PQ 之中点位于 y 轴上, 故点 Q 的坐标是 $(-x, 0)$, 于是有

$$\frac{y - 0}{x - (-x)} = -\frac{1}{y'},$$

即微分方程为 $yy' + 2x = 0$.

6. 用微分方程表示一物理命题: 某种气体的气压 P 对于温度 T 的变化率与气压成正比, 与温度的平方成反比.

解 因 $\frac{dP}{dT}$ 与 P 成正比, 与 T^2 成反比, 若比例系数为 k , 则有

$$\frac{dP}{dT} = k \frac{P}{T^2}.$$

7. 一个半球体形状的雪堆, 其体积融化率与半球面面积 A 成正比, 比例系数 $k > 0$.

假设在融化过程中雪堆始终保持半球体形状, 已知半径为 r_0 的雪堆在开始融化的 3 小时内, 融化了其体积的 $\frac{7}{8}$, 问雪堆全部融化需要多少时间?

解 设雪堆在时刻 t 的体积为 $V = \frac{2}{3}\pi r^3$, 侧面积 $S = 2\pi r^2$. 由题设知

$$\frac{dV}{dt} = 2\pi r^2 \frac{dr}{dt} = -kS = -2\pi kr^2,$$

于是

$$\frac{dr}{dt} = -k,$$

积分得

$$r = -kt + C.$$

由 $r|_{t=0} = r_0$, 得 $C = r_0$, $r = r_0 - kt$. 又 $V|_{t=3} = \frac{1}{8}V|_{t=0}$, 即 $\frac{2}{3}\pi(r_0 - 3k)^3 =$

$\frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \pi r_0^3$, 得 $k = \frac{1}{6} r_0$, 从而

$$r = r_0 - \frac{1}{6} r_0 t$$

因雪堆全部融化时, $r = 0$, 故得 $t = 6$, 即雪堆全部融化需 6 小时.

习题 7-2

可分离变量的微分方程

1. 求下列微分方程的通解:

$$(1) xy' - y \ln y = 0;$$

$$(2) 3x^2 + 5x - 5y' = 0;$$

$$(3) \sqrt{1-x^2} y' = \sqrt{1-y^2};$$

$$(4) y' - xy' = a(y^2 + y');$$

$$(5) \sec^2 x \tan y dx + \sec^2 y \tan x dy = 0;$$

$$(6) \frac{dy}{dx} = 10^{x+y};$$

$$(7) (e^{x+y} - e^x) dx + (e^{x+y} + e^y) dy = 0; \quad (8) \cos x \sin y dx + \sin x \cos y dy = 0;$$

$$(9) (y+1)^2 \frac{dy}{dx} + x^3 = 0;$$

$$(10) y dx + (x^2 - 4x) dy = 0.$$

解 (1) 原方程为 $x \frac{dy}{dx} - y \ln y = 0$, 分离变量得

$$\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{x},$$

两端积分得

$$\ln |\ln y| = \ln |x| + \ln C_1 = \ln |C_1 x| (C_1 > 0),$$

即 $\ln y = \pm C_1 x$, 故通解为 $y = e^{Cx}$, 即 $y = e^{Cx}$. ①

(2) 原方程可写成 $5y' = 3x^2 + 5x$, 积分得 $5y = x^3 + \frac{5}{2}x^2 + C_1$, 即通解为

$$y = \frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C \left(C = \frac{C_1}{5} \right).$$

(3) 原方程为 $\sqrt{1-x^2} \frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}$, 分离变量得

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

两端积分得 $\arcsin y = \arcsin x + C$, 即为原方程的通解.

(4) 原方程可写成 $(1-x-a) \frac{dy}{dx} = ay^2$, 分离变量得

① 由于 $y=1$ 也是原方程 $xy' - y \ln y = 0$ 的解, 因此方程的解 $\ln y = \pm C_1 x$ 中, C_1 可以取作 0, 从而通解为 $\ln y = Cx$ (C 是任意常数), 即 $y = e^{Cx}$. 以下诸题通解中的常数 C 也有类似情况, 但不再一一说明.

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{a}{1-x-a} dx,$$

两端积分得

$$-\frac{1}{y} = -a \ln |1-x-a| + C,$$

即 $y = \frac{1}{a \ln |1-x-a| + C}$ 是原方程的通解.

(5) 原方程分离变量, 得

$$\frac{\sec^2 y}{\tan y} dy = -\frac{\sec^2 x}{\tan x} dx,$$

两端积分得

$$\ln |\tan y| = -\ln |\tan x| + \ln C_1,$$

可写成 $\ln |\tan y \cdot \tan x| = \ln C_1$, 即 $\tan y \cdot \tan x = \pm C_1$, 故原方程的通解为

$$\tan y \cdot \tan x = C.$$

(6) 原方程分离变量, 得 $10^{-y} dy = 10^x dx$, 两端积分得

$$-\frac{10^{-y}}{\ln 10} = \frac{10^x}{\ln 10} + C_1,$$

可写成 $10^x + 10^{-y} = C$ ($C = -C_1 \ln 10$).

(7) 原方程为 $e^x(e^y - 1) dx + e^y(e^x + 1) dy = 0$, 分离变量得

$$\frac{e^y}{e^y - 1} dy = -\frac{e^x}{e^x + 1} dx,$$

两端积分得

$$\ln |e^y - 1| = -\ln (e^x + 1) + \ln C_1,$$

或写成 $\ln |(e^x + 1)(e^y - 1)| = \ln C_1$, 即 $(e^x + 1)(e^y - 1) = \pm C_1$, 故原方程的通解为 $(e^x + 1)(e^y - 1) = C$.

(8) 原方程分离变量, 得 $\frac{\cos y}{\sin y} dy = -\frac{\cos x}{\sin x} dx$, 两端积分得

$$\ln |\sin y| = -\ln |\sin x| + \ln C_1,$$

即 $\ln |\sin y \sin x| = \ln C_1$, 或写成 $\sin y \sin x = \pm C_1$, 故原方程的通解为 $\sin y \sin x = C$.

(9) 原方程分离变量, 得 $(y+1)^2 dy = -x^3 dx$, 两端积分得

$$\frac{1}{3}(y+1)^3 = -\frac{1}{4}x^4 + C_1,$$

故原方程的通解为 $3x^4 + 4(y+1)^3 = C$ ($C = 12C_1$).

(10) 原方程分离变量, 得 $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{4x-x^2}$, 两端积分得

$$\ln |y| = \int \frac{dx}{(4-x)x} = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{4-x} + \frac{1}{x} \right) dx$$

$$= \frac{1}{4}(\ln|x| - \ln|4-x|) + \ln C_1 = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{4-x}\right| + \ln C_1,$$

即 $\ln|y^4(4-x)| = \ln|4C_1x|$, 或写成 $y^4(4-x) = \pm 4C_1x$, 故原方程的通解为

$$y^4(4-x) = Cx.$$

2. 求下列微分方程满足所给初值条件的特解:

$$(1) y' = e^{2x-y}, y|_{x=0} = 0;$$

$$(2) \cos x \sin y dy = \cos y \sin x dx, y|_{x=0} = \frac{\pi}{4};$$

$$(3) y' \sin x = y \ln y, y|_{x=\frac{\pi}{2}} = e;$$

$$(4) \cos y dx + (1 + e^{-x}) \sin y dy = 0, y|_{x=0} = \frac{\pi}{4};$$

$$(5) x dy + 2y dx = 0, y|_{x=2} = 1.$$

解 (1) 分离变量, 得 $e^y dy = e^{2x} dx$, 两端积分得

$$e^y = \frac{1}{2}e^{2x} + C,$$

由 $y|_{x=0} = 0$, 得 $1 = e^0 = \frac{1}{2}e^0 + C$, 故 $C = \frac{1}{2}$, 即得 $e^y = \frac{1}{2}(e^{2x} + 1)$, 于是所求特解

$$\text{为 } y = \ln \frac{e^{2x} + 1}{2}.$$

(2) 分离变量, 得 $\tan y dy = \tan x dx$, 两端积分得

$$-\ln|\cos y| = -\ln|\cos x| - \ln C_1,$$

即 $\cos y = C \cos x$. 代入初值条件: $x=0, y=\frac{\pi}{4}$, 得 $\frac{\sqrt{2}}{2} = C$, 于是

$$\sqrt{2} \cos y = \cos x$$

为所求特解.

(3) 分离变量, 得 $\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\sin x}$, 两端积分得

$$\ln|\ln y| = \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right| + \ln C_1,$$

即 $\ln y = C \tan \frac{x}{2}$. 代入初值条件: $x=\frac{\pi}{2}, y=e$, 得 $1 = C$, 于是

$$y = e^{\tan \frac{x}{2}}$$

为所求特解.

(4) 分离变量, 得 $\frac{e^x}{e^x + 1} dx = -\tan y dy$, 两端积分得

$$\ln(e^x + 1) = \ln|\cos y| + \ln C_1,$$

即 $e^x + 1 = C \cos y$. 代入初值条件: $x=0, y=\frac{\pi}{4}$, 有 $2 = C \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$, 得 $C = 2\sqrt{2}$, 于是

$$e^x + 1 = 2\sqrt{2}\cos y,$$

即 $(e^x + 1)\sec y = 2\sqrt{2}$ 为所求特解.

(5) 分离变量, 得 $\frac{dy}{y} = -2\frac{dx}{x}$, 两端积分得

$$\ln|y| = -2\ln|x| + \ln C_1 = \ln x^{-2} + \ln C_1,$$

即 $x^2 y = C$. 代入初值条件: $x = 2, y = 1$, 得 $C = 4$, 故所求特解为 $x^2 y = 4$.

3. 有一盛满了水的圆锥形漏斗, 高为 10 cm, 顶角为 60° , 漏斗下面有面积为 0.5 cm^2 的孔, 求水面高度变化的规律及流完所需的时间.

解 水从孔口流出的流量 Q 是单位时间内流出孔口的水的体积, 即 $Q = \frac{dV}{dt}$. 又从

力学知道, $Q = 0.62S\sqrt{2gh}$, 其中 0.62 为流量系数, S 为孔口截面积, g 为重力加速度, h 为水面到孔口的高度. 于是有

$$\frac{dV}{dt} = 0.62S\sqrt{2gh},$$

即

$$dV = 0.62S\sqrt{2gh}dt. \quad (1)$$

设在时刻 t , 水面高度为 $h = h(t)$. 从图 7-1 中可见, $x = htan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}h$, 于是在时间间隔 $[t, t+dt]$ 内漏斗流出的水的体积, 即水体积的改变量

$$dV = -\pi x^2 dh = -\frac{\pi}{3}h^2 dh. \quad (2)$$

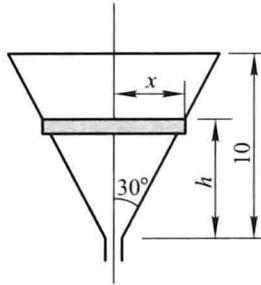


图 7-1

由(1), (2)式得微分方程

$$0.62S\sqrt{2gh}dt = -\frac{\pi}{3}h^2 dh.$$

并有初值条件 $h|_{t=0} = 10$.

由微分方程分离变量, 得

$$dt = -\frac{\pi}{3 \times 0.62S\sqrt{2g}}h^{\frac{3}{2}}dh,$$

两端积分,得

$$t = -\frac{2\pi}{15 \times 0.62S} \frac{h^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{2g}} + C.$$

代入初值条件: $t = 0, h = 10$, 得 $C = \frac{2\pi}{15 \times 0.62S} \frac{10^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{2g}}$. 于是

$$t = \frac{2\pi}{15 \times 0.62S} \frac{(10^{\frac{5}{2}} - h^{\frac{5}{2}})}{\sqrt{2g}}.$$

代入 $S = 0.5 (\text{cm}^2)$, $g = 980 (\text{cm/s}^2)$, 即得

$$t = -0.0305h^{\frac{5}{2}} + 9.64,$$

代入 $h = 0$ 得, 流完所需时间 $t \approx 10 (\text{s})$.

4. 质量为 1 g 的质点受外力作用作直线运动, 这外力和时间成正比, 和质点运动的速度成反比. 在 $t = 10 \text{ s}$ 时, 速度等于 50 cm/s , 外力为 $4 \text{ g} \cdot \text{cm/s}^2$, 问从运动开始经过了一分钟后的速度是多少?

解 设在时刻 t , 质点运动速度为 $v = v(t)$. 据题设条件, 有

$$f = mv' = k \frac{t}{v},$$

且由 $m = 1, t = 10, v = 50, f = 4$, 得 $k = \frac{f \cdot v}{t} = 20$. 故有微分方程

$$v' = 20 \frac{t}{v}.$$

分离变量得 $v dv = 20t dt$, 积分得 $v^2 = 20t^2 + C$. 代入条件: $t = 10, v = 50$, 得 $C = 500$, 于是有特解

$$v = \sqrt{20t^2 + 500}.$$

当 $t = 60 (\text{s})$ 时, $v = \sqrt{20 \times 60^2 + 500} = 269.3 (\text{cm/s})$.

5. 长的衰变有如下的规律: 长的衰变速度与它的现存量 R 成正比. 由经验材料得知, 长经过 1600 年后, 只余原始量 R_0 的一半. 试求长的存量 R 与时间 t 的函数关系.

解 设在时刻 t , 长的存量为 $R = R(t)$. 由题设条件知, $\frac{dR}{dt} = -\lambda R$, 即 $\frac{dR}{R} = -\lambda dt$. 积分得 $\ln R = -\lambda t + \ln C$, 即 $R = Ce^{-\lambda t}$.

因 $t = 0$ 时, $R = R_0$, 故 $C = R_0$, $R = R_0 e^{-\lambda t}$. 将 $t = 1600$, $R = \frac{1}{2}R_0$ 代入上式, 得

$$\frac{1}{2} = e^{-1600\lambda}, \text{ 即 } \lambda = \frac{\ln 2}{1600}, \text{ 所以 } R = R_0 e^{-\frac{\ln 2}{1600}t} = R_0 e^{-0.000433t}.$$

6. 一曲线通过点 $(2, 3)$, 它在两坐标轴间的任一切线线段均被切点所平分, 求这曲线方程.

解 设曲线方程为 $y = y(x)$, 切点为 (x, y) . 依条件, 切线在 x 轴与 y 轴上的截距分别为 $2x$ 与 $2y$, 于是切线的斜率

$$y' = \frac{2y - 0}{0 - 2x} = -\frac{y}{x}.$$

分离变量得

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

积分得 $\ln|y| = -\ln|x| + \ln C_1$, 即 $xy = C$. 代入初值条件 $x = 2, y = 3$, 得 $C = 6$, 故曲线方程为 $xy = 6$.

7. 小船从河边点 O 处出发驶向对岸(两岸为平行直线). 设船速为 a , 船行方向始终与河岸垂直, 又设河宽为 h , 河中任一点处的水流速度与该点到两岸距离的乘积成正比(比例系数为 k). 求小船的航行路线.

解 设小船的航行路线为

$$C: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

则在时刻 t , 小船的实际航行速度为 $v(t) = (x'(t), y'(t))$, 其中 $x'(t) = ky(h - y)$ 为水的流速, $y'(t) = a$ 为小船的主动速度.

由于小船航行路线的切线方向就是小船的实际速度方向(图 7-2), 故有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{a}{ky(h - y)}.$$

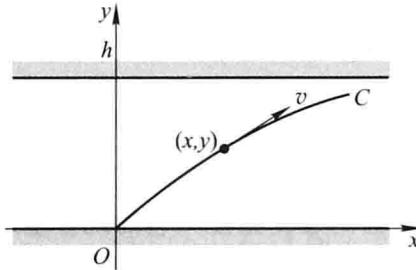


图 7-2

分离变量, 得 $dx = \frac{k}{a}y(h - y)dy$, 积分得

$$\begin{aligned} x &= \frac{k}{a} \int (hy - y^2) dy \\ &= \frac{k}{a} \left(\frac{h}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 \right) + C. \end{aligned}$$

由于小船始发于点 $(0, 0)$, 代入 $x = 0, y = 0$, 得 $C = 0$, 故小船航行的路线的方程为

$$x = \frac{k}{a} \left(\frac{h}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 \right).$$

习题 7-3

齐次方程

P 1. 求下列齐次方程的通解：

$$(1) xy' - y - \sqrt{y^2 - x^2} = 0;$$

$$(2) x \frac{dy}{dx} = y \ln \frac{y}{x};$$

$$(3) (x^2 + y^2) dx - xy dy = 0;$$

$$(4) (x^3 + y^3) dx - 3xy^2 dy = 0;$$

$$(5) \left(2x \sin \frac{y}{x} + 3y \cos \frac{y}{x}\right) dx - 3x \cos \frac{y}{x} dy = 0;$$

$$(6) (1 + 2e^{\frac{x}{y}}) dx + 2e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0.$$

解 (1) 当 $x > 0$ 时, 可将原方程写成 $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}$, 令 $u = \frac{y}{x}$, 即 $y = xu$,

有 $y' = u + xu'$, 则原方程成为 $u + xu' = u + \sqrt{u^2 - 1}$, 分离变量, 得

$$\frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \frac{dx}{x},$$

积分得

$$\ln |u + \sqrt{u^2 - 1}| = \ln |x| + \ln C_1,$$

即

$$u + \sqrt{u^2 - 1} = Cx (C = \pm C_1).$$

将 $u = \frac{y}{x}$ 代入上式并整理, 得方程在 $(0, +\infty)$ 内的通解

$$y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^2.$$

当 $x < 0$ 时, 原方程可写作 $y' = \frac{y}{x} - \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}$, 令 $u = \frac{y}{x}$, 可变形为

$$\frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = -\frac{dx}{x},$$

积分得

$$\ln |u + \sqrt{u^2 - 1}| = \ln C_1 - \ln |x|,$$

即 $u + \sqrt{u^2 - 1} = \frac{C}{x} (C = \pm C_1)$

将 $u = \frac{y}{x}$ 代入上式并整理, 得方程在 $(-\infty, 0)$ 内的通解 $y - \sqrt{y^2 - x^2} = C$.

(2) 原方程可表示成 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$, 令 $u = \frac{y}{x}$, 即 $y = xu$, 有 $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$, 则原方程成为 $u + x \frac{du}{dx} = u \ln u$, 分离变量, 得

$$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x},$$

积分得

$$\ln |\ln u - 1| = \ln |x| + \ln C_1,$$

即

$$\ln u - 1 = \pm C_1 x.$$

将 $u = \frac{y}{x}$ 代入上式, 得

$$\ln \frac{y}{x} = \pm C_1 x + 1.$$

故通解为

$$\ln \frac{y}{x} = Cx + 1.$$

(3) 原方程可表示为 $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) dx - dy = 0$. 令 $u = \frac{y}{x}$, 即 $y = xu$, 有 $dy = udx + xdu$, 则原方程成为

$$\left(\frac{1}{u} + u \right) dx - (udx + xdu) = 0,$$

即 $udu = \frac{dx}{x}$, 积分得

$$\frac{u^2}{2} = \ln |x| + C_1.$$

将 $u = \frac{y}{x}$ 代入上式并整理, 得通解

$$y^2 = x^2 (2 \ln |x| + C).$$

(4) 原方程可写成 $\frac{1}{3} \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y}{x} \right) dx - dy = 0$. 令 $u = \frac{y}{x}$, 即 $y = xu$, 有 $dy = udx + xdu$, 则原方程成为 $\frac{1}{3} \left(\frac{1}{u^2} + u \right) dx - (udx + xdu) = 0$. 分离变量, 得

$$\frac{3u^2}{1 - 2u^3} du = \frac{1}{x} dx,$$

积分得

$$-\frac{1}{2} \ln |1 - 2u^3| = \ln |x| + \ln C_1,$$

即

$$1 - 2u^3 = \pm \frac{1}{C_1^2 x^2}.$$

将 $u = \frac{y}{x}$ 代入上式并整理, 得通解

$$x^3 - 2y^3 = Cx.$$

(5) 原方程可写成 $\frac{2}{3} \tan \frac{y}{x} + \frac{y}{x} - \frac{dy}{dx} = 0$. 令 $u = \frac{y}{x}$, 即 $y = xu$, 有 $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$,

则原方程成为 $\frac{2}{3} \tan u + u - \left(u + x \frac{du}{dx} \right) = 0$. 分离变量, 得

$$\frac{3}{2} \frac{du}{\tan u} = \frac{dx}{x},$$

积分得

$$\frac{3}{2} \ln |\sin u| = \ln |x| + \ln C_1,$$

即

$$\sin^3 u = \pm C_1 x^2.$$

将 $u = \frac{y}{x}$ 代入上式, 得通解 $\sin^3 \frac{y}{x} = Cx^2$.

(6) 原方程可写成 $\frac{dx}{dy} \left(1 + 2e^{\frac{x}{y}} \right) + 2e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y} \right) = 0$. 令 $u = \frac{x}{y}$, 即 $x = yu$, 有 $\frac{dx}{dy} = u + y \frac{du}{dy}$, 则原方程成为

$$\left(u + y \frac{du}{dy} \right) \left(1 + 2e^u \right) + 2e^u \left(1 - u \right) = 0,$$

整理并分离变量, 得

$$\frac{1 + 2e^u}{u + 2e^u} du + \frac{dy}{y} = 0,$$

即

$$\frac{d(u + 2e^u)}{u + 2e^u} + \frac{dy}{y} = 0.$$

积分得

$$\ln |u + 2e^u| + \ln |y| = \ln C_1,$$

即

$$y(u + 2e^u) = \pm C_1.$$

将 $u = \frac{x}{y}$ 代入上式, 得通解

$$x + 2ye^{\frac{x}{y}} = C.$$

2. 求下列齐次方程满足所给初值条件的特解:

$$(1) (y^2 - 3x^2) dy + 2xy dx = 0, y|_{x=0} = 1;$$

$$(2) y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, y|_{x=1} = 2;$$

$$(3) (x^2 + 2xy - y^2) dx + (y^2 + 2xy - x^2) dy = 0, y|_{x=1} = 1.$$

解 (1) 原方程可写成 $1 - 3 \frac{x^2}{y^2} + 2 \frac{x}{y} \frac{dx}{dy} = 0$. 令 $u = \frac{x}{y}$, 即 $x = yu$, 有 $\frac{dx}{dy} = u + y \frac{du}{dy}$, 则原方程成为

$$1 - 3u^2 + 2u \left(u + y \frac{du}{dy} \right) = 0,$$

分离变量, 得

$$\frac{2u}{u^2 - 1} du = \frac{dy}{y}.$$

积分得

$$\ln |u^2 - 1| = \ln |y| + \ln C_1,$$

即

$$u^2 - 1 = Cy.$$

代入 $u = \frac{x}{y}$ 并整理, 得通解 $x^2 - y^2 = Cy^3$. 由初值条件 $x = 0, y = 1$, 得 $C = -1$. 于是所

求特解为

$$y^3 = y^2 - x^2.$$

(2) 令 $u = \frac{y}{x}$, 有 $y' = u + xu'$, 则原方程成为 $u + xu' = \frac{1}{u} + u$. 分离变量, 得

$udu = \frac{dx}{x}$. 积分得

$$\frac{1}{2}u^2 = \ln |x| + C,$$

将 $u = \frac{y}{x}$ 代入上式并整理, 得通解

$$y^2 = 2x^2(\ln |x| + C).$$

代入初值条件 $x = 1, y = 2$, 解得 $C = 2$. 于是所求特解为

$$y^2 = 2x^2(\ln x + 2).$$

(3) 将原方程写成

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1 + 2\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x} - 1} = 0,$$

令 $u = \frac{y}{x}$, 有 $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$, 则原方程成为

$$u + x \frac{du}{dx} + \frac{1+2u-u^2}{u^2+2u-1} = 0,$$

整理并分离变量,得

$$\frac{1-2u-u^2}{u^3+u^2+u+1} du = \frac{dx}{x}.$$

积分得

$$\begin{aligned} \int \frac{1-2u-u^2}{u^3+u^2+u+1} du &= \int \frac{1-2u-u^2}{(u+1)(u^2+1)} du = \int \left(\frac{1}{u+1} - \frac{2u}{u^2+1} \right) du \\ &= \ln \left| \frac{u+1}{u^2+1} \right| = \ln |x| + \ln C, \end{aligned}$$

故

$$\frac{u+1}{u^2+1} = Cx.$$

代入 $u = \frac{y}{x}$ 并整理,得通解 $\frac{y+x}{y^2+x^2} = C$. 以初值条件 $x=1, y=1$ 定出 $C=1$. 故所求特

解为

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} = 1.$$

3. 设有连结点 $O(0,0)$ 和 $A(1,1)$ 的一段向上凸的曲线弧 \widehat{OA} , 对于 \widehat{OA} 上任一点 $P(x,y)$, 曲线弧 \widehat{OP} 与直线段 \overline{OP} 所围图形的面积为 x^2 , 求曲线弧 \widehat{OA} 的方程.

解 设曲线弧的方程为 $y=y(x)$. 依题意, 有

$$\int_0^x y(x) dx - \frac{1}{2}xy(x) = x^2.$$

上式两端对 x 求导,

$$y(x) - \frac{1}{2}y(x) - \frac{1}{2}xy'(x) = 2x,$$

即得微分方程

$$y' = \frac{y}{x} - 4.$$

令 $u = \frac{y}{x}$, 有 $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$, 则微分方程成为

$$\frac{du}{dx} = -\frac{4}{x}.$$

积分得

$$u = -4 \ln x + C,$$

因 $u = \frac{y}{x}$, 故有

$$y = x(-4 \ln x + C).$$

又因曲线过点 $A(1,1)$, 故 $1 = C$. 于是得曲线弧的方程

$$y = x(1 - 4 \ln x).$$

2. *4. 化下列方程为齐次方程, 并求出通解:

$$(1) (2x - 5y + 3)dx - (2x + 4y - 6)dy = 0;$$

$$(2) (x - y - 1)dx + (4y + x - 1)dy = 0;$$

$$(3) (3y - 7x + 7)dx + (7y - 3x + 3)dy = 0;$$

$$(4) (x + y)dx + (3x + 3y - 4)dy = 0.$$

解 (1) 令 $x = X + h, y = Y + k$, 则 $dx = dX, dy = dY$, 且原方程成为

$$(2X - 5Y + 2h - 5k + 3)dX - (2X + 4Y + 2h + 4k - 6)dY = 0.$$

令

$$\begin{cases} 2h - 5k + 3 = 0, \\ 2h + 4k - 6 = 0, \end{cases}$$

解此方程组得 $h = 1, k = 1$. 故在变换 $x = X + 1, y = Y + 1$ 下原方程化为 $(2X - 5Y)dX - (2X + 4Y)dY = 0$, 即

$$\frac{dY}{dX} = \frac{2X - 5Y}{2X + 4Y} = \frac{2 - 5\frac{Y}{X}}{2 + 4\frac{Y}{X}}.$$

又令 $u = \frac{Y}{X}$, 有 $\frac{dY}{dX} = u + X \frac{du}{dX}$, 则原方程成为

$$u + X \frac{du}{dX} = \frac{2 - 5u}{2 + 4u},$$

即

$$\frac{4u + 2}{4u^2 + 7u - 2} du = -\frac{1}{X} dX.$$

积分

$$\begin{aligned} \int \frac{4u + 2}{4u^2 + 7u - 2} du &= \int \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{u + 2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4u - 1} \right) du \\ &= \frac{2}{3} \ln |u + 2| + \frac{1}{3} \ln |4u - 1| \\ &= \frac{1}{3} \ln |(u + 2)^2(4u - 1)| \\ &= -\ln |X| + \ln C_1. \end{aligned}$$

得

$$\ln |(u + 2)^2(4u - 1)| = -\ln |X^3| + \ln C_2 (C_2 = C_1^3),$$

即

$$(u+2)^2(4u-1)X^3 = \pm C_2,$$

因 $u = \frac{Y}{X}$, 故上式成为

$$(2X+Y)^2(4Y-X) = \pm C_2.$$

代入 $X = x - 1$, $Y = y - 1$, 得原方程的通解

$$(2x+y-3)^2(4y-x-3) = C.$$

(2) 将原方程写成

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x+y+1}{4y+x-1} = \frac{y-(x-1)}{4y+(x-1)},$$

令 $X = x - 1$, $Y = y$, 则 $dy = dY$, $dx = dX$, 且原方程化为

$$\frac{dY}{dX} = \frac{Y-X}{4Y+X} = \frac{Y/X-1}{4Y/X+1}.$$

又令 $u = \frac{Y}{X}$, 有 $\frac{dY}{dX} = u + X \frac{du}{dX}$, 则原方程成为

$$\frac{4u+1}{4u^2+1} du + \frac{1}{X} dX = 0.$$

积分

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{4u}{4u^2+1} + \frac{1}{4u^2+1} \right) du + \int \frac{dX}{X} \\ &= \frac{1}{2} \ln(4u^2+1) + \frac{1}{2} \arctan(2u) + \ln|X| = C_1, \end{aligned}$$

即 $\ln[X^2(4u^2+1)] + \arctan(2u) = C$ ($C = 2C_1$). 将 $u = \frac{Y}{X} = \frac{y}{x-1}$ 代入上式, 得原方程的通解

$$\ln[4y^2 + (x-1)^2] + \arctan \frac{2y}{x-1} = C.$$

(3) 令 $x = X + h$, $y = Y + k$, 则 $dx = dX$, $dy = dY$, 且原方程成为

$$(3Y - 7X + 3k - 7h + 7)dX + (7Y - 3X + 7k - 3h + 3)dY = 0.$$

令

$$\begin{cases} 3k - 7h + 7 = 0, \\ 7k - 3h + 3 = 0, \end{cases}$$

解此方程组, 得 $h = 1$, $k = 0$. 故在变换 $x = X + 1$, $y = Y$ 下, 原方程化为 $(3Y - 7X)dX + (7Y - 3X)dY = 0$, 即

$$\frac{dY}{dX} = \frac{7X-3Y}{7Y-3X} = \frac{7-3Y/X}{7Y/X-3}$$

又令 $u = \frac{Y}{X}$, 有 $\frac{dY}{dX} = u + X \frac{du}{dX}$, 则原方程成为

$$u + X \frac{du}{dX} = \frac{7 - 3u}{7u - 3},$$

即

$$\frac{7u - 3}{u^2 - 1} du = -7 \frac{dX}{X},$$

积分

$$\int \left(\frac{2}{u - 1} + \frac{5}{u + 1} \right) du = -7 \int \frac{dX}{X}$$

得

$$2\ln|u - 1| + 5\ln|u + 1| = -7\ln|X| + \ln C_1.$$

即 $X^7(u - 1)^2(u + 1)^5 = \pm C_1$. 将 $u = \frac{Y}{X} = \frac{y}{x - 1}$ 代入上式, 得原方程的通解

$$(y - x + 1)^2(y + x - 1)^5 = C.$$

(4) 将原方程写成 $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{4 - 3(x + y)}$ (该方程属于 $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$ 类型, 解此类方程, 一般可令 $u = ax + by + c$). 令 $u = x + y$, 则 $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$, 且原方程成为

$$\frac{du}{dx} - 1 = \frac{u}{4 - 3u},$$

即

$$\frac{3u - 4}{u - 2} du = 2 dx.$$

积分得 $3u + 2\ln|u - 2| = 2x + C$. 将 $u = x + y$ 代入上式, 得原方程的通解

$$x + 3y + 2\ln|x + y - 2| = C.$$

习题 7-4

一阶线性微分方程

 1. 求下列微分方程的通解:

$$(1) \frac{dy}{dx} + y = e^{-x};$$

$$(2) xy' + y = x^2 + 3x + 2;$$

$$(3) y' + y \cos x = e^{-\sin x};$$

$$(4) y' + y \tan x = \sin 2x;$$

$$(5) (x^2 - 1)y' + 2xy - \cos x = 0;$$

$$(6) \frac{d\rho}{d\theta} + 3\rho = 2;$$

$$(7) \frac{dy}{dx} + 2xy = 4x;$$

$$(8) y \ln y dx + (x - \ln y) dy = 0;$$

$$(9) (x - 2)\frac{dy}{dx} = y + 2(x - 2)^3;$$

$$(10) (y^2 - 6x)\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

$$\text{解} \quad (1) \quad y = e^{-\int dx} \left[\int e^{-x} \cdot e^{\int dx} dx + C \right] = e^{-x} \left(\int e^{-x} \cdot e^x dx + C \right) \\ = e^{-x} (x + C).$$

(2) 将方程改写成 $y' + \frac{1}{x}y = x + 3 + \frac{2}{x}$, 则

$$y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left[\int \left(x + 3 + \frac{2}{x} \right) e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right] = \frac{1}{x} \left[\int \left(x + 3 + \frac{2}{x} \right) x dx + C \right] \\ = \frac{1}{x} \left[\int (x^2 + 3x + 2) dx + C \right] = \frac{1}{x} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 2x + C \right) \\ = \frac{x^2}{3} + \frac{3x}{2} + 2 + \frac{C}{x}.$$

$$(3) \quad y = e^{-\int \cos x dx} \left(\int e^{-\sin x} \cdot e^{\int \cos x dx} dx + C \right) = e^{-\sin x} \left(\int e^{-\sin x} \cdot e^{\sin x} dx + C \right) \\ = e^{-\sin x} (x + C).$$

$$(4) \quad y = e^{-\int \tan x dx} \left(\int \sin 2x e^{\int \tan x dx} dx + C \right) \\ = \cos x \left(\int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx + C \right) = \cos x \left(\int 2 \sin x dx + C \right) \\ = C \cos x - 2 \cos^2 x.$$

(5) 将原方程写成 $y' + \frac{2x}{x^2 - 1}y = \frac{\cos x}{x^2 - 1}$, 则

$$y = e^{-\int \frac{2x}{x^2 - 1} dx} \left(\int \frac{\cos x}{x^2 - 1} e^{\int \frac{2x}{x^2 - 1} dx} dx + C \right) \\ = \frac{1}{x^2 - 1} \left[\int \frac{\cos x}{x^2 - 1} (x^2 - 1) dx + C \right] = \frac{1}{x^2 - 1} \left(\int \cos x dx + C \right) \\ = \frac{\sin x + C}{x^2 - 1}.$$

$$(6) \quad \rho = e^{-\int 3d\theta} \left(\int 2e^{\int 3d\theta} d\theta + C \right) = e^{-3\theta} \left(\int 2e^{3\theta} d\theta + C \right) \\ = e^{-3\theta} \left(\frac{2}{3}e^{3\theta} + C \right) = \frac{2}{3} + Ce^{-3\theta}.$$

$$(7) \quad y = e^{-\int 2xdx} \left(\int 4xe^{\int 2xdx} dx + C \right) = e^{-x^2} \left(\int 4xe^{x^2} dx + C \right) \\ = e^{-x^2} (2e^{x^2} + C) = 2 + Ce^{-x^2}.$$

(8) 将原方程写成 $\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y \ln y}x = \frac{1}{y}$, 则

$$x = e^{-\int \frac{dy}{y \ln y}} \left(\int \frac{1}{y} e^{\int \frac{dy}{y \ln y}} dy + C_1 \right) = e^{-\ln |\ln y|} \left[\int \frac{1}{y} e^{\ln |\ln y|} dy + C_1 \right] \\ = \frac{1}{\ln y} \left(\int \frac{\ln y}{y} dy + C_1 \right) = \frac{1}{\ln y} \left(\frac{1}{2} \ln^2 y + C_1 \right),$$

即 $2x \ln y = \ln^2 y + C$ ($C = 2C_1$).

(9) 将原方程写成 $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x-2}y = 2(x-2)^2$, 则

$$\begin{aligned} y &= e^{\int \frac{1}{x-2} dx} \left[\int 2(x-2)^2 \cdot e^{-\int \frac{1}{x-2} dx} dx + C \right] \\ &= (x-2) \left[\int 2(x-2)^2 \cdot \frac{1}{x-2} dx + C \right] \\ &= (x-2) \left[\int 2(x-2) dx + C \right] \\ &= (x-2)[(x-2)^2 + C] = (x-2)^3 + C(x-2). \end{aligned}$$

(10) 将原方程改写成 $\frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x = -\frac{y}{2}$, 则

$$\begin{aligned} x &= e^{\int \frac{3}{y} dy} \left(\int -\frac{y}{2} e^{-\int \frac{3}{y} dy} dy + C \right) \\ &= y^3 \left(\int -\frac{y}{2} \cdot \frac{1}{y^3} dy + C \right) = y^3 \left(\int -\frac{1}{2y^2} dy + C \right) \\ &= y^3 \left(\frac{1}{2y} + C \right) = \frac{y^2}{2} + Cy^3. \end{aligned}$$

2. 求下列微分方程满足所给初值条件的特解:

$$(1) \frac{dy}{dx} - y \tan x = \sec x, y|_{x=0} = 0; \quad (2) \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}, y|_{x=\pi} = 1;$$

$$(3) \frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x}, y|_{x=\frac{\pi}{2}} = -4; \quad (4) \frac{dy}{dx} + 3y = 8, y|_{x=0} = 2;$$

$$(5) \frac{dy}{dx} + \frac{2-3x^2}{x^3}y = 1, y|_{x=1} = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) \quad y &= e^{\int \tan x dx} \left(\int \sec x e^{-\int \tan x dx} dx + C \right) \\ &= e^{-\ln |\cos x|} \left(\int \sec x e^{\ln |\cos x|} dx + C \right) = \frac{1}{\cos x} \left(\int \sec x \cdot \cos x dx + C \right) \\ &= \frac{x+C}{\cos x}, \end{aligned}$$

代入初值条件 $x=0, y=0$, 得 $C=0$. 故所求特解为

$$y = \frac{x}{\cos x}.$$

$$\begin{aligned} (2) \quad y &= e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(\int \frac{\sin x}{x} e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right) = \frac{1}{x} \left(\int \frac{\sin x}{x} \cdot x dx + C \right) \\ &= \frac{1}{x} (-\cos x + C), \end{aligned}$$

代入初值条件 $x=\pi, y=1$, 得 $C=\pi-1$, 故所求特解为

$$y = \frac{1}{x}(\pi - 1 - \cos x).$$

$$(3) y = e^{-\int \cot x dx} \left(\int 5e^{\cos x} e^{\int \cot x dx} dx + C \right)$$

$$= \frac{1}{\sin x} \left(\int 5e^{\cos x} \cdot \sin x dx + C \right) = \frac{1}{\sin x} (-5e^{\cos x} + C),$$

代入初值条件 $x = \frac{\pi}{2}, y = -4$, 得 $C = 1$, 故所求特解为 $y = \frac{1 - 5e^{\cos x}}{\sin x}$, 即

$$y \sin x + 5e^{\cos x} = 1.$$

$$(4) y = e^{-\int 3 dx} \left(\int 8e^{\int 3 dx} dx + C \right) = e^{-3x} \left(\int 8e^{3x} dx + C \right)$$

$$= e^{-3x} \left(\frac{8}{3}e^{3x} + C \right) = \frac{8}{3} + Ce^{-3x},$$

代入初值条件 $x = 0, y = 2$, 得 $C = -\frac{2}{3}$, 故所求特解为

$$y = \frac{2}{3}(4 - e^{-3x}).$$

$$(5) y = e^{-\int (\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x}) dx} \left[\int e^{\int (\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x}) dx} dx + C \right]$$

$$= e^{\frac{1}{x^2} + 3 \ln x} \left(\int e^{-\left(\frac{1}{x^2} + 3 \ln x\right)} dx + C \right)$$

$$= x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \left(\int \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} dx + C \right) = x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \left[\frac{1}{2} \int e^{-\frac{1}{x^2}} d\left(-\frac{1}{x^2}\right) + C \right]$$

$$= x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{x^2}} + C \right) = \frac{x^3}{2} + C x^3 e^{\frac{1}{x^2}},$$

代入初值条件 $x = 1, y = 0$, 得 $C = -\frac{1}{2e}$, 故所求特解为

$$y = \frac{x^3}{2}(1 - e^{\frac{1}{x^2} - 1}).$$

3. 求一曲线的方程, 这曲线通过原点, 并且它在点 (x, y) 处的切线斜率等于 $2x + y$.

解 设曲线方程为 $y = y(x)$, 依题意有 $y' = 2x + y$, 即

$$y' - y = 2x, y|_{x=0} = 0.$$

$$y = e^{\int dx} \left(\int 2xe^{-\int dx} dx + C \right) = e^x \left(\int 2xe^{-x} dx + C \right)$$

$$= e^x (-2xe^{-x} - 2e^{-x} + C) = -2x - 2 + Ce^x.$$

由 $x = 0, y = 0$, 得 $C = 2$. 故所求曲线的方程为

$$y = 2(e^x - x - 1).$$

4. 设有一质量为 m 的质点作直线运动, 从速度等于零的时刻起, 有一个与运动方向一致、大小与时间成正比(比例系数为 k_1) 的力作用于它, 此外还受一与速度成正比

(比例系数为 k_2) 的阻力作用. 求质点运动的速度与时间的函数关系.

解 依题意, 有 $ma = k_1 t - k_2 v$, $a = \frac{dv}{dt}$, 即

$$m \frac{dv}{dt} = k_1 t - k_2 v, v|_{t=0} = 0.$$

将方程改写成 $\frac{dv}{dt} + \frac{k_2}{m}v = \frac{k_1}{m}t$, 则

$$\begin{aligned} v &= e^{-\int \frac{k_2}{m} dt} \left(\int \frac{k_1}{m} t \cdot e^{\int \frac{k_2}{m} dt} dt + C \right) \\ &= e^{-\frac{k_2}{m} t} \left(\frac{k_1}{m} \int t e^{\frac{k_2}{m} t} dt + C \right) = e^{-\frac{k_2}{m} t} \left(\frac{k_1}{k_2} t e^{\frac{k_2}{m} t} - \frac{k_1}{k_2} \int e^{\frac{k_2}{m} t} dt + C \right) \\ &= e^{-\frac{k_2}{m} t} \left(\frac{k_1}{k_2} t e^{\frac{k_2}{m} t} - \frac{k_1 m}{k_2^2} e^{\frac{k_2}{m} t} + C \right) \\ &= \frac{k_1}{k_2} t - \frac{k_1 m}{k_2^2} + C e^{-\frac{k_2}{m} t}. \end{aligned}$$

由 $t = 0, v = 0$, 得 $C = \frac{k_1 m}{k_2^2}$, 故速度与时间的关系为

$$v = \frac{k_1}{k_2} t - \frac{k_1 m}{k_2^2} (1 - e^{-\frac{k_2}{m} t}).$$

5. 设有一个由电阻 $R = 10 \Omega$ 、电感 $L = 2 \text{ H}$ (亨) 和电源电压 $E = 20 \sin 5t \text{ V}$ (伏) 串联组成的电路. 开关 K 合上后, 电路中有电流通过. 求电流 i 与时间 t 的函数关系.

解 依题意, 有 $20 \sin 5t = 10i + 2 \frac{di}{dt}$, 即

$$\frac{di}{dt} + 5i = 10 \sin 5t, i|_{t=0} = 0.$$

$$i = e^{-\int 5 dt} \left(\int 10 \sin 5t e^{\int 5 dt} dt + C_1 \right) = e^{-5t} \left(\int 10 \sin 5t e^{5t} dt + C_1 \right),$$

其中, 记 $I = \int 10 \sin 5t e^{5t} dt$, 则

$$\begin{aligned} I &= 2 \int \sin 5t d(e^{5t}) = 2 \sin 5t e^{5t} - 2 \int e^{5t} \cos 5t \cdot 5 dt \\ &= 2 \sin 5t e^{5t} - 2 \int \cos 5t d(e^{5t}) \\ &= 2 \sin 5t e^{5t} - 2 \cos 5t e^{5t} - 10 \int \sin 5t e^{5t} dt \\ &= 2e^{5t} (\sin 5t - \cos 5t) - I, \end{aligned}$$

故 $I = e^{5t} (\sin 5t - \cos 5t) + C_2$, 于是

$$i = e^{-5t} \cdot [e^{5t} (\sin 5t - \cos 5t) + C_1] \quad (C = C_1 + C_2)$$

$$= \sin 5t - \cos 5t + Ce^{-5t}.$$

代入初值条件 $t = 0, i = 0$, 得 $C = 1$, 故电流 i 与时间 t 的函数关系为

$$i = e^{-5t} + \sin 5t - \cos 5t,$$

按电学的习惯, 可写成

$$i = e^{-5t} + \sqrt{2} \sin\left(5t - \frac{\pi}{4}\right).$$

例 6. 验证形如 $yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0$ 的微分方程, 可经变量代换 $v = xy$ 化为可分离变量的方程, 并求其通解.

解 由 $v = xy$, 即 $y = \frac{v}{x}$, 得 $dy = \frac{x dv - v dx}{x^2}$. 又原方程改写成 $xyf(xy)dx + x^2g(xy)dy = 0$, 并将 $v = xy$, $dy = \frac{x dv - v dx}{x^2}$ 代入上式, 得

$$vf(v)dx + g(v)(xdv - vdx) = 0,$$

可分离变量, 得

$$\frac{g(v)dv}{v[f(v) - g(v)]} + \frac{dx}{x} = 0.$$

积分得

$$\int \frac{g(v)dv}{v[f(v) - g(v)]} + \ln|x| = C,$$

代入 $v = xy$ 后, 便是原方程的通解.

例 7. 用适当的变量代换将下列方程化为可分离变量的方程, 然后求出通解:

$$(1) \frac{dy}{dx} = (x+y)^2; \quad (2) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-y} + 1;$$

$$(3) xy' + y = y(\ln x + \ln y);$$

$$(4) y' = y^2 + 2(\sin x - 1)y + \sin^2 x - 2\sin x - \cos x + 1;$$

$$(5) y(xy+1)dx + x(1+xy+x^2y^2)dy = 0.$$

解 (1) 令 $u = x + y$, 则 $\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$, 且原方程变为 $\frac{du}{dx} = u^2 + 1$, 分离变量, 得

$$\frac{du}{1+u^2} = dx.$$

积分得 $\arctan u = x + C$, 即 $u = \tan(x + C)$, 代入 $u = x + y$, 得原方程的通解

$$y = -x + \tan(x + C).$$

(2) 令 $u = x - y$, 则 $\frac{du}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}$, 且原方程变为 $\frac{du}{dx} = -\frac{1}{u}$, 即

$$udu + dx = 0$$

积分得

$$\frac{u^2}{2} + x = C_1,$$

代入 $u = x - y$, 得原方程的通解 $(x - y)^2 + 2x = C$ ($C = 2C_1$).

(3) 令 $u = xy$, 则 $u' = y + xy'$, 且原方程变为 $u' = \frac{u}{x} \ln u$, 即

$$\frac{du}{u \ln u} = \frac{dx}{x}.$$

积分得 $\ln |\ln u| = \ln |x| + \ln C_1$, 即 $u = e^{Cx}$. 代入 $u = xy$, 得原方程的通解 $xy = e^{Cx}$, 即 $y = \frac{e^{Cx}}{x}$.

(4) 将原方程写成 $y' = (y + \sin x - 1)^2 - \cos x$, 令 $u = y + \sin x - 1$, 则 $u' = y' + \cos x$, 且原方程变为 $u' = u^2$, 即 $\frac{du}{u^2} = dx$.

积分得 $-\frac{1}{u} = x + C$, 即 $u = -\frac{1}{x + C}$. 代入 $u = y + \sin x - 1$, 得原方程的通解

$$y = 1 - \sin x - \frac{1}{x + C}.$$

(5) 原方程改写成 $xy(xy + 1) + x^2(1 + xy + x^2y^2) \frac{dy}{dx} = 0$. 令 $u = xy$, 即 $y = \frac{u}{x}$, 则 $\frac{dy}{dx} = \frac{x \frac{du}{dx} - u}{x^2}$, 且原方程变为

$$u(u + 1) + (1 + u + u^2) \left(x \frac{du}{dx} - u \right) = 0,$$

整理并分离变量, 得 $\frac{1 + u + u^2}{u^3} du = \frac{dx}{x}$. 积分得 $-\frac{1}{2u^2} - \frac{1}{u} + \ln |u| = \ln |x| + C_1$, 代入 $u = xy$, 并整理, 得原方程的通解为

$$2x^2y^2 \ln |y| - 2xy - 1 = Cx^2y^2 (C = 2C_1).$$

*8. 求下列伯努利方程的通解:

$$(1) \frac{dy}{dx} + y = y^2 (\cos x - \sin x);$$

$$(2) \frac{dy}{dx} - 3xy = xy^2;$$

$$(3) \frac{dy}{dx} + \frac{1}{3}y = \frac{1}{3}(1 - 2x)y^4;$$

$$(4) \frac{dy}{dx} - y = xy^5;$$

$$(5) xdy - [y + xy^3(1 + \ln x)] dx = 0.$$

解 (1) 将原方程改写成 $\frac{1}{y^2}y' + \frac{1}{y} = \cos x - \sin x$, 并令 $z = \frac{1}{y}$, 则 $z' = -\frac{1}{y^2}y'$, 且

原方程化为

$$z' - z = \sin x - \cos x.$$

$$z = e^{\int dx} \left[\int (\sin x - \cos x) e^{-\int dx} dx + C \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= e^x \left[\int (\sin x - \cos x) e^{-x} dx + C \right] \\
 &= e^x \left(\int \sin x e^{-x} dx - \int \cos x e^{-x} dx + C \right),
 \end{aligned}$$

其中 $\int \sin x e^{-x} dx = - \int \sin x d(e^{-x}) = -\sin x e^{-x} + \int e^{-x} \cos x dx$, 故

$$z = e^x (-\sin x e^{-x} + C) = Ce^x - \sin x,$$

即 $\frac{1}{y} = Ce^x - \sin x$ 为所求通解.

(2) 将原方程改写成 $y^{-2}y' - 3xy^{-1} = x$, 并令 $z = y^{-1}$, 则 $z' = -y^{-2}y'$, 且原方程化为

$$\begin{aligned}
 z' + 3xz &= -x, \\
 z &= e^{-\int 3x dx} \left(\int -xe^{\int 3x dx} dx + C \right) = e^{-\frac{3}{2}x^2} \left(\int -xe^{\frac{3}{2}x^2} dx + C \right) \\
 &= e^{-\frac{3}{2}x^2} \left(-\frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}x^2} + C \right) = -\frac{1}{3} + Ce^{-\frac{3}{2}x^2},
 \end{aligned}$$

故原方程的通解为

$$y^{-1} = -\frac{1}{3} + Ce^{-\frac{3}{2}x^2},$$

或写成

$$\frac{3}{2}x^2 + \ln \left(1 + \frac{3}{y} \right) = C_1 \quad (C_1 = \ln 3C).$$

(3) 将原方程改写成 $y^{-4}y' + \frac{1}{3}y^{-3} = \frac{1}{3}(1 - 2x)$, 并令 $z = y^{-3}$, 则 $z' = -3y^{-4}y'$, 于是原方程化为

$$z' - z = 1 - 2x.$$

$$\begin{aligned}
 z &= e^{\int dx} \left[\int (1 - 2x) e^{-\int dx} dx + C \right] = e^x \left[\int (1 - 2x) e^{-x} dx + C \right] \\
 &= e^x [(-2x - 1)e^{-x} + C] = -2x - 1 + Ce^x,
 \end{aligned}$$

即 $y^{-3} = -2x - 1 + Ce^x$ 为所求通解.

(4) 将原方程改写成 $y^{-5}y' - y^{-4} = x$, 并令 $z = y^{-4}$, 则 $z' = -4y^{-5}y'$, 且原方程化为

$$\begin{aligned}
 z' + 4z &= -4x, \\
 z &= e^{-\int 4dx} \left(\int -4xe^{\int 4dx} dx + C \right) = e^{-4x} \left(\int -4xe^{4x} dx + C \right) \\
 &= e^{-4x} \left(-xe^{4x} + \frac{1}{4}e^{4x} + C \right) = -x + \frac{1}{4} + Ce^{-4x}.
 \end{aligned}$$

故原方程的通解为

$$y^{-4} = -x + \frac{1}{4} + Ce^{-4x}.$$

(5) 原方程可写成 $y' - \frac{1}{x}y = (1 + \ln x)y^3$, 即 $y^{-3}y' - \frac{1}{x}y^{-2} = 1 + \ln x$, 令 $z = y^{-2}$, 则 $z' = -2y^{-3}y'$, 且原方程化为

$$\begin{aligned} z' + \frac{2}{x}z &= -2(1 + \ln x), \\ z &= e^{-\int \frac{2}{x}dx} \left[\int -2(1 + \ln x)e^{\int \frac{2}{x}dx} dx + C \right] \\ &= x^{-2} \left[\int -2(1 + \ln x)x^2 dx + C \right] \\ &= x^{-2} \left[-\frac{2}{3}x^3(1 + \ln x) + \frac{2}{3} \int x^3 \cdot \frac{1}{x} dx + C \right] \\ &= x^{-2} \left[-\frac{2}{3}x^3(1 + \ln x) + \frac{2}{9}x^3 + C \right] \\ &= -\frac{2}{3}x(1 + \ln x) + \frac{2}{9}x + Cx^{-2}. \end{aligned}$$

故原方程通解为

$$y^{-2} = -\frac{2}{3}x(1 + \ln x) + \frac{2}{9}x + Cx^{-2},$$

或写成

$$\frac{x^2}{y^2} = -\frac{4}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^3 \ln x + C.$$

习题 7-5

可降阶的高阶微分方程

1. 求下列各微分方程的通解:

$$(1) y'' = x + \sin x;$$

$$(2) y''' = xe^x;$$

$$(3) y'' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(4) y'' = 1 + y'^2;$$

$$(5) y'' = y' + x;$$

$$(6) xy'' + y' = 0;$$

$$(7) yy'' + 2y'^2 = 0;$$

$$(8) y^3y'' - 1 = 0;$$

$$(9) y'' = \frac{1}{\sqrt{y}};$$

$$(10) y'' = (y')^3 + y'.$$

解 (1) $y' = \int (x + \sin x) dx = \frac{x^2}{2} - \cos x + C_1$,

$$y = \int \left(\frac{x^2}{2} - \cos x + C_1 \right) dx = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2.$$

$$(2) y'' = \int xe^x dx = xe^x - e^x + C'_1 = (x - 1)e^x + C'_1,$$

$$\begin{aligned}y' &= \int [(x-1)e^x + C'_1] dx = (x-1)e^x - \int e^x dx + C'_1 x + C_2 \\&= (x-2)e^x + C'_1 x + C_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= \int [(x-2)e^x + C'_1 x + C_2] dx = (x-2)e^x - \int e^x dx + \frac{C'_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3 \\&= (x-3)e^x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3.\end{aligned}$$

$$(3) \quad y' = \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C_1,$$

$$\begin{aligned}y &= \int (\arctan x + C_1) dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx + C_1 x \\&= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C_1 x + C_2.\end{aligned}$$

(4) 令 $y' = p$, 则 $y'' = p'$, 且原方程化为 $p' = 1 + p^2$. 分离变量, 得

$$\frac{dp}{1+p^2} = dx.$$

积分得 $\arctan p = x + C_1$, 即 $p = y' = \tan(x + C_1)$, 再积分得通解

$$y = \int \tan(x + C_1) dx = -\ln |\cos(x + C_1)| + C_2.$$

(5) 令 $y' = p$, 则 $y'' = p'$, 且原方程可化为

$$p' - p = x.$$

利用一阶线性方程的求解公式, 得

$$\begin{aligned}p &= e^{\int dx} \left(\int x e^{-\int dx} dx + C_1 \right) = e^x \left(\int x e^{-x} dx + C_1 \right) \\&= e^x (-x e^{-x} - e^{-x} + C_1) = -x - 1 + C_1 e^x.\end{aligned}$$

积分得通解

$$y = \int (C_1 e^x - x - 1) dx = C_1 e^x - \frac{x^2}{2} - x + C_2.$$

(6) 令 $y' = p$, 则 $y'' = p'$, 且原方程化为 $x p' + p = 0$, 分离变量, 得

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dx}{x},$$

积分得 $\ln |p| = \ln \left| \frac{1}{x} \right| + \ln C_1$, 即 $p = \frac{C_1}{x}$. 再积分, 得通解

$$y = \int \frac{C_1}{x} dx = C_1 \ln |x| + C_2.$$

(7) 令 $y' = p$, 则 $y'' = p' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p$, 且原方程化为 $yp \frac{dp}{dy} + 2p^2 = 0$. 分离变

量, 得

$$\frac{dp}{p} = -2 \frac{dy}{y},$$

积分得 $\ln|p| = \ln \frac{1}{y^2} + \ln C_0$, 即 $y' = p = \frac{C_0}{y^2}$, 分离变量, 得 $y^2 dy = C_0 dx$, 积分得 $y^3 = 3C_0x + C_2$, 即通解为 $y^3 = C_1x + C_2$.

(8) 令 $y' = p$, 则 $y'' = p \frac{dp}{dy}$, 且原方程化为 $y^3 p \frac{dp}{dy} - 1 = 0$. 分离变量, 得

$$p dp = \frac{1}{y^3} dy,$$

积分得 $p^2 = -\frac{1}{y^2} + C_1$, 故

$$y' = p = \pm \sqrt{C_1 - \frac{1}{y^2}} = \pm \frac{1}{|y|} \sqrt{C_1 y^2 - 1}.$$

分离变量, 得

$$\frac{|y| dy}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}} = \pm dx.$$

由于 $|y| = y \operatorname{sgn}(y)$, 故上式两端积分,

$$\operatorname{sgn}(y) \int \frac{y dy}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}} = \pm \int dx,$$

$$\operatorname{sgn}(y) \sqrt{C_1 y^2 - 1} = \pm C_1 x + C_2.$$

两边平方, 得 $C_1 y^2 - 1 = (C_1 x + C_2)^2$.

(9) 方程 $y'' = \frac{1}{\sqrt{y}}$ 属于 $y'' = f(y)$ 型方程, 除了设 $y' = p$, $y'' = p \frac{dp}{dy}$ 来降阶求解外, 还

可以用如下方法求解:

在 $y'' = f(y)$ 的两端乘以 $2y'$, 得

$$2y' y'' = 2f(y) y',$$

即 $(y'^2)' = 2f(y) y'$. 若 $F(y)$ 是 $f(y)$ 的原函数, 则有

$$(y'^2)' = 2[F(y)]',$$

积分得到降阶的方程 $y'^2 = 2F(y) + C_1$.

本小题按上述方法求解: 用 $2y'$ 乘方程 $y'' = \frac{1}{\sqrt{y}}$ 的两端, 得

$$2y' y'' = \frac{2y'}{\sqrt{y}}$$

即 $(y'^2)' = (4\sqrt{y})'$, 故 $y'^2 = 4\sqrt{y} + C'_1$, 有 $y' = \pm 2\sqrt{\sqrt{y} + C_1}$ ($C_1 = \frac{C'_1}{4}$).

分离变量,得

$$dx = \pm \frac{dy}{2\sqrt{\sqrt{y} + C_1}}.$$

积分,得

$$\begin{aligned} x &= \pm \int \frac{d(\sqrt{y})^2}{2\sqrt{\sqrt{y} + C_1}} = \pm \int \frac{\sqrt{y} d\sqrt{y}}{\sqrt{\sqrt{y} + C_1}} = \pm \int \frac{(\sqrt{y} + C_1) - C_1}{\sqrt{\sqrt{y} + C_1}} d(\sqrt{y}) \\ &= \pm \left[\int \sqrt{\sqrt{y} + C_1} d(\sqrt{y} + C_1) - C_1 \int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{y} + C_1}} d(\sqrt{y} + C_1) \right] \\ &= \pm \left[\frac{2}{3} (\sqrt{y} + C_1)^{\frac{3}{2}} - 2C_1 (\sqrt{y} + C_1)^{\frac{1}{2}} \right] + C_2. \end{aligned}$$

(10) 令 $y' = p$, 则 $y'' = p \frac{dp}{dy}$, 原方程化为 $p \frac{dp}{dy} = p^3 + p$, 即

$$p \left[\frac{dp}{dy} - (1 + p^2) \right] = 0.$$

若 $p \equiv 0$, 则 $y \equiv C$. $y \equiv C$ 是原方程的解, 但不是通解.

若 $p \neq 0$, 由于 p 的连续性, 必在 x 的某区间有 $p \neq 0$. 于是

$$\frac{dp}{dy} - (1 + p^2) = 0.$$

分离变量, 得 $\frac{dp}{1 + p^2} = dy$, 积分得 $\arctan p = y - C_1$, 即 $p = \tan(y - C_1)$, 亦即 $\cot(y - C_1)$

$dy = dx$. 积分得 $\ln \sin(y - C_1) = x + \ln C_2$. 即 $\sin(y - C_1) = C_2 e^x$, 也可写成 $y = \arcsin(C_2 e^x) + C_1$.

由于当 $C_2 = 0$ 时, $y = C_1$, 故前面所得的解 $y \equiv C$ 也包含在这个通解之内.

2. 求下列各微分方程满足所给初值条件的特解:

- (1) $y^3 y'' + 1 = 0, y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 0;$
- (2) $y'' - ay'^2 = 0, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = -1;$
- (3) $y''' = e^{ax}, y|_{x=1} = y'|_{x=1} = y''|_{x=1} = 0;$
- (4) $y'' = e^{2y}, y|_{x=0} = y'|_{x=0} = 0;$
- (5) $y'' = 3\sqrt{y}, y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2;$
- (6) $y'' + (y')^2 = 1, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 0.$

解 (1) 将原方程写成 $y'' + \frac{1}{y^3} = 0$, 两端乘以 $2y'$, 得

$$2y'y'' + \frac{2y'}{y^3} = 0,$$

即 $\left(y'^2 - \frac{1}{y^2} \right)' = 0$, 由此得

$$y'^2 - \frac{1}{y^2} = C_1.$$

代入初值条件: $y=1, y'=0$, 得 $C_1 = -1$, 故有

$$\begin{aligned} y'^2 &= \frac{1}{y^2} - 1 = \frac{1-y^2}{y^2}, \\ y' &= \pm \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}, \end{aligned}$$

分离变量, 得

$$\frac{y dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pm dx,$$

积分得 $-\sqrt{1-y^2} = \pm x + C_2$. 代入初值条件: $x=1, y=1$, 得 $C= \mp 1$. 于是有

$$-\sqrt{1-y^2} = \pm (x-1).$$

两边平方, 得 $x^2 + y^2 = 2x$. 由于在点 $x=1$ 处, $y=1$, 故在 $x=1$ 的某邻域内 $y>0$, 因而特解可表示为

$$y = \sqrt{2x-x^2}.$$

(2) 令 $y'=p$, 则 $y''=p'$, 原方程化为 $p'-ap^2=0$, 分离变量即

$$\frac{dp}{p^2} = adx,$$

积分得 $-\frac{1}{p} = ax + C_1$. 代入初值条件 $x=0, p=y'=-1$, 得 $C_1=1$. 从而有 $-\frac{1}{y'}=ax+1$, 即

$$y' = -\frac{1}{ax+1},$$

又积分得

$$y = -\frac{1}{a} \ln(ax+1) + C_2.$$

代入初值条件 $y|_{x=0}=0$, 得 $C_2=0$, 故所求特解为

$$y = -\frac{1}{a} \ln(ax+1).$$

(3) 因 $y'''=e^{ax}$, 并由初值条件 $x=1, y''=0$, 故积分得

$$y'' = \int_1^x y''' dx = \int_1^x e^{ax} dx = \frac{1}{a}(e^{ax}-e^a).$$

又因 $x=1$ 时, $y'=0$, 故积分得

$$\begin{aligned} y' &= \int_1^x y'' dx = \int_1^x \frac{1}{a}(e^{ax}-e^a) dx = \frac{1}{a} \left[\frac{1}{a}(e^{ax}-e^a) - e^a(x-1) \right] \\ &= \frac{1}{a^2} e^{ax} - \frac{e^a}{a} x + \frac{e^a}{a} \left(1 - \frac{1}{a} \right). \end{aligned}$$

又因 $x=1$ 时, $y=0$, 故再积分得

$$\begin{aligned} y &= \int_1^x y' dx = \int_1^x \left[\frac{1}{a^2} e^{ax} - \frac{e^a}{a} x + \frac{e^a}{a} \left(1 - \frac{1}{a} \right) \right] dx \\ &= \frac{1}{a^3} (e^{ax} - e^a) - \frac{e^a}{2a} (x^2 - 1) + \frac{e^a}{a} \left(1 - \frac{1}{a} \right) (x - 1) \\ &= \frac{1}{a^3} e^{ax} - \frac{e^a}{2a} x^2 + \frac{e^a}{a^2} (a - 1)x + \frac{e^a}{2a^3} (2a - a^2 - 2). \end{aligned}$$

(4) 在原方程两端同乘以 $2y'$, 得 $2y'y'' = 2y'e^{2y}$, 即 $(y'^2)' = (e^{2y})'$, 积分得

$$y'^2 = e^{2y} + C_1.$$

代入初值条件: $x=0, y=y'=0$, 得 $C_1 = -1$, 从而有

$$y' = \pm \sqrt{e^{2y} - 1}.$$

分离变量后积分

$$\int \frac{dy}{\sqrt{e^{2y} - 1}} = \pm \int dx,$$

即

$$\int \frac{d(e^{-y})}{\sqrt{1 - e^{-2y}}} = \mp \int dx,$$

得 $\arcsin(e^{-y}) = \mp x + C_2$. 代入初值条件: $x=0, y=0$, 得 $C_2 = \frac{\pi}{2}$. 于是得特解

$$e^{-y} = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos x,$$

即 $y = -\ln \cos x = \ln \sec x$.

(5) 在原方程两端同乘以 $2y'$, 得 $2y'y'' = 6y'\sqrt{y}$, 即 $(y'^2)' = (4y^{\frac{3}{2}})'$, 积分得 $y'^2 = 4y^{\frac{3}{2}} + C_1$. 代入初值条件 $x=0, y=1, y'=2$, 得 $C_1=0$, 从而有 $y' = \pm 2y^{\frac{3}{4}}$. 并由于 $y' \Big|_{x=0} = 2$, 故取 $y' = 2y^{\frac{3}{4}}$. 分离变量后积分 $\int \frac{dy}{y^{\frac{3}{4}}} = 2 \int dx$ 得 $4y^{\frac{1}{4}} = 2x + C_2$. 代入初值

条件: $x=0, y=1$, 得 $C_2=4$, 于是得特解

$$y = \left(\frac{x}{2} + 1 \right)^4.$$

(6) 令 $y'=p$, 则 $y''=p\frac{dp}{dy}$, 原方程变为 $p\frac{dp}{dy}+p^2=1$. 分离变量, 得

$$\frac{p dp}{1-p^2} = dy.$$

由初值条件: $y=0, p=0$, 积分

$$\int_0^p \frac{p dp}{1-p^2} = \int_0^y dy$$

得

$$-\frac{1}{2} \ln(1 - p^2) = y,$$

即 $p = \pm \sqrt{1 - e^{-2y}}$. 又分离变量, 得

$$\frac{dy}{\sqrt{1 - e^{-2y}}} = \pm dx.$$

由初值条件: $x=0, y=0$, 积分

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1 - e^{-2y}}} = \pm \int_0^x dx,$$

$$\int_0^y \frac{d(e^y)}{\sqrt{e^{2y} - 1}} = \pm \int_0^x dx,$$

得

$$\ln(e^y + \sqrt{e^{2y} - 1}) = \pm x,$$

即

$$e^y = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

或写成

$$y = \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

例3. 试求 $y'' = x$ 的经过点 $M(0,1)$ 且在此点与直线 $y = \frac{x}{2} + 1$ 相切的积分曲线.

解 由于直线 $y = \frac{x}{2} + 1$ 在 $(0,1)$ 处的切线斜率为 $\frac{1}{2}$, 依题设知, 所求积分曲线

是初值问题

$$y'' = x, \quad y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = \frac{1}{2}$$

的解. 由 $y'' = x$, 积分得

$$y' = \frac{x^2}{2} + C_1.$$

代入 $x=0, y'= \frac{1}{2}$, 得 $C_1 = \frac{1}{2}$, 即有

$$y' = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}.$$

再积分, 得 $y = \frac{x^3}{6} + \frac{x}{2} + C_2$, 代入 $x=0, y=1$, 得 $C_2 = 1$, 于是所求积分曲线的方程为

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{x}{2} + 1.$$

例4. 设有一质量为 m 的物体, 在空中由静止开始下落, 如果空气阻力为 $R = cv$ (其中 c 为

常数, v 为物体运动的速度), 试求物体下落的距离 s 与时间 t 的函数关系.

解 根据牛顿第二定律, 有关系式

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = mg - c \frac{ds}{dt},$$

并依据题设条件, 得初值问题

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = g - \frac{c}{m} \frac{ds}{dt}, \quad s|_{t=0} = 0, \quad \frac{ds}{dt}|_{t=0} = 0.$$

令 $\frac{ds}{dt} = v$, 方程成为 $\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v$, 分离变量后积分

$$\int \frac{dv}{g - \frac{c}{m}v} = \int dt$$

得

$$\ln(g - \frac{c}{m}v) = -\frac{c}{m}t + C_1,$$

代入初值条件 $v|_{t=0} = 0$, 得 $C_1 = \ln g$. 于是有

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{mg}{c} \left(1 - e^{-\frac{c}{m}t} \right);$$

积分得

$$s = \frac{mg}{c} \left(t + \frac{m}{c} e^{-\frac{c}{m}t} \right) + C_2$$

代入初值条件 $s|_{t=0} = 0$, 得 $C_2 = -\frac{m^2 g}{c^2}$. 故所求特解(即下落的距离与时间的关系)为

$$\begin{aligned} s &= \frac{mg}{c} \left(t + \frac{m}{c} e^{-\frac{c}{m}t} - \frac{m}{c} \right) \\ &= \frac{mg}{c} t + \frac{m^2 g}{c^2} (e^{-\frac{c}{m}t} - 1). \end{aligned}$$

习题 7-6

高阶线性微分方程

1. 下列函数组在其定义区间内哪些是线性无关的?

- | | |
|--------------------------------|------------------------------------|
| (1) x, x^2 ; | (2) $x, 2x$; |
| (3) $e^{2x}, 3e^{2x}$; | (4) e^{-x}, e^x ; |
| (5) $\cos 2x, \sin 2x$; | (6) e^{x^2}, xe^{x^2} ; |
| (7) $\sin 2x, \cos x \sin x$; | (8) $e^x \cos 2x, e^x \sin 2x$; |
| (9) $\ln x, x \ln x$; | (10) $e^{ax}, e^{bx} (a \neq b)$. |

解 对于两个函数构成的函数组, 如果两函数的比为常数, 则它们是线性相关

的,否则就线性无关,因此本题中除了

$$(2) \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}; \quad (3) \frac{e^{2x}}{3e^{2x}} = \frac{1}{3}; \quad (7) \frac{\sin 2x}{\cos x \sin x} = 2,$$

即(2)(3)(7)中的函数组线性相关外,其余的7个函数组中两函数之比不是常数,从而线性无关.

2. 验证 $y_1 = \cos \omega x$ 及 $y_2 = \sin \omega x$ 都是方程 $y'' + \omega^2 y = 0$ 的解,并写出该方程的通解.

解 由 $y_1 = \cos \omega x$, 得 $y'_1 = -\omega \sin \omega x$, $y''_1 = -\omega^2 \cos \omega x$; 由 $y_2 = \sin \omega x$, 得 $y'_2 = \omega \cos \omega x$, $y''_2 = -\omega^2 \sin \omega x$; 可见

$$y''_i + \omega^2 y_i = 0 \quad (i = 1, 2),$$

故 y_1 与 y_2 都是方程 $y'' + \omega^2 y = 0$ 的解.

又因 $\frac{y_1}{y_2} = \cot \omega x \neq$ 常数, 故 y_1 与 y_2 线性无关. 于是方程的通解为

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x.$$

3. 验证 $y_1 = e^{x^2}$ 及 $y_2 = xe^{x^2}$ 都是方程 $y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0$ 的解,并写出该方程的通解.

解 由 $y_1 = e^{x^2}$, 得 $y'_1 = 2xe^{x^2}$, $y''_1 = (2 + 4x^2)e^{x^2}$; 由 $y_2 = xe^{x^2}$, 得 $y'_2 = (1 + 2x^2)e^{x^2}$, $y''_2 = (6x + 4x^3)e^{x^2}$. 因

$$y''_1 - 4xy'_1 + (4x^2 - 2)y_1 = (2 + 4x^2)e^{x^2} - 4x \cdot 2xe^{x^2} + (4x^2 - 2)e^{x^2} = 0,$$

$$y''_2 - 4xy'_2 + (4x^2 - 2)y_2 = (6x + 4x^3)e^{x^2} - 4x(1 + 2x^2)e^{x^2} + (4x^2 - 2)xe^{x^2} = 0,$$

故 y_1 与 y_2 都是方程的解.

又因 $\frac{y_2}{y_1} = x \neq$ 常数, 故 y_1 与 y_2 线性无关, 于是方程的通解为

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = (C_1 + C_2 x)e^{x^2}.$$

4. 验证:

(1) $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{12} e^{5x}$ (C_1, C_2 是任意常数) 是方程 $y'' - 3y' + 2y = e^{5x}$ 的通解;

(2) $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{32} (4x \cos x + \sin x)$ (C_1, C_2 是任意常数) 是方程 $y'' + 9y = x \cos x$ 的通解;

(3) $y = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x$ (C_1, C_2 是任意常数) 是方程 $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$ 的通解;

(4) $y = C_1 x^5 + \frac{C_2}{x} - \frac{x^2}{9} \ln x$ (C_1, C_2 是任意常数) 是方程 $x^2 y'' - 3xy' - 5y = x^2 \ln x$ 的通解;

(5) $y = \frac{1}{x}(C_1 e^x + C_2 e^{-x}) + \frac{e^x}{2}$ (C_1, C_2 是任意常数) 是方程 $xy'' + 2y' - xy = e^x$

的通解;

(6) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - x^2$ (C_1, C_2, C_3, C_4 是任意常数) 是方程 $y^{(4)} - y = x^2$ 的通解.

解 (1) 记 $y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}, y^* = \frac{1}{12}e^{5x}$, 则

$$y_1'' - 3y_1' + 2y_1 = e^x - 3e^x + 2e^x = 0,$$

$$y_2'' - 3y_2' + 2y_2 = 4e^{2x} - 6e^{2x} + 2e^{2x} = 0.$$

故 y_1 与 y_2 是原方程对应的齐次方程的解, 易见 y_1 与 y_2 是线性无关的.

又因

$$y^{*''} - 3y^{*''} + 2y^* = \frac{25}{12}e^{5x} - \frac{15}{12}e^{5x} + \frac{2}{12}e^{5x} = e^{5x},$$

故 y^* 是原方程的一个特解, 所以

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{12}e^{5x}$$

是原方程的通解.

(2) 记 $y_1 = \cos 3x, y_2 = \sin 3x, y^* = \frac{1}{32}(4x \cos x + \sin x)$. 因

$$y_1'' + 9y_1 = -9\cos 3x + 9\cos 3x = 0,$$

$$y_2'' + 9y_2 = -9\sin 3x + 9\sin 3x = 0,$$

故 y_1 与 y_2 是原方程对应的齐次方程的解, 易见它们是线性无关的.

又因

$$y^{*''} = \frac{1}{32}(4\cos x - 4x\sin x + \cos x) = \frac{1}{32}(5\cos x - 4x\sin x),$$

$$y^{*'''} = \frac{1}{32}(-5\sin x - 4\sin x - 4x\cos x) = \frac{1}{32}(-4x\cos x - 9\sin x),$$

有

$$y^{*'''} + 9y^* = \frac{1}{32}(-4x\cos x - 9\sin x) + \frac{9}{32}(4x\cos x + \sin x) = x\cos x.$$

故 y^* 是原方程的一个特解. 所以

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y^* = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{32}(4x \cos x + \sin x)$$

是原方程的通解.

(3) 记 $y_1 = x^2$, $y_2 = x^2 \ln x$, 则

$$y'_1 = 2x, \quad y''_1 = 2; \quad y'_2 = 2x \ln x + x, \quad y''_2 = 2 \ln x + 3.$$

且

$$x^2 y''_1 - 3xy'_1 + 4y_1 = x^2 \cdot 2 - 3x \cdot 2x + 4x^2 = 0,$$

$$x^2 y''_2 - 3xy'_2 + 4y_2 = x^2 (2 \ln x + 3) - 3x (2x \ln x + x) + 4x^2 \ln x = 0,$$

故 y_1 与 y_2 是方程的解, 易见 y_1 与 y_2 线性无关, 所以

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x$$

是方程的通解.

(4) 记 $y_1 = x^5$, $y_2 = \frac{1}{x}$, $y^* = -\frac{1}{9}x^2 \ln x$, 则

$$x^2 y''_1 - 3xy'_1 - 5y_1 = x^2 \cdot 20x^3 - 3x \cdot 5x^4 - 5x^5 = 0,$$

$$x^2 y''_2 - 3xy'_2 - 5y_2 = x^2 \left(\frac{2}{x^3}\right) - 3x \left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{5}{x} = 0,$$

故 y_1 与 y_2 是原方程对应的齐次方程的解, 易见它们是线性无关的. 又因

$$\begin{aligned} x^2 y^{*''} - 3xy^{*''} - 5y^* &= x^2 \cdot \frac{2 \ln x + 3}{9} - 3x \frac{2x \ln x + x}{9} - 5 \cdot \frac{x^2 \ln x}{9} \\ &= x^2 \ln x, \end{aligned}$$

故 y^* 是原方程的一个特解. 所以

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y^* = C_1 x^5 + C_2 \frac{1}{x} - \frac{1}{9}x^2 \ln x$$

是原方程的通解.

(5) 记 $y_1 = \frac{e^x}{x}$, $y_2 = \frac{e^{-x}}{x}$, $y^* = \frac{e^x}{2}$, 则

$$y'_1 = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)e^x, y''_1 = \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)e^x,$$

$$y'_2 = \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)e^{-x}, y''_2 = \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)e^{-x},$$

且

$$xy''_1 + 2y'_1 - xy_1 = x \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)e^x + 2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)e^x - x \cdot \frac{e^x}{x} = 0,$$

$$xy''_2 + 2y'_2 - xy_2 = x \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)e^{-x} + 2 \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)e^{-x} - x \cdot \frac{e^{-x}}{x} = 0,$$

故 y_1 与 y_2 是原方程对应的齐次方程的解, 易见它们是线性无关的.

又因 $y^{*''} = y^{*''} = \frac{e^x}{2}$, 且

$$xy^{*''} + 2y^{*''} - xy^* = \frac{x}{2}e^x + e^x - \frac{x}{2}e^x = e^x,$$

故 y^* 是原方程的一个特解. 所以

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y^* = \frac{C_1 e^x + C_2 e^{-x}}{x} + \frac{e^x}{2}$$

是原方程的通解.

(6) 令 $y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}, y_3 = \cos x, y_4 = \sin x$, 易见

$$y_i^{(4)} = y_i, i = 1, 2, 3, 4.$$

故 $y_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 是原方程对应的齐次方程 $y^{(4)} - y = 0$ 的解.

下面说明 $y_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 在它们的定义域 \mathbf{R} 中是线性无关的. 令

$$k_1 e^x + k_2 e^{-x} + k_3 \cos x + k_4 \sin x \equiv 0,$$

分别取 $x = 0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \pi$, 则有

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 + 0 = 0, \\ e^{\frac{\pi}{2}} k_1 + e^{-\frac{\pi}{2}} k_2 + 0 + k_4 = 0, \\ e^{-\frac{\pi}{2}} k_1 + e^{\frac{\pi}{2}} k_2 + 0 - k_4 = 0, \\ e^\pi k_1 + e^{-\pi} k_2 - k_3 + 0 = 0. \end{cases}$$

根据线性代数的知识, 经计算, 上述齐次线性方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ e^{\frac{\pi}{2}} & e^{-\frac{\pi}{2}} & 0 & 1 \\ e^{-\frac{\pi}{2}} & e^{\frac{\pi}{2}} & 0 & -1 \\ e^\pi & e^{-\pi} & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

故齐次线性方程组仅有零解 $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0, k_4 = 0$. 这说明 y_1, y_2, y_3, y_4 是线性无关的.

又令 $y^* = -x^2$, 则 $y^{*(4)} = 0$, 且 $y^{*(4)} - y^* = 0 - (-x^2) = x^2$, 故 y^* 是原方程的一个特解. 所以

$$\begin{aligned} y &= C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4 + y^* \\ &= C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x + x^2 \end{aligned}$$

是原方程的通解.

***5.** 已知 $y_1(x) = e^x$ 是齐次线性方程

$$(2x - 1)y'' - (2x + 1)y' + 2y = 0$$

的一个解, 求此方程的通解.

解 设 $y_2(x) = y_1 u = e^x u$ 是方程的解, 则 $y_2' = e^x(u + u')$, $y_2'' = e^x(u + 2u' + u'')$, 代入方程并整理, 得

$$e^x [(2x - 1)u'' + (2x - 3)u'] = 0,$$

即

$$(2x-1)u'' + (2x-3)u' = 0,$$

令 $u' = p$, 则 $u'' = p'$, 且上式成为

$$(2x-1)p' + (2x-3)p = 0.$$

分离变量后积分

$$\int \frac{dp}{p} = - \int \frac{2x-3}{2x-1} dx$$

得

$$\ln |p| = -x + \ln |2x-1| + \ln C,$$

取 $C=1$, 即 $p = (2x-1)e^{-x}$. 再积分得

$$u = \int (2x-1)e^{-x} dx = -[(2x-1)e^{-x} + 2e^{-x} + C_0],$$

取 $C_0=0$, 即 $u = -(2x+1)e^{-x}$, 故

$$y_2 = e^x u = -(2x+1).$$

y_2 与 y_1 线性无关, 故原方程的通解为

$$y = C_1(2x+1) + C_2 e^x.$$

6. 已知 $y_1(x) = x$ 是齐次线性方程 $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ 的一个解, 求非齐次线性方程 $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^3$ 的通解.

解 设 $y_2 = y_1 u = xu$ 是非齐次线性方程的解, 则 $y'_2 = u + xu'$, $y''_2 = 2u' + xu''$, 代入方程并整理, 得

$$u'' = 0.$$

不妨取 $u = x$, 则 $y_2 = y_1 u = x^2$, 且 y_2 与 y_1 线性无关.

将非齐次方程化为标准形

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 2x,$$

则它的通解为

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 - y_1 \int \frac{y_2 f}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 f}{W} dx,$$

$$\text{其中 } f = 2x, W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2.$$

故

$$\begin{aligned} y &= C_1 x + C_2 x^2 - x \int \frac{2x^3}{x^2} dx + x^2 \int \frac{2x^2}{x^2} dx \\ &= C_1 x + C_2 x^2 + x^3. \end{aligned}$$

7. 已知齐次线性方程 $y'' + y = 0$ 的通解为 $Y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, 求非齐次线性方程 $y'' + y = \sec x$ 的通解.

解 由题设知, $y_1 = \cos x$ 与 $y_2 = \sin x$ 都是齐次方程 $y'' + y = 0$ 的解, 且 y_1 与 y_2

线性无关, 则非齐次方程 $y'' + y = \sec x$ 的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - y_1 \int \frac{y_2 f}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 f}{W} dx,$$

其中

$$f = \sec x, \quad W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1.$$

故

$$\begin{aligned} y &= C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \int \frac{\sin x}{\cos x} dx + \sin x \int \frac{\cos x}{\cos x} dx \\ &= C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln |\cos x| + x \sin x. \end{aligned}$$

例 8. 已知齐次线性方程 $x^2 y'' - xy' + y = 0$ 的通解为 $Y(x) = C_1 x + C_2 x \ln |x|$, 求非齐次线性方程 $x^2 y'' - xy' + y = x$ 的通解.

解 由题设知 $y_1 = x$ 与 $y_2 = x \ln |x|$ 都是齐次方程的解, y_1 与 y_2 显然是线性无关的. 将非齐次方程化为标准形 $y'' - \frac{1}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = \frac{1}{x}$, 则方程的通解为

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 - y_1 \int \frac{y_2 f}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 f}{W} dx,$$

其中

$$f = \frac{1}{x}, \quad W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x \ln |x| \\ 1 & \ln |x| + 1 \end{vmatrix} = x.$$

因

$$\int \frac{y_2 f}{W} dx = \int \frac{\ln |x|}{x} dx = \frac{1}{2} \ln^2 |x|,$$

$$\int \frac{y_1 f}{W} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln |x|,$$

故非齐次方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= C_1 x + C_2 x \ln |x| - x \frac{1}{2} \ln^2 |x| + x \ln |x| \cdot \ln |x| \\ &= C_1 x + C_2 x \ln |x| + \frac{x}{2} \ln^2 |x|. \end{aligned}$$

习题 7-7

常系数齐次线性微分方程

1. 求下列微分方程的通解:

$$(1) \quad y'' + y' - 2y = 0;$$

$$(2) \quad y'' - 4y' = 0;$$

$$(3) \quad y'' + y = 0;$$

$$(4) \quad y'' + 6y' + 13y = 0;$$

$$(5) 4 \frac{d^2x}{dt^2} - 20 \frac{dx}{dt} + 25x = 0;$$

$$(6) y'' - 4y' + 5y = 0;$$

$$(7) y^{(4)} - y = 0;$$

$$(8) y^{(4)} + 2y'' + y = 0;$$

$$(9) y^{(4)} - 2y''' + y'' = 0;$$

$$(10) y^{(4)} + 5y'' - 36y = 0.$$

解 (1) 特征方程为 $r^2 + r - 2 = 0$, 解得 $r_1 = 1, r_2 = -2$, 故方程的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

(2) 特征方程为 $r^2 - 4r = 0$, 解得 $r_1 = 0, r_2 = 4$, 故方程的通解为

$$y = C_1 + C_2 e^{4x}.$$

(3) 特征方程为 $r^2 + 1 = 0$, 解得 $r_1 = i, r_2 = -i$, 故方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

(4) 特征方程为 $r^2 + 6r + 13 = 0$, 解得 $r_{1,2} = -3 \pm 2i$, 故方程的通解为

$$y = e^{-3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

(5) 特征方程为 $4r^2 - 20r + 25 = 0$, 解得 $r_1 = r_2 = \frac{5}{2}$, 故方程的通解为

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{\frac{5}{2}t}.$$

(6) 特征方程为 $r^2 - 4r + 5 = 0$, 解得 $r_{1,2} = 2 \pm i$, 故方程的通解为

$$y = e^{2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

(7) 特征方程为 $r^4 - 1 = 0$, 即 $(r^2 - 1)(r^2 + 1) = 0$, 解得 $r_{1,2} = \pm 1, r_{3,4} = \pm i$, 故方程的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

(8) 特征方程为 $r^4 + 2r^2 + 1 = 0$, 即 $(r^2 + 1)^2 = 0$, 解得 $r_{1,2} = i, r_{3,4} = -i$, 故方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x) \cos x + (C_3 + C_4 x) \sin x.$$

(9) 特征方程为 $r^4 - 2r^3 + r^2 = 0$, 即 $r^2(r-1)^2 = 0$, 解得 $r_{1,2} = 0, r_{3,4} = 1$, 故方程的通解为

$$y = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x) e^x.$$

(10) 特征方程为 $r^4 + 5r^2 - 36 = 0$, 即 $(r^2 + 9)(r^2 - 4) = 0$, 解得 $r_{1,2} = \pm 2, r_{3,4} = \pm 3i$, 故方程的通解为

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x.$$

2. 求下列微分方程满足所给初值条件的特解:

$$(1) y'' - 4y' + 3y = 0, y|_{x=0} = 6, y'|_{x=0} = 10;$$

$$(2) 4y'' + 4y' + y = 0, y|_{x=0} = 2, y'|_{x=0} = 0;$$

$$(3) y'' - 3y' - 4y = 0, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = -5;$$

$$(4) y'' + 4y' + 29y = 0, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 15;$$

$$(5) y'' + 25y = 0, y|_{x=0} = 2, y'|_{x=0} = 5;$$

$$(6) \quad y'' - 4y' + 13y = 0, \quad y|_{x=0} = 0, \quad y'|_{x=0} = 3.$$

解 (1) 解特征方程 $r^2 - 4r + 3 = 0$, 得 $r_1 = 1, r_2 = 3$, 故方程的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x},$$

且有

$$y' = C_1 e^x + 3C_2 e^{3x}.$$

$$\text{代入初值条件, 得 } \begin{cases} C_1 + C_2 = 6, \\ C_1 + 3C_2 = 10, \end{cases} \text{解得 } \begin{cases} C_1 = 4, \\ C_2 = 2. \end{cases} \text{故所求特解为}$$

$$y = 4e^x + 2e^{3x}.$$

$$(2) \quad \text{解特征方程 } 4r^2 + 4r + 1 = 0, \text{ 即 } (2r + 1)^2 = 0, \text{ 得 } r_{1,2} = -\frac{1}{2}, \text{ 故方程的通解为}$$

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{-\frac{x}{2}},$$

且有

$$y' = \left(-\frac{C_1}{2} + C_2 - \frac{C_2}{2}x \right) e^{-\frac{x}{2}}.$$

$$\text{代入初值条件, 得 } \begin{cases} C_1 = 2, \\ -\frac{C_1}{2} + C_2 = 0, \end{cases} \text{解得 } \begin{cases} C_1 = 2, \\ C_2 = 1. \end{cases} \text{故所求特解为}$$

$$y = (2 + x) e^{-\frac{x}{2}}.$$

$$(3) \quad \text{解特征方程 } r^2 - 3r - 4 = 0, \text{ 即 } (r + 1)(r - 4) = 0, \text{ 得 } r_1 = -1, r_2 = 4, \text{ 故方程的通解为}$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x},$$

且有

$$y' = -C_1 e^{-x} + 4C_2 e^{4x}.$$

$$\text{代入初值条件, 得 } \begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ -C_1 + 4C_2 = -5, \end{cases} \text{解得 } \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = -1. \end{cases} \text{故所求特解为}$$

$$y = e^{-x} - e^{4x}.$$

$$(4) \quad \text{解特征方程 } r^2 + 4r + 29 = 0, \text{ 得 } r_{1,2} = -2 \pm 5i, \text{ 故方程的通解为}$$

$$y = e^{-2x} (C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x),$$

且有

$$y' = e^{-2x} [(5C_2 - 2C_1) \cos 5x + (-5C_1 - 2C_2) \sin 5x].$$

$$\text{代入初值条件, 得 } \begin{cases} C_1 = 0, \\ 5C_2 - 2C_1 = 15, \end{cases} \text{即 } \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 3. \end{cases} \text{故所求特解为}$$

$$y = 3e^{-2x} \sin 5x.$$

$$(5) \quad \text{解特征方程 } r^2 + 25 = 0, \text{ 得 } r_{1,2} = \pm 5i, \text{ 故方程的通解为}$$

$$y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x,$$

且有

$$y' = -5C_1 \sin 5x + 5C_2 \cos 5x.$$

代入初值条件, 得 $\begin{cases} C_1 = 2, \\ 5C_2 = 5, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} C_1 = 2, \\ C_2 = 1. \end{cases}$ 故所求特解为

$$y = 2 \cos 5x + \sin 5x.$$

(6) 解特征方程 $r^2 - 4r + 13 = 0$, 得 $r_{1,2} = 2 \pm 3i$, 故方程的通解为

$$y = e^{2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x),$$

且有

$$y' = e^{2x} [(2C_1 + 3C_2) \cos 3x + (2C_2 - 3C_1) \sin 3x].$$

代入初值条件, 得 $\begin{cases} C_1 = 0, \\ 2C_1 + 3C_2 = 3, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 1. \end{cases}$ 故所求特解为

$$y = e^{2x} \sin 3x.$$

3. 一个单位质量的质点在数轴上运动, 开始时质点在原点 O 处且速度为 v_0 , 在运动过程中, 它受到一个力的作用, 这个力的大小与质点到原点的距离成正比(比例系数 $k_1 > 0$)而方向与初速一致. 又介质的阻力与速度成正比(比例系数 $k_2 > 0$). 求反映这质点的运动规律的函数.

解 设质点的位置函数为 $x = x(t)$. 由题意得

$$x'' = k_1 x - k_2 x',$$

即 $x'' + k_2 x' - k_1 x = 0$, 且 $x|_{t=0} = 0$, $x'|_{t=0} = v_0$.

解特征方程 $r^2 + k_2 r - k_1 = 0$, 得 $r_{1,2} = \frac{-k_2 \pm \sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2}$, 故有通解

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t},$$

且有

$$x' = r_1 C_1 e^{r_1 t} + r_2 C_2 e^{r_2 t},$$

代入初值条件 $t=0, x=0, x'=v_0$, 得 $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ r_1 C_1 + r_2 C_2 = v_0, \end{cases}$ 解得

$$\begin{cases} C_1 = \frac{-v_0}{r_2 - r_1} = \frac{v_0}{\sqrt{k_2^2 + 4k_1}}, \\ C_2 = \frac{v_0}{r_2 - r_1} = -\frac{v_0}{\sqrt{k_2^2 + 4k_1}}. \end{cases}$$

故

$$x = \frac{v_0}{\sqrt{k_2^2 + 4k_1}} \left(e^{\frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2}t} - e^{\frac{-k_2 - \sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2}t} \right)$$

$$= \frac{v_0}{\sqrt{k_2^2 + 4k_1}} e^{\frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2}t} (1 - e^{-t\sqrt{k_2^2 + 4k_1}}).$$

4. 在图 7-3 所示的电路中先将开关 K 拨向 A, 达到稳定状态后再将开关 K 拨向 B, 求电压 $u_C(t)$ 及电流 $i(t)$. 已知 $E = 20 \text{ V}$, $C = 0.5 \times 10^{-6} \text{ F}$ (法), $L = 0.1 \text{ H}$ (亨), $R = 2000 \Omega$.

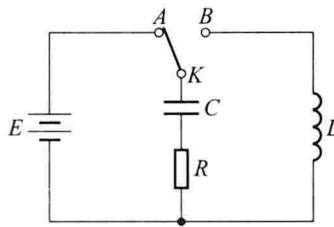


图 7-3

解 由回路定律, 得

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + Ri = 0.$$

因 $\frac{q}{C} = u_C$, 即 $q = Cu_C$, $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$, 则 $\frac{di}{dt} = C \frac{d^2 u_C}{dt^2}$. 于是有

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C + RC \frac{du_C}{dt} = 0,$$

即

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0,$$

且

$$u_C \Big|_{t=0} = E, \frac{du_C}{dt} \Big|_{t=0} = 0.$$

已知

$$\frac{R}{L} = \frac{2000}{0.1} = 2 \times 10^4, \frac{1}{LC} = \frac{1}{0.1 \times 0.5 \times 10^{-6}} = 2 \times 10^7,$$

故微分方程为

$$u_C'' + 2 \times 10^4 u'_C + 2 \times 10^7 u_C = 0.$$

其特征方程为

$$r^2 + 2 \times 10^4 r + 2 \times 10^7 = 0,$$

解得 $r_1 \approx -1.9 \times 10^4$, $r_2 \approx -10^3$, 故 $u_C = C_1 e^{-1.9 \times 10^4 t} + C_2 e^{-10^3 t}$, 且有

$$u'_C = -1.9 \times 10^4 C_1 e^{-1.9 \times 10^4 t} - 10^3 C_2 e^{-10^3 t}.$$

代入初值条件 $t = 0, u_C = 20, u'_C = 0$, 得

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 20, \\ -1.9 \times 10^4 C_1 - 10^3 C_2 = 0, \end{cases}$$

解得

$$C_1 = -\frac{10}{9}, C_2 = \frac{190}{9}.$$

故

$$u_C = \frac{10}{9}(19e^{-10^3 t} - e^{-1.9 \times 10^4 t}),$$

$$\begin{aligned} i &= Cu'_C = 0.5 \times 10^{-6} \times \frac{10}{9}(-19 \times 10^3 e^{-10^3 t} + 1.9 \times 10^4 e^{-1.9 \times 10^4 t}) \\ &= \frac{19}{18} \times 10^{-2}(e^{-1.9 \times 10^4 t} - e^{-10^3 t}). \end{aligned}$$

5. 设底面直径为 0.5 m 的圆柱形浮筒铅直放在水中, 当稍向下压后突然放开, 浮筒在水中上下振动的周期为 2 s, 求浮筒的质量.

解 设 x 轴的正向铅直向下, 原点在水面处. 平衡状态下浮筒上一点 A 在水平面处, 又设在时刻 t , 点 A 的位置为 $x = x(t)$, 此时它受到的恢复力的大小为 $1000g\pi R^2 |x|$ (R 是浮筒的半径), 恢复力的方向与位移方向相反, 故有

$$mx'' = -1000g\pi R^2 x,$$

其中 m 是浮筒的质量.

记 $\omega^2 = \frac{1000g\pi R^2}{m}$, 则得微分方程

$$x'' + \omega^2 x = 0.$$

解特征方程 $r^2 + \omega^2 = 0$, 得 $r_{1,2} = \pm \omega i$, 故

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t = A \sin(\omega t + \varphi), A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \sin \varphi = \frac{C_1}{A}.$$

由于振动周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2$, 故 $\omega = \pi$, 即

$$\frac{1000g\pi R^2}{m} = \pi^2,$$

从中解出

$$m = \frac{1000gR^2}{\pi} \approx 195 (\text{kg}).$$

习题 7-8

常系数非齐次线性微分方程

1. 求下列各微分方程的通解:

$$(1) 2y'' + y' - y = 2e^x; \quad (2) y'' + a^2 y = e^x;$$

- (3) $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1$; (4) $y'' + 3y' + 2y = 3xe^{-x}$;
 (5) $y'' - 2y' + 5y = e^x \sin 2x$; (6) $y'' - 6y' + 9y = (x+1)e^{3x}$;
 (7) $y'' + 5y' + 4y = 3 - 2x$; (8) $y'' + 4y = x \cos x$;
 (9) $y'' + y = e^x + \cos x$; (10) $y'' - y = \sin^2 x$.

解 (1) 由 $2r^2 + r - 1 = 0$, 解得 $r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = -1$. 故对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 e^{-x}.$$

因 $f(x) = 2e^x, \lambda = 1$ 不是特征方程的根, 故可设 $y^* = ae^x$ 是原方程的一个特解, 代入原方程得

$$2ae^x + ae^x - ae^x = 2e^x.$$

消去 e^x , 有 $a = 1$, 即

$$y^* = e^x.$$

故原方程的通解为

$$y = Y + y^* = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 e^{-x} + e^x.$$

(2) 由 $r^2 + a^2 = 0$, 解得 $r_{1,2} = \pm ai$. 故对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax.$$

因 $f(x) = e^x, \lambda = 1$ 不是特征方程的根, 故设 $y^* = be^x$ 是原方程的一个特解, 代入方程得

$$be^x + a^2 be^x = e^x,$$

消去 e^x , 有 $b = \frac{1}{1+a^2}$, 即 $y^* = \frac{e^x}{1+a^2}$. 故原方程的通解为

$$y = Y + y^* = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + \frac{e^x}{1+a^2}.$$

(3) 由 $2r^2 + 5r = 0$, 解得 $r_1 = 0, r_2 = -\frac{5}{2}$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x}.$$

因 $f(x) = 5x^2 - 2x - 1, \lambda = 0$ 是特征方程的单根, 故设 $y^* = x(b_0x^2 + b_1x + b_2)$ 是原方程的一个特解, 代入方程并整理, 得

$$15b_0x^2 + (12b_0 + 10b_1)x + 4b_1 + 5b_2 = 5x^2 - 2x - 1.$$

比较系数得 $b_0 = \frac{1}{3}, b_1 = -\frac{3}{5}, b_2 = \frac{7}{25}$, 即

$$y^* = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x.$$

故原方程的通解为

$$y = Y + y^* = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x.$$

(4) 由 $r^2 + 3r + 2 = 0$ 解得 $r_1 = -1, r_2 = -2$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

因 $f(x) = 3xe^{-x}, \lambda = -1$ 是特征方程的单根, 故可设

$$y^* = xe^{-x}(ax + b) = e^{-x}(ax^2 + bx)$$

是原方程的一个特解, 代入方程并消去 e^{-x} , 得

$$2ax + (2a + b) = 3x.$$

比较系数, 得 $a = \frac{3}{2}, b = -3$, 即

$$y^* = e^{-x}\left(\frac{3}{2}x^2 - 3x\right).$$

故原方程的通解为

$$y = Y + y^* = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + e^{-x}\left(\frac{3}{2}x^2 - 3x\right).$$

(5) 由 $r^2 - 2r + 5 = 0$, 解得 $r_{1,2} = 1 \pm 2i$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

因 $f(x) = e^x \sin 2x = e^x(0 \cdot \cos 2x + 1 \cdot \sin 2x), \lambda + i\omega = 1 + 2i$ 是特征方程的单根, 故可设

$$y^* = xe^x(a \cos 2x + b \sin 2x)$$

是原方程的一个特解, 代入方程并消去 e^x , 得

$$4b \cos 2x - 4a \sin 2x = \sin 2x.$$

比较系数, 得 $a = -\frac{1}{4}, b = 0$, 即

$$y^* = xe^x\left(-\frac{1}{4}\cos 2x\right) = -\frac{1}{4}xe^x \cos 2x.$$

故原方程的通解为

$$y = Y + y^* = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \frac{1}{4}xe^x \cos 2x.$$

(6) 由 $r^2 - 6r + 9 = 0$ 得 $r_{1,2} = 3$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y = e^{3x}(C_1 + C_2 x).$$

因 $f(x) = e^{3x}(x + 1), \lambda = 3$ 是特征方程的(二重)根, 故可设

$$y^* = e^{3x}(ax + b)x^2$$

是原方程的一个特解, 代入方程并消去 e^{3x} , 得

$$6ax + 2b = x + 1.$$

比较系数, 得 $a = \frac{1}{6}, b = \frac{1}{2}$, 即

$$y^* = e^{3x}\left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{2}\right)x^2.$$

故原方程的通解为

$$y = Y + y^* = e^{3x}(C_1 + C_2 x) + e^{3x}\left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{2}\right)x^2.$$

(7) 由 $r^2 + 5r + 4 = 0$ 解得 $r_1 = -1, r_2 = -4$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x}.$$

因 $f(x) = 3 - 2x, \lambda = 0$ 不是特征方程的根, 故可设

$$y^* = ax + b$$

是原方程的一个特解, 代入方程, 得

$$4ax + 5a + 4b = -2x + 3.$$

比较系数得 $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{11}{8}$, 即

$$y^* = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{8}.$$

故原方程的通解为

$$y = Y + y^* = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x} - \frac{1}{2}x + \frac{11}{8}.$$

(8) 由 $r^2 + 4 = 0$ 解得 $r_{1,2} = \pm 2i$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

因 $f(x) = x \cos x, \lambda + i\omega = i$ 不是特征方程的根, 故可设

$$y^* = (ax + b) \cos x + (cx + d) \sin x$$

是原方程的一个特解, 代入方程, 得

$$(3ax + 3b + 2c) \cos x + (3cx + 3d - 2a) \sin x = x \cos x.$$

比较系数有

$$\begin{cases} 3a = 1, \\ 3b + 2c = 0, \\ 3c = 0, \\ 3d - 2a = 0, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a = \frac{1}{3}, \\ b = 0, \\ c = 0, \\ d = \frac{2}{9}, \end{cases}$$

即 $y^* = \frac{1}{3}x \cos x + \frac{2}{9} \sin x$. 故原方程的通解为

$$y = Y + y^* = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{3}x \cos x + \frac{2}{9} \sin x.$$

(9) 由 $r^2 + 1 = 0$ 解得 $r_{1,2} = \pm i$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

因 $f(x) = e^x + \cos x$, 对应于方程 $y'' + y = e^x$, 可设特解 $y_1^* = Ae^x$; 对应于方程 $y'' + y = \cos x$ ($\lambda + i\omega = i$ 是特征方程的根) 可设特解 $y_2^* = x(B \cos x + C \sin x)$, 故由叠加原理, 设

$$y^* = Ae^x + x(B \cos x + C \sin x)$$

是原方程的一个特解, 代入方程, 得

$$2Ae^x + 2C \cos x - 2B \sin x = e^x + \cos x.$$

比较系数, 得 $A = \frac{1}{2}$, $B = 0$, $C = \frac{1}{2}$, 即

$$y^* = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}x \sin x.$$

故原方程的通解为

$$y = Y + y^* = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}x \sin x.$$

(10) 由 $r^2 - 1 = 0$ 解得 $r_{1,2} = \pm 1$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

因 $f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$, 对应于方程 $y'' - y = \frac{1}{2}$, 可设特解 $y_1^* = A$; 对应于方程

$y'' - y = -\frac{1}{2} \cos 2x$, 可设特解 $y_2^* = B \cos 2x + C \sin 2x$, 故由叠加原理, 设

$$y^* = A + B \cos 2x + C \sin 2x$$

是原方程的一个特解, 代入方程, 得

$$-A - 5B \cos 2x - 5C \sin 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x.$$

比较系数得 $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{10}$, $C = 0$, 即

$$y^* = -\frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cos 2x.$$

故原方程的通解为

$$y = Y + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cos 2x.$$

2. 求下列各微分方程满足已给初值条件的特解:

$$(1) y'' + y + \sin 2x = 0, y|_{x=\pi} = 1, y'|_{x=\pi} = 1;$$

$$(2) y'' - 3y' + 2y = 5, y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2;$$

$$(3) \quad y'' - 10y' + 9y = e^{2x}, \quad y|_{x=0} = \frac{6}{7}, \quad y'|_{x=0} = \frac{33}{7};$$

$$(4) \quad y'' - y = 4xe^x, \quad y|_{x=0} = 0, \quad y'|_{x=0} = 1;$$

$$(5) \quad y'' - 4y' = 5, \quad y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 0.$$

解 (1) 由 $r^2 + 1 = 0$ 解得 $r_{1,2} = \pm i$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

因 $f(x) = -\sin 2x = e^{0x}(0 \cdot \cos 2x - \sin 2x)$, $\lambda + i\omega = 2i$ 不是特征方程的根, 故可设

$$y^* = A \cos 2x + B \sin 2x$$

是原方程的一个特解, 代入方程得

$$-3A \cos 2x - 3B \sin 2x = -\sin 2x.$$

比较系数得 $A = 0$, $B = \frac{1}{3}$, 即

$$y^* = \frac{1}{3} \sin 2x.$$

故原方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{3} \sin 2x.$$

且有

$$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{2}{3} \cos 2x.$$

代入初值条件 $x = \pi$, $y = 1$, $y' = 1$, 有

$$\begin{cases} -C_1 = 1, \\ -C_2 + \frac{2}{3} = 1, \end{cases}$$

解得 $C_1 = -1$, $C_2 = -\frac{1}{3}$, 故所求特解为

$$y = -\cos x - \frac{1}{3} \sin x + \frac{1}{3} \sin 2x.$$

(2) 由 $r^2 - 3r + 2 = 0$ 解得 $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

因 $f(x) = 5$, $\lambda = 0$ 不是特征方程的根, 故可设 $y^* = A$ 是原方程的一个特解, 代入方程

得 $A = \frac{5}{2}$, 即 $y^* = \frac{5}{2}$. 于是原方程的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{5}{2},$$

且有 $y' = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}$. 代入初值条件 $x = 0$, $y = 1$, $y' = 2$, 有

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \frac{5}{2} = 1, \\ C_1 + 2C_2 = 2, \end{cases}$$

解得 $C_1 = -5, C_2 = \frac{7}{2}$, 故所求特解为

$$y = -5e^x + \frac{7}{2}e^{2x} + \frac{5}{2}.$$

(3) 由 $r^2 - 10r + 9 = 0$ 解得 $r_1 = 1, r_2 = 9$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1 e^x + C_2 e^{9x}.$$

因 $f(x) = e^{2x}, \lambda = 2$ 不是特征方程的根, 故可设 $y^* = Ae^{2x}$ 是原方程的一个特解, 代入方程并消去 e^{2x} , 得 $A = -\frac{1}{7}$, 即 $y^* = -\frac{1}{7}e^{2x}$. 于是原方程的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{9x} - \frac{1}{7}e^{2x},$$

且有

$$y' = C_1 e^x + 9C_2 e^{9x} - \frac{2}{7}e^{2x}.$$

代入初值条件 $x=0, y=\frac{6}{7}, y'=\frac{33}{7}$, 有

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}, \\ C_1 + 9C_2 - \frac{2}{7} = \frac{33}{7}, \end{cases}$$

解得 $C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = \frac{1}{2}$, 故所求特解为

$$y = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{9x} - \frac{1}{7}e^{2x}.$$

(4) 由 $r^2 - 1 = 0$ 得特征根 $r_{1,2} = \pm 1$, 故对应的齐次方程的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

因 $f(x) = 4xe^x, \lambda = 1$ 是特征方程的单根, 故可设 $y^* = xe^x(Ax + B) = e^x(Ax^2 + Bx)$ 是原方程的一个特解, 代入方程并消去 e^x , 得

$$4Ax + 2A + 2B = 4x.$$

比较系数得 $A = 1, B = -1$, 即

$$y^* = e^x(x^2 - x).$$

于是原方程的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + e^x(x^2 - x),$$

即

$$y = e^x(x^2 - x + C_1) + C_2 e^{-x},$$

且有

$$y' = e^x (x^2 + x - 1 + C_1) - C_2 e^{-x}.$$

代入初值条件 $x=0, y=0, y'=1$, 有

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 - C_2 - 1 = 1, \end{cases}$$

解得 $C_1 = 1, C_2 = -1$, 故所求特解为

$$y = e^x (x^2 - x + 1) - e^{-x}.$$

(5) 由 $r^2 - 4r = 0$, 解得 $r_1 = 0, r_2 = 4$, 故对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1 + C_2 e^{4x}.$$

因 $f(x) = 5 = 5 \cdot e^{0x}, \lambda = 0$ 是特征方程的单根, 故可设 $y^* = Ax$ 是原方程的一个特解,

代入方程得 $A = -\frac{5}{4}$, 即

$$y^* = -\frac{5}{4}x.$$

于是原方程的通解为

$$y = C_1 + C_2 e^{4x} - \frac{5}{4}x,$$

且有

$$y' = 4C_2 e^{4x} - \frac{5}{4}.$$

代入初值条件 $x=0, y=1, y'=0$, 有

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ 4C_2 - \frac{5}{4} = 0, \end{cases}$$

解得 $C_1 = \frac{11}{16}, C_2 = \frac{5}{16}$, 故所求特解为

$$y = \frac{11}{16} + \frac{5}{16}e^{4x} - \frac{5}{4}x.$$

3. 大炮以仰角 α 、初速 v_0 发射炮弹, 若不计空气阻力, 求弹道曲线.

解 取炮口在原点, 炮弹前进的水平方向为 x 轴, 铅直向上为 y 轴, 设在时刻 t , 炮弹位于 $(x(t), y(t))$. 按题意, 有

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} = -g, \\ \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = v_0 \cos \alpha, \\ \frac{dx}{dt} = v_0 \sin \alpha, \end{cases} \quad (2)$$

且

$$\begin{cases} y|_{t=0} = 0, & y'|_{t=0} = v_0 \sin \alpha, \\ x|_{t=0} = 0, & x'|_{t=0} = v_0 \cos \alpha. \end{cases}$$

解方程(1), 得

$$y = -\frac{g}{2}t^2 + C_1 t + C_2,$$

代入初值条件 $t=0, y=0, y'=v_0 \sin \alpha$, 得 $C_2=0, C_1=v_0 \sin \alpha$, 即

$$y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{g}{2}t^2;$$

解方程(2), 得

$$x = C_3 t + C_4,$$

代入初值条件 $t=0, x=0, x'=v_0 \cos \alpha$, 得 $C_4=0, C_3=v_0 \cos \alpha$, 即

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t.$$

故弹道曲线为

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha \cdot t, \\ y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{g}{2}t^2. \end{cases}$$

4. 在 R, L, C 含源串联电路中, 电动势为 E 的电源对电容器 C 充电. 已知 $E=20 \text{ V}$, $C=0.2 \mu\text{F}$ (微法), $L=0.1 \text{ H}$ (亨), $R=1000 \Omega$, 试求合上开关 K 后的电流 $i(t)$ 及电压 $u_C(t)$.

解 由回路定律知

$$LCu_C'' + RCu_C' + u_C = E.$$

即

$$u_C'' + \frac{R}{L}u_C' + \frac{1}{LC}u_C = \frac{E}{LC}.$$

且依题意, 有初值条件, $u_C|_{t=0}=0, u_C'|_{t=0}=0$.

已知 $R=1000 (\Omega)$, $L=0.1 (\text{H})$, $C=0.2 (\text{mF})=0.2 \times 10^{-6} (\text{F})$, $E=20 (\text{V})$, 故微分方程为

$$u_C'' + 10^4 u_C' + 5 \times 10^7 u_C = 10^9,$$

其对应的齐次方程的特征方程为

$$r^2 + 10^4 r + 5 \times 10^7 = 0,$$

解得

$$r_{1,2} = -\frac{10^4}{2} \pm \frac{10^4}{2}\text{i} = -5 \times 10^3 \pm 5 \times 10^3 \text{i}.$$

因 $f(t)=10^9$. 可令 $u_C^*=A$ 是原方程的特解, 代入方程, 得 $A=20$, 即 $u_C^*=20$. 故方程的通解为

$$u_C = e^{-5 \times 10^3 t} [C_1 \cos(5 \times 10^3 t) + C_2 \sin(5 \times 10^3 t)] + 20,$$

代入初值条件, $t = 0, u_C = 0$, 有 $C_1 + 20 = 0$, 即 $C_1 = -20$. 又

$$\begin{aligned} u'_C &= -5 \times 10^3 e^{-5 \times 10^3 t} [-20 \cos(5 \times 10^3 t) + C_2 \sin(5 \times 10^3 t)] + \\ &\quad e^{-5 \times 10^3 t} [20 \times 5 \times 10^3 \sin(5 \times 10^3 t) + 5 \times 10^3 C_2 \cos(5 \times 10^3 t)], \end{aligned}$$

代入初值条件 $t = 0, u'_C = 0$, 有 $-5 \times 10^3 (-20) + 5 \times 10^3 C_2 = 0$, 即 $C_2 = -20$. 故

$$\begin{aligned} u_C &= 20 - 20e^{-5 \times 10^3 t} [\cos(5 \times 10^3 t) + \sin(5 \times 10^3 t)] \text{ (V)}, \\ i &= Cu'_C = 0.2 \times 10^{-6} u'_C \\ &= 4 \times 10^{-2} e^{-5 \times 10^3 t} \sin(5 \times 10^3 t) \text{ (A)}. \end{aligned}$$

5. 一链条悬挂在一钉子上, 起动时一端离开钉子 8 m, 另一端离开钉子 12 m, 分别在以下两种情况下求链条滑下来所需要的时间:

- (1) 若不计钉子对链条所产生的摩擦力;
- (2) 若摩擦力为 1 m 长的链条的重量.

解 设链条的线密度为 ρ (kg/m), 则链条的质量为 20ρ (kg). 又设在时刻 t , 链条的一端离钉子 $x = x(t)$, 则另一端离钉子 $20 - x$ (图 7-4), 当 $t = 0$ 时, $x = 12$.

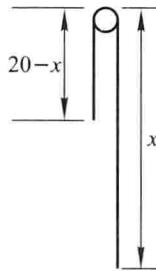


图 7-4

(1) 若不计摩擦力, 则运动过程中的链条所受力的大小为 $[x - (20 - x)]\rho g$, 按牛顿定律, 有

$$20\rho x'' = [x - (20 - x)]\rho g,$$

即

$$x'' - \frac{g}{10}x = -g.$$

且有初值条件

$$x|_{t=0} = 12, x'|_{t=0} = 0.$$

由特征方程 $r^2 - \frac{g}{10} = 0$, 解得 $r_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{g}{10}}$, 又将 $x^* = A$ 代入方程, 得 $A = 10$, 即

$x^* = 10$. 求得方程通解

$$x = C_1 e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t} + 10,$$

代入初值条件 $t = 0, x = 12, x' = 0$, 得 $C_1 = C_2 = 1$, 故

$$x = e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t} + 10 \quad \left(\text{或 } x = 2\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{g}{10}}t\right) + 10 \right).$$

取 $x = 20$, 得 $e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t} = 10 \quad \left(\text{或 } \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{g}{10}}t\right) = 5 \right)$, 即

$$t = \sqrt{\frac{10}{g}} \ln(5 + 2\sqrt{6}) \text{ (s)} \quad \left(\text{或 } t = \sqrt{\frac{10}{g}} \operatorname{arch} 5 \text{ (s)} \right).$$

(2) 摩擦力为 1 m 长链条的重量即为 ρg , 则运动过程中的链条所受力的大小为 $[x - (20 - x)]\rho g - \rho g$, 按牛顿定律, 有

$$20\rho x'' = [x - (20 - x)]\rho g - \rho g,$$

即

$$x'' - \frac{g}{10}x = -\frac{21}{10}g,$$

且有初值条件

$$x|_{t=0} = 12, x'|_{t=0} = 0.$$

满足该条件的特解为

$$x = \frac{3}{4}(e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t}) + \frac{21}{2} \quad \left(\text{或 } x = \frac{3}{2}\operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{g}{10}}t\right) + \frac{21}{2} \right).$$

取 $x = 20$, 得 $e^{\sqrt{\frac{g}{10}}t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{10}}t} = \frac{38}{3} \quad \left(\text{或 } \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{g}{10}}t\right) = \frac{19}{3} \right)$, 即

$$t = \sqrt{\frac{10}{g}} \ln\left(\frac{19}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{22}\right) \text{ (s)} \quad \left(\text{或 } t = \sqrt{\frac{10}{g}} \operatorname{arch} \frac{19}{3} \text{ (s)} \right).$$

6. 设函数 $\varphi(x)$ 连续, 且满足

$$\varphi(x) = e^x + \int_0^x t\varphi(t) dt - x \int_0^x \varphi(t) dt,$$

求 $\varphi(x)$.

解 由所给方程可得 $\varphi(0) = 1$, 在该方程两端对 x 求导, 得

$$\varphi'(x) = e^x + x\varphi(x) - \int_0^x \varphi(t) dt - x\varphi(x),$$

即

$$\varphi'(x) = e^x - \int_0^x \varphi(t) dt.$$

可见 $\varphi'(0) = 1$.

又在方程 $\varphi'(x) = e^x - \int_0^x \varphi(t) dt$ 的两端对 x 求导, 得

$$\varphi''(x) = e^x - \varphi(x).$$

若记 $\varphi(x) = y$, 则有初值问题

$$\begin{cases} y'' + y = e^x, \\ y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 1. \end{cases} \quad (1)$$

上述非齐次方程对应的齐次方程的特征方程为 $r^2 + 1 = 0$, 解得 $r_{1,2} = \pm i$, 而 $f(x) = e^x, \lambda = 1$ 不是特征方程的根, 故令 $y^* = Ae^x$ 是方程(1)的特解, 代入方程(1)并消去 e^x , 得 $A = \frac{1}{2}$, 于是方程(1)有通解

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}e^x,$$

且有

$$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{1}{2}e^x.$$

代入初值条件 $x = 0, y = 1, y' = 1$, 有

$$\begin{cases} C_1 + \frac{1}{2} = 1, \\ C_2 + \frac{1}{2} = 1, \end{cases}$$

即 $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$. 于是得

$$y = \varphi(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x + e^x).$$

* 习题 7-9

欧拉方程

求下列欧拉方程的通解:

$$1. x^2 y'' + xy' - y = 0;$$

$$2. y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x};$$

$$3. x^3 y''' + 3x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0;$$

$$4. x^2 y'' - 2xy' + 2y = \ln^2 x - 2\ln x;$$

$$5. x^2 y'' + xy' - 4y = x^3;$$

$$6. x^2 y'' - xy' + 4y = x \sin(\ln x);$$

$$7. x^2 y'' - 3xy' + 4y = x + x^2 \ln x;$$

$$8. x^3 y''' + 2xy' - 2y = x^2 \ln x + 3x.$$

说明 令 $x = e^t$ 或 $t = \ln x$, 则 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}$, 即 $x \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$. 记 $\frac{d}{dt} = D$, $\frac{d^2}{dt^2} = D^2$, $\frac{d^3}{dt^3} = D^3$,

D^3 , 则

$$x \frac{dy}{dx} = Dy,$$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = D(D-1)y,$$

$$x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} = D(D-1)(D-2)y.$$

本节习题中 8 个欧拉方程均用此法转化为常系数线性微分方程求解.

解 1. 令 $x = e^t$, 记 $D = \frac{d}{dt}$, 则原方程化为

$$[D(D - 1) + D - 1]y = 0, \quad (1)$$

特征方程为 $r(r - 1) + r - 1 = 0$, 即 $r^2 - 1 = 0$, 有特征根 $r_{1,2} = \pm 1$, 故方程(1)有通解

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{-t},$$

即原方程的通解为 $y = C_1 x + \frac{C_2}{x}$.

2. 原方程可改写成 $x^2 y'' - xy' + y = 2x$. 令 $x = e^t$, 记 $D = \frac{d}{dt}$, 则方程化为

$$[D(D - 1) - D + 1]y = 2e^t. \quad (2)$$

方程(2)对应的齐次方程的特征方程为 $r(r - 1) - r + 1 = 0$, 即 $r^2 - 2r + 1 = 0$, 有特征根 $r_{1,2} = 1$. 故方程(2)对应的齐次方程的通解为

$$Y = e^t(C_1 + C_2 t).$$

因 $f(t) = 2e^t$, $\lambda = 1$ 是特征(二重)根. 设 $y^* = At^2 e^t$, 则

$$Dy = A(t^2 + 2t)e^t, D^2y = A(t^2 + 4t + 2)e^t,$$

代入方程(2)中可得 $A = 1$, 即 $y^* = t^2 e^t$, 故方程(2)的通解为

$$y = e^t(C_1 + C_2 t) + t^2 e^t,$$

即原方程的通解为

$$y = x(C_1 + C_2 \ln x) + x \ln^2 x.$$

3. 令 $x = e^t$, 记 $D = \frac{d}{dt}$, 则方程可化为

$$[D(D - 1)(D - 2) + 3D(D - 1) - 2D + 2]y = 0. \quad (3)$$

其特征方程为 $r(r - 1)(r - 2) + 3r(r - 1) - 2r + 2 = 0$, 即 $(r - 1)^2(r + 2) = 0$, 有根 $r_{1,2} = 1$, $r_3 = -2$. 故方程(3)的通解为

$$y = e^t(C_1 + C_2 t) + C_3 e^{-2t},$$

即原方程的通解为

$$y = x(C_1 + C_2 \ln x) + \frac{C_3}{x^2}.$$

4. 令 $x = e^t$, 记 $D = \frac{d}{dt}$, 则方程可化为 $[D(D - 1) - 2D + 2]y = t^2 - 2t$, 即

$$(D^2 - 3D + 2)y = t^2 - 2t, \quad (4)$$

方程(4)对应的齐次方程的特征方程为 $r^2 - 3r + 2 = 0$, 有根 $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, 故齐次方程的通解为

$$Y = C_1 e^t + C_2 e^{2t}.$$

因 $f(t) = t^2 - 2t$, $\lambda = 0$ 不是特征方程的根, 故可令 $y^* = At^2 + Bt + C$ 是(4)的特解, 代

入方程(4), 比较系数得 $A = B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{4}$, 即

$$y^* = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}.$$

于是方程(4)的通解为

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4},$$

即原方程的通解为

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + \frac{1}{2} \ln^2 x + \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{4}.$$

5. 令 $x = e^t$, 记 $D = \frac{d}{dt}$, 则方程可化为 $[D(D-1) + D - 4]y = e^{3t}$, 即

$$(D^2 - 4)y = e^{3t}. \quad (5)$$

方程(5)对应的齐次方程的特征方程为 $r^2 - 4 = 0$, 有根 $r_{1,2} = \pm 2$, 故齐次方程的通解为

$$Y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x^2}.$$

因 $f(t) = e^{3t}$, $\lambda = 3$ 不是特征方程的根, 故可令 $y^* = Ae^{3t}$ 是方程(5)的特解, 即 $y^* = Ax^3$ 是原方程的特解, 代入原方程 $x^2 y'' + xy' - 4y = x^3$ 中, 得 $A = \frac{1}{5}$, 即 $y^* = \frac{1}{5}x^3$. 故原方程的通解为

$$y = Y + y^* = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x^2} + \frac{1}{5}x^3.$$

6. 令 $x = e^t$, 记 $D = \frac{d}{dt}$, 则原方程化为 $[D(D-1) - D + 4]y = e^t \sin t$, 即

$$(D^2 - 2D + 4)y = e^t \sin t. \quad (6)$$

方程(6)对应的齐次方程的特征方程为 $r^2 - 2r + 4 = 0$, 有根 $r_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}i$, 故齐次方程的通解为

$$Y = e^t [C_1 \cos(\sqrt{3}t) + C_2 \sin(\sqrt{3}t)].$$

因 $f(x) = e^t \sin t$, $\lambda + i\omega = 1 + i$ 不是特征方程的根, 故可令 $y^* = e^t (A \cos t + B \sin t)$ 是方程(6)的特解, 代入方程(6)并比较系数, 可得 $A = 0$, $B = \frac{1}{2}$, 即

$$y^* = \frac{e^t}{2} \sin t,$$

于是方程(6)的通解为

$$y = e^t [C_1 \cos(\sqrt{3}t) + C_2 \sin(\sqrt{3}t)] + \frac{e^t}{2} \sin t,$$

即原方程的通解为

$$y = x[C_1 \cos(\sqrt{3} \ln x) + C_2 \sin(\sqrt{3} \ln x)] + \frac{x}{2} \sin(\ln x).$$

7. 令 $x = e^t$, 记 $D = \frac{d}{dt}$, 则原方程可化为 $[D(D-1) - 3D + 4]y = e^t + te^{2t}$, 即

$$(D^2 - 4D + 4)y = e^t + te^{2t}. \quad (7)$$

方程(7)对应的齐次方程的特征方程为 $r^2 - 4r + 4 = 0$, 有根 $r_{1,2} = 2$, 故齐次方程的通解为

$$Y = e^{2t}(C_1 + C_2 t).$$

因 $\lambda = 1$ 不是特征方程的根, 故方程 $(D^2 - 4D + 4)y = e^t$ 的特解 $y_1^* = Ae^t$; 而 $\lambda = 2$ 是特征方程的(二重)根, 故方程 $(D^2 - 4D + 4)y = te^{2t}$ 的特解可令作 $y_2^* = t^2 e^{2t}(Bt + C)$. 由叠加原理知, 可令 $y^* = y_1^* + y_2^* = Ae^t + (Bt^3 + Ct^2)e^{2t}$ 是方程(7)的特解, 代入方程(7), 得

$$Ae^t + (6Bt + 2C)e^{2t} = e^t + te^{2t}.$$

比较系数, 得 $A = 1$, $B = \frac{1}{6}$, $C = 0$, 即

$$y^* = e^t + \frac{t^3}{6}e^{2t}.$$

于是方程(7)的通解为

$$y = e^{2t}(C_1 + C_2 t) + e^t + \frac{t^3}{6}e^{2t},$$

即原方程的通解为

$$y = x^2(C_1 + C_2 \ln x) + x + \frac{1}{6}x^2 \ln^3 x.$$

8. 令 $x = e^t$, 记 $D = \frac{d}{dt}$, 则原方程可化为 $[D(D-1)(D-2) + 2D - 2]y = te^{2t} + 3e^t$, 即

$$[(D-1)(D^2 - 2D + 2)]y = te^{2t} + 3e^t. \quad (8)$$

方程(8)对应的齐次方程的特征方程为 $(r-1)(r^2 - 2r + 2) = 0$, 有根 $r_1 = 1$, $r_{2,3} = 1 \pm i$, 故齐次方程的通解为

$$Y = e^t(C_1 + C_2 \cos t + C_3 \sin t).$$

对方程 $[(D-1)(D^2 - 2D + 2)]y = te^{2t}$, 因 $\lambda = 2$ 不是特征方程的根, 可令 $y_1^* = (At + B)e^{2t}$; 对方程 $[(D-1)(D^2 - 2D + 2)]y = 3e^t$, 因 $\lambda = 1$ 是特征方程的单根, 可令 $y_2^* = Cte^t$. 由叠加原理, 可令 $y^* = y_1^* + y_2^* = (At + B)e^{2t} + Cte^t$ 是方程(8)的特解, 即令

$$y^* = x^2(A \ln x + B) + Cx \ln x$$

是原方程的特解, 并有

$$y^{*''} = 2Ax \ln x + (A + 2B)x + C \ln x + C,$$

$$y^{*''} = 2A \ln x + (3A + 2B) + \frac{C}{x},$$

$$y^{*'''} = \frac{2A}{x} - \frac{C}{x^2}.$$

代入原方程 $x^3 y''' + 2xy' - 2y = x^2 \ln x + 3x$ 中, 得

$$2Ax^2 \ln x + (4A + 2B)x^2 + Cx = x^2 \ln x + 3x.$$

比较系数得 $A = \frac{1}{2}$, $B = -1$, $C = 3$, 即

$$y^* = x^2 \left(\frac{1}{2} \ln x - 1 \right) + 3x \ln x.$$

故原方程的通解为

$$y = x [C_1 + C_2 \cos(\ln x) + C_3 \sin(\ln x)] + x^2 \left(\frac{1}{2} \ln x - 1 \right) + 3x \ln x.$$

* 习题 7-10

常系数线性微分方程组解法举例

1. 求下列微分方程组的通解:

$$(1) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = z, \\ \frac{dz}{dx} = y; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = y, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = x; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = -x + y + 3, \\ \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = x + y - 3; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \frac{dx}{dt} + 5x + y = e^t, \\ \frac{dy}{dt} - x - 3y = e^{2t}; \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2x + \frac{dy}{dt} + y = t, \\ 5x + \frac{dy}{dt} + 3y = t^2; \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} \frac{dx}{dt} - 3x + 2 \frac{dy}{dt} + 4y = 2 \sin t, \\ 2 \frac{dx}{dt} + 2x + \frac{dy}{dt} - y = \cos t. \end{cases}$$

说明 求解线性微分方程组一般采用“消去法”:

1° 从方程组中消去一些未知函数及其各阶导数, 得到只含一个未知函数的线性微分方程, 然后求出该线性微分方程的通解, 本题的(1)(2)(3)题采用这种方法来解; 对于学过“线性代数”的读者, 可以记 $D = \frac{d}{dt}$, 将微分方程组写成代数线性方程组的形式, 然后用类似于克拉默法则的方法, 消去一些未知函数而获得一个未知函数的微分方程, 本题的(4)(5)(6)题采用这种方法来解.

2° 当用“消去法”求得一个未知函数的通解后, 求另一未知函数的通解时, 一般不必再积分, 否则会出现新的任意常数.

解 (1) 将

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z, \\ \frac{dz}{dx} = y, \end{cases} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

中①式的两端关于 x 求导, 得 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$, 代入②式得 $\frac{d^2y}{dx^2} = y$, 即

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0.$$

由它的特征方程 $r^2 - 1 = 0$, 解得 $r_{1,2} = \pm 1$. 于是得

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

从而由①, 得

$$z = \frac{dy}{dx} = C_1 e^x - C_2 e^{-x}.$$

故方程组的通解为

$$\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \\ z = C_1 e^x - C_2 e^{-x}. \end{cases}$$

(2) 将

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = y, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = x, \end{cases} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

中①式两端关于 t 求二阶导数, 得 $\frac{d^4x}{dt^4} = \frac{d^2y}{dt^2}$, 代入②式得 $\frac{d^4x}{dt^4} = x$, 即

$$\frac{d^4x}{dt^4} - x = 0.$$

由它的特征方程 $r^4 - 1 = 0$, 解得 $r_{1,2} = \pm 1, r_{3,4} = \pm i$. 于是得

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t.$$

再由①, 得

$$y = \frac{d^2x}{dt^2} = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_3 \cos t - C_4 \sin t.$$

故方程组的通解为

$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t, \\ y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_3 \cos t - C_4 \sin t. \end{cases}$$

(3) 将

$$\begin{cases} x' + y' = -x + y + 3, \\ x' - y' = x + y - 3, \end{cases} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

的① + ②得

$$x' = y, \quad (3)$$

代入①式, 得 $x' + x'' = -x + x' + 3$, 即

$$x'' + x = 3. \quad (4)$$

由它对应的齐次方程的特征方程 $r^2 + 1 = 0$, 解得 $r_{1,2} = \pm i$, 且易见 $x^* = 3$ 是④的特解, 于是

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 3.$$

由③得

$$y = x' = -C_1 \sin t + C_2 \cos t,$$

故方程组的通解为

$$\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 3, \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t. \end{cases}$$

(4) 记 $D = \frac{d}{dt}$, 则方程组可表示为

$$\begin{cases} (D + 5)x + y = e^t, \\ -x + (D - 3)y = e^{2t}, \end{cases} \quad (1)$$

记 $\Delta = \begin{vmatrix} D + 5 & 1 \\ -1 & D - 3 \end{vmatrix}$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} e^t & 1 \\ e^{2t} & D - 3 \end{vmatrix}$, 则有 $\Delta x = \Delta_x$, 即

$$(D^2 + 2D - 14)x = -2e^t - e^{2t}. \quad (3)$$

由其对应的齐次方程的特征方程 $r^2 + 2r - 14 = 0$, 解得 $r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{15}$, 并令 $x^* = Ae^t + Be^{2t}$ 是方程③的特解, 代入③并比较系数, 得

$$x^* = \frac{2}{11}e^t + \frac{1}{6}e^{2t},$$

于是得

$$x = C_1 e^{(-1+\sqrt{15})t} + C_2 e^{(-1-\sqrt{15})t} + \frac{2}{11}e^t + \frac{1}{6}e^{2t},$$

并由①得

$$y = e^t - (D + 5)x,$$

即

$$y = (-4 - \sqrt{15})C_1 e^{(-1+\sqrt{15})t} - (4 - \sqrt{15})C_2 e^{(-1-\sqrt{15})t} - \frac{1}{11}e^t - \frac{7}{6}e^{2t}.$$

(5) 记 $D = \frac{d}{dt}$, 方程组可表示为

$$\begin{cases} (D + 2)x + (D + 1)y = t, \\ 5x + (D + 3)y = t^2, \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

则有

$$\begin{vmatrix} D+2 & D+1 \\ 5 & D+3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} D+2 & t \\ 5 & t^2 \end{vmatrix},$$

即

$$(D^2 + 1)y = 2t^2 - 3t. \quad (3)$$

③所对应的齐次方程的特征方程的根为 $r_{1,2} = \pm i$, 令 $y^* = At^2 + Bt + C$, 代入③并比较系数, 可得 $A = 2, B = -3, C = -4$. 于是

$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 2t^2 - 3t - 4.$$

再由②得 $x = \frac{1}{5}[t^2 - (D+3)y]$, 即

$$x = -\frac{3C_1 + C_2}{5} \cos t + \frac{C_1 - 3C_2}{5} \sin t - t^2 + t + 3.$$

(6) 记 $D = \frac{d}{dt}$, 方程组可表示为

$$\begin{cases} (D-3)x + (2D+4)y = 2\sin t, \\ (2D+2)x + (D-1)y = \cos t, \end{cases} \quad (1)$$

则有

$$\begin{vmatrix} D-3 & 2D+4 \\ 2D+2 & D-1 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} 2\sin t & 2D+4 \\ \cos t & D-1 \end{vmatrix},$$

即

$$(3D^2 + 16D + 5)x = 2\cos t. \quad (3)$$

③所对应的齐次方程的特征方程为 $3r^2 + 16r + 5 = 0$, 有根 $r_1 = -5, r_2 = -\frac{1}{3}$. 令③

的特解 $x^* = A\cos t + B\sin t$, 代入③并比较系数, 可得 $A = \frac{1}{65}, B = \frac{8}{65}$. 于是

$$x = C_1 e^{-5t} + C_2 e^{-\frac{1}{3}t} + \frac{1}{65} \cos t + \frac{8}{65} \sin t.$$

再由① $-2 \times ②$, 得

$$-(3D+7)x + 6y = 2\sin t - 2\cos t,$$

即

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{6}[2\sin t - 2\cos t + (3D+7)x] \\ &= -\frac{4}{3}C_1 e^{-5t} + C_2 e^{-\frac{1}{3}t} + \frac{61\sin t - 33\cos t}{130}. \end{aligned}$$

2. 求下列微分方程组满足所给初值条件的特解:

$$(1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, x|_{t=0} = 0, \\ \frac{dy}{dt} = -x, y|_{t=0} = 1; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} - x = 0, x|_{t=0} = 1, \\ \frac{dx}{dt} + y = 0, y|_{t=0} = 0; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \frac{dx}{dt} + 3x - y = 0, x|_{t=0} = 1, \\ \frac{dy}{dt} - 8x + y = 0, y|_{t=0} = 4; \end{cases} \quad (4) \begin{cases} 2\frac{dx}{dt} - 4x + \frac{dy}{dt} - y = e^t, x|_{t=0} = \frac{3}{2}, \\ \frac{dx}{dt} + 3x + y = 0, y|_{t=0} = 0; \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2x - \frac{dy}{dt} = 10 \cos t, x|_{t=0} = 2, \\ \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2y = 4e^{-2t}, y|_{t=0} = 0; \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} \frac{dx}{dt} - x + \frac{dy}{dt} + 3y = e^{-t} - 1, x|_{t=0} = \frac{48}{49}, \\ \frac{dx}{dt} + 2x + \frac{dy}{dt} + y = e^{2t} + t, y|_{t=0} = \frac{95}{98}. \end{cases}$$

解 (1) 记 $D = \frac{d}{dt}$, 原方程组即为

$$\begin{cases} Dx - y = 0, \\ x + Dy = 0. \end{cases} \quad (1)$$

(2)

则有

$$\left| \begin{array}{cc} D & -1 \\ 1 & D \end{array} \right| x = 0,$$

即

$$(D^2 + 1)x = 0. \quad (3)$$

由(3)的特征方程 $r^2 + 1 = 0$, 解得 $r_{1,2} = \pm i$, 于是

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

代入初值条件 $t = 0, x = 0$, 得 $C_1 = 0$. 故 $x = C_2 \sin t$. 又由(1)得

$$y = Dx = C_2 \cos t,$$

代入初值条件 $t = 0, y = 1$, 得 $C_2 = 1$. 故方程组的特解为

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos t. \end{cases}$$

(2) 记 $D = \frac{d}{dt}$, 原方程组即为

$$\begin{cases} (D^2 - 1)x + 2Dy = 0, \\ Dx + y = 0. \end{cases} \quad (1)$$

(2)

则有

$$\left| \begin{array}{cc} D^2 - 1 & 2D \\ D & 1 \end{array} \right| x = 0,$$

即

$$(D^2 + 1)x = 0. \quad (3)$$

由③的特征方程 $r^2 + 1 = 0$, 解得 $r_{1,2} = \pm i$, 于是

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

代入初值条件 $t=0, x=1$, 得 $C_1=1$, 即 $x=\cos t+C_2 \sin t$. 又由②得

$$y = -Dx = \sin t - C_2 \cos t,$$

代入初值条件 $t = 0, y = 0$, 得 $C_2 = 0$. 故方程组的特解为

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$$

(3) 记 $D = \frac{d}{dt}$, 方程组即为

$$\left\{ \begin{array}{l} (D + 3)x - y = 0, \\ 2x + (D + 1)y = 0. \end{array} \right.$$

$$1 - 8x + (D + 1)y = 0.$$

则有

$$\begin{vmatrix} D+3 & -1 \\ -8 & D+1 \end{vmatrix} x = 0,$$

即

$$(D^2 + 4D - 5)x = 0.$$

由③的特征方程 $r^2 + 4r - 5 = 0$ 解得 $r_1 = 1, r_2 = -5$. 于是

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-5t}.$$

又由①得

$$y = (D + 3)x = 4C_1 e^t - 2C_2 e^{-5t}.$$

代入初值条件 $t = 0, x = 1, y = 4$, 就有

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ 4C_1 - 2C_2 = 4, \end{cases}$$

解得 $C_1 = 1, C_2 = 0$. 故方程组的特解为

$$\begin{cases} x = e^t, \\ y = 4e^t. \end{cases}$$

(4) 记 $D = \frac{d}{dt}$, 方程组即为

$$\begin{cases} (2D - 4)x + (D - 1)y = e^t, \\ (D + 3)x + y = 0. \end{cases}$$

则有

$$\begin{vmatrix} 2D - 4 & D - 1 \\ D + 3 & 1 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} e^t & D - 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

即

$$(D^2 + 1)x = -e^t.$$

由方程③对应的齐次方程的特征方程 $r^2 + 1 = 0$ 解得

$$r_{1,2} = \pm i.$$

令 $x^* = Ae^t$, 代入方程③并比较系数得 $A = -\frac{1}{2}$, 即 $x^* = -\frac{1}{2}e^t$. 于是

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \frac{1}{2}e^t.$$

又由②得

$$y = -(D + 3)x = (C_1 - 3C_2) \sin t - (3C_1 + C_2) \cos t + 2e^t.$$

代入初值条件 $t = 0, x = \frac{3}{2}, y = 0$, 就有

$$\begin{cases} C_1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \\ -3C_1 - C_2 + 2 = 0, \end{cases}$$

解得 $C_1 = 2, C_2 = -4$. 故方程组的特解为

$$\begin{cases} x = 2\cos t - 4\sin t - \frac{1}{2}e^t, \\ y = 14\sin t - 2\cos t + 2e^t. \end{cases}$$

(5) 记 $D = \frac{d}{dt}$, 方程组即为

$$\left\{ \begin{array}{l} (D + 2)x - Dy = 10\cos t, \\ \qquad \qquad \qquad \end{array} \right.$$

$$\int Dx + (D + 2)y = 4e^{-2t}. \quad ②$$

则有

$$\begin{vmatrix} D+2 & -D \\ D & D+2 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} D+2 & 10\cos t \\ D & 4e^{-2t} \end{vmatrix},$$

即

$$(D^2 + 2D + 2)y = 5 \sin t. \quad ③$$

由方程③对应的齐次方程的特征方程 $r^2 + 2r + 2 = 0$, 解得 $r_{1,2} = -1 \pm i$. 令 $y^* = A\cos t + B\sin t$, 代入方程③并比较系数, 得 $A = -2, B = 1$. 于是

$$y = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) - 2\cos t + \sin t$$

又由① - ②得

$$x = 5\cos t - 2e^{-2t} + (D+1)y \\ = e^{-t}(C_2 \cos t - C_1 \sin t) + 4\cos t + 3\sin t - 2e^{-2t}.$$

代入初值条件 $t = 0, x = 2, y = 0$, 有

$$\begin{cases} C_2 + 4 - 2 = 2, \\ C_1 - 2 = 0, \end{cases}$$

解得 $C_1 = 2, C_2 = 0$, 故方程组的特解为

$$\begin{cases} x = 4 \cos t + 3 \sin t - 2e^{-2t} - 2e^{-t} \sin t, \\ y = -2 \cos t + \sin t + 2e^{-t} \cos t. \end{cases}$$

(6) 记 $D = \frac{d}{dt}$, 方程组即为

$$\begin{cases} (D - 1)x + (D + 3)y = e^{-t} - 1, \\ (D + 2)x + (D + 1)y = e^{2t} + t. \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} (D - 1)x + (D + 3)y = e^{-t} - 1, \\ (D + 2)x + (D + 1)y = e^{2t} + t. \end{cases} \quad (2)$$

则有

$$\begin{vmatrix} D - 1 & D + 3 \\ D + 2 & D + 1 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} e^{-t} - 1 & D + 3 \\ e^{2t} + t & D + 1 \end{vmatrix},$$

即

$$(5D + 7)x = 5e^{2t} + 3t + 2, \quad (3)$$

亦即

$$Dx + \frac{7}{5}x = e^{2t} + \frac{3}{5}t + \frac{2}{5}.$$

由一阶线性方程的通解公式, 得

$$\begin{aligned} x &= e^{-\int \frac{7}{5} dt} \left[\int \left(e^{2t} + \frac{3}{5}t + \frac{2}{5} \right) e^{\int \frac{7}{5} dt} dt + C \right] \\ &= Ce^{-\frac{7}{5}t} + \frac{5}{17}e^{2t} + \frac{3}{7}t - \frac{1}{49}. \end{aligned}$$

代入初值条件 $t = 0, x = \frac{48}{49}$, 得 $C = \frac{12}{17}$. 于是

$$x = \frac{12}{17}e^{-\frac{7}{5}t} + \frac{5}{17}e^{2t} + \frac{3}{7}t - \frac{1}{49}.$$

由① - ②得

$$\begin{aligned} y &= \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{2t} - t - 1) \\ &= \frac{18}{17}e^{-\frac{7}{5}t} - \frac{1}{17}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{7}t - \frac{26}{49}. \end{aligned}$$

总习题七

1. 填空

(1) $xy''' + 2x^2y'^2 + x^3y = x^4 + 1$ 是 _____ 阶微分方程;

(2) 一阶线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的通解为 _____;

(3) 与积分方程 $y = \int_{x_0}^x f(x, y) dx$ 等价的微分方程初值问题是 _____;

(4) 已知 $y = 1, y = x, y = x^2$ 是某二阶非齐次线性微分方程的三个解, 则该方程的通解为 _____.

解 (1) 3.

$$(2) \quad y = e^{-\int P(x) dx} \left(\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right).$$

$$(3) \quad y' = f(x, y), y|_{x=x_0} = 0.$$

注 1° 方程 $y = \int_{x_0}^x f(x, y) dx$ 的积分上限 x 是积分方程的变量, 它是与 y 相对应的; 而积分表达式中 $f(x, y) dx$ 中的 x 是积分变量, 不能将它与积分上限相混淆, 故积分方程应理解为 $y = \int_{x_0}^x f(t, y) dt$.

2° 由于积分方程 $y = \int_{x_0}^x f(t, y) dt$ 确定了隐函数 $y = y(x)$, 因此积分方程中的 y 取 $y = y(x)$ 后, 有恒等式

$$y(x) \equiv \int_{x_0}^x f[t, y(t)] dt.$$

于是上式两端对 x 求导, 就得 $y'(x) = f[x, y(x)]$, 即 $y' = f(x, y)$. 显然, 当 $x = x_0$ 时, $y = \int_{x_0}^{x_0} f(x, y) dx = 0$, 即 $y|_{x=x_0} = 0$.

$$(4) \quad y = C_1(x - 1) + C_2(x^2 - 1) + 1.$$

因为由叠加原理知 $x - 1$ 与 $x^2 - 1$ 是非齐次方程对应的齐次方程的解, 且它们是线性无关的, 于是根据线性方程通解结构得出以上结论.

2. 以下两题中给出了四个结论, 从中选出一个正确的结论:

(1) 设非齐次线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 有两个不同的解: $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$, C 为任意常数, 则该方程的通解是() .

- (A) $C[y_1(x) - y_2(x)]$
- (B) $y_1(x) + C[y_1(x) - y_2(x)]$
- (C) $C[y_1(x) + y_2(x)]$
- (D) $y_1(x) + C[y_1(x) + y_2(x)]$

解 $y_1(x) - y_2(x)$ 是对应的齐次方程 $y' + P(x)y = 0$ 的非零解, 从而由线性微分方程解的性质定理知 $C[y_1(x) - y_2(x)]$ 是齐次方程的通解, 再由非齐次线性方程解的结构定理知 $y_1(x) + C[y_1(x) - y_2(x)]$ 是原方程的通解. 故选(B).

(2) 具有特解 $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = 2xe^{-x}$, $y_3 = 3e^x$ 的三阶常系数齐次线性微分方程是().

- (A) $y''' - y'' - y' + y = 0$
- (B) $y''' + y'' - y' - y = 0$
- (C) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$
- (D) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

解 由题设知 $r = -1, -1, 1$ 为所求齐次线性微分方程对应的特征方程的 3 个根, 而 $(r+1)^2(r-1) = r^3 + r^2 - r - 1$, 故应选(B).

3. 求以下列各式所表示的函数为通解的微分方程:

$$(1) (x + C)^2 + y^2 = 1 \text{ (其中 } C \text{ 为任意常数);}$$

$$(2) y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} \text{ (其中 } C_1, C_2 \text{ 为任意常数).}$$

解 (1) 将 $(x + C)^2 + y^2 = 1$ 两端关于 x 求导, 得

$$x + C + yy' = 0,$$

即有

$$C = -x - yy',$$

将其代入 $(x + C)^2 + y^2 = 1$ 中, 得

$$y^2(1 + y'^2) = 1.$$

(2) 将 $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ 关于 x 求二次导数, 得

$$\begin{cases} y' = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}, \\ y'' = C_1 e^x + 4C_2 e^{2x}. \end{cases}$$

把以上两式看成是以 C_1 与 C_2 为未知量的线性方程组, 解得

$$C_1 = (2y' - y'')e^{-x}, \quad C_2 = \frac{1}{2}(y'' - y')e^{-2x},$$

代入 $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ 中, 得

$$y = (2y' - y'') + \frac{1}{2}(y'' - y'),$$

即 $y'' - 3y' + 2y = 0$.

4. 求下列微分方程的通解:

$$(1) xy' + y = 2\sqrt{xy};$$

$$(2) xy'\ln x + y = ax(\ln x + 1);$$

$$(3) \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2(\ln y - x)};$$

$$*(4) \frac{dy}{dx} + xy - x^3 y^3 = 0;$$

$$(5) y'' + y'^2 + 1 = 0;$$

$$(6) yy'' - y'^2 - 1 = 0;$$

$$(7) y'' + 2y' + 5y = \sin 2x;$$

$$(8) y''' + y'' - 2y' = x(e^x + 4);$$

$$*(9) (y^4 - 3x^2) dy + xy dx = 0;$$

$$(10) y' + x = \sqrt{x^2 + y}.$$

解 (1) 将方程化为 $y' + \frac{y}{x} = 2\sqrt{\frac{y}{x}}$, 并令 $\frac{y}{x} = u$, 则方程成为

$$xu' = 2\sqrt{u} - 2u.$$

分离变量后有

$$\frac{du}{2\sqrt{u}(1 - \sqrt{u})} = \frac{dx}{x},$$

积分得

$$\ln |1 - \sqrt{u}| = -\ln |x| + \ln C_1,$$

即 $x(1 - \sqrt{u}) = C$, 代入 $u = \frac{y}{x}$, 得原方程的通解 $x - \sqrt{xy} = C$.

(2) 原方程可化为 $y' + \frac{1}{x \ln x} y = a \left(1 + \frac{1}{\ln x} \right)$, 由一阶线性方程的通解公式, 得

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{1}{x \ln x} dx} \left[\int a \left(1 + \frac{1}{\ln x} \right) e^{\int \frac{1}{x \ln x} dx} dx + C \right] \\ &= \frac{1}{\ln x} \left[\int a (\ln x + 1) dx + C \right] = \frac{1}{\ln x} (ax \ln x + C) \\ &= ax + \frac{C}{\ln x}. \end{aligned}$$

故方程的通解为 $y = ax + \frac{C}{\ln x}$.

(3) 原方程可表示为 $\frac{dx}{dy} + \frac{2}{y} x = \frac{2 \ln y}{y}$, 由一阶线性方程的通解公式, 得

$$\begin{aligned} x &= e^{-\int \frac{2}{y} dy} \left(\int \frac{2 \ln y}{y} e^{\int \frac{2}{y} dy} dy + C \right) \\ &= \frac{1}{y^2} \left(\int 2y \ln y dy + C \right) = \frac{1}{y^2} \left(y^2 \ln y - \frac{1}{2} y^2 + C \right) \\ &= \ln y - \frac{1}{2} + \frac{C}{y^2}. \end{aligned}$$

故方程的通解为 $x = \frac{C}{y^2} + \ln y - \frac{1}{2}$.

* (4) 原方程为伯努利方程 $y' + xy = x^3 y^3$. 该方程两端同除以 y^3 后成为

$$\frac{y'}{y^3} + x \frac{1}{y^2} = x^3.$$

令 $\frac{1}{y^2} = z$, 则 $-2 \frac{y'}{y^3} = z'$, 且原方程化为

$$z' - 2xz = -2x^3.$$

得

$$\begin{aligned} z &= e^{\int 2x dx} \left(\int -2x^3 e^{-\int 2x dx} dx + C \right) = e^{x^2} \left(\int -2x^3 e^{-x^2} dx + C \right) \\ &= e^{x^2} \left(x^2 e^{-x^2} - \int 2x e^{-x^2} dx + C \right) = e^{x^2} (x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + C) \\ &= x^2 + 1 + Ce^{x^2}. \end{aligned}$$

代入 $z = \frac{1}{y^2}$, 即得原方程的通解

$$\frac{1}{y^2} = Ce^{x^2} + x^2 + 1.$$

(5) 令 $y' = p$, 则 $y'' = p'$ 且方程成为

$$p' + p^2 + 1 = 0.$$

分离变量并积分

$$\int \frac{dp}{1+p^2} = - \int dx,$$

得 $\arctan p = -x + C_1$, 即

$$y' = p = \tan(-x + C_1),$$

于是得通解

$$\begin{aligned} y &= \int -\tan(x - C_1) dx \\ &= \ln |\cos(x - C_1)| + C_2, \end{aligned}$$

或写成 $y = \ln |\cos(x + C_1)| + C_2$.

(6) 此方程不显含 x , 令 $y' = p$, 则 $y'' = p \frac{dp}{dy}$, 且原方程化为

$$yp \frac{dp}{dy} - p^2 - 1 = 0.$$

分离变量

$$\frac{p dp}{p^2 + 1} = \frac{dy}{y},$$

积分得

$$\frac{1}{2} \ln(p^2 + 1) = \ln y + \ln C_1,$$

即 $p^2 + 1 = (C_1 y)^2$, 故 $p = \pm \sqrt{(C_1 y)^2 - 1}$. 取 $y' = \sqrt{(C_1 y)^2 - 1}$, 分离变量并积分

$$\begin{aligned} x &= \int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{(C_1 y)^2 - 1}} = \frac{1}{C_1} \int \frac{d(C_1 y)}{\sqrt{(C_1 y)^2 - 1}} \\ &= \frac{1}{C_1} \{ \ln [C_1 y + \sqrt{(C_1 y)^2 - 1}] - C_2 \}, \end{aligned}$$

$$\text{即 } C_1 y = \frac{e^{C_1 x + C_2} + e^{-(C_1 x + C_2)}}{2}.$$

对于 $y' = -\sqrt{(C_1 y)^2 - 1}$, 可得相同的结果, 故原方程的通解为

$$y = \frac{1}{2C_1} (e^{C_1 x + C_2} + e^{-C_1 x - C_2}).$$

(7) 原方程对应的齐次方程的特征方程为 $r^2 + 2r + 5 = 0$, 有根 $r_{1,2} = -1 \pm 2i$, 故对应齐次方程的通解为 $Y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

因 $f(x) = \sin 2x$, $\lambda + i\omega = 2i$ 不是特征方程的根, 故令 $y^* = A \cos 2x + B \sin 2x$ 是原方程的特解. 将 y^* 代入原方程, 可得

$$(A + 4B) \cos 2x + (B - 4A) \sin 2x = \sin 2x.$$

比较系数, 得 $\begin{cases} A + 4B = 0, \\ B - 4A = 1, \end{cases}$ 即 $A = -\frac{4}{17}$, $B = \frac{1}{17}$. 于是

$$y^* = -\frac{4}{17}\cos 2x + \frac{1}{17}\sin 2x.$$

故原方程的通解为

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \frac{4}{17}\cos 2x + \frac{1}{17}\sin 2x.$$

(8) 原方程对应的齐次方程的特征方程为 $r^3 + r^2 - 2r = 0$, 有根 $r_1 = 0, r_2 = 1, r_3 = -2$, 故对应齐次方程的通解为 $Y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-2x}$.

对于方程

$$y''' + y'' - 2y' = xe^x, \quad ①$$

因 $f_1(x) = xe^x$, 其中 $\lambda = 1$ 是特征方程的(单)根, 故令 $y_1^* = x(A_1 x + B_1) e^x$, 代入①中并消去 e^x , 得 $6A_1 x + 8A_1 + 3B_1 = x$, 比较系数得

$$\begin{cases} 6A_1 = 1, \\ 8A_1 + 3B_1 = 0, \end{cases}$$

即 $A_1 = \frac{1}{6}, B_1 = -\frac{4}{9}$. 于是 $y_1^* = \left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{4}{9}x\right)e^x$.

对于方程

$$y''' + y'' - 2y' = 4x, \quad ②$$

因 $f_2(x) = 4x$, 其中 $\lambda = 0$ 是特征方程的(单)根, 故令 $y_2^* = x(A_2 x + B_2)$, 代入②中, 得 $-4A_2 x + 2A_2 - 2B_2 = 4x$. 比较系数得 $A_2 = -1, B_2 = -1$. 于是 $y_2^* = -x^2 - x$.

根据线性方程解的叠加原理知 $y^* = y_1^* + y_2^*$ 是原方程的特解, 故原方程的通解为

$$y = Y + y^* = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-2x} + \left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{4}{9}x\right)e^x - x^2 - x.$$

* (9) 原方程可改写成 $\frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x = -y^3 x^{-1}$, 这是伯努利方程. 在此方程两端同

乘以 x , 得 $x \frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x^2 = -y^3$.

令 $x^2 = z$, 则 $\frac{dz}{dy} = 2x \frac{dx}{dy}$, 且原方程化为

$$\frac{dz}{dy} - \frac{6}{y}z = -2y^3,$$

解得

$$\begin{aligned} z &= e^{\int \frac{6}{y} dy} \left(\int -2y^3 e^{-\int \frac{6}{y} dy} dy + C \right) = y^6 \left(\int -\frac{2}{y^3} dy + C \right) \\ &= y^6 \left(\frac{1}{y^2} + C \right) = y^4 + Cy^6. \end{aligned}$$

代入 $z = x^2$, 得原方程的通解 $x^2 = y^4 + Cy^6$.

(10) 令 $u = \sqrt{x^2 + y}$, 即 $y = u^2 - x^2$, 则 $\frac{dy}{dx} = 2u \frac{du}{dx} - 2x$. 且原方程化为 $2u \frac{du}{dx} - x = u$, 即 $\frac{du}{dx} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{u} \right) = \frac{1}{2}$.

又令 $\frac{u}{x} = v$, 即 $u = xv$, 则 $\frac{du}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$. 且原方程化为

$$v + x \frac{dv}{dx} - \frac{1}{2v} = \frac{1}{2}.$$

分离变量得 $\frac{v dv}{2v^2 - v - 1} = -\frac{1}{2} \frac{dx}{x}$. 积分

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \ln|x| &= \int \frac{v dv}{2v^2 - v - 1} = \frac{1}{3} \left(\int \frac{1}{v-1} dv + \int \frac{1}{2v+1} dv \right) \\ &= \frac{1}{3} \left[\ln|v-1| + \frac{1}{2} \ln|2v+1| \right] + C_1, \end{aligned}$$

即 $(v-1)^2(2v+1)x^3 = C_2$ ($C_2 = e^{-6C_1}$). 代入 $v = \frac{u}{x}$, 得

$$2u^3 - 3xu^2 + x^3 = C_2.$$

再代入 $u = \sqrt{x^2 + y}$, 得原方程的通解

$$2(x^2 + y)^{\frac{3}{2}} - 3x(x^2 + y) + x^3 = C_2,$$

即 $(x^2 + y)^{\frac{3}{2}} = x^3 + \frac{3}{2}xy + C$ ($C = \frac{C_2}{2}$).

5. 求下列微分方程满足所给初值条件的特解:

$$*(1) y^3 dx + 2(x^2 - xy^2) dy = 0, x = 1 \text{ 时 } y = 1;$$

$$(2) y'' - ay'^2 = 0, x = 0 \text{ 时 } y = 0, y' = -1;$$

$$(3) 2y'' - \sin 2y = 0, x = 0 \text{ 时 } y = \frac{\pi}{2}, y' = 1;$$

$$(4) y'' + 2y' + y = \cos x, x = 0 \text{ 时 } y = 0, y' = \frac{3}{2}.$$

解 * (1) 原方程可以表示成伯努利方程

$$\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x = -\frac{2}{y^3}x^2,$$

即

$$x^{-2} \frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x^{-1} = -\frac{2}{y^3}.$$

令 $z = x^{-1}$, 则 $\frac{dz}{dy} = -x^{-2} \frac{dx}{dy}$, 且原方程化为一阶线性方程

$$\frac{dz}{dy} + \frac{2}{y}z = \frac{2}{y^3}.$$

解得

$$\begin{aligned} z &= e^{-\int \frac{2}{y^3} dy} \left(\int \frac{2}{y^3} e^{\int \frac{2}{y^3} dy} dy + C \right) = \frac{1}{y^2} \left(\int \frac{2}{y} dy + C \right) \\ &= \frac{1}{y^2} (2 \ln |y| + C). \end{aligned}$$

将 $z = x^{-1}$ 代入上式, 得 $x^{-1} = \frac{1}{y^2} (2 \ln |y| + C)$, 即原方程的通解

$$y^2 = x (2 \ln |y| + C).$$

由初值条件 $x = 1, y = 1$, 得 $C = 1$, 故所求特解为

$$y^2 = x (2 \ln |y| + 1).$$

(2) 令 $y' = p$, 则原方程化为 $p' - ap^2 = 0$. 分离变量并积分

$$\int \frac{dp}{p^2} = \int a dx$$

得

$$-\frac{1}{p} = ax + C_1,$$

即 $p = -\frac{1}{ax + C_1}$. 代入初值条件 $x = 0, p = -1$, 得 $C_1 = 1$, 从而有

$$y' = -\frac{1}{ax + 1},$$

于是

$$y = -\int \frac{1}{ax + 1} dx = -\frac{1}{a} \ln(ax + 1) + C_2.$$

代入初值条件 $x = 0, y = 0$, 得 $C_2 = 0$. 故所求特解为

$$y = -\frac{1}{a} \ln(ax + 1).$$

(3) 在方程 $2y'' - \sin 2y = 0$ 两端同乘以 y' , 则有

$$2y'y'' - \sin 2yy' = 0,$$

即

$$\left(y'^2 + \frac{1}{2} \cos 2y \right)' = 0,$$

于是

$$y'^2 + \frac{1}{2} \cos 2y = C_1.$$

代入初值条件 $y = \frac{\pi}{2}, y' = 1$, 得 $C_1 = \frac{1}{2}$. 故有 $y'^2 + \frac{1}{2} \cos 2y = \frac{1}{2}$, 即

$$y'^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2y = \sin^2 y,$$

并因 $y = \frac{\pi}{2}$ 时, $y' = 1$, 故上式开方后取

$$y' = \sin y.$$

分离变量并积分

$$\int \frac{dy}{\sin y} = \int dx,$$

得

$$\ln \tan \frac{y}{2} = x + C_2.$$

代入初值条件 $x = 0, y = \frac{\pi}{2}$, 得 $C_2 = 0$, 故所求特解为 $\ln \tan \frac{y}{2} = x$, 即

$$y = 2 \arctan e^x.$$

(4) 由原方程对应齐次方程的特征方程 $r^2 + 2r + 1 = 0$, 解得 $r_{1,2} = -1$, 故对应齐次方程的通解为 $Y = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$.

因 $f(x) = \cos x, \lambda + i\omega = 0 + i$ 不是特征方程的根, 故令 $y^* = A \cos x + B \sin x$ 是原方程的特解, 并代入原方程, 得

$$-2A \sin x + 2B \cos x = \cos x.$$

比较系数得 $A = 0, B = \frac{1}{2}$, 故 $y^* = \frac{1}{2} \sin x$, 且原方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + \frac{1}{2} \sin x,$$

并有

$$y' = (C_2 - C_1 - C_2 x)e^{-x} + \frac{1}{2} \cos x.$$

代入初值条件 $x = 0, y = 0, y' = \frac{3}{2}$, 有

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 - C_1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \end{cases}$$

即 $C_1 = 0, C_2 = 1$. 故所求特解为

$$y = x e^{-x} + \frac{1}{2} \sin x.$$

6. 已知某曲线经过点 $(1, 1)$, 它的切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标, 求它的方程.

解 设 (x, y) 为曲线上的点, 则曲线在该点处的切线方程为

$$Y - y = y'(X - x),$$

切线在纵轴上的截距为 $y - xy'$. 并依题意, 有

$$y - xy' = x, \quad y|_{x=1} = 1.$$

将上述方程写成 $y' - \frac{1}{x}y = -1$, 可解得

$$\begin{aligned} y &= e^{\int \frac{1}{x} dx} \left(\int -e^{-\int \frac{1}{x} dx} + C \right) = x \left(\int -\frac{1}{x} dx + C \right) \\ &= x(C - \ln|x|). \end{aligned}$$

代入初值条件 $x=1, y=1$, 得 $C=1$. 故所求曲线的方程为

$$y = x(1 - \ln|x|).$$

7. 已知某车间的容积为 $30 \times 30 \times 6 \text{ m}^3$, 其中的空气含 0.12% 的 CO_2 (以容积计算). 现以含 CO_2 0.04% 的新鲜空气输入, 问每分钟应输入多少, 才能在 30 min 后使车间空气中 CO_2 的含量不超过 0.06%? (假定输入的新鲜空气与原有空气很快混合均匀后, 以相同的流量排出.)

解 设每分钟输入 $v(\text{m}^3)$ 的空气. 又设在时刻 t 车间中 CO_2 的浓度为 $x = x(t) (\%)$, 则在时间间隔 $[t, t+dt]$ 内, 车间内 CO_2 的含量的改变量为

$$30 \times 30 \times 6 \, dx = 0.04 \times 10^{-2} v dt - vx dt$$

即

$$\frac{dx}{x - 0.0004} = -\frac{v}{5400} dt,$$

$$\text{且 } x|_{t=0} = 0.0012.$$

将上述微分方程两端积分, 得

$$\ln(x - 0.0004) = -\frac{v}{5400}t + \ln C,$$

即 $x = 0.0004 + Ce^{-\frac{v}{5400}t}$. 代入初值条件 $t=0, x=0.0012$, 可得 $C=0.0008$. 于是有

$$x = 0.0004 + 0.0008e^{-\frac{v}{5400}t}.$$

依题意, 当 $t=30$ 时, $x \leq 0.0006$, 将 $t=30, x=0.0006$ 代入上式, 解得

$$v = 180 \ln 4 \approx 250 (\text{m}^3).$$

故每分钟至少输入新鲜空气 250 m^3 .

8. 设可导函数 $\varphi(x)$ 满足

$$\varphi(x) \cos x + 2 \int_0^x \varphi(t) \sin t dt = x + 1,$$

求 $\varphi(x)$.

解 在方程 $\varphi(x) \cos x + 2 \int_0^x \varphi(t) \sin t dt = x + 1$ 两端关于 x 求导, 得

$$\varphi'(x) \cos x - \varphi(x) \sin x + 2\varphi(x) \sin x = 1,$$

即 $\varphi' + \tan x \cdot \varphi = \sec x$, 且在原方程中取 $x=0$, 可得 $\varphi(0)=1$.

由一阶线性方程的通解公式, 得

$$\begin{aligned}\varphi &= e^{-\int \tan x dx} \left(\int \sec x e^{\int \tan x dx} dx + C \right) \\ &= \cos x \left(\int \sec^2 x dx + C \right) = \cos x (\tan x + C) \\ &= \sin x + C \cos x.\end{aligned}$$

代入初值条件 $x=0, \varphi=1$, 可得 $C=1$, 故

$$\varphi(x) = \sin x + \cos x.$$

9. 设光滑曲线 $y=\varphi(x)$ 过原点, 且当 $x>0$ 时 $\varphi(x)>0$, 对应于 $[0,x]$ 一段曲线的弧长为 $e^x - 1$, 求 $\varphi(x)$.

解 根据题设条件得

$$\int_0^x \sqrt{1+y'^2} dx = e^x - 1, \quad y|_{x=0} = 0.$$

在积分方程两端对 x 求导, 得

$$\sqrt{1+y'^2} = e^x,$$

即 $y' = \pm \sqrt{e^{2x} - 1}$. 取 $y' = \sqrt{e^{2x} - 1}$, 积分得

$$y = \sqrt{e^{2x} - 1} - \arctan \sqrt{e^{2x} - 1} + C,$$

由初值条件 $y|_{x=0} = 0$ 知 $C=0$, 故

$$y = \sqrt{e^{2x} - 1} - \arctan \sqrt{e^{2x} - 1}.$$

注: 此函数满足题设条件: $x>0$ 时, $y=\varphi(x)>0$. 若取 $y' = -\sqrt{e^{2x} - 1}$, 则积分所得的函数不满足这个题设条件.

10. 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶齐次线性方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的两个解, 令

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y'_2(x) - y'_1(x)y_2(x),$$

证明: (1) $W(x)$ 满足方程 $W'+p(x)W=0$;

$$(2) W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt}.$$

证 (1) 依题意, 对 $i=1,2$, 有

$$y''_i + p(x)y'_i + q(x)y_i = 0,$$

即 $y''_i + p(x)y'_i = -q(x)y_i$. 于是

$$\begin{aligned}W' + p(x)W &= (y'_1y'_2 + y_1y''_2 - y''_1y_2 - y'_1y'_2) + p(x)(y_1y'_2 - y'_1y_2) \\ &= y_1[y''_2 + p(x)y'_2] - y_2[y''_1 + p(x)y'_1] \\ &= y_1[-q(x)y_2] - y_2[-q(x)y_1] = 0.\end{aligned}$$

故 W 满足所给微分方程.

(2) 因 $W' + p(x)W = 0$, 分离变量得 $\frac{dW}{W} = -p(x)dx$. 将上式两端分别在

$[W_0, W]$ 与 $[x_0, x]$ 上积分, 得

$$\ln W - \ln W_0 = - \int_{x_0}^x p(x) dx,$$

其中 $W_0 = W(x_0)$. 于是得

$$W = W(x_0) e^{- \int_{x_0}^x p(x) dx}.$$

*11. 求下列欧拉方程的通解:

$$(1) x^2 y'' + 3xy' + y = 0;$$

$$(2) x^2 y'' - 4xy' + 6y = x.$$

解 (1) 令 $x = e^t$, 即 $t = \ln x$, 并记 $D = \frac{d}{dt}$, 则原方程可化为

$$[D(D - 1) + 3D + 1]y = 0,$$

$$\text{即 } (D^2 + 2D + 1)y = 0.$$

该方程的特征方程为 $r^2 + 2r + 1 = 0$, 有根 $r_{1,2} = -1$, 于是该方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 t)e^{-t},$$

故原方程的通解为

$$y = \frac{C_1 + C_2 \ln x}{x}.$$

(2) 令 $x = e^t$, 即 $t = \ln x$, 并记 $D = \frac{d}{dt}$, 则原方程可化为

$$[D(D - 1) - 4D + 6]y = e^t,$$

$$\text{即 } (D^2 - 5D + 6)y = e^t.$$

该方程对应齐次方程的特征方程为 $r^2 - 5r + 6 = 0$, 有根 $r_1 = 2, r_2 = 3$. 故齐次方程的通解为

$$Y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}.$$

因 $f(t) = e^t, \lambda = 1$ 不是特征方程的根, 故可令 $y^* = Ae^t$ 是非齐次方程的特解. 代入 $(D^2 - 5D + 6)y = e^t$ 中并消去 e^t , 得 $A = \frac{1}{2}$, 即

$$y^* = \frac{1}{2}e^t.$$

于是得

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + \frac{1}{2}e^t,$$

即原方程的通解为

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^3 + \frac{x}{2}.$$

*12. 求下列常系数线性微分方程组的通解:

$$(1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} + y = 0, \\ 3\frac{dx}{dt} + 2x + 4\frac{dy}{dt} + 3y = t; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x + \frac{dy}{dt} + y = 0, \\ \frac{dx}{dt} + x + \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = e^t. \end{cases}$$

解 (1) 记 $D = \frac{d}{dt}$, 方程组可表示为

$$\begin{cases} Dx + (2D + 1)y = 0, \\ (3D + 2)x + (4D + 3)y = t. \end{cases} \quad (1)$$

则有

$$\begin{vmatrix} D & 2D + 1 \\ 3D + 2 & 4D + 3 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} 0 & 2D + 1 \\ t & 4D + 3 \end{vmatrix},$$

即

$$(2D^2 + 4D + 2)x = -t - 2. \quad (3)$$

方程③对应齐次方程的特征方程为 $2r^2 + 4r + 2 = 0$, 有根 $r_{1,2} = -1$. 因 $f(t) = -t - 2$, 故令 $x^* = At + B$ 是③的特解, 代入③中, 即得 $A = \frac{1}{2}$, $B = 0$. 故方程③有通解

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{-t} + \frac{1}{2}t.$$

又由② $-2 \times ①$ 可得

$$\begin{aligned} y &= -(D + 1)x + t \\ &= -(C_1 + C_2 + C_2 t)e^{-t} - \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

故方程组的通解为

$$\begin{cases} x = (C_1 + C_2 t)e^{-t} + \frac{1}{2}t, \\ y = -(C_1 + C_2 + C_2 t)e^{-t} - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

(2) 记 $D = \frac{d}{dt}$, 方程组可表示为

$$\begin{cases} (D^2 + 2D + 1)x + (D + 1)y = 0, \\ (D + 1)x + (D^2 + 2D + 1)y = e^t, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} (D + 1)^2 x + (D + 1)y = 0, \\ (D + 1)x + (D + 1)^2 y = e^t, \end{cases} \quad (1)$$

则有

$$\begin{vmatrix} (D + 1)^2 & D + 1 \\ D + 1 & (D + 1)^2 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} 0 & D + 1 \\ e^t & (D + 1)^2 \end{vmatrix}$$

即

$$(D^3 + 3D^2 + 2D)x = -e^t. \quad (3)$$

方程③对应齐次方程的特征方程为 $r(r^2 + 3r + 2) = 0$, 有根 $r_1 = 0, r_2 = -1, r_3 = -2$. 而 $f(t) = -e^t, \lambda = 1$ 不是特征方程的根, 故令 $x^* = Ae^t$ 是方程③的特解, 代入③中并消去 e^t , 可得 $A = -\frac{1}{6}$, 即 $x^* = -\frac{1}{6}e^t$, 于是方程③的通解为

$$x = C_1 + C_2 e^{-t} + C_3 e^{-2t} - \frac{1}{6}e^t.$$

又由方程①得

$$\begin{aligned} (D + 1)y &= - (D + 1)^2 x = - D^2 x - 2Dx - x \\ &= -C_1 - C_3 e^{-2t} + \frac{2}{3}e^t, \end{aligned}$$

即 $y' + y = -C_1 - C_3 e^{-2t} + \frac{2}{3}e^t$, 可解得

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int dt} \left[\int \left(-C_1 - C_3 e^{-2t} + \frac{2}{3}e^t \right) e^{\int dt} dt + C_4 \right] \\ &= e^{-t} \left[\int \left(-C_1 e^t - C_3 e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t} \right) dt + C_4 \right] \\ &= -C_1 + C_3 e^{-2t} + \frac{1}{3}e^t + C_4 e^{-t}. \end{aligned}$$

故方程组的通解为

$$\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{-t} + C_3 e^{-2t} - \frac{1}{6}e^t, \\ y = C_4 e^{-t} - C_1 + C_3 e^{-2t} + \frac{1}{3}e^t. \end{cases}$$

二、全国硕士研究生入学统一考试数学 试题选解

(一) 函数 极限 连续

1. (2004. III, IV) 函数 $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界() .

- (A) (-1, 0) (B) (0, 1) (C) (1, 2) (D) (2, 3)

解 因为 $x \rightarrow 1$ 及 $x \rightarrow 2$ 时, 均有 $f(x) \rightarrow \infty$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1), (1, 2), (2, 3)$ 内均无界, 故应选(A).

2. (1998. II) 设数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则下列断言正确的是().

- (A) 若 $\{x_n\}$ 发散, 则 $\{y_n\}$ 必发散 (B) 若 $\{x_n\}$ 无界, 则 $\{y_n\}$ 必有界
(C) 若 $\{x_n\}$ 有界, 则 $\{y_n\}$ 必为无穷小 (D) 若 $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ 为无穷小, 则 $\{y_n\}$ 必为无穷小

解 取 $x_n = n, y_n = \frac{1}{n^2}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 且 $\{x_n\}$ 发散, 但 $\{y_n\}$ 收敛, 故(A)不正确.

取 $x_n = [1 + (-1)^n]n, y_n = [1 - (-1)^n]n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 且 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 都无界, 故(B)不正确.

取 $x_n = \frac{1}{n^2}, y_n = n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 且 $\{x_n\}$ 有界, 但 $\{y_n\}$ 不是无穷小, 故(C)也不正确.

正确.

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ 知 $|x_n y_n|$ 为无穷小 ($n \rightarrow \infty$), 故当 $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ 为无穷小时, $\{y_n\} = \left\{(x_n y_n) \cdot \frac{1}{x_n}\right\}$ 为无穷小, 故应选(D).

3. (2007. I) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 与 \sqrt{x} 等价的无穷小量是().

- (A) $1 - e^{\sqrt{x}}$ (B) $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ (C) $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$ (D) $1 - \cos \sqrt{x}$

解 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 有 $1 - e^{\sqrt{x}} = -(e^{\sqrt{x}} - 1) \sim -\sqrt{x}$, $\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1 \sim \frac{1}{2}\sqrt{x}$, $1 - \cos \sqrt{x}$

$\sim \frac{1}{2}(\sqrt{x})^2 = \frac{1}{2}x$. 利用排除法知应选(B).

注 本题直接找出 $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ 的等价无穷小有些困难, 但由于另外三个的等价无穷小很容易得到, 因此通过排除法可得到答案. 事实上,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \stackrel{\sqrt{x} = t}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+t^2) - \ln(1-t)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1}{1-t}}{1} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2t(1-t) + 1 + t^2}{(1+t^2)(1-t)} = 1.$$

4. (2009. I , III) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 是等价无穷小, 则() .

(A) $a = 1, b = -\frac{1}{6}$ (B) $a = 1, b = \frac{1}{6}$

(C) $a = -1, b = -\frac{1}{6}$ (D) $a = -1, b = \frac{1}{6}$

解 因为 $f(x) = x - \sin ax, g(x) = x^2 \ln(1 - bx)$ 为等价无穷小, 所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 \ln(1 - bx)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin ax}{x^2 \cdot (-bx)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{-3bx^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 \sin ax}{-6bx} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 \cdot ax}{-6bx} = -\frac{a^3}{6b} = 1, \end{aligned}$$

得 $a^3 = -6b$, 由此排除(B)(C).

另外, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{-3bx^2}$ 存在, 蕴含了 $1 - \cos ax \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$), 得 $a = 1$, 排除(D). 故

应选(A).

5. (2001. II) 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x) \ln(1 + x^2)$ 是比 $x \sin x^n$ 高阶的无穷小, 而 $x \sin x^n$ 是比 $(e^{x^2} - 1)$ 高阶的无穷小, 则正整数 n 等于().

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x) \ln(1 + x^2) \sim \frac{1}{2}x^4, x \sin x^n \sim x^{n+1}, e^{x^2} - 1 \sim x^2$, 故应选

(B).

6. (2007. I , III) 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 的渐近线的条数为().

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) \right] = \infty$, 所以 $x = 0$ 为垂直渐近线; 又

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) \right] = 0$, 所以 $y = 0$ 为水平渐近线; 进一步,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x^2} + \frac{\ln(1 + e^x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - 1 \cdot x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(1 + e^x) - x]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln e^x (1 + e^{-x}) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0,$$

于是有斜渐近线: $y = x$. 故应选(D).

注 一般来说, 有水平渐近线(即 $\lim_{x \rightarrow \infty} y = c$) 就不再考虑斜渐近线, 但当 $\lim_{x \rightarrow \infty} y$ 不

存在时,就要分别讨论 $x \rightarrow -\infty$ 和 $x \rightarrow +\infty$ 两种情况,即左右两侧的渐近线.本题在 $x < 0$ 的一侧有水平渐近线,而在 $x > 0$ 的一侧有斜渐近线.关键应注意指数函数 e^x 当 $x \rightarrow \infty$ 时极限不存在,必须分 $x \rightarrow -\infty$ 和 $x \rightarrow +\infty$ 进行讨论.

7. (2010. I) 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x$ 等于().

(A) 1

(B) e

(C) e^{a-b}

(D) e^{b-a}

解 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left[1 + \frac{(a-b)x + ab}{(x-a)(x+b)} \right]^{\frac{(x-a)(x+b)}{(a-b)x+ab}} \right\}^{\frac{x[(a-b)x+ab]}{(x-a)(x+b)}} = e^{a-b}$, 所以应选(C).

8. (2008. I) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界, $\{x_n\}$ 为数列, 下列命题正确的是().

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

(B) 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛

(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 收敛

解 若 $\{x_n\}$ 单调, 则由函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界知, $\{f(x_n)\}$ 单调有界, 从而 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 故应选(B).

9. (1994. I , II) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\cot x \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \right] = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 由等价无穷小代换定理

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x) \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6x^3} = \frac{1}{6}.$$

10. (1999. II) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \ln(1+x) - x^2}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \ln(1+x) - x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\tan x - \sin x}{x[\ln(1+x) - x]} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\ln(1+x) - x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\frac{x}{1+x}} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

11. (2000. I) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$.

解 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}} + e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}} + 1} + \frac{\sin x}{x} \right) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} - \frac{\sin x}{x} \right) = 2 - 1 = 1,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = 1.$$

12. (1997. I) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x}{\ln(1 + x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\ln(1 + x)} = 3,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{\ln(1 + x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0,$$

所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} \left[\frac{3 \sin x}{\ln(1 + x)} + \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{\ln(1 + x)} \right] \\ &= \frac{1}{2} (3 + 0) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

13. (2008. I) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4}$.

解法一
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)]}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos(\sin x) \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin x)}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) \cos x}{6x} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

解法二
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{\sin^4 x} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t}{t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{3t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{6t} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

14. (2011. I) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1 + x)}{x} \right]^{\frac{1}{e^x - 1}}$.

分析 本题考查极限的计算, 属于 1^∞ 形式的极限. 计算时, 先按 1^∞ 未定式的计算方法将极限式变形, 再综合利用等价无穷小替换、洛必达法则等方法进行计算.

解
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1 + x)}{x} \right]^{\frac{1}{e^x - 1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{\ln(1 + x) - x}{x} \right]^{\frac{1}{e^x - 1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x) - x}{x} \frac{1}{e^x - 1}}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2x(1+x)}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

15. (1995. III) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 因为

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)} &\leqslant \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} \\ &\leqslant \frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

所以由夹逼准则知原式 $= \frac{1}{2}$.

16. (1998. I, II) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解法一 利用洛必达法则,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{-\frac{1}{2}} - (1-x)^{-\frac{1}{2}}}{x} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}} \right] = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

解法二 利用泰勒公式,因为

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + o(x^2), \\ \sqrt{1-x} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + o(x^2), \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{4}x^2 + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{4}.$$

17. (2006. I) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1 - \cos x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解法一 利用等价无穷小,

$$\text{原极限} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 2.$$

解法二 利用三角公式及两个重要极限,

$$\begin{aligned} \text{原极限} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\sin^2 \frac{x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = 2 \cdot 1 = 2. \end{aligned}$$

18. (1994. III) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n} \right)$.

解 因为

$$\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n} \right) = \frac{1 + \tan \frac{2}{n}}{1 - \tan \frac{2}{n}},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan \frac{2}{n}}{\frac{2}{n}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \tan \frac{2}{n}} = 1,$$

所以

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \tan \frac{2}{n}}{1 - \tan \frac{2}{n}} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2 \tan \frac{2}{n}}{1 - \tan \frac{2}{n}} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2 \tan \frac{2}{n}}{1 - \tan \frac{2}{n}} \right)^{\frac{1 - \tan \frac{2}{n}}{2 \tan \frac{2}{n}} \cdot \frac{4 \tan \frac{2}{n}}{\frac{2}{n}} \cdot \frac{1}{1 - \tan \frac{2}{n}}} = e^4. \end{aligned}$$

19. (2006. I) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_1 < \pi$, $x_{n+1} = \sin x_n$ ($n = 1, 2, \dots$).

(I) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求该极限;

(II) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

解 (I) 用归纳法证明 $\{x_n\}$ 单调减少且有下界.

由 $0 < x_1 < \pi$, 得

$$0 < x_2 = \sin x_1 < x_1 < \pi;$$

设 $0 < x_n < \pi$, 则

$$0 < x_{n+1} = \sin x_n < x_n < \pi,$$

所以 $\{x_n\}$ 单调减少且有下界, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

记 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, 由 $x_{n+1} = \sin x_n$ 得

$$a = \sin a,$$

所以 $a = 0$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

(II) 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}},$$

而

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{2x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{6x^2} = -\frac{1}{6}, \end{aligned}$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}},$$

又由(I), $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin x_n}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}.$$

20. (2002. V) 设 $0 < x_1 < 3$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}$ ($n = 1, 2, \dots$), 证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 并求此极限.

证 由题设 $0 < x_1 < 3$ 知, x_1 及 $3 - x_1$ 均为正数, 故

$$0 < x_2 = \sqrt{x_1(3-x_1)} \leq \frac{1}{2}(x_1 + 3 - x_1) = \frac{3}{2}.$$

设当 $k > 1$ 时, $0 < x_k \leq \frac{3}{2}$, 则

$$0 < x_{k+1} = \sqrt{x_k(3-x_k)} \leq \frac{1}{2}(x_k + 3 - x_k) = \frac{3}{2},$$

故由数学归纳法知, 对任意正整数 $n > 1$, 均有

$$0 < x_n \leq \frac{3}{2},$$

即数列 $\{x_n\}$ 是有界的.

又当 $n > 1$ 时,

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \sqrt{x_n(3-x_n)} - x_n = \sqrt{x_n}(\sqrt{3-x_n} - \sqrt{x_n}) \\ &= \frac{\sqrt{x_n}(3-2x_n)}{\sqrt{3-x_n} + \sqrt{x_n}} \geq 0 \quad \left(\text{因 } 0 < x_n \leq \frac{3}{2} \right), \end{aligned}$$

故当 $n > 1$ 时, $x_{n+1} \geq x_n$, 即数列 $\{x_n\}$ 单调增加.

根据单调有界极限存在准则知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n(3 - x_n)},$$

得 $a = \sqrt{a(3 - a)}$, 从而 $2a^2 - 3a = 0$. 解得 $a = \frac{3}{2}$, $a = 0$. 因 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq x_2 > 0$, 故 $a = 0$

舍去, 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{3}{2}$.

21. (1999. I) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解法一 利用洛必达法则,

$$\begin{aligned} \text{原极限} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \sin x + x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{3 \cos x - x \sin x} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

解法二 利用麦克劳林公式,

$$\begin{aligned} \text{原极限} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - x + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

解法三 利用等价无穷小代换及洛必达法则,

$$\begin{aligned} \text{原极限} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

22. (2005. III, IV) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} \right)$.

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - e^{-x} \sim x$, 并利用洛必达法则得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 - 1 + e^{-x}}{x(1 - e^{-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 - 1 + e^{-x}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2x - e^{-x}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + e^{-x}}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

23. (2004. II) 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)x}{nx^2 + 1}$, 则 $f(x)$ 的间断点为 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 因为当 $x \neq 0$ 时,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)x}{nx^2 + 1} = \frac{1}{x},$$

所以

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty,$$

从而 $f(x)$ 的间断点为 $x = 0$.

24. (2005. II) 设函数

$$f(x) = \frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}} - 1},$$

则() .

- (A) $x=0, x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点
- (B) $x=0, x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点
- (C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点
- (D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

解 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1,$$

所以应选(D).

25. (2002. II) 设函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^{\tan x}}{\arcsin \frac{x}{2}}, & x > 0, \\ ae^{2x}, & x \leq 0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{\tan x}}{\arcsin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\tan x}{\frac{x}{2}} = -2,$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} ae^{2x} = a = f(0).$$

因 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 故 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, 从而得 $a = -2$.

26. (1998. II) 求函数 $f(x) = (1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 内的间断点, 并判断其类型.

解 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 内的间断点为 $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

在 $x = \frac{\pi}{4}$ 处, $f\left(\frac{\pi}{4}^+\right) = +\infty$, 在 $x = \frac{5}{4}\pi$ 处, $f\left(\frac{5\pi}{4}^+\right) = +\infty$, 故 $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ 为第二类间断点(无穷间断点);

在 $x = \frac{3\pi}{4}$ 处, $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} f(x) = 1$, 在 $x = \frac{7}{4}\pi$ 处, $\lim_{x \rightarrow \frac{7\pi}{4}} f(x) = 1$, 故 $x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ 为第一类间断点(可去间断点).

27. (2001. II) 求极限 $\lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}}$, 记此极限为 $f(x)$, 求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

解 因为

$$f(x) = e^{\lim_{t \rightarrow x} \frac{x}{\sin t - \sin x} \ln \frac{\sin t}{\sin x}},$$

而

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{x}{\sin t - \sin x} \ln \frac{\sin t}{\sin x} = \lim_{t \rightarrow x} x \frac{\cos t / \sin t}{\cos t} = \frac{x}{\sin x},$$

故 $f(x) = e^{\frac{x}{\sin x}}$.

$f(x)$ 的间断点为 $x = k\pi (k \in \mathbf{Z})$.

在 $x = 0$ 处, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{x}{\sin x}} = e$, 故 $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点(可去间断点);

在 $x = k\pi (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 处, $\lim_{x \rightarrow k\pi} f(x) = \infty$, 故 $x = k\pi (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ 是函数 $f(x)$ 的第二类间断点(无穷间断点).

28. (1992. IV) 设函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin \frac{\pi}{2}x}, & x \neq 1, \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

问函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处是否连续? 若不连续, 修改函数在 $x = 1$ 处的定义, 使之连续.

解 因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin \frac{\pi}{2}x} = \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(x-1)}{\cos \frac{\pi}{2}x} \\ &= \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sec^2(x-1)}{-\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}x} = -\frac{4}{\pi^2} \neq f(1), \end{aligned}$$

所以函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处不连续. 若修改定义, 令 $f(1) = -\frac{4}{\pi^2}$, 则函数在 $x = 1$ 处

连续.

29. (2003. II) 设函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin x}, & x < 0, \\ 6, & x = 0, \\ \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{x}{4}}, & x > 0, \end{cases}$$

问 a 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续; a 为何值时, $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点?

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^3}{x - \arcsin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3ax^2}{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3ax^2}{\sqrt{1-x^2}-1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{1-x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{6ax}{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}} = -6a, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{x}{4}} = 4 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x^2} \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ae^{ax} + 2x - a}{2x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} (a^2 e^{ax} + 2) \\ &= 2a^2 + 4. \end{aligned}$$

令 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, 有 $2a^2 + 4 = -6a$, 得 $a = -1$ 或 $a = -2$.

当 $a = -1$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 6 = f(0)$, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

当 $a = -2$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 12 \neq f(0)$, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

(二) 一元函数微分学

1. (2012. I) 设函数 $y(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$, 其中 n 为正整数, 则 $y'(0) = (\quad)$.

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$ (B) $(-1)^n(n-1)!$

(C) $(-1)^{n-1}n!$ (D) $(-1)^nn!$

解 因为 $y'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x) - y(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n) = -1 \times (-2) \cdots (1-n)$
 $= (-1)^{n-1}(n-1)!,$

所以应选(A).

2. (2001. I) 设 $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为().

(A) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \cos h)$ 存在 (B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1 - e^h)$ 存在

(C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(h - \sin h)$ 存在 (D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2h) - f(h)]$ 存在

解 令 $1 - e^h = t$, 则 $h = \ln(1-t)$, 当 $h \rightarrow 0$ 时, $t \rightarrow 0$, 故

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1 - e^h) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{\ln(1-t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} \cdot \frac{t}{\ln(1-t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} \cdot (-1), \end{aligned}$$

由导数的定义知, 应选(B). 关于其他三个选项的排除, 可用反例说明. 取 $f(x) = |x|$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导, 但

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \cos h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|1 - \cos h|}{h^2} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(h - \sin h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h - \sin h|}{h^2} = 0,$$

故排除(A)和(C).

又取 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续, 从而 $f'(0)$ 不存在. 但

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [f(2h) - f(h)] = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} (1 - 1) = 0,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} [f(2h) - f(h)] = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} (0 - 0) = 0.$$

即 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2h) - f(h)]$ 存在, 故排除(D).

3. (2002. I , II) 设函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界可导, 则().

- (A) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$
- (B) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$
- (C) 当 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$
- (D) 当 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$

解 取 $f(x) = \frac{\sin x^2}{x}$, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 而 $f'(x) = 2\cos x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 不存在, 故排除(A).

取 $f(x) = \sin x$, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, 而 $f'(x) = \cos x$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1$, 故排除(C) 和(D). 因此, 应选(B).

注 可直接证明(B)为正确选项. 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = k \neq 0$, 不妨设 $k > 0$, 则存在 $M > 0$, 当 $x > M$ 时, $f'(x) > \frac{k}{2}$. 由 $\int_M^x f'(x) dx > \int_M^x \frac{k}{2} dx$ 得, $f(x) > \frac{k}{2}(x - M) + f(M)$, 与 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界矛盾, 故选(B).

4. (1999. II) 曲线 $\begin{cases} x = e^t \sin 2t, \\ y = e^t \cos t \end{cases}$ 在点 $(0, 1)$ 处的法线方程为 _____.

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{e^t \cos t - e^t \sin t}{e^t \sin 2t + 2e^t \cos 2t} = \frac{\cos t - \sin t}{\sin 2t + 2\cos 2t}.$

点 $(0, 1)$ 对应参数 $t = 0$, $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = \frac{1}{2}$, 于是所求法线方程为

$$y - 1 = -2x,$$

即 $2x + y - 1 = 0$.

5. (2010. I) 设 $x = e^{-t}$, $y = \int_0^t \ln(1 + u^2) du$, 则 $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0} =$ _____.

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = -e^t \ln(1 + t^2),$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)/dt}{dx/dt} = -\left[e^t \ln(1 + t^2) + e^t \frac{2t}{1 + t^2}\right] \cdot (-e^t) = e^{2t} \left[\ln(1 + t^2) + \frac{2t}{1 + t^2}\right],$$

于是 $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0} = 0$.

6. (2004. II) 设函数 $y(x)$ 由参数方程

$$\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = t^3 - 3t + 1 \end{cases}$$

确定, 则曲线 $y = y(x)$ 向上凸的 x 取值范围为 _____.

解 由题设知

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{4t}{3(t^2 + 1)^3}.$$

令 $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, 得 $t < 0$. 代入 $x = t^3 + 3t + 1$ 并由单调性知 $x < 1$, 故所求取值范围为 $(-\infty, 1)$ 或 $(-\infty, 1]$.

7. (2011. I) 曲线 $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是().

- (A) (1,0) (B) (2,0) (C) (3,0) (D) (4,0)

解 由 $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 可知 1, 2, 3, 4 分别是 $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4 = 0$ 的一、二、三、四重根, 故由导数与原函数之间的关系可知

$$y'(1) \neq 0, \quad y'(2) = y'(3) = y'(4) = 0,$$

$$y''(2) \neq 0, \quad y''(3) = y''(4) = 0, \quad y'''(3) \neq 0, \quad y'''(4) = 0,$$

故 $(3,0)$ 是一拐点.

注 由 $y''(3) = 0, y'''(3) \neq 0$ 得出 $(3,0)$ 是一拐点, 参阅习题 3-4 中第 16 题的解答.

8. (2002. I) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数, 且 $f(0) \neq 0, f'(0) \neq 0$, 若 $af(h) + bf(2h) - f(0)$ 在 $h \rightarrow 0$ 时是比 h 高阶的无穷小, 试确定 a, b 的值.

解法一 由题设条件知

$$\lim_{h \rightarrow 0} [af(h) + bf(2h) - f(0)] = (a+b-1)f(0) = 0,$$

由于 $f(0) \neq 0$, 故有 $a+b-1=0$.

又由洛必达法则, 有

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{af(h) + bf(2h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{af'(h) + 2bf'(2h)}{1} = (a+2b)f'(0),$$

因 $f'(0) \neq 0$, 故有 $a+2b=0$.

于是, 解得 $a=2, b=-1$.

解法二 由 $f(h)$ 在 $h=0$ 处可导, 即

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0),$$

于是

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0) + \alpha, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \alpha = 0.$$

从而有

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + o_1(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o_1(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \alpha = 0.$$

同理有

$$f(2h) = f(0) + f'(0)2h + o_2(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o_2(h)}{h} = 0.$$

所以

$$af(h) + bf(2h) - f(0) = (a + b - 1)f(0) + (a + 2b)f'(0)h + o(h),$$

按题设, 当 $h \rightarrow 0$ 时上式右端应是 h 的高阶无穷小, 从而

$$(a + b - 1)f(0) = 0, \quad (a + 2b)f'(0) = 0,$$

于是 $a + b - 1 = 0, a + 2b = 0$, 得 $a = 2, b = -1$.

9. (2011. I) 求方程 $k \arctan x - x = 0$ 不同实根的个数, 其中 k 为参数.

解 令 $f(x) = k \arctan x - x$, 则 $f(0) = 0, f'(x) = \frac{k}{1+x^2} - 1 = \frac{k-1-x^2}{1+x^2}$.

(1) 当 $k \leq 1$ 时, 在 $(-\infty, +\infty)$ 内 $f'(x) \leq 0$, 且等号仅当 $k = 1, x = 0$ 时成立, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调减少, 又 $f(0) = 0$, 因此 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有且仅有一个零点.

(2) 当 $k > 1$ 时, 在 $(-\sqrt{k-1}, \sqrt{k-1})$ 内 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[-\sqrt{k-1}, \sqrt{k-1}]$ 上单调增加, 又 $f(0) = 0$, 因此 $f(x)$ 在 $[-\sqrt{k-1}, \sqrt{k-1}]$ 上有且只有一个零点; 在 $(-\infty, -\sqrt{k-1})$ 及 $(\sqrt{k-1}, +\infty)$ 内均有 $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\sqrt{k-1})$ 及 $(\sqrt{k-1}, +\infty)$ 内均单调减少, 又 $f(-\sqrt{k-1}) < f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, f(\sqrt{k-1}) > f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. 因此 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\sqrt{k-1})$ 及 $(\sqrt{k-1}, +\infty)$ 内各有一个零点.

综上所述, $k \leq 1$ 时, 方程 $k \arctan x - x = 0$ 只有一个实根, $k > 1$ 时, 方程 $k \arctan x - x = 0$ 有三个实根.

10. (2002. I) 已知两曲线 $y = f(x)$ 与 $y = \int_0^{\arctan x} e^{-t^2} dt$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线相同,

写出此切线方程, 并求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{2}{n}\right)$.

解 由已知条件得 $f(0) = 0$,

$$f'(0) = \left. \frac{e^{-(\arctan x)^2}}{1+x^2} \right|_{x=0} = 1,$$

故所求切线方程为 $y = x$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{2}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \frac{f\left(\frac{2}{n}\right) - f(0)}{\frac{2}{n}} = 2f'(0) = 2.$$

11. (1987. I , II) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上可微, 对于 $[0, 1]$ 上的每一个 x , 函数 $f(x)$ 的值都在开区间 $(0, 1)$ 内, 且 $f'(x) \neq 1$, 证明在 $(0, 1)$ 内有且仅有一个 x , 使

$$f(x) = x.$$

证 令 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续. 由于 $0 < f(x) < 1$, 所以 $F(0) = f(0) - 0 > 0$, $F(1) = f(1) - 1 < 0$, 故由零点定理知, 在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 x , 使 $F(x) = f(x) - x = 0$, 即 $f(x) = x$.

12. (2010. I) 求 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t) e^{-t^2} dt$ 的单调区间与极值.

$$\text{解 } f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t) e^{-t^2} dt = x^2 \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt - \int_1^{x^2} t e^{-t^2} dt,$$

$$\text{令 } f'(x) = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt = 0, \text{ 得 } x = -1, x = 0, x = 1.$$

$$\text{由 } f''(x) = 2 \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt + 4x^2 e^{-x^4}, \text{ 因为}$$

$$f''(\pm 1) = \frac{4}{e} > 0, \quad f''(0) = -2 \int_0^1 e^{-t^2} dt < 0,$$

所以 $x = -1, x = 1$ 为 $f(x)$ 的极小值点, 极小值为 $f(\pm 1) = 0$; $x = 0$ 为 $f(x)$ 的极大值点, 极大值为 $f(0) = \int_0^1 t e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right)$.

因此, $f(x)$ 在 $(-\infty, -1]$ 及 $[0, 1]$ 上单调减少, $f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 及 $[1, +\infty)$ 上单调增加.

13. (2012. I) 证明: $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$ ($-1 < x < 1$).

证 令 $f(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x - 1 - \frac{x^2}{2}$ ($-1 < x < 1$). 因为 $f(-x) = f(x)$, 所以只要讨论当 $x \geq 0$ 时的情形即可. 又

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln \frac{1+x}{1-x} + x \cdot \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-x+(1+x)}{(1-x)^2} - \sin x - x \\ &= \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} - \sin x - x \quad (0 \leq x < 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} + \frac{2(1-x^2)-2x(-2x)}{(1-x^2)^2} - \cos x - 1 \\ &= \frac{2}{1-x^2} + \frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2} - \cos x - 1 \\ &= \frac{4}{(1-x^2)^2} - \cos x - 1 \quad (0 \leq x < 1), \end{aligned}$$

$$f'''(x) = \frac{-4 \cdot 2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4} + \sin x = \frac{16x}{(1-x^2)^3} + \sin x \quad (0 \leq x < 1),$$

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'''(x) > 0$, 从而 $f''(x)$ 单调增加, $f''(x) > f''(0) = 2 > 0$, 由此得 $f'(x)$ 单调增加, $f'(x) > f'(0) = 0$, 又得 $f(x)$ 单调增加, $f(x) > f(0) = 0$, 因此当 $x \in (-1, 1)$ 时,

$f(x) \geq 0$, 即

$$x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2} \quad (-1 < x < 1).$$

14. (2011. I) 证明:(1) 对任意正整数 n , 都有 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$;

(2) 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ ($n = 1, 2, \dots$), 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

解 (1) 令 $\frac{1}{n} = x$, 则原不等式可化为 $\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$.

先证明 $\ln(1+x) < x$ ($x > 0$).

令 $f(x) = x - \ln(1+x)$. 由于 $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} > 0$ ($x > 0$), 可知 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上

单调增加. 又由于 $f(0) = 0$, 因此当 $x > 0$ 时, $f(x) > f(0) = 0$, 即 $\ln(1+x) < x$ ($x > 0$).

再证明 $\frac{x}{x+1} < \ln(1+x)$ ($x > 0$).

令 $g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{x+1}$. 由于 $g(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} > 0$ ($x > 0$), 可知 $g(x)$

在 $[0, +\infty)$ 上单调增加. 由于 $g(0) = 0$, 因此当 $x > 0$ 时, $g(x) > g(0) = 0$, 即 $\frac{x}{x+1} < \ln(1+x)$ ($x > 0$).

因此, 我们证明了 $\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$ ($x > 0$). 再令 $x = \frac{1}{n}$, 即可得到所需证明的不等式.

(2) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, 由不等式 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 可知: 数列 $\{a_n\}$ 单调减少.

又由不等式 $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ 可知:

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n > \ln(1+1) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln n \\ &= \ln(n+1) - \ln n > 0. \end{aligned}$$

因此数列 $\{a_n\}$ 是有界的. 故由单调有界收敛准则可知, 数列 $\{a_n\}$ 收敛.

15. (2007. I) 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上具有二阶导数, 且 $f''(x) > 0$. 令 $u_n = f(n)$ ($n = 1, 2, \dots$), 则下列结论正确的是().

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| (A) 若 $u_1 > u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛 | (B) 若 $u_1 > u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散 |
| (C) 若 $u_1 < u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛 | (D) 若 $u_1 < u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散 |

解 设 $f(x) = x^2$, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上具有二阶导数, 且 $f''(x) > 0$, $u_1 < u_2$, 但

$\{u_n\} = \{n^2\}$ 发散,故排除(C);设 $f(x) = \frac{1}{x}$,则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上具有二阶导数,且 $f''(x) > 0, u_1 > u_2$,但 $\{u_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ 收敛,故排除(B);又设 $f(x) = -\ln x$,则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上具有二阶导数,且 $f''(x) > 0, u_1 > u_2$,但 $\{u_n\} = \{-\ln n\}$ 发散,故排除(A).因此,应选(D).

注 也可直接证明(D)为正确选项.若 $u_1 < u_2$,则存在 $k > 0$,使得 $u_2 - u_1 > k > 0$.在区间 $[1, 2]$ 上应用拉格朗日中值定理,存在 $\xi_1 \in (1, 2)$ 使得

$$\frac{u_2 - u_1}{2 - 1} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f'(\xi_1) > k > 0,$$

又因为在 $(0, +\infty)$ 上 $f''(x) > 0$,因此 $f'(x)$ 在 $(\xi_1, +\infty)$ 上单调增加,于是对任意 $x \in (\xi_1, +\infty)$ 有

$$f'(x) > f'(\xi_1) > k > 0.$$

在区间 $[\xi_1, x]$ 上应用拉格朗日中值定理,存在 $\xi_2 \in (\xi_1, x)$,使得

$$\frac{f(x) - f(\xi_1)}{x - \xi_1} = f'(\xi_2) > k > 0,$$

即 $f(x) = f(\xi_1) + f'(\xi_2)(x - \xi_1) \rightarrow +\infty (x \rightarrow +\infty)$,故应选(D).

16. (2007. I, III) 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,在 (a, b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值, $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$,证明:存在 $\xi \in (a, b)$,使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

分析 需要证明的结论与导数有关,自然联想到用微分中值定理,事实上,若令 $F(x) = f(x) - g(x)$,则问题转化为证明 $F''(\xi) = 0$,只需对 $F'(x)$ 用罗尔定理,关键是找到 $F'(x)$ 的端点函数值相等的区间(特别是两个一阶导数同时为零的点),而利用 $F(a) = F(b) = 0$,若能再找一点 $c \in (a, b)$,使得 $F(c) = 0$,则在区间 $[a, c], [c, b]$ 上两次利用罗尔定理有一阶导函数相等的两点,再对 $F'(x)$ 用罗尔定理即可.

证 构造辅助函数 $F(x) = f(x) - g(x)$,由题设有 $F(a) = F(b) = 0$.又 $f(x), g(x)$ 在 (a, b) 内具有相等的最大值,不妨设存在 $x_1 \leq x_2, x_1, x_2 \in (a, b)$,使得

$$f(x_1) = M = \max_{[a, b]} f(x), \quad g(x_2) = M = \max_{[a, b]} g(x).$$

若 $x_1 = x_2$,令 $c = x_1$,则 $F(c) = 0$.

若 $x_1 < x_2$,因 $F(x_1) = f(x_1) - g(x_1) \geq 0, F(x_2) = f(x_2) - g(x_2) \leq 0$,从而存在 $c \in [x_1, x_2] \subset (a, b)$,使 $F(c) = 0$.

在区间 $[a, c], [c, b]$ 上分别利用罗尔定理知,存在 $\xi_1 \in (a, c), \xi_2 \in (c, b)$,使得

$$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0.$$

再对 $F'(x)$ 在区间 $[\xi_1, \xi_2]$ 上应用罗尔定理,知存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$,有

$$F''(\xi) = 0,$$

即 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

17. (2009. I , III)

(I) 证明拉格朗日中值定理: 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$;

(II) 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 在 $(0, \delta)$ ($\delta > 0$) 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = A$, 则 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0) = A$.

证 (I) 作辅助函数 $\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$, 易验证 $\varphi(x)$

满足: $\varphi(a) = \varphi(b)$; $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 且 $\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

根据罗尔定理, 可得在 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使 $\varphi'(\xi) = 0$, 即

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

所以, $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

(II) 任取 $x_0 \in (0, \delta)$, 则函数 $f(x)$ 满足: 在闭区间 $[0, x_0]$ 上连续, 在开区间 $(0, x_0)$ 内可导, 从而由拉格朗日中值定理可得, 存在 $\xi_{x_0} \in (0, x_0) \subset (0, \delta)$, 使得 $f'(\xi_{x_0}) = \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0}$.

又由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = A$, 对上式两边取 $x_0 \rightarrow 0^+$ 时的极限可得,

$$f'_+(0) = \lim_{x_0 \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = \lim_{x_0 \rightarrow 0^+} f'(\xi_{x_0}) = \lim_{\xi_{x_0} \rightarrow 0^+} f'(\xi_{x_0}) = A,$$

故 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0) = A$.

18. (1996. III) 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上具有二阶导数, 且 $f(a) = f(b) = 0$, $f'(a)f'(b) > 0$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$ 和 $\eta \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = 0$ 及 $f''(\eta) = 0$.

证 先证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = 0$. 用反证法.

若不存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) = 0$, 则在 (a, b) 内恒有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$), 不妨设 $f(x) > 0$ (对 $f(x) < 0$, 类似可证), 则

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{x - a} \geq 0,$$

$$f'(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{x - b} \leq 0.$$

从而 $f'(a)f'(b) \leq 0$, 与已知条件矛盾, 所以在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使 $f(\xi) = 0$.

再证存在 $\eta \in (a, b)$, 使 $f''(\eta) = 0$.

由 $f(a) = f(b) = f(\xi)$ 及罗尔定理知, 存在 $\eta_1 \in (a, \xi)$ 和 $\eta_2 \in (\xi, b)$, 使 $f'(\eta_1) = f'(\eta_2) = 0$, 再在 $[\eta_1, \eta_2]$ 上对函数 $f'(x)$ 运用罗尔定理, 知存在 $\eta \in (\eta_1, \eta_2) \subset (a, b)$, 使 $f''(\eta) = 0$.

19. (2001. I) 设 $y = f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内具有二阶连续导数且 $f''(x) \neq 0$, 试证:

(1) 对于 $(-1, 1)$ 内的任一 $x \neq 0$, 存在惟一的 $\theta(x) \in (0, 1)$, 使 $f(x) = f(0) + xf'(\theta(x)x)$ 成立;

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2}.$$

证法一 (1) 任给非零 $x \in (-1, 1)$, 由拉格朗日中值定理得

$$f(x) = f(0) + xf'(\theta(x)x) \quad (0 < \theta(x) < 1).$$

因为 $f''(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内连续且 $f''(x) \neq 0$, 所以 $f''(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内不变号, 不妨设 $f''(x) > 0$, 则 $f'(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内严格单增, 故 $\theta(x)$ 惟一.

(2) 由泰勒公式得

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2,$$

ξ 在 0 与 x 之间. 所以

$$xf'(\theta(x)x) = f(x) - f(0) = f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2,$$

从而

$$\theta(x) \frac{f'(\theta(x)x) - f'(0)}{\theta(x)x} = \frac{1}{2}f''(\xi).$$

由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\theta(x)x) - f'(0)}{\theta(x)x} = f''(0), \quad \lim_{x \rightarrow 0} f''(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow 0} f''(\xi) = f''(0),$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2}.$$

证法二 (1) 同证法一(1).

(2) 对于非零 $x \in (-1, 1)$, 由拉格朗日中值定理得

$$f(x) = f(0) + xf'(\theta(x)x) \quad (0 < \theta(x) < 1),$$

所以

$$\frac{f'(\theta(x)x) - f'(0)}{x} = \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x}{x^2}.$$

由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\theta(x)x) - f'(0)}{\theta(x)x} = f''(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2x} = \frac{1}{2}f''(0),$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2}.$$

20. (2005. III, IV) 以下四个命题中, 正确的是()。

- (A) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界
- (B) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界
- (C) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界, 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界
- (D) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界, 则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

解 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界, 则存在常数 $M > 0$, 对任意 $x \in (0,1)$, $|f'(x)| \leq M$. 又当 $x \in (0,1)$ 时, 由拉格朗日中值定理, 有

$$f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right) = f'(\xi)\left(x - \frac{1}{2}\right),$$

其中 ξ 介于 x 与 $\frac{1}{2}$ 之间, 于是有

$$|f(x)| \leq \left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| + M \left|x - \frac{1}{2}\right| < \left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| + \frac{1}{2}M,$$

故应选(C).

注 本题也可以用排除法. 对选项(A)、(B), 取 $f(x) = \ln x$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x}$, $\ln x$ 与 $\frac{1}{x}$ 均在 $(0,1)$ 内连续, 但 $\ln x$ 在 $(0,1)$ 内无界, 故(A)、(B) 均不正确; 对选项(D), 取 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界, 但 $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ 在 $(0,1)$ 内无界, 故(D) 不正确.

21. (2001. II) 设 $f(x)$ 在区间 $[-a, a]$ ($a > 0$) 上具有二阶连续导数, $f(0) = 0$.

- (1) 写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式;
- (2) 证明在 $[-a, a]$ 上至少存在一点 η , 使

$$a^3 f''(\eta) = 3 \int_{-a}^a f(x) dx.$$

解 (1) 对任意 $x \in [-a, a]$,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2 = f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2,$$

其中 ξ 在 0 与 x 之间.

$$(2) \int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^a f'(0)x dx + \int_{-a}^a \frac{x^2}{2!} f''(\xi) dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a x^2 f''(\xi) dx.$$

因为 $f''(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续, 故对任意的 $x \in [-a, a]$, 有 $m \leq f''(x) \leq M$, 其中 M, m 分别为 $f''(x)$ 在 $[-a, a]$ 上的最大、最小值, 所以有

$$m \int_0^a x^2 dx \leq \int_{-a}^a f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a x^2 f''(\xi) dx \leq M \int_0^a x^2 dx,$$

即

$$m \leq \frac{3}{a^3} \int_{-a}^a f(x) dx \leq M.$$

因而由 $f''(x)$ 的连续性知, 至少存在一点 $\eta \in [-a, a]$, 使

$$f''(\eta) = \frac{3}{a^3} \int_{-a}^a f(x) dx,$$

$$\text{即 } a^3 f''(\eta) = 3 \int_{-a}^a f(x) dx.$$

下面我们给出(2)的另一种证法.

令 $F(x) = \int_{-x}^x f(t) dt$. 因为 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上有二阶连续导数, 所以 $F(x)$ 在 $[-a, a]$ 上有三阶连续导数, 且

$$F(0) = 0, \quad F'(0) = 0, \quad F''(0) = 0.$$

由泰勒公式知, 存在 $\xi \in (-a, a)$, 使得

$$F(x) = \int_{-x}^x f(t) dt = \frac{1}{3!} F'''(\xi) x^3, \quad \xi \in (-a, a).$$

由 $F'''(x) = f''(x) + f''(-x)$, 故有

$$\int_{-x}^x f(t) dt = \frac{1}{3!} [f''(\xi) + f''(-\xi)] x^3, \quad \xi \in (-a, a).$$

又因为 $f''(x)$ 连续, 所以在 ξ 与 $-\xi$ 之间存在 η , 使得 $\frac{f''(\xi) + f''(-\xi)}{2} = f''(\eta)$, 从而

$$\int_{-x}^x f(t) dt = \frac{1}{3} f''(\eta) x^3, \quad \eta \in (-a, a).$$

在上式中令 $x = a$ 即得所证. (按此证法, η 可在开区间 $(-a, a)$ 内取得, 比原题结论更精确.)

22. (2006. I) 设函数 $y = f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f'(x) > 0, f''(x) > 0, \Delta x$ 为自变量 x 在点 x_0 处的增量, Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分, 若 $\Delta x > 0$, 则 ().

- (A) $0 < dy < \Delta y$ (B) $0 < \Delta y < dy$
 (C) $\Delta y < dy < 0$ (D) $dy < \Delta y < 0$

解 由一阶泰勒公式

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \Delta x + \frac{f''(\xi)}{2!} (\Delta x)^2,$$

其中 ξ 介于 x_0 与 $x_0 + \Delta x$ 之间, 及已知条件知 $dy = f'(x_0) \Delta x > 0, \Delta y - dy = \frac{f''(\xi)}{2!} (\Delta x)^2 > 0$, 故应选(A).

23. (1990. III) 证明当 $x > 0$ 时, 有不等式

$$\arctan x + \frac{1}{x} > \frac{\pi}{2}.$$

证 设 $f(x) = \arctan x + \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}$ ($x > 0$) , 则

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} < 0,$$

故函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调减少. 又 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 于是

$$f(x) = \arctan x + \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2} > 0 \quad (x > 0),$$

即 $\arctan x + \frac{1}{x} > \frac{\pi}{2}$ ($x > 0$).

24. (1999. I) 试证: 当 $x > 0$ 时,

$$(x^2 - 1) \ln x \geq (x - 1)^2.$$

证法一 令 $\varphi(x) = (x^2 - 1) \ln x - (x - 1)^2$ ($x > 0$), 易知 $\varphi(1) = 0$. 由于

$$\varphi'(x) = 2x \ln x - x + 2 - \frac{1}{x}, \varphi'(1) = 0,$$

$$\varphi''(x) = 2 \ln x + 1 + \frac{1}{x^2},$$

$$\varphi'''(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x^3},$$

故当 $0 < x < 1$ 时, $\varphi'''(x) < 0$; 当 $1 < x < +\infty$ 时, $\varphi'''(x) > 0$, 从而 $\varphi''(x)$ 在 $x = 1$ 处取得最小值, 而 $\varphi''(1) = 2 > 0$, 故当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $\varphi''(x) > 0$, 从而 $\varphi'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加.

又 $\varphi'(1) = 0$, 故当 $0 < x < 1$ 时, $\varphi'(x) < 0$; 当 $1 < x < +\infty$ 时, $\varphi'(x) > 0$. 从而 $\varphi(x)$ 在 $x = 1$ 处取得最小值, 而 $\varphi(1) = 0$, 故 $\varphi(x) \geq 0$, 即当 $x > 0$ 时, $(x^2 - 1) \ln x \geq (x - 1)^2$.

证法二 令 $\varphi(x) = \ln x - \frac{x - 1}{x + 1}$ ($x > 0$), 则

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 1}{x(x + 1)^2} > 0 \quad (x > 0),$$

从而 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加, 而 $\varphi(1) = 0$, 所以当 $0 < x < 1$ 时, $\varphi(x) < 0$; 当 $1 < x < +\infty$ 时, $\varphi(x) > 0$. 于是当 $x > 0$ 时,

$$(x^2 - 1) \varphi(x) = (x^2 - 1) \ln x - (x - 1)^2 \geq 0,$$

即 $(x^2 - 1) \ln x \geq (x - 1)^2$.

进一步, 我们还可以证明: 当 $x > 0$ 时, $(x^2 - 1) \ln x \geq 2(x - 1)^2$.

事实上, 令 $\varphi(x) = \ln x - \frac{2(x - 1)}{x + 1}$, 则 $\varphi(1) = 0$, 且 $\varphi'(x) = \frac{(x - 1)^2}{x(x + 1)^2} > 0$,

$x \neq 1$. 所以当 $0 < x < 1$ 时, $\varphi(x) < 0$; 当 $1 < x < +\infty$ 时, $\varphi(x) > 0$. 故当 $x > 0$ 时, $(x - 1) \varphi(x) \geq 0$, 即有 $(x^2 - 1) \ln x \geq 2(x - 1)^2$.

25. (2005. III, IV) 设 $f(x) = x \sin x + \cos x$, 下列命题中正确的是().

(A) $f(0)$ 是极大值, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 是极小值

(B) $f(0)$ 是极小值, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 是极大值

(C) $f(0)$ 是极大值, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 也是极大值

(D) $f(0)$ 是极小值, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 也是极小值

解 由于 $f'(x) = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$, $f''(x) = \cos x - x \sin x$, $f'(0) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $f''(0) = 1 > 0$, $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0$, 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极小值, 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处取得极大值, 应选(B).

26. (2001. II) 设 $\rho = \rho(x)$ 是抛物线 $y = \sqrt{x}$ 上任一点 $M(x, y)$ ($x \geq 1$) 处的曲率半径, $s = s(x)$ 是该抛物线上介于点 $A(1, 1)$ 与 M 之间的弧长, 计算 $3\rho \frac{d^2\rho}{ds^2} -$

$\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2$ 的值. (在直角坐标系下曲率公式为 $K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$.)

解 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $y'' = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$, 所以抛物线在点 $M(x, y)$ 处的曲率半径

$$\rho = \rho(x) = \frac{1}{K} = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} = \frac{1}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}},$$

抛物线上 \widehat{AM} 的弧长

$$s = s(x) = \int_1^x \sqrt{1+y'^2} dx = \int_1^x \sqrt{1+\frac{1}{4x}} dx.$$

由参数方程求导公式得

$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{\frac{d\rho}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}(4x+1)^{\frac{1}{2}} \cdot 4}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}} = 6\sqrt{x},$$

$$\frac{d^2\rho}{ds^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d\rho}{ds} \right) \frac{1}{\frac{ds}{dx}} = \frac{6}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}} = \frac{6}{\sqrt{4x+1}},$$

从而

$$3\rho \frac{d^2\rho}{ds^2} - \left(\frac{d\rho}{ds} \right)^2 = \frac{3}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{6}{\sqrt{4x+1}} - 36x = 9.$$

27. (1990. III) 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的第一象限部分上求一点 P , 使该点处的切线、椭圆及两坐标轴所围图形的面积为最小(其中 $a > 0, b > 0$).

解 设所求点为 $P(x_0, y_0)$, 则该点处的切线方程为

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$

图形面积为

$$S = \frac{a^2 b^2}{2x_0 y_0} - \frac{1}{4}\pi ab, \quad x_0 \in (0, a).$$

设 $A = x_0 y_0 = \frac{b}{a}x_0 \sqrt{a^2 - x_0^2}$, 则

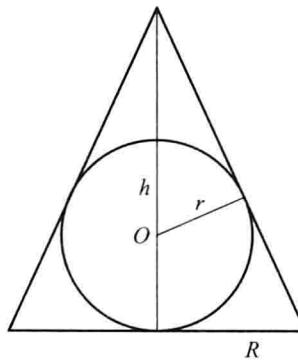
$$A'(x_0) = \frac{b}{a} \left(\sqrt{a^2 - x_0^2} - \frac{x_0^2}{\sqrt{a^2 - x_0^2}} \right) = \frac{b(a^2 - 2x_0^2)}{a\sqrt{a^2 - x_0^2}}.$$

由 $A'(x_0) = 0$, 得 $x_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}$, 易知 $\frac{a}{\sqrt{2}}$ 为 A 的极大值点, 即 S 的极小值点, 也是 S 的最小值

点, 此时, $y_0 = \frac{b}{\sqrt{2}}$. 故所求点为 $P\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 时, 所围图形面积最小.

28. (1993. III) 作半径为 r 的球的外切正圆锥, 问此圆锥的高 h 为何值时, 其体积最小, 并求出该最小值.

解 设圆锥的底面圆半径为 R (见图研 2-1), 则有



图研 2-1

$$Rh = (R + \sqrt{R^2 + h^2})r,$$

解得

$$R = \frac{rh}{\sqrt{h^2 - 2hr}},$$

于是圆锥的体积为

$$V(h) = \frac{\pi}{3} R^2 h = \frac{\pi r^2}{3} \frac{h^2}{h - 2r}, \quad 2r < h < +\infty.$$

由

$$V'(h) = \frac{\pi r^2}{3} \frac{h^2 - 4rh}{(h - 2r)^2}$$

可得 $V(h)$ 在 $(2r, +\infty)$ 内的惟一驻点 $h = 4r$, 当 $h = 4r$ 时, V 取最小值, $V(4r) = \frac{8\pi r^3}{3}$.

29. (1994. III) 设 $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$, 求

- (1) 函数的增减区间及极值; (2) 函数图像的凹凸区间及拐点;
 (3) 渐近线; (4) 作出其图形.

解 定义域 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. 当 $x = -\sqrt[3]{4}$ 时, $y = 0$.

(1) 设 $f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2}$, 则 $f'(x) = 1 - \frac{8}{x^3}$, 故驻点为 $x = 2$. 又

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	0	+
$y = f(x)$ 的图形			$(2, 3)$	

所以, $(-\infty, 0)$ 及 $(2, +\infty)$ 为增区间, $(0, 2)$ 为减区间, $x = 2$ 为极小值点, 极小值为 $f(2) = 3$.

(2) $f''(x) = \frac{24}{x^4} > 0$, 故 $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ 均为凹区间, 图像无拐点.

(3) 因

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 4}{x^2} &= +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4}{x^3} = 1 = a, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 4}{x^2} - x \right) = 0 = b, \end{aligned}$$

所以, $x = 0$ 为铅直渐近线, $y = x$ 为斜渐近线.

(4) 图形见图研 2-2.

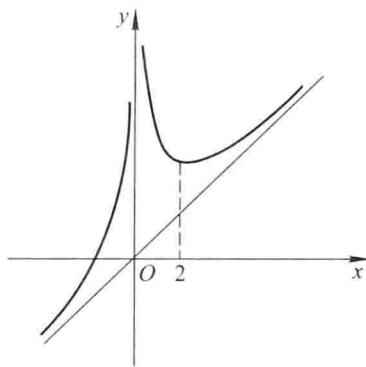
30. (1993. V) 已知某厂生产 x 件产品的成本为

$$C = 25000 + 200x + \frac{1}{40}x^2 \text{ (元)},$$

问: (1) 要使平均成本最小, 应生产多少件产品?

(2) 若产品以每件 500 元售出, 要使利润最大, 应生产多少件产品?

解 (1) 设平均成本为 y , 则



图研 2-2

$$y = \frac{25000}{x} + 200 + \frac{x}{40}.$$

由 $y' = -\frac{25000}{x^2} + \frac{1}{40} = 0$, 得 $x_1 = 1000, x_2 = -1000$ (舍去). 因为 $y''|_{x=1000} = 5 \cdot 10^{-5} > 0$, 所以当 $x = 10^3$ 时, y 取得极小值, 也是最小值, 因此, 要使平均成本最小, 应生产 1000 件产品.

(2) 利润函数为

$$L = 500x - \left(25000 + 200x + \frac{x^2}{40} \right) = 300x - \frac{x^2}{40} - 25000,$$

由 $L' = 300 - \frac{x}{20} = 0$, 得 $x = 6000$. 因 $L''|_{x=6000} = -\frac{1}{20} < 0$, 所以当 $x = 6000$ 时, L 取得极大值, 也是最大值, 因此, 要使利润最大, 应生产 6000 件产品.

(三) 一元函数积分学

1. (2006. II) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} \int_0^x \sin t^2 dt, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$, 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{3x^2} = \frac{1}{3},$$

$$\text{因此, } a = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{3}.$$

2. (1999. II) 设 $\alpha(x) = \int_0^{5x} \frac{\sin t}{t} dt$, $\beta(x) = \int_0^{\sin x} (1+t)^{\frac{1}{t}} dt$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的() .

- | | |
|----------------|-----------|
| (A) 高阶无穷小 | (B) 低阶无穷小 |
| (C) 同阶但不等价的无穷小 | (D) 等价无穷小 |

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{5x} \frac{\sin t}{t} dt}{\int_0^{\sin x} (1+t)^{\frac{1}{t}} dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot \frac{\sin 5x}{5x}}{\cos x \cdot (1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}} = \frac{5}{e},$$

故选 (C).

3. (2006. II) 设 $f(x)$ 是奇函数, 除 $x = 0$ 外处处连续, $x = 0$ 是其第一类间断点, 则 $\int_0^x f(t) dt$ 是().

- | | |
|----------------------|----------------------|
| (A) 连续的奇函数 | (B) 连续的偶函数 |
| (C) 在 $x = 0$ 间断的奇函数 | (D) 在 $x = 0$ 间断的偶函数 |

解 对于任意的 x_0 , 存在 $a > 0$, 使得 $x_0 \in (-a, a)$, 由条件可知 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上有界, 设 $|f(x)| < M_a$ ($x \in [-a, a]$), 记 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 当 $x_0 + \Delta x \in [-a, a]$ 时, 有

$$|F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)| = \left| \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt \right| < M_a |\Delta x|,$$

故 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) \rightarrow 0$, 即 $F(x)$ 在 x_0 处连续. 又

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt \stackrel{t = -u}{=} \int_0^x -f(-u) du = \int_0^x f(u) du = F(x),$$

所以 $F(x)$ 是连续的偶函数, 故选 (B).

4. (1993. I , II) 求 $\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx$.

解 令 $u = \sqrt{e^x - 1}$, 即 $x = \ln(u^2 + 1)$, 因此有

$$\begin{aligned} \int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx &= \int 2 \ln(u^2 + 1) du = 2u \ln(u^2 + 1) - 2 \int \frac{2u^2}{u^2 + 1} du \\ &= 2u \ln(u^2 + 1) - 4u + 4 \arctan u + C \\ &= 2x \sqrt{e^x - 1} - 4 \sqrt{e^x - 1} + 4 \arctan \sqrt{e^x - 1} + C. \end{aligned}$$

5. (1994. I , II , III) 求 $\int \frac{dx}{\sin(2x) + 2 \sin x}$.

解法一

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin(2x) + 2 \sin x} &= \int \frac{dx}{2 \sin x (\cos x + 1)} = \int \frac{d(\cos x)}{2(\cos^2 x - 1)(\cos x + 1)} \\ &\stackrel{u = \cos x}{=} \int \frac{du}{2(u^2 - 1)(u + 1)} \\ &= -\frac{1}{8} \int \left[\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} + \frac{2}{(1+u)^2} \right] du \\ &= -\frac{1}{8} \left[-\ln(1-u) + \ln(1+u) - \frac{2}{1+u} \right] + C \\ &= -\frac{1}{8} \ln \frac{1+\cos x}{1-\cos x} + \frac{1}{4(1+\cos x)} + C. \end{aligned}$$

解法二

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin(2x) + 2 \sin x} &= \int \frac{dx}{2 \sin x (\cos x + 1)} = \frac{1}{4} \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{d\left(\tan \frac{x}{2}\right)}{\tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2}} d\left(\tan \frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{8} \tan^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

6. (1989. III) 已知 $f(2) = \frac{1}{2}$, $f'(2) = 0$ 及 $\int_0^2 f(x) dx = 1$, 求 $\int_0^1 x^2 f''(2x) dx$.

解 令 $t = 2x$, 则

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2 f''(2x) dx &= \frac{1}{8} \int_0^2 t^2 f''(t) dt = \frac{1}{8} \int_0^2 t^2 d[f'(t)] \\
&= \frac{1}{8} [t^2 f'(t)]_0^2 - \frac{1}{4} \int_0^2 t f'(t) dt \\
&= -\frac{1}{4} \int_0^2 t d[f(t)] \\
&= -\frac{1}{4} [tf(t)]_0^2 + \frac{1}{4} \int_0^2 f(t) dt \\
&= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0.
\end{aligned}$$

7. (1995. III) 设 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t} dt$, 计算 $\int_0^\pi f(x) dx$.

$$\begin{aligned}
\text{解 } \int_0^\pi f(x) dx &= [xf(x)]_0^\pi - \int_0^\pi x f'(x) dx \\
&= \pi \int_0^\pi \frac{\sin t}{\pi-t} dt - \int_0^\pi \frac{x \sin x}{\pi-x} dx \\
&= \int_0^\pi \frac{(\pi-x) \sin x}{\pi-x} dx = \int_0^\pi \sin x dx = 2.
\end{aligned}$$

8. (1998. II) 计算积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}$.

解 注意到 $x=1$ 是被积函数的瑕点, 而

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} = [\arcsin(2x-1)]_{\frac{1}{2}}^1 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-x}} = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}} = \left[\ln\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right) \right]_1^{\frac{3}{2}} = \ln(2+\sqrt{3}).$$

因此

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-x}} = \frac{\pi}{2} + \ln(2+\sqrt{3}).$$

9. (2005. II) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) \neq 0$, 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t) dt}{x \int_0^x f(x-t) dt}.$$

$$\text{解 } \int_0^x f(x-t) dt \stackrel{t=x-u}{=} \int_x^0 -f(u) du = \int_0^x f(t) dt,$$

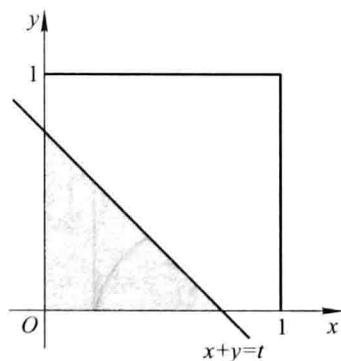
因此

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt}{x \int_0^x f(t) dt} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt + xf(x) - xf(x)}{\int_0^x f(t) dt + xf(x)} \\
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\int_0^x f(t) dt}{x} + f(x) \right]} \\
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) + f(0)} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

10. (2000. II) 设 xOy 平面上有正方形 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ 及直线 $l: x + y = t$ ($t \geq 0$). 若 $S(t)$ 表示正方形 D 位于直线 l 左下方部分的面积, 试求 $\int_0^x S(t) dt$ ($x \geq 0$).

解 如图研 3-1 可知,

$$S(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2, & 0 \leq t \leq 1, \\ -\frac{1}{2}t^2 + 2t - 1, & 1 < t \leq 2, \\ 1, & t > 2, \end{cases}$$



图研 3-1

所以当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $\int_0^x S(t) dt = \int_0^x \frac{1}{2}t^2 dt = \frac{1}{6}x^3$;

$$\begin{aligned} \text{当 } 1 < x \leq 2 \text{ 时, } \int_0^x S(t) dt &= \int_0^1 S(t) dt + \int_1^x \left(-\frac{1}{2}t^2 + 2t - 1 \right) dt \\ &= -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - x + \frac{1}{3}; \end{aligned}$$

$$\text{当 } x > 2 \text{ 时, } \int_0^x S(t) dt = \int_0^2 S(t) dt + \int_2^x dt = x - 1.$$

因此

$$\int_0^x S(t) dt = \begin{cases} \frac{1}{6}x^3, & 0 \leq x \leq 1, \\ -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - x + \frac{1}{3}, & 1 < x \leq 2, \\ x - 1, & x > 2. \end{cases}$$

11. (1992. III) 求曲线 $y = \sqrt{x}$ 的一条切线 l , 使该曲线与切线 l 及直线 $x = 0, x = 2$ 所围成图形面积最小.

解 由 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, 得曲线在 (t, \sqrt{t}) 处的切线方程为

$$y - \sqrt{t} = \frac{1}{2\sqrt{t}}(x - t),$$

即 $y = \frac{1}{2\sqrt{t}}x + \frac{\sqrt{t}}{2}$. 所围面积为

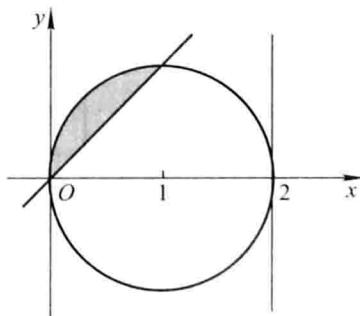
$$S(t) = \int_0^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}x + \frac{\sqrt{t}}{2} - \sqrt{x} \right) dx = \frac{1}{\sqrt{t}} + \sqrt{t} - \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

令 $S'(t) = 0$, 得 $t = 1$, 又 $S''(1) = \frac{1}{2} > 0$. 故当 $t = 1$ 时, 面积取极小值, 由于驻点惟一,

因此 $t = 1$ 是最小值点, 此时 l 的方程为 $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$.

12. (1993. III) 设平面图形 A 由 $x^2 + y^2 \leq 2x$ 与 $y \geq x$ 所确定, 求图形 A 绕直线 $x = 2$ 旋转一周所得旋转体的体积.

解 A 的图形如图研 3-2, 取 y 为积分变量, 则 y 的变化范围为 $[0, 1]$. 相应于



图研 3-2

$[0,1]$ 上的任一小区间 $[y, y+dy]$ 的体积元素为

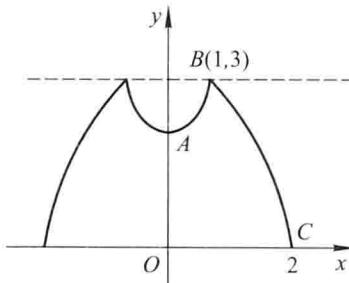
$$\begin{aligned} dV &= \{\pi[2 - (1 - \sqrt{1 - y^2})]^2 - \pi(2 - y)^2\} dy \\ &= 2\pi[\sqrt{1 - y^2} - (y - 1)^2] dy, \end{aligned}$$

因此所求体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 2\pi[\sqrt{1 - y^2} - (y - 1)^2] dy \\ &= 2\pi \left[\frac{y}{2}\sqrt{1 - y^2} + \frac{1}{2}\arcsin y + \frac{(1 - y)^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi^2}{2} - \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

13. (1994. III) 求曲线 $y = 3 - |x^2 - 1|$ 与 x 轴围成的封闭图形绕直线 $y = 3$ 旋转所得的旋转体体积.

解 如图研 3-3, 曲线 \widehat{AB} 的方程为 $y = x^2 + 2$ ($0 \leq x \leq 1$), \widehat{BC} 的方程为 $y = 4 - x^2$ ($1 \leq x \leq 2$).



图研 3-3

取 x 为积分变量, 记相应于区间 $[0,1]$ 和 $[1,2]$ 上的体积分别为 V_1 和 V_2 , 则它们的体积元素分别为

$$\begin{aligned} dV_1 &= \pi \{3^2 - [3 - (x^2 + 2)]^2\} dx = \pi(8 + 2x^2 - x^4) dx, \\ dV_2 &= \pi \{3^2 - [3 - (4 - x^2)]^2\} dx = \pi(8 + 2x^2 - x^4) dx. \end{aligned}$$

由对称性得

$$\begin{aligned} V &= 2(V_1 + V_2) = 2\pi \int_0^1 (8 + 2x^2 - x^4) dx + 2\pi \int_1^2 (8 + 2x^2 - x^4) dx \\ &= 2\pi \int_0^2 (8 + 2x^2 - x^4) dx = \frac{448}{15}\pi. \end{aligned}$$

14. (1991. I, II) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $(0,1)$ 内可导, 且 $3 \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx = f(0)$, 证明在 $(0,1)$ 内存在一点 c , 使 $f'(c) = 0$.

解 由积分中值定理知, 在 $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ 上存在一点 c_1 , 使

$$\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx = \frac{1}{3}f(c_1),$$

从而有 $f(c_1) = f(0)$, 故 $f(x)$ 在区间 $[0, c_1]$ 上满足罗尔定理条件, 因此在 $(0, c_1)$ ($\subset (0, 1)$) 内存在一点 c , 使 $f'(c) = 0$, 证毕.

15. (1993. III) 设 $f'(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 且 $f(0) = 0$, 证明: $\left| \int_0^a f(x) dx \right| \leq \frac{Ma^2}{2}$, 其中 $M = \max_{0 \leq x \leq a} |f'(x)|$.

解 由微分中值定理可知: 对于任意 $x \in [0, a]$, 存在 $\xi \in (0, x)$, 使得 $f(x) - f(0) = f'(\xi)x$, 由条件 $f(0) = 0$ 得 $f(x) = f'(\xi)x$, 因此有

$$\left| \int_0^a f(x) dx \right| \leq \int_0^a |f(x)| dx = \int_0^a |f'(\xi)x| dx \leq \int_0^a Mx dx = \frac{Ma^2}{2}.$$

16. (1999. II) 设 $f(x)$ 是区间 $[0, +\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数, $a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx$ ($n = 1, 2, \dots$), 证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

解 由于 $f(x)$ 单调减少, 因此

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k) \quad (k = 1, 2, \dots),$$

因此有

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx = \sum_{k=1}^n f(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left[f(k) - \int_k^{k+1} f(x) dx \right] + f(n) \geq 0, \end{aligned}$$

即数列 $\{a_n\}$ 有下界. 又

$$a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x) dx \leq 0,$$

即得数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 由单调有界数列必有极限的准则知数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

17. (2004. II) 设 $f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt$, (1) 证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数; (2) 求 $f(x)$ 的值域.

解 (1) $f(x + \pi) = \int_{x+\pi}^{x+\frac{3\pi}{2}} |\sin t| dt$, 设 $t = u + \pi$, 则有

$$f(x + \pi) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin(u + \pi)| du = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin u| du = f(x),$$

故 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数.

(2) 因为 $|\sin x|$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 注意到 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数, 故只需在 $[0, \pi]$ 上讨论 $f(x)$ 的值域. 因为

$$f'(x) = |\sin(x + \frac{\pi}{2})| - |\sin x| = |\cos x| - |\sin x|,$$

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{3\pi}{4}$, 且

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin t \, dt = \sqrt{2},$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} |\sin t| \, dt = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \sin t \, dt - \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \sin t \, dt = 2 - \sqrt{2}.$$

又

$$f(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt = 1, \quad f(\pi) = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} (-\sin t) \, dt = 1,$$

因而 $f(x)$ 的最小值是 $2 - \sqrt{2}$, 最大值是 $\sqrt{2}$, 故 $f(x)$ 的值域是 $[2 - \sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

18. (2002. I, II) 设

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{3}{2}x^2, & -1 \leq x < 0, \\ \frac{x e^x}{(e^x + 1)^2}, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

求函数 $F(x) = \int_{-1}^x f(t) \, dt$ 的表达式.

解 当 $-1 \leq x < 0$ 时,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-1}^x f(t) \, dt = \int_{-1}^x \left(2t + \frac{3}{2}t^2\right) \, dt \\ &= \left[t^2 + \frac{1}{2}t^3\right]_{-1}^x = \frac{1}{2}x^3 + x^2 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-1}^x f(t) \, dt = \int_{-1}^0 \left(2t + \frac{3}{2}t^2\right) \, dt + \int_0^x \frac{t e^t}{(e^t + 1)^2} \, dt \\ &= \left[t^2 + \frac{1}{2}t^3\right]_{-1}^0 - \int_0^x t d\left(\frac{1}{e^t + 1}\right) \\ &= -\frac{1}{2} - \left[\frac{t}{e^t + 1}\right]_0^x + \int_0^x \frac{1}{e^t + 1} \, dt = -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x + 1} + \int_0^x \frac{-1}{1 + e^{-t}} d(e^{-t}) \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x + 1} - [\ln(1 + e^{-t})]_0^x = -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x + 1} - \ln(1 + e^{-x}) + \ln 2. \end{aligned}$$

因此

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^3 + x^2 - \frac{1}{2}, & -1 \leq x < 0, \\ -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x + 1} - \ln \frac{1 + e^{-x}}{2}, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

19. (2007. I, III) 如图研 3-4, 连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3, -2], [2, 3]$ 上的图

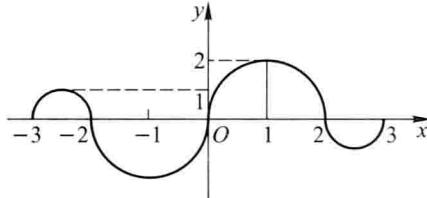
形分别是直径为 1 的上、下半圆周, 在区间 $[-2, 0], [0, 2]$ 的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周, 设 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则下列结论正确的是().

$$(A) F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$$

$$(B) F(3) = \frac{5}{4}F(2)$$

$$(C) F(-3) = \frac{3}{4}F(2)$$

$$(D) F(-3) = -\frac{5}{4}F(-2)$$



图研 3-4

解 根据定积分的几何意义, 有

$$F(2) = \frac{1}{2}\pi,$$

$$F(3) = \int_0^2 f(t) dt + \int_2^3 f(t) dt = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}\pi,$$

$$F(-2) = \int_0^{-2} f(x) dx = - \int_{-2}^0 f(x) dx = \frac{1}{2}\pi,$$

$$F(-3) = \int_0^{-3} f(x) dx = - \left[\int_{-3}^{-2} f(x) dx + \int_{-2}^0 f(x) dx \right] = - \left[\frac{1}{2}\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi \right] = \frac{3}{8}\pi.$$

故选(C).

20. (2007. I) $\int_1^2 \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 作换元 $x = \frac{1}{t}$, 则

$$\int_1^2 \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 t e^t dt = \left[t e^t - e^t \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}}.$$

21. (2008. I) 设 $f(x)$ 是连续函数.

(1) 利用定义证明函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 可导, 且 $F'(x) = f(x)$;

(2) 当 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数时, 证明函数 $G(x) = 2 \int_0^x f(t) dt - x \int_0^2 f(t) dt$ 也是以 2 为周期的周期函数.

证 (1) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\xi) \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = f(x),$$

因此 $F(x)$ 可导, 且 $F'(x) = f(x)$.

$$\begin{aligned}(2) G(x+2) - G(x) &= 2 \left(\int_0^{x+2} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt \right) - 2 \int_0^2 f(t) dt \\&= 2 \int_x^{x+2} f(t) dt - 2 \int_0^2 f(t) dt,\end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数, 故必有 $\int_x^{x+2} f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt$, 因此 $G(x+2) - G(x) = 0$, 即 $G(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

22. (2009. I) 如图研 3-5, 正方形 $\{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ 被其对角线划分为

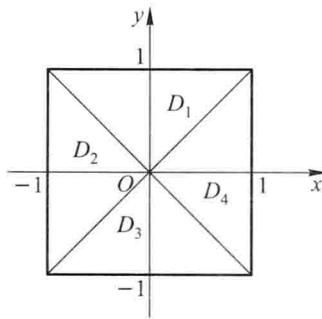
四个区域 $D_k (k = 1, 2, 3, 4)$, $I_k = \iint_A y \cos x dx dy$, 则 $\max_{1 \leq k \leq 4} \{I_k\} = (\quad)$.

(A) I_1

(B) I_2

(C) I_3

(D) I_4



图研 3-5

解 记 D_1^* 和 D_3^* 为 D_1 和 D_3 中 $x \geq 0$ 部分的区域, 利用二重积分区域的对称性及被积函数的奇偶性, 可得

$$I_2 = I_4 = 0,$$

$$I_1 = 2 \iint_{D_1^*} y \cos x dx dy > 0, \quad I_3 = 2 \iint_{D_3^*} y \cos x dx dy < 0.$$

故选 (A).

23. (2010. I) 设 $x = e^{-t}$, $y = \int_0^t \ln(1 + u^2) du$, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -e^t \ln(1 + t^2),$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left[-e^t \ln(1 + t^2) \right] / \frac{dx}{dt} = e^{2t} \left[\ln(1 + t^2) + \frac{2t}{1 + t^2} \right],$$

于是 $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=0} = 0$.

24. (2010. I) $\int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 作换元 $x = u^2$, 则

$$\int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx = \int_0^{\pi} 2u^2 \cos u du = [2u^2 \sin u + 4u \cos u - 4 \sin u]_0^{\pi} = -4\pi.$$

25. (2010. I) 求 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t) e^{-t^2} dt$ 的单调区间与极值.

解 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t) e^{-t^2} dt = x^2 \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt - \int_1^{x^2} t e^{-t^2} dt,$

令 $f'(x) = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt = 0$, 得 $x = -1, 0, 1$.

在 $(-\infty, -1)$ 和 $(0, 1)$ 上可得 $f'(x) < 0$, 因此 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1]$ 和 $[0, 1]$ 上单调减少; 在 $(-1, 0)$ 和 $(1, +\infty)$ 上可得 $f'(x) > 0$, 因此 $f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 和 $[1, +\infty)$ 上单调增加.

又 $f''(x) = 2 \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt + 4x^2 e^{-x^4}$, 得

$$f''(\pm 1) = 4e^{-1} > 0, \quad f''(0) = -2 \int_0^1 e^{-t^2} dt < 0,$$

所以 $x = -1$ 和 $x = 1$ 为 $f(x)$ 的极小值点, 极小值为 $f(\pm 1) = 0$; $x = 0$ 为 $f(x)$ 的极大值点, 极大值为 $f(0) = - \int_1^0 t e^{-t^2} dt = \int_0^1 t e^{-t^2} dt = \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2e}$.

26. (2010. I, III)(1) 比较 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| dt$ ($n = 1, 2, \dots$);

(2) 记 $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ ($n = 1, 2, \dots$), 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

解 (1) 当 $0 \leq t \leq 1$ 时, $0 \leq \ln(1+t) \leq t$, 故 $|\ln t| [\ln(1+t)]^n \leq t^n |\ln t|$, 于是

$$\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt \leq \int_0^1 t^n |\ln t| dt.$$

(2) 由(1)得

$$0 \leq \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt \leq \int_0^1 t^n |\ln t| dt,$$

而

$$\int_0^1 t^n |\ln t| dt = - \int_0^1 t^n \ln t dt = - \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} \left(\ln t - \frac{1}{n+1} \right) \right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)^2},$$

由夹逼准则得 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

27. (2011. I) 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cot x dx$, $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx$, 则 I, J, K 的大

小关系是() .

- (A) $I < J < K$ (B) $I < K < J$ (C) $J < I < K$ (D) $K < J < I$

解 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 时, $0 < \sin x < \cos x < \cot x$, 因此 $\ln \sin x < \ln \cos x < \ln \cot x$. 故选

(B).

28. (2011. I) 曲线 $y = \int_0^x \tan t dt$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$) 的弧长 $s = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } s &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \tan^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx \\ &= [\ln(\sec x + \tan x)] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln(\sqrt{2} + 1). \end{aligned}$$

29. (2012. I) 设 $I_k = \int_e^{k\pi} e^{x^2} \sin x dx$ ($k = 1, 2, 3$), 则有().

- (A) $I_1 < I_2 < I_3$ (B) $I_3 < I_2 < I_1$
 (C) $I_2 < I_3 < I_1$ (D) $I_2 < I_1 < I_3$

$$\text{解 } I_2 - I_1 = \int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx < 0, I_3 - I_2 = \int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx > 0,$$

$$I_3 - I_1 = \int_{\pi}^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx = \int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2} \sin x dx + \int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx,$$

对 $\int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx$ 作换元 $x = \pi + u$, 得

$$\int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2} \sin x dx = - \int_{\pi}^{2\pi} e^{(u+\pi)^2} \sin u du = - \int_{\pi}^{2\pi} e^{(x+\pi)^2} \sin x dx,$$

因此

$$I_3 - I_1 = \int_{\pi}^{2\pi} [e^{x^2} - e^{(x+\pi)^2}] \sin x dx > 0.$$

故选(D).

30. (2012. I) $\int_0^2 x \sqrt{2x - x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 作换元 $x = 1 + \sin u$, 则

$$\begin{aligned} \int_0^2 x \sqrt{2x - x^2} dx &= \int_0^2 x \sqrt{1 - (x-1)^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin u) \cos^2 u du \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

(四) 微分方程

1. (1999. I , II) $y'' - 4y = e^{2x}$ 的通解为 _____.

解 此方程对应的齐次方程的特征方程为 $r^2 - 4 = 0$, 其根为 $r_{1,2} = \pm 2$. 又因自由项 $f(x) = e^{2x}$, $\lambda = 2$ 是特征方程的单根, 故令 $y^* = Axe^{2x}$ 是原方程的特解, 代入方程可得 $A = \frac{1}{4}$, 于是原方程的通解为

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + \frac{x}{4} e^{2x}.$$

2. (2000. I) 微分方程 $xy'' + 3y' = 0$ 的通解为 _____.

解 原方程可变形为 $\frac{dy'}{y'} = -\frac{3}{x} dx$, 积分得 $\ln y' = -3 \ln x + \ln C_0$,

即 $y' = \frac{C_0}{x^3}$. 故

$$y = -\frac{C_0}{2} \frac{1}{x^2} + C_2 = \frac{C_1}{x^2} + C_2.$$

3. (2001. I) 设 $y = e^x (C_1 \sin x + C_2 \cos x)$ (C_1, C_2 为任意常数) 为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解, 则该微分方程为 _____.

解 由所给通解的表达式知, $r_{1,2} = 1 \pm i$ 是所求微分方程的特征方程的根, 于是特征方程为 $r^2 - 2r + 2 = 0$, 故所求微分方程为

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

4. (2001. II) 过点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 且满足关系式 $y' \arcsin x + \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = 1$ 的曲线方程为 _____.

解 将所给关系式改写成 $y' + \frac{1}{\arcsin x \sqrt{1-x^2}} y = \frac{1}{\arcsin x}$, 由一阶线性微分方程的通解公式, 得

$$y = e^{-\int \frac{dx}{\arcsin x \sqrt{1-x^2}}} \left(\int \frac{1}{\arcsin x} e^{\int \frac{dx}{\arcsin x \sqrt{1-x^2}}} dx + C \right),$$

即

$$y = \frac{1}{\arcsin x} (x + C),$$

代入初值条件 $x = \frac{1}{2}, y = 0$, 得 $C = -\frac{1}{2}$, 故所求曲线的方程为

$$y = \frac{x - \frac{1}{2}}{\arcsin x}.$$

5. (2002. I, II) 微分方程 $yy'' + y'^2 = 0$ 满足初值条件 $y \Big|_{x=0} = 1, y' \Big|_{x=0} = \frac{1}{2}$ 的特解是_____.

解 令 $y' = p$, 则 $y'' = p \frac{dp}{dy}$, 且原方程成为 $yp \frac{dp}{dy} + p^2 = 0$, 即

$$p = 0 \quad \text{或} \quad y \frac{dp}{dy} + p = 0.$$

由于 $p = 0$ 不满足条件 $y' \Big|_{x=0} = \frac{1}{2}$, 故取 $y \frac{dp}{dy} + p = 0$. 分离变量后积分得

$$p = \frac{C_1}{y},$$

代入初值条件 $y \Big|_{x=0} = 1, p \Big|_{x=0} = \frac{1}{2}$, 得 $C_1 = \frac{1}{2}$, 即

$$y' = \frac{1}{2y},$$

分离变量后积分得 $y^2 = x + C_2$, 代入初值条件 $y \Big|_{x=0} = 1$, 得 $C_2 = 1$. 于是有 $y^2 = x + 1$, 解得特解

$$y = \sqrt{x + 1}.$$

6. (2004. I) 欧拉方程 $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 2y = 0 (x > 0)$ 的通解为_____.

解 令 $x = e^t$, 记 $D = \frac{d}{dt}$, 则原方程成为

$$D(D - 1)y + 4Dy + 2y = 0.$$

特征方程是 $r(r - 1) + 4r + 2 = 0$, 解得特征根是 $r_1 = -1, r_2 = -2$, 故得通解 $y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$, 于是原方程的通解为

$$y = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2}.$$

7. (2004. II) 微分方程 $(y + x^3)dx - 2xdy = 0$ 满足 $y \Big|_{x=1} = \frac{6}{5}$ 的特解为_____.

解 原方程变形为一阶线性方程

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x}y = \frac{x^2}{2},$$

解得

$$y = e^{\int \frac{1}{2x}dx} \left(\int \frac{x^2}{2} e^{-\int \frac{1}{2x}dx} dx + C \right)$$

$$= \frac{1}{5}x^3 + C\sqrt{x}.$$

由 $y \Big|_{x=1} = \frac{6}{5}$ 得 $C = 1$, 故特解为

$$y = \frac{1}{5}x^3 + \sqrt{x}.$$

8. (2005. I, II) 微分方程 $xy' + 2y = x \ln x$ 满足 $y \Big|_{x=1} = -\frac{1}{9}$ 的特解为 _____.

解 原方程变形为一阶线性方程

$$y' + \frac{2}{x}y = \ln x,$$

解得

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left(\int \ln x e^{\int \frac{2}{x} dx} dx + C \right) \\ &= \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C \right). \end{aligned}$$

由 $y \Big|_{x=1} = -\frac{1}{9}$, 得 $C = 0$, 故特解为

$$y = \frac{x}{3} \left(\ln x - \frac{1}{3} \right).$$

9. (2009. I) 若二阶常系数齐次线性微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^x$, 则非齐次方程 $y'' + ay' + by = x$ 满足条件 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ 的解为 $y =$ _____.

解 由常系数线性齐次微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^x$ 可知 $y_1 = e^x, y_2 = xe^x$ 为齐次微分方程的两个线性无关的解. 可见齐次方程的特征方程是 $(r-1)^2 = r^2 - 2r + 1 = 0$, 故齐次微分方程为 $y'' - 2y' + y = 0$.

设非齐次方程 $y'' - 2y' + y = x$ 的特解为 $y^* = Ax + B$, 代入方程 $y'' - 2y' + y = x$, 解得 $A = 1, B = 2$, 即 $y^* = x + 2$. 故 $y'' - 2y' + y = x$ 的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x + x + 2,$$

且

$$y' = (C_1 + C_2 + C_2 x)e^x + 1.$$

代入初值条件 $y(0) = 2, y'(0) = 0$, 得 $C_1 = 0, C_2 = -1$. 因此所求的解为 $y = -xe^x + x + 2$.

10. (2011. I) 微分方程 $y' + y = e^{-x} \cos x$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的解为 $y =$ _____.

解 原方程的通解为

$$y = e^{-\int 1 dx} \left[\int e^{-x} \cos x e^{\int 1 dx} dx + C \right] = e^{-x} \left[\int \cos x dx + C \right] = e^{-x} [\sin x + C],$$

由 $y(0) = 0$, 得 $C = 0$, 故所求解为 $y = \sin x e^{-x}$.

11. (1989. I, II) 设线性无关的函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶非齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

的解, C_1, C_2 是任意常数, 则该非齐次方程的通解是()。

- (A) $C_1y_1 + C_2y_2 + y_3$ (B) $C_1y_1 + C_2y_2 - (C_1 + C_2)y_3$
 (C) $C_1y_1 + C_2y_2 - (1 - C_1 - C_2)y_3$ (D) $C_1y_1 + C_2y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3$

解 因 $y_1 - y_3$ 与 $y_2 - y_3$ 是对应的齐次方程的解, 且由 y_1, y_2, y_3 线性无关可推知 $y_1 - y_3$ 与 $y_2 - y_3$ 线性无关, 而 y_3 是非齐次方程的特解, 故

$y = C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) + y_3 = C_1y_1 + C_2y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3$ 是非齐次方程的通解, 所以选择(D)。

12. (1989. III) 微分方程 $y'' - y = e^x + 1$ 的一个特解应具有形式(式中 a, b 为常数)()。

- (A) $ae^x + b$ (B) $axe^x + b$ (C) $ae^x + bx$ (D) $axe^x + bx$

解 原方程对应的齐次方程的特征方程的根为 $r_{1,2} = \pm 1$, 相对于方程 $y'' - y = e^x$, 因 $f_1(x) = e^x, \lambda = 1$ 是特征方程的(单)根, 故该方程的特解应形如 $y_1^* = axe^x$.

又相对于方程 $y'' - y = 1$, 因 $f_2(x) = 1, \lambda = 0$ 不是特征方程的根, 故该方程的特解应形如 $y_2^* = b$.

按叠加原理, 原方程的特解应形如 $y^* = y_1^* + y_2^* = axe^x + b$. 故应选择(B).

13. (2008. I) 在下列微分方程中, 以 $y = C_1e^x + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x$ (C_1, C_2, C_3 为任意的常数) 为通解的是()。

- (A) $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$ (B) $y''' + y'' - 4y' + 4y = 0$
 (C) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$ (D) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$

解 由 $y = C_1e^x + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x$ 可知微分方程的特征方程的根为 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = \pm 2i$, 故对应的特征方程为

$$\begin{aligned} (r-1)(r+2i)(r-2i) &= (r-1)(r^2+4) \\ &= r^3 - r^2 + 4r - 4 = 0, \end{aligned}$$

所以微分方程为 $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$. 应选(D).

14. (1989. I, II, III) 设 $f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t)dt$, 其中 f 为连续函数, 求 $f(x)$.

解 因 $f(x) = \sin x - x \int_0^x f(t)dt + \int_0^x tf(t)dt$, 代入 $x = 0$, 得 $f(0) = 0$,

且

$$f'(x) = \cos x - \int_0^x f(t)dt.$$

代入 $x = 0$, 得 $f'(0) = 1$. 又

$$f''(x) = -\sin x - f(x).$$

记 $y = f(x)$, 即得初值问题

$$\begin{cases} y'' + y = -\sin x, \\ y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1. \end{cases}$$

上述微分方程对应的齐次方程的特征方程有根 $r_{1,2} = \pm i$, 而自由项为 $-\sin x, \lambda + i\omega = i$ 是特征方程的根, 故令 $y^* = x(A\cos x + B\sin x)$ 是原方程的特解, 代入微分方程并比较系数, 得 $A = \frac{1}{2}, B = 0$, 即 $y^* = \frac{1}{2}x\cos x$. 于是得通解

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}x\cos x,$$

且

$$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}x\sin x.$$

由 $y|_{x=0} = 0$ 及 $y'|_{x=0} = 1$, 得

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 + \frac{1}{2} = 1, \end{cases}$$

即 $C_1 = 0, C_2 = \frac{1}{2}$, 故

$$y = f(x) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}x\cos x.$$

15. (1991. I, II) 在上半平面上求一条向下凸的曲线, 其上任一点 $P(x, y)$ 处的曲率等于此曲线在该点的法线 PQ 长度的倒数 (Q 是法线与 x 轴的交点), 且曲线在点 $(1, 1)$ 处的切线与 x 轴平行.

解 曲线 $y = y(x)$ 在点 $P(x, y)$ 处的法线方程为

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x).$$

令 $Y = 0$, 得点 Q 的坐标 $(x + yy', 0)$, 于是

$$|PQ| = \sqrt{(yy')^2 + y^2} = |y|\sqrt{1 + y'^2}.$$

依题意有

$$\frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{|y|(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

因所求曲线在上半平面上且向下凸, 有 $|y| = y, |y''| = y''$, 故得微分方程

$$\frac{y''}{1 + y'^2} = \frac{1}{y},$$

且由题设知 $y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 0$.

令 $y' = p$, 则 $y'' = p \frac{dp}{dy}$, 且微分方程降阶为

$$\frac{p dp}{1 + p^2} = \frac{dy}{y}.$$

由条件 $y = 1, p = 0$, 积分 $\int_0^p \frac{p dp}{1 + p^2} = \int_1^y \frac{dy}{y}$, 得 $\frac{1}{2} \ln(1 + p^2) = \ln y$, 从而

$$p = \pm \sqrt{y^2 - 1},$$

即

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} = \pm dx.$$

积分得

$$\ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) = \pm x + C,$$

即 $y = \frac{e^{x+C} + e^{-(x+C)}}{2}$. 代入初值条件 $x=1, y=1$, 得 $C=-1$, 故

$$y = \frac{e^{x-1} + e^{-(x-1)}}{2}.$$

16. (1995. I, II) 设曲线 L 位于 xOy 平面的第一象限内, L 上任一点 M 处的切线与 y 轴总相交, 交点记为 A . 已知 $|MA| = |OA|$, 且 L 过点 $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, 求 L 的方程.

解 设点 M 的坐标为 (x, y) , 则切线 MA 的方程为

$$Y - y = y'(X - x).$$

令 $X=0$, 得 A 的坐标 $(0, y - xy')$.

因 $|MA| = |OA|$, 故有

$$|y - xy'| = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - y + xy')^2},$$

化简后得

$$2yy' - \frac{1}{x}y^2 = -x.$$

即

$$(y^2)' - \frac{1}{x}y^2 = -x.$$

由一阶线性方程的通解公式解得

$$y^2 = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left(\int -xe^{-\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right) = x(-x + C) = -x^2 + Cx.$$

由于 L 位于第一象限, 故取

$$y = \sqrt{Cx - x^2}.$$

代入初值条件 $x=\frac{3}{2}, y=\frac{3}{2}$, 得 $C=3$. 故 L 的方程为

$$y = \sqrt{3x - x^2}.$$

17. (1995. III) 设 $y = e^x$ 是微分方程 $xy' + p(x)y = x$ 的一个解, 求此微分方程满足条件 $y|_{x=\ln 2} = 0$ 的特解.

解 将 $y = e^x$ 代入原方程, 可得

$$xe^x + p(x)e^x = x,$$

故

$$p(x) = xe^{-x} - x,$$

即原方程对应的齐次方程为 $xy' + (xe^{-x} - x)y = 0$, 消去 x , 得 $y' + (e^{-x} - 1)y = 0$, 分离变量并积分得齐次方程的通解为

$$Y = Ce^{x + e^{-x}},$$

于是得原方程的通解为

$$y = Ce^{x + e^{-x}} + e^x.$$

由初值条件 $y|_{x=\ln 2} = 0$, 得 $C \cdot 2e^{\frac{1}{2}} + 2 = 0$, 即 $C = -e^{-\frac{1}{2}}$. 故所求特解为

$$y = e^x - e^{x+e^{-x}-\frac{1}{2}}.$$

18. (1996. III) 设 $f(x)$ 为连续函数.

(1) 求初值问题 $\begin{cases} y' + ay = f(x), \\ y|_{x=0} = 0 \end{cases}$ 的解 $y(x)$, 其中 a 是正常数;

(2) 若 $|f(x)| \leq k$ (k 为常数), 证明当 $x \geq 0$ 时, 有 $|y(x)| \leq \frac{k}{a}(1 - e^{-ax})$.

解 (1) 方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int a dx} \left(\int f(x) e^{\int a dx} dx + C \right) = e^{-ax} \left(\int f(x) e^{ax} dx + C \right) \\ &= e^{-ax} (F(x) + C), \end{aligned}$$

其中 $F(x)$ 是 $f(x)e^{ax}$ 的一个原函数. 由 $y|_{x=0} = 0$, 得 $C = -F(0)$, 故

$$y = e^{-ax} [F(x) - F(0)] = e^{-ax} \int_0^x f(t) e^{at} dt.$$

(2) 因 $|f(x)| \leq k$, 故

$$\begin{aligned} |y| &= e^{-ax} \left| \int_0^x f(t) e^{at} dt \right| \leq e^{-ax} \int_0^x |f(t)| e^{at} dt \\ &\leq ke^{-ax} \int_0^x e^{at} dt = ke^{-ax} \frac{1}{a} (e^{ax} - 1) \\ &= \frac{k}{a} (1 - e^{-ax}). \end{aligned}$$

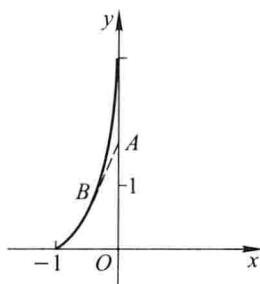
19. (1993. I, II) 设物体 A 从点 $(0, 1)$ 出发, 以常速率 v 沿 y 轴正向运动. 物体 B 从点 $(-1, 0)$ 与 A 同时出发, 其速率为 $2v$, 方向始终指向 A . 试建立物体 B 的运动轨迹所满足的微分方程, 并写出初值条件.

解 设物体 B 的运动轨迹的方程为 $y = y(x)$, 又设在时刻 t , 物体 B 位于点 (x, y) 处, 此时物体 A 位于点 $(0, 1+vt)$. 按题意, 则如图研 4-1 所示, 有

$$y' = \frac{1+vt-y}{0-x},$$

即

$$y - xy' - 1 = vt. \quad (1)$$



图研 4-1

又此刻, 物体 \$B\$ 从点 \$(-1, 0)\$ 行至 \$(x, y)\$ 的路程为

$$\int_{-1}^x \sqrt{1 + y'^2} dx = 2vt. \quad (2)$$

由(1)式与(2)式消去 \$vt\$, 得

$$y - xy' - 1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^x \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

在上式两端对 \$x\$ 求导, 得

$$y' - (y' + xy'') = \frac{1}{2} \sqrt{1 + y'^2},$$

即

$$xy'' + \frac{1}{2} \sqrt{1 + y'^2} = 0,$$

初值条件为 \$y|_{x=-1} = 0, y'|_{x=1} = 1\$.

20. (1998. II) 利用代换 \$y = \frac{u}{\cos x}\$ 将方程

$$y'' \cos x - 2y' \sin x + 3y \cos x = e^x$$

化简, 并求出原方程的通解.

解法一 由 \$u = y \cos x\$ 两端对 \$x\$ 求导, 得

$$u' = y' \cos x - y \sin x, \quad u'' = y'' \cos x - 2y' \sin x - y \cos x.$$

于是原方程化为 \$u'' + 4u = e^x\$, 其通解为

$$u = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{e^x}{5} \quad (C_1, C_2 \text{ 为任意常数}).$$

从而原方程的通解为

$$y = C_1 \frac{\cos 2x}{\cos x} + 2C_2 \sin 2x + \frac{e^x}{5 \cos x}.$$

解法二 \$y = u \sec x, y' = u' \sec x + u \sec x \cdot \tan x,

$$y'' = u'' \sec x + 2u' \sec x \cdot \tan x + u \sec x \cdot \tan^2 x + u \sec^3 x.$$

代入原方程得 $u'' + 4u = e^x$. (下同解法一)

21. (1997. II) 设曲线 L 的极坐标方程为 $\rho = \rho(\theta)$, $M(\rho, \theta)$ 为 L 上任一点, $M_0(2, 0)$ 为 L 上一定点. 若极径 OM_0, OM 与曲线 L 所围成的面积等于 L 上 M_0, M 两点间弧长的值之一半. 求曲线 L 的方程.

解 由题意得

$$\frac{1}{2} \int_0^\theta \rho^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\theta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta,$$

上式两端对 θ 求导, 得 $\rho^2 = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}$, 即 $\rho' = \pm \rho \sqrt{\rho^2 - 1}$. 分离变量并积分

$$\int \frac{d\rho}{\rho \sqrt{\rho^2 - 1}} = \pm \int d\theta,$$

即

$$\int \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{1 - \frac{1}{\rho^2}}} = \pm \int d\theta,$$

得 $-\arcsin \frac{1}{\rho} = \pm \theta + C$, 代入初值条件 $\theta = 0, \rho = 2$, 得 $C = -\frac{\pi}{6}$. 故曲线 L 的方程

为 $\arcsin \frac{1}{\rho} = \frac{\pi}{6} \pm \theta$, 即

$$\rho = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{6} \pm \theta\right)}.$$

若将 L 表示成直角坐标方程, 则由 $\rho \sin\left(\frac{\pi}{6} \pm \theta\right) = 1$, 即

$$\rho \left(\frac{1}{2} \cos \theta \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right) = 1,$$

得 $x \pm \sqrt{3}y = 2$.

22. (1998. II) 设 $y = y(x)$ 是一向上凸的连续曲线, 其上任一点 (x, y) 处的曲率为 $\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}$. 又此曲线上点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $y = x + 1$, 求该曲线的方程, 并求 $y = y(x)$ 的极值.

解 因曲线向上凸, 故 $y'' \leq 0$, 曲率 $K = \frac{|y''|}{(\sqrt{1 + y'^2})^3} = \frac{-y''}{(\sqrt{1 + y'^2})^3}$, 按题意有

$$\frac{-y''}{(\sqrt{1 + y'^2})^3} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

即

$$\frac{y''}{1 + y'^2} = -1.$$

令 $y' = p$, 则上述方程化为 $\frac{p'}{1 + p^2} = -1$, 即

$$\frac{dp}{1 + p^2} = -dx,$$

积分得 $\arctan p = C_1 - x$.

因 $y = y(x)$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $y = x + 1$, 故 $p|_{x=0} = y'|_{x=0} = 1$. 由此条件得 $\arctan 1 = C_1$, 即 $C_1 = \frac{\pi}{4}$. 于是

$$y' = p = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right),$$

积分得

$$y = \ln\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] + C_2.$$

因曲线过点 $(0, 1)$, 故由 $y|_{x=0} = 1$, 得 $C_2 = 1 - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \frac{1}{2}\ln 2$. 故所求曲线的方程为

$$y = \ln\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] + 1 + \frac{1}{2}\ln 2.$$

由于 $y = y(x)$ 是连续曲线, 故 $y = \ln\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] + 1 + \frac{1}{2}\ln 2$ 的定义域为 $-\frac{\pi}{2} < x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$, 即 $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$. 又 $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \leq 1$. 故当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, y 有极大值 $1 + \frac{1}{2}\ln 2$.

23. (1998. III) 设函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上连续. 若由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = 1$, $x = t(t > 1)$ 与 x 轴所围成的图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体体积为

$$V(t) = \frac{\pi}{3}[t^2f(t) - f(1)],$$

试求 $y = f(x)$ 所满足的微分方程, 并求该微分方程满足条件 $y|_{x=2} = \frac{2}{9}$ 的解.

解 依题意, 有

$$\pi \int_1^t f^2(x) dx = \frac{\pi}{3}[t^2f(t) - f(1)],$$

即

$$3 \int_1^t f^2(x) dx = t^2f(t) - f(1).$$

两端对 t 求导, 得 $3f^2(t) = 2tf(t) + t^2f'(t)$. 将变量 t 用 x 表示, 即

$$x^2y' + 2xy = 3y^2$$

为 $y = f(x)$ 满足的微分方程.

将此方程改写为

$$y' + 2 \frac{y}{x} = 3 \left(\frac{y}{x} \right)^2,$$

令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y' = u + xu'$, 且方程成为 $xu' = 3u(u - 1)$, 分离变量并积分

$$\int \frac{du}{u(u - 1)} = 3 \int \frac{dx}{x},$$

得

$$\ln \left| \frac{u - 1}{u} \right| = 3 \ln |x| + \ln C_1,$$

代入 $u = \frac{y}{x}$, 得 $\ln \left| \frac{y - x}{y} \right| = \ln C_1 |x|^3$, 即

$$\frac{y - x}{y} = Cx^3 \quad (C = \pm C_1).$$

由初值条件 $y|_{x=2} = \frac{2}{9}$, 得 $C = -1$, 于是由 $\frac{y - x}{y} = -x^3$ 解得

$$y = \frac{x}{x^3 + 1}$$

24. (2001. IV) 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内连续, $f(1) = \frac{5}{2}$, 且对所有 $x, t \in (0, +\infty)$, 满

足条件

$$\int_1^{xt} f(u) du = t \int_1^x f(u) du + x \int_1^t f(u) du,$$

求 $f(x)$.

解 在所给条件等式的两端对 x 求导, 得

$$tf(xt) = tf(x) + \int_1^t f(u) du.$$

在上式中令 $x = 1$, 且由 $f(1) = \frac{5}{2}$, 可得

$$tf(t) = \frac{5}{2}t + \int_1^t f(u) du. \quad (1)$$

由于 $t > 0$ 时 $\frac{1}{t} \int_1^t f(u) du$ 关于 t 可导, 故 $f(t) = \frac{5}{2} + \frac{1}{t} \int_1^t f(u) du$ 可导, 于是在等式(1) 两端对 t 求导, 得

$$f(t) + tf'(t) = \frac{5}{2} + f(t),$$

即 $f'(t) = \frac{5}{2t}$, 积分得 $f(t) = \frac{5}{2} \ln t + C$.

由 $f(1) = \frac{5}{2}$, 得 $C = \frac{5}{2}$. 故 $f(t) = \frac{5}{2} \ln t + \frac{5}{2}$, 即

$$f(x) = \frac{5}{2}(\ln x + 1).$$

25. (2000. II) 某湖泊的水量为 V , 每年排入湖泊内含污染物 A 的污水量为 $\frac{V}{6}$, 流入湖泊内不含 A 的水量为 $\frac{V}{6}$, 流出湖泊的水量为 $\frac{V}{3}$. 已知 1999 年年底湖中 A 的含量为 $5m_0$, 超过国家规定指标. 为了治理污染, 从 2000 年初起, 限定排入湖泊中含 A 污水的浓度不超过 $\frac{m_0}{V}$. 问至多需经过多少年, 湖泊中污染物 A 的含量降至 m_0 以内?
(注: 设湖水中 A 的浓度是均匀的.)

解 设从 2000 年年初(令此时 $t=0$)开始, 第 t 年湖泊中污染物 A 的总量为 m , 浓度为 $\frac{m}{V}$, 则在时间间隔 $[t, t+dt]$ 内, 排入湖泊中 A 的量为 $\frac{m_0}{V} \cdot \frac{V}{6} dt = \frac{m_0}{6} dt$, 流出湖泊的水中 A 的量为 $\frac{m}{V} \cdot \frac{V}{3} dt = \frac{m}{3} dt$, 因而在此时间间隔内湖泊中污染物 A 的改变量

$$dm = \left(\frac{m_0}{6} - \frac{m}{3} \right) dt.$$

由分离变量法解得 $m = \frac{m_0}{2} - Ce^{-\frac{t}{3}}$, 代入初值条件 $m|_{t=0} = 5m_0$, 得 $C = -\frac{9}{2}m_0$. 于是

$$m = \frac{m_0}{2}(1 + 9e^{-\frac{t}{3}}).$$

令 $m = m_0$, 得 $t = 6\ln 3$, 即至多需经过 $6\ln 3$ 年, 湖泊中污染物 A 的含量降至 m_0 以内.

26. (2003. II) 设位于第一象限的曲线 $y=f(x)$ 过点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 其上任一点 $P(x, y)$ 处的法线与 y 轴的交点为 Q , 且线段 PQ 被 x 轴平分.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 的方程;

(2) 已知曲线 $y=\sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上的弧长为 l , 试用 l 表示曲线 $y=f(x)$ 的弧长 s .

解 (1) 曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x, y)$ 处的法线方程为

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

其中 (X, Y) 为法线上任意一点, 令 $X=0$, 则

$$Y = y + \frac{x}{y'},$$

故 Q 点为 $\left(0, y + \frac{x}{y'}\right)$. 由题设知 $y + y + \frac{x}{y'} = 0$, 即 $2y dy + x dx = 0$. 积分, 得 $x^2 + 2y^2 = C$

(C 为任意常数). 由 $y \Big|_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}$ 知 $C=1$, 故曲线 $y=f(x)$ 的方程为

$$x^2 + 2y^2 = 1.$$

(2) 曲线 $y = \sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上的弧长为

$$l = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx.$$

曲线 $y = f(x)$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \cos \theta, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta, \end{cases}$$

故

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 \theta + \frac{1}{2} \cos^2 \theta} d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin^2 \theta} d\theta.$$

令 $\theta = \frac{\pi}{2} - t$, 则

$$s = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1 + \cos^2 t} (-dt) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 t} dt = \frac{l}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} l.$$

27. (2003. I, II) 设函数 $y = y(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $y' \neq 0$, $x = x(y)$ 是 $y = y(x)$ 的反函数.

(1) 试将 $x = x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2 x}{dy^2} + (y + \sin x) \left(\frac{dx}{dy} \right)^3 = 0$ 变换为

$y = y(x)$ 满足的微分方程;

(2) 求变换后的微分方程满足初值条件 $y(0) = 0, y'(0) = \frac{3}{2}$ 的解.

解 (1) 由反函数导数公式知 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$, 即

$$y' \frac{dx}{dy} = 1.$$

上式两端关于 x 求导, 得 $y'' \frac{dx}{dy} + \frac{d^2 x}{dy^2} (y')^2 = 0$, 所以

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = - \frac{\frac{dx}{dy} y''}{(y')^2} = - \frac{y''}{(y')^3}.$$

代入原微分方程, 得

$$y'' - y = \sin x. \quad (*)$$

(2) 方程 (*) 所对应的齐次方程 $y'' - y = 0$ 的通解为

$$Y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

设方程 (*) 的特解为

$$y^* = A \cos x + B \sin x,$$

代入方程 (*), 求得 $A = 0, B = -\frac{1}{2}$, 故 $y^* = -\frac{1}{2} \sin x$, 从而 $y'' - y = \sin x$ 的通解

是

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x.$$

由 $y(0) = 0, y'(0) = \frac{3}{2}$, 得 $C_1 = 1, C_2 = -1$, 故所求初值问题的解为

$$y(x) = e^x - e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x.$$

28. (2004. I) 某种飞机在机场降落时,为了减少滑行距离,在触地的瞬间,飞机尾部张开减速伞以增加阻力,使飞机减速并停下. 现有一质量为 9000 kg 的飞机,着陆时的水平速度为 700 km/h . 经测试,减速伞打开后,飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比(比例系数为 $k = 6.0 \times 10^6$). 问从着陆点算起,飞机滑行的最长距离是多少?

解法一 根据牛顿第二定律,得 $m \frac{dv}{dt} = -kv$, 即

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} dt.$$

两端积分得 $\ln v = -\frac{k}{m}t + \ln C$, 即 $v = Ce^{-\frac{k}{m}t}$. 当 $t = 0$ 时, $v = v_0$, 有 $C = v_0$, 故

$$\frac{ds}{dt} = v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}.$$

于是飞机滑行的最长距离为

$$s = \int_0^{+\infty} v_0 e^{-\frac{k}{m}t} dt = -\frac{mv_0}{k} e^{-\frac{k}{m}t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{mv_0}{k} = 1.05 (\text{km}).$$

解法二 根据牛顿第二定律,得

$$m \frac{dv}{dt} = -kv,$$

又 $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot v$, 故有

$$ds = -\frac{m}{k} dv,$$

积分得 $s = -\frac{m}{k}v + C$. 由于 $t = 0$ 时, $s = 0, v = v_0$, 故 $C = \frac{m}{k}v_0$. 于是得

$$s = -\frac{m}{k}(v - v_0).$$

令 $v \rightarrow 0$ (当 $t \rightarrow \infty$ 时), 得

$$s \rightarrow \frac{mv_0}{k} = 1.05 (\text{km}).$$

29. (2010. I) 求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x$ 的通解.

解 原方程对应的齐次方程的特征方程为 $r^2 - 3r + 2 = 0$, 根为 $r_1 = 1, r_2 = 2$, 故

对应的齐次方程的通解是

$$Y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

由于自由项为 $2xe^x$, $\lambda = 1$ 为特征方程的单根, 故令非齐次方程的特解 $y^* = x(ax+b)e^x = (ax^2+bx)e^x$, 代入原方程后解得 $a = -1$, $b = -2$, 故 $y^* = -(x^2+2x)e^x$. 从而所求通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - (x^2+2x)e^x,$$

其中 C_1, C_2 是任意常数.

30. (2013. I) 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件: $a_0 = 3$, $a_1 = 1$, $a_{n-2} - n(n-1)a_n = 0$ ($n \geq 2$),

$S(x)$ 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数.

(1) 证明: $S''(x) - S(x) = 0$;

(2) 求 $S(x)$ 的表达式.

解 (1) 当 $n \geq 2$ 时, 由

$$a_n = \frac{a_{n-2}}{n(n-1)} = \frac{a_{n-4}}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = \cdots = \begin{cases} \frac{a_0}{n!}, & n = 2m, \\ \frac{a_1}{n!}, & n = 2m+1, \end{cases}$$

其中, $m = 1, 2, \dots$, 易见 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域是 $(-\infty, +\infty)$, 即

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

于是有

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2},$$

且由条件 $a_{n-2} = n(n-1)a_n$, 得

$$S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x),$$

所以, $S''(x) - S(x) = 0$.

(2) 二阶常系数齐次线性微分方程 $S''(x) - S(x) = 0$ 的特征方程为 $r^2 - 1 = 0$, 根为 $r_{1,2} = \pm 1$, 故通解为 $S(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

由于

$$\begin{cases} S(0) = C_1 + C_2 = a_0 = 3, \\ S'(0) = C_1 - C_2 = a_1 = 1, \end{cases}$$

故 $C_1 = 2$, $C_2 = 1$, 即 $S(x) = 2e^x + e^{-x}$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

三、同济大学高等数学 试卷选编

(一) 高等数学(上)期中考试试卷(I)

试题

一、填空选择题

1. 设函数 $f(x) = e^x - 1 + o(x)$, 且 $f(0) = 0$, 则下列结论正确的是()。

- (A) $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续 (B) $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导
(C) $f'(0) = 0$ (D) $f'(0) = 1$

2. 已知函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)=2$, 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 在 x_0 处的微分 dy 是()。

- (A) 与 Δx 等价的无穷小量 (B) 比 Δx 高阶的无穷小量
(C) 比 Δx 低阶的无穷小量 (D) 与 Δx 同阶而非等价的无穷小量

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{3\sin(x-1)}{x-1}, & x < 1, \\ e^{2ax} - e^{ax} + 1, & x \geq 1 \end{cases}$, 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则常数 $a =$

4. 若 $f'(0) = 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{\ln(1+2x)} =$ _____.

5. 曲线 $\begin{cases} x = e^t \sin 2t, \\ y = e^t \cos t \end{cases}$ 在 $t=0$ 所对应点处的切线方程为 _____.

二、计算题

1. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(e^{2x} - 1)}{\ln(1 - 3x^2)}$.

2. 已知函数 $f(x) = e^{\tan x} \sin(\cos x)$, 求 $f'(0)$.

3. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{1 - \cos x}}$.

4. 设可微函数 $f(x) > 0$, $y = \ln f(x^2)$, 求 dy .

5. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\ln(x^2 + y) = x^3 y + \sin x$ 确定, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$.

三、求函数 $f(x) = (1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}$ 在区间 $(0, \pi)$ 内的间断点, 并判断间断点类型.

四、已知函数 $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$, 求

- (1) 函数单调区间, 函数极值;
 (2) 函数图形的凹凸区间, 函数图形的拐点.

五、求函数 $f(x) = \frac{1}{1+x}$ 在 $x=0$ 处带拉格朗日余项的 n 阶泰勒展开式.

六、讨论曲线 $y=4\ln x+k$ 与曲线 $y=4x+\ln^4 x$ 的交点个数(k 为常数).

七、设函数 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上三阶可导, 且 $f(1)=f(2)=0$, 令 $F(x)=(x-1)^2 f(x)$. 证明: $F'''(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内至少有一个零点.

参考答案

一、填空选择题

1. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$, $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. 故选 (D).

2. $dy = f'(x_0) \Delta x = 2 \Delta x$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{dy}{\Delta x} = 2$. 故选 (D).

3. $f(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3 \sin(x-1)}{x-1} = 3$, $f(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (e^{2ax} - e^{ax} + 1) = e^{2a} - e^a + 1$. 根据

条件 $f(1^-) = f(1^+) = f(1)$, 解得 $a = \ln 2$.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{\ln(1+2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x} + \frac{f(-x) - f(0)}{-x} \right] = 1$.

5. $\frac{dy}{dx} \Big|_{t=0} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \Big|_{t=0} = \frac{e^t \cos t - e^t \sin t}{e^t \sin 2t + 2e^t \cos 2t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{2}$, 当 $t=0$ 时, $x=0, y=1$. 所求

切线为 $y = \frac{1}{2}x + 1$.

二、计算题

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(e^{2x} - 1)}{\ln(1 - 3x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(e^{2x} - 1)^2}{-3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{-3x^2} = -\frac{2}{3}$.

2. $f'(x) = e^{\tan x} \sec^2 x \sin(\cos x) - e^{\tan x} \cos(\cos x) \sin x$, $f'(0) = \sin 1$.

3. $\left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = \left[\left(1 + \frac{\tan x - x}{x} \right)^{\frac{x}{\tan x - x}} \right]^{\frac{\tan x - x}{x(1-\cos x)}}$,

由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x(1-\cos x)} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{3x^2} = \frac{2}{3},$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = e^{\frac{2}{3}}.$$

4. $dy = \frac{1}{f(x^2)} d[f(x^2)] = \frac{f'(x^2)}{f(x^2)} d(x^2) = \frac{2x f'(x^2)}{f(x^2)} dx.$

5. 方程 $\ln(x^2 + y) = x^3 y + \sin x$ 两端对 x 求导, 得

$$\frac{2x + \frac{dy}{dx}}{x^2 + y} = 3x^2 y + x^3 \frac{dy}{dx} + \cos x,$$

注意到 $y|_{x=0} = 1$, 于是 $\frac{dy}{dx}|_{x=0} = 1$.

三、间断点为 $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} f(x) = 1$. 因此 $x = \frac{\pi}{4}$

和 $x = \frac{3\pi}{4}$ 分别为 $f(x)$ 的无穷间断点和可去间断点.

四、(1) 令 $f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} = 0$ 得 $x=0, 3$, 在 $(-\infty, 0), (0, 1)$ 和 $(3, +\infty)$ 内,

$f'(x) > 0$, 在 $(1, 3)$ 内, $f'(x) < 0$. 故函数单调增加区间为 $(-\infty, 1)$ 和 $[3, +\infty)$, 单调减少区间为 $(1, 3]$, 极小值为 $f(3) = \frac{27}{4}$, 无极大值.

(2) 令 $f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4} = 0$ 得 $x=0$, 在 $(-\infty, 0)$ 内, $f''(x) < 0$, 在 $(0, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 内, $f''(x) > 0$. 故函数图形的凸区间为 $(-\infty, 0]$, 凹区间为 $[0, 1)$ 和 $(1, +\infty)$, 函数图形的拐点为 $(0, 0)$.

五、 $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$, $f^{(n)}(0) = (-1)^n n!$. 所求的 n 阶泰勒展开式为

$$f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + \frac{(-1)^{n+1}}{(1+\xi)^{n+2}} x^{n+1} \quad (\text{其中 } \xi \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}).$$

六、令 $f(x) = 4x + \ln^4 x - 4 \ln x - k$ ($x > 0$), 则 $f'(x) = \frac{4}{x} (x + \ln^3 x - 1)$. 记 $g(x) = x + \ln^3 x - 1$, 则当 $x > 0$ 时, $g'(x) = 1 + \frac{3\ln^2 x}{x} > 0$, 即 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加. 注意到 $g(1) = 0$, 因此当 $0 < x < 1$ 时, $g(x) < 0$, 当 $x > 1$ 时, $g(x) > 0$.

于是, 当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$. 即当 $0 < x < 1$ 时, $f(x)$ 单调减少, 当 $x > 1$ 时, $f(x)$ 单调增加.

又 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, $f(1) = 4 - k$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 因此当 $f(1) < 0$, 即 $k > 4$ 时, $f(x)$ 有 2 个零点, 此时两条曲线的交点为 2 个; 当 $f(1) = 0$, 即 $k = 4$ 时, $f(x)$ 仅有 1 个零点 $x=1$, 此时两条曲线的交点只有 1 个; 当 $f(1) > 0$, 即 $k < 4$ 时, $f(x) > 0$, 此时两条曲线没有交点.

七、 $F(1) = F(2) = 0$, 由罗尔定理可知, 存在 $\xi_1 \in (1, 2)$, 使得 $F'(\xi_1) = 0$.

$F'(x) = 2(x-1)f(x) + (x-1)^2f'(x)$, 于是 $F'(1) = F'(\xi_1) = 0$, 由罗尔定理可知, 存在 $\xi_2 \in (1, \xi_1) \subset (1, 2)$, 使得 $F''(\xi_2) = 0$.

$F''(x) = 2f(x) + 4(x-1)f'(x) + (x-1)^2f''(x)$, 于是 $F''(1) = F''(\xi_2) = 0$, 由罗尔定理可知, 存在 $\xi \in (1, \xi_2) \subset (1, 2)$, 使得 $F'''(\xi) = 0$.

(二) 高等数学(上)期中考试试卷(Ⅱ)

试题

一、填空选择题

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n + 3} - \sqrt{n^2 + n + 2}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - 2x}{1 + x} \right)^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 已知 $y = x \ln(x^2 + 1)$, 则它在 $x = 1$ 处的微分 $dy|_{x=1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 4]$ 上可导, $f(-1) = 2, f(4) = -1$, 则在区间 $(-1, 4)$ 内至少有一点 ξ , 使得 $f'(\xi) = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在是数列 $\{x_n\}$ 单调有界的()。

- (A) 充分条件 (B) 必要条件 (C) 充要条件 (D) 无关条件

6. 对于区间 I 上的二阶可导函数 $f(x), f''(x) < 0$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调减少的().

- (A) 充分条件 (B) 必要条件 (C) 充要条件 (D) 无关条件

7. 函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 可导的充分条件是().

(A) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2) - f(0)}{x^2 - 0}$ 存在

(B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3) - f(0)}{x^3}$ 存在

(C) $f'_-(0)$ 与 $f'_+(0)$ 存在

(D) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin x)}{x}$ 存在

8. 已知 $f(x) = x(x^2 - 1)(x^2 - 2)(x^2 - 4)$, 导函数 $f'(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 上零点的个数至少为().

- (A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

二、计算下列各题

1. 计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \cos \frac{1}{2\sqrt{n}} \right).$

2. 求由参数方程 $\begin{cases} x = te^t, \\ y = e^{2t} + 1 \end{cases}$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

3. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^3} - \sqrt{1-3x^2}}{\sin^2 x}.$

4. 函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有二阶导数, 且 $f(0) = 0, f''(x) > 0$. 证明: $\frac{f(x)}{x}$ 在

$(0, +\infty)$ 上单调增加.

三、求曲线 $2x^2 + e^{x-y} = y^2 + 2$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程, 并求由该方程所确定函数 $y = y(x)$ 在 $x = 1$ 处的二阶导数 $y''|_{x=1}$.

四、讨论 $y = x \sqrt{x-1}$ 的单调性与函数图形的凹凸性, 并求出曲线的拐点.

五、求函数 $f(x) = \tan(e^{2x} - 1)$ 带佩亚诺余项的二阶麦克劳林公式, 并计算极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(e^{2x} - 1) - 2x}{x^2}.$$

六、设 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调, 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在的充要条件是 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上有界.

参考答案

一、填空选择题

$$\begin{aligned} 1. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n + 3} - \sqrt{n^2 + n + 2}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 1}{\sqrt{n^2 + 4n + 3} + \sqrt{n^2 + n + 2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1-2x}{1+x} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{-3x}{1+x} \right)^{\frac{1+x}{-3x}} \right]^{\frac{-3}{1+x}} = e^{-3}.$$

$$3. y' \Big|_{x=1} = \left(\ln(x^2 + 1) + \frac{2x^2}{x^2 + 1} \right) \Big|_{x=1} = 1 + \ln 2, dy \Big|_{x=1} = (1 + \ln 2) dx.$$

$$4. f'(\xi) = \frac{f(4) - f(-1)}{4 - (-1)} = -\frac{3}{5}.$$

5. 由于单调有界数列必有极限, 故选 (B).

6. 由于 $f''(x) < 0$ 只能得到 $f'(x)$ 单调减少 (例如 $y = -x^2$ 满足条件但没有单调性), 故选 (D).

7. 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2) - f(0)}{x^2 - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3) - f(0)}{x^3 - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0},$$

$f'_-(0)$ 与 $f'_+(0)$ 存在而不相等时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 不可导, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin x)}{x}$ 存在且 $f(0)$ 不存在或不等于 0 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 不可导. 故选 (B).

8. 由于 $f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 上有 5 个零点 $x = -1, 0, 1, \sqrt{2}, 2$, 由罗尔定理可知在 $(-1, 0), (0, 1), (1, \sqrt{2})$ 和 $(\sqrt{2}, 2)$ 内各至少有一个零点. 故选(D).

二、计算下列各题

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \cos \frac{1}{2\sqrt{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\sqrt{n}} \right)^2 = \frac{1}{8}.$$

$$2. \frac{dy}{dx} = \frac{2e^{2t}}{e^t + te^t} = \frac{2e^t}{1+t}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{2e^t}{t+1} \right) / \frac{dx}{dt} = \frac{2t}{(t+1)^3}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^3} - \sqrt{1-3x^2}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^3)^{\frac{1}{3}} - (1-3x^2)^{\frac{1}{2}}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (1+x^3)^{-\frac{2}{3}} + 3x(1-3x^2)^{-\frac{1}{2}}}{2x} = \frac{3}{2}.$$

$$4. \text{记 } F(x) = \frac{f(x)}{x}, \text{则}$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{xf'(x) - [f(x) - f(0)]}{x^2} \\ &= \frac{xf'(x) - xf'(\xi)}{x^2} = \frac{(x-\xi)f''(\eta)}{x} > 0, \end{aligned}$$

其中 $\xi, \eta \in (0, x)$, 故 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调增加.

三、在等式 $2x^2 + e^{x-y} = y^2 + 2$ 两端分别对 x 求导得

$$4x + e^{x-y}(1-y') = 2yy', \quad y' \Big|_{x=1} = \frac{4x + e^{x-y}}{2y + e^{x-y}} \Big|_{(1,1)} = \frac{5}{3}.$$

所求切线方程为

$$y - 1 = \frac{5}{3}(x - 1),$$

即 $5x - 3y - 2 = 0$. 等式两端再次对 x 求导得 $4 + e^{x-y}(1-y')^2 - y''e^{x-y} = 2(y'^2 + yy'')$,

由 $x = y = 1$ 以及 $y' \Big|_{x=1} = \frac{5}{3}$, 得到 $y'' \Big|_{x=1} = -\frac{10}{27}$.

四、显然函数定义域为 $x \geq 1$. 由 $y' = \frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}} > 0$ 知函数在 $(1, +\infty)$ 上单调增加.

令 $y'' = \frac{3x-4}{4(x-1)^{3/2}} = 0$ 得 $x = \frac{4}{3}$. 当 $1 < x < \frac{4}{3}$ 时, $y'' < 0$, 曲线是凸的; 当 $x > \frac{4}{3}$

时, $y'' > 0$, 曲线是凹的. 曲线的拐点为 $\left(\frac{4}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{9} \right)$.

五、 $f(0) = 0, f'(0) = 2e^{2x} \sec^2(e^{2x}-1) \Big|_{x=0} = 2,$

$$f''(0) = [4e^{2x} \sec^2(e^{2x}-1) + 8e^{4x} \sec^2(e^{2x}-1) \tan(e^{2x}-1)] \Big|_{x=0} = 4,$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2) = 2x + 2x^2 + o(x^2).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(e^{2x} - 1) - 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + o(x^2)}{x^2} = 2.$$

六、不妨设 $f(x)$ 单调增加.

必要性:

当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在时, 记 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 则 $f(1) \leq f(x) \leq A$, 即 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上有界.

充分性:

当 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上有界时, 则 $f(n)$ 是单调增加且有界的数列, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ 存在, 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = A$.

由单调增加得 $f(\lfloor x \rfloor) \leq f(x) \leq f(\lfloor x \rfloor + 1)$, 而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(\lfloor x \rfloor) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(\lfloor x \rfloor + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = A$, 由夹逼准则可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

(三) 高等数学(上)期末考试试卷(I)

试题

一、填空题

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\ln x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 曲线 $xy=2$ 在点 $(1,2)$ 的曲率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

3. 函数 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ 在 $[0,2]$ 上的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

4. $\int \frac{\ln \tan x}{\cos^2 x \tan x} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. $\int_{-4\pi}^{4\pi} (x+1) |\sin x| dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

6. 微分方程 $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \cos x$ 的特解形式可表示为 $y^* = \underline{\hspace{2cm}}$ (只需写出形式,不必确定其中系数).

二、选择题

1. 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 函数 $f(x) = e^x \sin x$ 是() .

(A) 无穷小 (B) 无穷大

(C) 有界量, 但不是无穷小 (D) 无界的, 但不是无穷大

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ (其中 $b-a=1$) 上具有二阶导数, 且 $f''(x) < 0$, 下列不等式正确的是().

(A) $f'(b) < f'(a) < f(b) - f(a)$ (B) $f'(b) < f(b) - f(a) < f'(a)$

(C) $f(b) - f(a) < f'(b) < f'(a)$ (D) $f'(b) < f(a) - f(b) < f'(a)$

3. 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上().

(A) 可导必有界 (B) 有界必可积

(C) 可积必连续 (D) 连续必可导

4. 具有特解 $y = xe^x$ 及 $y = e^{-x}$ 的三阶常系数齐次线性微分方程是().

(A) $y''' + y'' - y' - y = 0$ (B) $y''' + y'' + y' + y = 0$

(C) $y''' - y'' - y' + y = 0$ (D) $y''' - y'' - y' - y = 0$

三、解答题

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).$

2. 设函数 $f(x) = (x^2 + 2)^{x^2 - 1}$, 求 $f'(1)$.

3. 计算反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x(x^2+1)} dx.$

4. 求由圆 $(x - 5)^2 + y^2 = 16$ 所围图形绕 y 轴旋转而成的旋转体体积.

四、设函数 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2-x) - 3}{2\sin x} = 5$. 试证 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处可导, 并求曲线 $y = f(x)$ 在横坐标为 $x = 2$ 的点处的切线方程.

五、设函数 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t} dt$, 求定积分 $\int_0^\pi f(x) dx$.

六、设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内可导, 且满足 $\int_0^1 f(tx) dt = 2f(x) + 1$ 及 $f(1) = 1$, 求 $f(x)$.

七、证明: 当 $x > 0$ 时, $(x^2 - 1) \ln x \geq (x - 1)^2$.

参考答案

一、填空题

$$1. \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(1+x)^{\frac{1}{x}}]^{x \ln x} = e^0 = 1.$$

$$2. y' \Big|_{x=1} = -\frac{1}{x^2} \Big|_{x=1} = -1, y'' \Big|_{x=1} = \frac{2}{x^3} \Big|_{x=1} = 2, \text{ 所求曲率}$$

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} \Big|_{x=1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. 令 $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ 得 $x = 1, f(0) = 1, f(1) = -1, f(2) = 3$, 所求最大值为 $f(2) = 3$.

$$4. \int \frac{\ln \tan x}{\cos^2 x \tan x} dx = \int \frac{\ln \tan x}{\tan x} d(\tan x) = \frac{1}{2} (\ln \tan x)^2 + C.$$

$$5. \int_{-4\pi}^{4\pi} (x+1) |\sin x| dx = \int_{-4\pi}^{4\pi} x |\sin x| dx + \int_{-4\pi}^{4\pi} |\sin x| dx = 2 \int_0^{4\pi} |\sin x| dx =$$

$$16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 16.$$

6. 由于 $-1+i$ 为特征方程的根, 因此可设 $y^* = xe^{-x}(a \cos x + b \sin x)$.

二、选择题

1. 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n\pi) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = +\infty$. 故选 (D).

2. 由拉格朗日中值定理可知, 存在 $\xi \in (a, b)$, 满足 $f(b) - f(a) = (b-a)f'(\xi) = f'(\xi)$. 又根据条件可知 $f'(x)$ 单调减少, 因此 $f'(b) < f'(\xi) < f'(a)$. 故选 (B).

3. 由于可导必连续, 在闭区间上连续的函数一定有界. 故选 (A).

4. 根据条件, $r = -1$ 为特征方程的单根, $r = 1$ 为特征方程的二重根, 因此特征方程为 $(r+1)(r-1)^2 = r^3 - r^2 - r + 1 = 0$. 故选 (C).

三、解答题

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}.$$

$$2. f(x) = e^{(x^2-1)\ln(x^2+2)}, f'(x) = e^{(x^2-1)\ln(x^2+2)} \left[2x\ln(x^2+2) + \frac{2x(x^2-1)}{x^2+2} \right],$$

故 $f'(1) = 2\ln 3$.

$$3. \int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x(x^2+1)} dx = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{x-1}{x^2+1} \right) dx = \left[\ln \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \arctan x \right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2.$$

4. 将曲线方程写成 $x = 5 \pm \sqrt{16 - y^2}$, 因此所求体积为

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-4}^4 (5 + \sqrt{16 - y^2})^2 dy - \pi \int_{-4}^4 (5 - \sqrt{16 - y^2})^2 dy = 20\pi \int_{-4}^4 \sqrt{16 - y^2} dy \\ &= 40\pi \int_0^4 \sqrt{16 - y^2} dy, \end{aligned}$$

作换元 $y = 4\sin u$ 得, $V = 640\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du = 160\pi^2$.

四、由条件得 $\lim_{x \rightarrow 0} [f(2-x) - 3] = 0$, 即 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$, 再由连续性得 $f(2) = 3$. 而

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2-x) - f(2)}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2-x) - 3}{2\sin x} \cdot \frac{2\sin x}{-x} = -10,$$

即 $f(x)$ 在 $x=2$ 处可导. 所求切线方程为 $y - 3 = -10(x - 2)$, 即 $y = -10x + 23$.

$$\begin{aligned} \text{五、} \int_0^\pi f(x) dx &= [xf(x)]_0^\pi - \int_0^\pi xf'(x) dx = \pi \int_0^\pi \frac{\sin t}{\pi - t} dt - \int_0^\pi \frac{x \sin x}{\pi - x} dx = \\ &\int_0^\pi \sin x dx = 2. \end{aligned}$$

六、作换元 $t = \frac{u}{x}$, 则 $\int_0^1 f(tx) dt = \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du$, 故原等式为

$$\int_0^x f(u) du = 2xf(x) + x,$$

上式两端对 x 求导, 得 $f(x) = 2f(x) + 2xf'(x) + 1$, 故 $y = f(x)$ 满足微分方程

$$\begin{cases} y' = -\frac{y+1}{2x}, \\ y|_{x=1} = 1, \end{cases}$$

分离变量后两端积分, 得

$$\int \frac{dy}{y+1} = - \int \frac{dx}{2x},$$

即 $\ln(y+1) = -\frac{1}{2}\ln x + C$, 根据条件 $y|_{x=1} = 1$ 解得 $C = \ln 2$. 因此 $y = f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 1$.

七、记 $f(x) = \ln x - \frac{x-1}{x+1}$ ($x > 0$), 则 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+1}{(x+1)^2} > 0$, 因此 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调增加.

注意到 $f(1) = 0$, 因此当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) < 0$, 即 $\ln x < \frac{x-1}{x+1}$ 或 $(x^2-1)\ln x > (x-1)^2$; 当 $x > 1$ 时, $f(x) > 0$, 即 $\ln x > \frac{x-1}{x+1}$ 或 $(x^2-1)\ln x > (x-1)^2$.

综合可得, 当 $x > 0$ 时, $(x^2-1)\ln x \geq (x-1)^2$.

(四) 高等数学(上)期末考试试卷(Ⅱ)

试题

一、填空选择题

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^x = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 若极限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0)}{h} = 3$, 则 $f'(x_0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. $\int_{-2}^2 (x^2 + x^3 \sqrt{4 - x^2}) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. $\int \sin x e^{2 \cos x} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. 微分方程 $4y'' - 4y' + y = 0$ 的通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}.$

6. 记 $I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x dx, I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx, I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx, I_4 = \int_{-\pi}^{\pi} x \sin^2 x dx$, 则这 4 项积分的大小关系为() .

(A) $I_2 > I_1 > I_3 > I_4$

(B) $I_3 > I_2 > I_1 > I_4$

(C) $I_4 > I_1 > I_3 > I_2$

(D) $I_1 > I_2 > I_4 > I_3$

7. 下列反常积分中收敛的是().

(A) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2} dx$

(B) $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \sqrt{\ln x + 2}} dx$

(C) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$

(D) $\int_0^1 \frac{1}{x-1} dx$

8. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2) - \ln 2}{x^3 - 1}, & x \neq 1, \\ a, & x = 1 \end{cases}$, 在 $x=1$ 连续, 则常数 $a = (\quad).$

(A) $\frac{2}{3}$

(B) $-\frac{2}{3}$

(C) $-\frac{1}{3}$

(D) $\frac{1}{3}$

二、计算题

1. 计算由曲线 $y = \sqrt{x+2}$ 与直线 $x - 3y + 4 = 0$ 所围平面图形的面积.

2. 若函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 具有 n 阶导数, 试写出计算函数 $u(x)v(x)$ 的 n 阶导数的莱布尼茨公式, 并求 xe^{2x} 的 10 阶导数.

3. 求函数 $f(x) = (x^2 + x - 5)e^x$ 的单调区间以及函数的极值.

4. 计算反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx$.

5. 求微分方程 $\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = 1, \\ y|_{x=0} = \frac{2}{3}, y'|_{x=0} = -7 \end{cases}$ 的解.

三、一薄片铅直放入水中, 其形状与位置由曲线 $x = y^2 - 1$ 与直线 $x - 2y - 2 = 0$ 所围成的图形确定, 其中 x 轴平行于水面且位于水面下 1 m 深处, y 轴铅直向上, 试求该薄片的一侧所受的水压力(假设水的密度为 μ).

四、求积分 $\int_0^1 \sqrt{x} \ln(x+1) dx$.

五、(1) 试求常数 a, b , 使得函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ ax + b, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ 在区间 $[0, 2]$ 上

可导; (2) 由该曲线段绕 y 轴旋转形成一个容器, 如果每单位时间向该容器均匀地注入体积为 v_0 的水, 试求该容器自开始注入水至溢出前水深为 h 时水面的上升速度.

六、要建一个容积为 14、侧面为圆柱面、顶部接着一个半球形的仓库(不含底部). 已知顶部单位面积的造价是其侧面圆柱面部分造价的 3 倍, 试求该仓库的底圆半径, 使得该仓库的造价最省.

七、函数 $f(x)$ 在 $[x_0, +\infty)$ 上具有二阶导数, 并且 $f''(x) < 0$. 对于任意 $x > x_0$, 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (x_0, x)$, 使得 $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$. 证明: ξ 定义了 $(x_0, +\infty)$ 内的一个单调增加函数.

参考答案

一、填空选择题

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{3}{x-2} \right)^{\frac{x-2}{3}} \right]^{\frac{3x}{x-2}} = e^3.$$

$$2. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0)}{-2h} \cdot (-2) = -2f'(x_0) = 3, \text{ 得}$$

$$f'(x_0) = -\frac{3}{2}.$$

$$3. \int_{-2}^2 (x^2 + x^3 \sqrt{4-x^2}) dx = \int_{-2}^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_{-2}^2 = \frac{16}{3}.$$

$$4. \int \sin x e^{2 \cos x} dx = - \int e^{2 \cos x} d(\cos x) = -\frac{1}{2} e^{2 \cos x} + C.$$

5. 特征方程为 $4r^2 - 4r + 1 = 0$, 得重根 $r_{1,2} = \frac{1}{2}$, 因此通解为 $y = e^{\frac{1}{2}x}(C_1x + C_2)$.

6. 因为 $|x| \geq |\sin x|$, $1 \geq |\sin x|$, 所以 $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx > \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx > \int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x dx > 0 = \int_{-\pi}^{\pi} x \sin^2 x dx$. 故选(B).

$$7. \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2} dx = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \sqrt{\ln x + 2}} dx = [2 \sqrt{\ln x + 2}]_e^{+\infty} = +\infty,$$

$$\int_0^t \sin x dx = [-\cos x]_0^t = 1 - \cos t, \text{ 当 } t \rightarrow +\infty \text{ 时极限不存在},$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x-1} dx = [\ln(1-x)]_0^1 = -\infty.$$

故选(A).

$$8. \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1}{3} = f(1) = a. \text{ 故选(D).}$$

二、计算题

1. 联立方程 $y = \sqrt{x+2}$ 和 $x - 3y + 4 = 0$ 解得交点为 $(-1, 1)$ 和 $(2, 2)$, 因此所求面积为

$$A = \int_1^2 [3y - 4 - (y^2 - 2)] dy = \left[-\frac{1}{3}y^3 + \frac{3}{2}y^2 - 2y \right]_1^2 = \frac{1}{6}.$$

2. 记 $u = u(x)$, $v = v(x)$, 则

$$(uv)^{(n)} = uv^{(n)} + nu'v^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2}u''v^{(n-2)} + \cdots + C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)} + \cdots + u^{(n)}v,$$

$$(xe^{2x})^{(10)} = x(e^{2x})^{(10)} + 10 \cdot 1 \cdot (e^{2x})^{(9)} = x \cdot 2^{10}e^{2x} + 10 \cdot 2^9 e^{2x} = 2^{10}e^{2x}(x+5).$$

3. 令 $f'(x) = (x^2 + 3x - 4)e^x = 0$ 解得 $x_1 = -4$ 和 $x_2 = 1$.

x	$(-\infty, -4)$	-4	$(-4, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
函数 $f(x)$	单调增加	$x = -4$ 为极大值点	单调减少	$x = 1$ 为极小值点	单调增加

因此, $(-\infty, -4]$ 和 $[1, +\infty)$ 为单调增加区间, $[-4, 1]$ 为单调减少区间. 函数的极大值为 $f(-4) = 7e^{-4}$, 极小值为 $f(1) = -3e$.

$$4. \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx = \int_1^{+\infty} -\ln(1+x^2) d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[-\frac{1}{x} \ln(1+x^2) \right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{2}{1+x^2} dx \\
 &= \ln 2 + [2 \arctan x]_1^{+\infty} = \ln 2 + \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

5. 特征方程为 $r^2 + 2r - 3 = 0$, 根为 $r_1 = -3$ 和 $r_2 = 1$, 因此所对应的齐次线性微分方程的通解为

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x.$$

设非齐次线性微分方程的特解为 $y^* = a$, 代入方程解得 $a = -\frac{1}{3}$, 因此原方程的

通解为

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x - \frac{1}{3}.$$

由初值条件 $y|_{x=0} = \frac{2}{3}, y'|_{x=0} = -7$ 解得 $C_1 = 2, C_2 = -1$, 因此所求解为

$$y = 2e^{-3x} - e^x - \frac{1}{3}.$$

三、联立方程 $x = y^2 - 1$ 和 $x - 2y - 2 = 0$, 解得交点 $(0, -1)$ 和 $(8, 3)$, 因此所求水压力为

$$\begin{aligned}
 F &= \int_{-1}^1 \mu g (1-y) [2y+2-(y^2-1)] dy = \mu g \int_{-1}^1 (y^3 - 3y^2 - y + 3) dy \\
 &= 2\mu g \int_0^1 (-3y^2 + 3) dy = 4\mu g (N).
 \end{aligned}$$

四、令 $u = \sqrt{x}$, 即 $x = u^2$, 则

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \sqrt{x} \ln(x+1) dx &= \int_0^1 2u^2 \ln(u^2+1) du = \frac{2}{3} \int_0^1 \ln(u^2+1) du^3 \\
 &= \left[\frac{2}{3} u^3 \ln(u^2+1) \right]_0^1 - \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{u^4}{u^2+1} du \\
 &= \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{4}{3} \int_0^1 \left(u^2 - 1 + \frac{1}{u^2+1} \right) du \\
 &= \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{4}{3} \left[\frac{1}{3} u^3 - u + \arctan u \right]_0^1 = \frac{2}{3} \ln 2 + \frac{8}{9} - \frac{\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

五、(1) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a+b$, 由可导必连续, 故 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$, 得 $a+b=1$;

$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = 2, f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax+b-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax-a}{x-1} = a$, 由于可导, 故 $f'_-(1) = f'_+(1)$, 得 $a=2, b=-1$.

(2) 由(1)得 $h=f(x)=\begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2x-1, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$, 根据元素法可知 $dV = \pi x^2 dh$, 故

$$v_0 = \frac{dV}{dt} = \pi x^2 \frac{dh}{dt} = \begin{cases} \pi h \frac{dh}{dt}, & 0 < h \leq 1, \\ \pi \left(\frac{h+1}{2}\right)^2 \frac{dh}{dt}, & 1 < h < 3, \end{cases} = \begin{cases} \pi h \frac{dh}{dt}, & 0 < h \leq 1, \\ \pi \left(\frac{h+1}{2}\right)^2 \frac{dh}{dt}, & 1 < h < 3, \end{cases}$$

即

$$\frac{dh}{dt} = \begin{cases} \frac{v_0}{\pi h}, & 0 < h \leq 1, \\ \frac{4v_0}{\pi(h+1)^2}, & 1 < h < 3. \end{cases}$$

六、设圆柱面的高为 h , 底半径为 r , 则容积为 $\pi r^2 h + \frac{2}{3} \pi r^3 = 14$, 解得 $h = \frac{14}{\pi r^2} - \frac{2}{3} r$.

如果侧面单位面积的造价为 k , 则顶部单位面积的造价为 $3k$, 总造价为

$$p = k \cdot 2\pi r h + 3k \cdot 2\pi r^2 = 2k\pi r \left(\frac{14}{\pi r^2} - \frac{2}{3}r \right) + 6k\pi r^2 = 2k \left(\frac{14}{r} + \frac{7}{3}\pi r^2 \right),$$

令

$$\frac{dp}{dr} = 2k \left(-\frac{14}{r^2} + \frac{14}{3}\pi r \right) = \frac{28k\pi}{3r^2} \left(r^3 - \frac{3}{\pi} \right) = 0$$

得惟一驻点 $r = \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$, 显然该点为极小值点, 也是最小值点. 即底圆半径为 $\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$ 时, 该仓库的造价最省.

七、由条件 $f''(x) < 0$ 得 $f'(x)$ 单调减少, 因此满足拉格朗日中值定理 $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$ 的 ξ 是惟一的, 因此 ξ 定义了 $(x_0, +\infty)$ 上的一个函数 $\xi = \xi(x)$.

由于 $f'(x)$ 单调减少, 因此 $y = f'(x)$ 存在反函数 $x = \varphi(y)$, 从而

$$\xi = \varphi \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right).$$

又根据反函数的可导性结论可知, 当 $f''(x) \neq 0$ 时, $x = \varphi(y)$ 可导, 且 $\varphi'(y) = \frac{1}{f''(x)} <$

0. 于是

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dx} &= \varphi' \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right]', \\ \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right]' &= \frac{f'(x)(x - x_0) - [f(x) - f(x_0)]}{(x - x_0)^2} \\ &= \frac{f'(x)(x - x_0) - f'(\xi)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} = \frac{f''(\eta)(x - \xi)}{x - x_0} < 0 \quad (\text{其中 } \eta \in (\xi, x)), \end{aligned}$$

故 $\frac{d\xi}{dx} > 0$, 即 ξ 在 $(x_0, +\infty)$ 内单调增加.



- 高等数学 第七版 上册 同济大学数学系
- 高等数学 第七版 下册 同济大学数学系
- 高等数学附册 学习辅导与习题选解 同济·第七版 同济大学数学系
- 高等数学习题全解指南 上册 同济·第七版 同济大学数学系
- 高等数学习题全解指南 下册 同济·第七版 同济大学数学系
- 工程数学——线性代数 第六版 同济大学数学系
- 线性代数附册 学习辅导与习题全解 同济·第六版 同济大学数学系
- 工程数学——概率统计简明教程 第二版 同济大学数学系
- 概率统计简明教程附册 学习辅导与习题全解 第二版 同济大学数学系
- 工程数学——新编统计学 同济大学数学系



ISBN 978-7-04-039691-1

9 787040 396911 >

定价 36.70 元